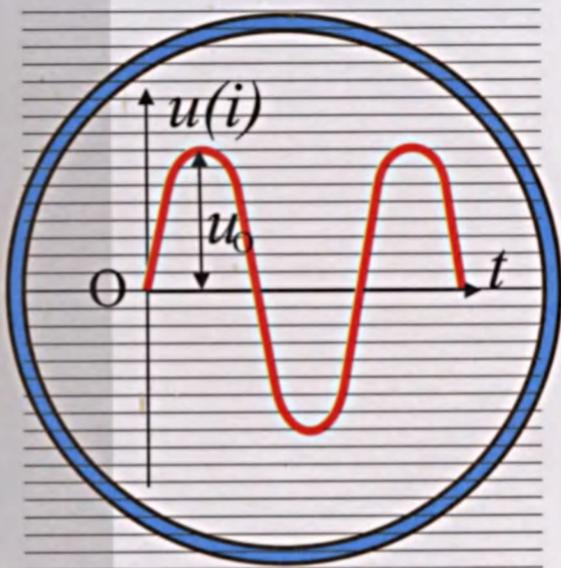
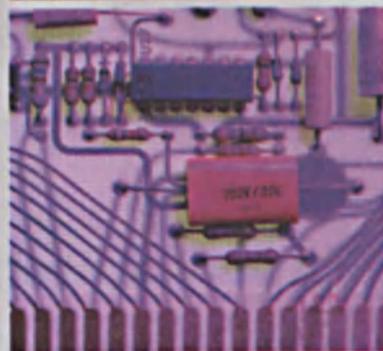




Е.М.Гершензон  
Н.Н.Малов  
А.Н.Мансуров

# ЭЛЕКТРОДИНАМИКА



*ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ*

---

Е. М. ГЕРШЕНЗОН, Н. Н. МАЛОВ, А. Н. МАНСУРОВ

# ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

*Рекомендовано*

*Учебно-методическим объединением по специальностям  
педагогического образования в качестве учебного пособия для студентов  
педагогических вузов по специальности 032200 – Физика*

Москва  
  
2002

УДК 537.8(075.8)

ББК 22.313я73

Г 37

Рецензенты:

доктор педагогических наук, академик РАО *Ю. И. Дик*;  
кафедра физики МГОПУ (зав. кафедрой доктор физико-математических наук,  
профессор *Л. Ф. Уткина*)

**Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н.**

Г 37      **Электродинамика: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб.  
заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2002. – 352 с.**

**ISBN 5-7695-0746-2**

Изложены вопросы электростатики и постоянного электрического тока, объяснены природа электропроводимости, явления электромагнетизма и электромагнитной индукции, теория Максвелла, переменного тока и электромагнитных волн, магнитные свойства вещей.

УДК 537.8(075.8)

ББК 22.313я73

**ISBN 5-7695-0746-2**

© Гершензон Е.М., Малов Н.Н., Мансуров А.Н., 2002  
© Издательский центр «Академия», 2002

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В «Электродинамике», учебном пособии по курсу общей и экспериментальной физики для педагогических вузов, рассматриваются электромагнитные поля и их взаимодействие с веществом.

Представление об электромагнитном поле формируется постепенно. Сначала рассматривается электростатическое поле в вакууме, проводниках и диэлектриках. Затем изучается электрическое поле постоянного тока, магнитное поле постоянного тока в вакууме и магнетиках. После рассмотрения электродинамических явлений вводится понятие электромагнитного поля как совокупности электрического и магнитного полей, изменяющихся со временем в пространстве. Математическим выражением законов электромагнитного поля являются уравнения Максвелла, записанные в интегральной и дифференциальной формах.

Отличительной особенностью пособия является частое обращение по ходу изложения учебного материала к экспериментальному обоснованию теории электромагнитного поля, описание сравнительно большого числа лекционных демонстраций, что имеет немаловажное значение при подготовке будущих учителей физики.

Содержание пособия соответствует программе по курсу «Общей и экспериментальной физики», базовой учебной дисциплины федерального компонента образовательной программы подготовки учителя физики.

Используемый в пособии математический аппарат соответствует программе по математике для педагогических вузов.

## ВВЕДЕНИЕ

Электродинамика – это раздел физики, в котором изучаются свойства электромагнитных полей и их взаимодействие с веществом. Электродинамика в отличие от механики сравнительно молодой раздел физики. Основные уравнения электродинамики были сформулированы Максвеллом во второй половине XIX в. Именно тогда было понято, что уравнения электродинамики объединяют, подобно уравнениям Ньютона, огромный круг физических явлений, включающий электрические, магнитные и оптические явления. Область интересов электродинамики – это не только свойства переменных электромагнитных полей, проявлением которых служат электромагнитные волны, но и любые электрические и магнитные поля и разнообразные формы их взаимодействия с веществом. Изучение взаимодействия полей с веществом особенно важно, так как дает в руки исследователей мощный инструмент для изучения свойств самих полей.

Прежде чем начать систематическое изложение электродинамики, сообщим краткие исторические сведения о ее развитии.

Первоначальные сведения о магнитных и электрических явлениях были получены в Древней Греции (Фалес Милетский, VI в. до н. э.) и Древнем Китае.

Первый трактат по магнетизму принадлежит итальянскому ученому П. Перегрино (1269). В 1600 г. придворный врач английской королевы У. Гильберт в книге «О магнитах» описал основные свойства магнитов и наэлектризованных тел. Одну из первых попыток создания теории электрических явлений предпринял Б. Франклин (1750). Ф. А. Эпинус в 1759 г. объяснял магнитные и электрические взаимодействия, используя представления о дальнодействии.

Первый количественный закон электростатики был экспериментально установлен Ш. Кулоном в 1785 г. Через год Л. Гальвани открыл явление электрического тока, в 1799 г. А. Вольта создал первый устойчивый источник ЭДС. В 1802 г. В. В. Петров осуществил дуговой разряд – мощный источник света и тепла.

В 1820 г. Х. Эрстед обнаружил взаимодействие электрического тока с магнитом. В том же году Ж. Био, Ф. Савар и П. Лаплас открыли закон, определяющий силу, действующую на магнитный полюс со стороны электрического тока. В это же время А. Ампер исследует взаимодействие токов и дает метод расчета этого явления.

В 1826 г. Г. Ом экспериментально устанавливает закон, связывающий напряжение и силу тока в металлическом проводе, а затем обосновывает его теоретически.

В 1831 г. М. Фарадей открывает явление электромагнитной индукции, которое легло в основу всей практической электротехники и радиотехники. В 1833 г. он находит эмпирический закон электролиза, послуживший впоследствии основанием для утверждения о дискретности электрического заряда. В 1845 г. Фарадей обнаруживает поворот плоскости поляризации световых колебаний при прохождении света через вещество, находящееся в магнитном поле, что указывает на связь между светом и электричеством. Он же в 30–50-х годах впервые ввел понятие электрического и магнитного полей и сформулировал идею близкодействия.

В 1841–1842 гг. Э. Х. Ленц и Дж. Джоуль устанавливают закон теплового действия тока. В 1845 г. Г. Кирхгоф формулирует законы для разветвленных цепей электрического тока. На базе работ Фарадея развивается электротехника сильных токов, создаются генераторы и двигатели как постоянного, так и переменного тока, появляются трансформаторы, позволяющие обеспечить передачу электроэнергии на большие расстояния.

Фундаментальные исследования в области электричества и магнетизма стимулировали техническое применение электромагнитных устройств.

В 1832 г. Шиллинг сконструировал первый действующий телеграф на основе взаимодействия магнитной стрелки с током. В 1837 г. Морзе изобрел телеграфный аппарат и знаменитую азбуку, названную его именем; в 1844 г. между Вашингтоном и Балтимором была открыта первая телеграфная линия с аппаратами Морзе.

В 1839 г. Б. С. Якоби сконструировал первый электрический двигатель. В 1866 г. Уальд построил первую динамо-машину с независимым возбуждением. В 1868 г. Грамм создал первую динамо-машину постоянного тока. В 1873 г. А. Н. Лодыгиным была изобретена первая лампа накаливания.

В 1877 г. П. Н. Яблочков сконструировал первый трансформатор для питания своих ламп электрического освещения (свечи Яблочкова). И. Ф. Усагин в 1882 г. создает усовершенствованный вариант трансформатора. М. О. Доливо-Добровольский изобретает в 1880 г. трехфазную систему переменного тока, асинхронный двигатель, осуществляет передачу электрической энергии с помощью трехфазного тока на большие расстояния.

В 1853 г. Кельвин (У. Томсон) получает низкочастотные электромагнитные колебания и создает их теорию.

В 1860–1865 гг. Дж. Максвелл, обобщив весь накопленный научный материал, создает теорию электромагнитного поля, предсказывает существование электромагнитных волн; утверждает, что

свет обладает электромагнитной природой (1865), и вычисляет световое давление (1873).

В 1887–1888 гг. Г.Р.Герц получает на опыте длинные электромагнитные волны, а П.Н.Лебедев измеряет световое давление на твердые тела и газы (1899, 1907), подтверждая расчеты Максвелла.

В 1895 г. А.С.Попов изобретает радиотелеграфию. Экспериментальное открытие электромагнитных волн явилось подлинным триумфом теории Максвелла.

В последующие годы были получены электромагнитные волны различных диапазонов. В 1895 г. П.Н.Лебедев получил электромагнитные волны с длиной волны, равной 6 мм. В 1922 г. А.А.Глаголева-Аркадьева получила радиоволны в диапазоне длин волн от 82 мкм до десятков миллиметров. В 1895 г. К.Рентген открыл электромагнитное излучение с длиной волны порядка  $10^{-10}$  м, в 1899 г. было открыто гамма-излучение с длиной волны порядка  $10^{-14}$  м.

В конце XIX – начале XX в. Х.Лоренц применил уравнения Максвелла для описания свойств вещества, представляя его в виде совокупности положительно и отрицательно заряженных частиц, движущихся в эфире. Именно в эти годы, после работ Фарадея, Перрена, Томсона, стало ясно, что электрический заряд имеет дискретную структуру и он кратен элементарному заряду. В 1897 г. Томсон открыл элементарную частицу – носитель отрицательного элементарного электрического заряда. По предложению Дж. Стонея, высказанному им в 1891 г., частицу стали называть электроном. В 1911 г. Р.Милликен измеряет заряд электрона, доказывая тем самым дискретность заряда. В 1910–1915 гг. выясняется, что электроны входят в состав всех атомов, а ядра последних содержат протоны – частицы с элементарным положительным зарядом, более массивные, чем электрон, примерно в 1840 раз. Позже обнаруживаются и другие элементарные заряженные частицы.

Открытие явления внешнего фотоэффекта (Г.Герц, 1887) и его законов (А.Г.Столетов, Ленард, 1888–1889; А.Эйнштейн, 1905), а также испускание электронов накалившимся металлом (Т.Эдисон, 1883) позволили создать вакуумную электронную лампу (диод, Дж.Флеминг, 1904; триод, Ли де Форест, 1907) и разработать методы радиотелеграфии (Г.Маркони, Ф.Браун, 1900–1909).

После создания электронной лампы и изобретения лампового генератора электромагнитных колебаний идет активное техническое освоение различных диапазонов электромагнитных колебаний и волн в интересах связи, телевидения и радиолокации. Создаются клистроны и магнетроны, мазеры и лазеры, позволившие получать электромагнитные колебания и волны в широком диапазоне длин волн: от метровых до волн видимого и ультрафиолетового излучения.

В 30–40-х годах XX в. зарождается новая научная дисциплина – радиоп физика, изучающая свойства электромагнитных колебаний и волн радиодиапазона и их применение в научных исследованиях. В дальнейшем радиоп физические методы исследования стали применяться во всем диапазоне электромагнитных волн. Радиоп физические методы исследования существенно способствовали развитию астрономии (радиоп астрономия), оптики (голография, волоконная оптика, интегральная оптика), спектроскопии (радиоспектроскопия).

В 40–50-х годах интенсивно развивается антенная техника, волноводная и коаксиальная техника передачи радиоволн, что определялось практической потребностью в развитии систем связи и радиолокации.

В 20–30-х годах XX в. начиналось изучение физических свойств полупроводников, в 1922 г. О. В. Лосев создает первый радиоприемник с полупроводниковым детектором (кристадин), в 1948 г. изобретается транзистор (Д. Бардин, У. Браттейн, У. Шокли). В 1962 г. создаются полупроводниковые гетероструктуры (Ж. И. Алферов), сыгравшие большую роль в разработке полупроводниковых лазеров и интегральных схем. Практическое освоение полупроводников позволило создать современную электронику, качественное телевидение и электронные вычислительные машины, открыло невиданные возможности для развития различных отраслей промышленности.

В 1911 г. было обнаружено явление сверхпроводимости (Г. Камерлинг-Оннес), открывшее принципиально новые возможности для создания высокоэффективных линий передач электрической энергии, новых видов транспорта, устройств обработки информации. Теория сверхпроводимости была разработана на основании квантовых представлений о поведении электронов внутри металлов (Д. Бардин, Л. Купер, Д. Шриффер, Н. Н. Боголюбов). В 1986 г. было открыто явление высокотемпературной сверхпроводимости (К. Мюллер, Д. Беднорц), позволяющее использовать сверхпроводящие материалы при температурах порядка 100 К.

Создание многочисленных технических устройств, принцип действия которых основан на законах электродинамики, демонстрирует эффективность фундаментальных научных исследований. В то же время неудачные попытки использовать законы электродинамики для описания атомных или ядерных процессов показали ограниченность области их применения. Изучение основных электродинамических закономерностей, установление границ их применимости – основная задача электродинамики как раздела курса общей и экспериментальной физики.

## Глава 1

# ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

### 1.1. Электризация тел. Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда

Электромагнитное поле и электрически заряженные частицы вещества обладают свойствами, не сводимыми к механическим, и требуют специального подхода. С современной точки зрения электрический заряд – это характеристика элементарной частицы, определяющая ее электромагнитные взаимодействия (подобно массе, определяющей гравитационные взаимодействия). Заряд может быть равен нулю (например, у «атомов света» – фотонов) или  $\pm ne$ , где  $e$  – элементарный заряд,  $n$  – целое число. Таким образом, всякий макроскопический заряд равен алгебраической сумме элементарных зарядов (в этом состоит свойство аддитивности заряда).

Из этого следует, что при строгих формулировках нужно говорить о заряженной частице (или заряженной материальной точке, если допустима такая идеализация), но обычно говорят просто о зарядах (в частности, точечных). Такая терминология принята и в данной книге.

Мы начнем изучение электромагнитного поля с простого частного случая – электростатического поля, связанного с неподвижными электрическими зарядами. Характеристики этого поля и значения зарядов с течением времени не изменяются.

Макроскопические тела, гравитационное притяжение которых практически незаметно (малые массы), при некоторых воздействиях на них обнаруживают заметное взаимное притяжение или отталкивание. Так, при трении некоторых тел друг о друга (точнее, при их соприкосновении, так как трение лишь увеличивает число соприкасающихся элементов поверхности) оба тела, например стекло и кожа, начинают притягиваться друг к другу, или, как называют это свойство, электризуются. При этом электризация стекла является (по определению, имеющему чисто условный характер) положительной, а кожи – отрицательной. Если же, например, эбонит тереть о шерсть, то он электризуется отрицательно, а

шерсть – положительно. Тела, сохраняющие электризацию только в местах соприкосновения, как известно из курса средней школы, являются *диэлектриками* (изоляторами). Если же электризация распространяется по всей поверхности тела, то его называют *проводником*. Для опытов с заряженными проводниками их снабжают изолирующими держателями или ставят на изолирующую подставку.

Проводниками служат все металлы (в твердом и жидком состоянии), водные растворы неорганических солей и кислот, сильно нагретые газы. Диэлектриками – такие твердые тела, как эбонит, янтарь, фарфор, пластмассы; органические жидкости; газы при комнатной и более низких температурах.

Идеальным диэлектриком является вакуум, т.е. область пространства, не содержащая частиц вещества (но в ней могут быть физические поля).

Под влиянием различных факторов электрические свойства тела могут изменяться, например при освещении или нагревании газ становится проводником. Есть и такие вещества, у которых в зависимости от внешних условий (температуры, освещения, примесей и т.д.) проводимость изменяется в очень широких пределах, практически в интервале значений, характерных для диэлектрических и проводящих тел. Их называют *полупроводниками*.

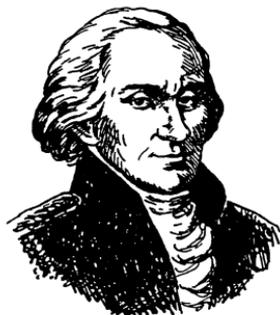
Процесс электризации заключается в перераспределении зарядов, имеющихся в телах, в результате этого телá приобретают заряды противоположных знаков. Опыт показывает, что при электризации заряды не порождаются, а лишь разделяются и перераспределяются между физическими телами. Например, при электризации трением перераспределяются электроны – элементарные отрицательные заряды. Проявляющиеся при этом силовые взаимодействия объясняются тем, что каждое из тел оказывается в электростатическом поле, создаваемом другим наэлектризованным телом. Можно утверждать, что и при соприкосновении двух разноименно заряженных проводников, когда внешнее проявление зарядов полностью или частично исчезает, мы имеем дело не с уничтожением зарядов, но с таким перераспределением, при котором они не создают заметных внешних эффектов. Так как заряды не создаются, а лишь перераспределяются, то в замкнутых системах всегда выполняется *закон сохранения электрических зарядов: алгебраическая сумма электрических зарядов в замкнутой системе постоянна*.

Под *замкнутой системой* при этом понимается такая изолированная система, через границы которой не проникает никакое вещество, но гравитационное или электромагнитное поле (например, свет, т.е. переменное во времени и пространстве электромагнитное поле) может проникать через эти границы.

## 1.2. Закон Кулона. Электростатическое поле в вакууме. Вектор напряженности. Поле диполя

Хотя простейшие проявления электростатического взаимодействия известны с глубокой древности, их первое количественное исследование было выполнено Ш. Кулоном только в 1785 г. Для измерения сил отталкивания между одноименно заряженными телами Кулон использовал сконструированные им крутильные весы; при этом он опирался на гениально простую догадку: при соприкосновении заряженного проводящего шарика с таким же незаряженным заряд между ними распределится поровну. Таким образом, можно было изменять заряд в 2, 4 и т. д. раз. Кроме того, Кулон допустил, что шарики взаимодействуют так, как если бы их заряды находились в центрах шаров, что позволило ему сформулировать закон взаимодействия точечных зарядов (такая же идеализация была применена Ньютоном при изучении сил тяготения).

Для измерения сил притяжения тел, заряженных противоположными по знаку зарядами, крутильные весы были неудобны, так как при колебаниях коромысла весов заряженные шарики соприкасались друг с другом. Поэтому Кулон применил другой способ: на некотором расстоянии от большого металлического заряженного шара, поставленного на изолирующую подставку, находился (в плоскости шарового экватора) небольшой крутильный маятник, представлявший собой изолирующий стержень; на его конце, обращенном к шару, находился маленький диск из позолоченной бумаги, на противоположном конце – противовес. Маятник был подвешен на очень короткой тончайшей нити, что позволило Кулону пренебречь ее упругостью. Маятник мог поворачиваться в горизонтальной плоскости. Шар и диск заряжались противоположными по знаку зарядами и измерялся период собственных колебаний маятника, выведенного из положения равновесия. Легко показать, что квадрат периода пропорционален силе электростатического взаимодействия маятника и шара. Меняя расстояние между шаром и диском, Кулон мог установить зависимость силы от расстояния (при



---

**Кулон Шарль Огюстен (1736–1806)**, французский военный инженер и физик. В 1785 г. экспериментально установил закон взаимодействия точечных электрических зарядов. Изучал различные виды трения и сформулировал закон сухого трения. Установил закон упругого кручения тонких нитей; изучал взаимодействие постоянных магнитов.

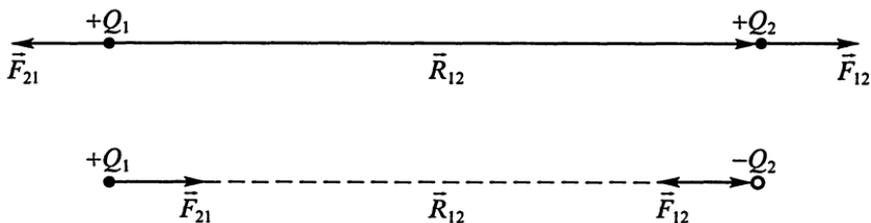


Рис. 1.1

заданных зарядах) или же зависимость ее от заряда, изменявшегося указанным выше способом (прикосновением к одному из взаимодействующих тел тела таких же размеров).

В результате этих исследований Кулон установил закон, носящий ныне его имя: **два точечных заряда  $Q_1$  и  $Q_2$ , находящиеся в вакууме на расстоянии  $R_{12}$  друг от друга (рис. 1.1), взаимодействуют с силами, равными**

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}^3}. \quad (1.1)$$

На рисунке 1.1 (и дальше на других рисунках) точечные положительные заряды изображены черными кружками, отрицательные – белыми.

В уравнение (1.1) значения зарядов входят с их знаками; разноименные заряды притягиваются, одноименные – отталкиваются.

*Точечным зарядом* называют материальную точку, которой, кроме массы  $m$ , приписывается заряд  $Q$ .

В СИ единицей заряда является **кулон (Кл)**; это производная единица; с основной единицей – единицей силы тока, **ампером (А)**, – кулон связан соотношением

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}.$$

Такой выбор единиц объясняется тем, что на опыте токи измеряются гораздо точнее, чем заряды.

Таким образом, 1 Кл есть заряд, протекающий за 1 с через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А.

1 Кл – очень большая единица заряда; электростатика обычно имеет дело с зарядами в миллионы раз меньшими. Позже мы увидим, что наименьший (элементарный) электрический заряд – модуль заряда электрона – равен

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

В опытах Кулона с крутильными весами заряд шариков составлял несколько миллиардных долей кулона, т.е. измерялся миллиардами элементарных зарядов. В опытах с зарядами противопо-

ложных знаков можно было определить произведение этих зарядов. Оно составляло по модулю около  $10^{-6}$  Кл<sup>2</sup>.

Как видно из этих данных, число электронов в обоих опытах было очень большим. Малость элементарного заряда позволяет при расчетах считать заряд наэлектризованных тел изменяющимся непрерывно (такое же допущение мы делали для массы, хотя прекрасно знали, что она изменяется дискретно).

Величина  $\epsilon_0$  называется *электрической постоянной вакуума*. Она равна

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 \cdot \text{Н}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}. \quad (1.2)$$

В § 2.4 мы получим для наименования  $\epsilon_0$  гораздо более простое выражение, чем приведенное здесь.

Электризация макроскопических тел (проводников) вызывает перераспределение электронов. Об этом следует помнить, хотя при формальном описании это не всегда подчеркивается.

Фарадей впервые высказал идею о том, что электрические заряды всегда связаны с электрическим полем, непрерывно распределенным по всему пространству, окружающему заряженные частицы или тела. Электростатическое (не зависящее от времени) поле одного заряда проявляется в его силовом действии на другой заряд, помещенный в какую-либо точку поля. Следует подчеркнуть, что поле – особый вид материи, отличный от вещества, – существует независимо от присутствия другого заряда. В свою очередь второй заряд своим полем действует на первый. Представление о полях, связанных с зарядами, лежит в основе теории близкодействия. При этом весьма важно следующее: если один из зарядов изменится (или сместится), то изменение силы, испытываемой вторым зарядом, наступит не мгновенно, а с некоторым запаздыванием, так как взаимодействие передается с конечной скоростью. Следствия из теории близкодействия подробно рассматриваются в главах 10, 11, 13.

В законе Кулона (1.1) конечная скорость передачи взаимодействий явно не отражена.

Перейдем теперь к установлению свойств и характеристик электростатического поля.

Разделив силу, испытываемую зарядом  $Q_2$ , помещенным в точке  $A$ , на его значение (с учетом знака заряда), мы, как и в учении о гравитации, получим векторную характеристику поля, связанного с зарядом  $Q_1$ , в точке  $A$ :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{12}}{Q_2}.$$

Эта величина называется *напряженностью электростатического поля* в вакууме. Направление вектора  $\vec{E}$  совпадает (по определению) с направлением силы, действующей на *положительный* заряд.

Графически электростатическое поле можно изобразить при помощи линий вектора напряженности, подобно тому как мы это делали в случае поля тяготения.

Существенное различие обоих полей заключается в том, что линии напряженности поля тяготения всегда направлены к телам, связанным с этими полями, а линии напряженности электрического поля могут быть направлены как к зарядам (отрицательным), так и от зарядов (положительных). Кроме того, сила, действующая в электростатическом поле на отрицательный заряд, противоположна напряженности.

Линии напряженности поля, созданного двумя равными по модулю разноименными точечными зарядами, расположенными на оси  $X$ , показаны на рисунке 1.2; линии напряженности поля двух

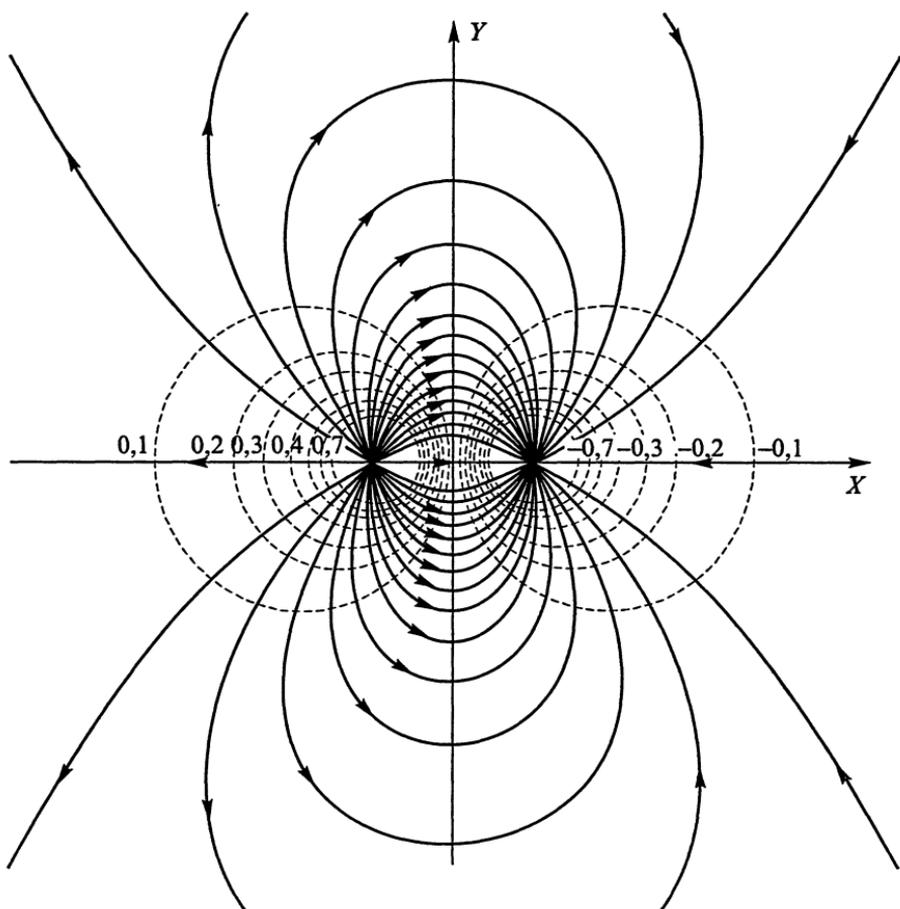


Рис. 1.2

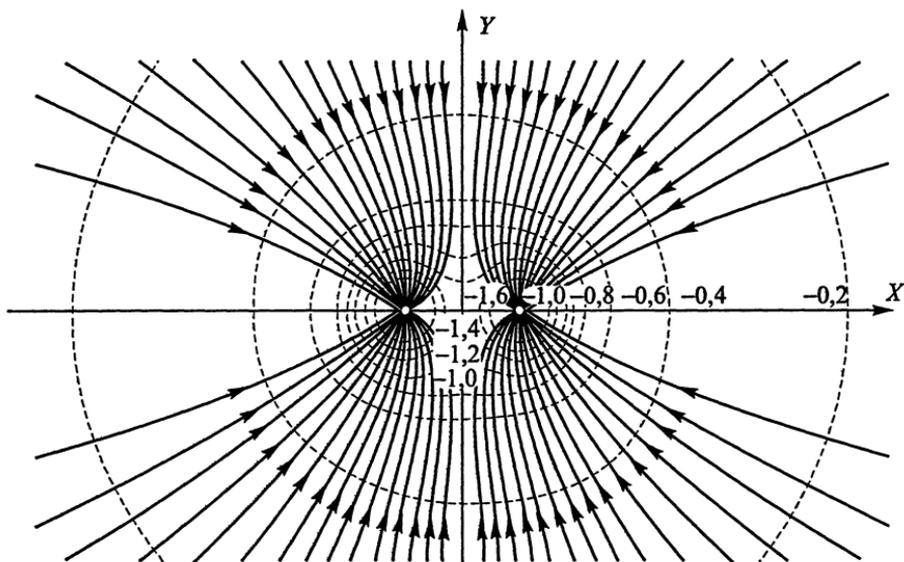


Рис. 1.3

равных одноименных (отрицательных) точечных зарядов представлены на рисунке 1.3.

Пространственная картина поля получится при вращении рисунков вокруг осей абсцисс. О значении пунктирных кривых будет сказано в § 1.6.

Следует особо подчеркнуть, что эти картины определяют действие, испытываемое в поле данных зарядов третьим положительным (пробным) зарядом, но не взаимодействие основных зарядов.

В поле, связанном с уединенным точечным зарядом  $Q$ , напряженность поля равна

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3}. \quad (1.3)$$

Кулоновские силы и напряженности подчиняются *принципу суперпозиции*: напряженность поля, связанного с системой зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, связанных с отдельными зарядами.

Используем принцип суперпозиции для расчета поля диполя – системы двух равных по модулю и противоположных по знаку зарядов  $\pm Q$ , расположенных на расстоянии  $h$  друг от друга.

Для характеристики диполя вводят понятие *электрического момента диполя*

$$\vec{p} = Q\vec{h}, \quad (1.4)$$

здесь  $Q$  – модуль зарядов, образующих диполь,  $\vec{h}$  – вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному, по модулю равный  $h$ .

По определению, электрический момент диполя – вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному.

Для точек, расположенных на оси диполя (рис. 1.4, а), при условии, что  $R \gg h$ , получаем:

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{\left(R - \frac{h}{2}\right)^2} - \frac{Q}{\left(R + \frac{h}{2}\right)^2} \right] \vec{h} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q\vec{h}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{R^3}.$$

Для точек, расположенных на перпендикуляре к оси диполя, проходящем посередине между зарядами диполя, находим модуль вектора напряженности:

$$E_{\perp} = 2E_1 \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{R_1^2} \frac{h}{2R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1^3} p,$$

где  $R_1$  – расстояние от заряда до точки  $B$ .

Из чертежа видно, что в векторной форме получается:

$$\vec{E}_{\perp} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R_1^3}.$$

Для нахождения напряженности в произвольном направлении, характеризуемом углом  $\alpha$  (при  $R \gg h$ , рис. 1.4, б), опустим перпендикуляр из положительного конца диполя на выбранное направление

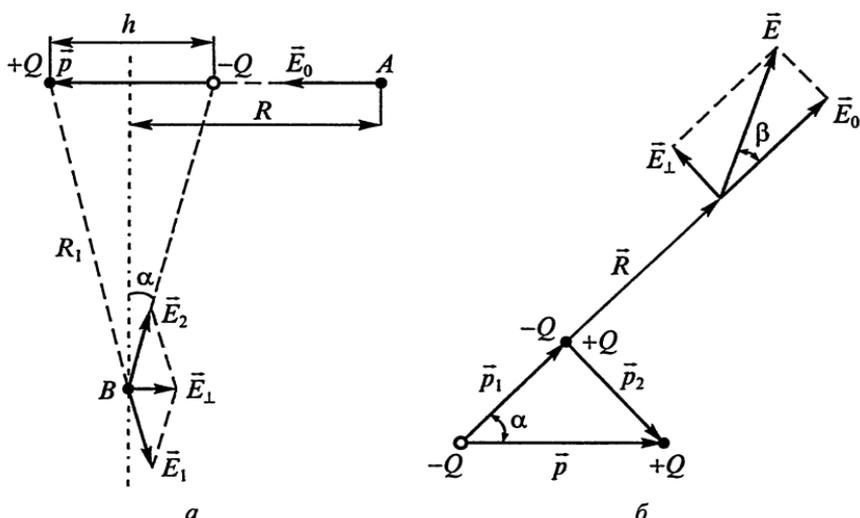


Рис. 1.4

ление и в точке его пересечения с вектором  $\vec{R}$  поместим два заряда ( $Q$  и  $-Q$ ). Тогда диполь можно заменить двумя диполями с моментами  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ , причем

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2; \quad p_1 = p \cos \alpha; \quad p_2 = p \sin \alpha.$$

Пользуясь найденными выше выражениями, получаем:

$$\vec{E} = \left( 2p \cos \alpha \frac{\vec{R}}{R} - p \sin \alpha \frac{\vec{p}_2}{p_2} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Поэтому модуль напряженности равен

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} \sqrt{4\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{R^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}, \quad (1.5)$$

а угол  $\beta$  между  $\vec{E}$  и  $\vec{R}$  определяется выражением:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Линии напряженности поля диполя, имеющего момент  $\vec{p}$ , направленный по горизонтали влево, схематически показаны на рисунке 1.2. Итак, напряженность поля, созданного диполем, меняется обратно пропорционально кубу расстояния.

Рассматривая взаимодействие двух диполей, расположенных вдоль одной прямой на достаточно большом расстоянии друг от друга, можно найти, что сила взаимодействия их обратно пропорциональна четвертой степени расстояния.

Напряженность поля, созданного электрическим квадруполем (рис. 1.5), в достаточно удаленных точках обратно пропорциональна четвертой степени расстояния, а сила взаимодействия удаленных квадруполей обратно пропорциональна пятой степени расстояния.

При увеличении числа диполей, образующих симметричную систему (при этом они расположены в пространстве так, что положительный заряд окружен отрицательными), напряженность внешнего поля системы (мультиполя) убывает с расстоянием тем быстрее, чем больше диполей входит в систему.

Именно поэтому многие симметричные молекулы не создают заметного электрического поля уже на расстояниях, сравнимых с их размерами. Несимметричные же молекулы (например, мо-

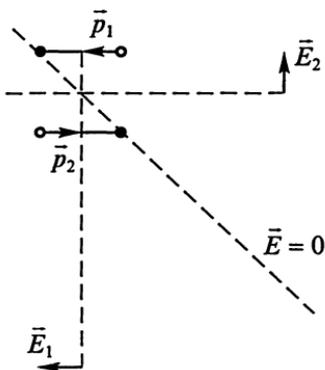


Рис. 1.5

лекулы воды) обладают заметным электрическим моментом; напряженность поля, связанного с молекулярным диполем, имеет заметное значение на значительном расстоянии от диполя.

В заключение подчеркнем, что напряженность является силовой характеристикой точек электростатического поля, существующего в пространстве и времени независимо от того, помещаем мы в данную точку поля какой-либо заряд или нет. Реальность существования поля проявится особенно отчетливо, когда мы займемся изучением переменных электромагнитных полей.

### 1.3. Теорема Остроградского – Гаусса в электростатике и ее применение для расчета полей в вакууме

Используя принцип суперпозиции электростатических полей и закон Кулона, можно рассчитать напряженность поля любой системы зарядов в произвольной точке пространства, производя суммирование векторов напряженности полей, созданных отдельными зарядами в этой точке.

В общем случае расчет может быть достаточно сложным, но вычисления значительно упрощаются, если задача обладает пространственной симметрией. В этих случаях удобно воспользоваться *теоремой Остроградского – Гаусса* для потока вектора напряженности через некоторую замкнутую поверхность  $S$ , выбранную с учетом симметрии таким образом, чтобы напряженность поля в каждой точке поверхности была одинаковой по модулю и направлена по отношению к ее внешней нормали одинаковым образом.

Если, например, угол между вектором напряженности  $\vec{E}$  и нормалью  $\vec{n}$  равен нулю, то поток вектора напряженности  $\Phi$  через поверхность  $S$  равен произведению  $E$  на  $S$ :

$$\Phi = ES.$$

При известном потоке  $\Phi$  значение напряженности поля для любой точки поверхности определяется из отношения:

$$E = \frac{\Phi}{S}.$$

Для определения потока  $\Phi$  от произвольной совокупности зарядов достаточно вычислить поток, создаваемый одним точечным зарядом через замкнутую поверхность  $S$ . Рассмотрим точечный заряд  $Q$  внутри замкнутой поверхности  $S$ . Для определенности будем считать, что начало координат совпадает с местоположением заряда. Элементарный поток  $d\Phi$  вектора  $\vec{E}$  через площадку  $d\vec{S}$  равен  $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$ , где  $d\vec{S} = dS\vec{n}$  ( $\vec{n}$  – единичный вектор внешней

нормали). Поток вектора  $\vec{E}$  через поверхность  $S$  с учетом выражения (1.3) будет равен:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\int Q\vec{R} \cdot d\vec{S}}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (1.6)$$

Скалярное произведение  $\vec{R} \cdot d\vec{S}$  равно произведению модуля  $R$  на проекцию вектора  $d\vec{S}$  на направление  $\vec{R}$ . Обозначим эту проекцию через  $dS_R$ .

Тогда выражение (1.6) можно записать в виде:

$$\Phi = \int \frac{QdS_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (1.7)$$

Отношение  $dS_R$  к  $R^2$  равно телесному углу  $d\Omega$ , под которым элемент поверхности  $dS$  виден из начала координат (рис. 1.6). Это позволяет в выражении (1.7) произвести замену переменной интегрирования:

$$dS_R = R^2 d\Omega.$$

После замены переменной для (1.7) получим:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega,$$

так как интегрирование по замкнутой поверхности соответствует интегрированию по телесному углу в пределах от 0 до  $4\pi$  ср (рис. 1.7, а, б).

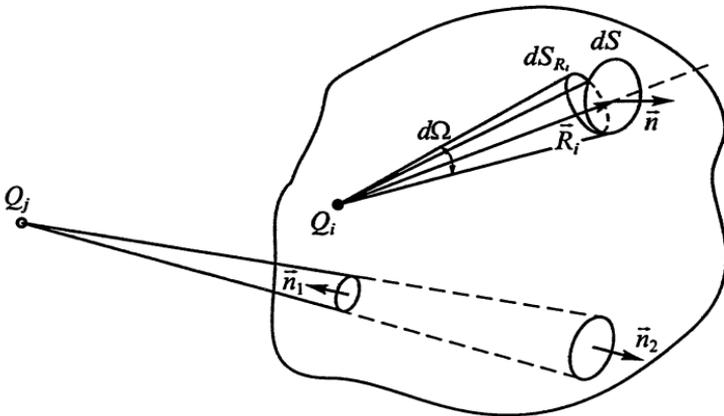


Рис. 1.6

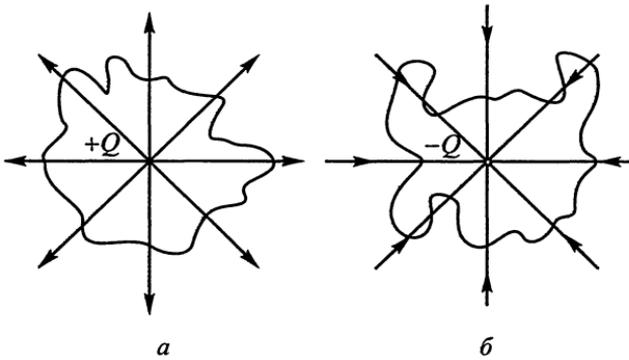


Рис. 1.7

После интегрирования получим:

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Если линия напряженности пересекает поверхность не один, а несколько раз (рис. 1.7, б), то суммарный поток от этого не изменится, так как пределы интегрирования не зависят от формы замкнутой поверхности, охватывающей заряд.

Для зарядов, расположенных вне поверхности, поток  $\Phi$  равен нулю, так как линии напряженности пересекают поверхность четное число раз. Из-за этого в выражение для потока войдут как отрицательные, так и положительные части интегральной суммы, по абсолютному значению в точности равные друг другу.

Полный поток  $\Phi$  вектора  $\vec{E}$  через замкнутую поверхность  $S$ , создаваемый произвольной совокупностью зарядов, находим, суммируя потоки  $\Phi_i$ , создаваемые зарядами  $Q_i$ , находящимися внутри поверхности. После суммирования получаем:

$$\Phi = \frac{\sum Q_i}{\epsilon_0}. \quad (1.8)$$

Итак, для электростатики теорема Остроградского – Гаусса формулируется следующим образом: **поток вектора  $\vec{E}$  через любую замкнутую поверхность равен отношению суммарного заряда, расположенного внутри поверхности, к электрической постоянной вакуума.**

Возможны три случая обращения в нуль потока вектора напряженности через замкнутую поверхность:

- алгебраическая сумма зарядов внутри поверхности равна нулю,  $E \neq 0$ ;
- зарядов внутри поверхности нет, но есть поле, связанное с внешними зарядами,  $E \neq 0$ ;
- нет ни поля, ни зарядов внутри поверхности.

Заряды могут быть распределены различным образом, причем они могут вноситься в рассматриваемое пространство, перемещаться в нем и изыматься из него, поэтому их называют свободными зарядами.

Возможны следующие случаи:

1. Заряды точечные, дискретные.

2. Заряд  $dQ$  непрерывно распределен в некотором малом объеме  $dV$ . В этом случае вводится понятие *объемной плотности* заряда

$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$

(выражается в кулонах на кубический метр).

3. Заряды непрерывно распределены по поверхности проводника. В этом случае вводится понятие *поверхностной плотности* заряда

$$\sigma = \frac{dQ}{dS},$$

где  $dS$  – площадь элемента поверхности проводника, на котором расположен элементарный заряд  $dQ$ . Единицей поверхностной плотности является 1 Кл/м<sup>2</sup>.

4. Заряды равномерно распределены вдоль линии. В этом случае вводится понятие *линейной плотности* заряда

$$\lambda = \frac{dQ}{dl},$$

где  $dl$  – длина отрезка линии, на котором распределен заряд  $dQ$ . Единица линейной плотности – 1 Кл/м.

Для нахождения напряженности электростатического поля у поверхности заряженного проводника воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса.

Вектор напряженности на поверхности заряженного проводника всегда перпендикулярен поверхности, так как в противном случае заряды двигались бы вдоль поверхности под действием касательной составляющей силы.

Внутри проводника равновесное (электростатическое) состояние возможно лишь при отсутствии там электростатического поля и свободных зарядов.

Итак, у поверхности проводника

$$\vec{E} = \vec{E}_n; \quad \vec{E}_t = 0, \quad (1.9)$$

а внутри сплошного проводника

$$\vec{E} = 0. \quad (1.10)$$

Если заряды распределены по объему диэлектрика с объемной плотностью  $\rho$ , то теорема Остроградского – Гаусса записывается в виде:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV,$$

где  $dV$  – элемент объема,  $V$  – объем, ограниченный поверхностью  $S$ .

Когда заряды распределены по поверхности проводника и поверхность интегрирования совпадает с последней, то

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma dS.$$

Отсюда следует важный результат: на поверхности проводника напряженность пропорциональна поверхностной плотности заряда:

$$E = |E_n| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.11)$$

Таким же закономерностям подчиняется поле заряженного металлического шара (во внешнем пространстве), так как заряд на шаре распределяется равномерно по поверхности (рис. 1.8). Для металлического шара радиусом  $R_0$  напряженность поля на поверхности равна

$$E_{\text{пов}} = \frac{Q}{4\pi R_0^2} \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

что соответствует уравнению (1.11).

Пусть внутри проводящего шара (или любого другого заряженного проводника) имеется полость, в которую заряды не вносились. Заряды, находящиеся на внешней поверхности шара, не создают поля внутри него; не может быть зарядов и на внутренней границе раздела полость – металл. Следовательно, электрическое поле внутри полости не может быть связано ни с какими зарядами. Значит, оно отсутствует:

$$\vec{E}_{\text{пол}} \equiv 0. \quad (1.12)$$

Заряды, расположенные на поверхности проводника (или диэлектрика), находятся в равновесии. Точнее, всегда имеют место небольшие беспорядочные перемещения зарядов, сопровождающиеся малыми беспорядочными изменениями плотности распределения зарядов (флуктуации). Но они очень малы (что будет доказано в «Молекулярной физике»), и с ними можно не считаться.

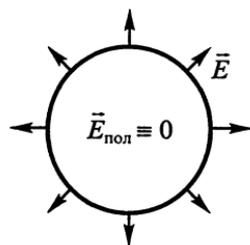


Рис. 1.8

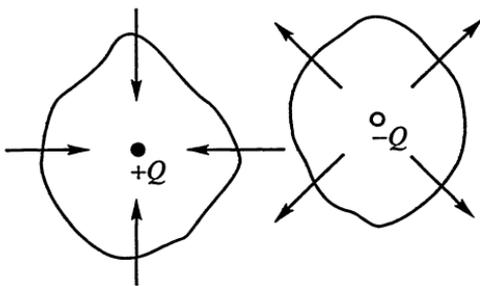


Рис. 1.9

В отличие от зарядов на поверхности проводника или диэлектрика существование системы свободно заряженных частиц, находящихся в устойчивом равновесии, невозможно. Это утверждение носит название *теоремы Ирншоу*. Докажем эту теорему от противного. Пусть точечный заряд, входящий в систему за-

рядов, находится в состоянии устойчивого равновесия; тогда линии напряженности внешнего поля в его окрестностях должны быть везде направлены к нему (в случае положительного заряда) или от него (для отрицательного), чтобы при любом возможном перемещении заряд возвращался в исходное положение (рис. 1.9).

Если заряд очень мал и не искажает поля других зарядов, то можно окружить его столь малой поверхностью, чтобы она не содержала других зарядов. Сместив теперь этот заряд из положения равновесия, мы получили бы картину, противоречащую теореме Остроградского – Гаусса, так как поток вектора  $E$  оказался бы отличным от нуля, хотя внутри поверхности нет никаких зарядов. Следовательно, требуемая конфигурация поля невозможна.

Легко построить систему дискретных зарядов, находящуюся в неустойчивом равновесии. Такая система показана на рисунке 1.10. Очевидно, при любом смещении любого заряда равновесие нарушится и система распадется.

Можно предположить, что при движении в электростатическом поле заряды могут оказаться в состоянии динамического равновесия. Так, электрон может обращаться вокруг положительного заряда, причем сила Кулона сообщает ему необходимое центростремительное ускорение (как сила тяготения при движении Луны вокруг Земли). Однако и это предположение ошибочно, так как ускоренно движущийся заряд должен излучать электромагнитные волны, а потому энергия системы не может оставаться постоянной (к этому вопросу мы вернемся в § 13.8).

Чтобы рассчитать напряженность поля, созданного длинной равномерно заряженной проволокой (цилиндром) радиусом  $R_0$  (рис. 1.11), применим теорему Остроградского – Гаусса. Выбрав поверхность интегрирования в виде коаксиального цилиндра радиусом  $R$  и высотой  $h$  и введя линейную плотность заряда

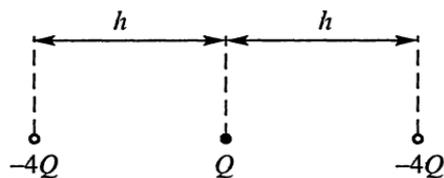


Рис. 1.10

$$\lambda = \frac{Q}{h},$$

убеждаемся, что в силу осевой симметрии напряженность на боковой поверхности цилиндра везде одинакова по модулю и направлена по радиусам, а поток напряженности через основания отсутствует. Поэтому

$$E \cdot 2\pi R h = \frac{h\lambda}{\epsilon_0}.$$

Откуда

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}. \quad (1.13)$$

Итак, в этом случае напряженность поля меняется обратно пропорционально первой степени расстояния. На поверхности проволоки снова получаем:

$$E_{\text{пов}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Найдем теперь напряженность поля безграничной плоской металлической пластины, лежащей в координатной плоскости  $XY$  (рис. 1.12). Пусть пластина равномерно заряжена. В качестве поверхности интегрирования выберем поверхность прямоугольного параллелепипеда, две грани которого (1 и 2) площадью  $S$  параллельны заряженной пластине. Поверхностная плотность заряда равна

$$\sigma = \frac{Q}{2S}$$

(здесь мы учли, что пластина имеет две стороны и заряд распределен по обеим сторонам пластины).

Вследствие симметрии поток вектора напряженности отличен от нуля лишь для граней 1 и 2, поэтому

$$2ES = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{2\sigma S}{\epsilon_0},$$

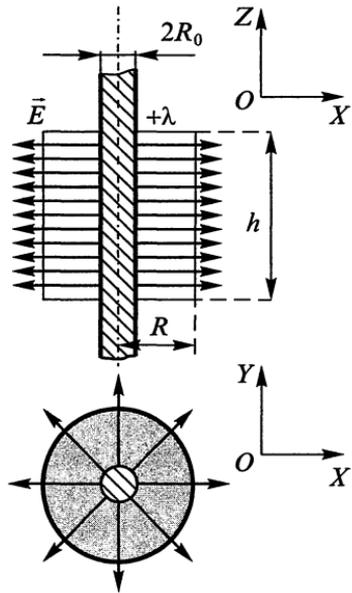


Рис. 1.11

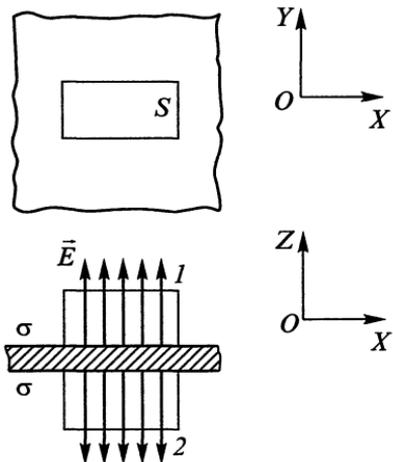


Рис. 1.12

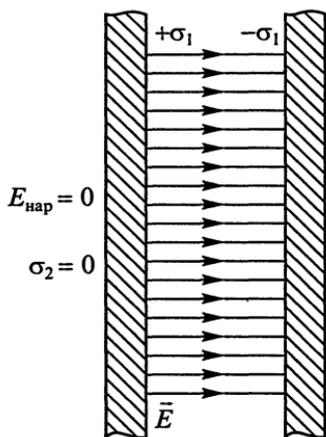


Рис. 1.13

откуда

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.14)$$

Если вообразить параллельные пластины, имеющие равные по модулю плотности заряда противоположных знаков, то, пользуясь принципом суперпозиции, получим:

а) для поля между пластинами:

$$E = \frac{2\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}; \quad \sigma_1 = 2\sigma; \quad (1.15)$$

б) для поля снаружи пластин:

$$E_{нар} = 0; \quad \sigma_2 = 0.$$

Это можно истолковать и как результат перераспределения зарядов: они собираются на обращенных друг к другу сторонах пластин (рис. 1.13) с поверхностной плотностью заряда

$$\sigma_1 = 2\sigma.$$

Напряженность, определяемая выражением (1.14), не зависит от расстояния и одинакова во всех точках. Такие поля называют *однородными*.

Конечно, реальных бесконечных проволок и пластин не бывает.

Полученные формулы сохраняют значение для областей, достаточно близких к заряженным телам (расстояние до исследуемой точки поля должно быть много меньше линейного размера заряженного тела).

Распределение линий напряженности можно получить на опыте, поместив электроды той или иной формы в жидкий диэлектрик (вазелиновое масло) и насыпав на поверхность масла мелкий диэлектрический порошок (хинин). Частицы порошка при этом располагаются примерно вдоль линий напряженности (причины этого будут выяснены в § 3.1).

#### 1.4. Дифференциальная форма теоремы Остроградского – Гаусса. Опыт Кавендиша

Мы применяли теорему Остроградского – Гаусса в интегральной форме (1.6), связывающей значения напряженности  $\vec{E}$  в некоторых точках поля с зарядами, расположенными в других точках. Но можно сформулировать теорему так, чтобы она связывала величины, относящиеся к одной и той же точке поля.

Пусть в некоторой точке  $A$  с координатами  $(x, y, z)$  существует напряженность

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z,$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты декартовой системы координат  $OXYZ$ . Построим около точки  $A$  (рис. 1.14) прямоугольный бесконечно малый параллелепипед объемом

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz.$$

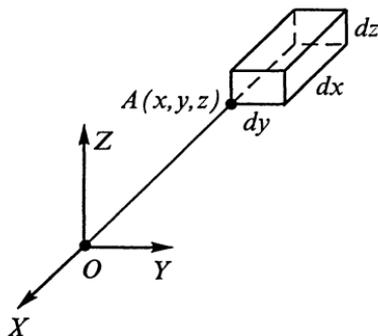


Рис. 1.14

Пусть объемная плотность заряда в нем равна  $\rho$ . Она зависит от координат выбранной точки поля:  $\rho = f(x, y, z)$ . Поток вектора  $\vec{E}$  через правую грань равен

$$(d\Phi_y)_{\text{пр}} = \left( E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy \right) dx dz,$$

а через левую

$$(d\Phi_y)_{\text{л}} = -E_y dx dz.$$

Поэтому поток вдоль оси  $Y$  равен

$$d\Phi_y = (d\Phi_y)_{\text{пр}} + (d\Phi_y)_{\text{л}} = \frac{\partial E_y}{\partial y} dV.$$

Таким же образом для верхней и нижней грани получим:

$$d\Phi_z = \frac{\partial E_z}{\partial z} dV,$$

а для задней и передней грани

$$d\Phi_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} dV.$$

Применяя теорему Остроградского – Гаусса, получаем:

$$dV \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} dV,$$

и окончательно:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

В векторном анализе сумма, стоящая слева, называется дивергенцией (расхождением) вектора  $\vec{E}$  и обозначается  $\text{div } \vec{E}$ . Итак,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.16)$$

Выражение (1.16) представляет собой теорему Остроградского – Гаусса для электростатического поля в дифференциальной форме.

У читателя может сложиться впечатление, что теорема Остроградского – Гаусса является следствием закона Кулона. Но в действительности эта теорема – одна из основных теорем векторного анализа, связывающая объемный интеграл с поверхностным. В физике она применяется к центральным силам, зависящим от расстояния по закону  $R^n$ , где  $n$  – любое число, в частности для кулоновских сил  $n = -2$ .

Интересно отметить, что за несколько лет до измерений Кулона английский физик Кавендиш поставил опыт для проверки закона обратных квадратов.

Он брал металлический шар и помещал его внутри шара большего размера, разрезанного на две части, которые можно было соединить вместе. В большом шаре имелось малое отверстие, куда пропускалась проволока, соединявшая внутренний шар с внутренней поверхностью большого шара. Затем большой шар электризовали от электрической машины; после этого отсоединяли от машины, вынимали проволоку, соединявшую шары, большой шар разделяли на части, которые удаляли. Наконец, проверяли, имеется ли заряд на малом шаре. Если бы поле заряда большого шара менялось по закону  $R^{-2+n}$ , то малый шар должен был бы сохранить часть заряда.

Опыт показал, что  $n < 0,01$ . Кавендиш не опубликовал своей работы. Его рукописи были найдены Максвеллом через сто лет. Максвелл опубликовал работу Кавендиша и повторил его опыты с более чувствительной аппаратурой. Он нашел, что  $n < 5 \cdot 10^{-5}$ . Опыты, проведенные в 1936 г., доказали, что  $n < 10^{-9}$ . Эти результаты и ряд теоретических соображений позволяют заключить, что закон обратных квадратов вполне точен.

## 1.5. Элементарный заряд. Опыт Милликена

Рассмотрим теперь частный, но важный вопрос о значении элементарного электрического заряда. При формулировке закона Кулона на значения зарядов не накладывается никаких ограничений. Более того, неявно допускается, что заряд может изменяться непрерывно. В действительности, однако, существует наименьший заряд, точное значение которого было найдено в начале XX в. американским физиком Р. Милликемом (1868–1953). Идея его классических опытов (1906–1915) весьма проста. В однородном поле напряженностью  $\vec{E}$ , линии которой вертикальны, падает мик-

роскопическая капля жидкости, несущая случайный заряд  $q$ . На каплю действуют следующие силы: сила тяжести  $\vec{F}_T = m\vec{g}$  и архимедова сила  $\vec{F}_a = m_1\vec{g}$  ( $m$  и  $m_1$  – соответственно массы капли и вытесненного ею воздуха); сила жидкого трения  $\vec{F}_{тр} = -r\vec{v}$  ( $\vec{v}$  – скорость капли,  $r$  – коэффициент трения); кулоновская сила  $\vec{F}_3 = q\vec{E}$ . При установившемся равномерном движении эти силы уравниваются. В скалярной форме условие равновесия сил запишется так:

$$(m - m_1)g + qE - rv = 0.$$

При изменении заряда капли на  $\Delta q$  (под действием, например, рентгеновских лучей) изменяется и скорость ее движения. Предыдущее уравнение заменяется таким:

$$(m - m_1)g + (q + \Delta q)E - r(v + \Delta v) = 0.$$

При этом массу капли можно считать неизменной. Из этих двух уравнений можно найти изменение заряда  $\Delta q$ . Осуществить эту простую идею было трудно, так как:

- а) плотность очень малых капель могла отличаться от макроскопической плотности;
- б) капли могли во время измерений испаряться;
- в) определение коэффициента трения для очень малых капель было сложной задачей.

В результате многочисленных измерений Милликен нашел, что изменение заряда всегда было кратным некоторой величине  $e$ :

$$\Delta q = ne \quad (n = 1, 2, 3), \quad (1.17)$$

где минимальный заряд  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Заряд  $-e$  присущ устойчивой элементарной частице – электрону, входящему в состав всех атомов. При определенных условиях может наблюдаться устойчивая элементарная частица – позитрон, имеющая такой же по значению положительный заряд. Кроме того, элементарный положительный заряд имеет протон – элементарная частица гораздо большей массы, входящая в состав ядер всех атомов.

В опытах Милликена полный заряд капли был обычно порядка  $10e$ . В отдельных случаях он достигал  $100e$ . В 1913 г. А. Ф. Иоффе (1880–1960), изучая особенности фотоэлектрического эффекта, воспользовался методом Милликена для определения элементарного заряда. Но чтобы уменьшить влияние испарения капель, он работал с каплями ртути и цинковыми пылинками. Его результаты совпали с результатами Милликена.

В большинстве реальных опытов с макроскопическими заряженными телами, имеющими заряд, на много порядков превышающий  $e$ , этот заряд можно считать непрерывно изменяющимся.

Заряд электрона не зависит от скорости его движения. Действительно, электроны в атомах движутся с большими скоростями. Если

бы заряд зависел от скорости, то атомы не были бы нейтральны. Однако весьма тонкие опыты показали, что, например, атомы водорода и гелия нейтральны – их суммарный заряд не превышает  $10^{-20}$  части элементарного заряда (такова возможная ошибка лучших опытов). Поэтому следует считать заряд не зависящим от скорости.

Была определена и масса покоящегося (вернее, медленно движущегося) электрона. Она оказалась равной  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг, что почти в 2000 раз меньше массы атома водорода.

Сравним ньютоновскую силу гравитационного взаимодействия двух электронов с силой их кулоновского взаимодействия в вакууме. Считая электрон точечным зарядом и задав расстояние между электронами, получаем:

$$F_n = G \frac{m_0^2}{R^2}; \quad F_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2}.$$

Отношение этих сил

$$\frac{F_k}{F_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_0^2} \approx 10^{42},$$

т.е. весьма велико. Поэтому часто говорят, что гравитационные взаимодействия гораздо слабее кулоновских. Но при образовании макроскопических тел, отдельные небольшие части которых могут иметь случайные заряды разных знаков или просто не иметь заряда, кулоновское взаимодействие растет незначительно, а гравитационное увеличивается пропорционально произведению масс двух макротел и может превышать кулоновское на много порядков. Например, при расчете движения небесных тел решающую роль играет именно гравитационное, а не кулоновское взаимодействие, хотя небесные тела и могут нести некоторый заряд.

Действительно, допустим, что Солнце несет заряд  $Q$ , а планета  $q_i$ . Их массы соответственно равны  $M$  и  $m_i$ . Условие движения планеты по окружности вокруг Солнца (радиус  $R_i$ , период  $T_i$ ) запишется так:

$$G \frac{M m_i}{R_i^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i Q}{R_i^2} = m_i \frac{4\pi^2}{T_i^2} R_i.$$

Отсюда получается:

$$GMm_i \left( 1 + \frac{q_i Q}{4\pi\epsilon_0 G m_i M} \right) = m_i \frac{4\pi^2}{T_i^2} R_i^3. \quad (1.18)$$

Но, согласно закону Кеплера, отношение  $R^3/T^2$  для всех планет одинаково. Поэтому в уравнении (1.18) второе слагаемое в скобках должно быть мало по сравнению с единицей – его влияние не ска-

зывается при астрономических наблюдениях. Допущение же постоянства отношения  $q/m$  представляется совершенно невероятным.

Следовательно, если планета и Солнце заряжены, то кулоновское взаимодействие исчезающе мало по сравнению с гравитационным. Это же, как правило, относится и к любым (специально не заряженным) макроскопическим телам.

## 1.6. Работа поля при перемещении заряда. Потенциал электростатического поля и его связь с напряженностью поля. Разность потенциалов

Продолжим изучение свойств электростатического поля, связанного с зарядами  $Q$ . Рассмотрим работу электростатических сил при перемещении частицы с зарядом  $q$  из одной точки поля в другую по произвольному пути  $1M2$  (рис. 1.15):

$$A = q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_1^2 E_l dl, \quad (1.19)$$

где  $E_l$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на направление  $d\vec{l}$ .

Как и в случае гравитационного поля, эта работа зависит только от положения начальной и конечной точек пути, но не от его формы, т.е. поле является *потенциальным*:

$$A_l = q \int_{1M2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_{1N2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = (\varphi_2 - \varphi_1)q = -Uq, \quad (1.20)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  – *потенциалы* начальной и конечной точек траектории, являющиеся скалярными характеристиками точек поля (1 и 2);  $\varphi_1 - \varphi_2 = U$  – *разность потенциалов*. Таким образом, работа электростатических сил пропорциональна разности потенциалов  $U$  начальной и конечной точек пути. Единицей потенциала и разности потенциалов служит **вольт (В)**:

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/Кл.}$$

Работа электростатических сил по любому замкнутому пути равна нулю:

$$A = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (1.21)$$

Напомним, что этот интеграл называется *циркуляцией век-*

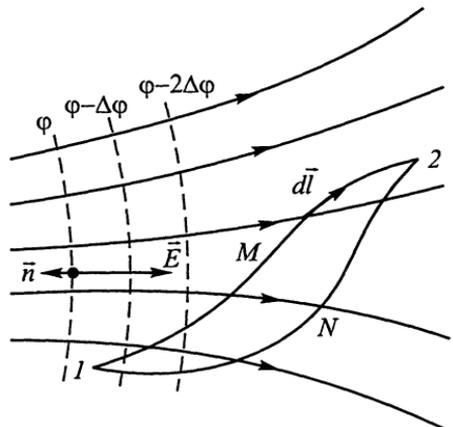


Рис. 1.15

тора напряженности  $\vec{E}$ . Равенство нулю циркуляции означает, что в электростатическом поле нет замкнутых линий напряженности: они начинаются и заканчиваются на зарядах (соответственно положительных или отрицательных) или уходят в бесконечность. Итак, электростатическое поле является *потенциальным* или *безвихревым*.

В электростатическом поле можно построить (см. рис. 1.15) поверхности, представляющие собой множество точек равного потенциала (*эквипотенциальные поверхности*). Пересечения эквипотенциальных поверхностей с плоскостью чертежа показаны пунктиром. Линии напряженности нормальны к этим поверхностям. Докажем это. Если перемещать заряд вдоль эквипотенциальной поверхности, то работа будет равна нулю. Но напряженность поля на поверхности может быть отлична от нуля. Поэтому из определения элементарной работы

$$dA = q\vec{E} \cdot d\vec{l} = qEdl \cos(\widehat{\vec{E}, d\vec{l}})$$

следует, что при  $\vec{E} \neq 0$ ,  $q \neq 0$  должно быть:

$$\cos(\widehat{\vec{E}, d\vec{l}}) = 0, \text{ т. е. } \vec{E} \perp d\vec{l},$$

причем вектор  $d\vec{l}$  направлен по касательной к эквипотенциальной поверхности. Следовательно, во всех точках поверхности равного потенциала напряженность  $\vec{E}$  направлена по нормали к этой поверхности. Отсюда, в частности, следует, что поверхность проводника в электростатическом поле всегда эквипотенциальна – мы видели это при расчете полей симметричных проводников при помощи теоремы Остроградского – Гаусса.

На рисунках 1.2 и 1.3 пунктирные кривые представляют собой сечения эквипотенциальных поверхностей плоскостью чертежа. Числа, стоящие около кривых, определяют значения потенциала (в относительных единицах); при этом потенциал бесконечно удаленных точек принят равным нулю.

Как и для гравитационного поля, напряженность электростатического поля связана с потенциалом соотношением

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn} \vec{n} = -\text{grad } \varphi = -\left( \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad (1.22)$$

где производная берется по нормали к эквипотенциальной поверхности, т. е. в направлении быстрого изменения потенциала. При этом положительная нормаль направлена в сторону увеличения потенциала, а вектор напряженности – в сторону его уменьшения (см. рис. 1.15). Из формулы (1.22) видно, что напряженность поля можно выражать в вольтах на метр.

В соответствии с принципом суперпозиции потенциалы, создаваемые в данной точке различными зарядами, складываются алгебраически.

Из (1.22) следует, что потенциал в каждой точке поля связан с напряженностью соотношением

$$\varphi = -\int \vec{E} \cdot \vec{n} dn + \text{const},$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали,

const – постоянная интегрирования. Это уравнение, как и уравнение (1.22), справедливо для любых электростатических полей.

Так как на практике разность потенциалов измерять гораздо легче, чем напряженность поля, то для описания поля потенциал применяется чаще, чем напряженность.

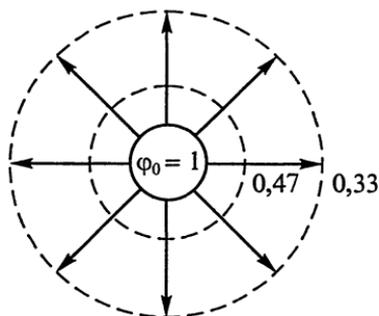


Рис. 1.16

## 1.7. Потенциалы некоторых полей

Найдем потенциалы некоторых электростатических полей.

1. *Поле точечного заряда.* Так как напряженность его известна (уравнение 1.3), а  $\vec{n}dn = d\vec{R}$ , получаем:

$$\varphi = -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dR}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} + \text{const}. \quad (1.23)$$

2. *Потенциал заряженного проводящего шара (радиусом  $R_0$ ).* Так как внутри шара поле отсутствует, а вне шара описывается уравнением (1.3), то при  $R > R_0$  для потенциала справедливо уравнение (1.23); на поверхности шара ( $R = R_0$ ) получается:

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_0} + \text{const};$$

это же значение потенциал имеет и внутри шара (рис. 1.16).

В рассмотренных случаях произвольную постоянную удобно принять равной нулю, т. е. считать, что на бесконечности и потенциал, и напряженность обращаются в нуль.

3. Рассуждая таким же образом, найдем потенциал точек поля, созданного *тонкой (радиусом  $a$ ) равномерно заряженной проволокой* с линейной плотностью заряда  $\lambda$  (рис. 1.17):

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R + \text{const} \quad (R > a). \quad (1.24)$$

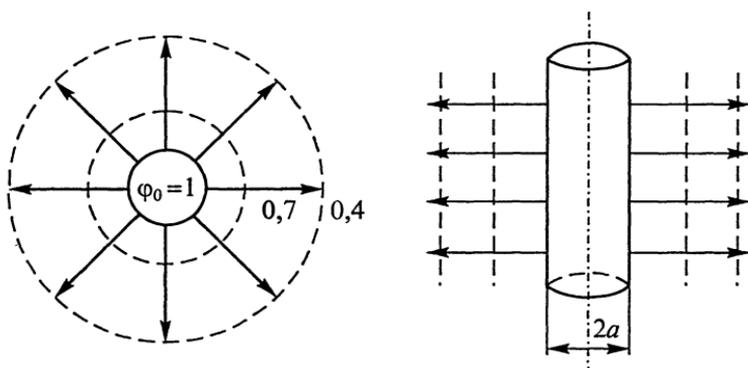


Рис. 1.17

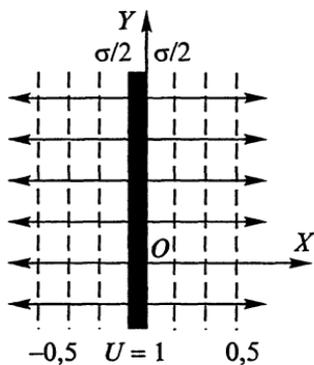
На поверхности проволоки и внутри нее

$$\varphi_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln a + \text{const.}$$

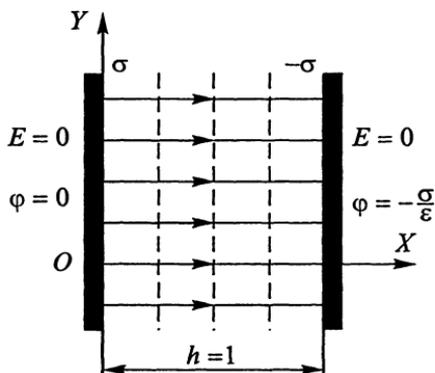
Здесь нельзя считать потенциал бесконечно удаленных точек равным нулю, так как сама проволока считается бесконечно длинной. Поэтому постоянная остается неопределенной; но это не создает практических неудобств, потому что важно знать лишь разность потенциалов.

4. Пусть *бесконечная плоскость* совпадает с координатной плоскостью  $YOZ$  (рис. 1.18, а); плоскость заряжена до поверхностной плотности  $\sigma/2$ . Поле вблизи плоскости однородно:  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . Поэтому потенциал является функцией только координаты  $x$ :

$$\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{x} = -Ex + \text{const.} \quad (1.25)$$



а



б

Рис. 1.18

При  $x = 0$  находим  $\varphi_0 = \text{const}$ , где  $\varphi_0$  – потенциал пластины, который можно принять равным нулю. Если имеются две разноименно заряженные плоскости, параллельные друг другу (рис. 1.18, б), то заряды с плотностью  $\pm\sigma$  скапливаются на обращенных друг к другу сторонах этих плоскостей и электростатическое поле существует только между плоскостями. Здесь можно принять за нуль потенциал одной из плоскостей, например координатной плоскости  $YOZ$ . Тогда получится:

$$\text{при } x \leq 0 \quad E = 0; \quad \varphi = 0;$$

$$\text{при } 0 < x < h \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}; \quad \varphi = -Ex;$$

$$\text{при } x \geq h \quad E = 0; \quad \varphi = -Eh.$$

Во многих практических случаях за нуль принимают потенциал земли и соединенных с нею проводников. Если окружить некоторую область заземленной проводящей замкнутой оболочкой, то потенциал оболочки также будет равен нулю; процессы внутри оболочки не будут зависеть от зарядов, находящихся вне ее (электростатическая защита).

Для измерения разности потенциалов в электростатике применяются различные электрометры. Принцип работы прибора поясним, рассмотрев простейший электрометр. Металлический стержень 1 (рис. 1.19) соединен с металлическими стрелками 2. Стержень изолирован от корпуса 3, соединяемого с землей. При подключении головки стержня к какому-либо заряженному проводнику стержень и стрелки приобретают потенциал проводника. Между корпусом и стрелками устанавливается разность потенциалов, поэтому под действием электростатического поля заряженные стрелки отходят друг от друга до тех пор, пока момент электрической силы не уравновесится моментом силы тяжести. Если увеличивать заряд тела, то будет пропорционально расти и его потенциал, а с ним и отклонение стрелки электрометра. Но при соединении электрометра с любым из проводников (4 и 5), соединенных друг с другом, его показание будет определяться потенциалом этих тел (одинаковым), хотя заряды тел различны, если различны их размеры и форма.

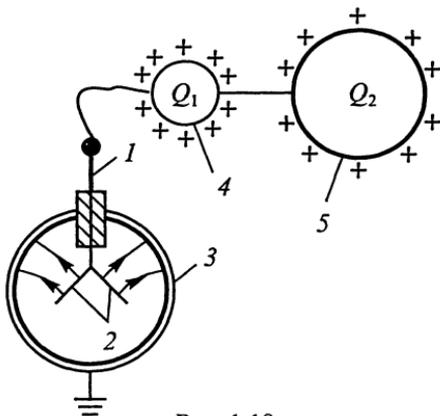


Рис. 1.19

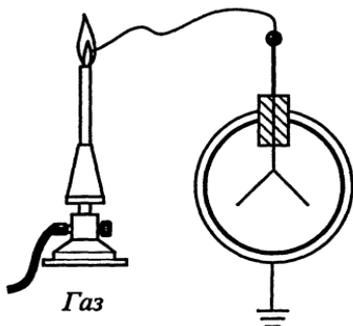


Рис. 1.20

а, столь же наглядно характеризует поле, как и картина линий напряженности: чем гуще располагаются поверхности, тем сильнее поле в данной области.

Чтобы измерить потенциал в каких-либо точках электростатического поля, нужно сделать проводящими области вокруг них и поместить туда проволочку, ведущую к электрометру. Это можно сделать, например, поместив проволочку в небольшое газовое пламя (рис. 1.20); перемещая его вокруг заряженного тела, можно найти точки равного потенциала. Картина эквипотенциальных поверхностей, построенных через равные изменения потенциала,

## Глава 2

# ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОВОДНИКОВ

### 2.1. Поле заряженного проводника

В § 1.3 мы выяснили, что электростатическое поле нельзя создать свободными зарядами, так как устойчивое равновесие их невозможно. Поэтому приходится пользоваться заряженными проводниками, ограничивающими свободу движения зарядов, так как заряды не могут покинуть поверхность проводника. Рассмотрим, как распределяются заряд и потенциал на сплошном заряженном проводнике, имеющем полости. Мы уже видели, что потенциал на поверхности проводника должен быть постоянен, иначе не будет электростатического состояния. Очевидно, такой же потенциал имеют точки внутри проводника и в его полости, так как там отсутствует поле и нет зарядов:

$$E_{\text{внутр}} = 0. \quad (2.1)$$

В этом легко убедиться, соединив электрометр с полым проводником и перемещая соединительный провод (не отрывая его от заряженного проводника!); при этом показания прибора не изменяются.

Потенциал на внутренней поверхности проводника можно измерить, сделав в полом проводнике небольшое отверстие; через него провод, ведущий к электрометру, соединяется с внутренней поверхностью проводника.

Заряд на поверхности проводника может распределиться неравномерно. Так, если проводник образован двумя шарами, соединенными проволокой, то при равенстве их потенциалов

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} R_1 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} R_2$$

заряды должны относиться как радиусы шаров, а поверхностные плотности заряда – обратно пропорционально радиусам. Для проверки этого вывода будем касаться разных точек проводника ма-

лым проводящим шариком и переносить приобретенный им заряд на электрометр. Приблизительно можно принять, что шарик приобретает заряд, пропорциональный местной плотности заряда. Опыт показывает, что с шара меньшего радиуса передается больший заряд.

Так как заостренный конец проводника представляет участок с очень малым радиусом кривизны, то на острие поверхностная плотность заряда и, следовательно, напряженность поля у острия очень велики. В сильном поле воздух может потерять свои изолирующие свойства – образующиеся ионы будут притягиваться к проводнику (ионы противоположного знака) и отталкиваться от него (ионы того же знака, каким заряжен проводник). Поэтому заряд на проводнике будет уменьшаться. Так как на практике такая утечка часто вредна, то в промышленных установках избегают заостренных проводников. Но в качестве молниеотвода – заземленного устройства, предохраняющего строение или установку от удара молнии, применяются заостренные проводники, возвышающиеся над защищаемым объектом; в этом случае вероятность того, что разряд молнии произойдет в области самого сильного поля, т. е. через острие молниеотвода, велика.

Если окружить некоторый объем пространства проводящей оболочкой, соединенной с землей, то потенциал оболочки будет постоянен и внешние поля не будут влиять на процессы внутри оболочки, – такова идея электростатической защиты, предложенной Фарадеем. Как известно, Фарадей проделал такой опыт: он вошел с электрометром внутрь большой клетки, стенки которой были сделаны из густой проволочной сетки. При сильной электризации клетки прибор внутри нее никаких показаний не давал, а экспери-

ментатор ничего не ощущал: защита была вполне надежна.

Весьма поучителен опыт с двумя пластинами (рис. 2.1, а), из которых одна соединена с электрометром, другая – с землей. Кроме того, к ним подключен источник постоянной разности потенциалов  $U$ . При изменении расстояния между пластинами показания электрометра не меняются. Это понятно, так как разность потенциалов принудительно поддерживает-

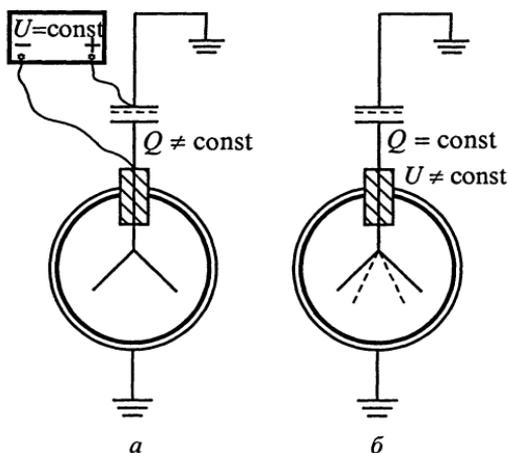


Рис. 2.1

ся постоянной. Но при сближении пластин напряженность поля (будем считать его однородным), равная

$$E = \frac{U}{h} = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

возрастает. Это объясняется тем, что за счет действия источника увеличивается поверхностная плотность заряда. Если же производить опыт без источника разности потенциалов, предварительно сообщив системе некоторый заряд  $Q$  (в дальнейшем он не изменится!), то при сближении пластин показание электрометра падает (но восстанавливается, если пластины вновь развести). Здесь заряд (и следовательно, напряженность поля) во время опыта не меняется. Но при сближении пластин уменьшается разность потенциалов, а электрометр реагирует именно на нее (рис. 2.1, б).

Заряд, сообщенный проводнику, распределяется по его внешней поверхности. Если заряженное тело касается проводника снаружи, то часть заряда всегда остается на первом теле. Если же оно касается внутренней поверхности (в полости) проводника, то весь заряд тела передается проводнику и распределяется по его внешней поверхности. Это явление нашло практическое применение в ускорителе заряженных частиц – генераторе высокого напряжения Ван де Граафа.

Ускоритель представляет собой большой (несколько метров в поперечнике) полый шар; в нижней части шара имеется небольшое отверстие. Бесконечная диэлектрическая лента электризуется снизу и несет небольшие заряды вверх, на внутреннюю поверхность шара; но это состояние не является равновесным, и под действием возникшего в проводнике электрического поля заряд переходит на внешнюю поверхность шара, увеличивая его потенциал. Таким образом, малые порции заряда постепенно электризуют шар. Так как радиус шара велик, то шар приобретает небольшую поверхностную плотность заряда (следовательно, поле у поверхности слабое) при большом потенциале на поверхности. Таким образом можно получать потенциалы порядка миллионов вольт. В частности, этот прибор использовался для ускорения заряженных элементарных частиц. В настоящее время преимущественно используются другие (неэлектростатические) методы ускорения, не требующие высоких исходных потенциалов, но дающие гораздо больший эффект.

## 2.2. Проводники во внешнем электростатическом поле

Рассмотрим поведение проводника в поле, связанном с посторонним заряженным телом. Внесем в электростатическое поле (рис. 2.2, а) незаряженный проводник, состоящий из двух шаров,

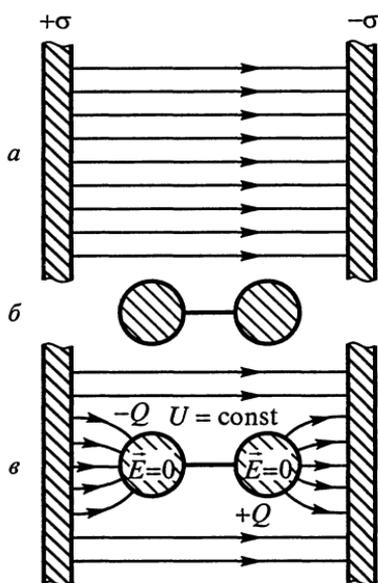


Рис. 2.2

соединенных проволокой (рис. 2.2, б). Так как линии поля не перпендикулярны поверхности проводника, то касательные составляющие вектора напряженности у поверхности проводника приведут его свободные заряды (электроны) в движение; перераспределение зарядов создаст внутри и вне проводника дополнительное наведенное (индуцированное) поле напряженностью  $\vec{E}_н$ . Равновесие наступит, когда внутри проводника суммарная напряженность обратится в нуль, а вне его линии поля станут перпендикулярны поверхности проводника (рис. 2.2, в). При этом проводник приобретает постоянный потенциал. Как видно из рисунка 2.2, в, на противоположных концах проводника скапливаются заряды

противоположных знаков. Если разделить проводник на две части, убрав соединительную проволоку, то можно обнаружить (удалив проводники из поля), что обе части проводника заряжены разными по знаку зарядами. Если их снова соединить, то заряды исчезнут; следовательно, они возникали в равных количествах в соответствии с законом сохранения заряда. При возникновении наведенных зарядов в неоднородном внешнем поле проводник втягивается в область сильного поля. Описанное явление называют *электростатической индукцией* (наведением). Так как при такой постановке опыта не все линии начального поля перехватываются проводником, то наведенный в процессе индукции заряд всегда меньше, чем заряд, связанный с полем.

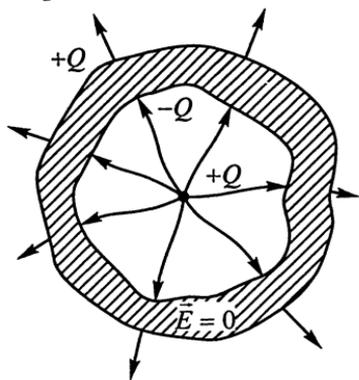


Рис. 2.3

Если проводник, вносимый в электростатическое поле постороннего происхождения, имел заряд, то последний также перераспределяется до тех пор, пока не выравняются потенциалы во всех точках проводника.

Если же заряд  $+Q$  (рис. 2.3) внести в полость проводника, не касаясь его стенок, то на внутренней поверхности стенок наведется равный

заряд, противоположный по знаку,  $-Q$  (все линии напряженности будут оканчиваться на стенках). Одновременно произойдет перераспределение зарядов в проводнике и заряд  $+Q$  появится на его внешней поверхности.

Сказанное можно проверить на опыте с цилиндром Фарадея. Высокий узкий металлический цилиндр соединяют с электрометром. Если в цилиндр внести проводник с зарядом  $Q$  (не касаясь стенок цилиндра), то электрометр отметит появление наведенного заряда. Чем глубже погружается проводник в цилиндр, тем больше становится наведенный заряд. Если же проводник коснется изнутри стенок цилиндра, то показание электрометра делается наибольшим, так как весь заряд проводника передается цилиндру и электрометру.

### 2.3. Метод зеркальных изображений

Эквипотенциальность металлических поверхностей можно использовать при расчете электростатических полей сложной конфигурации. В качестве примера рассмотрим поле точечного положительного заряда  $Q$ , расположенного на расстоянии  $h$  от бесконечной металлической плоскости. Под влиянием заряда  $Q$  электроны в металле будут смещаться таким образом, что потенциал плоскости во всех ее точках примет одинаковое значение, которое можно считать равным нулю. При этом линии напряженности электростатического поля будут перпендикулярны плоскости во всех ее точках. На рисунке 2.4 показано распределение линий напряженности в пространстве над плоскостью для установившегося электростатического поля. В точности такое же поле можно получить в пространстве над плоскостью, если считать, что металлической по-

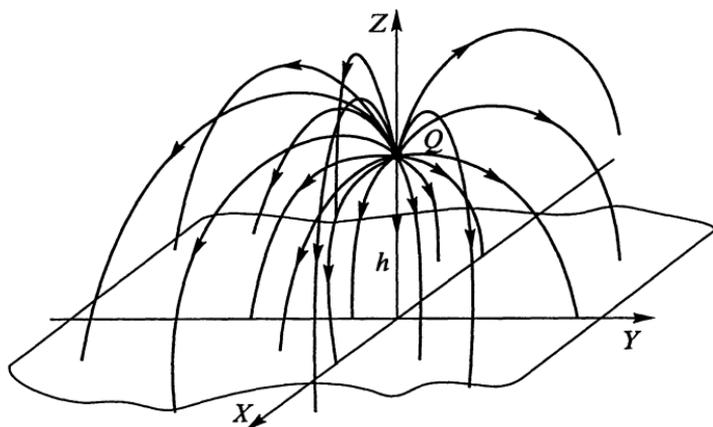


Рис. 2.4

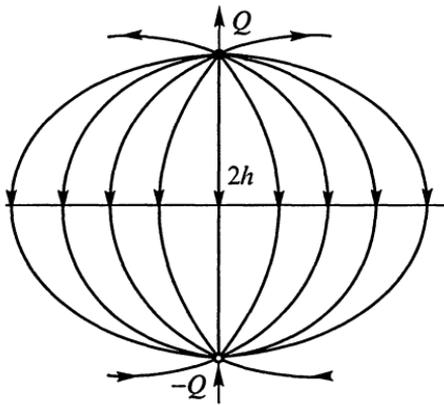


Рис. 2.5

верхности нет, а вместо нее на расстоянии  $2h$  от положительного заряда находится отрицательный заряд  $(-Q)$ , как показано на рисунке 2.5. Эквивалентность полей в обоих случаях обеспечивается одинаковым значением потенциала в плоскости, равноудаленной от зарядов, и одинаковым распределением зарядов в пространстве над плоскостью. Если эти условия выполнены, то поля в определенной области пространства будут одинаковыми, хотя физи-

ческие условия, определяющие поле во всем пространстве, могут быть различными.

В данном случае эквивалентность полей в пространстве над плоскостью обеспечивается виртуальным размещением отрицательного заряда симметрично положительному заряду относительно металлической поверхности. Здесь металлическая поверхность играет роль зеркала, в котором положительный заряд «видит» свое отражение – равный ему по модулю отрицательный заряд. Аналогия с зеркальным изображением привела к названию метода, суть которого состоит в замене поля заряда над металлической плоскостью и заряда, индуцированного на поверхности плоскости, полем двух точечных зарядов; что приводит к существенному упрощению расчета электростатического поля и является основным преимуществом метода зеркальных изображений.

С математической точки зрения эквивалентность электростатических полей в вакууме, имеющих одинаковые граничные условия и распределение зарядов в пространстве, объясняется единственностью решения дифференциального уравнения, описывающего поле. Напряженность электростатического поля в вакууме в соответствии с теоремой Остроградского – Гаусса подчиняется уравнению (1.16):

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Принимая во внимание связь между напряженностью поля и его потенциалом, выраженную соотношением (1.22), можно получить уравнение для потенциала электростатического поля в вакууме, связывающее потенциал поля с распределением зарядов в пространстве.

Именно:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.2)$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.3)$$

Полученное уравнение называется *уравнением Пуассона*. Уравнение Пуассона имеет единственное решение, если задана правая часть уравнения в виде распределения заряда в пространстве и граничные условия в виде распределения потенциала на границе той области пространства, для которой ищется решение уравнения. В методе зеркальных изображений используется свойство единственности решения уравнения Пуассона для упрощения расчета электростатического поля в конкретной задаче.

Если правая часть уравнения Пуассона равна нулю, то уравнение описывает поле в вакууме при отсутствии зарядов. Уравнение в этом случае называется *уравнением Лапласа*. Его решение зависит только от граничных условий задачи.

## 2.4. Электрическая емкость уединенного проводника.

### Конденсаторы. Соединения конденсаторов

Заряженный уединенный проводник в вакууме имеет вполне определенный потенциал, значение которого зависит как от заряда проводника, так и от его размеров. Для проводника определенных размеров его потенциал изменяется пропорционально заряду проводника. Это утверждение есть следствие закона Кулона и принципа суперпозиции полей. Действительно, потенциал проводника определяется работой, совершаемой полем при переносе единичного положительного заряда с поверхности проводника в бесконечность. С увеличением заряда проводника увеличивается сила, действующая на пробный заряд, что приводит к увеличению работы и, следовательно, росту потенциала проводника. Понятна и зависимость потенциала проводника от его размеров. Чем больше размер проводника, тем меньшую работу совершает поле по переносу пробного заряда от поверхности проводника в бесконечность, т. е. тем меньше потенциал проводника. Учитывая эти обстоятельства, потенциал уединенного проводника  $\varphi$  выражают соотношением:

$$\varphi = \frac{Q}{C}, \quad (2.4)$$

где  $C$  – электрическая емкость – физическая величина, равная отношению заряда уединенного проводника к его потенциалу. Электрическая емкость зависит только от геометрических размеров уединенного проводника. Единицей электрической емкости в СИ служит фарад (Ф).

Фарад равен электрической емкости уединенного проводника таких размеров, при которых электрический заряд проводника 1 Кл создает на его поверхности потенциал 1 В:

$$1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/В.}$$

Для примера определим электрическую емкость уединенного металлического шара радиусом  $R$  с центром в точке  $O$ . Предположим, что заряд шара равен  $Q$ . Потенциал шара можно найти, определив потенциал в его центре, так как все точки объема шара эквипотенциальны. Потенциал точки  $O$  равен сумме потенциалов от множества точечных зарядов, распределенных по поверхности шара. Разобьем заряд на поверхности шара на точечные заряды  $dQ$ . Каждый точечный заряд создаст в центре шара потенциал  $d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R}$ . Сложив потенциалы от всех точечных зарядов, распределенных на поверхности шара, получим:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (2.5)$$

Сравнивая (2.5) с (2.4), приходим к выводу о том, что емкость уединенного металлического шара равна:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (2.6)$$

Несколько заряженных и незаряженных проводников создают сложное поле, но потенциал каждого из проводников постоянен во всех его точках. Если изменить в несколько раз все заряды, то и все потенциалы, очевидно, изменятся во столько же раз, так что конфигурация поля при этом не изменится. Расчет такой системы в общем виде очень сложен; мы ограничимся частным случаем, когда имеются только два проводника с равными по модулю и противоположными по знаку зарядами. Практически это проще всего осуществить, зарядив проводник и окружив его замкнутой металлической оболочкой, соединенной с землей. Поставим еще одно условие, облегчающее расчет: пусть поверхность второго проводника совпадает с одной из эквипотенциальных поверхностей поля первого проводника, существовавших до внесения второго проводника. Тогда поле между проводниками остается неизменным. Подобная система представляет простейший тип *конденсатора* и широко применяется на практике.

Окружив положительно заряженный шар (радиусом  $R_1$ ) концентрическим полым шаром (радиусом  $R_2$ ) и заземлив последний, мы получим *шаровой конденсатор*, у которого все поле сосредоточено между шарами. Поле при этом такое же, как у одного внутреннего шара. Поэтому разность потенциалов равна

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Отношение заряда к полученной разности потенциалов называют *электрической емкостью* конденсатора:

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (2.7)$$

В СИ электрическая емкость конденсатора, как и емкость уединенного проводника, выражают в фарадах.

Электрическая емкость не зависит от заряда и определяется лишь геометрией системы.

Для шарового конденсатора электрическая емкость равна

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{R_2 - R_1} R_1 R_2. \quad (2.8)$$

Емкость растет при увеличении площади поверхности шаров и сближении их радиусов.

Если  $R_2 \rightarrow \infty$ , то из (2.6) получается:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_1,$$

что соответствует емкости уединенного шара. Так, емкость земного шара ( $R = 6400$  км) оказывается равной  $C_3 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ Ф} = 700 \text{ мкФ}$ , что гораздо больше емкости обычных окружающих нас тел. Поэтому при соединении заряженного тела с землей практически весь заряд уходит в землю.

Для создания *цилиндрического конденсатора* проволоку (радиусом  $R_0$ ) окружают полым коаксиальным цилиндром (радиусом  $R$ ). Здесь следует вести расчет для некоторой высоты цилиндра  $h$ , причем искажением поля у краев цилиндра мы пренебрежем. Используя (1.24), получаем:

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R}{R_0}; \quad C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \left( \frac{R}{R_0} \right)}. \quad (2.9)$$

И здесь электроемкость растет при  $R \rightarrow R_0$ .

Наконец, для плоского конденсатора (площадь пластин  $S$ , расстояние между ними  $h$ ) имеем:

$$U = \frac{Qh}{S\epsilon_0}; \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{h}. \quad (2.10)$$

Снова емкость растет при сближении пластин.

Из второй формулы (2.10) видно, что электрическую постоянную вакуума можно выражать в фарадах на метр. Эта еди-

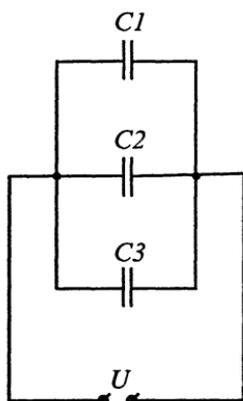


Рис. 2.6

ница удобна для практического использования. При этом числовое значение не изменяется. Действительно, из (1.2) следует:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2) = \\ &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} / (\text{В} \cdot \text{м}) = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}. \end{aligned}$$

Конденсаторы можно включить группами; все возможные комбинации сводятся к двум основным.

1. При *параллельном* соединении (рис. 2.6) по одной обкладке каждого конденсатора соединяют вместе и к двум общим концам подключают источник постоянной разности потенциалов. Тогда каждый конденсатор заряжается до этой разности потенциалов, приобретая свой заряд

$$Q_i = C_i U. \quad (2.11)$$

Параллельное соединение можно заменить эквивалентным конденсатором электроемкостью  $C_{\text{пр}}$ , имеющим тот же заряд при той же разности потенциалов. При этом

$$(2.10)$$

Общая (эквивалентная) электроемкость  $C_{\text{пр}}$  больше электроемкости каждого из конденсаторов.

2. При *последовательном* соединении к источнику присоединяют по одной обкладке двух конденсаторов (рис. 2.7), остальные обкладки соединяют попарно. Все конденсаторы получают одинаковый заряд (промежуточные конденсаторы заряжаются путем индукции), но неодинаковые разности потенциалов. Сумма всех разностей потенциалов равна разности потенциалов, создаваемой источником. Поэтому получается:

$$U = \sum U_i = \sum \frac{Q}{C_i} = \frac{Q}{C_{\text{пс}}}$$

и

$$\frac{1}{C_{\text{пс}}} = \sum \frac{1}{C_i}. \quad (2.13)$$

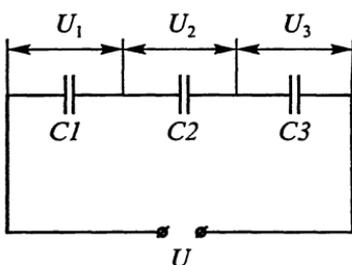


Рис. 2.7

Эквивалентная электроемкость  $C_{\text{пс}}$  оказывается меньше каждой из электроемкостей.

Если все конденсаторы имеют одинаковую емкость  $C$  и число их равно  $n$ , то получаются простые соотношения:

$$C_{\text{пр}} = nC; \quad C_{\text{пс}} = \frac{C}{n}.$$

Когда емкости  $C_i$  различны, то при последовательном соединении наибольшая разность потенциалов образуется на конденсаторе наименьшей емкости. Поэтому при последовательном соединении конденсаторов различной емкости следует соблюдать осторожность – не превосходить рабочего напряжения ни на одном из конденсаторов.

При расчете систем конденсаторов все конденсаторы предполагаются сначала незаряженными.

Выше указывалось, что при расчете цилиндрического конденсатора мы пренебрегли искажением поля на краях цилиндра (то же относится и к плоскому конденсатору). Если расстояние между обкладками обоих типов конденсаторов мало по сравнению с линейными размерами обкладок, то это искажение не очень заметно сказывается на значении емкости. Тем не менее искаженные поля всегда должны иметь место на краях пластин конденсатора. Это непосредственно следует из того факта, что циркуляция вектора напряженности в электростатическом поле тождественно равна нулю:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Действительно, при обходе контура  $L$  (рис. 2.8) вклад в циркуляцию от слагаемых, соответствующих участкам контура, которые параллельны вектору  $\vec{E}$ , будет отличен от нуля, так как напряженность поля внутри конденсатора больше, чем на его краях.

Компенсация этого вклада происходит за счет тех слагаемых в интеграле циркуляции, которые соответствуют другим участкам контура  $L$ . Это возможно только в том случае, если напряженность поля на этих участках направлена под углом к отдельным элементам контура. Примерная конфигурация поля на краю плоского конденсатора показана на рисунке 2.8.

Найдем в заключение емкость двухпроводной линии (рис. 2.9), т. е. системы из двух параллельных проводов, длина которых много больше расстояния между ними  $h$ , а диа-

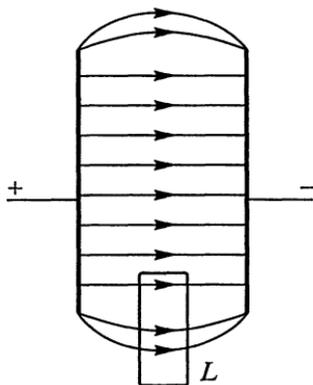


Рис. 2.8

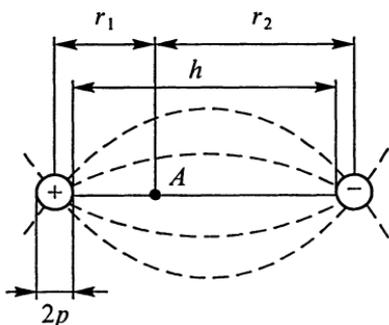


Рис. 2.9

метр проводов  $2\rho$  много меньше  $h$ . Последнее требование позволяет считать, что заряд распределен по поверхности проводов равномерно (при сближении толстых проводов плотность заряда на внутренних частях их поверхности увеличилась бы, что сильно усложнило бы расчет).

Выделим отрезок длиной  $H$  с зарядом  $\lambda H = q$  и воспользуемся формулой (1.24). Для потенциала произвольной точки  $A$  между проводами получим:

$$\varphi_A = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 H} (\ln r_2 - \ln r_1).$$

Положив  $r_2 = h + \rho \approx h$ ,  $r_1 = \rho$ , найдем потенциал на поверхности левой проволоки:

$$\varphi_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln \left( \frac{h}{\rho} \right).$$

Положив  $r_1 = \rho + h \approx h$ ,  $r_2 = \rho$ , найдем потенциал на поверхности правой проволоки:

$$\varphi_2 = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln \left( \frac{h}{\rho} \right).$$

Разность потенциалов между проволоками равна

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{\pi\epsilon_0 H} \ln \left( \frac{h}{\rho} \right),$$

и электрическая емкость выбранного участка есть

$$C_H = \frac{q}{U} = \frac{\pi\epsilon_0 H}{\ln \left( \frac{h}{\rho} \right)} = C_0 H, \quad (2.14)$$

где  $C_0$  – линейная емкость линии.

Для вычисления электрической емкости проводников, обладающих некоторой симметрией, с успехом можно применить метод зеркальных изображений. Как было показано выше, в его основе лежит простой факт: если в электростатическом поле заметаллизировать одну из эквипотенциальных поверхностей, то распределение поля не изменится, так как линии напряженности с самого начала перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

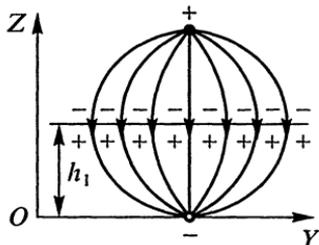


Рис. 2.10

Поле двухпроводной линии в сечении, перпендикулярном осям ее проводов, изображено на рисунке 2.10. Плоскость  $z$

$= h_1$  является одновременно и плоскостью симметрии, и эквипотенциальной поверхностью. Если ее заматаллизировать, то на ней появятся разноименные заряды, но распределение поля останется прежним. При этом поле верхней половины чертежа зеркально отражено в его нижней половине. Мы можем теперь убрать все, что находится ниже плоскости симметрии, не влияя на распределение поля в верхней части рисунка. Но разность потенциалов  $U$  (между положительно заряженным проводом и плоскостью) будет вдвое меньше, чем разность потенциалов  $U_{12}$  между проводами линии. Отсюда следует, что емкость провода, подвешенного над поверхностью земли на высоте  $h_1$ , равна удвоенной емкости линии, т. е.

$$C_{\text{пр}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{2h_1}{\rho}\right)}. \quad (2.15)$$

Возможно и решение обратной задачи: если известна емкость некоторой системы проводников, находящихся над плоской проводящей поверхностью, то, зеркально отобразив все провода в этой плоскости, мы получим сложную систему проводов (первоначальная плюс отраженная), причем емкость этой системы будет вдвое меньше, чем емкость первоначальной.

## Глава 3

# ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ДИЭЛЕКТРИКОВ

### 3.1. Поляризация диэлектриков. Полярные и неполярные молекулы

Если диэлектрический стержень небольших размеров, подвешенный на нити (рис. 3.1, а), внести в однородное электростатическое поле, то он будет поворачиваться, стремясь расположиться параллельно линиям поля. Если же поле неоднородно (рис. 3.1, б), то стерженек не только поворачивается, но одновременно втягивается в область сильного поля. Это поведение подобно поведению незаряженного металлического стерженька. Однако есть и существенная разница в характере их электризации. Если проводник разделить в поле на две части, то на них обнаружатся равные по модулю свободные заряды противоположных знаков; их можно передать другим проводникам, приводя последние в соприкосновение со стерженьком после его разделения.

Если разделить на две части диэлектрический стерженек, находящийся в электростатическом поле, то каждая из этих частей будет вести себя подобно целому стерженьку; то же произойдет и при дальнейшем делении стерженька. Такое поведение можно объяснить, допустив, что в диэлектрике также возникают наведенные

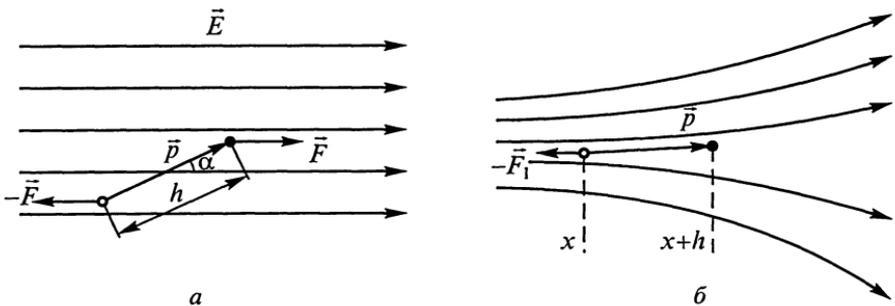


Рис. 3.1

заряды; но их нельзя снять с диэлектрика, так как они не являются свободными. Их называют *связанными* зарядами. Появление связанных зарядов во всем объеме диэлектрика (что доказывается его поведением при разрезании на части) обусловлено так называемой *поляризацией* диэлектрика. Сущность этого процесса такова.

1. У так называемых неполярных диэлектриков (эбонит, янтарь) молекулы представляют собой симметричные системы элементарных зарядов, не создающие электростатического поля в окружающем пространстве. При внесении диэлектрика во внешнее поле происходит некоторое перераспределение зарядов – положительные смещаются вдоль поля, отрицательные – против поля; молекула становится несимметричной и в простейшем случае приобретает дипольный момент

$$\vec{p} = q\vec{h}, \quad (3.1)$$

где  $q$  – заряд,  $h$  – длина диполя. Напомним, что вектор  $\vec{p}$  направлен от отрицательного заряда к положительному.

Если внешнее поле однородно и между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$  существует угол  $\alpha$  (см. рис. 3.1, *a*), то на диполь действует вращающий момент

$$\vec{M} = [\vec{h}, \vec{F}] = [\vec{h}, q\vec{E}] = [\vec{p}, \vec{E}], \quad (3.2)$$

устанавливающий диполь вдоль поля. Очевидно, в этом случае диполь обладает потенциальной энергией

$$\Delta W = \int_0^\alpha M d\alpha = -pE \cos \alpha \Big|_0^\alpha = pE(1 - \cos \alpha).$$

При повороте на  $90^\circ$  прирост потенциальной энергии составляет

$$\Delta W_{90} = pE; \quad (3.3)$$

при повороте на  $180^\circ$

$$\Delta W_{180} = 2pE.$$

В случае большого числа беспорядочно ориентированных диполей величина (3.3) характеризует среднюю энергию диполей во внешнем поле.

Если поле неоднородно (см. рис. 3.1, *б*), то, кроме поворота (в действительности одновременно с ним), диполь втягивается в область поля большей напряженности, причем действующая на него сила равна

$$\vec{F}_1 = q\vec{E}(x+h) - q\vec{E}(x) = qh \frac{d\vec{E}}{dx} = p \frac{d\vec{E}}{dx}, \quad (3.4)$$

где  $\vec{E}(x+h)$  и  $\vec{E}(x)$  – напряженности поля в местах нахождения зарядов  $+q$  и  $-q$ .

Рассмотренный процесс называют *индуцированной* (наведенной) *поляризацией* диэлектрика. Несмотря на беспорядочное движение молекул, внешнее поле все время обеспечивает существование дипольного момента молекул.

Таким образом, весь диэлектрик оказывается поляризованным. На его гранях, не параллельных линиям напряженности поля, появляется избыточный заряд того или иного знака. Но этот заряд неразрывно связан с диэлектриком.

Моменты диполей, возникающих при наведенной поляризации в не слишком сильных полях, пропорциональны напряженности внешнего поля:

$$p = \beta E;$$

их значения имеют порядок  $10^{-30}$  Кл·м. Такие диполи часто называют упругими. Полагая, что заряд диполя равен элементарному заряду, находим, что размер диполя

$$h \approx 10^{-11} \text{ м,}$$

что отвечает молекулярным размерам. Коэффициент  $\beta$  называют *поляризуемостью* молекулы.

Молекулы твердого диэлектрика, приобретая дипольный момент, могут поворачиваться в теле относительно своих положений равновесия. Поэтому, например, кристаллики хинина располагаются в масле вдоль линий напряженности, давая наглядную картину распределения поля (см. § 1.3).

2. У так называемых полярных диэлектриков (вода, спирт, твердый сероводород  $\text{H}_2\text{S}$ ) молекулы несимметричны и обладают собственным дипольным моментом  $\vec{p}_0$ . Он практически не зависит от внешнего поля (оно всегда слабее внутримолекулярных полей), а потому диполи называют жесткими.

В отсутствие внешнего поля дипольные моменты молекул расположены в пространстве беспорядочно. Так как молекул очень много, то среднее значение дипольного момента диэлектрика равно нулю – диэлектрик неполяризован. Внешнее поле ориентирует моменты, а беспорядочное движение нарушает упорядоченность. В результате при данной температуре возникает поляризация, также пропорциональная напряженности поля, но зависящая от температуры – при нагревании поляризация, конечно, уменьшается. Это является характерной особенностью полярных диэлектриков. Сама же поляризация полярных диэлектриков называется *ориентационной*.

Дипольные моменты жестких диполей превышают моменты упругих диполей, так что полярные диэлектрики поляризуются сильнее неполярных.

3. В кристаллах, имеющих в узлах кристаллической решетки ионы (например, кристаллы хлорида натрия, состоящие из положительных ионов натрия и отрицательных ионов хлора), при помещении их в электростатическое поле происходит незначительное смещение ионов разных знаков в противоположных направлениях; в результате кристалл оказывается поляризованным (ионная поляризация) и каждый элемент его объема приобретает дипольный электрический момент.

### 3.2. Векторы поляризации и электрической индукции.

#### Диэлектрическая проницаемость и восприимчивость

Физическая картина поляризации твердых диэлектриков (как и другие свойства твердых тел) раскрывается квантовой механикой (см. «Молекулярную физику»). Здесь мы ограничимся только формальной теорией поляризации.

Рассмотрим плоский конденсатор с неизменным свободным зарядом  $Q_0 = \sigma_0 S$  и расстоянием между пластинами  $h$ . Если пластины находятся в вакууме, то напряженность  $E_0$  однородного поля между ними (рис. 3.2, а) равна

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}.$$

Заполним конденсатор однородным изотропным диэлектриком (рис. 3.2, б). Благодаря поляризации диэлектрика в каждом его единичном объеме возникает дипольный момент  $\vec{p}$ , равный сумме моментов диполей, находящихся в единице объема:

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i.$$

Выделим мысленно в диэлектрике параллелепипед, две грани которого площадью  $S$  прилегают к пластинам конденсатора. При этом на гранях возникают связанные заряды, модуль поверхностной плотности которых  $\sigma$  зависит от  $\sigma_0$ , но меньше  $\sigma_0$ . Полный электрический момент параллелепипеда равен

$$p_1 = phS = \sigma hS.$$

Следовательно,

$$p = \sigma. \quad (3.5)$$

Итак, на гранях диэлектрической пластины, примыкающих к

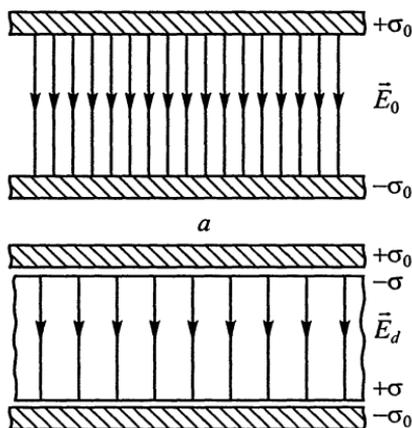


Рис. 3.2

пластинам конденсатора, появятся связанные заряды с поверхностной плотностью  $\pm\sigma$ , а в диэлектрике возникнет встречное поле, поэтому напряженность поля в диэлектрике станет меньше  $E_0$ . Обозначим модуль напряженности установившегося поля в диэлектрике  $E_d$ . Для широкого класса диэлектриков (с диполями обоих типов) существует прямая пропорциональность между поверхностной плотностью связанных зарядов и напряженностью поля в диэлектрике:

$$\sigma = \epsilon_0 \kappa E_d. \quad (3.6)$$

Безразмерный коэффициент  $\kappa$  называют *диэлектрической восприимчивостью* вещества. Для вакуума  $\kappa = 0$ .

Теперь можно написать:

$$E_d = E_0 - \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_0 - \kappa E_d, \quad (3.7)$$

т.е. напряженность поля в диэлектрике равна первоначальной напряженности минус напряженность поля, созданного связанными зарядами. Отсюда получается:

$$E_0 = E_d (1 + \kappa), \quad (3.8)$$

или  $E_0 = \epsilon E_d$ , где величина  $\epsilon = 1 + \kappa$  называется *относительной диэлектрической проницаемостью* среды.

Из (3.6) и (3.7) следует, что плотность связанных зарядов

$$\sigma = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \epsilon_0 E_0 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma_0. \quad (3.9)$$

Для характеристики процесса поляризации вводят вектор поляризации

$$\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}_d;$$

его модуль

$$P = \frac{\epsilon_0 \kappa}{1 + \kappa} E_0 = \epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} E_0 = \sigma \quad (3.10)$$

равен поляризации единицы объема диэлектрика (см. 3.5).

Умножив выражение (3.8) на  $\epsilon_0$  и учитывая соотношение (3.6), получим:

$$E_0 \epsilon_0 = \epsilon_0 E_d + P = \sigma_0.$$

Так как векторы  $\vec{E}_d$  и  $\vec{P}$  параллельны вектору  $\vec{E}_0$ , то предыдущее выражение можно записать в векторном виде:

$$\epsilon_0 \vec{E}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_d + \vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}_d = \vec{\sigma}_0 = \vec{D}_0, \quad (3.11)$$

где  $\vec{D}_0$  – вектор электрической индукции.

В рассматриваемом случае вектор электрической индукции  $\vec{D}_0$ , так же, как и вектор  $\vec{E}_0$ , перпендикулярен пластинам (т. е. границе раздела двух сред), причем его значение не испытывает разрыва, в то время как нормальная составляющая напряженности электрического поля испытывает на границе скачок, причем

$$E_0 : E_d = \epsilon : 1.$$

Если же вектор  $\vec{E}_0$  не перпендикулярен границе раздела, то направления векторов  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{E}_d$  и  $\vec{P}$  не совпадают, так как касательная составляющая вектора  $\vec{E}_0$  не будет создавать поляризации.

Модуль нормальной составляющей  $\vec{D}_n$  у поверхности проводника равен поверхностной плотности свободных зарядов. Модуль нормальной составляющей  $\vec{E}_n$  определяется разностью поверхностных плотностей свободных и связанных зарядов:

$$E_n = \frac{\sigma_{\text{своб}}}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_{\text{связ}}}{\epsilon_0}.$$

Найдем электрическую емкость плоского конденсатора, заполненного двумя слоями диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  (рис. 3.3). Пусть заряд конденсатора есть  $Q = \sigma S$ . Тогда по теореме Остроградского – Гаусса модуль вектора  $\vec{D}$ , перпендикулярного пластинам, равен  $\sigma$ . Поэтому напряженность равна соответственно

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_1}; \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_2}$$

и разность потенциалов между пластинами равна

$$U = E_1 h_1 + E_2 h_2 = \frac{D}{\epsilon_0} \left( \frac{h_1}{\epsilon_1} + \frac{h_2}{\epsilon_2} \right) = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \left( \frac{h_1}{\epsilon_1} + \frac{h_2}{\epsilon_2} \right).$$

Следовательно, емкость конденсатора

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{h_1}{\epsilon_1} + \frac{h_2}{\epsilon_2}}. \quad (3.12)$$

Физическая теория поляризации, детально рассматривающая поведение упругих и жестких диполей, позволяет рассчитать ди-

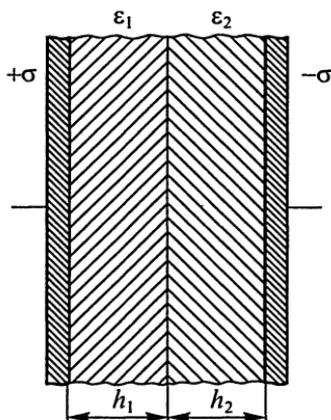


Рис. 3.3

электрическую восприимчивость  $\kappa$ . Оказывается (в соответствии с опытом), что восприимчивость не превышает 1 (для неполярных диэлектриков). Она в 5–10 раз больше для полярных диэлектриков, достигая в отдельных случаях нескольких десятков (у спиртов  $\kappa = 25$ , у воды  $\kappa = 80$  – при комнатной температуре). Для большинства диэлектриков  $\kappa$  не зависит от поля, так что электрическая индукция  $D$  пропорциональна напряженности  $E$ .

Все эти данные относятся к статическим полям. В полях, периодически меняющихся со временем, диэлектрическая проницаемость сложным образом зависит от частоты.

### 3.3. Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

Рассмотрим электростатическое поле некоторой системы зарядов  $Q_i$ , помещенных в однородный безграничный диэлектрик. Электрическое поле свободных зарядов вызовет поляризацию диэлектрика за счет появления в нем связанных зарядов. Результирующее поле внутри диэлектрика будет определяться как свободными, так и связанными зарядами. С учетом связанных зарядов теорему Остроградского – Гаусса можно записать в виде:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV + \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho' \, dV, \quad (3.13)$$

где  $S$  – произвольная замкнутая поверхность внутри диэлектрика,  $V$  – объем, ограниченный поверхностью  $S$ ;  $\rho$  – объемная плотность свободных зарядов,  $\rho'$  – объемная плотность связанных зарядов.

Первый интеграл в правой части выражения (3.13) равен алгебраической сумме свободных зарядов внутри поверхности  $S$ . Вторым интегралом можно вычислить, воспользовавшись понятием вектора поляризации диэлектрика  $\vec{P}$ .

Для этого рассмотрим часть поверхности  $dS$  (рис. 3.4). Из рисунка видно, что связанный заряд, попадающий внутрь поверхности за счет поляризации диэлектрика, будет определяться только теми диполями, центры которых попадают внутрь полого цилиндра объемом  $dV = dS l \cos \alpha$ , где  $l$  – длина молекулярного диполя,  $\alpha$  – угол между направлением внешней нормали и электрическим моментом молекулярного диполя. Положительному значению косинуса этого угла соответствует отрицательный заряд, попадающий внутрь объема, ограниченного поверхностью  $S$ . Таким образом, элементарный связанный заряд, попадающий внутрь поверхности за счет рассеяния молекулярных диполей элементом поверхности  $dS$ , будет равен:

$$d\rho' = -P dS \cos \alpha,$$

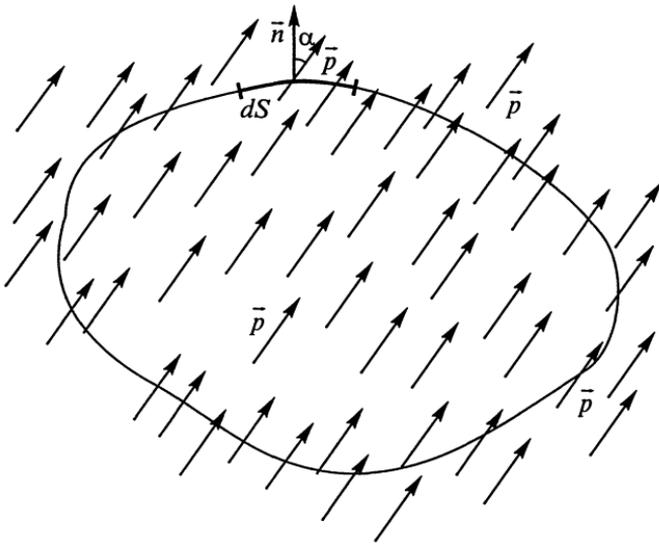


Рис. 3.4

или

$$d\rho' = -\vec{P} \cdot d\vec{S}. \quad (3.14)$$

С учетом сказанного выражение (3.13) можно записать в виде:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_i}{\epsilon_0} - \frac{\int_S \vec{P} \cdot d\vec{S}}{\epsilon_0}, \quad (3.15)$$

или

$$\int_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \sum Q_i.$$

Объединяя подынтегральные выражения в (3.15), получим:

$$\int_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = \sum Q_i. \quad (3.16)$$

Для сокращения записи теоремы Остроградского–Гаусса для диэлектриков используют вектор электрической индукции  $\vec{D}$  (электрического смещения), равный сумме векторов  $\epsilon_0 \vec{E}$  и  $\vec{P}$ :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

С помощью вектора электрической индукции теорему Остроградского–Гаусса для диэлектриков можно записать в виде:

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum Q_i \quad (3.17)$$

и сформулировать следующим образом: *поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность внутри однородного безграничного диэлектрика равен сумме свободных зарядов внутри этой поверхности.*

В дифференциальной форме теорема Остроградского – Гаусса имеет вид:

$$\operatorname{div} D = \rho,$$

где  $\rho$  – объемная плотность свободных зарядов.

Для тех диэлектриков, в которых поляризованность  $\vec{P}$  пропорциональна напряженности поля в диэлектрике, т. е.  $\vec{P} = \epsilon_0 k \vec{E}$ , вектор электрической индукции запишется в виде:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 k \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad (3.18)$$

где  $\epsilon = 1 + k$ .

Напомним, что безразмерная величина  $k$  называется диэлектрической восприимчивостью, а безразмерная величина  $\epsilon$  – относительной диэлектрической проницаемостью.

Единицей индукции электрического поля в СИ служит кулон на квадратный метр (Кл/м<sup>2</sup>).

### 3.4. Электрическое поле на границе двух диэлектриков

Рассмотрим два однородных, изотропных диэлектрика с относительными диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , разделенных плоской границей (рис. 3.5, а). Для выяснения вопроса о поведении векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  на границе двух диэлектриков используем теорему о циркуляции вектора  $\vec{E}$  и теорему Остроградского – Гаусса.

Определим циркуляцию вектора  $\vec{E}$  вдоль контура, представляющего прямоугольник, длинные стороны которого параллельны границе раздела диэлектриков, а короткие – перпендикулярны этой

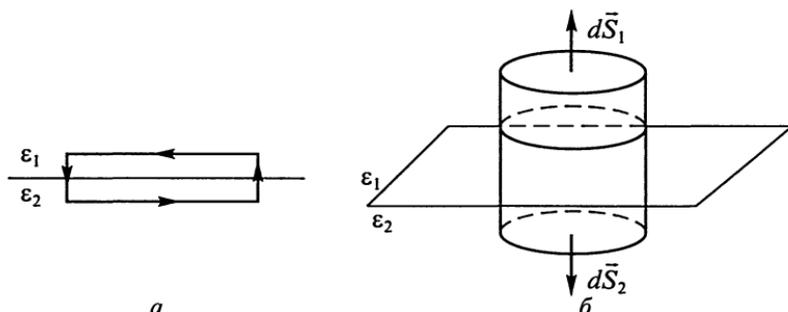


Рис. 3.5

границе. Короткие стороны выберем таким образом, чтобы интегрирование по ним давало нулевой вклад в циркуляцию вектора  $\vec{E}$  по выбранному контуру. Тогда

$$\vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 = 0,$$

где  $\vec{E}_1$  – вектор напряженности поля в первой среде,  $\vec{E}_2$  – вектор напряженности поля во второй среде. Модули этих векторов равны друг другу. При выбранном направлении обхода контура интегрирования против часовой стрелки  $\vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 = E_{1t} \cdot dl_1$ ,  $\vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 = -E_{2t} \cdot dl_2$ .

Используя теорему о циркуляции вектора  $\vec{E}$  для электрического поля в диэлектрике, получим:

$$E_{1t} - E_{2t} = 0. \quad (3.19)$$

Это означает, что при переходе через границу раздела тангенциальные составляющие вектора  $\vec{E}$  не изменяются. При этом тангенциальные составляющие вектора  $\vec{D}$  изменяют свои значения. Так как  $E_{1t} = \frac{D_{1t}}{\epsilon_0 \epsilon_1}$ , а  $E_{2t} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_0 \epsilon_2}$ , то тангенциальные составляющие вектора  $\vec{D}$  будут связаны между собой соотношением:

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}, \quad \text{или} \quad \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (3.20)$$

Для выяснения поведения на границе раздела нормальных составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ , воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса. В качестве поверхности интегрирования выберем цилиндр с основаниями, параллельными границе раздела (рис. 3.5, б). Высоту цилиндра выберем такой малой, чтобы потоком вектора  $\vec{D}$  через боковую поверхность цилиндра можно было пренебречь. При этом условии поток вектора  $\vec{D}$  через поверхность цилиндра будет равен:

$$\vec{D}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \vec{D}_2 \cdot d\vec{S}_2,$$

где  $\vec{D}_1$  – вектор электрической индукции в первой среде,  $\vec{D}_2$  – вектор электрической индукции во второй среде,  $d\vec{S}_1$  и  $d\vec{S}_2$  – векторы площадей оснований цилиндра, равные по модулю и противоположные по направлению.

Если на границе раздела нет свободных зарядов, то по теореме Остроградского – Гаусса имеем:

$$\vec{D}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \vec{D}_2 \cdot d\vec{S}_2 = 0 \quad \text{или} \quad D_{1n} \cdot dS_1 + D_{2n} \cdot dS_2 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad (3.21)$$

т. е. нормальные составляющие вектора электрической индукции не изменяются при переходе через границу двух диэлектриков. Соответственно нормальные составляющие вектора напряженности электрического поля будут изменяться на границе, так как  $D_{1n} = \epsilon_0 \epsilon_1 E_{1n}$  и  $D_{2n} = \epsilon_0 \epsilon_2 E_{2n}$ , откуда получаем, что

$$E_{1n} = \frac{\epsilon_2 E_{2n}}{\epsilon_1}. \quad (3.22)$$

Если бы на границе находились свободные заряды с поверхностной плотностью  $\sigma$ , то нормальная составляющая вектора  $\vec{D}$  терпела бы разрыв, причем

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (3.23)$$

В отсутствие свободных зарядов на границе раздела двух диэлектриков характерное поведение составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  приводит к преломлению линий  $\vec{D}$ , преломлению и разрыву линий  $\vec{E}$ .

В общем случае векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  могут быть наклонны к границе двух диэлектриков. Этот наклон принято характеризовать углом между направлением этих векторов и нормалью к границе раздела (рис. 3.6).

Разложим вектор  $\vec{D}_1$  на составляющие  $\vec{D}_{1n}$  и  $\vec{D}_{1t}$ ; используя граничные условия (3.22), построим составляющие  $\vec{D}_{2n}$  и  $\vec{D}_{2t}$  вектора  $\vec{D}_2$ , а также полный вектор  $\vec{D}_2$  (рис. 3.6, а). Последний образует с нормалью угол  $\alpha_2$ , причем

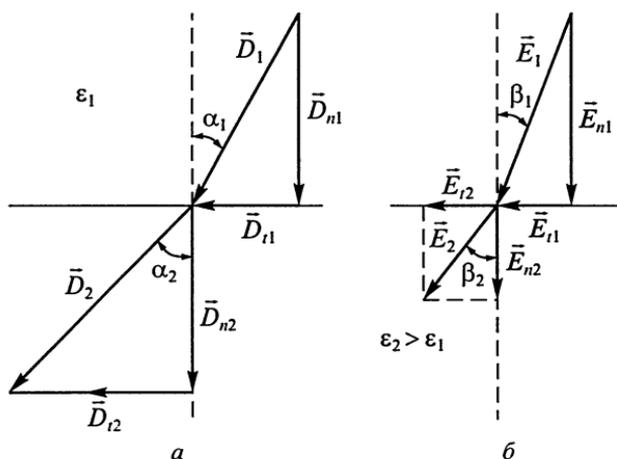


Рис. 3.6

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (3.24)$$

Проводя такие же рассуждения для вектора напряженности  $\vec{E}_1$  (рис. 3.6, б), получим вектор  $\vec{E}_2$  (нужно применить граничные условия 3.21); легко убедиться, что

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2},$$

т. е. оба вектора «преломляются» по одному закону.

Рассмотрим, наконец, поток любого из этих векторов через площадку  $S_1$  (перпендикулярную чертежу, рис. 3.7). Строя преломленные векторы, убеждаемся, что во второй среде получается поток через площадку  $S_2$ , причем

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}.$$

Если  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ , то  $\alpha_2 < \alpha_1$ , так что получается  $S_2 > S_1$ , т. е. линии векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  разрезаются. Если же  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ , то они сгущаются.

Важно также отметить, что в неоднородных средах циркуляция вектора напряженности по любому контуру тождественно равна нулю (например, по контуру  $ABCFA$ , см. рис. 3.8, а), что, как мы знаем, характерно для потенциального поля. Но циркуляция век-

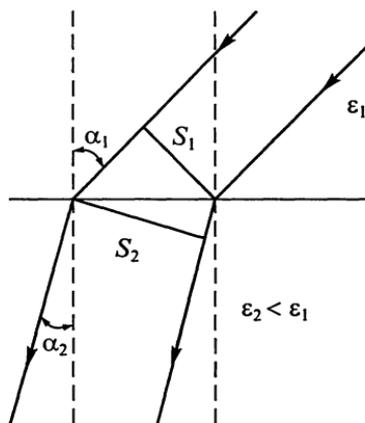


Рис. 3.7

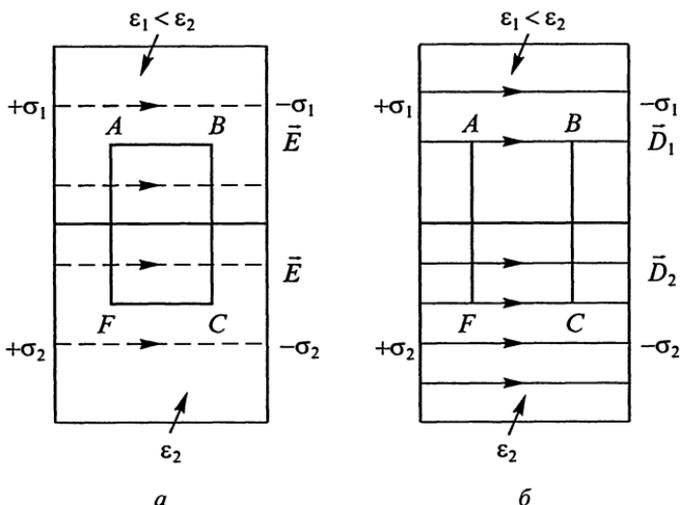


Рис. 3.8

тора  $\vec{D}$  может быть и отличной от нуля, например по такому же контуру (рис. 3.8, б).

Применим теорему Остроградского – Гаусса и граничные условия для  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  к однородному диэлектрическому шару радиусом  $R_0$ , сделанному из диэлектрика ( $\epsilon$ ), находящемуся в вакууме и равномерно заряженному с объемной плотностью  $\rho$  (подобная в математическом отношении задача решалась в «Механике»).

Легко получаются следующие выражения:

а) в вакууме вне шара ( $R > R_0$ )

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \vec{R};$$

б) в вакууме на поверхности шара ( $R = R_0$ )

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_0^3} \vec{R}_0;$$

в) на поверхности шара (в диэлектрике) ( $R = R_0$ )

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Q}{R_0^3} \vec{R}_0;$$

г) внутри шара ( $R < R_0$ )

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Q}{R_0^3} \vec{R};$$

где  $Q = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho$  – полный заряд шара;

д) в вакууме вне шара ( $R > R_0$ )

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R},$$

причем постоянная интегрирования принята равной нулю;

е) на поверхности шара в вакууме ( $R = R_0$ )

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_0};$$

ж) на поверхности шара в диэлектрике ( $R = R_0$ )

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Q}{R_0};$$

з) внутри шара ( $R < R_0$ )

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Q}{R_0^3} \frac{R^2}{2} + \text{const.}$$

Учитывая ж), получаем:

$$\text{const} = \frac{3}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Q}{R_0}; \quad \varphi = \frac{Q}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{R_0^3} (3R_0^2 - r^2).$$

На рисунке 3.9 изображены зависимости от расстояния потенциалов и напряженностей для некоторых ранее рассчитанных случаев.

Следует обратить внимание на скачки напряженности на поверхности тел, служащей границей раздела двух сред. В поле тяготения таких скачков не было.

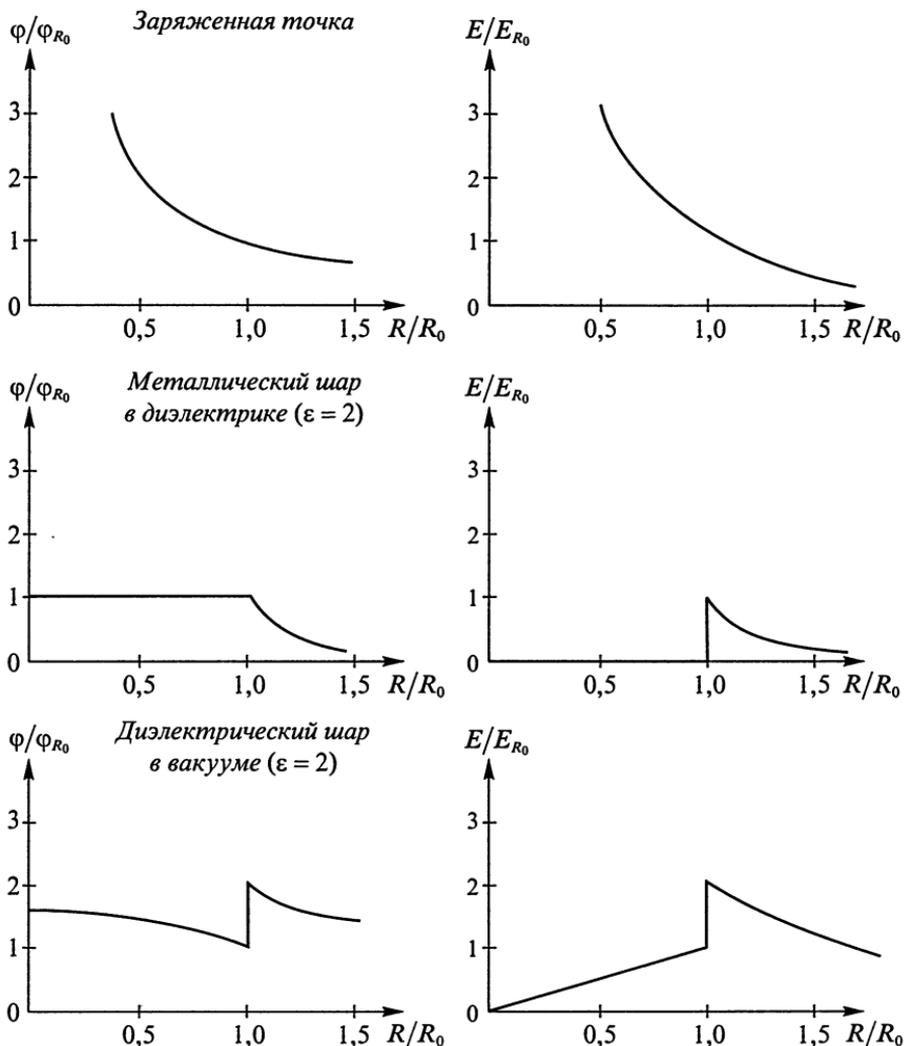


Рис. 3.9

В заключение подчеркнем еще раз, что сила взаимодействия между зарядами в диэлектрике уменьшается в  $\epsilon$  раз (закон Кулона), когда диэлектрик представляет собой безграничную жидкую или газообразную среду или когда границы диэлектрика совпадают с поверхностями равного потенциала, существовавшими до внесения диэлектрика – и это внесение не вызывает перераспределения свободных зарядов на проводниках.

Так, пусть в вакууме имеются две металлические концентрические сферы; внешний радиус меньшей сферы равен  $R_1$ , внутренний радиус большей  $R_2$ . Если сферам сообщить равные по модулю заряды  $Q$  противоположных знаков, то поле снаружи будет отсутствовать, а напряженность поля между сферами будет равна

$$\vec{E}_{\text{вн}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3} \quad (R_1 \leq R \leq R_2),$$

так как все линии напряженности поля, связанного со сферой 1, будут оканчиваться (или начинаться) на сфере 2.

Если заполнить пространство между сферами диэлектриком ( $\epsilon$ ), то распределение зарядов на сферах не изменится, но поле ослабнет в  $\epsilon$  раз. При этом на поверхности диэлектрика появятся связанные заряды (их знак противоположен знаку заряда прилегающей металлической сферы) с плотностью (см. § 3.2):

$$\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}. \quad (3.25)$$

Алгебраическая сумма зарядов, равная

$$Q - Q \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon},$$

и определит новые значения напряженности поля:

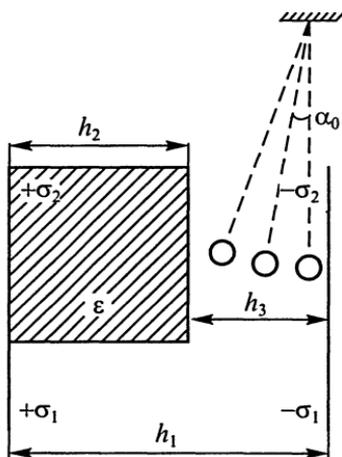


Рис. 3.10

$$E'_{\text{вн}} = \frac{E_{\text{вн}}}{\epsilon}; \quad E_{\text{нар}} = 0.$$

При частичном заполнении вакуума диэлектриком возможно местное увеличение напряженности в вакууме, доступное наблюдению. Рассмотрим две параллельные металлические пластины, заряженные с плотностью  $\pm\sigma_0$ . Расстояние между пластинами  $h_1$ . Поле между пластинами можно считать однородным. Заполним теперь диэлектриком ( $\epsilon$ ) часть пространства между пластинами шириной  $h_2$  и высотой, равной половине высоты пластин (рис. 3.10). Так как потенциал каждой из пластин постоянен, то

при внесении диэлектрика заряд на пластинах перераспределится, его плотность станет равна  $\pm\sigma_1$  в части, где диэлектрика нет, и  $\pm\sigma_2$  в части, где диэлектрик имеется. Но полное значение заряда, конечно, останется неизменным. Поэтому можно написать такие соотношения для разности потенциалов и плотности заряда:

$$\sigma_1 h_1 = \frac{\sigma_2}{\epsilon} h_2 + \sigma_2 h_3; \quad \sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_0.$$

Исключая  $\sigma_1$ , находим:

$$\sigma_2 = \frac{2\sigma_0 h_1}{h_1 + \frac{h_2}{\epsilon} + h_3} > \sigma_0.$$

Определяем теперь  $\sigma_1$ :

$$\sigma_1 = \frac{\frac{h_3}{\epsilon} + h_3}{h_1 + \frac{h_2}{\epsilon} + h_3} 2\sigma_0 < \sigma_0.$$

В пространстве шириной  $h_3$  напряженность поля будет равна

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} > \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = E_0,$$

т.е. она станет больше начального значения.

Если в это пространство (до внесения диэлектрика) поместить металлический шарик, подвешенный на нити и имеющий заряд, одноименный с зарядом правой пластины, то он отклонится на угол  $\alpha_0$ . При внесении диэлектрика угол отклонения возрастет, свидетельствуя о возрастании напряженности поля. При  $h_1 = 20$  мм,  $h_2 = 12$  мм,  $\epsilon = 8$  (стекло) получим увеличение напряженности в 4 раза, что вызовет вполне заметное увеличение угла отклонения шарика.

Во всех рассмотренных случаях проводники имели определенный заряд, но не были соединены с источниками. Если их присоединить к какому-либо источнику постоянной разности потенциалов, то при заполнении пространства между электродами диэлектриком разность потенциалов будет оставаться неизменной. Следовательно, должны меняться заряды на проводниках. Но поле в диэлектрике при этом изменяться не будет. Если же пространство, где существует поле, заполнено диэлектриком лишь частично, то в оставшейся полости напряженность поля увеличится.

### 3.5. Пьезоэлектрики, пироэлектрики, электреты, сегнетоэлектрики

Кроме диэлектриков, поляризация которых подчиняется закономерностям, рассмотренным в § 3.2, имеется большая группа диэлектриков, явления электризации которых более сложны.

**Пьезоэлектрики.** Пьезоэлектриками называют кристаллы, имеющие решетку из положительных и отрицательных ионов, у которых при деформации их в определенных направлениях на гранях, перпендикулярных направлению деформирующей силы, возникают поверхностные связанные заряды.

Если эти грани снабдить металлическими обкладками, то на их внешней поверхности появятся наведенные свободные заряды того же знака, что и связанные. Между обкладками получится разность потенциалов.

Классическим (и практически важным) пьезоэлектриком является кварц ( $\text{SiO}_2$ ). Элементарная ячейка его кристаллической решетки содержит три молекулы, состоящие из ионов кремния (положительных) и кислорода (отрицательных). Они схематически показаны на рисунке 3.11, *а* (недеформированный кристалл): положительные ионы – заштрихованные кружки, отрицательные – белые.

При сжатии кристалла в направлении  $X_1$  симметрия ячейки нарушается (рис. 3.11, *б*). На верхней грани кристалла появляется связанный отрицательный заряд, на нижней – такой же положительный. При растяжении (рис. 3.11, *в*) знаки зарядов изменяются на противоположные.

Поверхностная плотность заряда  $\sigma$  и равный ей модуль вектора поляризации  $\vec{P}$  при малых относительных деформациях пропорциональны возникшему в кристалле механическому напряжению  $\Sigma$ :

$$\sigma = P = d\Sigma.$$

Коэффициент пропорциональности – *пьезомодуль*  $d$  – выражается в кулонах на ньютон ( $\text{Кл} \cdot \text{Н}^{-1}$ ). Для кварца

$$d = 2 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/Н}.$$

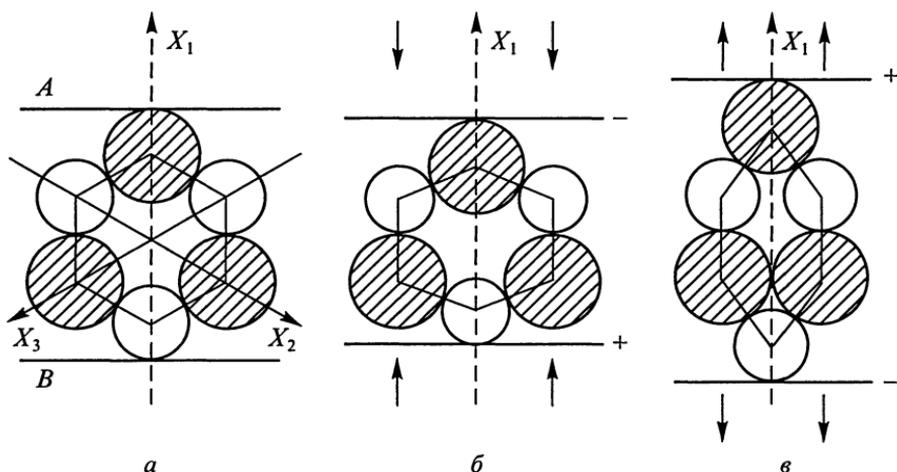


Рис. 3.11

Пьезоэффект был открыт братьями П. Кюри и Ж. Кюри в 1880 г. Существует и обратный эффект: при подаче на кристалл электрического напряжения он деформируется, причем знак деформации зависит от направления внешнего электростатического поля.

Пусть в кристалле создано механическое напряжение  $\Sigma = 10^4$  Па. При этом плотность возникших зарядов составит

$$\sigma = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^2$$

и в кристалле ( $\epsilon = 4,5$ ) образуется электростатическое поле с напряженностью

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} = 500 \text{ В/м.}$$

При толщине кристалла  $h = 10^{-2}$  м на обкладках его граней получится разность потенциалов  $U = 5$  В.

Пьезокристаллы применяются для измерения давлений, используются в микрофонах (прямой эффект) и телефонах (обратный эффект).

При подаче на пьезоэлектрик переменного электрического напряжения он приходит в вынужденные механические колебания. При резонансе (а пластина обладает собственной частотой, которая обратно пропорциональна толщине кристалла) амплитуда колебаний резко возрастает. Если кристалл опущен в жидкость, акустическое сопротивление которой не слишком сильно отличается от акустического сопротивления кристалла, то в жидкости возбуждаются интенсивные механические волны. Обычно применяют ультразвуковые частоты, при которых длина волны в жидкости невелика, — это дает возможность получить почти плоскую волну, распространяющуюся без заметного поглощения, что представляет практический интерес.

Ультразвуковую волну можно создать в твердом теле (например, в металлической отливке), где волна распространяется без заметного поглощения. Но если в металле имеется полость, случайно возникшая при изготовлении отливки, то на ней волна рассеется. Поэтому, зондируя металл ультразвуковой волной, можно находить, не разрушая его, внутренние дефекты.

Так как ускорения при ультразвуковых волнах очень велики — при амплитуде  $X_m = 10^{-6}$  м и частоте  $f = 10^5$  Гц амплитуда ускорения составит

$$a_m = 4\pi^2 f^2 X_m = 4 \cdot 10^5 \text{ м/с}^2 = 4 \cdot 10^4 g,$$

то ультразвуковые волны используются для очистки поверхности металлических тел (опущенных в жидкость), для создания эмульсий (взвесей капелек одной жидкости в другой, в ней не растворяющейся) и многих других практических надобностей.

**Пироэлектрики.** У некоторых пьезокристаллов проявляется пироэффект – возникновение связанных зарядов при изменении температуры пироэлектрика. Природа этого эффекта такова: пироэлектрик обладает постоянной самопроизвольно возникшей (спонтанной) поляризацией, связанной с несимметрией расположения в нем ионов разного знака.

При изменении температуры поляризация изменяется, что проявляется в возникновении на поверхности кристалла связанных зарядов. Типичным пироэлектриком является турмалин. При изменении его температуры на  $1^{\circ}\text{C}$  возникает пироэлектрическое поле с напряженностью порядка сотен вольт на метр. Пироэлектрики применяются в технике в качестве приемников различных излучений.

**Электреты.** Если полярный диэлектрик расплавить и поместить в сильное электростатическое поле, то его диполи частично ориентируются по полю. При охлаждении и затвердевании эта ориентация разрушается не полностью, так как повороты диполей в затвердевающем веществе затрудняются вязкостью. Таким образом и получается электрет, сохраняющий поляризацию долгое время (от нескольких дней до нескольких лет).

Электреты получают из воска, смол и других веществ с полярными молекулами. Они используются в качестве источников постоянного электрического поля в различных областях техники.

Освещая расплавленное вещество в сильном электрическом поле, получают после его затвердевания фотоэлектреты, применяющиеся в электрофотографии.

**Сегнетоэлектрики.** Наконец, среди пьезоэлектриков имеется группа веществ – сегнетоэлектриков, характеризующихся следующими особенностями.

Их поляризация достигает громадных значений (относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon \approx 10^4$ ). При этом она сильно зависит от напряженности приложенного поля и от предыдущей истории образца. При снятии поля сохраняется значительная остаточная поляризация.

Так, если сегнетоэлектрик периодически перезаряжать, то связь между поляризацией  $P$  и напряженностью  $E$  оказывается весьма сложной (рис. 3.12; стрелки на рисунке показывают направление процесса перезарядки).

Кривая, характеризующая запаздывание поляризации относительно изменений напряженности поля, называется, как и в случае неупругих деформаций, петлей гистерезиса. Существенно, что при снятии внешнего поля диэлектрик остается поляризованным (точка с координатами  $O$ ,

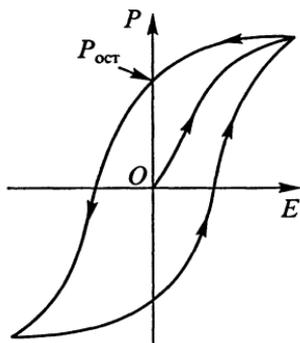


Рис. 3.12

$P_{ост}$ ), что находит практическое применение.

Поляризация сильно зависит от температуры, причем при некоторой температуре (ее называют температурой или точкой Кюри  $T_c$ , в честь П. Кюри, открывшего такое же явление у ферромагнетиков) сегнетоэлектрик теряет свои исключительные свойства. При охлаждении эти свойства восстанавливаются.

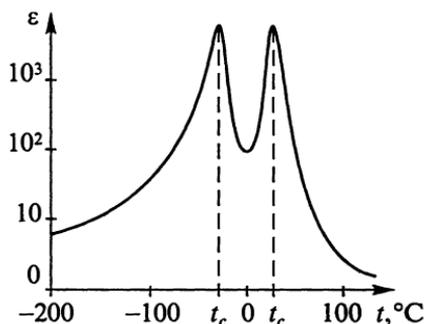


Рис. 3.13

На рисунке 3.13 показана зависимость относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  от температуры  $t$  для сегнетовой соли ( $KNC_4H_4O_6 + 4H_2O$ ) – первого из открытых физиками сегнетоэлектриков. Здесь имеются две точки Кюри ( $-18^\circ C$  и  $+24^\circ C$ ), около которых начинается резкий спад  $\epsilon$ . Сегнетоэлектрические свойства проявляются между этими температурами. Сегнетоэлектрики были открыты в 1920 г. Сегнетова соль была тщательно исследована И. В. Курчаковым (1903–1960) и П. П. Кобеко (1897–1954). В 40-х годах были открыты сегнетоэлектрические свойства титаната бария ( $BaTiO_3$ ) и иных керамик, подробно изученные Б. М. Вулом (1903–1984) и др.

Так как сегнетова соль обладает малой механической прочностью и очень гигроскопична, то ее практические применения сильно ограничены. Керамики и другие сегнетоэлектрики более прочны механически и более устойчивы по отношению к внешним неэлектрическим влияниям. Они широко применяются в технике в качестве различных датчиков и для изготовления малогабаритных конденсаторов большой емкости и конденсаторов, имеющих емкость, зависящую от приложенного поля (варикондов).

Физическая картина поведения сегнетоэлектриков весьма сложна и требует владения современной теорией твердого состояния.

Суть дела заключается в том, что кристалл сегнетоэлектрика состоит из нескольких сильно наэлектризованных, т. е. обладающих большим дипольным моментом, областей. Эти области (домены) имеют микроскопические размеры, но при этом число молекул в них громадно. Схематическое изображение доменной структуры приведено на рисунке 3.14.

Дипольные моменты доменов расположены беспорядочно, и суммарный дипольный момент

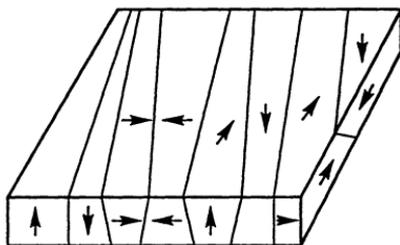


Рис. 3.14

ненаэлектризованного образца равен нулю. При создании в сегнетоэлектрике внешнего электрического поля моменты доменов постепенно ориентируются вдоль него. Кроме того, домены с моментами, направление которых близко к направлению поля, растут за счет других доменов.

При достаточно сильном поле все доменные моменты оказываются ориентированными. При этом поляризация кристалла велика, чему соответствует большое значение диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ . При уменьшении поля начинается нарушение ориентировки доменов, но оно происходит не сразу, чем и объясняется появление петли гистерезиса.

При нагревании образца выше точки Кюри доменная структура разрушается и сегнетоэлектрик превращается в обычный диэлектрик.

Взаимодействие дипольных моментов отдельных доменов приводит к появлению механических сил и деформации диэлектрика (электрострикция). Обычно она выражена довольно слабо. От обратного пьезоэффекта электрострикция отличается тем, что она пропорциональна квадрату напряженности внешнего поля, а не первой степени ее, т. е. не зависит от направления поля.

## Глава 4

# ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАРЯДОВ И ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

### 4.1. Энергия взаимодействия точечных зарядов и непрерывно распределенных зарядов

Найдем энергию электростатического взаимодействия двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ . Выберем начало координат системы отсчета в месте нахождения заряда  $q_1$ . Тогда в соответствии с законом Кулона выражение для силы, действующей на заряд  $q_2$  со стороны заряда  $q_1$ , будет иметь вид:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2 \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

При изменении положения второго заряда на  $d\vec{R}$  кулоновская сила совершит элементарную работу  $dA$ :

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{R} = \frac{q_1 q_2 dR}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Если заряды не участвуют в других взаимодействиях, то эта работа совершается за счет убыли потенциальной энергии электрического взаимодействия зарядов  $dW_e$ :

$$dA = -dW_e. \quad (4.1)$$

Следовательно, потенциальную энергию взаимодействия двух зарядов  $W_e$  можно выразить после интегрирования выражения (4.1) в виде:

$$W_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R} + C, \quad (4.2)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования, которую находят из граничного условия для потенциальной энергии взаимодействия зарядов, принимая ее равной нулю при стремлении  $R$  к бесконечности. С учетом граничного условия из (4.2) находим, что  $C = 0$ . Окончательно

выражение для энергии взаимодействия двух точечных зарядов можно записать в виде:

$$W_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (4.3)$$

Используя выражение для потенциала точечного заряда (1.23), энергию взаимодействия точечных зарядов запишем в виде:

$$W_e = \frac{q_1\Phi_1}{2} + \frac{q_2\Phi_2}{2}, \quad (4.4)$$

где  $\Phi_1$  – потенциал поля, создаваемый вторым зарядом в месте нахождения первого, а  $\Phi_2$  – потенциал поля, создаваемый первым зарядом в месте нахождения второго заряда. Полученное соотношение выражает энергию взаимодействия двух точечных зарядов в симметричном виде, позволяющем записать энергию взаимодействия для любого числа точечных зарядов.

Действительно, представим себе, что во взаимодействии участвуют  $n$  точечных зарядов. Энергию их взаимодействия можно выразить в виде суммы:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_1^n q_i \Phi_i, \quad (4.5)$$

где  $q_i$  –  $i$ -й электрический заряд, а  $\Phi_i$  – потенциал поля, создаваемый в месте нахождения  $i$ -го заряда всеми другими зарядами.

С помощью (4.5) можно найти энергию взаимодействия и для непрерывно распределенных зарядов с объемной плотностью  $\rho$ . Для этого следует в выражении (4.5) вместо точечного заряда  $q_i$  подставить бесконечно малую часть непрерывно распределенного заряда  $dq = \rho dV$  в объеме  $dV$  и заменить операцию суммирования интегрированием по объему, занимаемому системой непрерывно распределенных зарядов. В результате (4.5) преобразуется к виду:

$$W_e = \frac{1}{2} \int \rho \Phi dV, \quad (4.6)$$

где  $\Phi$  – потенциал, создаваемый внешними зарядами в месте расположения заряда  $dq$ .

Полученное выражение позволяет определить не только энергию взаимодействия между зарядами, но и собственную энергию каждого из зарядов.

## 4.2. Энергия заряженного проводника и заряженного конденсатора

В качестве примера расчета собственной энергии по формуле (4.4) рассмотрим энергию уединенного проводника, имеющего электрическую емкость  $C$ .

Так как все точки проводника имеют одинаковый потенциал  $\varphi$ , то энергию уединенного проводника с зарядом  $q$  можно выразить следующим образом:

$$W_e = \frac{1}{2} \int \rho dV = \frac{1}{2} \varphi q. \quad (4.7)$$

Учитывая связь между потенциалом проводника и его зарядом ( $\varphi = \frac{q}{C}$ ), выражение для собственной энергии уединенного проводника (4.7) перепишем в виде:

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C \varphi^2. \quad (4.8)$$

Сравнивая (4.6–4.8) с выражением (1.20), можно заметить, что они отличаются друг от друга ровно в два раза. Это объясняется тем, что уравнение (1.20) описывает работу при перемещении заряда в уже существующем постоянном электрическом поле. А при постепенной зарядке проводника отдельные элементарные заряды вносятся в постепенно возрастающее поле. Сначала на незаряженный шар передается некоторый элементарный заряд  $dq$ ; при этом работа не совершается. Следующая порция заряда передается уже в поле проводника с зарядом  $dq$ , что требует совершения некоторой работы. Если проводник заряжен до потенциала  $\varphi$ , то работа по сообщению проводнику дополнительного заряда  $dq$  равна  $dA = \varphi dq = \frac{q dq}{C}$ , так как  $\varphi = \frac{q}{C}$ .

Полная работа зарядки проводника, равная энергии его электрического поля, равна:

$$A = C^{-1} \int_0^q q dq = \frac{1}{2} \varphi q,$$

что соответствует ранее полученному результату.

Выражение (4.8) можно использовать для нахождения энергии электрического поля конденсатора с той лишь разницей, что вместо потенциала проводника  $\varphi$  следует использовать значение разности потенциалов между обкладками конденсатора  $U$ , а под  $C$  следует понимать емкость конденсатора.

Вообразим две заряженные плоскости, расположенные бесконечно близко друг к другу. При поверхностной плотности заряда  $\pm \sigma$  поле между плоскостями имеет напряженность

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Разведем плоскости на расстояние  $h$ . На заряд, находящийся на одной из плоскостей, действует поле заряда, находящегося на другой плоскости; напряженность этого поля равна  $E_1 = \frac{E}{2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  (так как сам на себя заряд не действует). Поэтому работа по перемещению заряда, сосредоточенного на поверхности площадью  $S$ , равна

$$A = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} Sh = \frac{q^2 h}{2\varepsilon_0 S} = \frac{1}{2} CU^2. \quad (4.9)$$

Она определяет электростатическую энергию:  $A = W_e$ .

### 4.3. Энергия и плотность энергии электростатического поля

Электрическую энергию уединенного проводника или конденсатора можно выразить через напряженность или индукцию электростатического поля.

Например, для плоского конденсатора выражение (4.9) может быть записано следующим образом:

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 Sh. \quad (4.10)$$

Из выражения (4.10) видно, что энергия конденсатора пропорциональна объему конденсатора  $V = Sh$ , что позволяет рассматривать энергию, запасенную в конденсаторе, как характеристику электростатического поля с определенным значением объемной плотности энергии поля:

$$w_e = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{1}{2} ED. \quad (4.11)$$

Подобная трактовка энергии заряженных тел позволяет ввести полевые представления для описания энергии электрических взаимодействий. Энергия таких взаимодействий выражается интегралом:

$$W_e = \int_V w_e dV. \quad (4.12)$$

В рамках электростатики оба подхода при расчете энергии взаимодействия зарядов дают одинаковый результат, но, как мы убедимся при изучении электродинамических явлений, полевая трактовка является более плодотворной.

В качестве примера, иллюстрирующего эквивалентность обеих интерпретаций, рассмотрим энергию поля, связанного с зарядом  $Q_0$ , находящимся на проводящем шаре радиусом  $R_0$ , имеющем потенциал  $\varphi_0$ . Назовем ее собственной энергией заряженного шара.

Окружим шар концентрическим шаровым слоем объемом  $dV = 4\pi R^2 dR$ .

Энергия поля в этом объеме равна  $dW_e = w_e \cdot 4\pi R^2 dR$ , а полная энергия есть:

$$W_e = \int_0^{w_e} dW_e = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_0}^{\infty} \frac{dR}{R^2} = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R_0} = \frac{1}{2} \Phi_0 Q_0.$$

Полученное выражение совпадает с выражением (1.8).

Полевой подход позволяет с иных позиций рассмотреть взаимодействие двух зарядов. Снова возьмем систему из двух взаимодействующих точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , создающих в окружающем пространстве поля с векторами напряженности  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  соответственно. Напряженность в каждой точке пространства в соответствии с принципом суперпозиции определяется векторной суммой  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (4.13)$$

Квадрат  $E$  равен:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2. \quad (4.14)$$

В соответствии с (4.12) полная энергия системы двух зарядов:

$$W_e = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int E_1^2 dV + \frac{\epsilon_0}{2} \int E_2^2 dV + \epsilon_0 \int E_1 E_2 dV. \quad (4.15)$$

Первые два слагаемых в (4.15) представляют собой собственную энергию каждого из взаимодействующих зарядов, третий интеграл выражает энергию взаимодействия зарядов.

## Глава 5

# ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### 5.1. Электрический ток. Плотность тока. Сила тока

Если конденсатор емкостью  $10 \dots 20$  мкФ зарядить до разности потенциалов порядка сотен вольт (ее нужно контролировать электрометром) и затем соединить его обкладки с лампой накаливания, вблизи которой расположена магнитная стрелка, способная поворачиваться вокруг какой-либо оси, то будут наблюдаться следующие явления: лампа вспыхнет на доли секунды, магнитная стрелка выйдет на короткое время из положения равновесия, стрелка электрометра очень быстро вернется в нулевое положение.

Следовательно, заряды, бывшие на конденсаторе, и энергия его электростатического поля исчезнут; при этом будет совершена механическая работа над стрелкой и выделится некоторое количество теплоты в нити лампы. Объяснить наблюдавшиеся факты можно следующим образом: при соединении обкладок конденсатора металлическим проводником (лампа с подводными проводами) в металле создается электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$  и в проводнике возникает упорядоченное движение зарядов, называемое *электрическим током*. В результате этого конденсатор разряжается. Во время существования тока проводник нагревается, а в окружающем пространстве появляется магнитное поле, действующее на магнитную стрелку. Энергия электрического поля конденсатора переходит в кинетическую энергию магнитной стрелки, энергию беспорядочного движения молекул проводника и энергию магнитного поля.

Нам уже известно, что при электростатических опытах в проводниках перемещаются электроны, а положительные ионы остаются на своих местах в кристаллической решетке проводника.

При упорядоченном движении зарядов в металлическом проводнике мы также имеем дело с электронами. В § 6.1 будут описаны опыты, доказывающие справедливость этого утверждения.

Если вместо лампы воспользоваться трубкой, заполненной водным раствором какой-нибудь неорганической соли (например, хлорида натрия) или кислоты (например, соляной), то конденсатор

также разрядится; у поверхности электродов, опущенных в раствор, выделится газ, свидетельствующий о возникновении в растворе химических превращений. Их анализ (см. § 6.3) показывает, что в жидкости возникает при этом упорядоченное движение ионов обоих знаков (но свободных электронов в жидкости нет), происходящее во встречных направлениях, так как положительные ионы движутся в направлении электрического поля, а отрицательные – против него. Независимо от того, с какими зарядами мы имеем дело, можно дать формальное описание процесса, что и делается ниже.

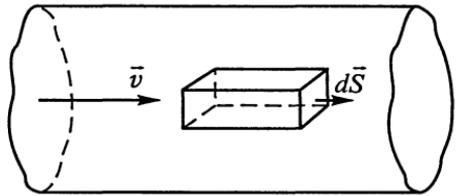


Рис. 5.1

Линии, вдоль которых происходит упорядоченное движение зарядов, называют *линиями тока*. За их направление (по историческим причинам) принято считать направление движения положительных зарядов.

Пусть концентрация свободных электронов в металле равна  $n$ , а заряд каждого носителя равен  $e$ . Выделим внутри проводника прямоугольник с сечением площадью  $dS$ , перпендикулярным вектору скорости упорядоченного движения зарядов  $\vec{v}$ . Сечение характеризуется нормальным к нему вектором  $d\vec{S}$ . Построим на этом сечении параллелепипед высотой, численно равной скорости  $v$  (рис. 5.1). За 1 с через выделенное сечение пройдут те и только те заряды, которые находятся внутри параллелепипеда. Они перенесут заряд

$$j = nev. \quad (5.1)$$

Если рассматривать  $\vec{j}$  как вектор, то предыдущее выражение примет вид:

$$\vec{j} = ne\vec{v}.$$

Физическую величину  $\vec{j}$  называют *плотностью тока*; она численно равна заряду, проходящему в 1 с через единичное сечение проводника, перпендикулярное вектору скорости зарядов. Заметим, что в уравнении (5.1) при изменении знака заряда меняется и знак скорости, так что знак вектора плотности тока не изменяется.

При постоянном токе вектор  $\vec{j}$  постоянен по всему выбранному сечению проводника. Поэтому, суммируя (5.1) по сечению, получим:

$$\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = ne \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = nevS = I, \quad (5.2)$$

где  $I$  – *сила тока*, численно равная полному заряду  $q$ , проходящему через сечение проводника в единицу времени.

При токе, меняющемся во времени, это определение заменяется более общим:

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (5.3)$$

*Сила тока – скалярная величина.*

Основной единицей в СИ является единица силы тока – ампер (А). Точное определение ампера (связанное со способом измерения на опыте) будет дано позже.

Как уже указывалось в § 1.2, при силе тока 1 А через сечение проводника в 1 с проходит заряд, равный 1 Кл, следовательно,

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}.$$

Из (5.1) видно, что единицей плотности тока является  $1 \text{ А}/\text{м}^2$ .

Если скорость упорядоченного движения зарядов не меняется (для этого в описанном выше опыте следовало бы поддерживать заряд конденсатора неизменным), то плотность тока и сила тока также остаются постоянными во времени. Такой ток называют *постоянным* (или *стационарным*). В этой главе (кроме § 5.12) изучается именно постоянный ток. В этом случае уравнение (5.3) можно переписать в виде:

$$I = \frac{q}{t}, \quad (5.4)$$

где  $q$  и  $t$  – конечные (а не бесконечно малые) значения заряда и промежутка времени.

В заключение подчеркнем еще раз, что сила тока – скалярная характеристика процесса. Распространенное выражение «направление тока» имеет смысл только по отношению к вектору плотности тока.

## 5.2. Закон Ома для участка цепи

При токе заряды движутся, так как внутри проводника существует электрическое поле, характеризуемое напряженностью  $\vec{E}$ , которое вызывает и поддерживает упорядоченное движение зарядов. Поэтому между концами проводника с током существует разность потенциалов  $U$  (ее часто называют напряжением или падением напряжения на соответствующем участке). Сила тока является функцией этой разности потенциалов:

$$I = f(U).$$

Вид этой функции может быть довольно сложен, например при газовом разряде. Но есть простой частный случай, очень важный практически (токи в металлах и жидкостях), когда при данных внеш-

них условиях (в частности, температуре) отношение разности потенциалов  $U$  к силе тока  $I$  оказывается постоянным, не зависящим от  $U$ :

$$\frac{U}{I} = R = \text{const},$$

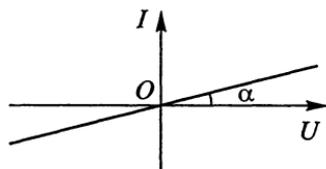


Рис. 5.2

т. е.

$$I = \frac{U}{R}. \quad (5.5)$$

Это известный *закон Ома* для участка цепи.

Величина  $R$  называется *сопротивлением* проводника и выражается в о м а х (Ом):

$$1 \text{ Ом} = 1 \text{ В}/1 \text{ А}.$$

График, изображающий зависимость силы тока  $I$  от разности потенциалов  $U$ , называется *вольт-амперной характеристикой* проводника. В случае выполнения закона Ома вольт-амперная характеристика – прямая линия, проходящая через начало координат (рис. 5.2). Наклон характеристики определяет значение сопротивления:

$$\text{ctg } \alpha = R.$$

Используется и обратная сопротивлению величина  $G = \frac{1}{R}$ , называемая *проводимостью проводника*. Единицей проводимости является с и м е н с (См):

$$1 \text{ См} = 1 \text{ Ом}^{-1} = 1 \text{ А}/\text{В}.$$

Как показывает опыт, в металлическом проводнике концентрация свободных электронов (электронов проводимости) не зависит от напряженности поля и, следовательно, от приложенного к проводнику напряжения. Кроме того, при постоянном токе в однородном проводнике плотность тока во всех участках поперечного сечения проводника одинакова – ток распределен по сечению равномерно.

Применим закон Ома к однородному металлическому проводнику длиной  $l$  и сечением  $S$ , между концами которого создана разность потенциалов  $U$ , поддерживающая силу тока  $I$ . Вследствие симметричной формы провода электрическое поле в нем имеет напряженность, равную

$$E = \frac{U}{l},$$

а модуль плотности тока равен

$$j = \frac{I}{S}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (5.5), получим:

$$\frac{El}{jS} = R.$$

Откуда

$$j = \frac{l}{RS} E = \frac{E}{\rho} = \gamma E, \quad (5.6)$$

где  $\rho$  и  $\gamma$  – соответственно удельное сопротивление и удельная проводимость вещества проводника.

За положительное направление вектора плотности тока принимают направление скорости упорядоченного перемещения положительных зарядов, т. е. направление вектора напряженности, поэтому выражение (5.6) можно записать в векторной форме:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (5.7)$$

Это уравнение представляет собой закон Ома в дифференциальной форме, применимой в каждой точке внутри проводника.

Удельное сопротивление

$$\rho = R \frac{S}{l} \quad (5.8)$$

численно равно сопротивлению проводника, имеющего форму куба со стороной, равной 1 м. Единицей удельного сопротивления в СИ является  $\text{ом} \cdot \text{метр}$ . В электротехнических таблицах часто приводится более удобная для практики величина  $\rho_{\text{табл}}$ , определяющая сопротивление проводника длиной 1 м с поперечным сечением  $1 \text{ мм}^2$ . Очевидно,  $\rho_{\text{табл}}$  в  $10^6$  раз превышает  $\rho$ .

Удельная проводимость

$$\gamma = \frac{1}{\rho}$$

связана с проводимостью проводника соотношением:

$$\gamma = G \frac{l}{S}.$$



---

**Ом Георг Симон (1787–1854)**, немецкий физик. Ввел понятия ЭДС и проводимости, экспериментально установил законы постоянного тока. В акустике выяснил, что ухо реагирует на амплитуды и частоты составляющих сложного звука, но нечувствительно к разностям фаз этих составляющих.

Из (5.8) видно, что сопротивление  $R$  проводника цилиндрической формы с площадью поперечного сечения  $S$  и длиной  $l$ , можно определить по формуле:

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (5.9)$$

Если проводник имеет форму, отличную от цилиндрической, то его сопротивление, как правило, зависит от геометрических параметров более сложным образом.

### 5.3. Электропроводность. Температурный коэффициент проводимости

Для более глубокого понимания физического смысла электропроводности допустим для общности, что в проводнике имеются заряженные частицы обоих знаков с зарядом  $\pm e$ ; концентрация их соответственно равна  $n_+$  и  $n_-$ . При постоянном токе средние скорости частиц  $v_+$  и  $v_-$  постоянны. Выделим в проводнике (рис. 5.3) элементарное сечение  $dS$  (характеризуется вектором  $d\vec{S}$ ), нормальное к направлению напряженности поля  $\vec{E}$  в проводнике; построим на нем два цилиндра с высотами  $v_+ dt$  и  $v_- dt$ .

За время  $dt$  через выбранное сечение пройдут все положительно заряженные частицы из правого цилиндра и все отрицательно заряженные частицы из левого цилиндра; кроме них никакие заряженные частицы через сечение не пройдут. Поэтому полный заряд, прошедший за время  $dt$ , равен

$$dQ = (n_+ e_+ \vec{v}_+ dt + n_- e_- \vec{v}_- dt) \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot d\vec{S} \cdot dt,$$

и плотность тока оказывается равной

$$\vec{j} = n_+ e_+ \vec{v}_+ + n_- e_- \vec{v}_-. \quad (5.10)$$

Произведения  $e_+ \vec{v}_+$  и  $e_- \vec{v}_-$  имеют одинаковые знаки; следовательно, перемещение положительных зарядов в некотором направлении равноценно перемещению отрицательных зарядов в противоположном направлении.

При постоянном токе концентрации  $n$  и скорости  $v$  постоянны, кроме того, в металле и в жидкости скорости пропорциональны напряженности поля:

$$\vec{v}_+ = \mu_+ \vec{E}; \quad \vec{v}_- = \mu_- \vec{E}.$$

Постоянные коэффициенты  $\mu_+$  и  $\mu_-$  называются *подвижностями*.

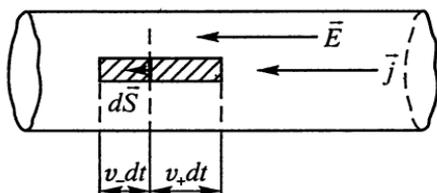


Рис. 5.3

Подвижность численно равна скорости частиц в поле единичной напряженности. В СИ единицей подвижности является  $1 \text{ м}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Итак, уравнение (5.10) принимает вид

$$\vec{j} = (n_+ e_+ \mu_+ + n_- e_- \mu_-) \vec{E},$$

и удельная проводимость равна

$$\gamma = n_+ e_+ \mu_+ + n_- e_- \mu_-.$$

Если проводимость материала не зависит от приложенного поля ( $\gamma = \text{const}$ ), то такой проводник подчиняется закону Ома. В достаточно большом интервале напряженностей это справедливо для металлов, в более ограниченном – для жидкостей, в очень ограниченном – для газов и полупроводников. Если подвижности или концентрации зависят от напряженности поля, то закон Ома не выполняется; эти случаи мы пока рассматривать не будем.

Отметим что средние скорости упорядоченного движения носителей тока в твердых телах и жидкостях невелики, так как из-за нагревания допустимы лишь относительно небольшие плотности тока.

Так, для металла плотность тока  $j = 5 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2$  уже довольно велика. При удельной электрической проводимости металла  $\gamma = 5 \cdot 10^7 \text{ См/м}$  ей отвечает поле с напряженностью  $E = 0,1 \text{ В/м}$ . Известно, что в металле проводимость обеспечивается электронами проводимости; концентрация их примерно равна концентрации атомов:

$$n_- = 10^{29} \text{ м}^{-3}.$$

Отсюда находим среднюю скорость упорядоченного движения:

$$v_- = \frac{j}{n_- e} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}.$$

Скорость упорядоченного движения частиц в электрическом поле – скорость их дрейфа – в металле составляет ничтожную долю их средней скорости хаотического (теплового) движения. Для жидкостей подвижности и скорости получаются еще меньшими; в разреженных газах они значительно возрастают.

Опыт показывает, что вещества обладают различной удельной электрической проводимостью, меняющейся с температурой. Наибольшей удельной проводимостью обладают металлы. При небольших изменениях температуры  $\gamma$  описывается практически полезной формулой

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + \alpha t},$$

где  $\gamma_0$  – удельная проводимость при  $0^\circ \text{С}$ ,  $\alpha$  – положительный температурный коэффициент, равный  $(3,3 \dots 6,3) \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ ,  $t$  – температура по Цельсию.

При очень низких температурах удельная проводимость принимает большое постоянное значение (например, у чистой меди) либо

же делается неопределенно большой (состояние сверхпроводимости, наступающее, например, у свинца при  $T_k = 7$  К). При плавлении металла проводимость меняется плавно.

Водные растворы (электролиты, имеющие ионную проводимость) обладают гораздо меньшей удельной проводимостью, уменьшающейся при охлаждении (отрицательный температурный коэффициент, равный примерно  $-0,02 \text{ K}^{-1}$ ). При затвердевании раствора электрическая проводимость уменьшается весьма резко (на несколько порядков).

Электрическая проводимость газов сложно зависит от степени их ионизации и температуры. Хотя и невозможно выразить эту зависимость в общем виде, но можно отметить, что при нагревании проводимость растет.

Сплавы металлов могут иметь самые различные температурные коэффициенты. Сплавы с малым коэффициентом ( $\alpha \approx 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ) применяются для изготовления эталонных сопротивлений.

Полупроводники (графит, германий, кремний) имеют малую (по сравнению с металлами) удельную электрическую проводимость, сильно возрастающую при нагревании полупроводника.

Несовершенные диэлектрики (хлорид натрия в твердом состоянии, стекло) при комнатной температуре обладают довольно малой удельной электрической проводимостью, очень сильно растущей при нагревании вещества. У более совершенных диэлектриков (кварц, янтарь) при невысоких температурах удельная проводимость очень мала ( $10^{-18} \text{ См} \cdot \text{м}^{-1}$ ), однако и она возрастает при сильном нагревании.

Нулевой электрической проводимостью обладает только вакуум.

#### **5.4. Расчет сопротивления соединения проводников методом эквивалентного замещения**

Закон Ома имеет большое практическое значение, позволяя рассчитывать сложные электрические цепи. Один из методов расчета сложных электрических цепей называется методом эквивалентного замещения. Идея метода заключается в замене сложного соединения проводников одним резистором с таким эквивалентным сопротивлением, чтобы токи в ветвях цепи и напряжения между любыми точками цепи остались прежними. Если условие эквивалентности выполнено, то значение эквивалентного сопротивления легко найти из закона Ома:

$$R_3 = \frac{U}{I},$$

где  $R_3$  – значение эквивалентного сопротивления резистора,  $U$  – напряжение на его концах,  $I$  – ток через резистор.

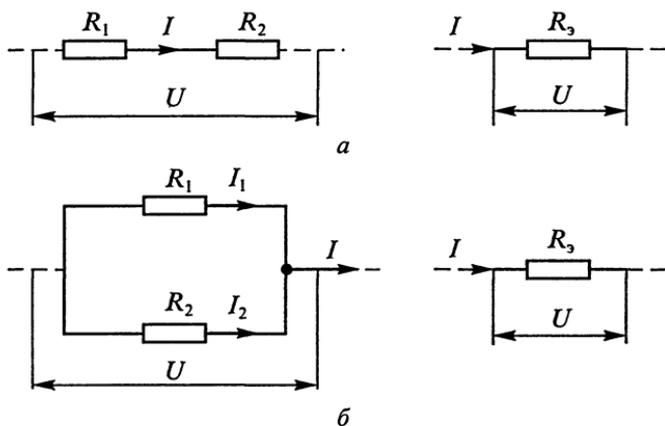


Рис. 5.4

Используя метод эквивалентного замещения, найдем сопротивление последовательного и параллельного соединения резисторов с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ . При последовательном соединении (рис. 5.4, а) через каждый из резисторов протекает одинаковый ток  $I$ . Напряжение на каждом из резисторов равно  $U_1 = IR_1$  и  $U_2 = IR_2$  соответственно. Заменим последовательно соединенные резисторы одним эквивалентным, так чтобы напряжение на нем было равно сумме напряжений  $U_1 + U_2$ , а ток был равен  $I$ . Применяя закон Ома для участка цепи с эквивалентным резистором, получим:

$$R_3 = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2}{I} = R_1 + R_2. \quad (5.11)$$

Применяя метод эквивалентного замещения к любому числу последовательно соединенных резисторов, получим правило для нахождения общего сопротивления такого соединения: *при последовательном соединении произвольного числа резисторов их сопротивления складываются:*

$$R_3 = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n. \quad (5.12)$$

Найдем эквивалентное сопротивление параллельного соединения двух резисторов с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ , используя метод эквивалентного замещения. При параллельном соединении (рис. 5.4, б) напряжение на резисторах  $U$  одинаковое, токи, протекающие через резисторы, разные:  $I_1 = \frac{U}{R_1}$ ,  $I_2 = \frac{U}{R_2}$ . Если заменить два параллельно соединенных резистора одним, так чтобы напряжение на нем было равно  $U$ , а ток, протекающий через него, был равен сумме токов  $I_1$  и  $I_2$ , то в цепи ничего не изменится. Приме-

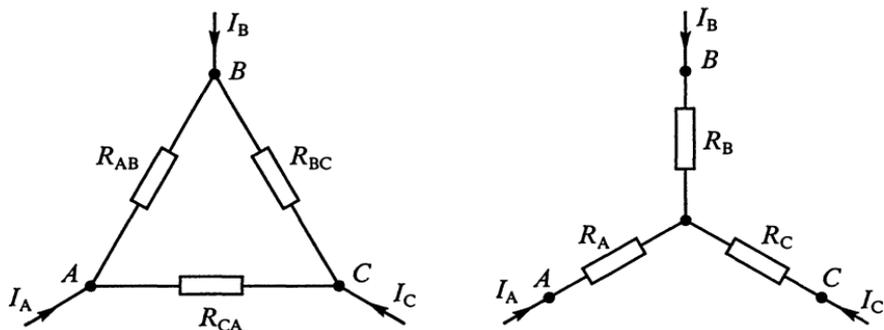


Рис. 5.5

няя закон Ома для расчета значения эквивалентного сопротивления, получим:

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (5.13)$$

При параллельном соединении резисторов их проводимости складываются. Подобное правило выполняется при любом числе параллельно соединенных резисторов:

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (5.14)$$

С помощью метода эквивалентного замещения можно рассчитывать более сложные электрические цепи. Например, можно пересчитать соединение резисторов «звездой» в соединение «треугольником» и наоборот. На рисунке 5.5 приведены схемы соединения резисторов «треугольником» и «звездой». Каждое соединение, как видно из рисунка, имеет три вершины –  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Сопротивления резисторов, образующих стороны «треугольника», обозначим через  $R_{AB}$ ,  $R_{BC}$ ,  $R_{CA}$ , а сопротивления резисторов, являющихся лучами «звезды», обозначим через  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  соответственно.

Замена одного соединения другим считается эквивалентной, если токи в ветвях электрической цепи, содержащих точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , и напряжения между этими точками не меняются при такой замене. Для упрощения решения будем считать ток  $I_A$  равным нулю. В этом случае резисторы сопротивлениями  $R_B$  и  $R_C$  в «звезде» оказываются соединенными последовательно между точками  $A$  и  $C$ , а резисторы сопротивлениями  $R_{BC}$  и  $(R_{AB} + R_{CA})$  в треугольнике между этими же точками соединены параллельно. Для выполнения условия эквивалентности необходимо выполнение равенства:

$$R_B + R_C = \frac{R_{BC}(R_{AB} + R_{CA})}{R_{BC} + R_{AB} + R_{CA}}. \quad (5.15)$$

Полагая равным нулю ток  $I_B$ , а затем ток  $I_C$ , запишем соответствующие условия эквивалентности в виде:

$$R_A + R_C = \frac{R_{CA}(R_{AB} + R_{BA})}{R_{BC} + R_{AB} + R_{CA}}, \quad (5.16)$$

$$R_B + R_A = \frac{R_{AC}(R_{BC} + R_{CA})}{R_{BC} + R_{AB} + R_{CA}}. \quad (5.17)$$

Уравнения (5.15)–(5.17) представляют собой систему уравнений, позволяющих произвести пересчет «звезды» в «треугольник», или «треугольника» в «звезду». В первом случае следует считать, что сопротивления резисторов, образующих звезду, известны, а неизвестными величинами являются сопротивления резисторов треугольника. Используя уравнения (5.15)–(5.17), получим:

$$\begin{aligned} R_{AB} &= R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C}, \\ R_{BC} &= R_B + R_C + \frac{R_B R_C}{R_A}, \\ R_{CA} &= R_C + R_A + \frac{R_C R_A}{R_B}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

При пересчете «треугольника» в звезду известными величинами являются сопротивления резисторов «треугольника», неизвестными – сопротивления резисторов «звезды». После решения системы уравнений (5.15)–(5.17), получим:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{R_{CA} R_{AB}}{R_{BC} + R_{AB} + R_{CA}}, \\ R_B &= \frac{R_{BC} R_{AB}}{R_{BC} + R_{AB} + R_{CA}}, \\ R_C &= \frac{R_{CA} R_{BC}}{R_{BC} + R_{AB} + R_{CA}}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Выражения (5.18) и (5.19) позволяют произвести эквивалентную замену «звезды» на «треугольник» и наоборот.

## 5.5. Сторонние силы. Электродвижущая сила. Источники тока

В § 5.1 был рассмотрен ток, возникающий в проводнике, соединяющем две пластины предварительно заряженного конденсатора. В этом случае поле в проводнике создается зарядами, находя-

щимися на пластинах. Так как при протекании тока заряд конденсатора уменьшается, то сила тока изменяется со временем, так чтобы потенциалы всех точек проводников стали одинаковыми. Для получения постоянного тока в проводнике необходимо, чтобы в совокупности с другими проводниками он образовывал замкнутую электрическую цепь, – лишь в этом случае заряд в любой точке цепи не будет накапливаться со временем. Кроме того, на концах проводника необходимо поддерживать постоянную разность потенциалов. Для этого необходимо действие в электрической цепи сил неэлектростатического происхождения. Действительно, если бы во всех участках замкнутой электрической цепи плотность тока определялась бы только напряженностью электрического поля, то циркуляция этого поля по замкнутому контуру цепи оказалась бы отличной от нуля. Но, как известно, электростатическое поле есть поле потенциальное, циркуляция вектора напряженности которого тождественно равна нулю:

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Значит, силы электростатического происхождения не могут обеспечить постоянный ток в замкнутой цепи. Отсюда следует, что для поддержания постоянного тока в электрической цепи должны действовать силы неэлектростатического происхождения, получившие название сторонних сил. Для описания их действия на заряды вводится понятие напряженности сторонних сил  $\vec{E}_{\text{ст}}$ . *Напряженностью сторонних сил называется векторная физическая величина, равная отношению силы, действующей на положительный заряд, к этому заряду при неэлектростатическом взаимодействии.*

Постулируется, что напряженность сторонних сил, так же как и напряженность электростатического поля, подчиняется принципу суперпозиции.

Следовательно, если на участке электрической цепи действуют, кроме электрических, сторонние силы, то результирующая напряженность будет определяться векторной суммой напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и напряженности сторонних сил  $\vec{E}_{\text{ст}}$ . В этом случае закон Ома в дифференциальной форме примет вид:

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}). \quad (5.20)$$

Циркуляция результирующего вектора  $\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}$  по замкнутому контуру электрической цепи равна циркуляции по контуру цепи вектора напряженности только сторонних сил, так как циркуляция вектора напряженности электрического поля равна нулю из-за его потенциальности:

$$\int_L (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}) \cdot d\vec{l} = \int_L \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l}, \quad (5.21)$$

где  $L$  обозначает контур цепи, по которому производится интегрирование в (5.21).

Выражение для циркуляции напряженности сторонних сил по контуру цепи имеет простой физический смысл. Оно равно отношению работы, производимой сторонними силами по перемещению положительного заряда в замкнутой электрической цепи к этому заряду. Эта величина носит название электродвижущей силы (ЭДС) –  $\mathcal{E}$ . Единицей ЭДС в СИ является вольт.

Силы неэлектростатической природы создаются специальными техническими устройствами, называемыми источниками ЭДС или источниками тока. Наличие в электрической цепи источника ЭДС является вторым необходимым условием существования постоянного тока в цепи. Источниками тока могут быть, например, гальванические элементы, где разность потенциалов между разнородными электродами, помещенными в раствор электролита, поддерживается за счет химических процессов, происходящих в элементе, индукционные генераторы, в которых разность потенциалов возникает на концах проводящей обмотки, вращающейся в магнитном поле, и др.

Источник ЭДС обладает некоторым внутренним сопротивлением, зависящим от его устройства; это сопротивление оказывается последовательно включенным в общую электрическую цепь. Поэтому при протекании тока разность потенциалов (падение напряжения) на зажимах источника тока оказывается меньше, чем ЭДС, на величину  $Ir$ , где  $I$  – сила тока,  $r$  – внутреннее сопротивление. В существовании внутреннего сопротивления у источника тока легко убедиться, подключив вольтметр к зажимам источника и уменьшая внешнее сопротивление цепи. Измеряемая вольтметром разность потенциалов  $U$  уменьшается при увеличении силы тока по закону:

$$U = \mathcal{E} - Ir.$$

Следовательно, измерять ЭДС нужно высокоомным вольтметром при разомкнутой цепи.

Источники ЭДС можно разбить на два различных класса:

1. При  $r \ll R$  во внешней цепи существует практически неизменная разность потенциалов, равная ЭДС. Такие источники называют источниками напряжения, или ЭДС. Здесь сила тока обратно пропорциональна сопротивлению  $R$ .

2. При  $r \gg R$  в цепи получается практически неизменный ток, а напряжение меняется пропорционально нагрузочному сопротивлению  $R$ . Такие источники называют источниками тока. Препода-

вателю физики обычно приходится в школьном физическом кабинете иметь дело с источниками напряжения.

Возникновение поля внутри проводника с током сопровождается появлением на проводнике поверхностных зарядов. Действительно, зажимы источника тока имеют различные потенциалы, следовательно, на них создается избыток зарядов того или другого знака. Между ними (в окружающем диэлектрике) создается электрическое поле. Когда к зажимам подключают провод, то напряженность поля в нем, вообще говоря, оказывается направленной под углом к оси провода. За счет продольной составляющей напряженности поля (параллельной оси) носители зарядов будут приобретать упорядоченную скорость, образуя ток. За счет поперечной составляющей носители будут перемещаться к поверхности провода, пока поперечное поле в проводе не окажется скомпенсированным. При этом на поверхности появятся заряды с поверхностной плотностью  $\sigma$  и возникнет нормальная к его поверхности составляющая напряженности электрического поля, причем

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon},$$

где  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды, окружающей провод.

Продольная составляющая напряженности поля на поверхности провода непрерывна и, следовательно, параллельна поверхности (иначе имелся бы поток зарядов на поверхность даже в установившемся состоянии). Поэтому вне провода вектор  $\vec{E}$  образует с поверхностью некоторый угол, отличный от прямого. Такое состояние устанавливается и длительно поддерживается неизменным благодаря действию сторонних сил.

Так как при постоянном токе многие важные характеристики процесса постоянны во времени (сила тока, напряжение, напряженность поля), то постоянный ток и связанные с ним электрическое и магнитное поля называют стационарными.

## 5.6. Основные сведения об источниках ЭДС

В § 5.5 было выяснено, что для поддержания постоянного тока в замкнутой проводящей цепи в эту цепь необходимо включить источник ЭДС, где внешние силы неэлектростатической природы обеспечивают разделение зарядов и сообщают им энергию.

Перечислим некоторые распространенные источники ЭДС.

**1. Электростатическая машина.** Эта машина позволяет получить большую разность потенциалов (до десятков киловольт), но очень малые силы токов (миллиамперы), так как ею разделяется в секунду

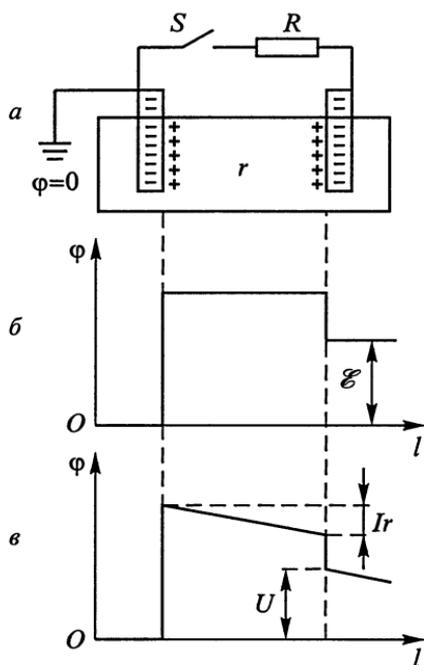


Рис. 5.6

мало зарядов. В этой машине заряды, разделившиеся при трении, удаляются затем друг от друга; за счет механической работы, затрачиваемой на их удаление, создается энергия электростатического поля. Для увеличения производительности машины используется также явление электростатической индукции.

Более совершенные конструкции (генератор Ван де Граафа, рассмотренный в § 2.1), где небольшие порции заряда переносятся на движущейся ленте против электрических сил и поступают на заряженное тело, позволяют получить высокие напряжения (мегавольты), но малые токи (миллиамперы).

## 2. Химические источники ЭДС.

### А. Гальванические элементы.

В этих источниках, впервые созданных А. Вольта, разделение зарядов происходит за счет энергии химических реакций. Гальванический элемент (рис. 5.6, а) представляет собой сосуд с водным раствором кислоты или соли; в него опущены два разнородных металлических электрода. Происходит частичное (незначительное) растворение металла; в раствор поступают положительно заряженные ионы, а в металле остаются избыточные электроны. Поэтому ионы сосредотачиваются вблизи металла, образуя с ним двойной электрический слой. Устанавливается динамическое равновесие: некоторые ионы возвращаются в металл, некоторые уходят в раствор. Так как в двойном слое суще-



**Вольта Алессандро (1745–1827)**, итальянский ученый. Показал ошибочность гипотезы своего современника Гальвани о «животном электричестве», проявляющемся при соприкосновении разнородных металлов с влажной органической тканью, и создал химический источник электродвижущей силы (вольтов столб). Открыл контактную разность потенциалов двух соприкасающихся металлов, построил электрофор, усовершенствовал электрометр.

стует довольно сильное электрическое поле, то происходит скачок потенциала – электрод приобретает меньший потенциал, чем прилегающий слой жидкости. Такая же картина происходит и у второго электрода. Но так как металлы различны, то скачки потенциала неодинаковы (рис. 5.6, б). Поэтому на зажимах элемента получается разность потенциалов  $\mathcal{E}$ , характеризующая его ЭДС. По ряду причин электроды приходится располагать не слишком близко друг к другу. Относительно толстый слой жидкости между электродами имеет постоянный потенциал. При подключении к зажимам элемента внешней нагрузки в цепи возникает ток.

Электроны с отрицательного электрода поступают в цепь; это ослабляет связи ионов, находящихся в жидкости, с электродом, и часть ионов уносится внутрь жидкости, а на их место поступают новые ионы – электрод растворяется.

Следует обратить внимание на тот факт, что перемещение ионов происходит против электрических сил, действующих в двойном слое.

На другом электроде выделяются либо ионы водорода, присутствующие в растворе, либо ионы металла.

Так как выделяющиеся ионы водорода превращаются в его атомы, то на электроде образуется слой газа, препятствующий развитию химических процессов, – электрод поляризуется. Для борьбы с этим вредным явлением, уменьшающим ЭДС элемента, применяют специальные окислители.

ЭДС гальванических элементов составляет 1...2 В.

Слой жидкости в элементе обладает заметным сопротивлением  $r$  (доли ома). Поэтому распределение потенциала в работающем элементе (рис. 5.6, в) отличается от первоначального, а на зажимах работающего элемента разность потенциалов уменьшается (по сравнению с ЭДС). Очевидно, элемент не способен давать значительные токи; в случае необходимости элементы (одинаковые) включают параллельно друг другу – это уменьшает внутреннее сопротивление.

Б. *Аккумуляторы (накопители), или вторичные элементы.* В этих устройствах в раствор опускают однородные электроды и по прибору пропускают ток от внешнего источника. В распространенных свинцовых аккумуляторах свинцовые пластины опущены в серную кислоту. На их поверхности образуется сульфат свинца ( $\text{PbSO}_4$ ). При пропускании тока (зарядке аккумулятора) на пластине, подключенной к положительному полюсу внешнего источника, свинец окисляется до пероксида свинца ( $\text{PbO}_2$ ), а на другом электроде, где выделяется водород, получается чистый свинец. Таким образом, после зарядки пластины уже химически различны и на зажимах аккумулятора создается ЭДС порядка 2 В.

При замыкании аккумулятора на внешнюю цепь его положительная пластина восстанавливается снова до оксида свинца (II), а отрицательная окисляется до оксида свинца (II). Но процесс раз-

рядки нельзя вести до конца. Когда химическое состояние пластин делается сравнительно одинаковым, ЭДС прибора падает, и приблизительно при 1,9... 1,85 В разрядку следует прекратить и снова зарядить аккумулятор. Ценность прибора состоит в том, что в нем пластины можно располагать очень близко друг к другу, так что внутреннее сопротивление аккумулятора очень мало, и с него можно снимать большие токи (десятки ампер).

Недостатком свинцового аккумулятора является его значительная масса и то, что электролитом является серная кислота, обращение с которой опасно.

Существуют и другие типы аккумуляторов, в частности железоникелевые. В них электролитом служит щелочь. Они менее вредны, чем первые, имеют меньшую массу, но большее внутреннее сопротивление.

Все аккумуляторы характеризуются электрическим зарядом (выражаемым обычно в ампер-часах), который они могут отдать до новой зарядки.

**3. Электромеханические источники.** При вращении проволочного витка в магнитном поле в нем, как известно из школьного курса физики, возникает ЭДС электромагнитной индукции. Сделав в витке разрыв и подключив к нему внешнюю цепь, получим в ней переменный ток. Специальные приспособления позволяют преобразовать его в постоянный. На вращение витка затрачивается работа; за счет нее и получается электрическая энергия. Эти генераторы применяются в технике сильных токов на современных электростанциях (см. гл. 11).

**4. Магнитогидродинамические генераторы,** как и электромеханические, основаны на явлении электромагнитной индукции. Но здесь в магнитном поле движется не катушка, а поток расплавленного металла или горячая плазма.

Эти приборы сравнительно новы. Область их применения – сильные токи.

**5. Фотоэлектрические источники.** В ряде полупроводников под влиянием освещения возникает внутренний фотоэффект, т. е. создаются электроны проводимости и возникает ЭДС. Примером таких источников являются солнечные батареи, получившие распространение в космических аппаратах.

**6. Термоэлектрические источники.** Если электрическая цепь состоит из разнородных металлов (или полупроводников) и контакты между ними поддерживаются при разной температуре, то возникают термо-ЭДС, зависящие от материала и разности температур контактов. Они невелики – несколько микровольт на кельвин и на порядок больше – у полупроводников.

Термо-ЭДС используется главным образом для измерения температуры электрическим методом.

**7. В изотопных источниках** источником энергии является излучение, возникающее при радиоактивном распаде изотопа. Изотоп должен иметь достаточную продолжительность жизни, давать безвредные, легко поглощаемые излучения. Часто применяется плутоний (его активность уменьшается вдвое в течение 90 лет), излучающий  $\alpha$ -частицы (ядра гелия). Изотоп окружают оболочкой, поглощающей  $\alpha$ -частицы и нагревающейся до температуры, достигающей нескольких сот кельвин. В оболочке закреплены горячие спаи полупроводниковых термоэлементов. Их холодные спаи закреплены в металлическом радиаторе, обеспечивающем охлаждение спаев. Преимуществом изотопных источников ЭДС является их надежность и длительный срок работы.

Маленькие изотопные источники применяются в медицине (например, стимуляторы деятельности сердца).

### 5.7. Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, и для замкнутой цепи

Рассмотрим участок электрической цепи постоянного тока между точками 1 и 2, содержащий резистор сопротивлением  $R$  и источник тока, имеющий ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутреннее сопротивление  $r$  (рис. 5.7). Будем считать, что  $r \ll R$ . Участок 1–2 представляет часть электрической цепи, в которой могут быть включены как другие источники тока, так и другие элементы цепи (резисторы, конденсаторы, лампы накаливания и др.).

В соответствии с законом Ома (5.20) плотность тока на участке 1–2 будет зависеть как от напряженности электрического поля, так и от напряженности сторонних сил на этом участке:

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}).$$

Умножим скалярно обе части этого выражения на вектор  $d\vec{l}$ , модуль которого равен элементарной длине элемента проводника на участке 1–2, а направление совпадает с направлением вектора плотности тока на этом участке. После перемножения получим:

$$\vec{j} \cdot d\vec{l} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}) \cdot d\vec{l}. \quad (5.21)$$

Левая часть соотношения (5.21) может быть выражена через силу тока и сопротивление рассматриваемого участка цепи следующим образом:

$$\vec{j} \cdot d\vec{l} = jdl = \frac{\rho dI}{\rho S},$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление рассматриваемого участка цепи,  $S$  – площадь его по-

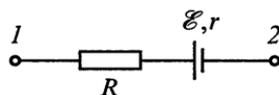


Рис. 5.7

перечного сечения. Так как по определению  $\rho\gamma = 1$ , то (5.21) можно переписать в виде:

$$\frac{\rho dI}{S} = \vec{E} \cdot d\vec{l} + \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l}. \quad (5.22)$$

Здесь произведение  $\vec{E} \cdot d\vec{l}$  выражает элементарную работу электрического поля по перемещению единичного положительного заряда на участке  $d\vec{l}$ , произведение  $\vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l}$  определяет элементарную работу сторонних сил на этом же участке цепи.

Проинтегрируем (5.22) на участке цепи между точками 1 и 2:

$$\int_1^2 \frac{\rho dI}{S} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l}. \quad (5.23)$$

Так как участок 1–2 не имеет разветвлений, то левая часть (5.23) равна произведению силы тока  $I$  на сопротивление  $R$  этого участка:

$$\int_1^2 \frac{\rho dI}{S} = IR. \quad (5.24)$$

Первое слагаемое в правой части (5.23) представляет работу электрического поля на участке 1–2 по переносу единичного положительного заряда между точками 1 и 2, т. е.

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (5.25)$$

Знаки для потенциалов следует выбирать, ориентируясь по направлению тока. Так как ток течет от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом, то работа поля будет положительной при переходе от одной точки к другой по направлению тока. Направление тока в данном случае совпадает с направлением обхода от точки 1 к точке 2 вдоль  $d\vec{l}$ , поэтому значение элементарной работы в (5.24) положительно, и потенциал  $\varphi_1$  больше потенциала  $\varphi_2$ .

Второе слагаемое в (5.23)  $\int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l}$  по определению есть ЭДС на рассматриваемом участке электрической цепи. Если источник ЭДС включен на участке 1–2 так, что сторонние силы способствуют протеканию тока, то ЭДС следует брать со знаком плюс, если сторонние силы препятствуют протеканию тока, то ЭДС следует брать со знаком минус.

С учетом сказанного выражение (5.23) перепишем в виде:

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) \pm \mathcal{E}_{12}. \quad (5.26)$$

Таким образом, можно утверждать, что произведение силы тока на сопротивление участка цепи, содержащего ЭДС, равно алгебраической сумме разности потенциалов на концах участка и ЭДС, действующей на этом участке цепи. При этом ток считается положительным, если его направление совпадает с направлением обхода участка цепи, знак разности потенциалов определяется направлением тока, а знак ЭДС определяется в зависимости от полярности включения источника ЭДС в цепь: если ток проходит источник ЭДС от  $-$  к  $+$ , то ЭДС берется со знаком плюс, если от  $+$  к  $-$ , то со знаком минус.

Соотношение (5.26) выражает закон Ома для участка цепи, содержащего источник ЭДС. Участок цепи, содержащий источник ЭДС, называется неоднородным участком цепи.

Для наглядного представления распределения потенциала электрического поля в цепи постоянного тока и выявления роли источника ЭДС в изменении распределения потенциала вдоль цепи воспользуемся *методом потенциальных диаграмм*. Потенциальная диаграмма выражает зависимость потенциала электрического поля от положения точки наблюдения, в которой определяется потенциал. Основой для построения потенциальной диаграммы служит закон Ома как для однородного (5.5), так и для неоднородного (5.26) участков цепи.

Рассмотрим пример построения потенциальной диаграммы для неоднородного участка цепи, схема которого приведена на рисунке 5.8, а. За положительное направление тока выберем направление от  $A$  к  $D$ . Потенциал точки  $A$  положим равным некоторой произвольной величине  $\varphi_A$ . Для определения потенциала точки  $B$  запишем закон Ома для неоднородного участка цепи  $AB$ , полагая, что внутреннее сопротивление источника с ЭДС  $\mathcal{E}_1$  равно нулю. В соответствии с (5.26) получим:

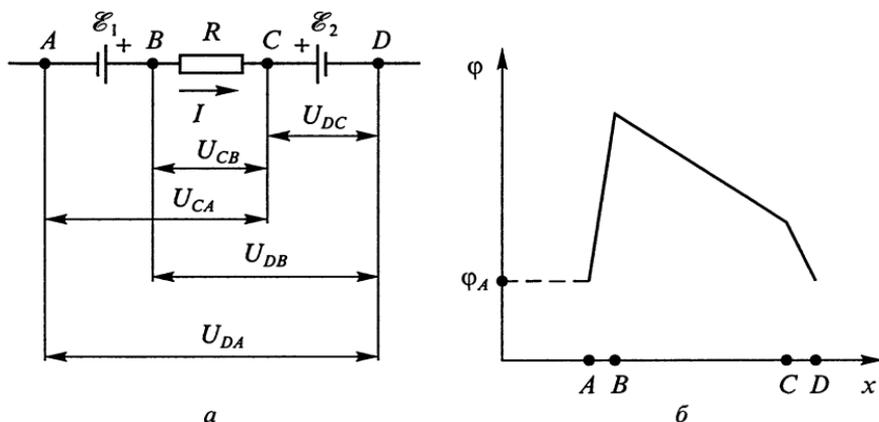


Рис. 5.8

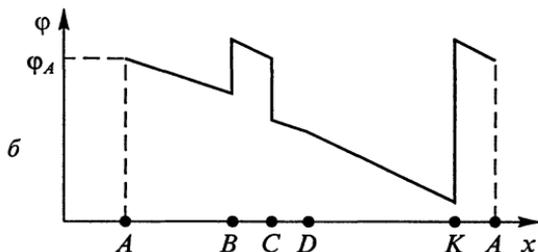
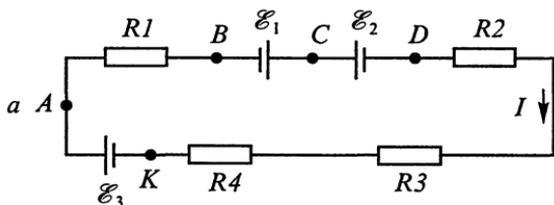


Рис. 5.9

$$0 = (\varphi_A - \varphi_B) + \mathcal{E}_1,$$

откуда  $\varphi_B = \varphi_A + \mathcal{E}_1$ , т. е. потенциал точки  $B$  выше потенциала точки  $A$  на величину  $\mathcal{E}_1$ .

Связь между потенциалами в точках  $B$  и  $C$  получим, применив для участка  $BC$  закон Ома в форме (5.26):

$$IR = \varphi_B - \varphi_C,$$

откуда  $\varphi_C = \varphi_B - IR$ , т. е. потенциал точки  $C$  меньше потенциала точки  $B$  на величину  $IR$ , которую

часто из-за этого называют падением напряжения на участке цепи.

Связь между потенциалами  $\varphi_C$  и  $\varphi_D$  находим, вновь применяя закон Ома (5.26) для неоднородного участка цепи:

$$0 = \varphi_C - \varphi_D - \mathcal{E}_2,$$

откуда следует, что  $\varphi_D = \varphi_C - \mathcal{E}_2$ , т. е. потенциал точки  $D$  меньше потенциала точки  $C$  на величину  $\mathcal{E}_2$ .

Зная соотношения между значениями потенциалов в различных точках электрической цепи, можно построить потенциальную диаграмму. Потенциальная диаграмма для рассмотренного участка цепи приведена на рисунке 5.8, б.

Потенциальная диаграмма для неразветвленной замкнутой цепи, содержащей несколько резисторов сопротивлениями  $R_i$  и источников ЭДС  $\mathcal{E}_k$ , обладающих внутренними сопротивлениями  $r_k$ , строится аналогичным образом. Сначала с помощью закона Ома определяются соотношения между потенциалами различных точек цепи. Затем строится потенциальная диаграмма. Так как цепь замкнута, то потенциалы начальной и конечной точек диаграммы должны совпадать друг с другом. Для отдельных участков схемы, приведенной на рисунке 5.9, а, можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} IR_1 &= \varphi_A - \varphi_B; \\ Ir_1 &= \varphi_B - \varphi_C + \mathcal{E}_1; \\ Ir_2 &= \varphi_C - \varphi_D - \mathcal{E}_2; \\ I(R_2 + R_3 + R_4) &= \varphi_D - \varphi_K; \\ Ir_3 &= \varphi_K - \varphi_A + \mathcal{E}_3. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Потенциальная диаграмма, построенная с учетом полученных соотношений, приведена на рисунке 5.9, б.

Если соотношения (5.27) сложить, то алгебраическая сумма всех потенциалов обратится в нуль и получится выражение:

$$I(\sum R_i + \sum r_k) = \sum \mathcal{E}_k, \quad (5.28)$$

которое называется *законом Ома для замкнутой цепи* постоянного тока.

При рассмотрении цепей постоянного тока нужно помнить, что направление тока в отдельных участках цепи может не совпадать с полярностью ЭДС, действующей на этом же участке.

Для примера рассмотрим простейшую электрическую цепь, схема которой приведена на рисунке 5.10. Измерительные приборы магнитоэлектрической системы (см. § 7.8) имеют нуль посредине шкалы. Направление отклонения стрелок зависит от направления тока. Пусть  $\mathcal{E}_1 = 6$  В,  $\mathcal{E} = 2$  В, внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы;  $R = 1$  Ом;  $R_1$  изменяется от нуля до 5 Ом. При  $R_1 = 0$  стрелки всех приборов отклоняются в одну сторону, например вправо. При увеличении сопротивления  $R_1$  ток  $I_1$  уменьшается и уменьшаются показания всех приборов. При  $R_1 = 3$  Ом значение тока  $I = 2$  А и вольтметр  $V_1$  дает нулевое показание. При дальнейшем увеличении сопротивления  $R_1$  показание вольтметра  $V_1$  меняет знак, хотя ток в цепи не меняет своего направления.

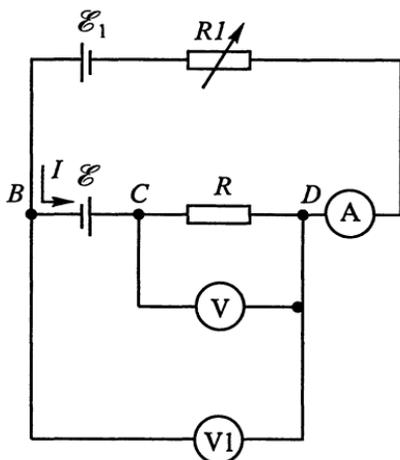


Рис. 5.10

## 5.8. Работа и мощность постоянного тока.

### Закон Джоуля–Ленца. Дифференциальная форма закона Джоуля–Ленца

При постоянной силе тока  $I$  через каждое сечение проводника за время  $dt$  переносится электрический заряд  $dq = Idt$ . Рассмотрим два сечения 1 и 2 в цепи постоянного тока, электрические потенциалы которых соответственно равны  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . За время  $dt$  через первое сечение в объем проводника между сечениями 1 и 2 войдет заряд  $dq$ , и за это же время через второе сечение из этого объема выйдет такой же заряд  $dq$ , что эквивалентно непосредственному переносу заряда  $dq$  между сечениями 1 и 2 за время  $dt$ . При этом электрическое поле на участке 1–2 совершает работу  $dA$ , равную

произведению  $dq$  на разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  между этими сечениями:

$$dA = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = I(\varphi_1 - \varphi_2) dt = IUdt, \quad (5.29)$$

здесь через  $U$  обозначена разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

*Работа, совершаемая электрическим полем на определенном участке электрической цепи, называется работой тока.*

Физическую величину, равную отношению работы тока  $dA$  ко времени ее совершения  $dt$ , называют *мощностью тока*. Мощность тока будем обозначать буквой  $P$ . По определению:

$$P = \frac{dA}{dt} = IU. \quad (5.30)$$

Единицей мощности в СИ служит ватт (Вт).

Рассмотрим преобразование энергии на отдельном участке электрической цепи. Если участок не содержит ЭДС, то для него выполняется закон Ома в форме (5.5). Умножив (5.5) на  $I dt$ , получим

$$I^2 R dt = IU dt. \quad (5.31)$$

Правая часть (5.31) представляет работу тока на рассматриваемом участке проводника. Если проводник неподвижен и в нем не происходит химических реакций, то по закону сохранения энергии эта работа идет на изменение внутренней энергии проводника и на сообщение количества теплоты окружающим телам. Если температура проводника при протекании тока не меняется, то изменения его внутренней энергии не происходит. Следовательно, вся работа тока в этом случае идет на выделение количества теплоты  $dQ$ , т.е.

$$dQ = IU dt. \quad (5.31)$$

Сравнивая (5.30) и (5.31), можно заключить, что

$$dQ = I^2 R dt. \quad (5.32)$$



---

**Ленц Эмилий Христианович (1804–1865)**, русский физик. Сформулировал общее правило определения направления индукционного тока; одновременно с англичанином Дж. Джоулем установил закон нагревания проводника текущим по нему током. Занимался конструированием электрических машин, открыл явление реакции якоря и свойство обратимости машин.

Количество теплоты, выделяемое в проводнике при протекании в нем постоянного тока, равно произведению квадрата силы тока, сопротивления проводника и времени прохождения тока.

Этот закон был установлен независимо друг от друга Дж. Джоулем и Э. Х. Ленцем в 1841 г. и носит их имена.

Рассмотрим закон Джоуля – Ленца для неоднородного участка цепи. Если участок цепи содержит источник ЭДС, то для него справедлив закон Ома в форме (5.26). Умножая левую и правую части (5.26) на  $I dt$ , получим:

$$I^2 R dt = I U dt \pm I \mathcal{E} dt. \quad (5.33)$$

Из выражения (5.33) видно, что количество теплоты, выделяющееся на неоднородном участке цепи, определяется алгебраической суммой работ тока и сторонних сил на этом участке.

Для расчета количества теплоты в замкнутой цепи используем закон Ома в форме (5.28). Умножив левую и правую части (5.28) на  $I dt$ , получим:

$$I^2 (\sum R_i + \sum r_k) dt = \sum \mathcal{E}_k dt. \quad (5.34)$$

Левая часть равенства (5.34) представляет собой энергию, выделившуюся в цепи за время  $dt$  в соответствии с законом Джоуля – Ленца. Правая часть определяет работу по перемещению заряда в замкнутой электрической цепи, совершенную источником ЭДС. Анализируя (5.34), еще раз убеждаемся в том, что ЭДС численно равна работе перемещения по замкнутой цепи единичного положительного заряда, совершаемой сторонними силами.

Закон Джоуля – Ленца, так же как закон Ома, можно записать в дифференциальной форме. Для этого введем понятие удельного количества теплоты  $\xi$ , выделяемого в единичном объеме проводника за единицу времени:

$$\xi = \frac{dQ}{dV dt}. \quad (5.35)$$

Выразив  $dQ$  из (5.35) и подставив в (5.32), получим:

$$\xi dV dt = I^2 R dt. \quad (5.36)$$

Учитывая, что  $dV = Sl$ ,  $R = \frac{\rho l}{S}$ ,  $I = jS$ , выражение (5.36) можно преобразовать к виду:

$$\xi = \rho j^2. \quad (5.37)$$

Так как  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ , то (5.37) может быть записано в разных формах:

$$\xi = \rho j^2 = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2. \quad (5.38)$$

Количество теплоты, выделяемое за единицу времени в единичном объеме проводника, равно удельной проводимости проводника умноженной на квадрат напряженности электрического поля в проводнике. Это утверждение, математически выраженное соотношением (5.34), составляет содержание закона Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.

### 5.9. Работа и мощность в электрической цепи постоянного тока. КПД источника тока

Мощность  $P_{\text{полн}}$ , расходуемая источником, частично выделяется во внешней цепи (полезная), частично – на внутреннем сопротивлении (потери мощности). Коэффициент полезного действия источника (КПД) равен

$$\eta = \frac{P_{\text{полез}}}{P_{\text{полн}}} = \frac{I^2 R}{I^2 (R + r)} = \frac{R}{R + r} < 1. \quad (5.39)$$

Для правильного выбора режима цепи (согласования источника с нагрузкой) нужно определенным образом подбирать соотношение между сопротивлениями  $R$  и  $r$ , причем обычно  $r$  источника считается данным. Тогда, исследуя зависимости силы тока, мощности и КПД от отношения  $\frac{R}{r} = \beta$ , получаем:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r} \frac{1}{1 + \beta}; \quad P_{\text{полез}} = \frac{\mathcal{E}^2}{r} \frac{\beta}{(\beta + 1)^2}; \quad P_{\text{полн}} = \frac{\mathcal{E}^2}{r} \frac{1}{1 + \beta}; \quad \eta = \frac{\beta}{1 + \beta}.$$

Максимальные значения этих величин соответственно равны:

$$(P_{\text{полез}})_m = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} \text{ при } \beta = 1, \quad (P_{\text{полн}})_m = \frac{\mathcal{E}^2}{r} \text{ при } \beta = 0;$$

$$I_m = \frac{\mathcal{E}}{r} \text{ при } \beta = 0; \quad \eta_m = 1 \text{ при } \beta \rightarrow \infty.$$

На рисунке 5.11 указанные величины (относительные), а также  $\eta$  изображены в функции отношения  $R/r$ .

Отметим важные свойства электрической цепи:

1. Полезная мощность максимальна при выполнении «условия согласования»:

$$R = r. \quad (5.40)$$

2. Полная мощность максимальна при  $R = 0$ , уменьшается вдвое при  $R = r$ , стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . То же самое можно сказать о силе тока.

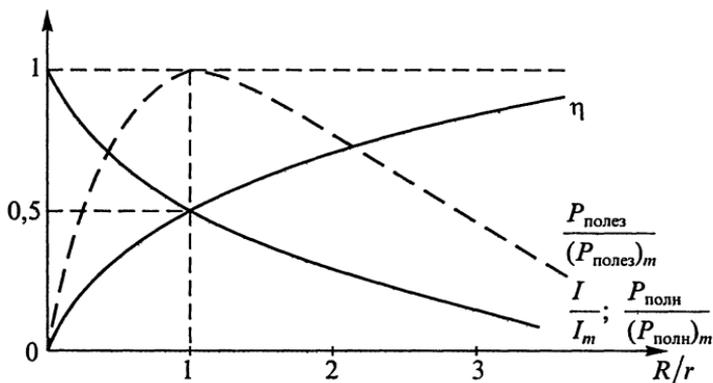


Рис. 5.11

3. КПД равен нулю при  $R = 0$ , равен 0,5 при  $R = r$ , стремится к единице при неограниченном возрастании  $R$ .

Таким образом, требования получения одновременно наибольшей мощности и наибольшего КПД не могут быть выполнены. Выбор тех или иных величин определяется конкретными условиями эксплуатации источников.

### 5.10. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа и примеры их применения

Расчет разветвленных цепей, особенно если в них имеются активные участки, сложен (во многих случаях его цель – нахождение токов по заданным сопротивлениям и ЭДС). Практически он сводится к рассмотрению отдельных участков цепи. Пусть, например, имеется цепь, схема которой показана на рисунке 5.12.

В узловых точках, где сходится несколько проводов, должен выполняться закон сохранения заряда: сумма притекающих токов, которым можно приписать положительный знак, должна равняться сумме вытекающих токов (с отрицательным знаком). Иначе говоря, для узлов алгебраическая сумма сил токов равна нулю:

$$\sum_i I_i = 0. \quad (5.41)$$

Если выделить в цепи замкнутый контур (произвольный)

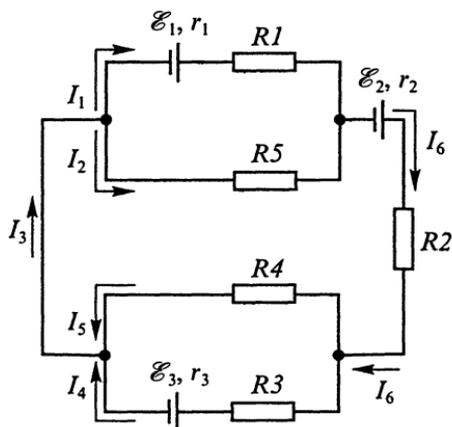


Рис. 5.12

и мысленно обойти его в некотором направлении (скажем, против хода стрелки часов), то сумма неизвестных разностей потенциалов обратится в нуль и получится:

$$\sum_k \mathcal{E}_k = \sum_i R_i I_i + \sum r_k I_i, \quad (5.42)$$

т. е. алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме падений напряжения (с учетом падений напряжения на внутренних сопротивлениях источников). Правило знаков для  $\mathcal{E}$  и  $IR$  такое же, как для уравнения (5.26). Отличие от закона Ома (5.28) состоит в том, что здесь токи в разных участках контура могут быть различными.

Выражения (5.37) и (5.36) называют *правилами*, или *законами*, *Кирхгофа* (Г. К и р х г о ф, 1824–1887): (5.37) выражает первый закон Кирхгофа, а (5.38) – второй закон.

Написав число уравнений, равное числу неизвестных, можно решить их и получить данные о всех токах и напряжениях. Следует иметь в виду, что иногда написанные уравнения могут оказаться зависимыми и решение результата не даст. Умение выбрать надлежащие уравнения дается практикой.

Так, для узловых точек (см. рис. 5.12) получится:

$$I_3 = I_2 + I_1; \quad I_3 = I_4 + I_5; \quad I_6 = I_1 + I_2 = I_3.$$

Для верхнего параллельного контура найдем:

$$I_2 R_5 - I_1 R_1 - I_1 r_1 = -\mathcal{E}_1.$$

Для нижнего параллельного контура имеем:

$$I_5 R_4 - I_4 R_3 - I_4 r_3 = \mathcal{E}_3,$$

где  $r_1$  и  $r_3$  – внутренние сопротивления источников ЭДС  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_3$ . Иногда бывает не ясно, какой знак следует приписать силе тока (т. е. как направлен вектор плотности тока). В этих случаях знак выбирают произвольно; о правильности выбора знака судят по окончательному знаку, получающемуся в результате вычислений: если сила тока оказывается положительной, то ее знак был выбран правильно; если отрицательной, то знак силы тока следует переменить на обратный.

Приведем несколько примеров применения правил Кирхгофа.

**1. Метод компенсации, применяемый для точного измерения ЭДС.** Известная ЭДС  $\mathcal{E}_1$  должна превышать неизвестную ЭДС  $\mathcal{E}_2$  (рис. 5.13).

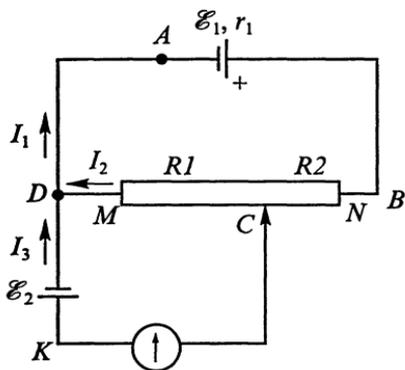


Рис. 5.13

К общей точке  $D$  должны быть обращены одинаковые знаки обоих источников ЭДС. Меняя сопротивление  $R_1$  (одновременно меняется и  $R_2$ , так как оба сопротивления образованы длинной однородной проволокой и сумма  $R_1 + R_2 = R$  постоянна), добиваются обращения в нуль силы тока  $I_3$ . Тогда можно написать для контура  $ABCD$  (так как  $I_1 = I_2$ ):

$$\mathcal{E}_1 = I_1 R + I_1 r;$$

для контура  $DCKD$ :

$$\mathcal{E}_2 = I_2 R_1.$$

Деля эти выражения друг на друга, получаем:

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{R_1}{R + r}.$$

Так как на практике  $r$  известно не всегда, то производят измерения с двумя источниками: сначала с неизвестным, потом – с эталонным с ЭДС  $\mathcal{E}_0$ . Для второго измерения получается:

$$\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_1} = \frac{R'_1}{R + r}.$$

Сравнивая полученные результаты, имеем:

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 \frac{R_1}{R'}.$$

**2. Мостик Уитстона** (Ч. Уитстон, 1802–1875). В лабораторной практике для измерения сопротивлений часто применяют так называемый мостик Уитстона. Его схема (рис. 5.14) состоит из четырех резисторов: сопротивления трех из них известны, а одного – неизвестно. Мостик, включенный между точками  $A$  и  $B$ , содержит измерительный прибор. Регулируют сопротивления, пока ток в мостике не исчезнет. Тогда можно написать:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2; \quad I_1 R_x = I_2 R_4.$$

Деля уравнения друг на друга, получаем:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_4}.$$

Для более легкого запоминания напишем:

$$R_1 R_4 = R_x R_2, \quad (5.43)$$

т. е. произведения сопротивлений накрест лежащих резисторов одинаковы.

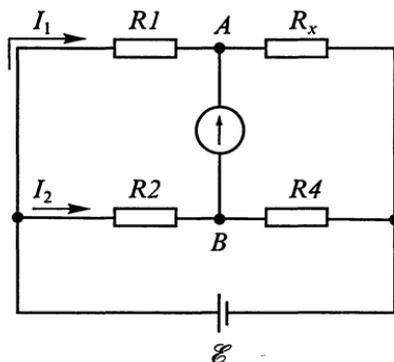


Рис. 5.14

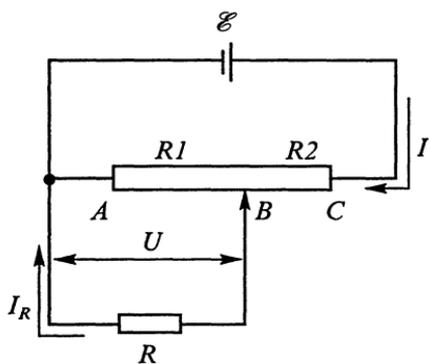


Рис. 5.15

**3. Потенциометр** (рис. 5.15). Эта схема позволяет непрерывно регулировать постоянное напряжение на нагрузке  $R$ . Схема удобна, если выполнено условие:

$$R \ll R_1 + R_2 = R'.$$

Действительно, если  $R \ll R'$ , то током через нагрузку можно пренебречь и написать, пренебрегая внутренним сопротивлением источника:

$$\frac{U}{\mathcal{E}} = \frac{R_1}{R'}.$$

Таким образом, напряжение на нагрузке пропорционально сопротивлению участка, выделенного на потенциометре. Конечно, схема очень неэкономна.

**4. Последовательное соединение источников ЭДС.** Если несколько источников ЭДС  $\mathcal{E}_i$  с внутренними сопротивлениями  $r_i$  соединить последовательно и подключить к ним внешнюю нагрузку  $R$ , то сила тока в цепи будет равна:

$$I = \frac{\sum \mathcal{E}_i}{R + \sum r_i}. \quad (5.44)$$

Очевидно, такое соединение разумно лишь в том случае, когда сопротивление цепи  $R \gg r_i$  (внутреннего сопротивления источников), так как тогда мы увеличиваем ЭДС, почти не меняя сопротивления.

**5. Параллельное соединение одинаковых источников** (рис. 5.16, а). При этом ЭДС равна ЭДС одного источника, а внутреннее сопротивление уменьшается в  $n$  раз ( $n$  – число источников). Такое соединение разумно применять, если сопротивление цепи близко к сопротивлению источников.

Если источники неодинаковы, то, вообще говоря, их параллельное соединение невыгодно, так как они начинают работать друг на друга. Действительно, в схеме рисунка 5.16, б выделим контуры

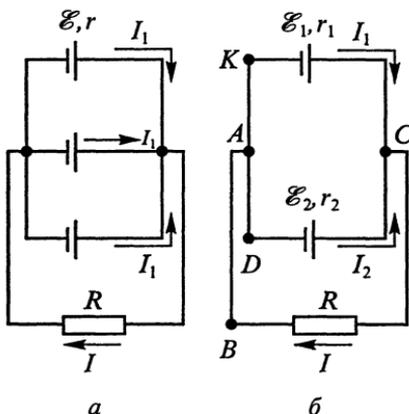


Рис. 5.16

СВАКС, ADCBA и узловую точку  $A$ .  
 Применим к ним правила Кирхгофа:

$$IR + I_1 r_1 = \mathcal{E}_1; \quad IR + I_2 r_2 = \mathcal{E}_2;$$

$$I = I_1 + I_2.$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

где эквивалентные ЭДС и внутреннее сопротивление соответственно равны:

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}; \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Конечно, ток  $I$  всегда положителен. Но может случиться, что получится  $I_1 < 0$  и  $I_2 > I$ . В этом случае источник  $\mathcal{E}_1$  будет поглощать энергию источника  $\mathcal{E}_2$ , что, конечно, невыгодно. Поэтому на практике параллельно включают лишь одинаковые источники ЭДС.

**6. Расширение пределов измерения приборов.** Если измеряемые сила тока или напряжение превышают значения, допустимые для амперметра ( $I_m$ ) и вольтметра ( $U_m$ ), то для расширения пределов измерения этих приборов включают (рис. 5.17):

а) последовательно с вольтметром добавочный резистор сопротивлением  $R$ ,

б) параллельно амперметру – шунт сопротивлением  $r$ .

Читателю предлагается доказать, что при этом пределы измерений изменяются до значений:

$$U_1 = U_m \left( 1 + \frac{R}{R_V} \right), \quad (5.45)$$

$$I_1 = I_m \left( 1 + \frac{R_A}{r} \right), \quad (5.46)$$

где  $R_V$  и  $R_A$  – сопротивления самих приборов.

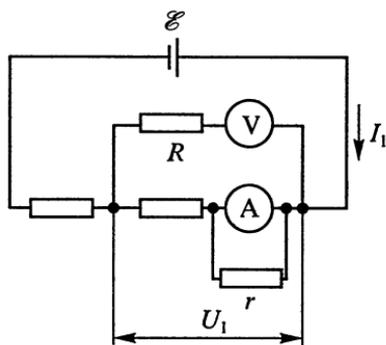


Рис. 5.17

## 5.11. Моделирование электростатического поля электрическим полем постоянного тока

Электрическое поле, созданное в замкнутой проводящей цепи источником ЭДС (сторонними силами), является потенциальным, поэтому его можно использовать для изучения электростатического поля.

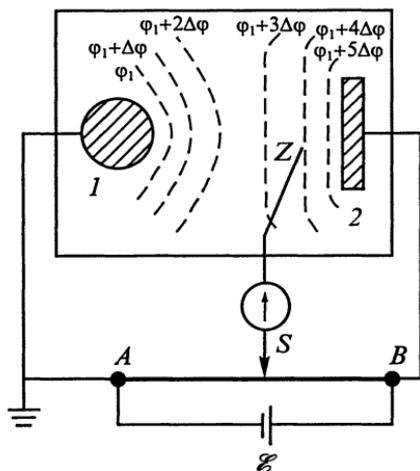


Рис. 5.18

На большом листе черной слабопроводящей бумаги (годится обыкновенная черная бумага от пакетов с фотобумагой) расположим два электрода, вырезанных из металлической фольги (1 и 2) и присоединим их к зажимам источника ЭДС (рис. 5.18). В бумаге образуется слабый ток; его линии совпадут с линиями напряженности поля, эквипотенциальные линии перпендикулярны им (в плоскости, содержащей электроды).

Параллельно электродам подключается длинная прямая однородная проволока (реохорд  $AB$ ).

Подвижный контакт произвольной точки реохорда  $S$  через чувствительный гальванометр соединяется с зондом  $Z$  (концом провода). При касании зонда в какой-либо точке поверхности бумаги гальванометр дает показания, пропорциональные разности потенциалов точек  $S$  и  $Z$ . Перемещая зонд (при неподвижном контакте  $S$ ), можно найти точки, для которых показания гальванометра обращаются в нуль. Этому соответствует потенциал

$$\varphi = \mathcal{E} \frac{AS}{AB}.$$

Сместив контакт в новое положение  $S_1$ , таким же образом находят точки, имеющие потенциал

$$\varphi_1 = \mathcal{E} \frac{AS_1}{AB}.$$

Разности потенциалов  $\varphi_i - \varphi_{i+1}$  (т. е. разности расстояний  $S_i - S_{i+1}$ ) выбирают одинаковыми. Тогда по густоте расположения эквипотенциальных линий можно судить о распределении линий напряженности, графически строя линии, перпендикулярные линиям  $\varphi_i = \text{const}$ .

Бумагу можно заменить плоским стеклянным сосудом с тонким слоем раствора электролита (например, водного раствора медного купороса).

## 5.12. Зарядка и разрядка конденсатора

В § 5.1 при введении понятия тока качественно рассматривался нестационарный процесс разрядки конденсатора. Изучим его бо-

лее подробно вместе с процессом зарядки конденсатора. Пусть емкость конденсатора (рис. 5.19) равна  $C$ , сопротивление в зарядной цепи равно  $R_1$  (левая цепь), ЭДС —  $\mathcal{E}$  (внутренним сопротивлением источника пренебрежем).

Зарядный ток  $i_1$  убывает по мере того, как растет разность потенциалов на конденсаторе, противодействующая ЭДС источника. Для любого момента времени можно написать:

$$\mathcal{E} = i_1 R_1 + \frac{q}{C}; \quad i_1 = \frac{dq}{dt},$$

при этом в начале отсчета (момент замыкания ключа  $S_1$  при разомкнутом ключе  $S_2$ ) имеется начальное условие:

$$\text{при } t = 0 \quad q = 0. \quad (5.47)$$

Вводя новую переменную  $q = x + C\mathcal{E} = x + Q$ , получим:

$$CR_1 \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$x = x_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right),$$

где  $\tau_1 = \frac{1}{R_1 C}$ .

Возвращаясь к заряду, получим:

$$q = Q + x_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right).$$

Учитывая начальное условие (5.47), находим:

$$x_0 = -Q; \quad q = Q \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right].$$

После того как конденсатор полностью зарядится, т. е. при достаточно большом  $t$ , разомкнем ключ  $S_1$  и замкнем ключ  $S_2$ . Момент замыкания ключа  $S_2$  примем за новое начало отсчета времени ( $t_1 = 0$ ). Конденсатор начинает разряжаться через резистор  $R_2$ , сила тока в конденсаторе меняет знак:

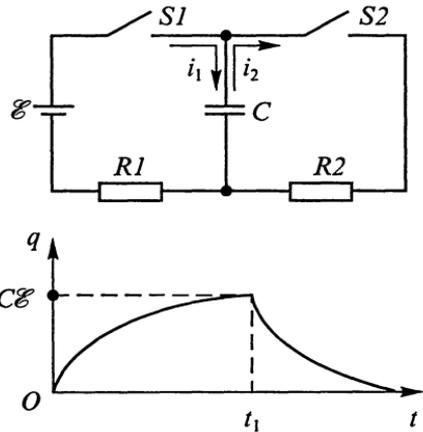


Рис. 5.19

$$i_2 = -\frac{dq}{dt_1},$$

и в любой момент времени закон Кирхгофа дает:

$$R_2 i_2 = -R_2 \frac{dq}{dt_1} = \frac{q}{C},$$

причем при  $t_1 = 0$   $q = Q$ .

Решением этого уравнения является выражение

$$q = Q \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_2}\right),$$

где  $\tau_2 = R_2 C$ .

Заряд убывает со временем вследствие уменьшения разности потенциалов на конденсаторе, вызывающей появление этого тока. Таким образом, длительность обоих процессов зависит от времени релаксации (или постоянной времени)

$$\tau = RC,$$

и при достаточно больших  $R$  и  $C$  процесс так замедляется, что его можно демонстрировать даже на стрелочных приборах.

Интересно отметить, что КПД процесса зарядки равен

$$\eta = \frac{W_e}{A} = \frac{\frac{1}{2} Q \mathcal{E}}{Q \mathcal{E}} = 0,5.$$

Здесь  $W_e$  – энергия, накопленная в конденсаторе,  $A$  – работа, совершенная сторонними силами. Этот КПД не зависит от сопротивления  $R$ ; последнее влияет лишь на длительность процесса зарядки.

Находя уравнение для токов:

$$i_{\text{зар}} = \frac{1}{\tau_1} Q \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right),$$

$$i_{\text{разр}} = -\frac{1}{\tau_2} Q \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_2}\right) = -\frac{\mathcal{E}}{R_2} \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_2}\right),$$

замечаем, что в начальные моменты токи определяются законом Ома.

## Глава 6

# ПРИРОДА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ

### 6.1. Природа тока в металлах

Удельная электрическая проводимость металлов очень высока (порядка  $10^6 \dots 10^8 \text{ См} \cdot \text{м}^{-1}$ ); она лишь незначительно уменьшается с повышением температуры. Это свидетельствует о том, что электроны проводимости появились в металле не за счет энергии беспорядочного движения его атомов. Слабая зависимость электропроводности от температуры позволяет предположить, что решетка металла ионизирована полностью, т. е. каждый из одновалентных атомов металла потерял по одному электрону, что соответствует концентрации свободных электронов  $n \approx 10^{29} \text{ м}^{-3}$ . Это подтверждается рядом фактов. Поэтому концентрация электронов в металле постоянна, и изменение электропроводности с температурой обязано лишь изменению подвижности свободных электронов. В полной мере природа электропроводности металлов может быть объяснена с учетом квантовых особенностей поведения электронов; они будут рассмотрены в «Молекулярной физике».

Электронная природа проводимости металлов доказана прямыми опытами. Так, К. Рикке (1845–1915) в течение года пропускал ток через три металлических цилиндра из разных металлов, торцы которых были тщательно притерты друг к другу. Опыт показал, что никакого переноса вещества при этом не произошло. Следовательно, ток создавался какими-то (в то время неизвестными) частицами, одинаковыми во всех металлах. Позже было доказано, что это электроны.

Другой (количественный) опыт был поставлен Р. Толменом и Т. Стюартом в 1916 г. Идея опыта была ранее высказана Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси. Они приводили многовитковую катушку в быстрое вращение вокруг ее оси. Затем катушка, замыкавшаяся на гальванометр, резко тормозилась; при этом гальванометр регистрировал кратковременный ток. Причиной тока являлось существование носителей заряда, не связанных жестко с кристаллической решеткой вещества проводов катушки и продолжавших свое упорядоченное движение после торможения последней. По откля-

нению стрелки гальванометра и направлению начальной скорости носителей можно было сразу определить знак их заряда: он оказался отрицательным. По углу отклонения стрелки гальванометра можно было определить заряд, прошедший по цепи.

Пусть концентрация носителей заряда в проволоке катушки равна  $n$ , длина проволоки катушки  $h$ , площадь сечения проволоки  $S$ , сопротивление цепи катушка–гальванометр  $R$ , заряд носителя  $e$ , масса его  $m$ , мгновенная убывающая скорость  $v$ .

По закону сохранения энергии можно приравнять убыль кинетической энергии направленного движения носителей к приросту энергии ионов решетки металла (закон Джоуля–Ленца). Получаем:

$$-d\left(\frac{mv^2}{2}nhS\right) = i^2Rdt.$$

Но мгновенное значение силы тока при замедленном движении носителей равно

$$i = enSv.$$

Поэтому

$$-mhdv = eiRdt = eRdq,$$

где  $dq$  – элементарный заряд. Интегрируя за все время процесса, получаем:

$$-mh \int_{v_0}^0 dv = eR \int_0^q dq,$$

откуда

$$\frac{e}{m} = \frac{v_0 h}{Rq}.$$

Величины, стоящие справа, определяются в процессе опыта. Оказалось, что отношение  $e/m$  соответствует значению, получаемому в других опытах с электронами. Таким образом, носителями заряда в металлах являются электроны.

Идею опыта Толмена можно продемонстрировать на простой модели. На столике центробежной машины укрепляется спираль из металлической трубки (змеевик). Витки спирали должны лежать в горизонтальных плоскостях, нижний конец спирали закрыт. Спираль заполнена мелкими шариками (можно использовать горох) или просто водой. Столик приводится в равномерное вращение, причем вектор скорости у верхнего отверстия должен быть направлен наружу. Если резко затормозить спираль, то шарики (или вода) вылетают из этого отверстия. Спираль играет роль кристаллической решетки, шарики – электронов.

До появления квантовой механики П. Друде развил классическую теорию электропроводности металлов, наглядно объясняя-

шую ряд фактов. Она предполагает, что поведение электронов в металле можно уподобить поведению частиц идеального газа (т. е. можно пренебречь взаимодействием электронов друг с другом). Электроны совершают беспорядочное движение, причем их средняя кинетическая энергия определяется так же, как и средняя энергия молекул идеального газа:

$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k T.$$

При комнатных температурах средняя скорость беспорядочно-го движения составляет  $u \approx 10^5$  м/с.

При создании в металле электрического поля возникает упорядоченное движение (дрейф) электронов, т. е. электрический ток. Скорость дрейфа  $v$  существенно меньше скорости  $u$ . Действительно, по закону Ома (а в металлах он выполняется) плотность тока равна:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = n e \vec{v} = n e \mu \vec{E}.$$

Пусть  $j = 1$  А/мм<sup>2</sup> (что уже довольно много – металл начнет греться),  $n = 10^{29}$  м<sup>-3</sup>,  $\gamma = 10^7$  См·м<sup>-1</sup>. Тогда

$$E = 0,1 \text{ В/м}; \quad v = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}; \quad \mu = \frac{v}{E} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}).$$

Так как, несмотря на ускоряющее поле, средняя скорость электронов постоянна (ведь ток не меняется со временем), то приходится допустить, что электроны накапливают кинетическую энергию в течение некоторого времени  $\tau$  (время свободного пробега), а затем отдают ее ионам решетки; последняя при этом нагревается. Соударения должны быть не полностью упругими: электроны отдают энергию, накопленную при дрейфе, но сохраняют энергию беспорядочного движения. Это предположение – одно из слабых мест теории. Но мы им все же воспользуемся. Электроны рассматриваются как независимые и обладающие такими усредненными характеристиками ( $v$ ,  $\tau$ ), что для объяснения макроскопических явлений (например, тока) достаточно знать поведение одного электрона (при воздействии на него электрического поля), чтобы определить поведение всех остальных. Такую теорию называют «одно-электронным приближением». При более строгом рассмотрении необходимо учитывать распределение электронов по энергиям (скоростям), взаимодействия их между собой и т. д.

Сразу после соударения с решеткой электрон не имеет упорядоченной скорости. На него действует сила со стороны электрического поля

$$\vec{F} = e \vec{E},$$

сообщая ему ускорение

$$\bar{a} = \frac{e}{m} \bar{E}.$$

Если среднее время свободного пробега есть  $\tau$ , то электрон приобретает среднюю скорость дрейфа:

$$\bar{v} = \frac{e}{m} \bar{E} \tau = \mu \bar{E},$$

где  $\mu$  – подвижность; поэтому для плотности тока получается:

$$\bar{j} = ne\mu \bar{E} = n \frac{e^2}{m} \tau \bar{E} = \gamma \bar{E}; \quad (6.1)$$

а это есть закон Ома, так как  $\gamma = \text{const}$ , если  $\tau$  не зависит от напряженности поля  $\bar{E}$ . Поскольку скорость дрейфа много меньше средней скорости беспорядочного движения  $u$ , это условие выполняется.

Из уравнения (6.1) следует, что электрическая проводимость не зависит от знака заряда, как это и должно быть.

Так как время свободного пробега уменьшается при росте  $u$ , то проводимость при этом должна уменьшаться, что отвечает действительности. Но количественная температурная зависимость предсказывается теорией неправильно.

При движении электрона в течение времени  $\tau$  со скоростью  $(\bar{v} + \bar{u})$  поле совершает над ним работу, равную

$$A = \bar{E} \cdot (\bar{v} + \bar{u}) \tau.$$

При концентрации электронов  $n$  над ними совершается работа

$$A = \tau \sum_n \bar{F} \cdot (\bar{v} + \bar{u}) = \tau F n v + \tau \sum_n \bar{F} \cdot \bar{u}.$$

Но так как скорости  $\bar{u}$  распределены по направлениям совершенно беспорядочно, то второе слагаемое обращается в нуль.

За 1 с происходит  $\frac{1}{\tau}$  соударений каждого электрона с решеткой металла. Поэтому в единице объема выделяется мощность

$$P_0 = A \frac{1}{\tau} = en\mu E^2 = \gamma E^2.$$

Таким образом, мы пришли к закону Джоуля – Ленца.

К этим успехам классической теории можно добавить еще получаемый из нее вывод о пропорциональности между электрической проводимостью и теплопроводностью (закон, ранее установленный экспериментально Видеманном и Францем). Однако у нее есть и теневые стороны. Она дает совершенно ошибочное значение теплоемкости металла. Трудно понять, каким образом элект-

рон отдает решетке энергию упорядоченного движения. Наконец, значения времени свободного пробега  $\tau$ , вычисленные по классической теории, противоречат другим опытным данным. Все эти расхождения теории с опытом объясняются тем, что действительное поведение электронов в металле подчиняется не классическим, а квантовым законам.

Классическая теория не может также объяснить природу сверхпроводимости – замечательного явления, проявляющегося при низких температурах у некоторых чистых металлов и сплавов и заключающегося в обращении сопротивления в нуль при  $T < T_k$  (см. рис. 5.5). Все эти вопросы получают объяснение только с квантово-механической точки зрения (см. «Молекулярную физику»). Тем не менее хотя бы качественные соображения о природе сверхпроводимости уместно привести здесь.

Квантовая механика установила, что если бы кристаллическая решетка была идеально периодична, то электроны проходили бы сквозь нее не рассеиваясь; мешают их движению лишь любые нарушения периодичности решетки, проявляющиеся в том, что положения ионов не совсем соответствуют ее узлам (дефекты, примеси, тепловые колебания). С этим обстоятельством связан, в частности, непонятный с классической точки зрения факт, что электрон проходит за время  $\tau$  путь, существенно больший постоянной решетки (расстояние между атомами). При комнатной температуре этот путь может достигать значения  $10^{-7}$  м, в то время как расстояние между атомами составляет  $10^{-10}$  м. Естественно, что рост температуры приводит к увеличению тепловых колебаний решетки, следовательно, степени ее неупорядоченности и возрастанию рассеяния электронов, т. е. сопротивления.

Суть сверхпроводимости заключается в том, что у некоторых металлов (свинец, олово, ниобий) и сплавов (например, сплава ниобия и циркония) при  $0 \text{ K} < T < T_k$  часть электронов перестает вести себя независимо: они образуют пары, причем электроны в паре имеют противоположные собственные моменты импульсов (см. § 8.1). Они оказываются связанными силами взаимного притяжения. Это притяжение создается благодаря тому, что каждый электрон пары своим полем влияет на кристаллическую решетку, создавая вблизи себя некоторый положительный заряд (немного притягивает к себе ионы), с которым и взаимодействует другой электрон пары. Чтобы разорвать такую пару электронов, требуется некоторая энергия: при  $T > T_k$  разрыв осуществляется за счет тепловых колебаний решетки, поэтому сверхпроводимость возможна лишь при  $T < T_k$ .

Если электрического поля нет, то центр масс пары имеет скорость, равную нулю. В электрическом поле пара смещается (это равносильно появлению тока), но так как электроны находятся

достаточно далеко друг от друга ( $\approx 10^{-7}$  м), то если один из них встречает препятствие (неоднородность решетки), а другой – нет, пара может сохраниться, т. е. рассеивания электронов не произойдет. В этом случае электроны пары помогают друг другу обойти препятствие и удельное сопротивление материала оказывается исчезающе малым (меньше чем  $10^{-25}$  Ом·м).

Сверхпроводимость была обнаружена на опыте в 1911 г. у чистых металлов при температурах, не превышающих 3...5 К.

В середине 60-х годов физики научились получать сплавы с  $T_K$  порядка 20 К. Все попытки получения бóльших значений  $T_K$  не приводили к успеху, пока сверхпроводимость не была обнаружена в керамиках, обладающих металлическими свойствами, – сначала в керамике с составом лантан-барий-медь-кислород, а затем иттрий-барий-медь-кислород, где  $T_K$  составляет уже около 100 К. Имеются сообщения о проявлениях сверхпроводимости и при более высоких, приближающихся к комнатным, температурах. Достижения в получении высокотемпературной сверхпроводимости, относящиеся к 1987 г., имеют огромное значение для науки и техники. До сих пор прохождение электрического тока в сверхпроводнике без потерь требовало глубокого охлаждения – использования в качестве хладагента жидкого гелия (его температура кипения при нормальном давлении составляет 4,2 К), что делало сверхпроводящие устройства очень дорогими и сложными в эксплуатации. Основные применения сверхпроводников ограничивались созданием источников сильных магнитных полей – сверхпроводящих соленоидов и высокочувствительных измерителей магнитного поля и электромагнитного излучения. Возможность использования сверхпроводимости при охлаждении устройств жидким азотом (температура кипения 77 К) или при еще более высокой температуре открывает столь широкие перспективы в совершенствовании линий передач, электрогенераторов и электродвигателей, накопителей магнитной энергии, транспорта на магнитной подвеске, не говоря уже о приборах для научных исследований, что это несомненно приведет к новому этапу научно-технической революции.

Если привести в соприкосновение два металла, то, так как энергетическое состояние электронов зависит от рода металлов, воз-

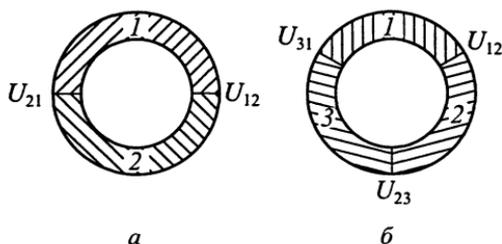


Рис. 6.1

можен переход электронов из одного металла в другой, сопровождающийся возникновением скачка потенциала между металлами (контактная разность потенциалов). Если создать замкнутую цепь только из металлов, тока в ней не возникнет.

Это очевидно для случая двух металлов (рис. 6.1, а). Пусть имеется три или больше металлов (рис. 6.1, б), тогда

$$U_{12} = U_1 - U_2; \quad U_{23} = U_2 - U_3; \quad U_{31} = U_3 - U_1,$$

и сумма скачков потенциала

$$\sum_{i,k} U_{ik} \equiv 0$$

(закон Вольта). Этого и следовало ожидать, так как при  $\sum U_i \neq 0$  в цепи возник бы ток, нагревающий металлы, что противоречит закону сохранения энергии (в цепях с гальваническими элементами ток поддерживается за счет энергии химических реакций у электродов).

Если же один из контактов нагреть, то возникает термоток (см. § 6.6). Он поддерживается за счет энергии нагревателя. Более полное рассмотрение контактных явлений будет сделано в молекулярной физике.

## 6.2. Электропроводность диэлектриков и полупроводников

Электропроводность (как и большинство других свойств твердых тел) строго может быть объяснена только при квантово-механическом рассмотрении. Это будет сделано в «Молекулярной физике»; здесь же придется ограничиться лишь качественным рассмотрением.

В электростатике *диэлектрики* были определены как вещества, совершенно не проводящие электричества, т. е. лишенные свободных носителей зарядов.

Это означает, что в диэлектриках все электроны связаны с атомами. Такое состояние возможно только в идеальном кристалле, при температуре, весьма близкой к абсолютному нулю.

В реальных кристаллах свободные электроны могут появиться либо при разрыве связей между атомами кристаллической решетки при беспорядочных колебаниях последних вокруг их средних положений равновесия, либо при образовании в кристаллах дефектов решетки. Концентрация таких электронов (свободных, или электронов проводимости) определяется соотношением:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{W}{kT}\right), \quad (6.2)$$

где  $n_0$  – концентрация атомов,  $W$  – энергия, необходимая для разрыва связей,  $kT$  – средняя энергия беспорядочного движения атомов вещества. В местах дефектов энергия  $W$  уменьшается.

Если при комнатной температуре ( $T = 300$  К) в веществе доля свободных электронов ничтожно мала и, следовательно, электро-

проводность несущественна, то такое вещество называется диэлектриком. Характерные для диэлектриков значения энергии связи  $W \geq 3$  эВ (этому соответствует средняя энергия беспорядочного движения атомов при температуре  $T = 3 \cdot 10^4$  К). Действительно, удельная электрическая проводимость хороших диэлектриков составляет  $10^{-12} \dots 10^{-7}$  См·м<sup>-1</sup>. Диэлектрики могли бы приобрести заметную электропроводность лишь при сильном нагревании; но при этом они плавятся или даже испаряются.

*Полупроводниками* называют вещества, имеющие  $W < 3$  эВ. Их удельная электрическая проводимость при нормальной температуре составляет  $10^{-4} \dots 10^4$  См·м<sup>-1</sup> и в соответствии с (6.2) сильно растет при нагревании. Это отличает их от металлов, имеющих на много порядков большую удельную электрическую проводимость, которая незначительно уменьшается при нагревании.

К полупроводникам относятся прежде всего многие элементы четвертой группы периодической таблицы Д. И. Менделеева, многие сплавы и химические соединения.

Характерными представителями полупроводников являются германий (Ge), атомный номер которого  $Z = 32$ , и кремний (Si;  $Z = 14$ ): у обоих элементов на внешней электронной оболочке атомов имеется по четыре электрона. В дальнейшем для определенности мы будем рассматривать германий.

Кристаллическая решетка германия состоит из атомов, окруженных четырьмя соседями, каждый из которых взаимодействует с данным атомом двухэлектронными (ковалентными) связями. Таким образом, если бы кристаллическая решетка германия была идеальной, то его электрическая проводимость равнялась бы нулю, так как все внешние электроны были бы связаны. На рисунке 6.2 схематически показана структура германия. Свободных носителей

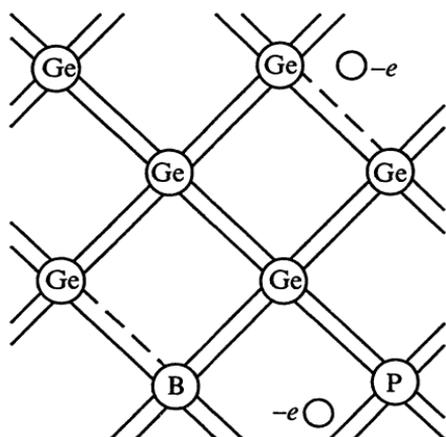


Рис. 6.2

заряда нет, в отличие от металла, где обычно каждый атом кристаллической решетки теряет по электрону. Этим полупроводник подобен любому диэлектрику. Но между ними есть и существенная разница. Энергия  $W$ , необходимая для разрыва электронной связи между атомами полупроводника, существенно меньше, чем в диэлектрике. Поэтому внешние воздействия на полупроводник (например, его нагревание, освещение, помещение в сильное электрическое поле) могут легче оторвать не-

которые электроны от атомов, сделав их свободными. Так, при нагревании германия ( $W = 0,72$  эВ) возможен разрыв одной из связей (пунктир на рис. 6.2 справа) и освобождение соответствующего электрона.

При комнатной температуре за счет энергии беспорядочного движения атомов кристалла около их положения равновесия ( $T$ ) и дефектов решетки разорвано около  $10^{19}$  связей между атомами германия в  $1 \text{ м}^3$  и освобождено тем самым такое же количество электронов.

Однако число атомов в  $1 \text{ м}^3$  гораздо больше (примерно в  $10^{10}$  раз), так что относительное число ионизированных атомов незначительно. Если создать в германии внешнее электрическое поле, то такие электроны обеспечат электропроводность полупроводника. Часть термически генерированных свободных электронов может со временем вновь попасть на атомы с разорванными связями (ведь такой атом – не что иное, как положительный ион, притягивающий свободные электроны), т.е. рекомбинировать. Одновременно новые электроны будут освобождаться за счет тепловых колебаний решетки, и при постоянной температуре концентрация свободных электронов остается постоянной. Но нарушенные связи могут заполниться не только свободными электронами (которых относительно мало), но и за счет перехода соседних электронов, связанных с атомами. Тогда нарушенная связь, создающая положительный заряд в данном месте кристалла, будет перемещаться в направлении, противоположном направлению перемещения электронов. Ее образно называют дыркой. При создании электрического поля дырка движется в направлении, противоположном движению электрона, т.е. по направлению напряженности поля, что увеличивает удельную электрическую проводимость, равную  $\gamma = e_- n_- \mu_- + e_+ n_+ \mu_+$ .

Концентрация  $n_+$  дырок при такой собственной – электронно-дырочной – проводимости равна концентрации электронов  $n_-$ ; заряды их также равны по абсолютному значению, а подвижности  $\mu_+$  и  $\mu_-$  (несмотря на то что движение каждой дырки на самом деле представляет собой своеобразное эстафетное движение многих электронов) оказываются близкими. Поэтому в первом приближении можно считать, что полная проводимость вдвое превышает электронную.

Так, у чистого германия при комнатной температуре подвижность электронов и дырок составляет соответственно  $\mu_- = 0,39 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$  и  $\mu_+ = 0,19 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .

Заметим, что сами значения подвижности носителей заряда близки к характерным для электронов в металле. Значительная разница проводимостей обязана лишь существенному различию в значениях концентраций свободных носителей заряда.

Число свободных носителей заряда сильно зависит от внешних условий (температуры, освещения и др.).

Если кристалл содержит примеси, то это может увеличить концентрацию носителей. Действительно, пусть в одном из узлов решетки (см. рис. 6.2, внизу) находится вместо атома германия (четвертая группа периодической таблицы Д. И. Менделеева), например, атом фосфора P (пятая группа), тогда один из электронов оболочки атома фосфора будет лишним. Он слабо связан с атомом, и его легко оторвать. Этот электрон может принять участие в проводимости.

Из-за высокой диэлектрической проницаемости полупроводника (например, у германия  $\epsilon = 16$ ) кулоновское притяжение к ядру фосфора P у такого электрона невелико, и необходимая для отрыва электрона (для ионизации примесного атома) энергия оказывается малой ( $W_p = 0,01$  эВ). При комнатной температуре все примесные атомы ионизируются и создают равное им число свободных электронов. Проводимость, источниками которой являются примесные атомы с лишними электронами (их называют *донорами* – дающими), называется *примесной проводимостью электронного типа*. Такой полупроводник называют полупроводником *n*-типа (от лат. *negativus* – отрицательный).

Напротив, если атом германия будет заменен, например, бором B (третья группа), то одна связь будет не заполнена (дырка). Электроны соседних атомов могут заполнить эту связь, создавая дырку в другом месте. При наложении поля возникает ток свободных дырок, соответствующий *примесной проводимости положительных зарядов*; ее называют *дырочной проводимостью*. Такой полупроводник называют *акцепторным* (или *p*-типа) (от *positivus* – положительный), так как примесный атом с недостающим электроном называется *акцептором* (получающим).

Из-за того что в создании носителей тока участвуют практически все атомы примесей, даже ничтожные количества примесей увеличивают проводимость (по сравнению с собственной) во много сотен раз. В случае примесной проводимости число электронов уже не равно числу дырок. При достаточно большой концентрации одного типа примесей такая проводимость оказывается значительно выше собственной и осуществляется в основном либо электронами, либо дырками. Она и используется в подавляющем большинстве полупроводниковых приборов.

Из сказанного ясно, что ход температурной зависимости сопротивления полупроводника существенно отличен от аналогичной зависимости для металла: при увеличении температуры сопротивление его не растет, а существенно (экспоненциально) падает [см. формулу (6.2)]. При этом в диапазоне комнатных температур показатель экспоненты в выражении (6.2) определяется энергией активации собственной проводимости  $W$ , так как примеси при столь вы-

соких для них температурах уже истощены (доноры отдали лишние электроны, акцепторы получили недостающие). При более низких температурах (например, соответствующих температуре жидкого азота  $T = 77$  К и ниже) показатель экспоненты будет определяться энергией активации примесной проводимости  $W_n$  (энергия теплового движения недостаточна для ионизации атомов Ge) и проводимость будет полностью определяться концентрацией свободных электронов (дырок), обязанных ионизации доноров (акцепторов).

Для чистого германия при комнатной температуре удельное сопротивление  $\rho = 0,5$  Ом·м; для германия, легированного примесями, оно обычно существенно меньше (0,01 Ом·м и ниже). Таким образом, если в металле температурный ход сопротивления практически полностью определяется зависимостью подвижности свободных электронов от температуры (их концентрация неизменна), то в полупроводнике сопротивление прежде всего зависит от изменения концентрации носителей с температурой – с изменением подвижности обычно можно не считаться.

Однако есть и еще одна значительная особенность – подвижность носителей заряда в полупроводнике зависит от напряженности электрического поля уже в достаточно малых полях; поэтому закон Ома для таких материалов верен только в очень ограниченной области изменения поля.

Очень интересные и практически важные процессы разыгрываются на границе двух полупроводников разных типов проводимости или на границе полупроводника с металлом. Если граница разделяет области с  $p$ - и  $n$ -проводимостью, то электроны из  $n$ -германия самопроизвольно переходят в  $p$ -германий, а дырки перемещаются в обратном направлении. Это связано с тем, что в каждой из областей число основных свободных носителей заряда – электронов в  $n$ -типе и дырок в  $p$ -типе – значительно больше, чем неосновных носителей. Поэтому при хаотическом тепловом движении через границу между  $p$ - и  $n$ -областями происходит преимущественное проникновение электронов в область  $p$ -типа и дырок – в область  $n$ -типа. Следовательно, на границе возникает электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$ , направленной из  $n$ -германия к  $p$ -германию (рис. 6.3, а), и скачок потенциала, несколько упрощенно показанный на потенциальной диаграмме (рис. 6.3, б). Так как поле препятствует дальнейшему самопроизвольному переходу зарядов, то создается равновесное динамическое состояние.

Такой контакт двух полупроводников называют  $p$ - $n$ -переходом; он обладает односторонней проводимостью. Если к переходу приложить разность потенциалов так, чтобы более высокий потенциал соответствовал  $p$ -области, то электроны и дырки будут легко проходить через  $p$ - $n$ -переход, увлекаемые внешним электрическим полем, – в этом случае переход обладает малым сопротивлением.

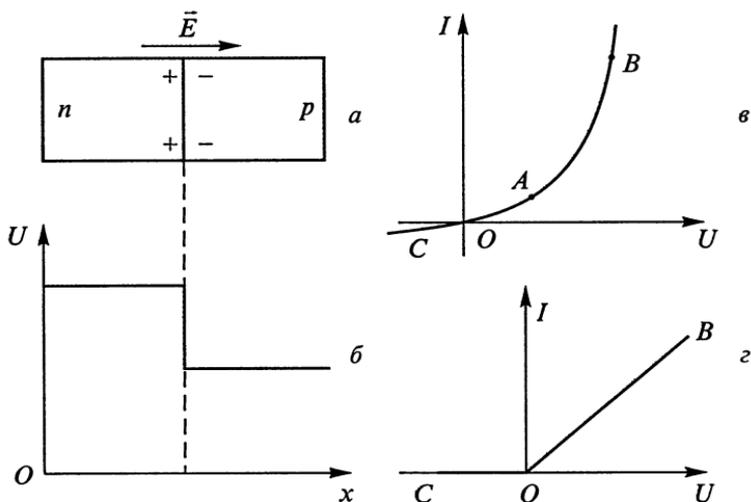


Рис. 6.3

При противоположной полярности внешнее поле будет препятствовать проникновению через переход как электронов, так и дырок, — переход окажется закрытым, т. е. обладающим большим сопротивлением. Полупроводниковые приборы, имеющие один  $p-n$ -переход, называются *диодами* и бывают двух типов: плоскостными и точечными.

Если площадь поверхности перехода значительна, то диод называется плоскостным. Он имеет значительную емкость, не позволяющую применить диод на высоких частотах. Такие диоды применяются в цепях низкой частоты (50 Гц) для преобразования переменного тока в постоянный.

Вольт-амперная характеристика плоскостного диода представлена на рисунке 6.3, *в*. Она существенно нелинейна, так что закон Ома для диода не выполняется. Участок характеристики *OB* соответствует пропускному направлению тока — через  $p-n$ -переход движутся из каждой области основные носители заряда. Участок *OC* соответствует обратному току и движению через  $p-n$ -переход неосновных носителей, число которых относительно невелико. При значи-

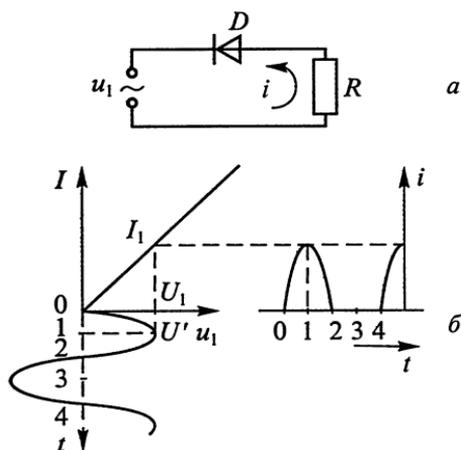


Рис. 6.4

тельных напряжениях можно пренебречь обратным током и кривизной характеристики и заменить истинную характеристику приближенной – ломаной линией (рис. 6.3, з).

На рисунке 6.4, а изображена простейшая схема выпрямителя. В условном обозначении диода  $D$  предполагается, что он пропускает ток только в направлении стрелки. В цепь включена нагрузка  $R$ ; на ней нужно получить напряжение, постоянное хотя бы по знаку.

На вспомогательном графике (рис. 6.4, б) вместе с вольт-амперной характеристикой  $I = f(U)$  изображена (внизу слева) зависимость питающего напряжения от времени:  $u_1 = f(t)$ , справа – зависимость от времени тока:  $i = \psi(t)$  (и следовательно, напряжения  $u_R$  на нагрузке); эта зависимость определена графически при помощи двух первых кривых. Ток в нагрузке существует только в те полупериоды изменений напряжения  $u_1$ , когда через диод течет пропускной ток.

На рисунке 6.5, а изображена схема, позволяющая использовать оба полупериода переменного напряжения. Когда потенциал зажима  $A$  больше, чем зажима  $B$ , ток течет через диод  $1$ , нагрузку  $R$  и диод  $3$ . При противоположных знаках потенциалов ток пропускают диоды  $2$  и  $4$ . Нагрузка в обоих случаях обтекается током одного направления (рис. 6.5, б).

Для сглаживания пульсаций к нагрузке  $R$  подключается фильтр, в простейшем случае – конденсатор  $C$  достаточно большой емкости (рис. 6.6, а). Он заряжается через диоды, пропускающие ток, но не может разряжаться через них, когда они заперты (для обратного тока сопротивление  $p-n$ -переходов очень велико). Поэтому конденсатор будет разряжаться через резистор. Если постоянная времени  $RC$  достаточно велика по сравнению с периодом переменного напряжения, то напряжение на конденсаторе (и нагрузке) не успевает заметно снизиться до начала новой зарядки.

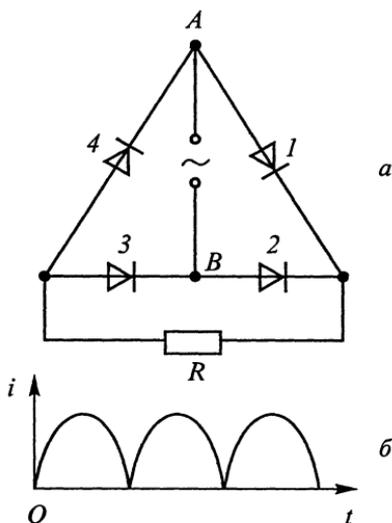


Рис. 6.5

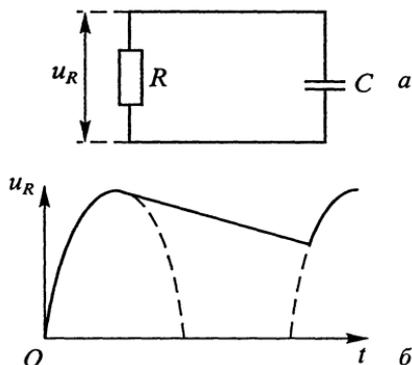


Рис. 6.6

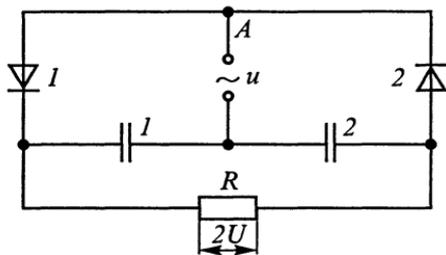


Рис. 6.7

На рисунке 6.6, б пунктиром показано изменение напряжения при отсутствии конденсатора, сплошной линией – при его наличии.

Улучшенные типы фильтров, позволяющие практически устранить пульсации напряжения, рассматриваются в курсе радиотехники.

На рисунке 6.7 показана схема, позволяющая не только устранить паузы, имеющиеся в работе простого выпрямителя, но и удвоить напряжение, поступающее на нагрузку. Пусть напряжение питания  $u = U \cos \omega t$ . Когда потенциал зажима  $A$  положителен, ток течет через диод 1 и заряжает конденсатор 1; через диод 2 ток течь не может, так как потенциал его катода выше, чем анода. Когда же потенциал зажима  $A$  становится отрицательным, диоды меняются ролями; при этом заряжается конденсатор 2. На нагрузке  $R$  получается удвоенное напряжение. Если емкости конденсаторов достаточно велики, так что постоянная времени  $\frac{1}{2} RC$  значительно превышает период переменного напряжения, то заряд (и потенциал) конденсаторов почти не изменяется и нагрузка все время находится под постоянным напряжением  $2U$ .

При высоких частотах (вплоть до  $10^{11}$  Гц) применяются точечные диоды. В них тонкая металлическая проволочка, являющаяся поставщиком электронов, вплавляется в полупроводник, благодаря чему образуется  $p-n$ -переход очень малой площади (и соответственно, малой емкости). Конечно, такой диод может работать без перегрева лишь при малых напряжениях, соответствующих началу его вольт-амперной характеристики. На практике такой малый участок ( $OA$  на рис. 6.3, в) приближенно можно представить параболой:

$$i = au^2.$$

Эту характеристику называют *квадратичной*.

Точечные диоды применяются для преобразования слабых радиосигналов. Если подать на точечный диод в схеме рисунка 6.4, а сразу два напряжения (разных частот), то получится ток:

$$\begin{aligned} i \sim (U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t)^2 &= U_1^2 \cos^2 \omega_1 t + U_2^2 \cos^2 \omega_2 t + \\ &+ 2U_1 U_2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \frac{1}{2}(U_1^2 + U_2^2) + \frac{1}{2}(U_1^2 \cos 2\omega_1 t + \\ &+ U_2^2 \cos 2\omega_2 t) + U_1 U_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + U_1 U_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]. \end{aligned}$$

Таким образом, в цепи нагрузки возникают кратные и комбинационные частоты, отсутствующие во внешних «управляющих» напряжениях, что представляет практический интерес для так называемых нелинейных преобразований сигналов.

Зависимость концентрации свободных носителей в полупроводниках от внешних условий определяет их широкое применение. Например, воздействие света приводит к увеличению проводимости. Это явление называют фотопроводимостью и используют для регистрации света (фоторезисторы, фотодиоды). Фоторезисторы – в зависимости от их природы – могут применяться для индикации как видимого, так и инфракрасного света.

Возрастание проводимости при нагревании полупроводника используется в терморезисторах, а также в термисторах – приборах для измерения температуры.

Более подробно физические процессы в полупроводниках будут изучаться в «Молекулярной физике».

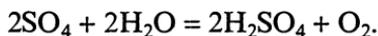
### 6.3. Электропроводность жидкостей

Электропроводность жидкостей (кроме расплавленных металлов, к которым относится и ртуть) не является электронной. Чистые жидкости, а также водные растворы органических соединений электропроводностью почти не обладают. Но при растворении в воде неорганических веществ растворы (электролиты) приобретают заметную электропроводность. Для ее исследования в электролитическую ванну помещают два металлических электрода, на которые можно подать разность потенциалов от внешнего источника ЭДС. При этом в растворе электролита возникает электрическое поле, а в цепи наблюдается ток. На электродах выделяются те или иные вещества, что позволяет утверждать, что носителями тока в растворах электролитов являются не электроны, а заряженные атомы или части молекул (ионы). Ионы появляются в растворе благодаря распаду на части молекул растворенного вещества под действием молекул растворителя (вода, обладающая большой диэлектрической проницаемостью, ослабляет связи между атомами молекул растворенного вещества, имеющие электрическую природу). При распаде молекул на ионы каждый из них приобретает избыточный заряд за счет захвата одного или нескольких электронов одним из атомов (отрицательный ион) и потери их другим (положительный ион). Эти избыточные заряды изменяют химические свойства ионов (по сравнению с соответствующими атомами) и делают их химически неактивными относительно молекул воды.

Под действием внешнего электрического поля ионы приходят в упорядоченное движение и, подходя к электродам, отдают им избыточный заряд, превращаясь в атомы. Эти атомы выделяются на

электродах или вступают во вторичные реакции, при которых на электродах выделяются продукты этих реакций, что усложняет описанное выше явление электролиза.

К положительному полюсу (аноду) подходят ионы с отрицательным зарядом, к отрицательному полюсу (катоде) подходят ионы с положительным зарядом. Так, например, если ток пропускается через водный раствор серной кислоты (распадающейся на ионы  $2\text{H}^+$  и  $\text{SO}_4^{2-}$ ), причем электроды сделаны из химически инертной платины, то на отрицательном электроде (катоде) выделяется газообразный водород. У положительного электрода (анода) ионы  $\text{SO}_4^{2-}$ , отдав свой заряд электроду, превращаются в молекулу  $\text{SO}_4$ , которая сразу же реагирует с водой:



На аноде выделяется газообразный кислород. Таким образом, в конечном счете происходит разложение воды, а число молекул серной кислоты в растворе не меняется.

При нейтрализации ионов на электродах происходит соответствующее перемещение электронов в проводах, соединяющих электролитическую ванну с источником ЭДС, и в самом источнике.

Важный факт – *распад на ионы (диссоциация)* в процессе растворения (до создания поля, которое лишь вызывает упорядоченное движение ионов) – доказывается прямым опытом. В пробирку с раствором электролита впаивают по концам два электрода. Пробирку запаивают и приводят на центрифуге в очень быстрое вращение (ось пробирки перпендикулярна оси вращения); вся пробирка расположена по одну сторону от оси вращения. При этом ионы перераспределяются – ионы большей массы уходят дальше от оси вращения. После быстрого торможения электроды замыкают на гальванометр, дающий кратковременный отброс. По направлению отклонения стрелки можно судить о знаке ионов у каждого из электродов.

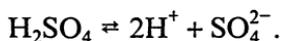
Другие прямые доказательства диссоциации при растворении описываются в «Молекулярной физике».

Распад молекул на ионы подчиняется следующим закономерностям.

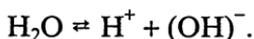
При разложении солей и щелочей ион металла оказывается положительным, например:



При разложении кислот положительным является ион водорода:



Кроме того, относительно очень малая часть молекул воды оказывается диссоциированной:



При комнатной температуре эта часть составляет всего  $1 \cdot 10^{-9}$  общего числа молекул.

В электролите ион оказывается окруженным молекулами растворителя (воды), обладающими значительными дипольными моментами. Взаимодействуя с ионом, полярные молекулы поворачиваются к нему своими концами, имеющими заряд,

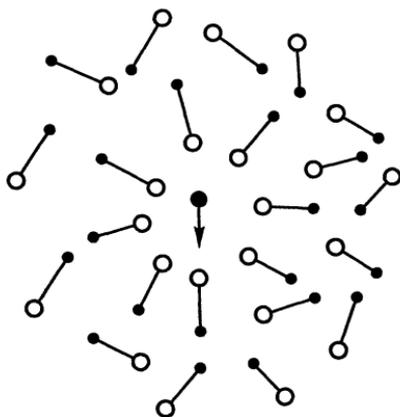


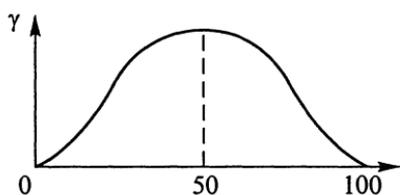
Рис. 6.8

знак которого противоположен знаку заряда иона (рис. 6.8); поэтому упорядоченное движение иона в электрическом поле затрудняется и подвижность ионов не превышает  $3 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / (\text{В} \cdot \text{с})$ , т.е. значительно уступает подвижности электронов проводимости в металле (см. § 6.1). Так как и концентрация ионов обычно невелика по сравнению с концентрацией электронов в металле, то удельная электрическая проводимость электролитов всегда существенно меньше электрической проводимости металлов и не превышает  $10^2 \dots 10^3 \text{ См/м}$ .

Вследствие сильного нагревания током в электролитах допустимы лишь незначительные плотности тока, т.е. небольшие напряженности электрического поля. В этих слабых полях подвижность ионов не зависит от напряженности поля и, следовательно, электролиты подчиняются закону Ома.

При повышении температуры электролита упорядоченная ориентация диполей растворителя вокруг ионов ухудшается под влиянием усилившегося беспорядочного движения молекул, поэтому дипольная оболочка частично разрушается, подвижность ионов и проводимость раствора увеличиваются.

Зависимость удельной электрической проводимости от массовой доли растворенного вещества при неизменной температуре сложна (рис. 6.9). Если растворение возможно в любых пропорциях (например, растворение серной кислоты в воде), то при некоторой массовой доле электрическая проводимость имеет максимум. Причина этого такова: вероятность



Массовая доля растворенного вещества, %

Рис. 6.9

распада молекулы на ионы пропорциональна числу молекул растворителя и числу молекул растворенного вещества в единице объема. Но возможен и обратный процесс (рекомбинация ионов в молекулы), вероятность которого пропорциональна квадрату числа пар ионов. Электрическая проводимость пропорциональна числу пар ионов в единице объема. В действительности непрерывно происходят оба процесса – диссоциация и рекомбинация. При данных внешних условиях (постоянной температуре и неподвижной жидкости, так что перемешивания ее слоев не происходит) устанавливается подвижное равновесие при определенной концентрации ионов. В целом раствор остается нейтральным. Поэтому хотя при малых массовых долях растворенного вещества диссоциация почти полная, но общее число ионов мало. При очень больших массовых долях диссоциация слабая и число ионов также невелико.

Если растворимость вещества ограничена, то обычно максимума электрической проводимости не наблюдается.

При замораживании вязкость водного раствора резко возрастает, подвижность ионов резко уменьшается и удельная электрическая проводимость падает в тысячи раз, что легко показать на опыте.

Как указывалось выше, в слабых полях растворы электролитов подчиняются закону Ома. Но для электролитической ванны в целом (включая электроды) закон Ома не выполняется, так как на границе металл – раствор возникают скачки потенциала, зависящие от химической природы электродов и раствора. Поэтому вольт-амперная характеристика ванны в целом имеет излом (рис. 6.10).

В 1833 г. М. Фарадей экспериментально показал, что масса  $m$  выделенного на каждом электроде вещества пропорциональна заряду  $Q$ , прошедшему по электрической цепи и ванне:

$$m = kQ = kIt = \frac{M}{Z} \frac{1}{F} Q. \quad (6.3)$$

Это соотношение представляет собой закон Фарадея. Коэффициент  $k$  в (3.1) называют электрохимическим эквивалентом, его единицей является  $1 \text{ кг/Кл}$ . Электрохимический эквивалент зависит от природы выделяющегося вещества:

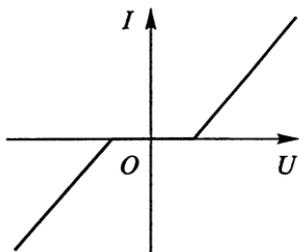


Рис. 6.10

$$k = \frac{M}{ZF}.$$

Так, для серебра  $k = 1,118 \cdot 10^{-6} \text{ кг/Кл}$ , для водорода –  $k = 1,045 \cdot 10^{-8} \text{ кг/Кл}$ .

В уравнении (6.3)  $I$  – сила тока,  $t$  – время его протекания,  $M$  – молярная масса выделяющегося вещества,  $Z$  – его валентность. Примем  $Z = 1$ . Тогда

$$F = \frac{M}{k}$$

есть заряд, необходимый для выделения одного моля любого (одновалентного) вещества. Опыт подтвердил этот расчет, причем оказалось, что

$$F = 96\,540 \text{ Кл/моль}; \quad (6.4)$$

$F$  называют *постоянной Фарадея*.

В 1881 г. Г. Гельмгольц указал, что по постоянной Фарадея можно найти средний заряд иона. Это было осуществлено после измерения постоянной Авогадро (число атомов в одном моле вещества), так как заряд одновалентного иона связан с постоянной Авогадро  $N_A$ :

$$q_0 = \frac{F}{N_A} \quad (N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}).$$

Отсюда средний заряд одновалентного иона оказывается равным

$$q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Это значение заряда совпало со значением заряда электрона, измеренным в начале XX в. Таким образом, представление об элементарном электрическом заряде получило веское подтверждение.

Заряд многовалентного иона равен

$$q_Z = Zq_0.$$

Непосредственное наблюдение за движением ионов при пропускании тока через раствор электролита возможно в приборе Нернста (рис. 6.11). В U-образную стеклянную трубку наливают раствор  $\text{KMnO}_4$ ; в нем имеются ионы  $\text{K}^+$  и  $(\text{MnO}_4)^-$  (они создают фиолетовую окраску); сверху очень осторожно наливают бесцветный раствор  $\text{KNO}_3$  (ионы  $\text{K}^+$  и  $(\text{NO}_3)^-$ ). Граница между растворами должна остаться резкой. Затем сверху опускают в трубку электроды (желательно платиновые) и пропускают небольшой ток, не вызывающий заметного нагрева жидкостей. Через несколько минут обнаруживается повышение уровня окрашенной границы в трубке, соединенной с положительным полюсом внешнего источника ЭДС.

Электролиты могут быть и твердыми. Это уже было доказано описанным выше опытом с замороженным раствором. Твердым электро-

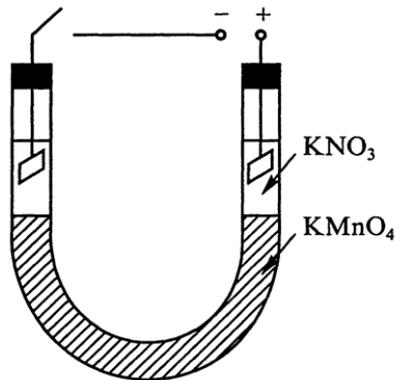


Рис. 6.11

литом является и стекло. Если на концы короткой стеклянной палочки (3...5 см) навернуть оголенную проволоку и включить палочку в цепь источника ЭДС (около 220 В) последовательно с небольшой лампой накаливания, то никакого накала нити лампы наблюдаться не будет, так как сопротивление холодного стекла очень велико. Нагревая палочку на газовой горелке до размягчения, заметим, что нить лампы начинает светиться: сопротивление стекла резко уменьшилось, и ток в цепи оказался способным слегка накаливать нить. После этого, закоротив лампу (чтобы уменьшить сопротивление цепи), можно убрать горелку: за счет энергии, выделяющейся в палочке, последняя будет нагреваться дополнительно, и сила тока будет расти. Таким способом можно довести стекло до плавления.

В соответствии с законом Ома плотность тока в растворе электролита равна

$$\vec{j} = \alpha n(q_+ \vec{v}_+ + q_- \vec{v}_-) = \alpha n(q_+ \mu_+ + q_- \mu_-) \vec{E}, \quad (6.5)$$

где  $\alpha$  – коэффициент диссоциации (относительная доля распавшихся на ионы молекул растворенного вещества),  $q$  – заряд иона,  $\mu$  – его подвижность,  $n$  – число молекул в единице объема.

Измеряя проводимость и изменения концентрации ионов, происходящие в непосредственной близости к электродам (в толще раствора концентрация не меняется), можно определить подвижности ионов. Они порядка  $10^{-8} \dots 10^{-7} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ . Поэтому даже самый подвижный ион – водородный ( $\mu = 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ ) – в поле с напряженностью  $E = 10^3 \text{ В/м}$ , что отвечает условиям лекционного опыта, движется со скоростью  $v_+ = 0,33 \text{ мм/с}$ , значительно меньшей скорости беспорядочного движения нейтральных молекул окружающей жидкости.

Выше указывалось (см. рис. 6.10), что на границе электрод – раствор происходит скачок потенциала, препятствующий осаждению на электроде ионов, имеющих в растворе. Величина скачка (несколько вольт) зависит от природы соприкасающихся тел. Поэтому если в растворе имеются ионы различной природы, то, подбирая внешнее напряжение, подаваемое на электролитическую ванну, можно выделить в чистом виде вещество, для которого скачок потенциала наименьший. Когда его выделение практически прекратится, то, повышая напряжение, можно выделить следующее вещество, и т. д. Этот способ нашел широкое практическое применение.

В технике используется также электролитическое покрытие поверхности того или иного тела тонким слоем металла, растворенного в электролите (хромирование, никелирование).

## 6.4. Электропроводность газов. Несамостоятельный разряд

В отличие от жидкостей, где носителями зарядов являются положительные и отрицательные ионы, в газе процессы усложняются тем, что носителями могут быть не только ионы, но и свободные электроны. Кроме того, в жидкости природа иона однозначно определяет знак его заряда; в газе же молекула (или атом) может потерять электрон (и превратиться в положительный ион), но может и захватить свободный электрон (и превратиться в отрицательный ион). Поэтому в газе, несмотря на ионный характер проводимости, не наблюдается явлений электролиза, т. е. преимущественного выделения вещества на электродах (по крайней мере при малых напряженностях электрического поля).

Далее, влияние давления и температуры на условия движения частиц в газе гораздо более сильно, чем в жидкости или твердом теле. Соответственно и зависимость силы тока (ток в газах часто называют разрядом) от внешних условий здесь гораздо сложнее, а типы разрядов более разнообразны.

При небольших (комнатных) температурах и давлениях, близких к атмосферному, газы являются хорошими диэлектриками, так как в них почти нет заряженных частиц. Нагревание или освещение ультрафиолетовыми или рентгеновскими лучами, а также воздействие на газ излучениями радиоактивных элементов создает частичную ионизацию, и газы приобретают более или менее заметную проводимость. Если действие ионизатора прекратить, то возникшие ионы частично рекомбинируют, частично отсасываются электрическим полем к электродам, а потому диэлектрические свойства газа вскоре восстанавливаются.

Вообразим ионизатор, действующий непрерывно и создающий ежесекундно в единице объема некоторого незаряженного плоского конденсатора  $N$  пар ионов противоположных знаков. Благодаря рекомбинации ежесекундно будет исчезать  $\alpha n^2$  пар ионов (так как вероятность рекомбинации пропорциональна числу ионов каждого знака), где  $n$  — концентрация пар ионов в данный момент времени (она отлична от  $N$ ). Поэтому изменение числа пар ионов за время  $dt$  опишется уравнением

$$dn = (N - \alpha n^2) dt.$$

Опыт показывает, что через небольшой промежуток времени после начала работы ионизатора устанавливается неизменная концентрация  $n_0$ . Следовательно, наступает состояние динамического равновесия, когда число создающихся и разъединяющихся пар ионов одинаково, так что можно написать:

$$N - \alpha n_0^2 = 0.$$

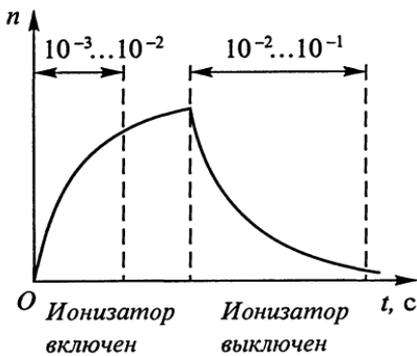


Рис. 6.12

Поэтому

$$n_0 = \sqrt{\frac{N}{\alpha}}$$

Коэффициент  $\alpha$  (единицей является  $1 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ ) зависит от давления, температуры и природы газа. В нормальных условиях для воздуха  $\alpha \ll 1$ . Поэтому  $n_0 \ll N$ . (Подобно этому число жителей большого города значительно превышает среднее число происходящих в нем в единицу времени рождений.)

Если после установления равновесного состояния прекратить действие ионизатора, то вследствие рекомбинации число пар ионов будет убывать со временем по закону:

$$-dn = \alpha n^2 dt \quad \text{и} \quad n = \frac{n_0}{1 + \alpha n_0 t}$$

В воздухе при атмосферном давлении равновесие практически наступает через сотые доли секунды после включения ионизатора. После его выключения исчезновение ионизации происходит за десятые доли секунды (рис. 6.12).

Рассмотрим, что произойдет при одновременном действии ионизатора и подаче на пластины конденсатора некоторой разности потенциалов  $U$ , создающей в нем поле напряженностью  $E = \frac{U}{h}$  ( $h$  – расстояние между пластинами). Будем считать, что ионизатор образует ионы во всем объеме конденсатора  $Sh$  ( $S$  – площадь пластин).

За время  $dt$  в объеме конденсатора возникает число пар ионов, равное

$$dn_1 = NShdt.$$

За это же время рекомбинирует число пар ионов, равное

$$dn_2 = -\alpha n^2 Shdt.$$

Наконец, ток  $I$  унесет из объема конденсатора число пар ионов, равное

$$dn_3 = -\frac{1}{2q} dt,$$

где  $q$  – заряд иона.

В результате число пар ионов за время  $dt$  изменится на величину, равную

$$dn = dn_1 + dn_2 + dn_3.$$

Если ток постоянен во времени, то это изменение обращается в нуль, поэтому получается:

$$NSh - \alpha n^2 Sh - \frac{I}{2q} = 0. \quad (6.6)$$

Решение уравнения (6.6) затруднительно, так как установившаяся концентрация ионов  $n$  зависит от силы тока.

Подчеркнем, что при прекращении действия ионизатора ток вскоре прекратится. Поэтому рассматриваемый разряд называется *несамостоятельным*.

Если сила тока очень мала, так что последним слагаемым можно пренебречь, то можно считать, что  $n = n_0$ . Тогда при практически постоянной концентрации справедлив закон Ома:

$$n_0 = \sqrt{\frac{N}{\alpha}}; \quad I = n_0 q S (\mu_+ + \mu_-) E = \gamma E.$$

Подвижности  $\mu_+$  и  $\mu_-$  довольно близки друг к другу, но обычно  $\mu_- > \mu_+$ . Здесь под  $\mu_-$  понимается усредненная (по ионам и электронам) подвижность отрицательно заряженных частиц.

Пусть параметры конденсатора таковы:  $S = 0,01 \text{ м}^2$ ,  $h = 0,1 \text{ м}$ . При нормальном давлении  $\mu_+ = \mu_- = \mu = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ . Для воздуха при нормальных условиях  $\alpha = 10^{-12} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ . Примем производительность ионизатора равной  $N = 10^{11} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ . Тогда получим:

$$n_0 = \sqrt{\frac{N}{\alpha}} = 3 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3},$$

что составляет ничтожную долю общего числа частиц ( $3 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ ). Задавая  $q = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ,  $E = 1 \text{ В/м}$ , найдем силу тока в начальной части кривой разряда, когда действует закон Ома (рис. 6.13, кривая 1):  $I_n = 10^{-13} \text{ А}$ . По мере усиления поля число отсасываемых полем ионов становится все больше, поэтому  $n$  падает и сила тока начинает расти медленнее, чем напряжение (см. рис. 6.13). В конце концов, когда можно будет пренебречь рекомбинацией и считать, что все рождающиеся ионы увлекаются полем, получается ток насыщения, не зависящий от напряжения:

$$I_{\text{нас}} = 2eNSh.$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$I_{\text{нас}} = 3 \cdot 10^{-11} \text{ А},$$

т.е. эта сила тока примерно на два порядка больше, чем начальная, но все еще очень мала.

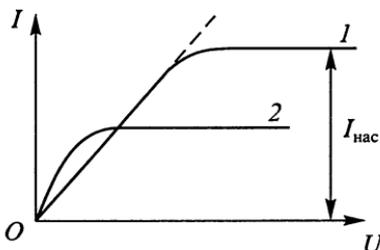


Рис. 6.13

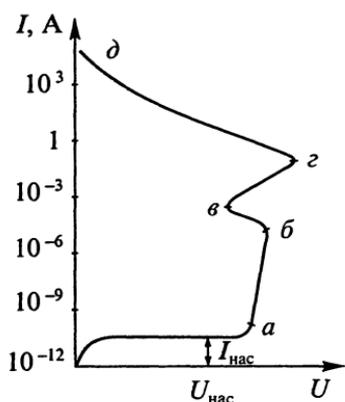


Рис. 6.14

Заметим, что при сближении пластин новая кривая 2 сначала идет выше первой, так как (при той же разности потенциалов на конденсаторе) напряженность поля увеличивается. Но затем она пойдет ниже – сила тока насыщения уменьшается из-за уменьшения объема конденсатора.

При несамостоятельном разряде, вызванном малопродуктивным ионизатором, в разрядном промежутке не наблюдается никаких внешних проявлений тока насыщения.

При увеличении разности потенциалов сверх напряжения насыщения  $U_{\text{нас}}$  возможно возникновение лавинной ионизации: образовавшиеся под действием ионизатора электроны приобретут в поле столь большую энергию, что смогут сами ионизировать молекулы газа. Каждый новый электрон сможет делать то же, и число заряженных частиц будет быстро расти. Если допустить, что число рождающихся электронов  $dn$  пропорционально числу имеющихся и пробегавшему ими между двумя последовательными соударениями расстоянию:  $dn = \beta n dx$ , то закон нарастания будет таков:

$$n = n_0 \exp(\beta x).$$

При этом сила тока возрастет на несколько порядков (рис. 6.14, точка *а*), но разряд все еще остается несамостоятельным, так как при прекращении действия ионизатора процесс прекращается.

Возможность ионизации газа быстрыми электронами (ударной ионизации) существенно зависит от давления: чем меньше давление газа, тем больше длина пробега, за время которого электрическое поле увеличивает энергию электронов. Если энергия оказывается недостаточной для ионизации, то атом приходит в возбужденное состояние; но через небольшой промежуток времени атом избавится от этого избытка энергии, создавая свечение, а часть энергии пойдет на нагревание газа.

## 6.5. Самостоятельный разряд в газах. Плазма

Если напряжение на разрядном промежутке продолжать увеличивать, то ток резко (в десятки тысяч раз) возрастет (см. рис. 6.14, участок *аб*). При этом наблюдается свечение газа и происходят новые процессы: из-за резкой разницы в подвижности электронов и ионов (первая много больше второй) у электродов возникает

избыточная концентрация зарядов (отрицательных у анода, положительных – у катода; последняя выражена сильнее). Это приводит к перераспределению потенциала вдоль разрядного промежутка. При слабом несамостоятельном разряде, когда выполняется закон Ома, напряжение меняется линейно (рис. 6.15, прямая 1). При нарушении закона Ома напряжение меняется по кривой 2: напряженность поля, равная  $E = -\frac{dU}{dh}$ , вблизи электродов увеличивается. Электроны, ускоренные в сильном поле, приобретают энергию, достаточную для ионизации молекул газа; при этом возникают новые электроны, в свою очередь вызывающие ионизацию (лавина), и ток возрастает. Ионы, ускоренные вблизи катода, бомбардируют его и нагревают. В результате возникает явление термоэлектронной эмиссии – катод испускает электроны, также принимающие участие в создании тока. При рекомбинации большого числа ионов освобождается избыток энергии – возникает свечение газа; его излучение тоже способно ионизировать газ.

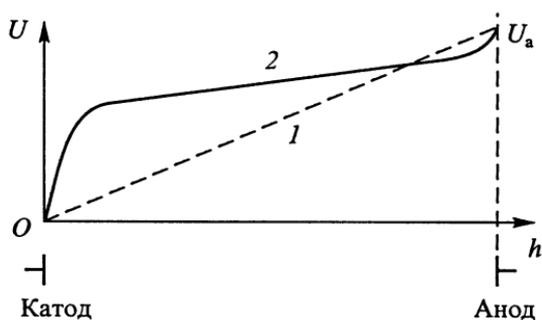


Рис. 6.15

При нарушении закона Ома напряжение меняется по кривой 2: напряженность поля, равная  $E = -\frac{dU}{dh}$ , вблизи электродов увеличивается. Электроны, ускоренные в сильном поле, приобретают энергию, достаточную для ионизации молекул газа; при этом возникают новые электроны, в свою очередь вызывающие ионизацию (лавина), и ток возрастает. Ионы, ускоренные вблизи катода, бомбардируют его и нагревают. В результате возникает явление термоэлектронной эмиссии – катод испускает электроны, также принимающие участие в создании тока. При рекомбинации большого числа ионов освобождается избыток энергии – возникает свечение газа; его излучение тоже способно ионизировать газ.

Все эти явления (они возникают не одновременно) приводят к резкому увеличению силы тока, причем закон Ома конечно нарушается. Из-за резкого уменьшения сопротивления разрядного промежутка падение напряжения на нем при возрастании тока может уменьшиться (см. рис. 6.14, участок *бв*). Поэтому для устойчивости разряда последовательно с разрядным промежутком обязательно включается резистор, на котором напряжение растет вместе с ростом силы тока.

При развитии указанных выше процессов роль первоначально ионизатора делается незаметной и его можно убрать. При этом разряд продолжает поддерживать сам себя. Поэтому его называют *самостоятельным*.

Мы не будем рассматривать весьма сложной теории этого разряда, а ограничимся качественным описанием его важнейших форм. Наблюдать за развитием разряда удобно в длинной (50...70 см) стеклянной трубке с впаянными в ее торцы металлическими электродами, имеющими форму небольших пластин. Давление газа в трубке следует понизить до 100 Па (чтобы не работать с высокими напряжениями, которые потребовались бы при более высоких давлениях).

Мы не будем рассматривать весьма сложной теории этого разряда, а ограничимся качественным описанием его важнейших форм. Наблюдать за развитием разряда удобно в длинной (50...70 см) стеклянной трубке с впаянными в ее торцы металлическими электродами, имеющими форму небольших пластин. Давление газа в трубке следует понизить до 100 Па (чтобы не работать с высокими напряжениями, которые потребовались бы при более высоких давлениях).

Мы не будем рассматривать весьма сложной теории этого разряда, а ограничимся качественным описанием его важнейших форм. Наблюдать за развитием разряда удобно в длинной (50...70 см) стеклянной трубке с впаянными в ее торцы металлическими электродами, имеющими форму небольших пластин. Давление газа в трубке следует понизить до 100 Па (чтобы не работать с высокими напряжениями, которые потребовались бы при более высоких давлениях).

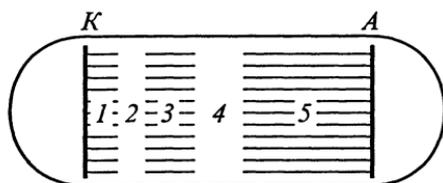


Рис. 6.16

Так как в воздухе всегда имеются слабо действующие ионизаторы, то они и играют роль внешнего источника ионизации. При подаче на трубку небольшого напряжения возникает несамостоятельный разряд, внешне никак не проявляющийся

(ток весьма мал). При повышении напряжения до сотен вольт в трубке возникает свечение: начинается стадия лавинного разряда, переходящего в самостоятельный разряд, когда поставщиком электронов становится катод: электроны вырываются из него сильным электрическим полем либо под действием света (фотоэлектрический эффект) или выбиваются ионами. В это время в трубке видна тонкая искровая дорожка; ее сечение в сотни раз меньше сечения трубки; форма искровой дорожки непрерывно беспорядочно изменяется. Затем свечение распространяется на все сечение трубки.

Распределение свечения при установившемся самостоятельном разряде показано схематически на рисунке 6.16. Поверхность катода покрыта почти примыкающим к нему светящимся слоем газа 1. Здесь электроны возбуждают (но еще не могут ионизировать) атомы газа; при рекомбинации ионы вызывают свечение; под влиянием излучения возможно возникновение фотоэффекта – вырывание электронов из катода. Далее следует темное пространство 2, длина его – несколько миллиметров. В нем электроны приобретают кинетическую энергию, достаточную для ионизации газа, происходящей в области 3, где наблюдается свечение рекомбинирующих частиц газа. Область 3 занимает в длину около сантиметра. За ней следует фарадеево темное пространство 4. Сюда приходят электроны, потерявшие почти всю кинетическую энергию при ионизации молекул газа. Длина этого участка 1...1,5 см. Здесь не происходит ни ионизации, ни возбуждения молекул, так как электрическое поле слабее, чем у самого катода, и электроны должны пройти большой путь, чтобы приобрести достаточную для ионизации энергию.

Весь рассмотренный отрезок разрядного столба называется катодной областью, так как лежит в той части, где существует сильное катодное падение потенциала. Далее (почти до самого анода) тянется светящийся столб 5, называемый анодным. Здесь быстрые электроны снова ионизируют и возбуждают атомы газа. Но в этой области концентрация носителей обоих знаков примерно одинакова, а потому поле слабее (лишь у самого анода существует скачок потенциала, не играющий в разряде существенной роли).

Описанный разряд называется самостоятельным тлеющим разрядом. На вольт-амперной характеристике (см. рис. 6.14) ему отвечает участок *бв*.

Подчеркнем, что тлеющий разряд можно получить и при более высоких давлениях.

Катодное падение потенциала пропорционально энергии, необходимой для вырывания электрона из катода (применяется также термин «работа выхода» электрона). Работу выхода выражают в электронвольтах ( $1 \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ). В зависимости от природы катода работа выхода составляет от трех до десятков электронвольт. Она мала у щелочных металлов. Поэтому если электрод покрыть слоем щелочного металла, то катодное падение получается малым, порядка нескольких вольт. В этом случае тлеющий разряд возникает при напряжениях, близких к 100 В. Подобные лампы, заполненные неоном, служат в качестве сигнальных в электрической аппаратуре. Длинные трубки тлеющего разряда используются в качестве декоративных и рекламных. При этом цвет свечения зависит от газа, заполняющего трубку. В лампах дневного света также используется тлеющий разряд (см. «Оптику и атомную физику»).

Если снизить давление в разрядной трубке до такой степени, что на ее длине электроны будут двигаться без столкновения с атомами остатков газа (состояние технического вакуума), то электроны наберут очень большую скорость (при  $U = 1000 \text{ В}$  скорость электрона составляет около  $10^8 \text{ м/с}$ ); поэтому из-за своей инертности они уже не будут двигаться в электрическом поле вдоль линий напряженности, если те имеют изгиб. Если анод поместить не в торце, а в боковой стенке трубки, то электроны будут пролетать мимо анода к торцу и вызывать свечение стекла. Поместив на их пути металлическую пластину, можно на торце получить ее тень, так как сквозь металл электроны не проходят. Подобный поток электронов часто называют *катодными лучами*.

Если сделать отверстие в катоде, то некоторые положительные ионы пройдут в закатодное пространство и образуют там слабо светящийся столб газа (анодные лучи). По спектральному составу свечения можно установить природу этих ионов.

Рассмотренный тлеющий разряд является *нормальным тлеющим разрядом*.

Следует отметить, что светящийся слой на катоде при слабых токах охватывает лишь часть поверхности катода. По мере роста тока он покрывает всю поверхность. При дальнейшем увеличении силы тока разряд становится аномальным; напряжение на трубке растет, анодный светящийся столб суживается, катодное свечение стягивается в небольшое пятно. Это состояние неустойчивое (см. рис. 6.14, участок *в2*). После того как катод разогреется, что связано с увеличением плотности тока, он будет создавать сильную термоэлектронную эмиссию, сила тока резко возрастет (до многих ампер), и все пространство внутри трубки заполнится сильно светящимся газом – возникнет дуговой разряд. При этом катодное

падение напряжения резко уменьшается, так что дуга горит при относительно малом напряжении на трубке (см. рис. 6.14, участок *zd*).

Дуговой разряд легко получается и при атмосферном давлении. Так, если свести два угольных электрода и подать на них напряжение порядка сотен вольт, то в месте контакта произойдет сильный разогрев. Если затем развести угли, между ними возникнет дуга – столб раскаленного газа. На аноде образуется кратер с очень высокой температурой. Сильно нагревается и катод, служащий мощным источником электронов. Дугу впервые получил в 1802 г. В. В. Петров (1761–1834). Позже ее наблюдал Г. Дэви. В честь изобретателя первого пригодного к потреблению источника ЭДС дугу назвали вольтовой дугой.

Существуют разновидности дугового разряда, на чем мы не будем останавливаться. Отметим практическое значение дуги. Она является мощным источником света и позволяет получить (в кратере анода) весьма высокие температуры. Дуга широко применяется при электросварке.

Если в угле анода сделать канал, заполненный каким-либо веществом, то при горении дуги вещество будет испаряться в дугу и даст свое излучение. Это используется при спектральном анализе сложных соединений.

Типичные дуги горят при напряжении в несколько десятков вольт и силе тока, достигающей сотен ампер. Температура самой горячей точки анода достигает 5...7 тыс. кельвин. Интересно отметить, что охлаждение анода не влияет на устойчивость дуги, а при охлаждении катода дуга гаснет. Это доказывает, что термоэлектронная эмиссия с катода является решающим фактором для существования дуги.

Широко используется дуга в парах ртути, горящая в сосуде из кварцевого стекла (пропускающего ультрафиолетовые лучи) между двумя электродами из жидкой ртути. Источником электронов является яркое пятно, бегающее по поверхности жидкого катода. Выход электронов, по-видимому, обусловлен как местными повышениями температуры катода (в целом нагретого не очень сильно), так и местными катодными падениями напряжения, возникающими при возрастании плотности ионов ртути у поверхности катода.

Кроме устойчивых газовых разрядов, рассмотренных выше, существуют и менее устойчивые. Из них заслуживают внимания два типа.

*Искровой* разряд – неустойчивый разряд, возникающий между двумя электродами, находящимися в газе при атмосферном (или близком к нему) давлении, если электрическое поле в области разряда близко к однородному.

При напряженности поля примерно 30 кВ/см в разрядном промежутке появляются неустойчивые, ветвящиеся, узкие светящиеся

нити, начинающиеся как на электродах, так и в произвольных точках промежутка. Они быстро сливаются в яркий светящийся канал (искру), причем напряжение на промежутке падает в сотни раз. Затем канал гаснет, и процесс возобновляется.

Физическая картина разряда такова: при случайном скоплении электронов, например у отрицательного электрода, возникает местный лавинный разряд; светящийся в нем слой газа создает ионизацию перед собой, где рождаются новые лавины (стримеры). Затем они сливаются в общий канал – искру. Так как в искре газ сильно нагревается и его давление повышается, то в окружающем воздухе возникает упругая волна – треск малой искры, гром – при молнии, представляющей собой гигантский искровой разряд, где сила разрядного тока достигает сотен килоампер.

Если параллельно искровому промежутку (имеющему малую электрическую емкость) присоединить конденсатор большой емкости, то при разряде будет выделяться энергия, запасенная в этом конденсаторе; искра станет более яркой; возможен даже переход искрового разряда в дуговой (если источник питания достаточно мощный).

Искровой разряд используется для измерения высоких напряжений: два металлических шара, подключенных к электрической цепи, сближают до возникновения разряда. Произведение пробойной напряженности поля  $E$  на расстояние между шарами дает значение напряжения в момент пробоя. Модуль вектора  $\vec{E}$  зависит от давления газа  $p$ , причем отношение  $\frac{E}{p}$  постоянно при довольно значительных изменениях давления.

Другое применение – искровой счетчик заряженных элементарных частиц. Небольшой конденсатор заряжен до напряжения, близкого к пробойному. Если в него влетит заряженная частица, создающая ионизацию газа, то произойдет пробой, отмечаемый счетным механизмом.

*Коронный* разряд – неполностью развившийся искровой разряд. Он наблюдается в сильно неоднородном поле у заостренных концов металлических тел или у поверхности очень тонких проволок. Второй электрод (форма его не очень существенна) должен быть расположен достаточно далеко, чтобы не развился искровой разряд.

Если тонкая проволока находится под отрицательным потенциалом, то при напряженности поля, равной напряженности пробоя, возникают электронные лавины, движущиеся от проволоки наружу, ионизирующие газ. Поэтому проволока окружена светящимся слоем газа. Там, где поле ослабевает, лавины перестают развиваться, и электроны, оседая на нейтральных молекулах газа, отталкиваются в окружающее пространство, где происходит неса-

мостоятельный разряд, не имеющий внешних проявлений. Если проволока находится под положительным потенциалом, то возникающие в ее окрестностях лавины движутся к проволоке, а положительные ионы уходят во внешнее пространство. Внешний вид коронного разряда в обоих случаях различен: положительная корона более размыта, чем отрицательная. Коронный разряд, образующийся с острия молниеотвода, облегчает возникновение искрового разряда (молнии) на молниеотвод. Коронный разряд возникает на любом заостренном предмете. В частности в горах, где давление, а следовательно, и напряженность пробоя понижены, коронный разряд возникает особенно легко.

Конечно, коронный разряд вызывает утечку зарядов. Поэтому провода высоковольтных линий не должны быть слишком тонкими (впрочем, их диаметр определяется также требованием достаточно малого сопротивления и достаточной механической прочности).

Коронный разряд применяется в электрофильтрах; задымленный воздух пропускается через трубу, по оси которой натянута тонкая проволока. Между ней и трубой приложена разность потенциалов. Частицы дыма, ионизируясь в области короны, улавливаются затем стенками трубы.

В заключение отметим, что вышеописанные типы разрядов возможны и при переменном напряжении. При этом если частота изменений электрического поля достаточно велика ( $10^7$  Гц и выше), то разряды, как правило, облегчаются.

*Плазма* – полностью или частично ионизированный газ, в котором плотность зарядов обоих знаков одинакова. В состоянии сильно ионизированной горячей плазмы находится любое вещество, нагретое до весьма высокой температуры (порядка  $10^6$  К), когда при соударениях беспорядочно движущиеся молекулы распадаются на атомы и ионизируются.

Плазма очень распространена во Вселенной: звезды, туманности и межзвездный газ состоят из плазмы. На Земле в состоянии плазмы находятся верхние слои атмосферы, ионизируемые космическим излучением и солнечным ветром (потоком заряженных частиц, испускаемых поверхностью Солнца). С плазмой мы встречались в дуговом разряде; плазма образует главный канал искрового разряда и положительный столб тлеющего разряда.

Свойства плазмы сильно отличаются от свойств обычного, неионизированного газа. Между частицами плазмы действуют кулоновские силы, пропорциональные  $R^{-2}$  ( $R$  – расстояние между частицами). Внешние электрические поля действуют на ионы и электроны, создавая сильные токи, нагревающие плазму. Магнитные поля препятствуют движению заряженных частиц поперек поля. Легкие электроны, двигаясь в электрическом поле, быстро пробе-

гают большие расстояния, приобретая значительную кинетическую энергию. Тяжелые ионы движутся гораздо медленнее, и их кинетическая энергия гораздо меньше, чем электронов. При взаимных соударениях ионов с электронами, сильно отличающимися от них по массе, почти не происходит обмена энергией. Поэтому приходится различать три температуры плазмы:  $T_n$ , соответствующую нейтральным частицам;  $T_i$ , соответствующую ионам (несколько превышает  $T_n$ );  $T_e$ , соответствующую электронам. Последняя имеет наибольшее значение и может отличаться от ионной на несколько порядков.

При больших давлениях электропроводность горячей плазмы близка к электропроводности металлов и токи в ней могут быть очень сильными. Плазма представляет особый практический интерес в связи с проблемой реализации управляемого термоядерного синтеза, который может существовать лишь при сверхвысоких температурах.

Так как в твердых полупроводниках и в металлах плотности зарядов обоих знаков могут быть одинаковы, то говорят и о холодной плазме в твердых телах. Ее особенностью является существование при низких температурах. Жидкая плазма (расплавленный металл) применяется в магнитогидродинамических генераторах электрической энергии. Физика плазмы очень сложна. Некоторые вопросы, интересные для атомной и ядерной физики, будут рассмотрены в «Молекулярной физике».

## 6.6. Термоэлектронная эмиссия. Электронные лампы

Практически важным типом несамостоятельного разряда является ток в вакуумных приборах, где давление понижено до состояния технического вакуума, когда можно не считаться с остатками газа (хотя даже при наилучших современных разрежениях –  $10^{-11}$  Па – еще остается громадное число молекул, порядка  $10^{10}$  м<sup>-3</sup>).

Для получения разряда необходимо ввести в вакуум заряженные частицы. Обычно это электроны, освобождаемые из катода либо при его нагревании (термоэлектронная эмиссия), либо при освещении подходящим по составу светом (фотоэмиссия).

Явление термоэлектронной эмиссии было открыто Т. А. Эдисоном (1847–1931) в 1887 г.

В вакуумных термоэмиссионных приборах (электронных лампах) источником электронов (катодом) служит либо металлическая нить, нагреваемая вспомогательным током, либо подобная же нить, окруженная нагреваемым ею тонкостенным цилиндром, покрытым слоем оксидов. Преимуществом второй конструкции является одинаковость потенциала по всей поверхности катода; обычно этот потенциал принимается за нулевой.

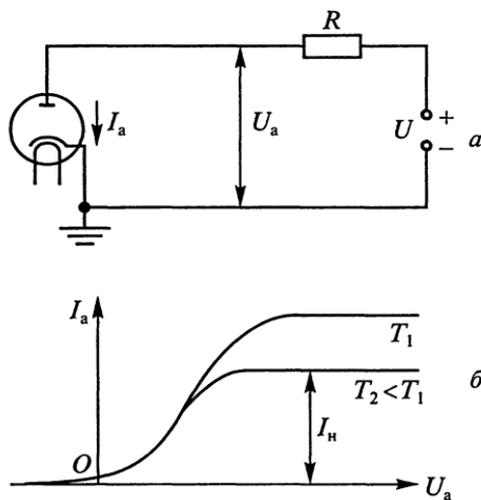


Рис. 6.17

В обоих случаях катод окружен металлическим цилиндром (анодом), на который обычно подают положительный относительно катода потенциал. При этом в анодной цепи, содержащей какой-либо рабочий участок (резистор, колебательный контур и т. д.), течет некоторый ток  $I_a$  (рис. 6.17, а). Если на анод подать достаточный отрицательный потенциал, то электрическое поле между анодом и катодом затормозит вылетающие электроны и ток полностью прекратится («запирание» лампы). Если катод

холодный, то разность потенциалов в лампе изменяется пропорционально логарифму расстояния от поверхности нити. При протекании тока в лампе всегда существует пространственный электронный заряд (электронное облако), изменяющий распределение потенциала в лампе. Присутствие электронов уменьшает напряженность поля тем сильнее, чем выше концентрация электронов, т. е. тем сильнее, чем меньше расстояние до катода. При увеличении потенциала анода  $U_a$  облако постепенно рассеивается, сила тока через лампу увеличивается; она сложно зависит от анодного потенциала, так как движение электронов через лампу определяется не только внешним полем, но и полем, созданным электронным облаком; это поле, конечно, препятствует движению электронов. Поэтому вольт-амперная характеристика лампы нелинейна (рис. 6.17, б). В своей начальной части она описывается простым соотношением:

$$I = CU_a^{3/2}, \quad C = \text{const.}$$

При достаточно большом потенциале анода пространственный заряд рассасывается и ток достигает насыщения.

Сила тока насыщения  $I_n$  описывается уравнением Ричардсона (О. Р и ч а р д с о н, 1879–1959):

$$I_n = SAT^2 \exp\left(-\frac{eU_k}{kT}\right),$$

где  $S$  – площадь поверхности катода,  $T$  – его температура,  $A$  – постоянная для всех металлов величина ( $A = 1,2 \cdot 10^6 \text{ А} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^2$ ),  $kT$  – средняя энергия беспорядочного движения атомов металла около

их положений равновесия,  $eU_k$  – работа выхода электрона с поверхности металла.

При вылете электронов металл заряжается положительно и на границе металл – вакуум возникает скачок потенциала  $U_k$ , препятствующий дальнейшему вылету электронов и удерживающий уже вылетевшие немногочисленные электроны вблизи границы. Чтобы преодолеть этот скачок потенциала, и нужно совершить работу. У чистых металлов работа выхода составляет несколько электронвольт. У оксидов работа выхода значительно меньше, что облегчает термоэмиссию электронов и снижает расход энергии на нагревание катода.

Так как двухэлектродная лампа (ламповый диод), подобно полупроводниковому диоду, обладает односторонней проводимостью, то ее можно использовать для выпрямления тока или для преобразования радиосигналов. В схемах рисунков 6.4, 6.5 и 6.7 проводниковые диоды можно заменить ламповыми.

Преимущество ламповых диодов заключается в меньшем, чем у полупроводниковых диодов, обратном токе и меньшей зависимости от температуры окружающего пространства. Недостатками являются необходимость источника питания нити накала (на схемах он никогда не изображается) и большая емкость. Поэтому в области очень высоких частот (выше  $10^7$  Гц) применяются только полупроводниковые приборы.

Если сделать полупроводниковый прибор с двумя  $p$ - $n$ -переходами или впаять в лампу (ближе к катоду) дополнительный сетчатый электрод, то такие приборы – транзисторы и триоды соответственно – приобретают новые, ценные качества (см. гл. 12).

## Глава 7

# ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

### 7.1. Закон Ампера. Индукция магнитного поля. Сила Лоренца

Постоянные магниты и их способность взаимодействовать друг с другом и с железом были известны очень давно. Но только в 1820 г. Х. Эрстед обнаружил, что прямолинейный ток взаимодействует с магнитной стрелкой, причем последняя устанавливается в плоскости, перпендикулярной оси тока.

В 1820–1823 гг. А. Ампер, развивая и уточняя наблюдения Эрстеда, нашел, что токи взаимодействуют не только с постоянными магнитами, но и друг с другом, что оказалось гораздо более важным.

Общий характер взаимодействия токов проявляется в следующем обобщающем опыте: вблизи неподвижной катушки  $L1$  (рис. 7.1) находится подвижная катушка  $L2$ , висящая на длинных тонких проводах. При пропускании токов по обеим катушкам вторая катушка либо притягивается к первой, либо же (это зависит от направления токов в катушках) сначала отталкивается, одновременно поворачиваясь вокруг вертикальной оси, и лишь потом притягивается к неподвижной катушке.

Если заполнить полость первой катушки стальным сердечником, то взаимодействие заметно усилится. Можно обнаружить и зависимость силы взаимодействия от силы токов в катушках и расстояния между ними – она растет при увеличении силы токов и уменьшении расстояния между катушками.

Условимся на последующих рисунках, когда провод с током перпендикулярен чертежу, ставить точку в сечении провода, если ток направлен к читателю;

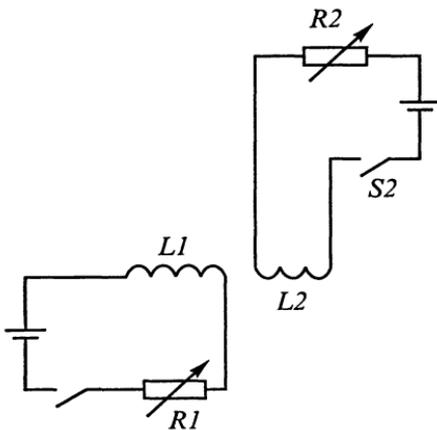


Рис. 7.1

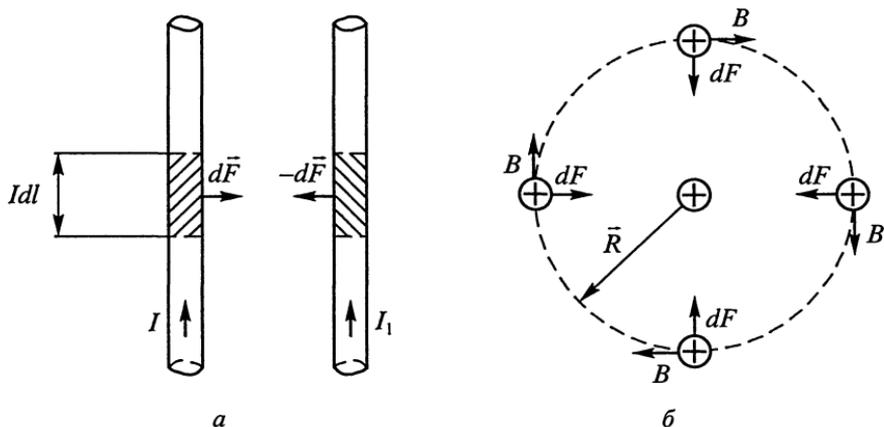


Рис. 7.2

при противоположном направлении тока ставить крестик. Такая же символика будет применяться в дальнейшем и для обозначения направления линий электрической и магнитной напряженности и индукции.

Если разомкнуть ключ в цепи тока в опыте Эрстеда или ключи  $S1$  или  $S2$  (см. рис. 7.1), то взаимодействия исчезают, хотя заряды на проводах, подключенных к зажимам источников ЭДС, сохраняются (см. § 5.5). Следовательно, рассмотренные взаимодействия не являются электростатическими (кулоновскими). Они присущи токам (упорядоченно движущимся зарядам). Их называют общим термином – магнитные взаимодействия.

Начнем с изучения взаимодействия параллельных токов. Закрепив один из проводов и помещая другой на некотором расстоянии (рис. 7.2, а), мы обнаружим притяжение токов одинакового направления и отталкивание антипараллельных токов. Сила взаимодействия пропорциональна силе токов и убывает при увеличении расстояния между ними. Если один из проводов перемещать по окружности с центром на оси другого провода (рис. 7.2, б), то сила



**Ампер Андре Мари (1775–1836)**, французский ученый. Подробно исследовал взаимодействие токов и магнитов, впервые обнаруженное Эрстедом в 1820 г. Ввел понятие об электрическом токе; экспериментально установил количественные законы взаимодействия токов, заложив основы электродинамики. Высказал гипотезу о «токовой» природе магнетизма постоянных магнитов.

взаимодействия остается постоянной по модулю. В дальнейшем, если не сделано специальной оговорки, мы будем считать проводники бесконечно тонкими (линейные токи).

Сила, испытываемая током  $I$ , всегда равная и противоположная по направлению силе  $d\vec{F}$ , на рисунке 7.2, б не показана.

Во времена Ампера полагали, что всякая физическая теория должна строиться по образцу ньютоновской механики. Поэтому Ампер ввел понятие *элемента тока*  $I d\vec{l}$  (подобное элементарной массе). Элемент тока – векторная величина, ее модуль равен силе тока, умноженной на длину элементарного отрезка провода  $dl$ ; вектор  $I d\vec{l}$  направлен параллельно вектору плотности тока. Ампер считал, что взаимодействие токов следует описывать, находя векторную сумму элементарных взаимодействий между элементами токов. Но позже оказалось, что более плодотворна и более содержательна физически другая точка зрения – ею мы и будем пользоваться в дальнейшем.

С этой точки зрения одновременно и неразрывно с током  $I$  (рис. 7.2, б) в окружающей его среде (и в вакууме) существует новая форма материи – магнитное поле тока. Воздух по своим магнитным свойствам весьма близок к вакууму, поэтому лекционные опыты, произведенные в воздухе, дают практически такие же результаты, какие дали бы опыты, проведенные в вакууме.

При помещении в это магнитное поле другого тока  $I_1$  оно проявляет себя силовым действием на этот ток. Характеристикой, определяющей в каждой точке силовое действие магнитного поля, является его *магнитная индукция*  $\vec{B}$ . Закон, установленный Ампером, в этой трактовке имеет вид:

$$d\vec{F} = I_1 [d\vec{l}, \vec{B}], \quad (7.1)$$

где  $d\vec{F}$  – сила, испытываемая неподвижным элементом тока  $I_1 d\vec{l}$  в данной точке поля. Индукция  $\vec{B}$ , характеризующая магнитное поле тока  $I$  в окрестностях элемента тока  $I_1 d\vec{l}$ , зависит от силы тока  $I$  и формы контура, обтекаемого этим током.

Уравнение (7.1) является определением магнитной индукции. О способах ее измерения будет сказано позже.

Магнитная индукция  $\vec{B}$  характеризует силовое действие магнитного поля в некоторой его точке; модуль вектора  $\vec{B}$  равен отношению модуля максимальной силы  $d\vec{F}$ , испытываемой в этой точке элементом тока  $I_1 d\vec{l}$ , к модулю  $I_1 dl$ . При этом векторы  $d\vec{F}$ ,  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  взаимно перпендикулярны и направление  $\vec{B}$  определяется так называемым *правилом левой руки*. Это правило формулируется так: расположим три пальца левой руки взаимно перпендикулярно, назвав их (по алфавиту): большой – движение (т. е. сила, способная

привести провод в движение), указательный – поле (индукция), средний – ток (точнее, плотность тока). Если расположить любые два пальца по заданным направлениям, то третий палец укажет неизвестное третье направление.

Так как единицы длины, силы тока и силы уже выбраны, то из закона Ампера (7.1) определяется единица магнитной индукции: при  $dl = 1$  м,  $I_1 = I = 1$  А,  $dF = 1$  Н магнитное поле имеет единичную индукцию. Единица магнитной индукции называется т е с л а (Тл):

$$1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н} / (\text{А} \cdot \text{м}). \quad (7.2)$$

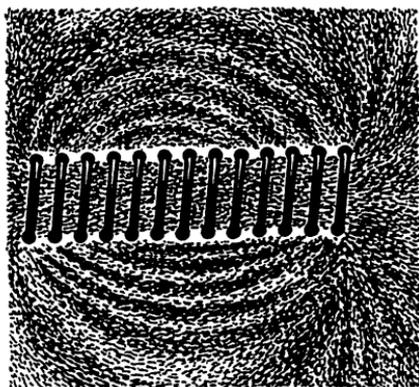
1 Тл – большая индукция. Наиболее мощные электромагниты создают поля с индукцией порядка 10 Тл; при использовании обычных проводников – это сложные сооружения; при применении охлаждаемых до температуры жидкого гелия ( $T = 4,2$  К) сверхпроводников – это сравнительно небольшие катушки (соленоиды). В небольшом объеме (в несколько кубических миллиметров) можно возбудить кратковременно существующее (сотые доли секунды) поле с индукцией до  $10^3$  Тл. Обычно применяемые в технике и лекционном эксперименте электромагниты создают поля со значениями  $B \approx 10^{-2}$  Тл и меньше. Магнитное поле Земли (у ее поверхности) составляет всего  $5 \cdot 10^{-5}$  Тл.

Из рисунка 7.2 видно, что при выбранном направлении тока  $I$  вектор  $\vec{B}$  направлен по касательной к окружности, через центр которой проходит связанный с магнитным полем ток  $I$ , и ориентирован по часовой стрелке. Это позволяет установить простое *правило буравчика*: если вращать правый буравчик так, чтобы он поступательно перемещался в направлении тока, то вектор индукции направлен по движению ручки буравчика. Если же вращать ручку буравчика в плоскости контура тока в направлении тока, то поступательное движение буравчика совпадает с направлением вектора индукции *внутри контура*.

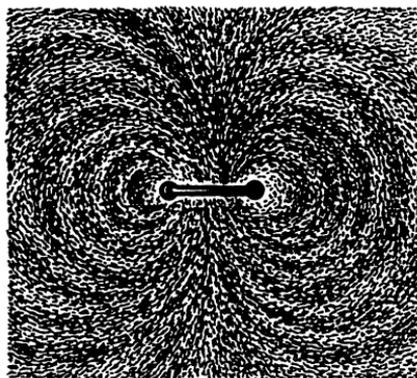
Итак, линии вектора  $\vec{B}$  поля длинного прямого тока – это окружности, центр которых лежит на оси тока.

Как показывает опыт, магнитная стрелка устанавливается вдоль вектора магнитной индукции. Поэтому она может служить для исследования магнитного поля в соответствующей точке. Для такого же зондирования можно применять и небольшой виток с током. Как мы увидим ниже, он ориентируется так, чтобы линии магнитной индукции внешнего поля, пронизывающие плоскость контура, были параллельны линиям магнитной индукции его собственного поля.

Если вблизи того или иного контура с током поместить стальные опилки, то они будут вести себя подобно небольшим магнитным стрелкам и установятся вдоль линий магнитной индукции, давая наглядную картину распределения поля. На рисунке 7.3, а, б



*a*



*б*

Рис. 7.3

представлены подобные картины для катушки (с неплотной намоткой) и для одиночного витка, расположенного в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа.

В металлических проводниках, как нам уже известно, ток обусловлен упорядоченным перемещением электронов. Именно электроны и подвергаются силовому воздействию; затем они передают его проводнику в целом. Но легко наблюдать и непосредственное силовое воздействие на свободно движущиеся электроны: нужно длинный прямой магнит или катушку с током поднести к трубке электронного осциллографа в том месте, где ее узкая часть примыкает к расширяющейся части трубки. Здесь электроны, пройдя ускоряющее устройство и отклоняющие конденсаторы (напряжение на последних должно отсутствовать), движутся по инерции с постоянной скоростью, т.е. образуют постоянный ток.

При поднесении магнита или катушки с током светящийся след электронов на экране смещается в сторону. При поднесении катушки или магнита противоположным полюсом отклонение следа меняет знак.

Непосредственное наблюдение за поведением следа электронного пучка на экране электронного осциллографа при воздействии на пучок магнитным полем катушки с током или постоянного магнита приводит к мысли, что силовое действие на провод с током также объясняется воздействием магнитного поля на движущиеся в проводе заряды, а провод приходит в движение лишь в результате взаимодействия этих зарядов с кристаллической решеткой.

Поэтому разумно представить силу Ампера

$$d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}]$$

как сумму сил  $\vec{f}$ , испытываемых зарядами, создающими ток:

$$d\vec{F} = \vec{f} dN,$$

где  $dN = nSdl$  – число зарядов в объеме  $Sdl$  провода,  $n$  – концентрация зарядов,  $S$  – площадь поперечного сечения провода.

Вычислим силу  $\vec{f}$ . При средней скорости упорядоченного движения зарядов  $\vec{v}$  сила тока  $I$  равна  $I = nevS$ , и закон Ампера принимает вид:

$$d\vec{F} = enSdl [\vec{v}, \vec{B}],$$

так как векторы  $d\vec{l}$  и  $\vec{v}$  параллельны друг другу.

Поэтому сила, испытываемая отдельным движущимся зарядом в магнитном поле, оказывается равной

$$\vec{f} = e [\vec{v}, \vec{B}]. \quad (7.3)$$

При этом расчете мы предполагали, что провод неподвижен относительно наблюдателя или измерительных приборов, т.е. закреплен.

Сила (7.3) составляет *магнитную часть полной силы Лоренца*

$$\vec{f}_L = e\vec{E} + e [\vec{v}, \vec{B}], \quad (7.4)$$

где  $e\vec{E}$  – *электрическая составляющая силы Лоренца*.

Сопоставление силы Ампера, действующей на провод с током в магнитном поле, и силы Лоренца, действующей на упорядоченно движущиеся внутри провода заряды, имеет глубокое содержание.

Отметим, что между двумя параллельными проводами с токами за счет магнитной составляющей силы Лоренца происходит взаимодействие, которое приводит к появлению силы Ампера, проявляющейся в том, что провода с антипараллельными токами отталкиваются, а с параллельными – притягиваются. Но в § 5.5 было установлено, что между проводами, несущими ток, всегда существует разность электрических потенциалов  $U$ , так как на проводах имеются нескомпенсированные поверхностные заряды.



**Лоренц Хендрик Антон (1853–1928)**, нидерландский физик. Вывел формулу силы, испытываемой заряженной частицей, движущейся в электромагнитном поле. Разрабатывая электродинамику тел, движущихся в электромагнитном поле, обобщил преобразования Галилея на случай больших скоростей (преобразования Лоренца), чем способствовал созданию специальной теории относительности. Предсказал расщепление спектральных линий, излучаемых атомами, находящимися в магнитном поле. Развил классическую электронную теорию, объяснившую многие свойства вещества.

Если два параллельных провода представляют линию, замкнутую на некоторый резистор, то они будут притягиваться за счет электрической составляющей силы Лоренца с силой, пропорциональной  $U^2$ . Магнитная же сила взаимодействия этих токов пропорциональна  $I^2$ . Зависимость обоих взаимодействий от расстояния между проводами одинакова. Поэтому отношение электрических сил к магнитным пропорционально квадрату полного сопротивления  $R$ , равного сумме сопротивлений нагрузки и самой линии.

При разумных предположениях о свойствах линии оказывается, что

$$\frac{F_e}{F_m} \approx 10^{-5} R^2,$$

так что при больших  $R$  (например, в высоковольтных линиях) это отношение может превышать единицу, что доказывается следующим простым опытом. Линию, выполненную из двух тонких медных параллельных проволок, расположенных на расстоянии нескольких миллиметров друг от друга, нужно замкнуть на резистор сопротивлением  $R = 5 \cdot 10^6$  Ом и подать на нее напряжение порядка нескольких киловольт; при этом обнаружится притяжение проволок, хотя они обтекаются антипараллельными токами. Если же провода замкнуты на резистор малого сопротивления, как это бывает обычно при электродинамических опытах, то электрическая сила оказывается гораздо меньше магнитной и ею можно пренебречь.

Так как магнитная составляющая  $e[\vec{v}, \vec{B}]$  силы Лоренца перпендикулярна скорости частицы, то она не может изменить ее энергию, а изменяет только направление скорости. Это утверждение кажется противоречащим факту совершения работы силой Ампера; в § 7.7 противоречие будет разъяснено.

В выражение (7.4) входит скорость заряда относительно наблюдателя. В рамках классической механики (малые скорости зарядов) сила Лоренца должна оставаться постоянной при переходе к другой инерциальной системе отсчета. Но скорость зарядов при этом изменится. Значит, должны измениться величины  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$  (или хотя бы одна из них).

Здесь мы впервые сталкиваемся с относительностью разделения электромагнитного поля на его составляющие. Этот важный факт будет обсужден в § 10.5.

## 7.2. Контур с током в магнитном поле

В § 7.1 мы рассматривали действие магнитного поля на прямолинейный участок контура тока. В действительности контуры по-

стоянного тока всегда замкнуты. Выясним, как ведет себя плоский контур с током  $I$  в постороннем (т.е. не созданном им самим) однородном ( $\vec{B} = \text{const}$ ) магнитном поле. Пусть контур сначала расположен в плоскости линий магнитной индукции (рис. 7.4, а).

Разобьем контур на полоски высотой  $dh$  и рассмотрим одну из них. На элемент  $d\vec{l}_1$  действует сила Ампера, направленная за плоскость чертежа:

$$d\vec{F}_1 = I [d\vec{l}_1, \vec{B}]; \quad dF_1 = Idl_1 B \sin\alpha_1 = IBdh. \quad (7.5)$$

На элемент  $d\vec{l}_2$  действует сила, направленная от плоскости чертежа:

$$d\vec{F}_2 = I [d\vec{l}_2, \vec{B}]; \quad dF_2 = Idl_2 B \sin\alpha_2 = IBdh.$$

Эти силы равны по модулю и антипараллельны; они образуют пару сил, создающую вращающий момент

$$dM = IBdha = IBdS,$$

где  $dS$  – площадь полоски. Этот результат верен и для всех остальных элементарных полосок.

Суммарный вращающий момент, действующий на контур с током, равен

$$M = \int IBdS = IB S, \quad (7.6)$$

где  $S$  – площадь, охватываемая контуром. Замечательно, что полученный результат *зависит не от формы контура*, но лишь от площади охватываемой им поверхности. Под действием этого момента контур поворачивается вокруг оси, проходящей через его центр масс.

В уравнении (7.5) проявляется действие составляющей вектора индукции, перпендикулярной элементу  $d\vec{l}$ . Другая составляющая, параллельная  $d\vec{l}$  и равная по модулю  $B \cos \alpha$ , никакого силового действия не оказывает.

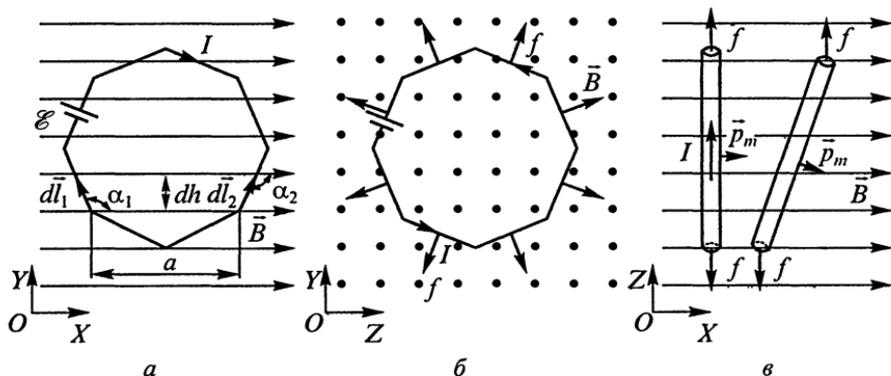


Рис. 7.4

По мере поворота контура вращающий момент уменьшается и появляются растягивающие силы. Когда контур повернется на  $90^\circ$  (рис. 7.4, б), останутся только растягивающие силы; сумма их равна нулю, так что поступательного ускорения в однородном магнитном поле контур не испытывает.

Полезно ввести понятие *магнитного момента контура тока*, равного

$$\vec{p}_m = I\vec{S}, \quad (7.7)$$

где  $\vec{S} = S\vec{n}$  ( $\vec{n}$  – единичный вектор, нормальный к плоскости контура и совпадающий с направлением линий индукции собственного магнитного поля тока внутри контура, – правило буравчика!).

Единицей магнитного момента является  $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ . Специального названия эта единица не имеет.

Вектор  $\vec{p}_m$ , подобно вектору момента механического импульса, может быть приложен в любой точке поверхности, охватываемой контуром тока. Мы условимся, что он приложен в центре масс контура.

Пользуясь (7.7), уравнение (7.6) перепишем в более удобном для применения виде:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]. \quad (7.8)$$

Итак, контур поворачивается так, чтобы векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{p}_m$  стали параллельны друг другу; такое положение контура является устойчивым (рис. 7.4, в). Если вывести контур из этого положения, то магнитные силы создадут вращающий момент, возвращающий контур в первоначальное положение.

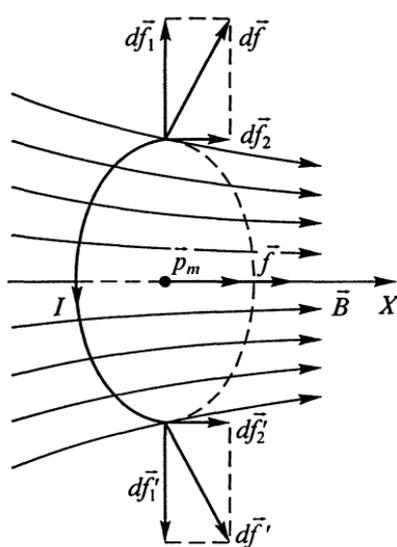


Рис. 7.5

Реальные поля обычно неоднородны. Допустим, что в неоднородном поле контур уже повернулся так, что он расположен перпендикулярно чертежу (рис. 7.5). Но теперь вектор индукции внешнего поля уже не перпендикулярен элементам контура. Возникают силы  $d\vec{f}$ , которые можно разложить на составляющие  $d\vec{f}_1$ , растягивающие контур, и  $d\vec{f}_2$ , направленные в сторону возрастающей индукции. Силы  $d\vec{f}_2$ , перпендикулярные плоскости контура, складываются в результирующую силу  $\vec{f}$ , сообщаящую контуру поступательное ускорение.

Можно показать, что результирующая сила, действующая на контур, равна:

$$\vec{f} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}, \quad (7.9)$$

если в пределах плоскости контура величина  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial x}$  постоянна.

### 7.3. Работа силы Ампера. Магнитный поток. Вихревой характер магнитной индукции

При перемещении провода с током под действием силы Ампера совершается некоторая работа. Найдем ее для простого частного случая. Пусть контур тока состоит из источника ЭДС  $\mathcal{E}$ , двух параллельных рельсов и подвижного участка (длиной  $h$ ), способного перемещаться по рельсам (рис. 7.6). Линии индукции внешнего магнитного поля, пронизывающего контур, нормальны к чертежу, и поле однородно ( $B = \text{const}$ ). Ток, текущий по контуру, постоянен и равен  $I$ . Сила Ампера

$$\vec{F} = I [\vec{h}, \vec{B}]$$

заставит провод перемещаться вправо. Элементарная работа силы есть

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = IBh dl = IBdS,$$

где  $dS$  – прирост площади контура.

Как это делалось, в электростатике для вектора  $\vec{E}$ , введем понятие *потока вектора магнитной индукции* через элементарную площадку  $d\vec{S}$  (вектор  $d\vec{S}$ ):

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (7.10)$$

Тогда элементарную работу силы Ампера можно связать с изменением магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром тока:

$$dA = Id\Phi.$$

Если контур неизменной формы движется в неоднородном поле под действием силы Ампера (см. рис. 7.5), то сила  $\vec{f}$  на перемещении  $d\vec{x}$  совершит работу:

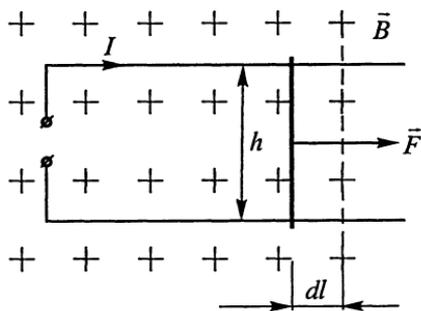


Рис. 7.6

$$dA = p_m \frac{dB}{dx} dx = IS \frac{dB}{dx} dx = I \frac{d\Phi}{dx} dx = Id\Phi.$$

Если перемещение провода (или контура) конечно, то работа равна

$$A = I \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = I\Delta\Phi. \quad (7.11)$$

Пользуясь уравнением (7.10), установим единицу магнитного потока. При  $B = 1$  Тл и  $S = 1$  м<sup>2</sup> (вектор магнитной индукции нормален к поверхности)  $\Phi = 1$  Тл · м<sup>2</sup>.

Единица магнитного потока называется вебером (Вб):

$$1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2 = 1 \text{ Дж/А} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}.$$

Если в магнитном поле находится контур, состоящий из  $N$  витков, каждый из которых пронизывается магнитным потоком  $\Phi_i$ , то алгебраическая сумма потоков называется *потокосцеплением*:

$$\Phi_{\text{сц}} = \sum \Phi_i$$

(подразумевается сцепление линий магнитной индукции с проводами контура). В частном случае равенства всех отдельных потоков ( $\Phi_i = \Phi_1$ ) получается:

$$\Phi_{\text{сц}} = N\Phi_1. \quad (7.12)$$

Работа при перемещении такого контура определяется величиной

$$A = I\Delta\Phi_{\text{сц}},$$

где  $\Delta\Phi_{\text{сц}}$  – изменение потокосцепления при перемещении контура.

При повороте контура (см. рис. 7.4, а) в положение, показанное на рисунке 7.4, б, вращающий момент сил Ампера совершает работу, равную

$$A = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 M \sin\beta d\beta = p_m B \cos\beta \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = I\Delta\Phi \quad (7.13)$$

( $\beta$  – угол между векторами  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ ), что, конечно, совпадает с тем значением работы, которое вычисляется по формуле (7.11).

Для удаления контура, пронизанного потокосцеплением  $\Phi_{\text{сц}}$  и несущего постоянный ток  $I$ , из магнитного поля в область, где это поле отсутствует, нужно совершить работу против сил поля, равную

$$A = I\Phi_{\text{сц}}.$$

Следовательно, контур, находящийся в постороннем магнитном поле, обладает дополнительной потенциальной энергией, равной

$$W = I\Phi_{\text{си}}. \quad (7.14)$$

Вводя понятие магнитной индукции поля (см. § 7.1), мы обнаружили, что линии индукции замкнуты сами на себя. *Замкнутость линий магнитной индукции* (или уход обоих концов линии на бесконечность) является их важнейшей особенностью, которая приводит к резкому отличию свойств магнитного поля от свойств потенциального электрического поля.

Магнитное поле называют *вихревым*, подчеркивая этим термином замкнутость линий магнитной индукции. Вследствие этой замкнутости циркуляция вектора магнитной индукции может отличаться от нуля: для этого достаточно, чтобы контур, по которому вычисляется циркуляция, совпадал с одной из линий магнитной индукции. Поэтому (в отличие от электростатического поля) магнитное поле нельзя охарактеризовать в каждой точке однозначно заданным значением скалярного потенциала.

Вследствие той же замкнутости линий магнитной индукции магнитный поток через любую замкнутую поверхность, вычисленный по теореме Остроградского – Гаусса, тождественно равен нулю:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B_n dS = 0, \quad (7.15)$$

так как замкнутая линия пересекается с замкнутой поверхностью четное число раз, то входя внутрь объема, ограниченного поверхностью, то выходя из него наружу.

Это означает, что в природе нет магнитных зарядов. Их существование ранее предполагалось на полюсах постоянных магнитов по аналогии с электрическими зарядами. Однако позже было выяснено, что все постоянные во времени магнитные поля связаны либо с макроскопическими токами, либо с микроточками, т. е. с электрическими зарядами, движущимися внутри атомов и молекул.

Используя для вектора  $\vec{B}$  теорему Остроградского – Гаусса в дифференциальной форме, находим:

$$\text{div } \vec{B} \equiv 0. \quad (7.16)$$

Полученное выражение является дифференциальной формой закона об отсутствии в природе магнитных зарядов.

#### 7.4. Закон Био – Савара – Лапласа

Одной из основных задач электромагнетизма является расчет магнитных полей по заданным токам. Эта задача была решена П. Л а п л а с о м (1749–1827), опиравшимся на экспериментальные данные А. Ампера, Ж. Б и о (1774–1862) и Ф. С а в а р а (1791–1841). Эти ученые установили, что в вакууме индукция  $\vec{B}$ , связанная с мак-

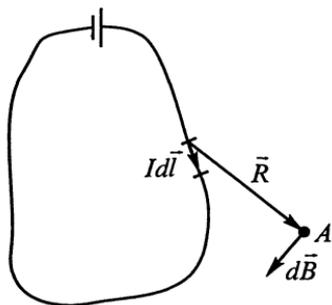


Рис. 7.7

роскопическим током  $I$ , может быть найдена как векторная сумма элементарных индукций  $d\vec{B}$ , связанных с элементами тока  $I d\vec{l}$ . В точке  $A$  элементарная индукция, созданная элементом тока  $I d\vec{l}$  (определяемым вектором  $\vec{R}$ , рис. 7.7), описывается законом Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3}, \quad (7.17)$$

где скалярная величина  $\mu_0$ , характерная для вакуума, называется *магнитной постоянной*:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Тл} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{м}. \quad (7.18)$$

Полная индукция находится суммированием  $d\vec{B}$  по всем элементам замкнутого контура тока, связанного с полем:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \oint \frac{\mu_0 I [d\vec{l}, \vec{R}]}{4\pi R^3}.$$

Рассмотрим несколько примеров применения закона Био – Савара – Лапласа.

**1. Индукция в центре кругового тока  $I$  радиусом  $R_0$ .** Здесь все элементы  $d\vec{l}$  перпендикулярны  $\vec{R}_0$  и все элементарные слагаемые  $d\vec{B}$  параллельны друг другу. Поэтому получается:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_0^2} \int_0^{4\pi R_0} dl = \frac{\mu_0 I}{2R_0} = \frac{\mu_0 I_m}{2\pi R_0^3}. \quad (7.19)$$

Направление вектора  $\vec{B}$  определяется по правилу буравчика.

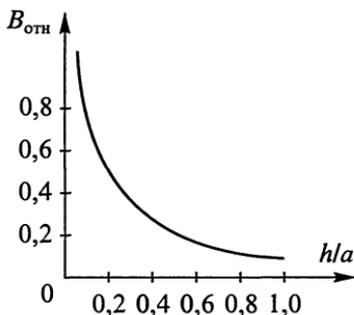
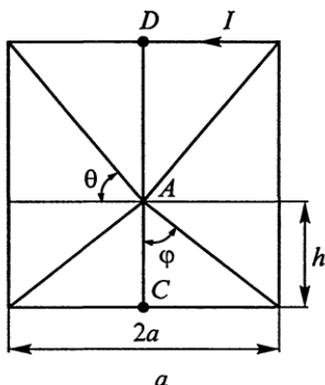


Рис. 7.8

Распределение вектора  $\vec{B}$  по поверхности контура сложно; конечно, самое сильное поле получается вблизи проводов контура. Общий характер распределения поля кругового тока мало отличается от распределения поля по плоскости квадратной рамки с током (рис. 7.8, а). На рисунке 7.8, б показан результат расчета индукции поля на прямой  $CAD$ , делящей сторону квадрата на равные части (наиболее легко рассчитываемый случай).

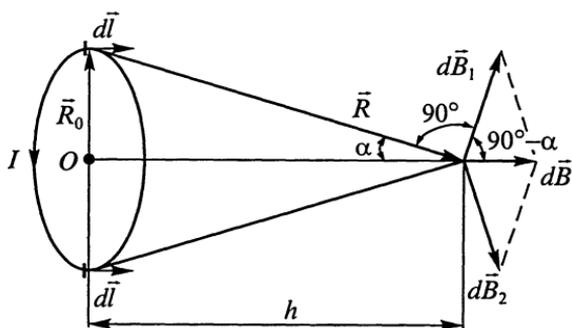


Рис. 7.9

**2. Индукция на оси кругового тока.** Два диаметрально противоположных элемента  $d\vec{l}_i$  создают симметрично расположенные элементарные индукции  $d\vec{B}_i$  (рис. 7.9), так что их векторная сумма направлена по оси тока. Ее модуль равен

$$dB = 2dB_i \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{dl \sin \alpha}{(R_0^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{R_0 dl}{(R_0^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Поэтому полная напряженность получается равной

$$B = \int_0^{\pi R_0} \frac{\mu_0 I R_0 dl}{2\pi (R_0^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R_0^2}{2(R_0^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I_m}{2\pi} \frac{1}{(R_0^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (7.20)$$

При достаточно больших  $h$  индукция оказывается обратно пропорциональной третьей степени расстояния точки до плоскости контура. При  $h \rightarrow 0$  получается уже известный результат (7.19).

**3. Индукция прямолинейного тока.** Здесь трудность расчета возникает из-за непостоянства  $\alpha$  и  $R$  при переходе от одного элемента тока к другому, что хорошо видно на рисунке 7.10. Выразим все переменные через угол  $\varphi$ . Элементарные индукции  $d\vec{B}$  параллельны друг другу (и перпендикулярны плоскости чертежа).

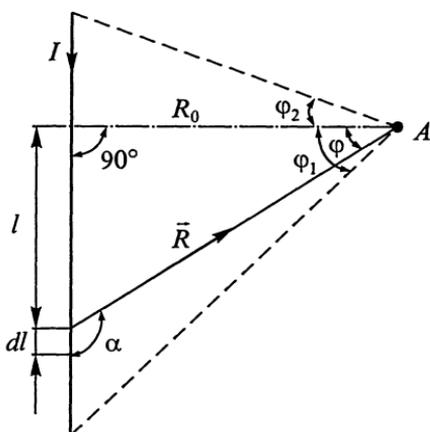


Рис. 7.10

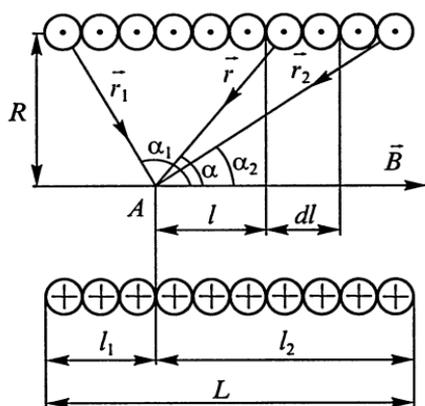


Рис. 7.11

Так как  $\sin \alpha = \cos \varphi$ ;  $l = R_0 \operatorname{tg} \varphi$ ;  
 $dl = \frac{R_0 d\varphi}{\cos^2 \varphi}$ ;  $R = \frac{R_0}{\cos \varphi}$ , то, под-  
 ставляя эти выражения в форму-  
 лу (7.17), получаем:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi d\varphi.$$

При конечной длине провода

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_0} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1).$$

Если же провод неограниченно

длинный, то пределы интегрирования делаются равными  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$   
 и  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ , а потому

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_0}. \quad (7.21)$$

4. Индукция на оси круговой катушки радиусом  $R$ , имеющей  $n$  витков на единицу длины (рис. 7.11), находится таким же образом. На рисунке 7.11 плоскость чертежа рассекает катушку по вертикальному диаметру; кружки представляют сечения проводов катушки.

Элементарный круговой ток равен  $In dl$ , где  $I$  — сила тока, обтекающего катушку. Создаваемая им элементарная магнитная индукция в точке  $A$  на оси катушки равна (см. рис. 7.11)

$$dB = \frac{\mu_0 R^2}{2r^3} In dl.$$

Выражая все переменные величины через угол  $\alpha$ , получаем:

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}; \quad l = R \operatorname{ctg} \alpha; \quad dl = -\frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Поэтому полная индукция в точке  $A$  равна

$$\begin{aligned} B &= -\frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 n I}{2} [\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1] = \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} \left[ \frac{l_2}{\sqrt{l_2^2 + R^2}} + \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + R^2}} \right]. \end{aligned}$$

В средней части катушки ( $l_1 = l_2 = 0,5 L$ ) получаем:

$$B_{\text{cp}} = I \frac{\mu_0 n L}{2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + (0,5L)^2}}.$$

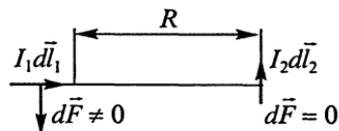


Рис. 7.12

Если катушка длинная и узкая ( $L > R$ ), то выражение для индукции в средней части катушки значительно упрощается:

$$B_{\text{cp}} = \mu_0 n I. \quad (7.22)$$

У края такой катушки ( $l_1 = 0$ ;  $l_2 \approx L$ ) индукция оказывается вдвое меньшей. Однако заметное изменение ее происходит лишь вблизи концов. Поэтому при приближенных расчетах выражение (7.22) часто применяют ко всей катушке в целом, а при очень сильном неравенстве ( $L \ll R$ ) считают поле однородным по всему сечению катушки; при этом его индукция определяется по формуле (7.22).

Используя выражение (7.17) для элементарной индукции  $d\vec{B}$  и пользуясь законом Ампера, можно найти силу взаимодействия между двумя элементами тока (разных контуров). При этом обнаружится, что третий закон Ньютона не выполняется. Действительно, рассмотрим два взаимно перпендикулярных элемента тока (рис. 7.12). Легко убедиться, что на правый элемент сила не действует, а на левый действует. Но это противоречие лишь кажущееся. В природе не существует элементов тока (это чисто расчетное понятие); токи всегда текут по замкнутым контурам. Поэтому следует вычислять полную силу, испытываемую контуром, и сопоставлять ее с силой, испытываемой другим контуром. В этом случае получается полное согласие с третьим законом Ньютона.

## 7.5. Закон полного тока

В вакууме линии индукции  $\vec{B}$  замкнуты сами на себя.

Для замкнутых линий индукции  $\vec{B}$  можно сформулировать важный закон – закон *полного тока*. Мы получим его выражение, рассмотрев простой частный случай прямолинейного тока бесконечной длины. Полученный результат оказывается справедливым для любых контуров.

Пусть провод перпендикулярен чертежу (рис. 7.13). Вычислим циркуляцию  $\vec{B}$  для двух контуров – охватывающего ток (рис. 7.13, а) и не охватывающего (рис. 7.13, б). Контур любой формы можно разбить на элементарные радиальные отрезки и элементарные дуги окружностей, имеющих центр на оси провода.

При вычислении циркуляции учтем, что слагаемые типа  $\vec{B} \cdot d\vec{r}$  равны нулю (из-за перпендикулярности этих векторов), а слагаемые, берущиеся по дугам, равны

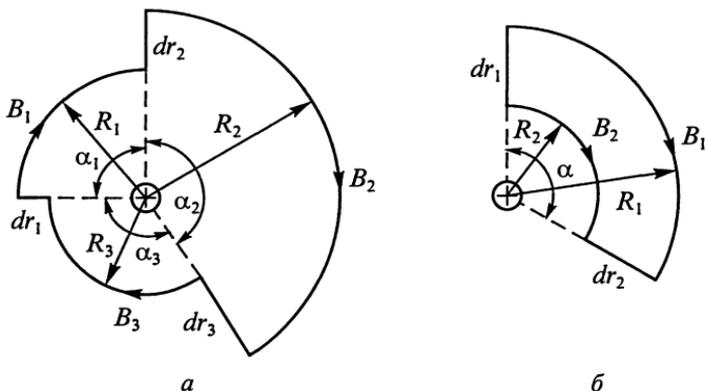


Рис. 7.13

$$\int \vec{B}_i \cdot d\vec{l}_i = B_i R_i \alpha_i = I \frac{\mu_0 \alpha_i}{2\pi},$$

так как модули индукции на каждой дуге постоянны и равны

$$B_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_i}.$$

Если контур интегрирования охватывает ток, то  $\sum \alpha_i = 2\pi$ , и получаем:

$$\Gamma = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (7.23)$$

При обходе второго контура (не охватывающего ток) произведения  $B_i R_i \alpha_i$  имеют разные знаки. Но так как углы одинаковы, то

$$\Gamma = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (7.24)$$

Таким образом, циркуляция вектора индукции  $\vec{B}$  равна произведению алгебраической суммы токов, охватываемых контуром интегрирования, на магнитную постоянную вакуума  $\mu_0$ :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{охв.}} \quad (7.25)$$

Так, для тороидальной катушки, имеющей  $N$  витков, обтекаемых током  $I$ , можно взять циркуляцию индукции по окружности, проходящей через центры витков (средняя линия катушки). Пусть длина ее равна  $l$ . В силу симметрии индукция поля во всех точках этой линии постоянна по модулю и направлена в каждой точке по касательной к средней линии. Поэтому сразу получается:

$$\Gamma = \mu_0 N I = B L,$$

откуда

$$B = \frac{\mu_0 N}{L} I = \mu_0 n I, \quad (7.26)$$

где  $n$  – густота катушки (число витков на единицу длины). Найденное значение индукции совпадает со значением ее (4.22) для средней части очень длинной прямой катушки.

У внутреннего края тора длина окружности меньше, чем средняя линия тора, поэтому густота катушки увеличивается; растет и индукция. У наружного края тора эти величины немного уменьшаются. Но так как диаметр тора обычно во много раз превышает диаметр витков его обмотки, то указанные различия малы и ими обычно пренебрегают.

Так как витки обмотки тора несколько отличаются от окружностей, то благодаря непрерывному переходу от одного витка к другому (вдоль тора) создается составляющая тока в этом направлении; она сопровождается магнитным полем во внешнем пространстве, подобным полю кругового тока. Но это внешнее поле гораздо слабее поля, образующегося внутри тора, связанного со всеми его витками, поэтому обычно внешним полем пренебрегают.

При более точной формулировке закона полного тока учитывается, что токи могут быть распределены в пространстве с некоторой плотностью  $\vec{j}$ . Построим на выбранном контуре интегрирования  $L$  произвольную незамкнутую поверхность площадью  $S$ ; тогда для суммы токов, охватываемых контуром  $L$ , получится:

$$\sum I_{\text{охв}} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S},$$

и более строгая формулировка закона полного тока примет вид:

$$\Gamma = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (7.27)$$

**т. е. циркуляция вектора индукции по некоторому контуру равна произведению суммы токов проводимости, пронизывающих произвольную незамкнутую поверхность, опирающуюся на этот контур, на магнитную постоянную вакуума.**

Если все токи, рассматриваемые в некоторой задаче, лежат вне контура, то циркуляция индукции обращается в нуль.

В главе 10 закон полного тока будет обобщен на случай токов, меняющихся во времени.

## 7.6. Дифференциальная форма закона полного тока

В § 1.4 была приведена дифференциальная форма основного закона электростатики – теоремы Остроградского – Гаусса.

Конечно, такая форма записи может быть применена и для магнитного поля при условии замены вектора электрической напряженности  $\vec{E}$  на вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ ; но справа тогда получится нуль:

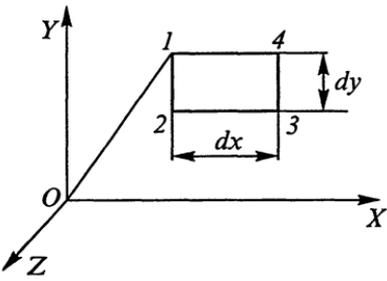


Рис. 7.14

$$\operatorname{div} \vec{B} \equiv 0.$$

Закон полного тока

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

также можно представить в дифференциальной форме, применимой для любой точки поля.

Итак, пусть дано распределение токов, характеризуемое их плотностями:

$$\vec{j} = \vec{j}_x + \vec{j}_y + \vec{j}_z,$$

и связанное с ними поле с индукцией  $\vec{B}$ . Выберем в поле произвольную точку 1 (рис. 7.14) и применим закон полного тока к бесконечно малому прямоугольнику, имеющему площадь  $dS = dx \cdot dy$ . Обойдем этот контур против часовой стрелки, вычисляя циркуляцию вектора  $\vec{B}$ . При этом получают следующие слагаемые:

при переходе 1, 2:  $B_y(x, y, z) dy$ ;

при переходе 2, 3:  $B_x(x, y - dy, z) dx = B_x(x, y, z) dx - \frac{\partial B_x}{\partial y} dy dx$ ;

при переходе 3, 4:  $B_y(x + dx, y, z) dy = B_y(x, y, z) dy + \frac{\partial B_y}{\partial x} dx dy$ ;

при переходе 4, 1:  $-B_x(x, y, z) dx$ .

Суммируя, получим:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} dx dy - \frac{\partial B_x}{\partial y} dx dy = \mu_0 j_z dx dy.$$

Итак, мы нашли  $z$ -ю компоненту вектора, называемого ротором ( $\operatorname{rot} \vec{B}$ ). Аналогично находим две другие компоненты:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_x;$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 j_y.$$

Умножив соответствующие компоненты на орты координатных осей и сложив их, получим вектор:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (7.28)$$

где  $\vec{j}$  – плотность тока в точке 1.

Удобная для запоминания запись ротора такова:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (7.29)$$

Итак, характеристики магнитного поля удовлетворяют двум основным соотношениям:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}; \quad \operatorname{div} \vec{B} \equiv 0, \quad (7.30)$$

означающим, что магнитное поле связано с токами, вектор  $\vec{B}$  имеет чисто вихревой характер и что не существует магнитных зарядов.

Основные соотношения для электрического поля (электростатического или меняющегося весьма медленно)

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (7.31)$$

утверждают, что электрическое поле потенциально и связано с электрическими зарядами.

В векторном анализе доказывается (это легко проверить простым вычислением), что при любом значении скалярного потенциала  $\varphi$  справедливо тождество:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0.$$

Следовательно, в электростатическом поле

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (7.32)$$

т.е. это поле является безвихревым: его линии напряженности начинаются и кончаются на зарядах либо уходят в бесконечность.

В главе 10 мы увидим, что быстро меняющиеся поля обладают иными свойствами.

## 7.7. Некоторые приложения основных законов магнитного поля

1. Теперь мы можем дать строгое определение основной единицы силы тока в СИ – ампера.

Рассмотрим два параллельных бесконечных провода с токами  $I_1$  и  $I_2$ , удаленных друг от друга на расстояние  $h$  и находящихся в вакууме. Один из них создает в месте нахождения другого магнитное поле с индукцией

$$B = \frac{I_1}{2\pi h} \mu_0,$$

нормальной к оси второго провода. Поэтому сила Ампера, рассчитанная для отрезка  $dl$  второго провода, равна

$$dF = \frac{I_1 I_2}{2\pi h} \mu_0 dl. \quad (7.33)$$

Если  $I_1 = I_2$ ,  $h = dl = 1$  м и сила  $dF = 2 \cdot 10^{-7}$  Н, то, как видно из формулы, эти токи равны единице и, по определению, считаются равными 1 А.

*Ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум прямолинейным параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н.*

2. Известно, что магнитная стрелка, способная поворачиваться вокруг некоторой оси, устанавливается вдоль линий индукции магнитного поля, лежащих в плоскости, перпендикулярной этой оси, причем так, что линии собственной индукции стрелки, проходящие внутри нее, параллельны линиям индукции внешнего поля. Если вывести стрелку из этого положения, то она начнет колебаться и снова установится в прежнем положении. Вращающий момент, возвращающий стрелку к положению равновесия, может быть представлен в виде:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad (7.34)$$

где  $\vec{B}$  – индукция внешнего поля,  $\vec{p}_m$  – магнитный момент стрелки (точное определение его будет дано позже). Важно, что в слабых полях этот момент постоянен. За единицу величины  $\vec{p}_m$  принимают момент стрелки, расположенной перпендикулярно линиям индукции поля и испытывающей вращательный момент, равный 1 Н·м, если  $B = 1$  Тл.

Уравнение движения колеблющейся стрелки таково:

$$J \cdot \ddot{\epsilon} = \vec{M} = [\vec{p}_m \cdot \vec{B}],$$

где  $J$  – момент инерции стрелки,  $\epsilon$  – угловое ускорение.

Как известно, решением является гармоническое колебание с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{p_m B}{J}}.$$

Измерив затем частоту  $\omega_0$  колебаний той же стрелки в стандартном поле (индукция известна), находим:

$$B = B_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2.$$

Этим методом Гаусс измерял горизонтальную составляющую индукции магнитного поля Земли.

Проводя такие же измерения со стрелкой, способной поворачиваться в вертикальной плоскости (и учитывая влияние силы тяготения), можно определить вертикальную составляющую индукции магнитного поля Земли.

В настоящее время разработаны более удобные методы определения этих составляющих.

3. Для непосредственного измерения циркуляции вектора индукции (или его линейной суммы по незамкнутому контуру) применяется прибор – пояс Роговского. Это двухслойная длинная катушка, намотанная на гибком основании. Намотка катушки имеет особенность: сначала во всю длину катушки наматывается нижний слой витков; затем на него с двух концов навстречу друг другу наматывается верхний слой, так что при окончании намотки ее концы сходятся у середины катушки. Это делается для того, чтобы подводящие провода не образовали паразитного контура. Концы катушки замыкаются на гальванометр. Расположим пояс по какой-либо кривой (контур  $L$ ) в каком-либо магнитном поле. Пусть площадь  $S$  каждого витка достаточно мала, чтобы можно было считать в его пределах индукцию постоянной и равной  $\vec{B}$ . Число витков на единицу длины обозначим через  $n$ . Тогда потокосцепление с элементом (длиной  $d\vec{l}$ ) катушки равно

$$d\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} n d\vec{l},$$

где вектор  $\vec{S}$  параллелен  $d\vec{l}$ . Суммируя по длине катушки, найдем полное потокосцепление:

$$\Phi = \int d\Phi = Sn \int_L \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

Итак,  $\Phi$  пропорционален линейной сумме векторов индукции по контуру  $L$ . В случае замкнутого контура  $L$  линейная сумма превращается в циркуляцию  $\Gamma$ , также пропорциональную потоко-сцеплению:

$$\Gamma = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \sim \Phi.$$

Если быстро вынести пояс Роговского из области поля или (что удобнее) «выключить» поле, т.е. связанный с ним ток (можно также начинать с нулевого поля, а затем «включать» его), то гальванометр, присоединенный к поясу, дает отброс, пропорциональный изменению магнитного потоко-сцепления, т.е. пропорциональный либо циркуляции, либо линейной сумме векторов (это будет доказано в гл. 9).

## 7.8. Электроизмерительные приборы

Электромагнитные взаимодействия используются для создания электроизмерительных приборов различных типов. Электроизмерительные приборы подробно изучаются в курсе электротехники. Здесь мы рассмотрим только основные принципы устройства наиболее распространенных приборов.

Приборы различаются по принципу их действия (магнитоэлектрические, электромагнитные и т. д.), по роду тока, для которого они пригодны (постоянный, переменный, высокочастотный), по типу измеряемой физической величины (сила тока, напряжение, мощность и пр.).

Любой прибор должен удовлетворять некоторым общим требованиям. Прежде всего он должен производить измерение значения некоторой физической величины с заданной степенью точности, не нарушая режима цепи, в которую включается; должен быть мало чувствителен к посторонним влияниям; выдерживать кратковременные перегрузки; быть надежным в работе.

**1. Магнитоэлектрические приборы** (рис. 7.15). В этих приборах имеется сильный постоянный дугообразный магнит 1, создающий однородное поле в узком зазоре между его полюсами и сердечником 3. В этом зазоре может поворачиваться плоская проволочная катушка (рамка) 2, подвешенная на растяжках (в чувствительных гальванометрах – на тонкой нити). Растяжки связаны со стрелкой-указателем 4, расположенным под не показанной на рисунке шкалой. В чувствительных гальванометрах стрелка заменена маленьким зеркалом, укрепленным на нити подвеса. При закручивании нити зеркало поворачивается, и угол поворота измеряется по смещению светового пучка, посылаемого на зеркало и отражаемого им на шкалу.

При протекании по рамке тока  $I$  возникает вращающий момент

$$M = IBNS \sin(\hat{\vec{n}, \vec{B}}),$$

где  $\vec{B}$  – модуль вектора индукции,  $S$  – площадь рамки,  $N$  – число ее витков,  $\vec{n}$  – нормаль к плоскости рамки. Закручивающаяся нить (или растяжка) создает тормозящий момент

$$M = -D\alpha,$$

где  $D$  – постоянная кручения,  $\alpha$  – угол закручивания. В установившемся состоянии получается угол отклонения, пропорциональный силе тока. Шкала прибора – равномерная, что является большим его преимуществом по

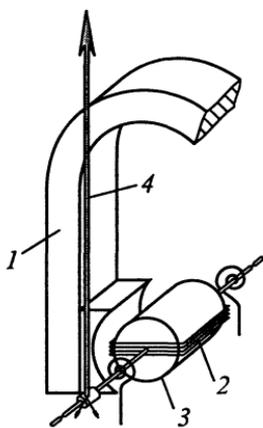


Рис. 7.15

сравнению с другими приборами. Так как период колебаний рамки обычно измеряется секундами, то она не может следовать за быстрыми изменениями тока. Поэтому для работы в цепях переменного тока магнитоэлектрические приборы непригодны. Но если ток выпрямить, то прибор может измерять среднее значение выпрямленного тока.

Магнитоэлектрические приборы весьма чувствительны (до  $10^{-8}$  А/дел.). При сильных токах приборы шунтируют (если они используются как амперметры) или снабжают дополнительным резистором (если приборы используются в качестве вольтметров).

Так как знак отклонения стрелки зависит от направления тока, то у таких приборов начальное положение стрелки (в отсутствие измеряемого тока) часто совмещают с серединой шкалы; это позволяет при работе прибора судить о направлении тока в цепи.

**2. Электромагнитные приборы (рис. 7.16).** Эти приборы могут работать в цепях постоянного и переменного тока. Их измерительный механизм содержит неподвижную катушку *1*; при протекании по ней тока в катушку втягивается ферромагнитный плоский сердечник *2*, закручивающий при этом пружины *3*, создающие противодействующий момент. При повороте оси сердечника поворачивается и стрелка *4*. Вращающий момент, испытываемый сердечником, пропорционален квадрату протекающего тока. Поэтому шкала *5* прибора неравномерна. Приборы этого типа отличаются простой конструкцией, способностью выдерживать большие перегрузки. Но чувствительность их невелика. Они применяются при технических измерениях, не требующих повышенной точности.

**3. Электродинамические приборы (рис. 7.17).** Их измерительный механизм состоит из неподвижных катушек *1* и подвижной катушки *2*, расположенной внутри первых и способной поворачиваться вокруг оси *3*, причем закручиваются не

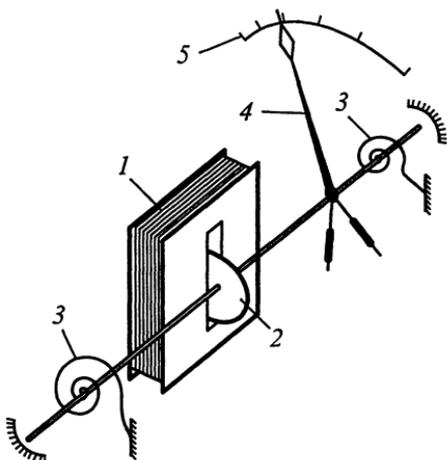


Рис. 7.16

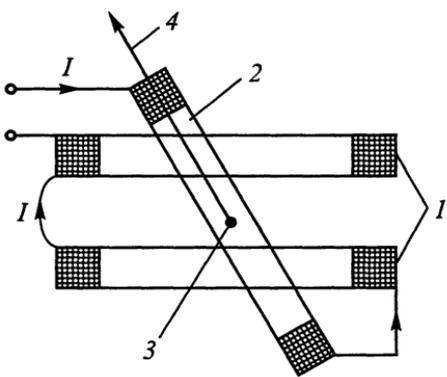


Рис. 7.17

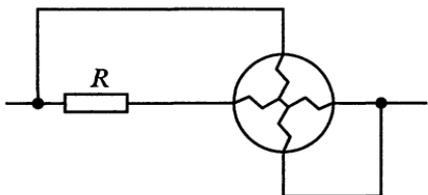


Рис. 7.18

то прибор работает как амперметр или вольтметр (в последнем случае его снабжают дополнительным резистором). Если же включить катушки, как показано на рисунке 7.18, то сила тока в одной катушке будет равна силе тока в резисторе  $R$ , а сила тока во второй пропорциональна напряжению на этом резисторе. Поэтому произведение сил токов будет пропорционально мощности, поглощаемой нагрузкой  $R$ ; прибор работает как ваттметр.

Прибор пригоден для цепей постоянного и переменного тока; он обладает не очень высокой чувствительностью.

**4. Электростатические приборы** (рис. 7.19). В этих приборах подвижные металлические пластины 1, укрепленные на оси 2, втягиваются под влиянием кулоновских сил в пространство между неподвижными пластинами 3, закручивая не показанные на рисунке пружины, создающие тормозящий момент, и поворачивая стрелку 4. Приборы используются в качестве вольтметров в цепях постоянного и переменного тока. Они обладают малой чувствительностью и боятся перегрузок, так как при электрическом пробое между пластинами последние обгорают.

**5. Тепловые и термоэлектрические приборы.** Первые, сравнительно мало распространенные, приборы предназначены для цепей с токами повышенной частоты (до нескольких мегагерц). В тепловых приборах имеется тонкая натянутая металлическая нить. При протекании по ней тока она нагревается, удлиняется, провисает и поворачивает стрелку-указатель.

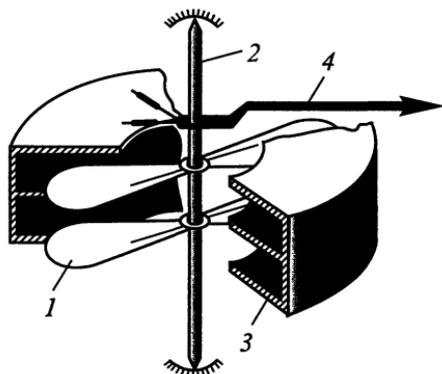


Рис. 7.19

В термоэлектрических приборах измеряемый ток нагревает участок с большим удельным сопротивлением. К этому участку припаяна термопара, соединенная с прибором магнитоэлектрической системы, измеряющим возникающую термоэлектродвижущую силу.

В последнее время все большее распространение получают цифровые измерительные приборы. В них измеряемая величина

на (например, напряжение) автоматически сравнивается с эталонной величиной. После ряда преобразований результат сравнения выдается на затемненный экран в виде светящегося числа.

6. В современной радиотехнике применяются **ламповые и полупроводниковые приборы**, соединенные с индикаторами – магнитоэлектрическими высокочувствительными приборами либо с электронными осциллографами. Принцип работы последних был рассмотрен в «Механике». Напомним, что в электронном осциллографе электронный пучок, движущийся вдоль оси  $Z$  с постоянной скоростью  $v$ , подвергается последовательному кратковременному воздействию двух электрических полей. Одно из них, направленное вдоль оси  $X$ , медленно нарастает пропорционально времени, так что разность потенциалов, действующая на электроны, есть

$$u_x = At \quad (A = \text{const}).$$

Затем поле быстро спадает до нуля и снова нарастает, причем период этих изменений равен  $T_x$ . В результате отдельные электроны смещаются вдоль оси  $X$  пропорционально времени. Второе поле создается в направлении оси  $Y$  исследуемым напряжением, меняющимся, например, гармонически:

$$u_y = U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

Под его кратковременным воздействием происходит смещение отдельных электронов на отрезки:

$$y = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

После воздействия отклоняющих напряжений электроны движутся по инерции. Если период  $T_x$  является целым кратным периода  $T$ , то электроны, следующие друг за другом через промежутки времени  $T_x$ , будут попадать в одну и ту же точку флуоресцирующего экрана, расположенного перпендикулярно оси  $Z$ . Вследствие существования послесвечения экрана и инерции светового восприятия наблюдатель увидит на экране неподвижную кривую

$$y_1 = y_{1m} \sin\left(\frac{2\pi}{T} x\right),$$

характеризующую исследуемое напряжение, так как  $x$  пропорционально  $t$ . При этом  $y_{1m} \ll y_m$ , так как экран удален от конденсатора, создающего отклонение  $y$ .

Читатель должен понять, что в действительности *ни один электрон не совершает колебаний, как и электронный пучок в целом*. Последний (после воздействия электрических полей) представляет по-

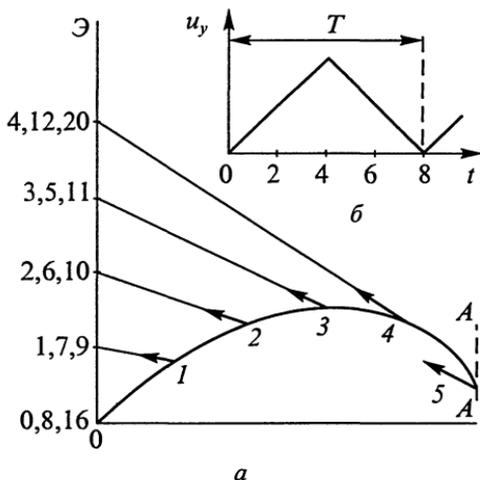


Рис. 7.20

следовательность электронов, движущихся к разным точкам экрана с различными по модулю и направлению скоростями.

Это утверждение поясняется рисунком 7.20, а. На нем изображена «моментальная фотография» пучка, выходящего справа (после воздействия на него напряжения  $u_y$ ) и пересекающего линию  $AA$ . Время движения электронов от  $AA$  до экрана  $\mathcal{E}$  принято равным  $5/6 T$  ( $T$  — период изменения напряжения  $u_y$ , рис. 7.20, б). В пучке

выбрано 6 электронов (их номера 0, 1, ..., 5), следующих друг за другом через промежутки времени  $T/8$ . Для каждого электрона показана его мгновенная скорость. Около точек на экране указаны номера электронов, которые попадут в эти точки. Рисунок отвечает моменту  $t = 5/12 T$ . Напряжение  $u_x$  не подается.

Недостаточно опытный наблюдатель, видя на экране прямую линию, скажет, что электронный пучок колеблется в вертикальной плоскости (подобно грузику пружинного маятника). В действительности же никаких колебаний электроны не совершают; *в различные точки экрана в разные моменты времени попадают различные электроны*, испытавшие воздействие отклоняющего напряжения в разные моменты. Будущему учителю очень важно понять эту особенность изображения на экране осциллографа.

## 7.9. Особенности движения заряженных частиц в магнитном поле

Если частица движется в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  под углом  $\alpha$  к линиям индукции (рис. 7.21), то составляющая скорости  $\vec{v}_{\parallel}$ , параллельная вектору индукции  $\vec{B}$ , меняться не будет, а под действием силы Лоренца, зависящей от нормальной составляющей  $\vec{v}_{\perp}$ , частица будет описывать окружность в плоскости, перпендикулярной  $\vec{B}$ . Благодаря одновременному перемещению вдоль линий индукции частица опишет винтовую линию, причем будет возвращаться к исходной горизонтали через промежутки времени и через расстояния, соответственно равные

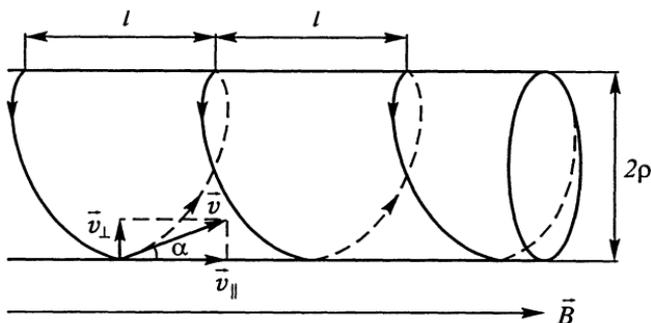


Рис. 7.21

$$\tau = \frac{2\pi\rho}{v_{\perp}}, \quad l = \tau v_{\parallel}, \quad (7.35)$$

где  $\rho$  – радиус окружности.

Если имеется пучок частиц с одинаковыми (по модулю) скоростями и векторы скоростей образуют конус с малым углом при вершине, а ось конуса параллельна вектору индукции  $\vec{B}$ , то частицы, описывая винтовые линии различного радиуса, будут сходиться на оси конуса через равные промежутки времени и пространства. Так осуществляется фокусировка частиц однородным продольным магнитным полем.

В неоднородном поле движение частиц усложняется. Пусть мгновенная скорость частицы перпендикулярна плоскости чертежа (рис. 7.22). Тогда составляющая индукции  $\vec{B}_1$  обеспечит силу  $\vec{F}$  и движение частицы по окружности. Составляющая  $\vec{B}_2$  создаст силу  $\vec{F}'$ , выталкивающую частицу в область слабого поля.

Так как магнитная составляющая силы Лоренца не совершает работы, то при этом сложном движении:

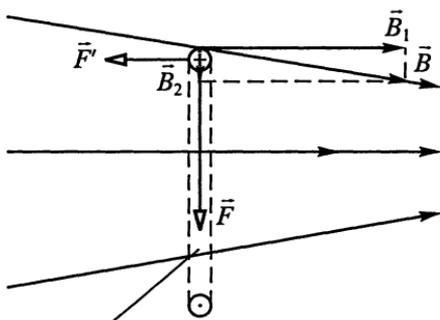
1) сохраняется полная кинетическая энергия, а потому

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = v^2 = \text{const};$$

2) сохраняется магнитный поток, пронизывающий поверхность, охватываемую окружностью, которая описывается частицей:

$$\Phi = \pi\rho^2 B = \text{const}$$

(если бы магнитный поток  $\Phi$  изменялся, то над частицей совершалась бы работа; но сила Лоренца, как известно, работы не совершает);



Орбита положительной частицы

Рис. 7.22

3) частота обращения частицы увеличивается по закону:

$$\omega = \frac{e}{m} B; \quad (7.36)$$

соответственно меняется и период обращения  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ;

4) радиус окружности уменьшается по закону:

$$\rho = \left( \frac{\Phi}{\pi B} \right)^{1/2};$$

5) линейная скорость обращающейся частицы растет по закону:

$$v_{\perp} = \omega \rho = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{\Phi}{\pi}} \sqrt{B};$$

6) уменьшается продольная компонента скорости  $v_{\parallel}$ , а также расстояние между витками  $x = v_{\parallel} T$ ;

7) в область более сильного поля частица движется по свертывающейся спирали с уменьшающимся расстоянием между витками (рис. 7.23). Движение в область сильного поля прекращается, когда вся кинетическая энергия переходит в энергию кругового движения, т. е. при

$$B_{\max} = v^2 \left( \frac{m}{e} \right)^2 \frac{\pi}{\Phi};$$

8) частица обращается по неподвижной окружности наименьшего радиуса

$$\rho_{\min} = \sqrt{\frac{\Phi}{\pi B_{\max}}}.$$

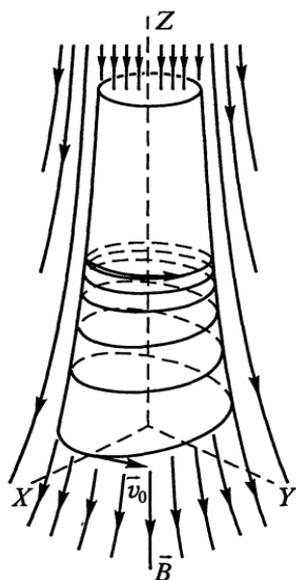


Рис. 7.23

Но это состояние неустойчиво, так как индукция  $\vec{B}$  и собственная индукция поля обращающейся по окружности частицы антипараллельны внутри окружности. Поэтому частица при случайном возмущении движения начнет двигаться по развертывающейся спирали в область слабого поля (см. рис. 7.23), т. е. будет выталкиваться из областей пространства, где индукция  $B$  поля больше.

Именно такой эффект проявляется в магнитном поле Земли, захватывающем заряженные частицы, приходящие из космоса, в частности от Солнца. Эти частицы образуют вокруг Земли заряженные слои

(радиационные пояса). Этот же эффект «запирания частиц» в магнитном поле стараются использовать при термоядерных реакциях для удержания плазмы. Другая возможность удержания – взаимное притяжение нитей токов одного направления – также используется для придания устойчивости плазменному разряду.

## 7.10. Определение удельного заряда электрона. Масс-спектрометры

Изменение направления движения заряженных частиц в магнитном поле используется для создания разнообразных приборов. Простейший пример был приведен в «Механике». В частности, на применении силы Лоренца основана работа масс-спектрометров – приборов, служащих для определения массы заряженных частиц. Схема одного из них показана на рисунке 7.24.

Пучок заряженных частиц, ускоренных в некотором электрическом поле, влетает в конденсатор, где создано однородное электростатическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ . Перпендикулярно линиям напряженности электрического поля направлены линии индукции  $\vec{B}$  постоянного магнитного поля. Сила Лоренца (7.4) обращается в нуль для частиц, имеющих любой заряд и любую массу, если скорость частиц равна

$$v_0 = \frac{E}{B}.$$

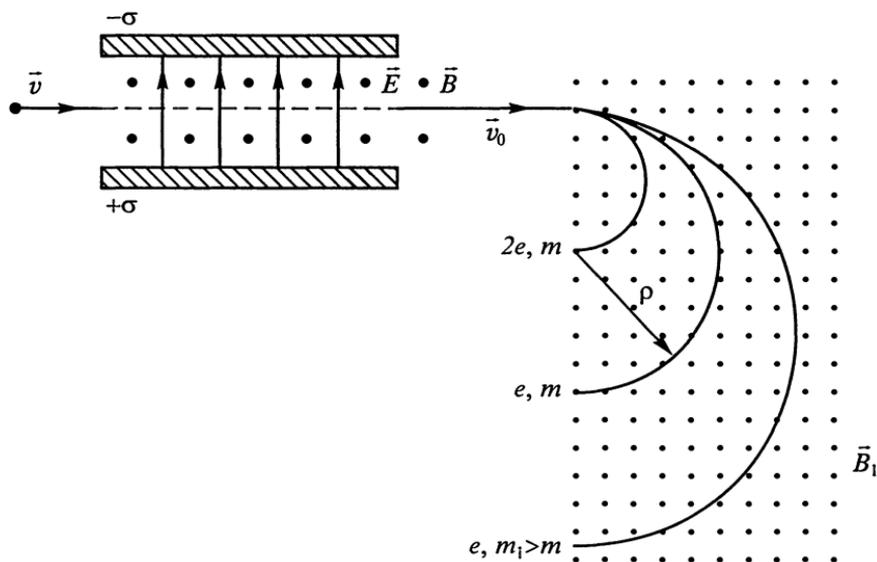


Рис. 7.24

Поэтому такие частицы пролетают без отклонения и попадают в магнитное поле с индукцией  $\vec{B}_1$ , направленной перпендикулярно скорости  $\vec{v}_0$ . Остальные частицы, испытывая отклонение, в это поле не попадают. Так как сила Лоренца перпендикулярна  $\vec{v}_0$ , то частица движется в поле по окружности радиусом  $\rho$ ; его можно определить, используя второй закон Ньютона:

$$\frac{mv_0^2}{\rho} = ev_0 B_1.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{m v_0}{e B_1}. \quad (7.37)$$

Так как  $\rho$ ,  $v_0$ ,  $B_1$  могут быть измерены на опыте, то удастся определить отношение заряда частицы к ее массе. Именно так для медленно движущихся электронов было найдено, что

$$\frac{e}{m_0} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг},$$

откуда для массы покоя электрона получилось:

$$m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг},$$

что в 1840 раз меньше массы протона, определенной таким же методом.

В результате систематических измерений масс атомных ядер было установлено существование изотопов – атомов с одинаковыми химическими свойствами (и следовательно, с одинаковыми электронными оболочками), ядра которых содержат равное число протонов, но отличаются числом нейтронов, так что массовые числа этих атомов различны. Например, неон оказался состоящим из атомов двух сортов – с массовыми числами 20 и 22.

Частицу, движущуюся в магнитном поле по окружности, можно уподобить круговому току. Тогда, применив правило буравчика, можно найти, что магнитный момент такого кругового тока направлен *против индукции*  $\vec{B}$ . Напомним, что виток с током устанавливается в однородном внешнем магнитном поле так, чтобы его магнитный момент был параллелен индукции  $\vec{B}$ . Это различие в поведении заряженной частицы и тока в контуре, созданного некоторым источником ЭДС, объясняется в § 9.2.

При регистрации следов заряженных частиц в камере Вильсона – одном из важнейших приборов ядерной физики – камеру часто помещают в магнитное поле и по искривлению следа частицы судят о знаке заряда и импульсе  $\vec{p}$  частицы. Действительно, из уравнения (7.37) получается:

$$p = mv = \rho e B.$$

На рисунке 7.25 слева показан прямолинейный след пучка электронов (магнитное поле отсутствует). Справа показан след того же пучка после создания однородного магнитного поля, индукция которого направлена за чертеж, – электроны стали двигаться по окружности.

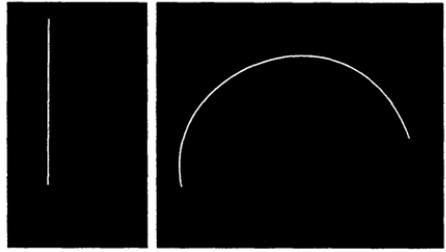


Рис. 7.25

Закручивание траекторий заряженных частиц можно показать и на лекции. Для этого нужна газоразрядная трубка с узким длинным (до 25 см) анодным светящимся столбом. Поднося к средней части столба постоянный магнит, можно наблюдать искривление столба и даже образование на нем одной-двух круговых траекторий.

## 7.11. Ускорители заряженных частиц

Для ускорения заряженных элементарных частиц (в чем нуждается атомная и ядерная физика) используется электрическая составляющая силы Лоренца. Однако линейные ускорители, где частица движется в электрическом поле прямолинейно, получаются очень громоздкими, так как напряженность поля по ряду причин не может быть сделана очень значительной и большая разность потенциалов  $U$ , необходимая для сообщения частице с зарядом  $e$  большой кинетической энергии  $mv^2/2 = eU$ , может быть обеспечена лишь увеличением длины пути частицы в электрическом поле.

Вместо однократного пробегания большой разности потенциалов можно заставить частицу много раз пройти небольшую разность потенциалов, если искривить нужным образом ее траекторию. Именно это и осуществляется, например, в циклотроне – ускорителе, в котором магнитная составляющая силы Лоренца заставляет частицу двигаться по дугам полуокружностей.

В циклотроне имеются два низких полых металлических полуцилиндра  $D$  (дуанты), разделенных узкой щелью (рис. 7.26); между ними можно создать электрическое поле, меняющееся периодически с периодом  $T$ . Постоянное магнитное поле имеет индукцию, перпендикулярную основаниям полуцилиндров. В промежуток между дуантами вводятся заряженные частицы. Пусть одна из них под действием электрического поля, создаваемого наложенной на полуцилиндры разностью потенциалов

$$u = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right),$$

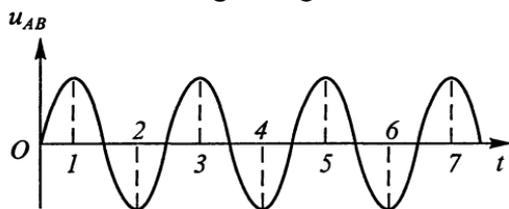
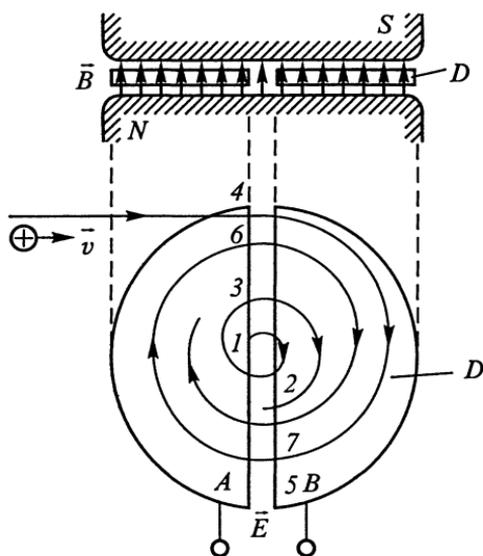


Рис. 7.26

ца снова подойдет к щели в момент, когда вектор напряженности электрического поля изменит направление на противоположное; поле снова сообщит частице энергию, определяемую выражением (7.38).

Так можно заставить частицу испытать  $N$  ускорений в электрическом поле; при этом ее энергия возрастет на  $eU_m N$ . Ясно, что движение частицы происходит по развертывающейся спирали 1, 2, 3. Угловая частота обращения частицы в циклотроне, называемая циклотронной частотой, равна

$$\omega = \frac{2\pi}{2\tau} = \frac{e}{m} B.$$

Циклотроны применяются в основном для ускорения тяжелых частиц (у электронов зависимость массы от скорости проявляется при меньших энергиях, чем у тяжелых частиц, и их ускоряют другими методами), причем при ускоряющих потенциалах порядка десятков киловольт достигаются энергии до десятков мегаэлектронвольт.

Если по случайным причинам ускоряемая частица отклонится от средней плоскости прибора, то это отклонение автоматически

проходит через щель в момент  $t$ , когда напряженность поля  $\vec{E}$  направлена слева направо и максимальна. Кинетическая энергия частицы возрастает на величину

$$W = eU_m. \quad (7.38)$$

Внутри полуцилиндра, где электрического поля практически нет, частица движется под действием магнитной составляющей силы Лоренца, причем время ее движения (она описывает полуокружность) равно

$$\tau = \frac{\pi\rho}{v} = \pi \frac{m}{e} \frac{1}{B}, \quad (7.39)$$

т. е. не зависит ни от скорости (пока не начинают сказываться релятивистские эффекты), ни от радиуса орбиты.

Если сделать  $\tau$  равным половине периода  $T$ , частица

снова подойдет к щели в момент, когда вектор напряженности электрического поля изменит направление на противоположное; поле снова сообщит частице энергию, определяемую выражением (7.38).

Так можно заставить частицу испытать  $N$  ускорений в электрическом поле; при этом ее энергия возрастет на  $eU_m N$ . Ясно, что движение частицы происходит по развертывающейся спирали 1, 2, 3. Угловая частота обращения частицы в циклотроне, называемая циклотронной частотой, равна

$$\omega = \frac{2\pi}{2\tau} = \frac{e}{m} B.$$

Циклотроны применяются в основном для ускорения тяжелых частиц (у электронов зависимость массы от скорости проявляется при меньших энергиях, чем у тяжелых частиц, и их ускоряют другими методами), причем при ускоряющих потенциалах порядка десятков киловольт достигаются энергии до десятков мегаэлектронвольт.

Если по случайным причинам ускоряемая частица отклонится от средней плоскости прибора, то это отклонение автоматически

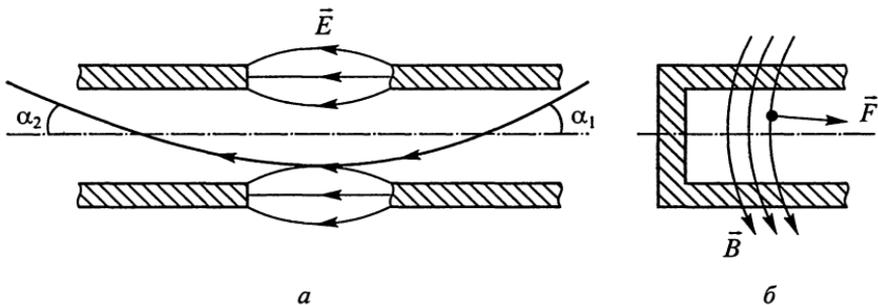


Рис. 7.27

устранится благодаря естественной неоднородности полей в циклотроне. Распределение электрического поля в области щели, след средней плоскости (пунктир) и траектория заряженной частицы, влетающей справа, показаны на рисунке 7.27, а. В правой части пути частица испытывает не только горизонтальное ускорение, но и ускорение, направленное вверх. В левой части пути вертикальное ускорение направлено вниз. Так как горизонтальная скорость увеличилась, то время существования вертикального ускорения меньше, чем в правой части пути. В результате частица прижимается к средней плоскости ( $\alpha_2 < \alpha_1$ ).

Распределение магнитного поля у края полуцилиндра показано на рисунке 7.27, б: частица, влетающая из-за плоскости чертежа, испытывает магнитную силу Лоренца, направленную к средней плоскости, т. е. снова прижимающую частицу к средней плоскости, а также обеспечивающую ее движение по окружности. Таким образом, по мере разгона частица все лучше прижимается к средней линии прибора. В конце разгона она попадает в специальное электрическое поле, резко меняющее направление ее скорости, и направляется им на мишень.

Если вообразить теперь заряженную частицу с большой энергией, влетающую в циклотрон по периферии (см. рис. 7.26) и попадающую в щель в момент 4, когда там действует тормозящее поле  $\vec{E}$ , то такая частица будет двигаться по свертывающейся спирали 4, 5, 6, 7, периодически отдавая энергию тормозящему полю. На этом принципе (конструктивное решение другое) работают генераторы сверхвысоких частот с магнитным управлением (магнетроны).

В ускорителях, где частицы достигают релятивистских скоростей, усложняется синхронизация между периодом обращения частицы и периодом изменения электрического поля, но по-прежнему используется многократное прохождение частицы по одному и тому же каналу благодаря действию магнитной составляющей силы Лоренца.

## 7.12. Магнитогидродинамический эффект. Эффект Холла

Если в магнитном поле, линии индукции  $\vec{B}$  которого перпендикулярны скорости  $\vec{v}$  зарядов, создать поток жидкости или плазмы, содержащий ионы обоих знаков, то под действием силы Лоренца произойдет разделение зарядов (рис. 7.28) и на электродах, помещенных в поток, образуется разность потенциалов. При изменении направления потока или направления вектора индукции магнитного поля знак разности потенциалов меняется на противоположный. Эта идея используется в магнитогидродинамических генераторах электрической энергии. Эффект без труда показывается на лекции; вольтметр должен иметь чувствительность около  $10^{-6}$  В/дел.

Силой Лоренца обуславливается и очень важный эффект, открытый Э. Холлом (1855–1938) в 1879 г. и носящий его имя. Пусть по пластине из проводящего материала течет ток  $I$  в направлении стрелки (рис. 7.29). Перпендикулярно чертежу создано внешнее магнитное поле с постоянной индукцией  $\vec{B}$ . При этом носители тока (независимо от знака их заряда) отклоняются вниз при направлении тока, выбранном на рисунке, или вверх при противоположном направлении. Если носители имеют только положительный заряд, в пластине устанавливается электрическое поле, линии напряженности которого направлены снизу вверх; это поле препятствует дальнейшему отклонению зарядов после того, как напряженность поля достигает значения  $E$ , удовлетворяющего условию

$$E = vB,$$

т. е. после уравнивания действия электрической и магнитной составляющих силы Лоренца.

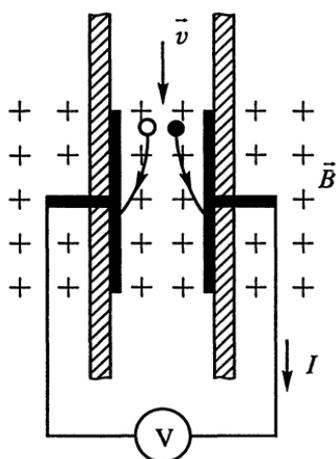


Рис. 7.28

При отрицательных носителях возникает электрическое поле, линии напряженности которого направлены сверху вниз. Поэтому по знакам потенциалов, возникающих на верхней и ниж-

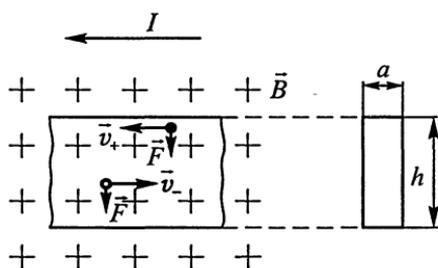


Рис. 7.29

ней сторонах пластины, можно судить о знаке заряда носителей тока.

При одном типе носителей сила тока равна  $I = nevS$ , где  $S$  – сечение пластины,  $n$  – концентрация носителей.

Разность потенциалов, возникающая благодаря эффекту Холла, равна

$$U = Eh = vBh.$$

Отсюда получается:

$$U = \frac{IBh}{S} \frac{1}{en} = \frac{IBh}{S} R_H. \quad (7.40)$$

*Постоянная Холла*

$$R_H = \frac{1}{en} = \frac{US}{IBh} \quad (7.41)$$

определяется из данных опыта: все величины, стоящие в правой части уравнения (7.41), доступны измерению. Удельная проводимость вещества

$$\gamma = ne\mu \quad (\mu - \text{подвижность частиц}) \quad (7.42)$$

также может быть измерена на опыте. Поэтому знание постоянной Холла и проводимости позволяет определить концентрацию носителей, их знак и подвижность.

Из уравнения (7.41) видно, что постоянная Холла тем больше, чем меньше в веществе концентрация свободных носителей. Поэтому, например, для полупроводников характерны значения  $R_H$  существенно большие, чем для металлов.

Если ток создается носителями разных знаков (например, отрицательными и положительными ионами в газе или электронами и дырками в полупроводнике), то эффект Холла усложняется. В идеальном случае носителей, отличающихся только знаком заряда (но имеющих равные подвижности и присутствующих в равной концентрации), ЭДС Холла должна обратиться в нуль, так как смещение зарядов обоих знаков происходит в одну и ту же сторону и поперечное электрическое поле не возникает. Поля, создаваемые положительными и отрицательными зарядами, компенсируют друг друга, так как в отличие от магнетогидродинамического генератора здесь заряды разных знаков движутся в противоположные стороны под действием приложенного напряжения. Магнитная составляющая силы Лоренца отклоняет их не к разным сторонам пластины, а к одной (напомним, что сила  $\vec{F}$  определяется не только скоростью  $\vec{v}$ , но и знаком заряда  $e$ ). Обычно концентрации или подвижности зарядов разных знаков не равны и создаваемые ими поля компенсируются лишь частично.

В настоящее время эффект Холла получил широкое применение как для определения природы частиц, создающих ток, так и для измерения индукции магнитных полей (при помощи пластины из вещества с известной постоянной Холла).

### 7.13. Магнитное поле равномерно движущегося заряда

В § 7.1 было выяснено, что сила Ампера – это сумма сил, действующих на отдельные равномерно движущиеся носители тока. Если это так, то и магнитное поле тока (7.17), определяемое законом Био – Савара – Лапласа, может рассматриваться как сумма магнитных полей, создаваемых отдельными носителями тока. Для вычисления этих полей перепишем выражение (7.17) в таком виде:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3} = \frac{\mu_0 e n v S}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3} = \frac{\mu_0 e}{4\pi} n S d\vec{l} \frac{[\vec{v}, \vec{R}]}{R^3}.$$

Разделив на общее число зарядов  $nSdl$ , получим выражение для индукции поля, связанного с одним зарядом:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{[\vec{v}, \vec{R}]}{R^3}. \quad (7.43)$$

Подчеркнем, что  $\vec{v}$  – скорость частицы относительно наблюдателя.

Таким образом, роль элемента тока  $I d\vec{l}$  играет произведение  $e\vec{v}$ . На рисунке 7.30 положительный заряд  $e$  движется вертикально вниз.

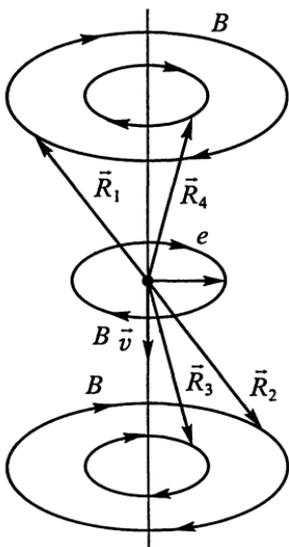


Рис. 7.30

Линии вектора  $\vec{B}$  – окружности, имеющие центры на вертикали, совпадающей с  $\vec{v}$ , и лежащие в плоскостях, перпендикулярных чертежу.

В электростатике мы нашли выражение для напряженности поля, создаваемого покоящимся зарядом:

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3}. \quad (7.44)$$

Исключая заряд из (7.43) и (7.44), находим связь между напряженностью электрического поля и индукцией магнитного поля:

$$\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 [\vec{v}, \vec{E}],$$

или

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} [\vec{v}, \vec{E}], \text{ так как}$$

$$\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2} = \frac{1}{c^2}.$$

Поэтому отношение сил, действующих на одиночный движущийся заряд со стороны другого заряда (при малых скоростях электрическое поле практически не меняется, см. § 10.5), равно

$$\frac{f_m}{f_e} = \frac{evB}{eE} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1.$$

При существовании тока в металлическом проводнике движутся электроны, а ионы кристаллической решетки не участвуют в создании тока; проводник в целом нейтрален, а имеющийся поверхностный нескомпенсированный заряд относительно мал. В жидком или газообразном проводнике, а также в полупроводниках ток создается зарядами обоих знаков.

При помещении этих тел в посторонние электрическое и магнитное поля электрические силы складываются алгебраически, а магнитные – арифметически. Поэтому суммарная электрическая сила в этих условиях обычно значительно меньше суммарной магнитной силы, но бывают и противоположные случаи.

## Глава 8

# МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

### 8.1. Магнитное поле в магнетиках.

#### Намагниченность магнетиков

Все вещества под действием магнитного поля так или иначе изменяют свое состояние. В частности, в них возникает собственное магнитное поле, которое суммируется с внешним. Вещества с определенными магнитными свойствами называются магнетиками. Наиболее распространены в природе диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики. Хорошо известными ферромагнетиками являются железо, магнитный железняк, цинк. Для ферромагнетиков характерно явление самопроизвольной намагниченности и довольно сложная зависимость собственных магнитных свойств от внешнего магнитного поля. Магнитные свойства у парамагнетиков и диамагнетиков выражены гораздо слабее, чем у ферромагнетиков.

Особенности поведения различных магнетиков во внешнем магнитном поле можно наблюдать в следующем эксперименте.

Если между полюсами электромагнита подвесить на длинной тонкой нити небольшой образец цилиндрической формы из исследуемого вещества и включить ток в обмотке электромагнита, то образец, оказавшись в неоднородном магнитном поле, испытывает

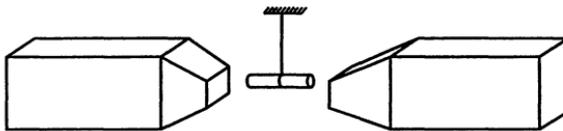


Рис. 8.1

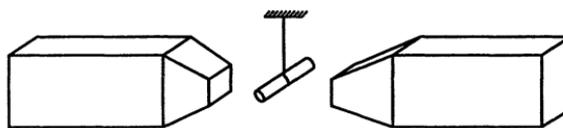


Рис. 8.2

силовое действие, зависящее от магнитных свойств образца. Так, например, образец из алюминия поворачивается вдоль линий индукции магнитного поля (рис. 8.1) и втягивается в область сильного поля. Вещества, ведущие себя подобно рамке с током во внешнем неоднородном

магнитном поле, называются парамагнетиками. Образцы из других веществ, например висмута, ведут себя по-другому. Цилиндр из висмута разворачивается перпендикулярно линиям индукции магнитного поля (рис. 8.2) и выталкивается из области сильного магнитного поля. Вещества, ведущие себя во внешнем неоднородном поле подобно висмуту, называются *диамагнетиками*.

Жидкость, налитая в U-образную трубку, одно колено которой расположено в области неоднородного магнитного поля, втягивается в область сильного поля (рис. 8.3, а), — если она парамагнитна (например, хлорид железа) и выталкивается (рис. 8.3, б), будучи диамагнитной (например, этиловый спирт).

Магнитные свойства обнаруживают и газы, что можно продемонстрировать, помещая пламя свечи во внешнее магнитное поле. Опыт показывает, что пламя выталкивается из области сильного магнитного поля, проявляя диамагнитные свойства (рис. 8.4).

В XIX в. были попытки объяснить поведение тел при намагничивании возникновением в магнетиках магнитных зарядов по аналогии с возникновением электрических зарядов при поляризации диэлектриков. Эти попытки оказались безуспешными, так как экспериментально не удалось обнаружить магнитных зарядов, подобных электрическим. Ампер в 20-х годах XIX столетия высказал гениальную догадку о том, что в магнетиках существуют микроскопические токи, взаимодействие которых с внешним магнитным полем определяет разнообразные свойства магнетиков.

В последующем выяснилось, что магнит-

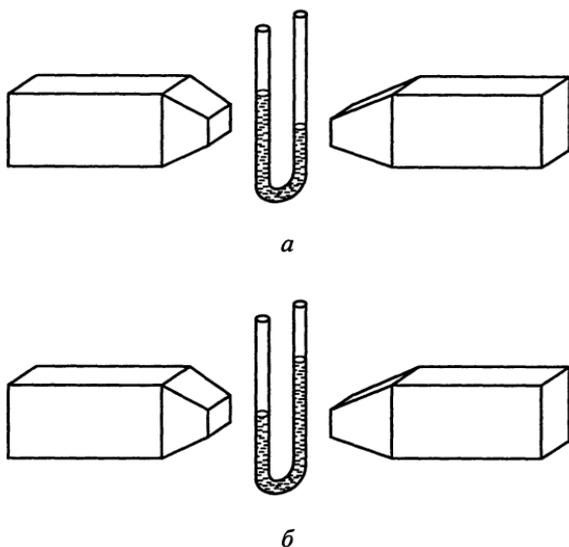


Рис. 8.3

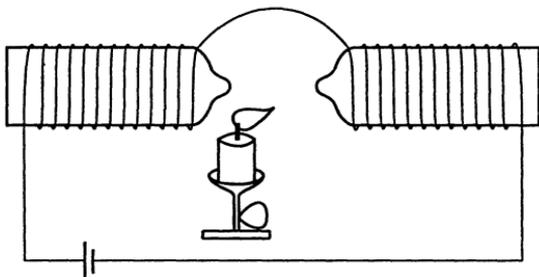


Рис. 8.4

ные свойства вещества обусловлены существованием в нем внутренних магнитных моментов:

орбитального магнитного момента электронов, обращающихся вокруг ядер атомов вещества;

собственного магнитного момента электрона, связанного со спином электрона, – собственного момента импульса электрона; магнитного момента атомного ядра.

Орбитальное движение электрона по круговой орбите радиусом  $r$  с частотой обращения  $\nu$  можно уподобить круговому току  $i = e\nu$ , обладающему орбитальным магнитным моментом  $p_m$ , равным:

$$p_m = e\nu\pi r^2. \quad (8.1)$$

Момент импульса электрона при этом равен:

$$L = mvr = 2\pi mvr^2, \quad (8.2)$$

где  $m$  – масса электрона,  $v = 2\pi r\nu$  – его скорость.

Приняв  $\nu = 10^{15}$  Гц,  $r = 10^{-10}$  м, находим, что орбитальный магнитный момент  $p_m$  имеет значение  $5 \cdot 10^{-24}$  А · м<sup>2</sup>. Механический орбитальный момент оказывается равным  $L = 5 \cdot 10^{-35}$  Дж · с.

Векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}$  антипараллельны, так как заряд электрона отрицательный. Отношение модулей  $p_m$  и  $L$  называется *гиромагнитным отношением*  $\gamma$ . Гиромагнитное отношение для орбитального движения электрона равно:

$$\gamma = \frac{e}{2m} = 9 \cdot 10^{10} \text{ Кл/кг}. \quad (8.3)$$

Гиромагнитное отношение можно определить экспериментально.

Пониманию свойств многих магнетиков способствуют модельные представления об орбитальных микроскопических токах, создающих молекулярные или атомные магнитные моменты. Из-за особенностей атомного или молекулярного строения вещества значение орбитального магнитного момента каждой частицы, входящей в состав вещества, может отличаться от нуля или быть равным нулю. Но даже в последнем случае под действием внешнего магнитного поля индуцируется магнитный момент в отдельных атомах или молекулах, что вызывает намагничение вещества. Для описания магнитных свойств магнетиков вводится понятие намагниченности вещества  $J$ , равной магнитному моменту единицы объема магнетика во внешнем магнитном поле. Единицей намагниченности в СИ служит ампер на метр (А/м). Если намагниченность одинакова по объему вещества, то говорят, что вещество намагничено однородно.

## 8.2. Напряженность магнитного поля. Закон полного тока в магнетиках. Магнитные восприимчивость и проницаемость

Рассмотрим тороидальную катушку с сердечником, у которой витки намотки сплошь покрывают тело сердечника. Протекающий в катушке ток создает внутри тора однородное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ . Преимущественная ориентация молекулярных токов в веществе сердечника во внешнем магнитном поле приводит к появлению макроскопического тока  $I'$ , протекающего в том же направлении, что и ток в проводах катушки.

С учетом поверхностного тока теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  по контуру  $L$ , проходящему внутри сердечника катушки, запишется в виде:

$$\int_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I + I'), \quad (8.4)$$

где  $I$  – ток проводимости через поверхность, ограниченную контуром интегрирования. Выразим ток  $I'$  через намагниченность вещества  $\vec{J}$ . Сначала определим ток  $I'$  через плоскую поверхность  $S$ , ограниченную контуром  $L$ . Молекулярные токи для определенности будем представлять круговыми витками тока, магнитные моменты которых ориентированы по полю внутри магнетика. Одни витки пересекут поверхность  $S$  дважды, а другие только один раз (рис. 8.5). Последние и создадут ток  $I'$ , пронизывающий поверхность  $S$ . Обозначим каждый молекулярный ток через  $i$ , а площадь витка микроскопического тока через  $s$ . Как видно из рисунка 8.6, элемент контура интегрирования  $d\vec{l}$  пронизывают те молекулярные токи, центры которых лежат внутри цилиндра объемом

$$dV = s \cos \alpha dl, \quad (8.5)$$

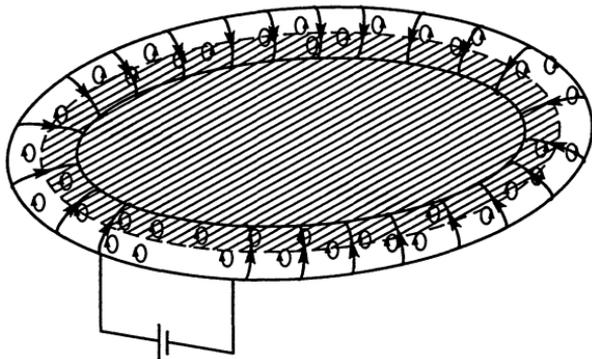


Рис. 8.5

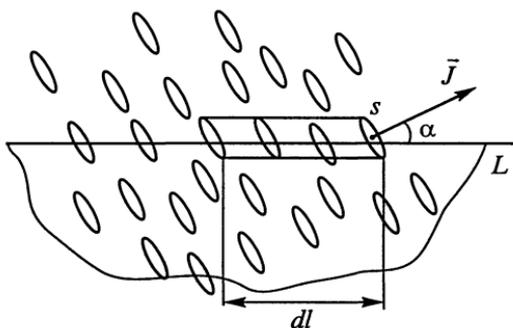


Рис. 8.6

где  $\alpha$  – угол между элементом  $d\vec{l}$  и направлением вектора намагниченности  $\vec{J}$ . Эти токи в ток  $I'$  дадут вклад, равный

$$dI' = indV, \quad (8.6)$$

где  $n$  – концентрация молекулярных токов.

С учетом (8.5) выражение (8.6) можно переписать в виде:

$$dI' = ins \cos \alpha \, dl = Jdl \cos \alpha = \vec{J} \cdot d\vec{l}. \quad (8.7)$$

Интегрируя (8.7) по всему контуру  $L$ , получим:

$$I' = \int_L \vec{J} \cdot d\vec{l}. \quad (8.8)$$

После подстановки (8.8) в (8.4) имеем:

$$\int_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \int_L \vec{J} \cdot d\vec{l}, \quad (8.9)$$

или

$$\int_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) \cdot d\vec{l} = I. \quad (8.10)$$

Векторную величину, стоящую в скобках в подинтегральном выражении (8.10), обозначают буквой  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (8.11)$$

Векторная величина  $\vec{H}$  называется напряженностью магнитного поля. С помощью вектора  $\vec{H}$  выражение (8.11) можно записать совсем просто:

$$\int_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I. \quad (8.12)$$

Применение вектора  $\vec{H}$  для описания магнитного поля в магнетиках позволяет сформулировать теорему полного тока в магнетиках следующим образом:

**циркуляция вектора напряженности постоянного магнитного поля по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, пронизывающих произвольную поверхность, затягивающую контур интегрирования.**

Из (8.11) видно, что единицей напряженности магнитного поля является ампер на метр (А/м).

Для многих магнетиков вектор намагниченности  $\vec{J}$  линейно зависит от вектора напряженности  $\vec{H}$ :

$$\vec{J} = \chi \vec{H}. \quad (8.13)$$

Безразмерный коэффициент  $\chi$  называется *магнитной восприимчивостью* вещества. В природе встречаются материалы как с положительной, так и с отрицательной магнитной восприимчивостью. Магнитные вещества с  $\chi > 0$  являются парамагнетиками, с  $\chi < 0$  – диамагнетиками. Кроме парамагнетиков и диамагнетиков известны ферромагнетики, у которых зависимость  $\vec{J}$  от  $\vec{H}$  нелинейна.

Если  $\vec{J}$  линейно зависит от  $\vec{H}$ , то между этими векторными величинами существует простая связь. Подставив (8.13) в (8.11), получим:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H},$$

или

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi) \vec{H}. \quad (8.14)$$

Величину  $1 + \chi$  обозначают буквой  $\mu$  и называют *относительной магнитной проницаемостью*. С помощью относительной магнитной проницаемости связь между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  выражается следующим образом:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (8.15)$$

Для парамагнетиков  $\mu > 1$ , для диамагнетиков  $\mu < 1$ . Так как для этих материалов  $\chi$  близко по модулю к нулю, то значение  $\mu$  для диа- и парамагнетиков порядка единицы.

### 8.3. Магнитное поле на границе двух магнетиков

В электростатике было показано, что на границе раздела двух диэлектриков происходит преломление линий  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ , графически представляющих поле, причем эти линии сгущаются в среде с большей диэлектрической проницаемостью.

Подобное же происходит с векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  на границе раздела двух магнетиков, имеющих различные относительные магнитные проницаемости  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

Пусть линии магнитной индукции  $\vec{B}_1$  (а следовательно, и напряженности  $\vec{H}_1$ , так как в каждой среде они имеют одинаковую конфигурацию) однородного магнитного поля образуют угол  $\alpha_1$  с нор-

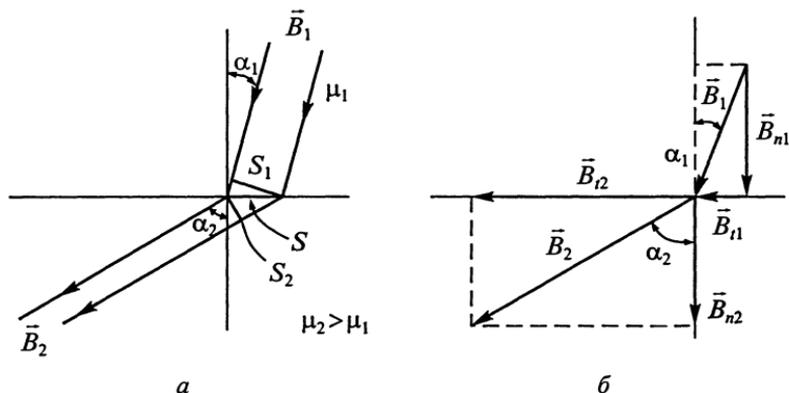


Рис. 8.7

мально к плоской границе раздела (рис. 8.7, а). Выделим мысленно объем, опирающийся на площадку  $S_1$ , перпендикулярную чертежу и направлению линий  $\vec{B}_1$ . Число линий, пронизывающих эту площадку, равно  $B_1 S_1$ . На границе раздела эти линии пронизывают (под острым углом) площадку с площадью  $S$ :

$$S = \frac{S_1}{\cos \alpha_1},$$

преломляясь на границе раздела. Линии во второй среде (числом  $B_2 S_2$ ) опираются на площадку с площадью

$$S_2 = S \cos \alpha_2.$$

Так как линии магнитной индукции замкнуты сами на себя, то число их неизменно. Поэтому

$$B_1 S_1 = B_2 S_2,$$

или

$$B_1 \cos \alpha_1 = B_2 \cos \alpha_2.$$

Полученные произведения определяют модули нормальных составляющих вектора  $\vec{B}$  по обе стороны от границы раздела. Итак, мы получили *граничное условие для нормальных составляющих вектора магнитной индукции: непрерывность нормальной составляющей:*

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (8.16)$$

При этом (так как  $B = \mu \mu_0 H$ ) выполняется еще одно условие:

$$H_{n1} : H_{n2} = \mu_2 : \mu_1. \quad (8.17)$$

Из рисунка 8.7, б следует, что касательные (к границе раздела) составляющие вектора  $\vec{B}$  равны по модулю соответственно:

$$B_{t1} = B_1 \sin \alpha_1; \quad B_{t2} = B_2 \sin \alpha_2.$$

Теперь можно найти закон преломления линий:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{B_{r1} : B_{n1}}{B_{r2} : B_{n2}} = \frac{B_{r1}}{B_{r2}} = \frac{H_{r1} \mu_1}{H_{r2} \mu_2}.$$

Но если на границе раздела нет никаких токов (а мы ограничимся только этим случаем), то не зависящая от свойств среды касательная составляющая  $\vec{H}$  в обоих магнетиках одинакова:

$$H_{r1} = H_{r2}.$$

Поэтому окончательно получается:

$$\frac{B_{r1}}{B_{r2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}; \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (8.18)$$

Большей проницаемости  $\mu_2$  отвечает больший угол  $\alpha_2$  и, следовательно, меньший косинус, так что оказывается, что

$$S_2 < S_1,$$

т. е. линии сгущаются в среде с большей проницаемостью.

Разумеется, по такому же закону преломляются и линии напряженности:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{H_{r1} : H_{n1}}{H_{r2} : H_{n2}} = \frac{H_{n2}}{H_{n1}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (8.19)$$

что получается из (8.17) и совпадает с (8.18).

## 8.4. Элементарная теория диамагнетизма

Явление диамагнетизма можно понять, если рассмотреть поведение орбитального движения электрона во внешнем магнитном поле. Представим себе, что электрон движется вокруг ядра атома по круговой плоской орбите радиусом  $r$ . Момент импульса  $\vec{L}$  электрона относительно ядра будет равен:

$$\vec{L} = [\vec{r}, m \vec{v}].$$

Если атом поместить во внешнее магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , составляющей угол  $\alpha$  с направлением  $\vec{L}$ , то на электрон будет действовать магнитная составляющая силы Лоренца. Под действием силы Лоренца возникнет прецессия орбиты и вектора момента импульса электрона вокруг направления вектора  $\vec{B}$  (рис. 8.8).

Вращающий момент  $\vec{M}$ , действующий на движущийся электрон, есть  $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$ , и изменение момента импульса составит

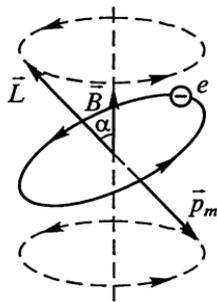


Рис. 8.8

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{p}_m, \vec{B}] = -[\gamma\vec{L}, \vec{B}] \quad (\gamma - \text{гиромагнитное отношение}). \quad (8.20)$$

С другой стороны,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{\Omega}, \vec{L}], \quad (8.21)$$

где  $\Omega$  – угловая частота прецессии. Сравнивая (8.20) и (8.21), для угловой частоты прецессии получаем значение:

$$\Omega = \gamma B = \frac{eB}{2m}. \quad (8.22)$$

Частота прецессии  $\Omega$  называется частотой Лармора. Конечно, вместе с механическим моментом прецессирует и магнитный момент. Прецессия электронных орбит в атоме приводит к появлению дополнительной намагниченности, направленной против индукции  $\vec{B}$  внешнего поля, т. е. к диамагнитному эффекту.

Оценим верхний предел магнитной восприимчивости диамагнетика, считая, что изменение орбитального магнитного момента для одного электрона во внешнем магнитном поле равно:

$$\Delta p_m = \frac{\pi r^2 e \Omega}{2\pi} = \frac{e^2 r^2 B}{4m}. \quad (8.23)$$

Если бы все орбиты лежали в плоскости, перпендикулярной вектору индукции внешнего поля, то намагниченность единицы объема вещества определилась бы выражением:

$$J = \frac{\chi B}{\mu_0} = \Delta p_m Z n \quad (Z - \text{атомный номер}), \quad (8.24)$$

отсюда с учетом (8.23) можно найти значение  $\chi$ :

$$\chi = \frac{\mu_0 Z n e^2 r^2}{4m}. \quad (8.25)$$

Пусть имеется вещество с атомным номером  $Z = 30$  и концентрацией атомов  $n = 10^{28} \text{ м}^{-3}$ . Радиус электронной орбиты считаем равным по порядку величины  $10^{-10} \text{ м}$ . После подстановки в (8.25) значений физических величин получим для магнитной восприимчивости значение:  $\chi = -2,5 \cdot 10^{-5}$ , что по порядку величины соответствует экспериментальным данным.

Как следует из модельных представлений о природе диамагнетизма, изменение температуры не должно влиять на намагничение диамагнетика, так как прецессия электронных орбит имеет место при любой температуре. Опыт подтверждает этот вывод: восприимчивость диамагнетика не зависит от температуры.

Так как орбитальный магнитный момент присущ электронам оболочки любого атома, то диамагнитный эффект присущ всем веществам. В проводниках и полупроводниках имеются свободные электроны, поведение которых во внешнем магнитном поле также приводит к диамагнитному эффекту. Диамагнетизм свободных электронов объясняется тем, что во внешнем магнитном поле под действием силы Лоренца они начинают двигаться по круговым траекториям. При этом возникает магнитный момент, направленный против внешнего магнитного поля. В результате вещество намагничивается против поля, возникает диамагнитный эффект. Изучая движение свободной частицы в магнитном поле, мы видели, что она выталкивается из области сильного поля, т.е. также дает диамагнитный эффект, предсказанный Л. Д. Ландау (1908–1968).

Замечательные диамагнитные свойства присущи сверхпроводникам. В. Мейснер в 1933 г. экспериментально обнаружил, что при помещении сверхпроводника, охлажденного до температуры ниже критической  $T_k$ , во внешнее магнитное поле он ведет себя как диамагнетик: образец выталкивается из магнитного поля. Исследования показали, что магнитная проницаемость сверхпроводника равна нулю. При воздействии внешнего магнитного поля в тонком поверхностном слое образца возникает ток, магнитное поле которого полностью компенсирует внешнее магнитное поле в сверхпроводнике, т.е. сверхпроводник является идеальным диамагнетиком. Это свойство можно продемонстрировать следующим образом. Небольшой охлажденный ниже  $T_k$  образец подвешивают на длинной нити и подносят к полюсу магнита. При этом образец выталкивается из области сильного магнитного поля и висит на нити в наклонном положении. Как только температура образца превысит критическую, он теряет сверхпроводящее свойство и ведет себя как парамагнетик.

Вещество проявляет диамагнитные свойства отчетливо в том случае, если суммарный орбитальный момент атомов или молекул равен нулю. Но если атом обладает суммарным магнитным моментом, отличным от нуля, то возникают дополнительные явления, маскирующие диамагнетизм и приводящие, в частности, к парамагнетизму.

## 8.5. Элементарная теория парамагнетизма

Эта теория строится подобно теории поляризации полярных диэлектриков (см. § 3.2).

У парамагнитных веществ каждый атом обладает постоянным, отличным от нуля магнитным моментом  $p \neq 0$ , зависящим как от орбитальных, так и от собственных магнитных моментов электронов. В отсутствие внешнего магнитного поля эти моменты ориен-

тированы в пространстве хаотично и вещество оказывается немагнитным.

При создании поля с индукцией  $\vec{B}$  эти постоянные моменты начинают прецессировать вокруг направления вектора  $\vec{B}$  (другого эффекта магнитное поле вызвать не может!). Но благодаря хаотическим соударениям атомов в газе и жидкости (и их взаимодействию при беспорядочных колебаниях вокруг средних положений равновесия в твердых телах) возникает еще два взаимно противоположных эффекта:

1. Угол прецессии и ее частота постепенно уменьшаются, и моменты  $\vec{p}$  располагаются вдоль направления вектора индукции поля – вещество намагничивается вдоль этого направления.

2. В то же время хаотические соударения нарушают установившуюся ориентацию магнитных моментов, уменьшая намагничение. Поэтому намагничение зависит от температуры (в данном поле) и от индукции поля (при данной температуре). Если оно превышает диамагнитное намагничение (как отмечалось, всегда существующее у любых атомов), то вещество оказывается намагнитным в направлении внешнего поля, т.е. является парамагнетиком.

П. Ланжевэн (1872–1946) показал в начале XX в., что в обычных (не очень сильных) магнитных полях намагниченность единицы объема диэлектрического парамагнетика описывается соотношением

$$\vec{J} = \frac{1}{3} \bar{p} n \alpha,$$

где величина

$$\alpha = \frac{pB}{kT}$$

определяет отношение средней энергии магнитного момента в магнитном поле к средней энергии беспорядочного движения атомов.

В обычных условиях опыта ( $B = 0,1$  Тл,  $T = 300$  К) получается:

$$\alpha = 2 \cdot 10^{-4},$$

т.е. ориентирована лишь незначительная часть всех магнитных моментов.

Для намагниченности получается:

$$\vec{J} = \frac{\chi}{\mu_0} \vec{B} = Z n \frac{p^2}{kT} \vec{B},$$

и восприимчивость парамагнетика равняется

$$\chi = Z \mu_0 n \frac{p^2}{kT}.$$

Так как  $\mu$  того же порядка, что и у диамагнетика (см. § 8.4), то при  $T = 300$  К получим  $\chi \approx 10^{-3}$ , что соответствует действительности. Эта упрощенная теория дает и правильное описание температурной зависимости восприимчивости.

Намагничиваясь в направлении вектора индукции, парамагнетик в неоднородном поле будет втягиваться в область сильного поля. В парамагнитных проводниках и полупроводниках присутствие электронов проводимости (и дырок) усложняет процесс намагничивания; его объяснение требует использования квантовых представлений.

Следует отметить, что при снятии внешнего поля намагничение парамагнетиков (и диамагнетиков) исчезает.

Макроскопическое тело при намагничении должно одновременно с приобретением магнитного момента получить и механический момент. Действительно, при ориентации магнитных моментов электронов ориентируются и их механические моменты. Ориентация происходит за счет внутренних сил (хаотических соударений). По закону сохранения механического импульса макроскопический образец должен прийти во вращение вокруг направления вектора индукции  $\vec{B}$  поля с частотой  $\omega_1$ , причем должно быть

$$I\bar{\omega}_1 = -\sum \bar{L}_i = -\frac{1}{\gamma} \sum \bar{p}_i,$$

где  $I$  – момент инерции образца.

Если же привести образец во вращение внешними силами, то это одновременно заставит моменты механического импульса прецессировать вокруг оси вращения; хаотическое взаимодействие атомов, нарушая прецессию, приведет к ориентации моментов механического импульса вдоль оси вращения. При этом, конечно, ориентируются и магнитные моменты; следовательно, образец должен при вращении намагнититься. Из-за незначительности намагничивания диа- и парамагнетиков наблюдать оба эффекта с этими веществами не удастся. Но они были обнаружены при работе с гораздо более сильно намагничивающимися ферромагнетиками. Вращение при намагничении наблюдали и объяснили А. Эйнштейн и В. де Гааз в 1915 г. Намагничение при вращении наблюдал Барнетт в 1909 г. Эти наблюдения позволили измерить гиромагнитное отношение  $\gamma$ .

## 8.6. Ферромагнетики

Измерение эффекта Эйнштейна – де Гааза у ферромагнетиков дало неожиданный результат; гиромагнитное отношение для ферромагнетиков оказалось равным:

$$\gamma_{\text{изм}} = \frac{e}{m} = 2\gamma.$$

Это было прямым указанием на невозможность объяснения ферромагнетизма при помощи орбитальных магнитных моментов.

В дальнейшем выяснилось, что орбитальные моменты не играют заметной роли в явлениях ферромагнетизма. Последние тесно связаны лишь с собственными магнитными моментами электронов.

Как мы уже отмечали выше, ряд магнитных явлений заставляет приписать электрону собственный магнитный момент  $\vec{p}_c$ , антипараллельный собственному моменту механического импульса  $\vec{L}_c$  — его спину.

Не следует пытаться создать наглядное представление о спине как результате собственного вращения электрона вокруг своей оси; спин — чисто квантовое свойство, не поддающееся, как и другие квантовые свойства, наглядной трактовке.

Во внешнем магнитном поле собственный магнитный момент устанавливается только вдоль линий индукции поля, причем две его возможные проекции на направление индукции внешнего поля равны

$$(p_c)_B = \pm \frac{e}{m} \frac{h}{4\pi}, \quad (8.26)$$

где величина  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с — одна из характерных для квантовой механики постоянных, называемая *постоянной Планка*. Таким образом,

$$p_c = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2. \quad (8.27)$$

Этот момент называют *магнетоном Бора*. Величина орбитальных магнитных моментов, как было найдено в § 8.1, также близка к этому значению.

Спин электрона равен

$$L_c = \frac{p_c}{\gamma_c} = p_c \frac{m}{e} = 5,3 \cdot 10^{-35} \text{ Дж} \cdot \text{с}. \quad (8.28)$$

Ферромагнетики сильно намагничиваются уже в слабых внешних полях ( $B_0 \approx 10^{-3}$  Тл). Если бы все спины ориентировались в направлении индукции внешнего поля, то намагниченность достигла бы величины

$$\vec{J} = \vec{p}_c Z n = \frac{\chi}{\mu_0} \vec{B}_0.$$

Для железа ( $Z = 26$ ,  $n = 10^{29} \text{ м}^{-3}$ ) получаем:

$$J = 2,4 \cdot 10^7 \text{ А/м}; \quad \chi = 3 \cdot 10^4.$$

В действительности восприимчивость не так велика (порядка нескольких тысяч), так что можно допустить, что на один атом приходится только два-три взаимно параллельных момента  $p_c$ . Остальные моменты попарно взаимно противоположны и компенсируются.

Особенности намагничивания ферромагнетиков следующие. Восприимчивость (практически не отличающаяся здесь от магнитной проницаемости) велика и сложным образом зависит от индукции намагничивающего поля и от предыдущей истории образца. Например, для чистого железа кривая первоначального намагничивания  $OA'A$  (рис. 8.9, а) идет сначала полого, затем крутизна ее резко возрастает, после чего рост намагничивания сильно замедляется (явление насыщения). Если в некоторой точке  $A$  начать размагничивать ферромагнетик, уменьшая индукцию внешнего поля, то получается кривая  $AKL$ : намагничение отстает от изменений поля. При индукции внешнего поля, равной нулю, в веществе сохраняется *остаточная индукция*  $B_{ост}$ . Благодаря этой особенности ферромагнетиков возможно создание постоянных магнитов. Остаточную индукцию можно уничтожить, создав внешнее поле, линии индукции которого противоположны по направлению линиям индукции первоначального поля. Поле напряженностью  $H_{зад}$ , при которой индукция исчезает, называется *задерживающим* полем. При дальнейшем изменении индукции намагничивающего поля кривая идет, как показано на рисунке, образуя замкнутую петлю. Описанная сложная зависимость  $B$  от  $H_0$ , отражающая неоднозначность связи между восприимчивостью и напряженностью намагничивающего поля, определяется предысторией намагничивания. Поэтому рассматриваемое явление и называют *гистерезисом*, а саму зависимость – петлей гистерезиса (с подобной зависимостью процесс от предыстории мы встречались при рассмотрении неупругих деформаций в механике). Аналитического выражения петли дать не удастся. Если начать перемагничивание не в точке  $A$ , а в какой-то другой точке  $A'$ , то также получается петля. На рисунке 8.10 изображено семейство петель, полученное на экране электронного осциллографа при пере-

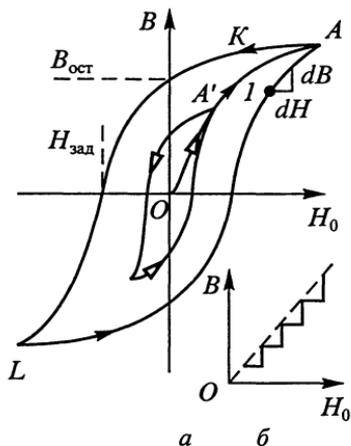


Рис. 8.9

а) идет сначала полого, затем крутизна ее резко возрастает, после чего рост намагничивания сильно замедляется (явление насыщения). Если в некоторой точке  $A$  начать размагничивать ферромагнетик, уменьшая индукцию внешнего поля, то получается кривая  $AKL$ : намагничение отстает от изменений поля. При индукции внешнего поля, равной нулю, в веществе сохраняется *остаточная индукция*  $B_{ост}$ . Благодаря этой особенности ферромагнетиков возможно создание постоянных магнитов. Остаточную индукцию можно уничтожить, создав внешнее поле, линии индукции которого противоположны по направлению линиям индукции первоначального поля. Поле напряженностью  $H_{зад}$ , при которой индукция исчезает, называется *задерживающим* полем. При дальнейшем изменении индукции намагничивающего поля кривая идет, как показано на рисунке, образуя замкнутую петлю. Описанная сложная зависимость  $B$  от  $H_0$ , отражающая неоднозначность связи между восприимчивостью и напряженностью намагничивающего поля, определяется предысторией намагничивания. Поэтому рассматриваемое явление и называют *гистерезисом*, а саму зависимость – петлей гистерезиса (с подобной зависимостью процесс от предыстории мы встречались при рассмотрении неупругих деформаций в механике). Аналитического выражения петли дать не удастся. Если начать перемагничивание не в точке  $A$ , а в какой-то другой точке  $A'$ , то также получается петля. На рисунке 8.10 изображено семейство петель, полученное на экране электронного осциллографа при пере-

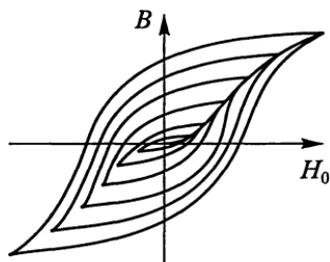


Рис. 8.10

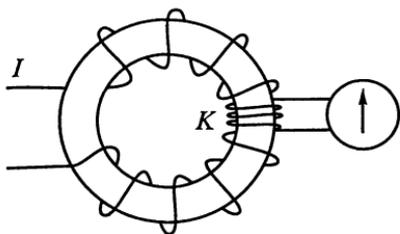


Рис. 8.11

магничивании ферромагнетика переменным током, доведившимся до различных предельных значений. Опыты такого рода проводятся по схеме, впервые предложенной А. Г. Столетовым. Образец представляет собой ферромагнитный тор, снабженный намагничивающей обмоткой, на которую наде-

та контрольная катушка (рис. 8.11), соединенная с гальванометром.

Постепенно увеличивая силу намагничивающего тока, измеряют приросты индукции и строят кривую намагничивания. При осциллографической записи на пластины осциллографа, дающие горизонтальное смещение пучка, подают напряжение, пропорциональное силе тока в намагничивающей катушке, а на пластины вертикального отклонения подают проинтегрированное по времени (существуют электрические интегрирующие схемы) напряжение с контрольной катушки, пропорциональное индукции. Величины, характеризующие предельные размеры и форму петли, могут быть весьма различны: они зависят от состава ферромагнетика и условий его термической и механической обработки. При периодическом перемагничивании ферромагнетик нагревается, с чем необходимо считаться на практике.

Действительно, рассмотрим процесс кругового перемагничивания ферромагнетика, свойства которого характеризуются петлей гистерезиса, изображенной на рисунке 8.12.

Следуя Столетову, возьмем тор с площадью сечения  $S$ , длина средней линии которого равна  $l$ . На торе находится обмотка, охватывающая всю его поверхность, содержащая  $N$  витков. Пусть сила тока в обмотке изменяется от  $I$  до  $I + dI$ . При этом запас магнитной энергии изменяется на величину

$$dW = \frac{1}{2} L [(I + dI)^2 - I^2] = LI dI,$$

представляющую элементарную работу намагничивания. Это выражение можно преобразовать следующим образом:

$$dW = Id\Phi = I \frac{N}{l} l S dB,$$

где  $lS$  – объем тора; поэтому элементарная работа намагничивания, отнесенная к единице объема, есть

$$dA = \frac{dW}{lS} = HdB \quad (\text{см. рис. 8.12}).$$

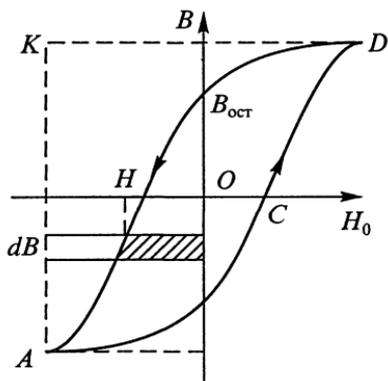


Рис. 8.12

При однократном круговом перемагничивании (от точки  $A$ ) полная работа определится разностью площадей фигур, ограниченных контурами  $ACDKA$  и  $DKAB_{\text{ост}}D$ , т. е. площадью внутри петли гистерезиса. Так как магнитное состояние тора при этом не изменилось, то эта работа пошла на увеличение его внутренней энергии, т. е. на нагревание. При периодическом перемагничивании работа будет пропорциональна числу циклов перемагничивания, т. е. частоте изменения тока и времени его протекания.

Гладкость кривой намагничения только кажущаяся. Если внутрь длинной катушки вложить стерженок, например из сплава железа с никелем (пермаллоя), обладающего очень большой проницаемостью, соединить катушку с усилителем и громкоговорителем и, подвесив над горизонтальной катушкой дугообразный магнит, закрутить нить его подвеса и дать ей раскручиваться, то магнит будет обращаться вокруг вертикальной оси с частотой порядка нескольких долей герца. С такой же частотой будет меняться индукция намагничивающего поля. Поэтому можно было бы ожидать, что и ЭДС индукции, наводимая в катушке, будет иметь частоту менее 1 Гц, не воспринимаемую ухом (и не воспроизводимую громкоговорителем). Между тем на опыте отчетливо слышны шорохи, периодически повторяющиеся при обращении магнита. Это значит, что в катушке возникает ЭДС с частотой в сотни или тысячи герц.

Дело в том, что, как показал Г. Баркгаузен, вещество намагничивается ступенчатым образом (часть кривой намагничения в сильно увеличенном масштабе показана на рис. 8.9, б). И лишь незначительность этих «ступенек» создает в обычных измерениях впечатление непрерывности процесса намагничения.

Так как индукция в ферромагнетике сложным образом зависит от индукции намагничивающего поля и от предыстории образца, то нельзя охарактеризовать ферромагнетик одним значением проницаемости (или восприимчивости).



---

**Столетов Александр Григорьевич (1839–1896)**, русский физик, профессор Московского университета. Впервые получил магнитную петлю гистерезиса, разработал ряд методов магнитных измерений. Изучал внешний фотоэффект, установил пропорциональность тока насыщения интенсивности освещения при данном спектральном составе. Создал московскую школу физиков.

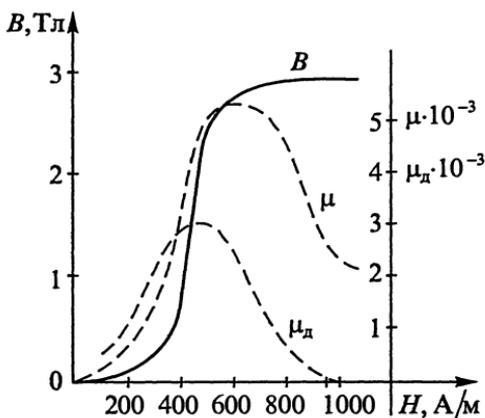


Рис. 8.13

Обычно пользуются кривой первоначального намагничивания  $OB$  (рис. 8.13) и определяют относительную проницаемость как отношение индукции  $B$  к намагничивающей индукции  $\mu_0 H$ :

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

Зависимость  $\mu = f(H)$  показана на рисунке 8.13 пунктиром.

Но для ряда практических задач (когда вещество перемагничивается слабым переменным полем в присутствии сильного постоянного поля) важнее знать дифференциальную проницаемость

$$\mu_d = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH},$$

определяемую для данной точки кривой и характеризующую наклон кривой в данной точке (см. рис. 8.13); в сильных полях  $\mu$  стремится к единице, а  $\mu_d$  — к нулю.

При нагревании ферромагнетика его свойство сильно намагничиваться исчезает при некоторой температуре (температура Кюри), и он становится парамагнетиком. Так, нагревая стальной стержень до красного каления, можно заметить, что он перестает сколько-нибудь заметно взаимодействовать с электромагнитом. При охлаждении ферромагнитные свойства самопроизвольно восстанавливаются. Для железа температура Кюри равна 1040 К, для никеля — 640 К.

Эта особенность ферромагнетиков (как, впрочем, и другие вышеописанные свойства этих материалов) наводит на мысль, что ферромагнетизм — свойство коллектива атомов, а не отдельных атомов.

Действительно, в газообразном состоянии железо диамагнитно. Некоторые сплавы, содержащие ферромагнетики, не обладают магнитными свойствами; с другой стороны, существуют сплавы немагнитных веществ, имеющие ферромагнитные свойства (сплавы Гейслера).

В зависимости от технических нужд применяются ферромагнетики с самыми разнообразными характеристиками. Для электрических машин и трансформаторов переменного тока, где ферромагнетик длительно перемагничивается, используют *магнитно-мягкие* материалы с большой индукцией насыщения и возможно ма-

лой напряженностью задерживающего поля (рис. 8.14, а), чтобы площадь петли гистерезиса была по возможности мала.

Для постоянных магнитов площадь петли роли не играет. Здесь нужен *магнитно-жесткий* материал, имеющий большую остаточную индукцию и, главное, большую напряженность задерживающего поля (рис. 8.14, б), причем спад кривой должен быть крутым, чтобы малые случайные внешние поля не влияли на остаточную индукцию.

Заметим, что идеальный монокристалл обладал бы прямоугольной петлей гистерезиса, имеющей ничтожно малую площадь. В реальных условиях петля может быть близка к прямоугольной (рис. 8.14, в).

Технические материалы обычно являются поликристаллическими, и их петли довольно далеки от идеальной.

Небольшое удельное сопротивление ферромагнетиков не позволяет использовать их при радиочастотах ( $10^5$  Гц и больше) из-за больших потерь на вихревые токи. Для радиотехнических цепей разработаны различные ферриты (соединения оксида железа с оксидами двухвалентных металлов) – своего рода магнитные диэлектрики, отличающиеся весьма большим удельным сопротивлением и обладающие заметными магнитными свойствами.

В. К. А р к а д ь е в (1884–1951) экспериментально показал, что в быстропеременных магнитных полях ферромагнитные свойства начинают уменьшаться и при достаточно высокой частоте (выше  $10^{11}$  Гц) совершенно не проявляются.

В таблице 8.1 приведены некоторые характеристики, подчеркивающие разнообразие свойств ферромагнетиков и ферритов.

Таблица 8.1

Магнетик	$B_{нас}^*$ Тл	$B_{ост}^*$ Тл	$\mu_{max}$	$H_{зд}^*$ А·м <sup>-1</sup>	$\rho$ , Ом·м
Железо техническое	2,1	0,05	5000	80	} $10^{-7}$
Пермаллой	0,8	0,02	$10^6$	0,16	
Платино-кобальтовый сплав	–	0,5	–	$3 \cdot 10^5$	
Магний-марганцевый феррит	0,2	0,02	500	110	$10^3$
Никель-цинковый феррит	0,2	$7 \cdot 10^{-4}$	7500	4	0,1

## 8.7. Элементарная теория ферромагнетизма

Для понимания природы ферромагнетизма очень важен установленный экспериментально факт существования в кристалле ферромагнетика направлений «легкого» и «трудного» намагничения.

Так, кристалл железа имеет кубическую объемно-центрированную решетку: ионы железа расположены по вершинам куба и в его центре (рис. 8.15, а). Легче всего кристалл намагничивается в направлении ребер куба (черные стрелки); труднее всего намагнитить кристалл в направлении диагонали, соединяющей вершины куба и проходящей через центральный ион (светлая стрелка); кривые намагничения в этих направлениях (1, 2) схематически показаны на рисунке 8.15, б. Между этими кривыми укладываются кривые намагничения в других направлениях.

При температурах более низких, чем температура Кюри, отдельные микроскопические области поликристалла (домены), имеющие размеры от  $10^{-6}$  до  $10^{-8}$  см<sup>3</sup> и содержащие до  $10^{15}$  ионов, в силу особенностей квантового взаимодействия спинов оказываются намагничеными практически до насыщения (спины располагаются параллельно друг другу); направление намагничения соответствует легкому намагничению. Но суммарные магнитные моменты доменов, представляющих микроскопические монокристаллы, расположены в различных направлениях, и поликристалл в целом оказывается ненамагниченым. Он не создает заметного внешнего поля, и лишь между границами доменов можно наблюдать в очень небольшом объеме внешнее поле кристалла. Для его обнаружения образец шлифуют и покрывают слоем вязкой жидкости со взвешенными частицами мелкого ферромагнитного порошка. Частицы последнего концентрируются в этом поле, что можно увидеть в микроскоп. Модель этого явления можно получить, если расположить в одной плоскости торцы нескольких постоянных прямых магнитов, накрыть их бумагой и насыпать на бумагу ферромагнитные опилки. Они также расположатся на гра-

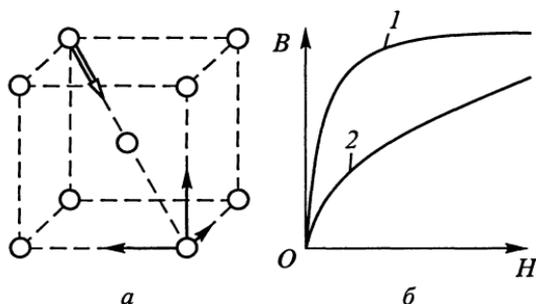


Рис. 8.15

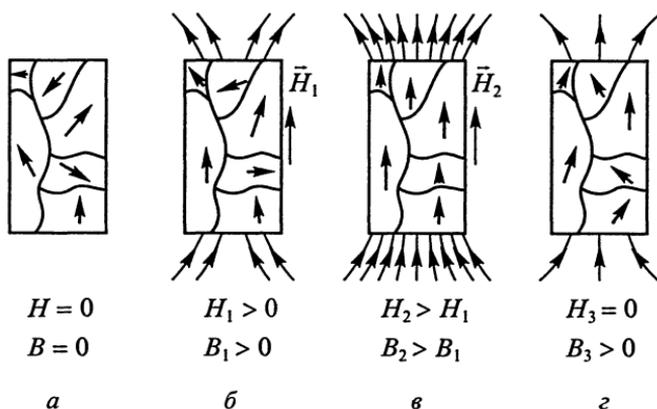


Рис. 8.16

нищах между торцами, где существует относительно сильное поле со значительным градиентом.

Возможное расположение доменов в немагнитном образце схематически показано на рисунке 8.16, *a*. Это расположение отвечает минимуму потенциальной энергии образца. Взаимодействие спинов внутри доменов можно описать, введя формальное представление о внутреннем магнитном поле; индукция его велика (до 100 Тл). Поэтому беспорядочные колебания частиц кристалла не могут разрушить упорядоченное расположение спинов (если температура поликристалла ниже температуры Кюри).

При наложении на образец внешнего магнитного поля часть доменов оказывается в энергетически выгодном состоянии: их магнитные моменты параллельны индукции поля (рис. 8.16, *б*). Взаимодействие с теми соседними доменами, намагничение которых также близко по направлению к направлению индукции внешнего поля, приводит к частичной перестройке спинов у границ доменов, и «благоприятно» намагниченный домен растет за счет соседа (смещение границ).

Этот процесс носит микроскопически скачкообразный характер и обуславливает существование баркгаузеновского скачкообразного намагничения в нижней части кривой намагничения. При увеличении индукции внешнего поля намагничение возрастает (рис. 8.16, *в*).

Возникающее в окружающем пространстве магнитное поле, порожденное намагниченным образцом, конечно, обладает энергией. Эта энергия сообщается намагничивающим полем в процессе первоначального намагничения.

В верхней части кривой намагничения при приближении к насыщению образца возникает новый механизм намагничения – часть доменов сразу перемагничивается целиком (поворот намагниче-

ния). Именно при таких поворотах лучше всего наблюдаются упущенные выше шумы Баркгаузена. Так как оба процесса намагничивания не полностью обратимы, то при уменьшении индукции намагничивающего поля появляется гистерезис – намагничение образца отстает от поля и при снятии внешнего поля образец остается намагниченным (рис. 8.16, з).

В заключение укажем, что ферромагнетизм является частным случаем более общего случая упорядоченного расположения микромагнитных моментов, обнаруженного в середине XX в. и названного ферримагнетизмом. Изучение его выходит за рамки общего курса физики.

## 8.8. Магнитные методы изучения строения вещества

Ознакомимся с некоторыми магнитными методами изучения строения вещества, нашедшими очень широкое применение в современной физике.

**1. Метод циклотронного резонанса.** Если создать в металле или полупроводнике постоянное магнитное поле (в случае металла линии индукции должны быть параллельны поверхности образца), то найдутся электроны проводимости, которые станут двигаться в этом поле по окружности (или по спирали, если они имеют составляющую скорости вдоль направления индукции поля). Частота их обращения по кривой (циклотронная частота) зависит от индукции поля:

$$\omega = \frac{e}{m} B.$$

Здесь  $m$  – эффективная масса электрона, отличная от его истинной массы, так как он движется не свободно, а взаимодействуя с кристаллической решеткой.

Одновременно с постоянным магнитным полем в образце создают переменное электромагнитное поле. В металлах, обладающих значительной электрической проводимостью, оно проникает в глубь образца из-за поверхностного эффекта (см. § 9.6) на толщину  $\delta \approx 10^{-7}$  м. Радиус орбиты электронов внутри металла, как правило, больше  $\delta$  (рис. 8.17).

В результате электроны проводимости могут взаимодействовать с переменным полем в поверхностном слое только часть периода обращения по спирали. Передача энергии от поля к электронам происходит аналогично механизму ускорения электронов в циклотроне (см. § 7.11). Всякий раз, когда электрон будет попадать в поверхностный слой так, чтобы электрическое поле увеличивало его скорость, энергия от поля будет передаваться электрону, что возможно при совпадении или кратности частоты переменного

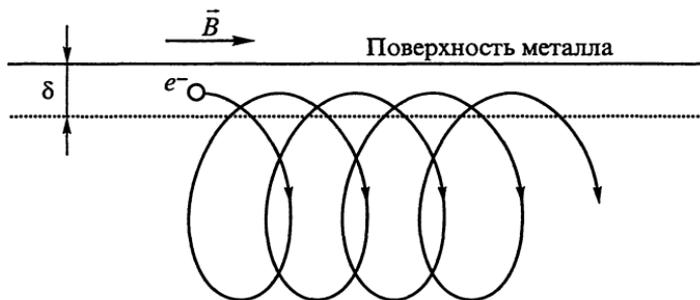


Рис. 8.17

поля и циклотронной частоты. Явление резонансного поглощения электромагнитного поля, взаимодействующего с электронными проводниками, помещенными в постоянное магнитное поле, получило название *циклотронного резонанса*.

Изучение циклотронного резонанса позволяет получить ценные сведения о свойствах электронов (и дырок) и их взаимодействии с кристаллической решеткой.

**2. Электронный парамагнитный резонанс.** Помещая в постоянное магнитное поле парамагнетик, частицы которого обладают постоянным магнитным моментом, также удастся наблюдать резонансное поглощение энергии переменного магнитного поля при частотах, зависящих от изменения энергии частиц вещества в постоянном поле (эффект Зеемана, см. «Оптику и атомную физику»). Это явление, важное в научном и практическом отношении, называют электронным парамагнитным резонансом. Оно было открыто в 1944 г. Е. К. Завойским.

**3. Электронный ферромагнитный резонанс.** Подобное же резонансное поглощение энергии высокочастотного поля в ферромагнетиках, где оно обусловлено взаимодействием поля со спинами, называется электронным ферромагнитным резонансом и также служит для изучения свойств ферромагнетиков.

## Глава 9

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

### 9.1. Опыты Фарадея.

#### Закон электромагнитной индукции

В 1831 г. М. Фарадей сделал одно из самых фундаментальных физических открытий – показал, что меняющееся во времени магнитное поле сопровождается меняющимся электрическим полем. Это явление названо электромагнитной индукцией. Открытие не было случайным. Узнав о работах Эрстеда и Ампера, показавших, что возникновение тока сопровождается появлением магнитного поля, Фарадей поставил обратную задачу – «превратить магнетизм в электричество», т. е. получить электрический ток, имея магнитное поле. Хорошо известные из школьного курса физики опыты позволяют установить следующие факты:

1. При любом изменении магнитного потока через катушку, замкнутую на гальванометр, последний регистрирует ток (во время изменения потока). Поток может изменяться за счет перемещения вблизи катушки постоянного магнита или другой катушки с током, за счет изменения тока в другой неподвижной катушке или за счет изменения ее формы и размеров и т. д. Направление возбуждаемого (индукционного) тока зависит от знака изменения магнитного потока.



---

**Фарадей Майкл (1791–1867)**, английский физик. Выполнил фундаментальные исследования по электродинамике, открыл явление электромагнитной индукции и его закон. Установил законы электролиза, обнаружил явления диа- и парамагнетизма. Ввел понятия электрического и магнитного полей, рассмотрел их взаимосвязь. Открыл влияние сильного магнитного поля на условия прохождения света через стекло, установив тем самым связь между электромагнетизмом и оптикой. Проверил на опыте закон сохранения электрического заряда.

2. Если электромагнитная индукция вызывается перемещением какой-либо части установки, то важно лишь относительное перемещение – можно двигать или источник магнитного поля, или катушку.

3. Эффект выражен тем сильнее, чем быстрее меняется магнитный поток и чем больше витков имеет катушка.

4. При заполнении части пространства ферромагнетиком (удобно внести ферромагнетик внутрь катушки, соединенной с гальванометром), эффект возрастает, из чего следует, что он связан с магнитной индукцией  $\vec{B}$ , а не с напряженностью  $\vec{H}$ .

К этим общеизвестным опытам добавим еще два:

1. Пусть контур, содержащий катушку, устроен так, что можно менять его сопротивление, не меняя конфигурацию контура. Если (при разных значениях сопротивления) изменять магнитный поток одинаковым образом, то индукционный ток оказывается обратно пропорциональным сопротивлению контура. Это позволяет предположить, что сущность явления заключается в возникновении разности потенциалов (электрического поля), а появление тока – вторичный эффект.

2. Указанное предположение подтверждается другим опытом: катушку присоединяют к электроскопу (так что не образуется замкнутой проводящей цепи). При изменении магнитного потока через катушку наблюдается отклонение стрелки электроскопа, что доказывает возникновение разности потенциалов в разомкнутой цепи.

Совокупность указанных опытов приводит к заключению, что во всех случаях изменения магнитного поля наблюдается возникновение электрического поля.

Циркуляция напряженности  $\vec{E}$  этого поля, взятая по длине  $L$  используемого в опыте контура, отлична от нуля.

При этом циркуляция определяется скоростью изменения магнитного потока  $\Phi$ , пронизывающего поверхность, ограниченную контуром; эта циркуляция равна электродвижущей силе индукции, возникающей в контуре:

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (9.1)$$

где  $S$  – площадь произвольной поверхности, опирающейся на контур  $L$ . Это и есть фундаментальный закон, открытый Фарадеем (смысл знака «–» выяснится несколько позже).

Если роль контура выполняет катушка, то под  $\Phi$  следует понимать потокосцепление, так что в последнем интеграле (9.1) учитывается площадь всех витков катушки.

Фарадей считал (и оказался прав), что *индуцированное электрическое поле существует в пространстве, окружающем первичный*

контур, независимо от наличия второго контура, служащего для обнаружения этого поля.

Если ЭДС индукции создается в замкнутом проводящем контуре с сопротивлением  $R$ , то в нем возникает ток, имеющий мгновенное значение:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}; \quad (9.2)$$

и полный заряд, протекший по контуру за все время изменения магнитного потока, равен

$$Q = \int_0^t i dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_0}^{\Phi_k} d\Phi = \frac{1}{R} (\Phi_0 - \Phi_k). \quad (9.3)$$

Очень важно, что этот заряд зависит не от скорости изменения потока, а лишь от значения этого изменения.

Направление возникающего тока определяется правилом Ленца, гласящим, что индукционный ток всегда направлен так, что своим магнитным полем препятствует тому изменению магнитного поля, которое вызвало его, — в этом и кроется физический смысл знака «-» в формуле (9.1).

Так, если ЭДС индукции вызывается вдвиганием магнита в катушку, то магнитное поле индукционного тока тормозит движение магнита. Это доказывается следующим опытом: около неподвижной катушки  $K$  (рис. 9.1) расположен подвижный магнит  $M$  (он установлен на колесиках, поставленных на рельсы). В цепи катушки имеются резистор, гальванометр (с нулем посередине шкалы), аккумулятор и ключ.

Поставив ключ в положение 1, быстро вдвигают магнит в катушку и наблюдают индукционный ток (допустим, стрелка гальванометра отклонилась вправо). Затем, поставив магнит у правого края катушки, переводят ключ в положение 2. Полярность аккумулятора должна быть подобрана так, чтобы отклонение стрелки происходило в ту же сторону, что и в первой части опыта. При

этом магнит откатывается от катушки. Следовательно, индукционный ток своим магнитным полем препятствовал движению магнита в первой части опыта.

Если ЭДС индукции вызывается включением тока в цепи катушки, надетой на общий с контрольной катушкой магнитопровод, то индукционный ток создает в магнитопроводе магнитное поле, противодействующе-

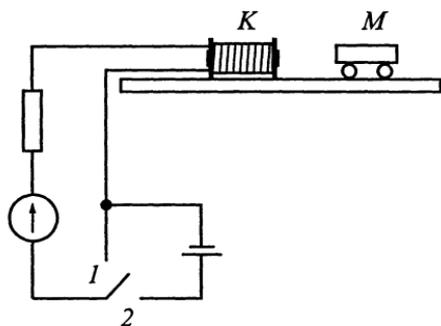


Рис. 9.1

щее изменениям первичного поля, и т. д. Легко понять, что правило Ленца отражает закон сохранения энергии для рассматриваемого процесса. Например, если бы индуцирующий магнит ускорился, а не тормозился, то возникло бы противоречие с законом сохранения энергии; при торможении же магнита происходит переход его кинетической энергии в энергию индукционного тока.

Справедливость правила Ленца можно показать на двух эффектных опытах, осуществленных Д. А р а г о (1786–1853). Если вращать медный диск над магнитной стрелкой, способной вращаться в плоскости, параллельной плоскости диска, то стрелка увлекается диском и начинает вращаться в ту же сторону. При вращении дугообразного постоянного магнита вокруг собственной оси симметрии расположенный над ним медный диск приходит во вращение в ту же сторону. Этот опыт иллюстрирует идею, заложенную в конструкцию асинхронных двигателей переменного тока.

В обоих случаях в диске наводятся вихревые индукционные токи (токи Фуко). Взаимодействуя со стрелкой (или магнитом), они уменьшают относительную скорость частей приборов, что соответствует правилу Ленца. По той же причине металлический маятник, колеблющийся в магнитном поле, испытывает значительное электромагнитное торможение. Оно находит различные технические применения.

## 9.2. ЭДС индукции и индукционный ток

Уточним теперь формулировку закона (9.1). Рассмотрим произвольный контур (рис. 9.2), пронизываемый меняющимся магнитным потоком. Крестики на рисунке условно показывают, что изменение магнитного потока заключается в увеличении индукции  $\vec{B}$ , направленной за чертеж. Если в контуре возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}$ , то это равносильно утверждению, что в элементе  $d\vec{l}$  создается электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$ , причем

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Происхождение этого поля неэлектростатическое, а потому оно является сторонним полем (см. § 5.5).

Если магнитное поле практически однородно и форма контура постоянна, то закон (9.1) можно переписать в таком виде:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\vec{S} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (9.4)$$

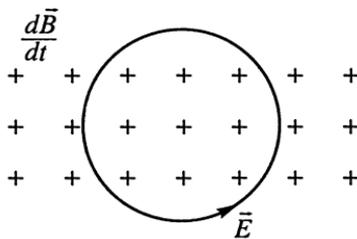


Рис. 9.2

Если при  $\vec{B} = \text{const}$  форма или ориентация контура изменяется, то площадь  $S$  – переменная. Тогда запись закона индукции имеет вид:

$$\mathcal{E} = -\vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt}. \quad (9.5)$$

Так, вращая в магнитном поле Земли или в любом другом магнитном поле катушку постоянного сечения, мы получаем изменение потока  $\Phi$  в зависимости от ориентации катушки. При угловой скорости  $\omega$  вращения катушки в поле с постоянной индукцией  $\vec{B}$  получим потокосцепление:

$$\Phi = NBS \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где  $S$  – площадь сечения катушки,  $N$  – число ее витков,  $\varphi_0$  – угол между направлениями векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{S}$  в начальный момент времени.

Поэтому

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega NBS \sin(\omega t + \varphi_0) = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Таков принцип получения переменной ЭДС в современных электрических машинах (правда, в них обычно вращаются электромагниты, создающие поле, а катушки, где происходит электромагнитная индукция, неподвижны в пространстве; но это различие не принципиально).

Возникновение ЭДС при вращении катушки легко показать, включив любой электродвигатель в цепь тока. Если заклинить вращающуюся часть двигателя (это допустимо по отношению к *небольшим двигателям при пониженном напряжении питания*), то двигатель будет потреблять большой ток. Освобождая ее, мы даем двигателю возможность раскрутиться, при этом потребляемый ток заметно уменьшается (в полном согласии с правилом Ленца). Если бы не было трения, то двигатель раскручивался бы до полного исчезновения тока. Поскольку трение всегда имеется, он будет вращаться с постоянной скоростью, потребляя некоторый ток (и следовательно, мощность, расходуемую на преодоление трения).

Так как одновременно может меняться и форма контура, и поле, то самой общей является запись:

$$\mathcal{E} = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} - \vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (9.6)$$

Для дальнейшего изучения явления электромагнитной индукции рассмотрим простую схему (рис. 9.3). Пусть контур состоит из источника постоянной ЭДС  $\mathcal{E}_0$ , двух рельсов и подвижной перемыч-

ки  $CD$  длиной  $h$ , способной перемещаться вдоль рельсов, но удерживаемой каким-либо приспособлением в покое. Контур находится в постоянном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , перпендикулярной плоскости контура. Резистор сопротивлением  $R$  включен около источника, а сопротивление рельсов и подвижного участка можно пренебречь. Тогда сила тока в контуре равна

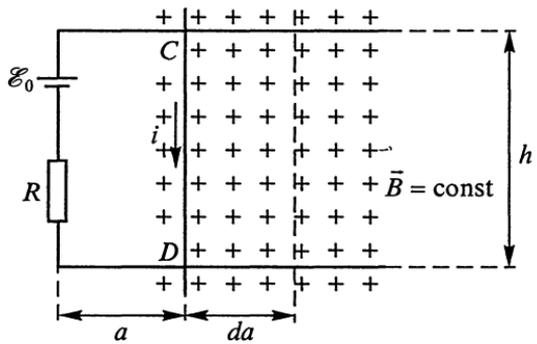


Рис. 9.3

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

Если освободить перемычку, то под действием силы Ампера она начнет двигаться вправо, сила тока в контуре изменится и примет мгновенное значение  $i$ , а мгновенное значение силы Ампера будет равно

$$F = Bih.$$

Баланс энергии запишется так:

$$\mathcal{E}_0 idt = i^2 R dt + iBhda = i^2 R dt + id\Phi,$$

где последнее слагаемое определяет работу силы Ампера,  $da$  – перемещение перемычки за время  $dt$ .

Решая это уравнение относительно силы тока, получаем:

$$i = \frac{\mathcal{E}_0 - d\Phi/dt}{R}. \quad (9.7)$$

Слагаемое  $-d\Phi/dt = \mathcal{E}$  следует рассматривать как ЭДС, дополнительную к ЭДС  $\mathcal{E}_0$  источника. Этот вывод, принадлежащий Гельмгольцу, показывает, что наше рассмотрение не противоречит закону сохранения энергии.

Если теперь принять, что  $\mathcal{E}_0 = 0$ , то получится, что ЭДС индукции возникает при перемещении провода длиной  $h$  со скоростью  $\frac{da}{dt} = v$  каким-либо внешним воздействием (рис. 9.4). Пусть, например, провод движется с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Заряды, упорядоченно двигаясь в направлении вектора  $\vec{v}$  (скорость перемещения провода), образуют конвекционный ток. Так как этот ток находится в магнитном поле, то на заряды действует сила Лоренца, направленная вдоль провода и порождающая в замкнутом проводящем кон-

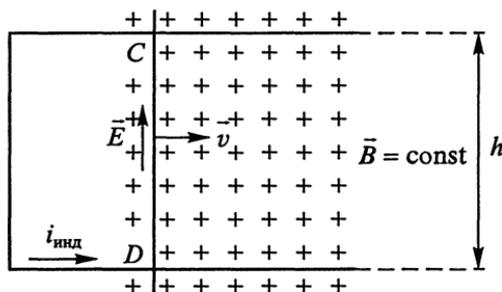


Рис. 9.4

туре индукционный ток  $i_{\text{инд}}$ . Следовательно, на участке контура длиной  $h$ , движущемся в магнитном поле, возникает индукционное электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$ , заставляющее заряды двигаться вдоль провода (в направлении стрелки, см. рис. 9.4). Возникающая ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E} = Eh = -Bhv = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Направление индукционного тока определяется *правилом правой руки*: если, расположив три пальца правой руки взаимно перпендикулярно, совместить большой палец с направлением движения провода, указательный – с направлением вектора магнитной индукции поля, то средний палец покажет направление индукционного тока (если контур замкнут) или вектора напряженности индуцированного поля (если контур разомкнут).

Так как всякое изменение магнитного потока связано с совершением работы, то становится физически понятным указание, сделанное в § 7.9, о постоянстве магнитного потока через поверхности витков винтовой линии, описываемой заряженной частицей в неоднородном магнитном поле: сила Лоренца работы не совершает, а других источников энергии не имеется.

Напомним, что частица, движущаяся под действием силы Лоренца, может быть уподоблена круговому току, магнитное поле которого внутри орбиты характеризуется индукцией, *антипараллельной индукции внешнего магнитного поля*. В случаях, соответствующих рисункам 9.3 и 9.4, сила Лоренца проявляет себя таким же образом: индукционный ток создает магнитное поле, противодействующее изменению основного поля.

### 9.3. Физический смысл ЭДС индукции.

#### Работа силы Лоренца

Вернемся к уравнению (9.6) и перепишем его в таком виде

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} - \vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (9.8)$$

Если первое слагаемое можно трактовать как результат проявления силы Лоренца – Ампера, то второе слагаемое есть отражение

совершенно нового факта, открытого Фарадеем и несводимого к известным электромагнитным явлениям.

В обоих случаях ЭДС представляет собой циркуляцию вектора напряженности электрического поля, отличную от нуля:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0. \quad (9.9)$$

При этом первое слагаемое в уравнении (9.8) может отличаться от нуля только на отдельных участках контура (см. схему опыта на рис. 9.4). Второе же слагаемое отлично от нуля по всему замкнутому контуру. Поэтому линии электрической напряженности этого поля замкнуты сами на себя – поле является вихревым. Этот вывод подтверждается опытом с электроскопом (см. § 9.1), позволившим обнаружить ЭДС индукции в разомкнутом контуре и измерить линейную сумму  $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$  вдоль этого контура. Более того, Дж. Максвелл в 60-х годах XIX в. высказал утверждение, что электрическое вихревое поле появляется во всем пространстве, где изменяется магнитное поле (наши контрольные контуры позволяют обнаружить появление этого поля).

Здесь мы подходим к понятию о едином электромагнитном поле, где неразрывно связаны друг с другом меняющиеся во времени магнитное и электрическое поля. В главе 10 свойства электромагнитного поля будут изучены более подробно. Но уже здесь нужно обратить внимание на следующее: пусть магнитное поле с индукцией, перпендикулярной чертежу (рис. 9.5), меняется во времени,

причем  $\frac{dB}{dt}$  в левой части рисунка больше, чем в правой. Выделим

мысленно контур 1, 2, 3, 4, 1. По правилу Ленца можно определить направление индукционного тока в этом контуре и, следовательно, направление суммарного индуцированного электрического поля. Покажем ток стрелками.

Далее выберем контур 1, 6, 5, 2, 1. Направление индукционного тока в нем также показано стрелками. На участке 1, 2 токи имеют противоположные направления. Как это понять? Дело в том, что *циркуляция определяет сумму слагаемых, но не дает сведений об их знаках на отдельных участках контура интегрирования*. Так, в левых вертикальных участках вектор  $\vec{E}_n$  направлен вниз; таково же направление вектора  $\vec{E}_n$  в

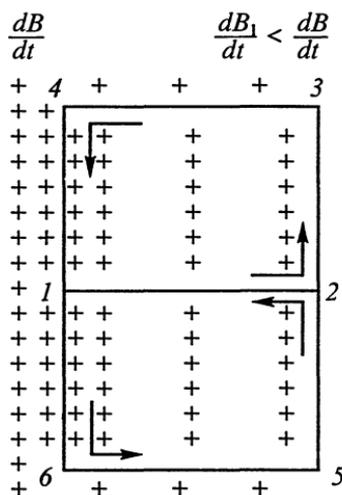


Рис. 9.5

правых участках, но там напряженность меньше по модулю. Ток определяется разностью  $E_{\perp} - E_{\parallel}$ , и в правых вертикальных участках ток течет против  $\vec{E}_{\parallel}$ ; в горизонтальных участках  $\vec{E}$  равны по модулю и одинаковы по направлению, так что их сумма равна нулю (они действуют друг другу навстречу).

В заключение обсудим еще одно кажущееся противоречие в наших прежних рассуждениях. В главе 7 мы выяснили, что сила Ампера может быть истолкована как суммарная сила Лоренца, действующая в магнитном поле на упорядоченно движущиеся заряды, создающие ток в проводнике. Может показаться, что этот вывод внутренне противоречив. Ведь сила Ампера способна производить работу, в то время как работа силы Лоренца должна быть равна нулю (из-за перпендикулярности этой силы скорости зарядов).

Это кажущееся противоречие связано с тем, что мы при движении проводника учли *не всю силу Лоренца*. Действительно, вернемся к контуру тока, изображенному на рисунке 9.3. Когда под действием силы Ампера провод приходит в движение направо, то происходит упорядоченный перенос зарядов – носителей тока в этом же направлении (конвекционный ток). Поэтому полная скорость зарядов – носителей тока есть векторная сумма скорости движения провода  $\vec{v}$  и их дрейфовой скорости  $\vec{u}_{\text{др}}$  под действием электрического поля, созданного источником. При концентрации носителей  $n$ , заряде их  $e$  сила Лоренца, рассчитанная на единицу длины провода, имеющего поперечное сечение  $s$ , равна

$$\vec{f} = nse[(\vec{u}_{\text{др}} + \vec{v}), \vec{B}].$$

За время  $dt$  эта сила совершает работу

$$dA = nse dt [(\vec{u}_{\text{др}} + \vec{v}), \vec{B}] \cdot (\vec{u}_{\text{др}} + \vec{v}) = 0, \quad (9.10)$$

так как сомножители скалярного произведения представляют собой взаимно перпендикулярные векторы. Итак, противоречие было лишь кажущимся: полная работа силы Лоренца всегда равна нулю.

Раскроем теперь выражение (9.10):

$$dA = nse dt \{ [\vec{u}_{\text{др}}, \vec{B}] \cdot \vec{u}_{\text{др}} + [\vec{u}_{\text{др}}, \vec{B}] \cdot \vec{v} + [\vec{v}, \vec{B}] \cdot \vec{u}_{\text{др}} + [\vec{v}, \vec{B}] \cdot \vec{v} \} = 0.$$

Здесь первое и последнее слагаемые равны нулю. Первое из них описывает эффект Холла, последнее – эффект, используемый в магнитогидродинамических генераторах (см. § 7.12).

Второе слагаемое определяет работу силы Ампера при перемещении  $\vec{v} dt$ . Третье слагаемое отличается от второго только знаком. Оно характеризует работу ЭДС индукции, наводимой в проводе. Источником энергии, совершающим эту работу, является внешний источник ЭДС; магнитное поле само не совершает работы, но обес-

печивает возможность обмена энергией между контуром и внешним источником энергии.

Такое же явление (только без движения проводов) происходит и при индукционном процессе в катушке, рассмотренном ниже (см. § 9.5); и там энергия источника, питающего первичную цепь, передается при помощи магнитного поля в цепь второй катушки.

Если бы в цепи (см. рис. 9.3) источник ЭДС отсутствовал, но имелся источник механической энергии, движущий провод, то результат был бы прежним – работа силы Лоренца равна нулю, но при посредстве магнитного поля механическая энергия, затрачиваемая на движение провода, переходила бы в энергию упорядоченного движения зарядов вдоль его оси.

В § 9.4 было выяснено, что свободная заряженная частица, влетающая в неоднородное магнитное поле, может двигаться в нем лишь до некоторого предела, после чего будет вытолкнута в область слабого поля.

Виток с током, поддерживаемым источником ЭДС, ведет себя совсем иначе. Действительно, пусть магнитное поле меняется по закону

$$B = B_0 + bx.$$

В этом поле имеется виток площадью  $S$ , удерживаемый неподвижно; он обтекается током  $I_0$ , имеет сопротивление  $R$  и массу  $m$ . Пусть плоскость витка совпадает с плоскостью  $YOZ$ , причем линии индукции его собственного магнитного поля параллельны линиям индукции внешнего поля (внутри витка). В момент  $t = 0$  виток освобождается. Он будет втягиваться в область сильного поля (см. § 7.2). Найдем закон движения. На виток действует сила, изменяющая его импульс:

$$f_x = iS \frac{dB}{dx} = m \frac{dv}{dt},$$

где  $v$  – скорость витка. Мгновенное значение силы тока в витке

$$i = I_0 - \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = I_0 - A \frac{dB}{dt} = I_0 - \frac{dB}{dx} \frac{dx}{dt} = I_0 - Abv,$$

где  $A = \frac{S}{R}$  – постоянная. Изменение силы тока во времени таково:

$$\frac{di}{dt} = -Ab \frac{dv}{dt} = -Cb^2 i; \quad C = \frac{S^2}{Rm}.$$

Разделяя переменные и интегрируя левую часть в пределах  $I_0$ ,  $i$  и правую – в пределах  $0$ ,  $t$ , получим:

$$i = I_0 \exp(-Cb^2 t).$$

Таким образом, виток втягивается в область сильного поля, а сила тока в нем непрерывно уменьшается, стремясь к нулю.

Найдем скорость витка из уравнения:

$$dv = \frac{iSb}{m} dt = \frac{I_0 Sb}{m} \exp(-Cb^2 t) dt.$$

Интегрируя в пределах 0,  $v$  и 0,  $t$ , находим:

$$v = \frac{I_0 R}{bS} [1 - \exp(-Cb^2 t)].$$

Скорость непрерывно растет, стремясь к предельному значению:

$$v_{\max} = \frac{I_0 R}{bS}.$$

#### 9.4. Самоиндукция. ЭДС самоиндукции

Ток в любом контуре создает магнитный поток через поверхность  $S$ , ограниченную этим контуром. В соответствии с законом Био – Савара – Лапласа и принципом суперпозиции для магнитных полей поток  $\Phi$  через поверхность  $S$  будет пропорционален силе тока в контуре. Коэффициент пропорциональности, зависящий только от геометрических свойств контура, называется индуктивностью и обозначается буквой  $L$ :

$$\Phi = LI. \quad (9.11)$$

Любое изменение силы тока в цепи со временем вызовет изменение магнитного потока через поверхность, затягивающую контур интегрирования, и, как следствие этого, появление в контуре ЭДС индукции. Так как появление ЭДС в контуре обусловлено изменением силы тока в самом контуре, то возникающая ЭДС называется ЭДС самоиндукции, а явление возникновения ЭДС в контуре называется явлением самоиндукции.

Для определения ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_{si}$  используем закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\mathcal{E}_{si} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (9.12)$$

Выражения (9.11) и (9.12) позволяют установить единицу индуктивности. В соответствии с (9.11) единицей индуктивности является индуктивность такого контура, в котором ток в 1 А создает магнитный поток через поверхность, ограниченную этим контуром, в 1 Вб. Эта единица индуктивности в СИ называется г е н р и (Гн) в честь американского физика Дж. Генри, открывшего явление самоиндукции.

Использование выражения (9.12) позволяет для единицы индуктивности дать другое определение, эквивалентное первому. Из выражения (9.12) видно, что в СИ за единицу индуктивности можно принять индуктивность такого контура, в котором при изменении силы тока на 1 А за 1 с возникает ЭДС самоиндукции 1 В. Таким образом:

$$1 \text{ Гн} = 1 \text{ В} \cdot \text{с} / \text{А}.$$

В качестве примера рассчитаем индуктивность катушки в виде тороида, имеющей площадь поперечного сечения  $S$ , длину осевой линии  $l$ , число витков  $N$ . Будем считать, что катушка намотана на сердечник с относительной магнитной проницаемостью  $\mu$ . При прохождении через катушку тока  $I$  в сердечнике создается магнитное поле с напряженностью  $H = \frac{NI}{l}$ . Магнитный поток вектора индукции магнитного поля через поперечное сечение тороида площадью  $S$  будет равен:

$$\Phi = \frac{\mu_0 \mu N^2 S I}{l} = \frac{\mu_0 \mu N^2 S I I}{l^2}. \quad (9.13)$$

Произведение  $Sl$  равно объему  $V$  пространства внутри соленоида, отношение  $\frac{N}{l}$  определяет плотность  $n$  намотки витков катушки. Таким образом, из (9.13) получается, что индуктивность тороидальной катушки равна:

$$L = \mu_0 \mu n^2 V. \quad (9.14)$$

В качестве еще одного примера рассмотрим расчет индуктивности двухпроводной линии, имеющей расстояние между осями проводов  $h$  и диаметр проводов  $2r \ll h$ . Последнее неравенство позволит нам пренебречь возможным перераспределением тока по сечению проводов. Выделим отрезок линии длиной  $a$ . Ток в линии пусть равен  $I$ , причем направление его в обоих проводах взаимно противоположно.

Согласно (8.12) напряженность магнитного поля прямого провода равна

$$H = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r}.$$

Так как линии напряженности полей между проводами имеют одинаковое направление, то полный магнитный поток  $\Phi$ , созданный двумя токами, вдвое превышает поток, созданный одним током. Магнитный поток оказывается равным

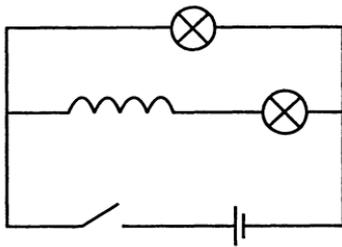


Рис. 9.6

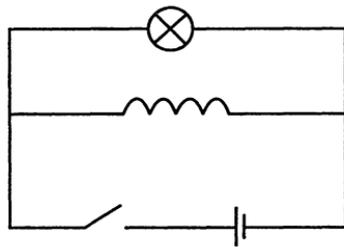


Рис. 9.7

$$\Phi = \mu\mu_0 \frac{I}{\pi} a \int_{\rho}^{h-\rho} \frac{dr}{r} = \mu\mu_0 \frac{I}{\pi} a \ln \left( \frac{h-\rho}{\rho} \right) = LI.$$

Поэтому индуктивность единицы длины линии равна

$$L_0 = \frac{\Phi}{Ia} = \mu \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left( \frac{h-\rho}{\rho} \right) \approx \mu \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{h}{\rho}. \quad (9.15)$$

Умножим (9.15) на емкость  $C_0$  единицы длины двухпроводной линии (2.14):

$$L_0 C_0 = \frac{\mu\mu_0}{\pi} \ln \frac{h}{\rho} \pi \epsilon \epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{h}{\rho}} = \epsilon \mu \epsilon_0 \mu_0 = \frac{\epsilon \mu}{c^2}, \quad (9.16)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме.

ЭДС самоиндукции создает ток, направленный так, чтобы препятствовать причине, ее вызывающей. Это обстоятельство приводит к тому, что скорость изменения тока в цепи после ее замыкания тем меньше, чем больше индуктивность цепи. Рассмотрим электрическую цепь, содержащую источник тока и две параллельно включенные ветви, содержащие лампы накаливания. Причем в одной из ветвей лампа накаливания включена последовательно с катушкой, имеющей индуктивность  $L$  (рис. 9.6). При замыкании ключа видно, что лампы загораются не одновременно. Лампа, включенная последовательно с катушкой, загорается позже из-за действия в цепи ЭДС самоиндукции.

На рисунке 9.7 представлена схема, где катушка включена в цепь параллельно источнику тока и лампе накаливания. При размыкании ключа наблюдается яркая вспышка лампы из-за действия в цепи ЭДС самоиндукции, возникающей при изменении тока в катушке.

## 9.5. Взаимная индукция

Рассмотрим контуры 1 и 2, расположенные друг от друга на некотором расстоянии (рис. 9.8). Ток  $I_1$  в первом контуре создает

магнитный поток  $\Phi_{12}$ , пронизывающий второй контур; ток  $I_2$  во втором контуре создает магнитный поток  $\Phi_{21}$ , пронизывающий первый контур. Используя закон Био – Савара – Лапласа и принцип суперпозиции магнитных полей, можно для этих потоков записать следующие выражения:

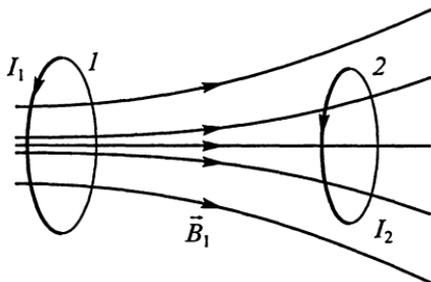


Рис. 9.8

$$\Phi_{12} = M_{12}I_1, \quad \Phi_{21} = M_{21}I_2. \quad (9.17)$$

Коэффициенты  $M_{12}$  и  $M_{21}$ , имеющие наименование индуктивности, называются коэффициентами взаимной индукции; их значение зависит от формы контуров и их взаимного расположения. При изменении со временем силы тока в одном из контуров будет изменяться магнитный поток в соседнем контуре, что приведет к появлению ЭДС взаимной индукции.

*Явление возбуждения ЭДС индукции в контуре при изменении силы тока в другом контуре называется взаимной индукцией.*

ЭДС взаимной индукции можно определить, используя (9.17) и закон электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{M_{12}dI_1}{dt}, \quad \mathcal{E}_{21} = -\frac{M_{21}dI_2}{dt}. \quad (9.18)$$

Из теоремы взаимности, которая будет доказана ниже, следует, что

$$M_{12} = M_{21} = M.$$

Если катушка, создающая магнитное поле, намотана на замкнутый сердечник с большой проницаемостью (например, стальной) и занимает большую часть его поверхности, то магнитный поток в основном концентрируется в сердечнике. Поэтому такой сердечник называют *магнитопроводом*. В дальнейшем мы пренебрежем относительно небольшим магнитным потоком, создающимся в пространстве, окружающем магнитопровод (потоком рассеяния); учет его представляет лишь технический интерес.

Если две катушки, отличающиеся только числом витков ( $N_1$  и  $N_2$ ), надеты на общий магнитопровод, то расчет взаимной индукции упрощается. При этом потоки, создаваемые каждой из катушек, полностью пронизывают другую катушку (так устроены трансформаторы и индукционные катушки).

Пусть длина катушек (длина магнитопровода) равна  $l$ , площади их сечения примем одинаковыми и равными  $S$ . Пусть по первой

катушке течет ток  $I$ . Он создает в магнитопроводе магнитный поток, равный

$$\Phi_1 = \mu\mu_0 n_1 S I_1.$$

Потокоцепление со второй катушкой равно

$$\Phi_{2\text{сц}} = \Phi_1 N_2 = \mu\mu_0 n_1 n_2 S I_1,$$

и коэффициент взаимной индукции есть

$$M = \mu\mu_0 n_1 n_2 S l.$$

Учитывая выражение (9.14), находим, что в нашем случае

$$M = \sqrt{L_1 L_2},$$

где  $L_1$  и  $L_2$  – индуктивности катушек.

Нужно помнить, что мы рассмотрели частный случай; если поток одной катушки лишь частично пронизывает вторую, то значение  $M$  уменьшается.

## 9.6. Некоторые применения электромагнитной индукции

**1. Генераторы и электродвигатели.** На явлении электромагнитной индукции основана вся электротехника сильных токов. При вращении катушки в магнитном поле в ней наводится периодически меняющаяся электродвижущая сила. Магнитное поле создается катушками, обтекаемыми постоянным током. Таков принцип работы генератора переменного тока.

Специальное приспособление (коллектор) позволяет преобразовать переменный ток в постоянный – этот принцип использован в генераторах постоянного тока.

Если создать ток в способной вращаться катушке, находящейся в постоянном магнитном поле, то она придет во вращение и сможет привести в движение ту или иную машину – на этом принципе (использование силы Ампера) основаны электродвигатели постоянного тока и некоторые типы электродвигателей переменного тока.

Подробное изучение этих конструкций относится к курсу электротехники (см. также § 11.8 и 11.9).

**2. Индукционная катушка.** Если замыкать источник постоянной ЭДС на цепь, обладающую большой индуктивностью, то можно заметить постепенное нарастание тока, более медленное, чем в цепи, не обладающей индуктивностью.

Если на катушку 1 надеть катушку 2, так чтобы они обе пронизывались общим магнитным потоком катушки 1, и периодически замыкать и размыкать цепь катушки 1, подключенной к источнику постоянной ЭДС, то в катушке 2 будет наводиться ЭДС индукции, равная

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_0}{dt} = -\frac{L_1}{N_1} N_2 \frac{di}{dt}. \quad (9.19)$$

Если сделать  $N_2 > N_1$ , то можно получить значительную ЭДС. Существуют типы прерывателей, у которых процесс замыкания длится существенно дольше, чем процесс размыкания. При их использовании катушка 2 дает высокое напряжение одного знака (не постоянное, а прерывистое). Такие индукционные катушки родственны трансформаторам переменного напряжения, рассматриваемым в главе 12.

**3. Измеритель магнитной индукции (флюксметр).** В этом приборе имеется маленькая (площадь сечения  $s$  около  $1 \text{ см}^2$ ) катушка, содержащая  $n$  витков. Она соединяется с баллистическим гальванометром, имеющим период  $T$  колебаний измерительной системы порядка нескольких секунд. Катушку помещают в ту область магнитного поля, где нужно измерить магнитную индукцию  $B$ . В данном случае потокосцепление равно

$$\Phi = \bar{B} \cdot \bar{sn}.$$

При этом малость сечения позволяет во многих практических случаях считать индукцию постоянной по всему сечению.

Если быстро вынести катушку в область, где магнитного поля нет (или выключить ток, связанный с измеряемым магнитным полем), то  $\Phi$  обратится в нуль, а в катушке наведется ЭДС электромагнитной индукции  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$  и возникнет ток  $i = \frac{\mathcal{E}}{R}$ , где  $R$  – сопротивление катушки и гальванометра. По прибору пройдет электрический заряд

$$q = \int_0^{\tau} i dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi}^0 d\Phi = \frac{\Phi}{R},$$

где  $\tau$  – время исчезновения магнитного потока. При протекании тока измерительная система гальванометра приобретает механический импульс

$$p = mv = \int_0^{\tau} f dt = Aq$$

( $m$  – масса системы,  $f$  – сила, пропорциональная силе тока) и кинетическую энергию

$$W_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{A^2 q^2}{2m}$$

( $A$  – постоянный коэффициент пропорциональности). Если  $\tau \ll T$ , то за время действия силы система гальванометра практически не

успевает сместиться из положения равновесия. В дальнейшем она поворачивается (закручивая тормозящую ее пружинку), пока вся кинетическая энергия не перейдет в энергию деформации пружины:

$$\frac{A^2 q^2}{2m} = \frac{1}{2} k \alpha^2,$$

где  $k$  – постоянный множитель,  $\alpha$  – угол поворота указателя гальванометра. Таким образом, максимальное показание флюксметра пропорционально протекшему заряду, т.е. полному изменению магнитного потока.

Различно ориентируя катушку флюксметра (в данном месте магнитного поля), добиваются наибольшего отклонения указателя прибора. В этом случае поток, пронизывающий катушку, максимален и магнитная индукция

$$B = \frac{\Phi_m}{nS}.$$

**4. Пояс Роговского.** Теперь мы можем лучше понять принцип работы пояса Роговского (см. § 7.7). Баллистический гальванометр, подключенный к поясу, измеряет изменение магнитного потоко-сцепления, которое, как было выяснено в § 7.7, пропорционально циркуляции (или линейной сумме, если пояс не замкнут) вектора напряженности магнитного поля, взятой по контуру, образованному поясом. Следовательно, пояс позволяет измерить циркуляцию.

Если замкнутый пояс не охватывает провод с током, связанным с полем, то показание гальванометра при измерении равно нулю. Если пояс охватывает ток и образует замкнутый контур, то показание прибора не зависит от формы контура. Если охватить ток дважды, то показание прибора удваивается.

Наконец, если пояс не образует замкнутого контура, то показание прибора зависит от формы и расположения контура, так как в этом случае прибор измеряет линейную сумму  $\int \vec{H} \cdot d\vec{l}$  по контуру, образованному поясом.

**5. Бетатрон.** Явление электромагнитной индукции остроумно использовано в ускорителях электронов – бетатронах. Вообразим тор, из которого выкачан воздух, так что частицы могут длительно двигаться в нем, не встречаясь с остатками газов (рис. 9.9). Электромагнит, питаемый низкочастотным током, создает магнитное поле с индукцией  $B = f(t)$ , перпендикулярной плоскости тора.

Изменения этого поля создают по средней линии тора индуцированное вихревое поле с напряженностью  $\vec{E}$ , удовлетворяющее закону Фарадея:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot 2\pi\rho = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi\rho^2 \frac{dB}{dt}$$

(здесь  $\rho$  – радиус средней линии тора;  $\frac{dB}{dt}$  для простоты расчета принято одинаковым по всей поверхности).

Если внутри тора окажется электрон, то он будет ускоряться этим полем, причем работа, совершаемая над электроном за один его оборот, равна

$$A_0 = \left| e \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \right| = \left| e \pi \rho^2 \frac{dB}{dt} \right|.$$

Но электрон может ускоряться полем все время, пока сохраняется знак изменения напряженности поля (т. е. в течение половины периода изменений напряженности); за это время электрон совершит громадное число оборотов и приобретет соответствующую кинетическую энергию.

Примем для простоты оценочного расчета, что поле меняется 100 раз в секунду с амплитудой изменения индукции 1 Тл (рис. 9.9, внизу); значение ее линейно зависит от времени (счет времени начинается при наименьшей индукции поля). Тогда для процесса нарастания поля имеем:

$$B = 400t - 1.$$

Радиус средней линии тора примем равным  $\rho = 0,25$  м. Тогда работа  $A_0$ , совершаемая над электроном за один оборот, составит приблизительно 100 эВ; скорость  $v$  электрона к концу первого оборота достигает  $5,6 \cdot 10^6$  м/с и время  $t$  прохождения первого оборота не превысит  $10^{-6}$  с.

Расчет полного числа оборотов за время нарастания поля труден, так как вскоре начнет сказываться возрастание массы электрона со скоростью. Но совершенно очевидно, что это число велико (порядка  $10^4$  оборотов). Следовательно, энергия электрона к концу ускорительного процесса составит не менее  $10^6$  эВ. При этом изменение массы не препятствует процессу ускорения, но лишь замедляет его (в циклотроне оно делает ускорение невозможным).

Реальные мощные бетатроны позволяют сообщить электронам энергию порядка сотен мегаэлектронвольт. К концу ускорения вспомогательное (электрическое или магнитное) поле выводит электроны из тора на ту или иную мишень.

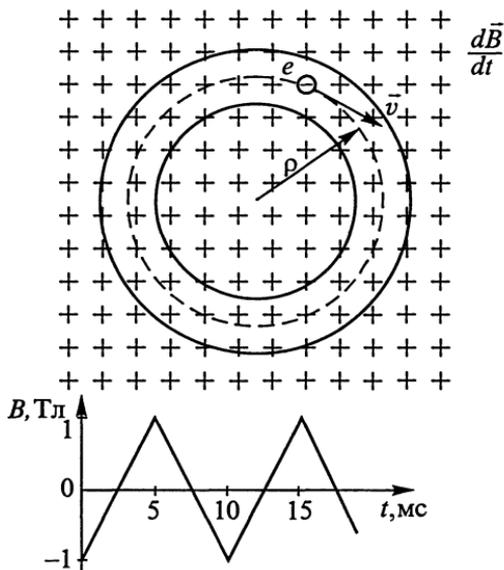


Рис. 9.9

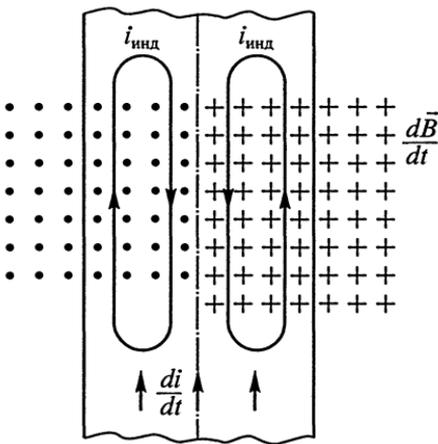


Рис. 9.10

можно найти, применив закон Фарадея и правило Ленца. Как видно из рисунка, индукционный ток в центральной части провода препятствует первоначальному изменению тока, а на периферии усиливает его. Поэтому изменения тока (и следовательно, сам ток) у оси провода ослабляются; носители заряда концентрируются вблизи поверхности проводника, в более или менее тонком поверхностном слое.

Это явление – поверхностный эффект – проявляется тем сильнее, чем больше частота тока, удельная проводимость вещества провода и его магнитная проницаемость, т.е. чем сильнее выражена электромагнитная индукция. Поэтому с поверхностным эффектом приходится считаться главным образом в радиотехнике. Расчетные формулы эффекта сложны. В приложении приведены некоторые числовые данные, характеризующие эффект.

Если заметный ток существует только в слое толщиной  $d$ , много меньше радиуса провода, то убывание силы тока (в направлении от поверхности провода к его оси) происходит по экспоненциальному закону. Толщина слоя, на которой сила тока уменьшается в  $e = 2,7$  раза, т.е. до 0,37 начального значения, называется глубиной проникновения  $h$ . При сверхвысоких частотах глубина проникновения имеет значение порядка нескольких микрометров, что позволяет применять трубки вместо сплошных проводов. Смысл термина «глубина проникновения» будет выяснен в § 13.3.

Поверхностный эффект можно продемонстрировать, пропуская быстро меняющийся ток по последовательно включенным проволокам из железа и платины одинаковой длины и радиусов (у обеих практически одинаковая удельная электрическая проводимость, но у железа магнитная проницаемость значительно больше) и измеряя ламповым вольтметром или осциллографом напряжения на

## 6. Поверхностный эффект.

Пусть в проводе создается меняющееся электрическое поле, порождающее меняющийся во времени электрический ток. Изобразим сечение отрезка провода вдоль его оси (рис. 9.10) и покажем стрелками изменение силы тока  $\frac{di}{dt}$ . Точки и крестики условно определяют характер изменения магнитной индукции  $\frac{dB}{dt}$  этого тока внутри и вне провода. Приблизительный вид линий индукционного тока  $i_{\text{инд}}$

каждой из проволок. Вместо прямых проволок можно использовать бифилярные витки. При постоянном (или 50-периодном токе) эти напряжения одинаковы; однако при частоте порядка десятков килогерц напряжение на железной проволоке оказывается существенно больше, чем на платиновой. Это и понятно, так как благодаря поверхностному эффекту уменьшается рабочее сечение провода и, следовательно, растет его сопротивление. Увеличение сопротивления приводит в соответствии с законом Джоуля – Ленца к большему нагреванию провода, причем только в поверхностном слое. Этот эффект часто используется в технике (для закаливания поверхности металлических изделий, испарения нанесенных на провод веществ и т. д.).

Если упомянутые выше проволоки заключить в одинаковые закрытые колбы, соединенные с манометрами для измерения давления воздуха в колбах, то при пропускании постоянного тока нагрев проволок будет одинаков и повышение давления в обеих колбах также будет одинаковым (оно не должно быть большим). При пропускании высокочастотного тока давление в колбе с платиновой проволокой останется небольшим, а в колбе с железной проволокой давление возрастет значительно сильнее.

## 9.7. Магнитная энергия тока. Энергия взаимодействия токов

Для создания в электрической цепи электрического тока  $I$  сторонние силы совершают определенную работу. Эта работа идет на увеличение энергии магнитного поля проводника с током. Будем считать, что цепь обладает индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$ . Тогда при наличии в цепи источника сторонних сил, создающих ЭДС, равную  $\mathcal{E}$ , для каждого момента времени можно записать закон Ома в виде:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}} = iR, \quad (9.20)$$

где  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -L \frac{di}{dt}$ .

Умножив (9.20) на мгновенное значение силы тока в цепи  $i$ , получим:

$$\mathcal{E}i = i^2R + Li \frac{di}{dt}, \quad (9.21)$$

или

$$\mathcal{E}i dt = i^2 R dt + Li di. \quad (9.22)$$

Работа сторонних сил за время  $dt$  идет на выделение джоулева тепла и на совершение работы против ЭДС самоиндукции. Элементарная работа против ЭДС самоиндукции равна

$$dA = Lidi. \quad (9.23)$$

Полная работа сторонних сил против ЭДС самоиндукции при достижении в цепи тока  $I$  равна:

$$A = \int_0^I Lidi = \frac{LI^2}{2}. \quad (9.24)$$

Рассчитаем работу сторонних сил против ЭДС самоиндукции и взаимной индукции при установлении токов в двух контурах, обладающих соответственно индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  и взаимной индуктивностью  $M$ . Будем считать, что в первом контуре действует ЭДС  $\mathcal{E}_1$ , а во втором контуре ЭДС  $\mathcal{E}_2$ . Тогда элементарная работа  $dA_1$ , совершаемая сторонними силами в первом контуре, идет на увеличение тока  $i_1$  в первом контуре и на изменение тока во втором контуре:

$$dA_1 = L_1 i_1 di_1 + M i_2 di_1.$$

Аналогичное выражение можно записать для элементарной работы  $dA_2$ , совершаемой сторонними силами во втором контуре:

$$dA_2 = L_2 i_2 di_2 + M i_1 di_2.$$

Элементарная работа сторонних сил в обоих контурах равна:

$$dA = L_1 i_1 di_1 + L_2 i_2 di_2 + M i_1 di_2 + M i_2 di_1 = L_1 i_1 di_1 + L_2 i_2 di_2 + Md(i_1 i_2).$$

Полная работа сторонних сил по достижению токов  $I_1$  и  $I_2$  в первом и во втором контурах соответственно будет равна:

$$A = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2. \quad (9.25)$$

Первые два слагаемые в (9.25) выражают собственную энергию токов, третье слагаемое выражает взаимную энергию токов, или энергию взаимодействия токов. Из выражения (9.25) видно, что собственная энергия токов является положительной величиной, взаимная энергия токов может иметь как положительное, так и отрицательное значение, так как  $M$  может иметь разные знаки.

Выражение для взаимной энергии токов позволяет доказать, что значения  $M_{12}$  и  $M_{21}$  равны друг другу.

Действительно, удалим катушку  $L_1$  от катушки  $L_2$  на бесконечно большое расстояние. При этом магнитный поток, пронизывающий первую катушку от тока второй катушки, обратится в нуль. Совершенная при этом работа равна

$$A_1 = I_1 \Delta \Phi_{12} = M_{12} I_2 I_1.$$

Работа, совершенная при удалении второй катушки на бесконечно большое расстояние от первой катушки будет равна:

$$A_2 = M_{21}I_1I_2.$$

Так как обе работы равны, то

$$M_{12} = M_{21} = M,$$

что и доказывает теорему взаимности.

### 9.8. Установление тока в цепи с катушкой индуктивности

Рассмотрим процесс установления тока в цепи с катушкой индуктивности и резистором (рис. 9.11, а). Пусть в момент  $t = 0$  цепь замыкается. В момент  $t$  течет ток  $i$ . За время  $dt$  он изменится на  $di$ . При этом источник совершит элементарную работу, равную

$$\mathcal{E}i dt = Ri^2 dt + Lidi. \quad (9.26)$$

Разделим обе части уравнения (9.26) на  $i dt$  и введем новую переменную

$$y = i - \frac{\mathcal{E}}{R},$$

тогда уравнение примет вид:

$$Ry + L \frac{dy}{dt} = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя в пределах от 0 до  $t$ , получим:

$$y = y_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

Так как при  $t = 0$   $i = 0$ , то окончательно для  $i$  имеем:

$$i = I_m \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right], \quad (9.27)$$

где  $I_m = \mathcal{E}/R$ .

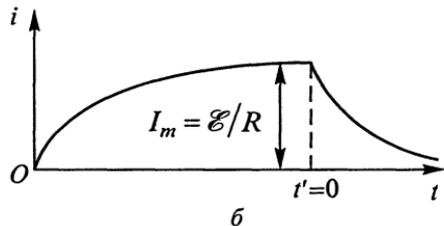
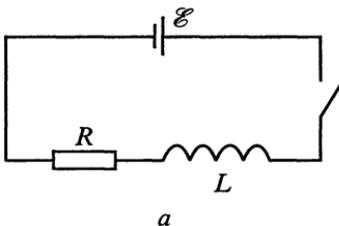


Рис. 9.11

Величину  $\tau$  называют *постоянной времени* или *временем релаксации*. За это время сила тока увеличивается от нуля до  $0,63 I_m$ . Установившийся ток  $I_m$  ( $t \rightarrow \infty$ ) подчиняется закону Ома.

Если после установления тока  $I_m$  ввести новое начало отсчета времени и замкнуть источник тока накоротко в момент  $t' = 0$ , то, как легко проверить, убывание тока будет происходить по закону:

$$i = I_m \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right). \quad (9.28)$$

Графики обоих процессов изображены на рисунке 9.11, б.

Нестационарный процесс зарядки (и разрядки) конденсатора через некоторый резистор, описываемый похожими по форме уравнениями для разности потенциалов на конденсаторе, был рассмотрен в конце главы 5.

Материал этого параграфа показывает, что в цепи постоянного тока индуктивность ничем себя не проявляет (ее влияние сказывается лишь при включении и выключении цепи). Поэтому мы могли рассматривать законы постоянного тока, не учитывая индуктивности.

## 9.9. Энергия и плотность энергии магнитного поля

Выражения для энергии тока и энергии взаимодействия токов можно изменить так, чтобы они содержали энергию магнитного поля. Для иллюстрации такого подхода рассчитаем энергию тока тороидальной катушки, индуктивность которой определяется выражением (9.14):

$$L = \mu\mu_0 n^2 S l.$$

При токе через катушку, равном  $I$ , энергия тока  $W_m$  равна:

$$W_m = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 S l I^2. \quad (9.29)$$

Так как для тороидальной катушки напряженность магнитного поля  $H$  связана с силой тока в катушке простым соотношением:  $H = nI$ , то выражение для энергии тока можно записать в виде:

$$W_m = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2 S l. \quad (9.30)$$

Произведение  $Sl$  равно объему сердечника  $V$  внутри катушки, поэтому энергию тока можно представить как произведение величины  $w_m = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2$  на объем  $V$ . Полагая, что в результате работы сторонних сил в сердечнике образуется магнитное поле, можно считать, что полученное выражение как раз характеризует энергию этого поля.

Структура формулы (9.30) позволяет рассматривать  $w_m$  как объемную плотность энергии магнитного поля с напряженностью  $H$ . Таким образом, объемная плотность энергии магнитного поля равна:

$$w_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2. \quad (9.31)$$

Учитывая связь между  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$ , выражение для  $w_m$  можно записать в различных видах, эквивалентных друг другу:

$$w_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}. \quad (9.32)$$

Переход к новой записи энергии тока означает нечто большее, чем простую замену физических величин. Теперь энергию тока можно рассматривать как энергию магнитного поля, возбуждаемого в пространстве вокруг проводника с током.

Полевая трактовка позволяет рассматривать энергию взаимодействия токов как результат суперпозиции магнитных полей взаимодействующих токов. Обозначим через  $\vec{B}_1$  индукцию магнитного поля тока  $I_1$ , через  $\vec{B}_2$  индукцию магнитного поля тока  $I_2$ . В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей результирующая индукция  $\vec{B}$  в каждой точке пространства около проводников с током равна векторной сумме  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$ :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Плотность энергии результирующего магнитного поля оказывается равной:

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2}{2\mu_0}, \quad (9.33)$$

или

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B_1^2}{\mu_0} + \frac{1}{2} \frac{B_2^2}{\mu_0} + \frac{\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2}{\mu_0}. \quad (9.34)$$

Интегрируя выражение (9.34) по объему поля, получим выражение для полной энергии поля:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\int B_1^2 dV}{\mu_0} + \frac{1}{2} \frac{\int B_2^2 dV}{\mu_0} + \frac{\int \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 dV}{\mu_0}. \quad (9.35)$$

Сравнивая полученное выражение с формулой (9.25), можно сделать вывод о том, что энергиям токов  $I_1$  и  $I_2$  соответствуют первые два слагаемых (9.35), а энергия взаимодействия токов определяет

ся третьим слагаемым (9.35) и может иметь разный знак в зависимости от значения интеграла  $\frac{\int \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 dV}{\mu_0}$ .

### 9.10. Силы, испытываемые контуром с током в собственном магнитном поле

Каждый элемент контура с током находится в магнитном поле остальных элементов контура и, следовательно, подвержен действию сил Ампера, создаваемых этими элементами. Так, если ток течет по катушке, то ее витки притягиваются друг к другу, а каждый виток, кроме того, испытывает силы, лежащие в его плоскости и стремящиеся растянуть виток.

Эти силы можно обнаружить в простых опытах. Так, если подвесить вертикально спираль из медной проволоки, содержащую 15...20 витков (радиус 1...2 см) на длине 7...8 см, и свободный нижний конец подключить к аккумулятору при помощи тонкой подвижной проволоки, а верхний конец – ко второму полюсу аккумулятора, то сокращение спирали при пропускании тока вполне заметно.

Действие радиальных (растягивающих) сил проявляется при пропускании тока по двум длинным параллельным проводам, включенным последовательно, т. е. образующим часть единого контура, – токи в них антипараллельны.

Рассмотрим длинную катушку радиусом  $R$ , длиной  $l$ , имеющую  $N$  витков. Если по ней течет ток  $I$ , то, применяя правило левой руки, легко убедиться, что на катушку действуют внутренние продольные силы  $\vec{F}_{\text{пр}}$ , стремящиеся сжать ее, и радиальные силы  $\vec{F}_r$ , стремящиеся растянуть витки. Обе эти деформации ведут к увеличению индуктивности катушки:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi R^2. \quad (9.36)$$

Пусть катушка не жесткая, так что эти деформации действительно происходят. Кроме того, допустим, что мы поддерживаем ток в катушке (из-за изменений  $L$  он должен меняться) постоянным. При этом источник ЭДС (кроме затраты энергии на нагревание проводов катушки) совершит работу:

$$dA_0 = Id\Phi = I^2 dL.$$

Она пойдет на увеличение запаса энергии магнитного поля:

$$dW_m = \frac{1}{2} I^2 dL$$

и на совершение механической работы по деформации катушки:

$$dA = dA_0 - dW_m = \frac{1}{2} I^2 dL.$$

Из (9.36) получаем:

$$dL = -\mu_0 \frac{N^2}{l^2} \pi R^2 dl + 2\mu_0 \frac{N^2}{l} \pi R dR, \text{ где } dl < 0, dR > 0.$$

Совершенная силами работа равна

$$dA = dA_{\text{пр}} + dA_p = \frac{\mu_0}{2} \frac{N^2}{l^2} \pi R^2 I^2 |dl| + \mu_0 \frac{N^2}{l^2} \pi R l I^2 dR = F_{\text{пр}} |dl| + F_p dR.$$

Введем продольное и радиальное механические напряжения, которые характеризуются силами, приходящимися на единицу соответствующей поверхности:

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{F_{\text{пр}}}{\pi R^2}; \quad \sigma_p = \frac{F_p}{2\pi R l}. \quad (9.37)$$

Тогда получим окончательный результат:

$$\sigma_{\text{пр}} = \sigma_p = \frac{\mu_0}{2} \frac{N^2}{l^2} I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 H^2,$$

где  $\frac{1}{2} \mu_0 H^2$  есть объемная плотность энергии магнитного поля. При сильных токах и многovitковых катушках (в частности, в мощных промышленных трансформаторах) механические напряжения достигают  $10^3 \dots 10^4$  Па, что уже требует специального крепления катушек. В опытах Капицы со сверхсильными магнитными полями механическое напряжение достигало  $10^8$  Па.

## 9.11. Электромагниты. Магнитное поле Земли

Магнитные поля часто создают при помощи электромагнитов. Например, можно намотать токонесущую катушку на дугообразный магнитопровод, сделанный из ферромагнитного материала. Магнитопровод замыкается ярком, т. е. ферромагнитной пластиной, полностью покрывающей концы дугообразной части (рис. 9.12).

Приложим к яркому силу  $\vec{F}$ , способную оторвать его от магнитопровода и переместить на элементарный отрезок  $dh$ . Совершаемая при этом работа равна

$$dA = Fdh.$$

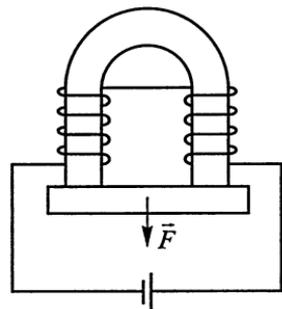


Рис. 9.12

Образовавшийся зазор имеет объем  $Sdh$ , где  $S$  – площадь обоих концов дугообразного магнитопровода; в зазоре возникает магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , практически равной индукции до отрыва якоря (если зазор бесконечно узок). Поэтому энергия магнитного поля, дополнительно возникшего в зазоре, равная работе отрывающей силы, определится соотношениями:

$$dA = Fdh = dW_m = w_m Sdh = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} Sdh.$$

Отсюда модуль отрывающей силы  $\vec{F}$  (равный модулю подъемной силы  $\vec{F}_n$  электромагнита) равен

$$F = F_n = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} S. \quad (9.38)$$

Это значение сила имеет при прижатом якоря. Конечно, электромагнит может поднимать только ферромагнитные тела. Если нужно поднять неферромагнитное тело, то его прикрепляют снизу к ферромагнитному якорю.

Когда электромагнит применяют для создания магнитного поля во внешнем пространстве, то размер зазора, разумеется, конечен. Мы ограничимся расчетом простейших электромагнитов с зазорами, причем пренебрежем потоками рассеяния и будем считать, что магнитный поток в зазоре имеет сечение, одинаковое по площади с сечением прилежащего конца магнитопровода (в действительности оно немного больше).

Вообразим тороидальную катушку (рис. 9.13) с равномерной обмоткой;  $n$  – число витков на единицу длины (берется по средней линии  $l$ ); общее число витков есть  $N = nl$ ; площадь сечения катушки равна  $S$ . Катушка находится в воздухе ( $\mu = 1$ ).

По виткам течет ток  $I$ . Согласно закону полного тока  $H_0 l = NI$ .

Поэтому магнитная индукция  $B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 \frac{NI}{l}$ .

Магнитный поток равен

$$\Phi_0 = B_0 S = \frac{IN}{l} = \frac{IN}{R_0},$$

где  $R_0 = \frac{l}{\mu_0 S}$  – магнитное сопротивление.

Если заполнить тороид ферромагнетиком с относительной проницаемостью  $\mu$  (например, изготовить тор из стали), то получится:

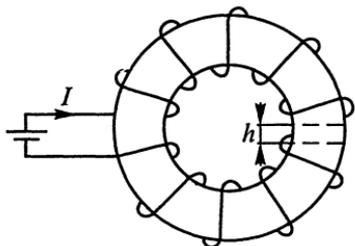


Рис. 9.13

$$\Phi_1 = \frac{IN}{R_1} > \Phi_0; \quad R_1 = \frac{R_0}{\mu} \ll R_0.$$

Сделаем теперь в торе небольшой зазор (длина  $h$ ). Так как зазор невелик, то число витков можно считать прежним. Получилась неоднородная система. Обозначив напряженность в стали  $H'$  и в воздухе  $H$ , запишем закон полного тока:

$$Hh + H'l_1 = NI, \quad (9.39)$$

где  $l_1 = l - h$  – средняя длина линии напряженности в стали.

Вследствие того что линии магнитной индукции замкнуты сами на себя, магнитный поток должен быть одинаков в обеих частях устройства (в стали и в зазоре):

$$\Phi' = B'S = BS = \Phi.$$

Получаем:

$$\mu\mu_0 H'S = \mu_0 HS = \Phi.$$

Определив напряженности и подставив их в соотношение (9.39), находим:

$$\Phi \left( \frac{h}{\mu_0 S} + \frac{l_1}{\mu\mu_0 S} \right) = NI$$

и окончательно имеем:

$$\Phi = \frac{NI}{R' + R'_1}, \quad (9.40)$$

где

$$R' = \frac{h}{\mu_0 S} \quad \text{и} \quad R'_1 = \frac{l_1}{\mu\mu_0 S}.$$

Легко видеть, что предыдущие случаи являются частными случаями уравнения (9.40) и что

$$\Phi_0 < \Phi < \Phi_1.$$

Трудность точного количественного расчета магнитного потока  $\Phi$  заключается в отсутствии у ферромагнетиков простой связи между  $B$  и  $I$  (непостоянство  $\mu$ ).

Уравнение (9.40), полученное Гопкинсонами, внешне подобно закону Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R},$$

так как величину  $r$  можно уподобить внутреннему сопротивлению (магнитному!) магнитопровода  $R'_1$ , а  $R$  – сопротивлению нагрузки; произведение  $IN$ , иногда (очень неудачно) называемое «намагничивающей силой», формально подобно электродвижущей силе.

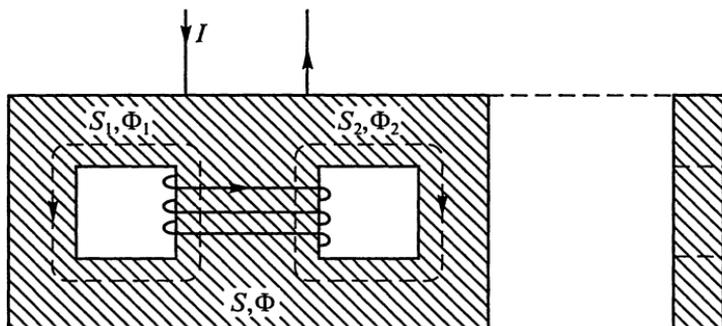


Рис. 9.14

Но, конечно, подобие это чисто внешнее и не имеет физического содержания. Укажем, что для поддержания тока нужно затрачивать энергию, а для поддержания магнитного поля, как уже отмечалось, энергия не требуется, если поле однажды создано.

Встречаются также сложные магнитопроводы (рис. 9.14), где магнитный поток разветвляется; при этом выполняется закон сохранения магнитного потока:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$

В разных сечениях магнитопровода значения индукции получают различными; поэтому расчет такого случая сложен.

Обычные электромагниты создают в зазорах длиной около 1 см магнитные поля с индукцией, не превышающей 10 Тл. Более сильные магнитные поля получать трудно, так как при сильных токах или многovitковых катушках (большое активное сопротивление) расходуется громадная мощность на нагревание обмотки электромагнита и усложняется его охлаждение.

Впервые сверхсильные магнитные поля (с индукцией до 50 Тл) были получены П. Л. Капицей, который возбуждал громадные токи (порядка сотен килоампер), существовавшие очень недолго (тысячные доли секунды), благодаря чему катушка не успевала перегреваться.

В наши дни достигнуты большие успехи в создании электромагнитов со сверхпроводящей обмоткой, где не расходуется никакой энергии на поддержание однажды созданного тока. Но пока используются сверхпроводники только при очень низких температурах, это ограничивает применение сверхпроводящих соленоидов.

Земля является громадным электромагнитом. Предполагается, что ее магнитное поле связано с потоками расплавленного металла в земном ядре. Во внешнем пространстве магнитное поле Земли зависит также от потока заряженных частиц, летящих от Солнца. Распределение поля сложно; оно сильно вытянуто в сторону, противоположную направлению на Солнце (примерно на 20 земных

диаметров). В сторону Солнца поле простирается всего на 2–3 земных диаметра. У поверхности Земли, как уже отмечалось, индукция магнитного поля составляет около  $5 \cdot 10^{-5}$  Тл. Линии магнитной индукции выходят из Земли вблизи Южного географического полюса (следовательно, там находится северный магнитный полюс) и входят в Землю вблизи Северного географического полюса. Для определения направления линий индукции магнитного поля Земли необходимо иметь магнитную стрелку, вращающуюся вокруг вертикальной оси, – она определяет положение плоскости магнитного меридиана. Стрелка, расположенная в плоскости меридиана и способная вращаться вокруг горизонтальной оси, определяет наклон линии индукции к земному горизонту. Индукция магнитного поля Земли сложно зависит от географических координат места и от солнечной активности.

## Глава 10

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### 10.1. Магнитоэлектрическая индукция. Ток смещения

К середине XIX в. был накоплен огромный экспериментальный материал, подтверждающий неразрывную связь электрических и магнитных явлений. Впечатляющим достижением физики стало открытие М. Фарадеем электромагнитной индукции, доказывающее возникновение вихревого электрического поля при изменении со временем магнитного поля. В 1845 г. Фарадей экспериментально обнаружил влияние магнитного поля на прохождение света через прозрачные тела, что продемонстрировало наличие связи между электромагнитными и оптическими явлениями.

Для описания электромагнитных явлений Фарадей выдвинул гипотезу о существовании электрических и магнитных полей, с помощью которой попытался обобщить результаты своих экспериментов.

Английский физик Д. К. Максвелл, развивая полевые идеи Фарадея и анализируя известные к 1860 г. экспериментально открытые законы электромагнетизма, обнаружил в них явное противоречие.

Так, фундаментальный закон сохранения электрического заряда не соответствовал закону Кулона и закону полного тока для магнитного поля. Математическая формулировка закона сохранения заряда выражается простым соотношением:



---

**Максвелл Джеймс Клерк (1831–1879)**, английский физик. Создал законченную теорию электромагнитного поля, обобщив все известные данные по электромагнетизму и введя понятие тока смещения в вакууме и тока поляризации в диэлектрике. Предсказал существование электромагнитных волн и электромагнитную природу света, вычислил световое давление. В молекулярной физике установил статистический закон распределения молекул газа по скоростям, создал статистическую теорию явлений переноса.

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = I_S. \quad (10.1)$$

Уменьшение заряда со временем в некотором объеме  $V$  определяется только током проводимости через поверхность  $S$ , ограничивающую этот объем.

Имея в виду, что  $Q = \int \rho dV$ , а  $I_S = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ , закон сохранения электрического заряда можно записать в виде:

$$-\frac{\partial \int \rho dV}{\partial t} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (10.2)$$

В соответствии с теоремой Гаусса выражение  $\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$  преобразуем к виду:

$$\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV. \quad (10.3)$$

С учетом (10.3) закон сохранения электрического заряда (10.2) перепишем в виде:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j} dV + \frac{\partial \int \rho dV}{\partial t} = 0,$$

или

$$\int_V \left( \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0. \quad (10.4)$$

Интеграл (10.4) будет равен нулю, если

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (10.5)$$

Выражение (10.5) представляет собой закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме.

Изменение объемной плотности электрического заряда со временем можно выразить через индукцию электрического поля:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial (\operatorname{div} \vec{D})}{\partial t}. \quad (10.6)$$

Так как операции дифференцирования по времени и пространственным координатам линейны и независимы друг от друга, то (10.6) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial (\operatorname{div} \vec{D})}{\partial t} = \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (10.7)$$

Подставляя (10.7) в (10.5), для закона сохранения электрического заряда получим:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0, \quad (10.8)$$

или

$$\operatorname{div} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (10.9)$$

Так как дивергенция от ротора любого вектора равна нулю, то выражение под знаком дивергенции в (10.9) всегда можно приравнять ротору некоторого вектора, например вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ , т. е.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (10.10)$$

Однако это выражение противоречит закону полного тока в виде:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}.$$

Чтобы согласовать закон сохранения электрического заряда с известными уравнениями электромагнетизма, Максвелл предположил существование тока смещения, плотность которого  $\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

По Максвеллу, уравнение, определяющее ротор напряженности магнитного поля, следует записывать с учетом тока смещения следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

т. е. в виде соотношения (10.10).

Из полученного уравнения следует, что даже в отсутствие тока проводимости может существовать магнитное поле, обусловленное изменением во времени индукции электрического поля. Действительно, если  $\vec{j} = 0$ , то

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (10.11)$$

Таким образом, вихревое магнитное поле может возникать не только около проводников с током, но и при изменении со временем электрического поля.

Явление возникновения магнитного поля при изменении со временем индукции электрического поля называется *магнитоэлектрической индукцией*.

Явление магнитоэлектрической индукции похоже на явление электромагнитной индукции. В обоих случаях электрическое или маг-

нитное поле индуцируется изменяющимся со временем магнитным или электрическим полем соответственно. Отличие заключается в том, что возникающие вихревые поля имеют по отношению к вызывающей их причине разные направления. На рисунке 10.1 изменения электрического и магнитного полей характеризуются вектором, направленным вверх. У возникающих при этом вихревых магнитного и электрического полей линии индукции и линии напряженности имеют разные направления.

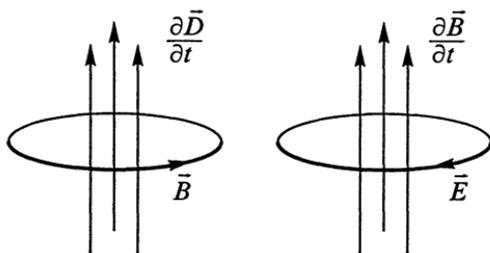


Рис. 10.1

Другое отличие состоит в том, что магнитное поле тока смещения гораздо труднее экспериментально обнаружить, чем магнитное поле тока проводимости. Объясняется это тем, что создание значительной плотности тока смещения связано с быстропротекающими электрическими процессами и, как правило, с быстроменяющимися магнитными полями. Регистрация подобного рода полей затруднена из-за отсутствия чувствительных малоинерционных детекторов для переменных магнитных полей.

Продемонстрировать возникновение магнитного поля, вызванного током смещения, можно в следующем эксперименте, схема которого приведена на рисунке 10.2. Соединим обкладки демонстрационного конденсатора с кондукторами электрофорной машины таким образом, чтобы расстояние между обкладками конденсатора было равно 10 см, а между кондукторами 3...5 см.

При зарядке конденсатора между кондукторами электрофорной машины проскакивает электрическая искра. В этот момент напряженность электрического поля между обкладками конденсатора уменьшается до нуля. Время разрядки конденсатора определяется временем искрового разряда и равно  $10^{-4} \dots 10^{-5}$  с. За это время разность потенциалов между обкладками конденсатора  $U$  уменьшает-

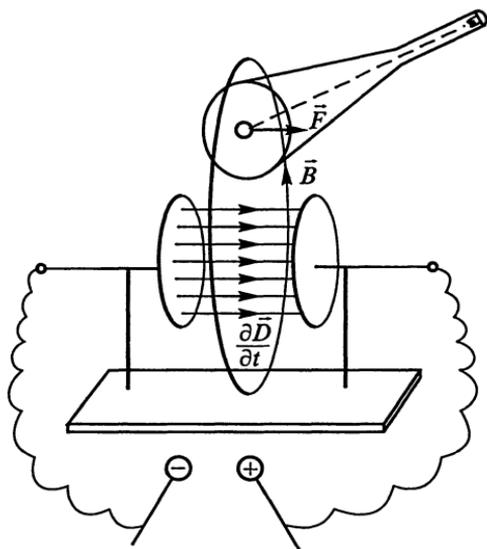


Рис. 10.2

ся от значения пробойного напряжения между шаровыми электродами электрофорной машины, равного  $10^5$  В, до нуля.

Используя закон полного тока и связь между разностью потенциалов  $U$  и напряженностью  $E$  поля конденсатора, можно получить выражение для индукции  $B$  магнитного поля на расстоянии  $R_0$  от оси симметрии конденсатора ( $R_0$  – радиус пластин конденсатора,  $d$  – расстояние между ними):

$$H = \frac{1}{2} j_{\text{см}} R_0,$$

$$H = \frac{1}{2} \epsilon_0 R_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2d} \epsilon_0 R_0 \frac{\partial U}{\partial t}$$

или

$$B = \frac{1}{2d} \mu_0 \epsilon_0 R_0 \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{R_0}{2dc^2} \frac{\partial U}{\partial t},$$

где  $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$  есть квадрат скорости электромагнитных волн в вакууме.

При оценочных расчетах отношение  $\frac{R_0}{2d}$  можно положить равным единице. Тогда выражение для определения  $B$  принимает следующий вид:

$$B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (10.12)$$

Для регистрации кратковременного магнитного поля с индукцией  $B$  используем демонстрационную электронно-лучевую трубку, располагая ее около конденсатора таким образом, чтобы магнитная составляющая силы Лоренца вызвала отклонение электронного луча в горизонтальной плоскости. Магнитное поле будет действовать на электроны в трубке с силой, равной  $\vec{F} = -e [\vec{v}, \vec{B}]$ . Под действием силы Лоренца произойдет изменение составляющей импульса электрона, перпендикулярной направлению скорости его движения в трубке. Изменение импульса каждого электрона равно  $\Delta p = F \Delta t$ .

Угол отклонения электрона под действием магнитного поля определяется отношением  $\Delta p$  к  $p$ :

$$\frac{\Delta p}{p} = F \frac{\Delta t}{p} = e \frac{\Delta U}{c^2 m}, \quad (10.13)$$

здесь  $m$  – масса электрона.

Смещение электронного луча  $\Delta l$  на экране электронно-лучевой трубки определим, умножив угол отклонения электрона на актив-

ную длину  $l$  электронного пучка, находящегося под действием магнитного поля тока смещения:

$$\Delta l = \frac{el\Delta U}{c^2 m}. \quad (10.14)$$

Для демонстрационной ЭЛТ значение  $l$  можно принять равным 10 см. Подставляя в (10.14) значения физических величин, получим для  $\Delta l$  оценочное значение, равное 2 см. В опыте действительно наблюдается отклонение электронного пучка на несколько сантиметров в момент искрового пробоя воздуха между кондукторами электрофорной машины.

Экспериментальная проверка гипотезы Максвелла о существовании явления магнитоэлектрической индукции представляла определенные трудности, так как для получения тока смещения, плотность которого сопоставима с плотностью тока проводимости, имеющего магнитное поле, легко обнаруживаемое экспериментально, требуется сравнительно большая скорость изменения индукции  $\vec{D}$ . Одним из первых, кто экспериментально наблюдал ток смещения, был русский физик А. А. Эйхенвальд. Идея опытов Эйхенвальда была связана с тем, что индукция электрического поля  $\vec{D}$  есть сумма вектора поляризации  $\vec{P}$  и  $\epsilon_0 \vec{E}$ . Следовательно, ток смещения можно получить, изменяя поляризацию диэлектрика со временем. В опытах Эйхенвальда по обнаружению тока смещения диэлектрический диск вращался между обкладками конденсатора, включенными по схеме рисунка 10.3. При этом поляризация диска периодически изменялась и вдоль оси вращения существовал ток поляризации  $\frac{d\vec{P}}{dt}$ . Индукция его магнитного поля измерялась не по показанным на рисунке магнитометром. Во всех опытах было получено полное согласие с теорией Максвелла.

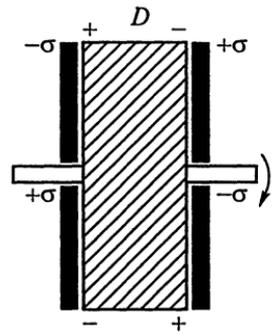


Рис. 10.3



**Эйхенвальд Александр Александрович (1864 – 1944)**, русский физик, профессор Московских высших учебных заведений. Доказал на опыте эквивалентность конвекционного тока току проводимости. Впервые измерил индукцию магнитного поля тока поляризации. Разработал теорию отражения света на границе раздела двух сред.

Меняющийся во времени ток смещения сопровождается меняющимся во времени магнитным полем. Последнее, по закону индукции Фарадея, в свою очередь, связано с меняющимся электрическим полем, т. е. током смещения, и т. д. Развивая эту мысль, Максвелл пришел к заключению о возможности существования переменных полей, неразрывно связанных друг с другом и распространяющихся в пространстве, но не связанных с зарядами, – электромагнитных полей.

Изменяющееся во времени и распространяющееся в пространстве свободное электромагнитное поле – электромагнитные волны – впервые было получено и исследовано в опытах Г. Герца, произведенных в 1887–1888 гг. (см. гл. 13). Позже была экспериментально подтверждена и гипотеза Максвелла об электромагнитной природе света.

## 10.2. Уравнения Максвелла в интегральной форме

Следуя Максвеллу, сведем теперь воедино все основные законы электродинамики. Обобщение опытных данных, описанных в предыдущих главах, и учет тока смещения приводят к нескольким основным уравнениям, справедливым для вакуума, однородной среды и для более общего случая, когда имеются граничащие друг с другом различные среды. Уравнения приложимы как к постоянным, так и к меняющимся во времени полям.

**1. Теорема о потоке электрической индукции.** Поток вектора электрической индукции  $\vec{D}$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$ , охватывающую свободные заряды  $Q_i$ , равен алгебраической сумме последних:

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum Q_i = \int_V \rho dV; \quad (10.15)$$

здесь  $\rho$  – плотность заряда (объемная),  $dV$  – элемент объема внутри поверхности. Напомним, что внешние заряды не влияют на значение потока.

Внутри поверхности могут находиться поляризованные диэлектрики со связанными зарядами. Но так как сумма связанных зарядов всегда равна нулю, то сумма в правой части (10.15) определяется только свободными зарядами.

**2. Обобщенный закон полного тока (закон Ампера – Максвелла).** Полный ток является суммой тока проводимости и тока смещения. Плотность полного тока равна

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (10.16)$$

Обобщенный закон полного тока гласит: циркуляция напряженности магнитного поля по произвольному контуру  $L$  равна полному току (смещения и проводимости), пронизывающему любую поверхность  $S$ , опирающуюся на этот контур:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}. \quad (10.17)$$

Здесь устанавливается связь между электрическим и магнитным полями.

**3. Закон электромагнитной индукции Фарадея.** При изучении электромагнитной индукции (гл. 9) уже подчеркивалось, что индуцированное электрическое поле, существование которого мы обнаруживаем при помощи тех или иных приборов, зависит не от свойств и состояния приборов (например, мы можем воспользоваться одинаковыми катушками, обладающими различным сопротивлением, можем нагреть катушку и т. д.), но только от изменений магнитного потока; указывалось, что наведенное электрическое поле продолжает существовать в отсутствие контрольных приборов. Таким образом, переменное во времени магнитное поле порождает вокруг себя вихревое электрическое поле:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (10.18)$$

где магнитный поток рассчитывается через произвольную поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $L$ , по которому берется циркуляция напряженности электрического поля.

Здесь учитывается вихревое (неэлектростатическое) электрическое поле, неразрывно связанное с меняющимся магнитным полем.

**4. Теорема о магнитном потоке.** Магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность всегда равен нулю:

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \equiv 0. \quad (10.19)$$

Это означает, что поле вектора  $\vec{B}$  является чисто вихревым (или что не существует магнитных зарядов).

### 10.3. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Уравнения (10.15)–(10.19) образуют систему уравнений, носящую имя Максвелла. Записаны они в интегральной форме. Гораздо чаще используется дифференциальная форма записи этих уравнений, которая позволяет описать электромагнитное поле в любой точке (точнее, в любом элементарном объеме) пространства. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме легко получить из

вышеприведенных путем применения известных из векторного анализа теорем Остроградского – Гаусса и Стокса, устанавливающих связь между линейными, поверхностными и объемными интегралами.

Теорема Остроградского – Гаусса связывает объемный интеграл с поверхностным:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S},$$

где скалярная функция (дивергенция, расхождение) в декартовых координатах имеет вид (см. § 1.4):

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Теорема Стокса связывает поверхностный интеграл с линейным:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l},$$

где векторная функция (рот, вихрь) в декартовых координатах выражается следующим образом (см. § 7.6):

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

С учетом этих соотношений уравнения (10.5), (10.17 – 10.19) принимают вид:

$$\begin{aligned} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV; \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \left( \vec{j}_{\text{нп}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}; \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}; \\ \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = 0. \end{aligned}$$

Так как контуры, поверхности и объемы, по которым производится интегрирование, произвольны, то соответствующие подынтегральные функции, очевидно, равны. Учтя это обстоятельство, получаем уравнения Максвелла в дифференциальной форме, описывающей электромагнитное поле в любой точке:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho; \tag{10.20}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (10.21)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (10.22)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (10.23)$$

Полученных уравнений еще недостаточно для решения задач электродинамики. Выписанная выше система уравнений Максвелла состоит из 8 скалярных дифференциальных уравнений, из которых только 7 являются независимыми: уравнение (10.23) есть математическое следствие уравнения (10.22). Действительно, взяв дивергенцию от (10.22), получим:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{E}) \equiv 0 = -\operatorname{div}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right).$$

Но левая часть тождественно равна нулю; кроме того, порядок дифференцирования по времени и координате можно менять. Поэтому находим:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \vec{B}) = 0.$$

Следовательно,  $\operatorname{div} \vec{B}$  не зависит от времени:  $\operatorname{div} \vec{B} = \vec{f}(x, y, z)$ .

В уравнении (10.23) содержится важное физическое утверждение:  $\operatorname{div} \vec{B} \equiv 0$ , т. е. не существует магнитных зарядов.

Число переменных в семи уравнениях – 16 (1 скаляр и 5 векторов). Максвелл ввел три характеристики среды ( $\gamma$ ,  $\epsilon\epsilon_0$ ,  $\mu\mu_0$ ) и уравнения, связывающие эти характеристики с векторами электромагнитного поля:

$$\vec{j}_{\text{пр}} = \gamma \vec{E}; \quad \vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}. \quad (10.24)$$

С учетом соотношений (10.24) полученная система уравнений является полной и позволяет описывать все электромагнитные процессы в вакууме и веществе, если справедливы «материальные» уравнения (10.24).

В уравнениях Максвелла ничего не говорится о силовых взаимодействиях зарядов, токов с электрическими и магнитными полями. Поэтому для описания взаимодействия зарядов, токов и полей уравнения Максвелла следует дополнить выражением для силы Лоренца

$$\vec{F} = e\vec{E} + e[\vec{v}, \vec{B}], \quad (10.25)$$

охватывающим все силовые проявления в электромагнитном поле.

Для решения практических задач полная система уравнений Максвелла недостаточна, если к ней не добавлены граничные ус-

ловия, выполняющиеся на границе раздела двух сред, а также начальные условия, характерные для рассматриваемой задачи.

Для электрического поля эти граничные условия были получены в § 3.4:

$$\begin{aligned} D_{n1} = D_{n2}; \quad D_{t1} : D_{t2} = \mathcal{E}_1 : \mathcal{E}_2; \quad E_{n1} : E_{n2} = \mathcal{E}_2 : \mathcal{E}_1; \\ E_{t1} = E_{t2}. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Для магнитного поля граничные условия были получены в § 8.3:

$$\begin{aligned} B_{n1} = B_{n2}; \quad H_{n1} : H_{n2} = \mu_2 : \mu_1; \quad B_{t1} : B_{t2} = \mu_1 : \mu_2; \\ H_{t1} = H_{t2}. \end{aligned} \quad (10.27)$$

#### 10.4. Некоторые следствия из уравнений Максвелла

Как уже отмечалось в § 10.1, переменные электромагнитные поля могут существовать в свободном пространстве независимо от зарядов и токов проводимости. Это утверждение является одним из следствий уравнений Максвелла.

Запишем уравнения Максвелла для вакуума в отсутствие свободных зарядов и токов проводимости:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Из уравнений (10.28) следует, что в вакууме могут существовать вихревые переменные электромагнитные поля, не связанные с зарядами или токами проводимости. Характер уравнений Максвелла позволяет установить волновую природу электромагнитного поля. Для доказательства этого утверждения найдем ротор от второго уравнения (10.28):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (10.29)$$

Левую часть полученного соотношения можно преобразовать к виду:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E},$$

так как  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ , то  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\Delta \vec{E}$ .

Правая часть уравнения (10.29) преобразуется к виду:

$$-\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \operatorname{rot} \vec{B}}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Таким образом, (10.29) запишется в виде:

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (10.30)$$

Полученное уравнение представляет собой волновое уравнение для вектора  $\vec{E}$  в свободном пространстве, решением которого является уравнение бегущей волны, распространяющейся со скоростью

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (10.31)$$

Подставляя в 10.31 значения  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$ , получим для скорости распространения электромагнитных волн значение, приблизительно равное  $3 \cdot 10^8$  м/с. Это значение совпадает со скоростью света в свободном пространстве, что дало основание Максвеллу сделать вывод об электромагнитной природе света.

Уравнение, аналогичное (10.30), можно получить и для индукции магнитного поля в вакууме.

Другим следствием уравнения Максвелла является утверждение о том, что электромагнитное поле переносит энергию. Для доказательства этого утверждения умножим второе уравнение (10.28) скалярно на  $\vec{H}$ , а третье – на  $\vec{E}$ , и из полученного второго соотношения вычтем первое.

Получим:

$$\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

или

$$\operatorname{div}[\vec{E}, \vec{H}] = -\frac{\partial \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right)}{\partial t}. \quad (10.32)$$

Так как выражение, стоящее в скобках в правой части (10.32), есть объемная плотность энергии электромагнитного поля  $w$ , то (10.32) можно представить в виде:

$$\operatorname{div}[\vec{E}, \vec{H}] = -\frac{\partial w}{\partial t}. \quad (10.33)$$

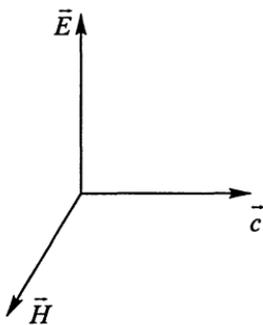


Рис. 10.4

Полученное соотношение выражает закон сохранения энергии электромагнитного поля, подобно тому как (10.2) выражает закон сохранения электрического заряда. При этом вектор  $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$  играет роль вектора плотности потока энергии электромагнитного поля, т. е. энергии, переносимой полем за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. Вектор  $\vec{S}$  называется вектором Умова – Пойнтинга.

Скалярное произведение векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на вектор Умова – Пойнтинга равно нулю. Это означает, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны направлению распространения электромагнитной волны. При этом векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны друг другу, так как из второго и третьего уравнений (10.28) следует, что  $[\vec{E}, \vec{H}] = 0$ , что означает ортогональность перемножаемых векторов.

Так как направление вектора  $\vec{S}$  совпадает с направлением распространения энергии, т. е. с направлением скорости распространения электромагнитных волн в свободном пространстве, то векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{c}$  образуют правую тройку векторов (рис. 10.4).

Еще одним следствием из уравнений Максвелла является утверждение о том, что электромагнитное поле, распространяясь в пространстве со временем, переносит не только энергию, но и импульс. Так же как и энергия, импульс распределен во всем объеме, занимаемом электромагнитным полем. Для описания распределения импульса в пространстве вводится понятие объемной плотности импульса  $\vec{G}$  – физической величины, равной импульсу поля в единице объема. Для объемной плотности энергии и объемной плотности импульса электромагнитного поля выполняется соотношение:



**Умов Николай Алексеевич (1846 – 1915),** русский физик, профессор Одесского и Московского университетов. Создал учение о движении энергии (вектор Умова), решил в общем виде задачу о распределении токов по поверхности тел, осуществил важные эксперименты по изучению распространения поляризованного света в мутных средах.

$$G = \frac{w}{c}, \quad (10.34)$$

являющееся следствием специальной теории относительности.

Если все поля постоянны, так что все производные по времени обращаются в нуль, то уравнения (10.19) – (10.24) распадаются на две группы:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} = \rho; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}; \quad \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}; \\ \operatorname{div} \vec{B} \equiv 0; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пр}}; \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \end{aligned} \quad (10.35)$$

Первая группа описывает явления электростатики, причем электростатическое поле, связанное с зарядами, оказывается безвихревым. Вторая группа описывает магнитное поле постоянных токов, которое является вихревым; второе уравнение этой группы соответствует закону Био – Савара. Магнитное поле не имеет безвихревой составляющей.

Если дополнительно положить  $\rho = 0$  и  $\vec{j} = 0$ , то окажется:

$$\vec{D} \equiv 0; \quad \vec{E} \equiv 0; \quad \vec{H} \equiv 0; \quad \vec{B} \equiv 0,$$

т. е. постоянные поля неразрывно связаны с зарядами или токами и без них не существуют.

Таким образом, анализ следствий из уравнений Максвелла и их экспериментальное подтверждение позволяют рассматривать электромагнитное поле как еще один вид материи наряду с веществом.

Динамическими переменными электромагнитного поля являются векторные величины  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , а уравнениями, описывающими физические процессы в электромагнитных полях, служат уравнения Максвелла.

## 10.5. Относительность магнитного и электрического полей

Важное свойство уравнений Максвелла состоит в том, что они сохраняют свой вид при преобразованиях Лоренца (см. «Механику»), т. е. удовлетворяют постулату Эйнштейна, согласно которому законы физики должны иметь одинаковую форму в различных инерциальных координатных системах.

Однако сохранение вида уравнений не означает еще сохранения составляющих электромагнитного поля ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ). Следовательно, в соответствии с закономерностями СТО могут измениться и силы, испытываемые зарядами (уравнение 10.25).

Рассмотрим некоторые стороны этого сложного вопроса, более глубоко изучаемого в курсе теоретической физики.

Начнем с нескольких примеров.

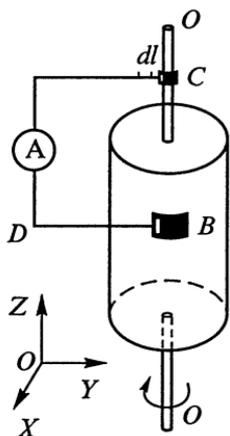


Рис. 10.5

1. Пусть имеется заряженный шар, неподвижный относительно стен лаборатории. В системе, связанной с лабораторией, наблюдается только электрическое поле шара. Если шар начнет двигаться равномерно и прямолинейно, то направленное движение заряженного тела приведет к упорядоченному движению электрических зарядов – возникнет ток и связанное с ним магнитное поле. Неподвижный магнитометр действительно регистрирует его появление (опыты Роуланда). Но в ИСО, связанной с шаром, магнитное поле не обнаруживается, а имеется только электрическое. Второй магнитометр, неподвижный относительно шара, магнитного поля не регистрирует.

2. Постоянный магнит и неподвижный относительно него электрический заряд, находящиеся в некоторой ИСО, не взаимодействуют.

Если перейти к другой ИСО, то взаимодействие также не обнаружится, так как нет относительного движения магнита и заряда.

3. В ряде опытов Фарадея по получению индукционного тока (т. е. индуцированного электрического поля), рассмотренных в главе 9, также необходимо было относительное движение магнита и проводника.

Кроме описанных опытов, Фарадей осуществил еще такой: цилиндрический магнит с помощью скользящих контактов  $B$ ,  $C$  был включен в проводящий контур  $BDC$  (рис. 10.5), способный вращаться вокруг оси  $OO'$ . При этом магнитное поле вблизи участка  $DB$  весьма мало по сравнению с полем вблизи участка  $dl$ . При вращении контура в нем возникал ток. Затем Фарадей приводил во вращение магнит, контур оставался неподвижным (относительно лаборатории). В этом случае возникал ток противоположного направления, если магнит вращался в том же направлении, что и контур в первой части опыта.

Этот результат может показаться странным, так как магнитное поле вблизи контура в силу симметрии магнита не менялось. Но магнитное поле неоднородно. Поэтому сила Лоренца, действующая на заряды вблизи участка  $dl$ , превосходит силу, действующую на заряды вблизи участка  $DB$ , что и обеспечивает ток в контуре. Для возникновения электромагнитной индукции важно относительное движение заряда и магнита.

4. В СТО доказывается, что формулы преобразования величин, характеризующих поля, при переходе от неподвижной (нештрихованной) системы отсчета к другой ИСО, движущейся относительно первой со скоростью  $\vec{v}_x$ , таковы:

$$\begin{aligned}
 E_x &= E'_x; & E_y\sqrt{1-\beta^2} &= E'_y + v_x B'_z; & E_z\sqrt{1-\beta^2} &= E'_z - v_x B'_y; \\
 B_x &= B'_x; & B_y\sqrt{1-\beta^2} &= B'_y - \frac{v_x}{c^2} E'_z; & B_z\sqrt{1-\beta^2} &= B'_z + \frac{v_x}{c^2} E'_y,
 \end{aligned}
 \tag{10.36}$$

где  $\beta = \frac{v}{c}$ .

Рассмотрим малый участок  $dl$  контура (см. рис. 10.5). В лабораторной (неподвижной) системе координат вектор индукции магнитного поля вертикален. Электрическое поле отсутствует. Таким образом,  $E = 0$ ;  $B = B_z$ . Пусть теперь магнит приходит во вращение вокруг вертикальной оси. Малое перемещение его части, наиболее близкой к участку  $dl$  и, следовательно, влияющей сильнее всего, можно считать происходящим вдоль оси  $X$ . Перейдем в движущуюся вместе с магнитом систему координат; применив уравнения (10.36), получим:

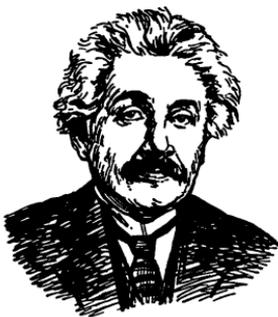
$$\begin{aligned}
 E'_x &= 0; & 0 &= E'_z - v_x B'_y; & 0 &= E'_y + v_x B'_z; \\
 B'_x &= 0; & 0 &= B'_y - \frac{v_x}{c^2} E'_z; & B_z\sqrt{1-\beta^2} &= B'_z + \frac{v_x}{c^2} E'_y.
 \end{aligned}$$

Из двух средних уравнений получаем:

$$B'_y = \frac{1}{v_x} E'_z = \frac{v_x}{c^2} E'_z.$$

Это означает, что

$$B'_y = E'_z = 0, \text{ так как } v_x \neq c.$$




---

**Эйнштейн Альберт (1879–1955)**, один из основателей современной физики. Создал новое учение о пространстве и времени – релятивистскую механику (специальную теорию относительности), содержащую механику Галилея – Ньютона как предельный случай (для малых скоростей и энергий). Установил связь между массой и энергией – основу физики ядерных превращений и атомной энергетики. Создал новую теорию тяготения (общую теорию относительности). Ввел представление о квантовой природе света (фотонах), предсказал возможность индуцированного излучения, ныне используемого в лазерах. В молекулярной физике создал теорию броуновского движения, разработал квантовую теорию твердых тел, новую статистику частиц, установил квантовый закон фотохимии.

Из двух оставшихся уравнений находим:

$$E'_y = -\frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} B_z; \quad B'_z = \frac{B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Появление поля напряженностью  $\vec{E}'_y$  и обеспечивает ток в участке  $dl$ .

5. СТО позволяет в некоторых случаях дать наглядное представление о возникновении магнитных сил при относительном движении зарядов.

Пусть имеется тонкий бесконечно длинный провод, в котором находятся заряды обоих знаков, распределенные с одинаковой объемной плотностью, так что в целом провод не заряжен. Никакого поля (ни электрического, ни магнитного) в той системе отсчета, где он покоится, нет. Линейная плотность заряда равна при этом  $\pm\lambda_0$  (рис. 10.6, а). На внешний заряд  $Q$  не действует никакая сила.

Допустим, что заряды начали двигаться в противоположные стороны со скоростями  $\vec{v}_+$  и  $\vec{v}_-$ , модули которых равны (рис. 10.6, б). Каждая из цепочек разноименных зарядов испытает лоренцево сокращение, линейная плотность зарядов возрастет. Но так как это явление одинаково для обеих заряженных цепочек, то никакого действия на внешний положительный неподвижный заряд  $Q$ , помещенный на расстоянии  $R$  от провода, ток, текущий по проводу, не окажет.

Если же внешний заряд  $Q$  придет в движение параллельно проводу с током со скоростью  $\vec{v}$ , то должна возникнуть магнитная сила, направленная к проводу, т. е. антипараллельная  $\vec{R}$ . Объясним это.

Перейдем к системе отсчета, связанной с зарядом  $Q$ . В этой системе и сам заряд, и цепочка положительных зарядов находятся в

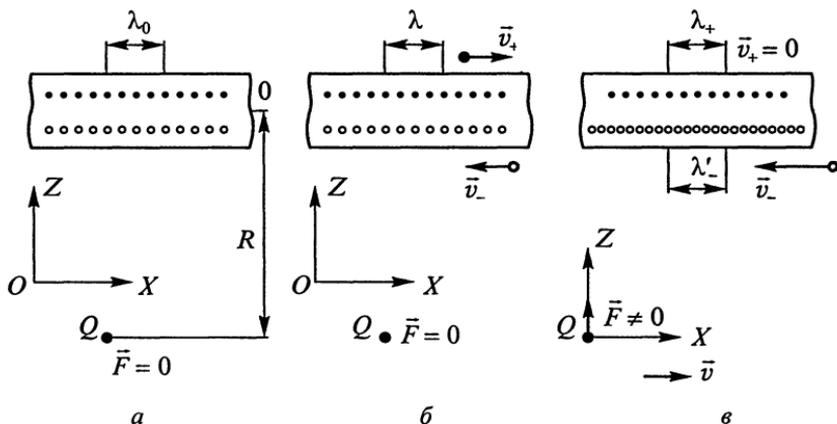


Рис. 10.6

покое, поэтому  $\lambda_+ = \lambda_0$ . Но цепочка отрицательных зарядов движется (рис. 10.6, в) со скоростью

$$v_- = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \approx -2v,$$

испытывая продольное сокращение, вследствие чего линейная плотность достигает значения, равного

$$\lambda'_- = \frac{-\lambda_0}{\sqrt{1 - 4\beta^2}}.$$

Таким образом, в этой системе отсчета провод оказывается отрицательно заряженным. Избыточная линейная плотность равна

$$\lambda = \lambda'_- - (-\lambda_0) = -\frac{-\lambda_0}{\sqrt{1 - 4\beta^2}} + \lambda_0 \approx -\lambda_0 \cdot 2\beta^2.$$

Следовательно, возникает поперечная (вдоль  $R$ ) электрическая сила, равная

$$\vec{F} = Q\vec{E},$$

где  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля, связанного с заряженной проволокой. Модуль этой силы равен

$$F = Q \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} = Q \frac{\lambda_0 \beta^2}{\pi\epsilon_0 R} = Qv \frac{1}{\epsilon_0 c^2} 2\lambda_0 v \frac{1}{2\pi R} = Qv\mu_0 \frac{I}{2\pi R} \quad (10.37)$$

(так как  $2\lambda_0 v = I$ , где  $I$  – ток, текущий в проводнике). Два последних сомножителя определяют индукцию магнитного поля, созданного этим током, а выражение (10.37) оказывается совпадающим с выражением для магнитной силы Лоренца:

$$F = QvB.$$

Итак, за счет лоренцева сокращения появляется заряд на проводнике с током и электрическая поперечная сила, по модулю равная магнитной.

**6.** Магнитная составляющая электромагнитного поля существует для наблюдателя, движущегося относительно зарядов. Поэтому наблюдатель, имеющий дело с двумя параллельными проводами, обтекаемыми токами, созданными электронами, движущимися относительно наблюдателя с равными скоростями, обнаружит магнитное взаимодействие, хотя друг относительно друга электроны неподвижны. Если связать систему отсчета с электроном, то движущимися относительно этой системы окажутся ионы кристаллической решетки, так что магнитное взаимодействие сохранится и для такого наблюдателя.

7. Уединенный заряд, находящийся в покое в неподвижной ИСО, создает в ней только электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$ .

Если перейти в ИСО, движущуюся со скоростью  $\vec{v}_x$  относительно первой, то из уравнений (10.36) легко получить следующие значения возникающих в этой системе напряженностей и индукций полей (штрихованные величины):

$$E'_x = E_x; \quad E'_y = \frac{E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad E'_z = \frac{E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

$$B'_x = 0; \quad B'_y = \frac{v_x}{c^2} \frac{E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad B'_z = -\frac{v_x}{c^2} \frac{E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

При очень малых скоростях по-прежнему остается лишь электрическое поле (рис. 10.7, а). Допустим, что магнитное взаимодействие проявляется при значениях  $\beta > 0,1$ . Но при этом остается и электрическое взаимодействие: напряженность электрического поля в направлении движения не изменяется, а в остальных направлениях растет, причем тем сильнее, чем больше угол  $\alpha$  (рис. 10.7, б, сделан для  $\beta = 0,8$ ). Пространственное распределение электрического поля можно получить, вращая рисунок вокруг оси  $X$ . Кроме того, появляется и магнитное поле.

8. Если связать ИСО с равномерно движущимся зарядом, то, очевидно, в ней будет существовать только электростатическое поле. Следовательно, никакого излучения энергии в этой системе не происходит (так как в электростатическом поле энергия постоянна во времени). Но все ИСО равноправны. Поэтому равномерно движущийся заряд не создает излучения. Как выяснится в главе 12, для излучения при нерелятивистских скоростях необходимо, чтобы заряд двигался ускоренно.

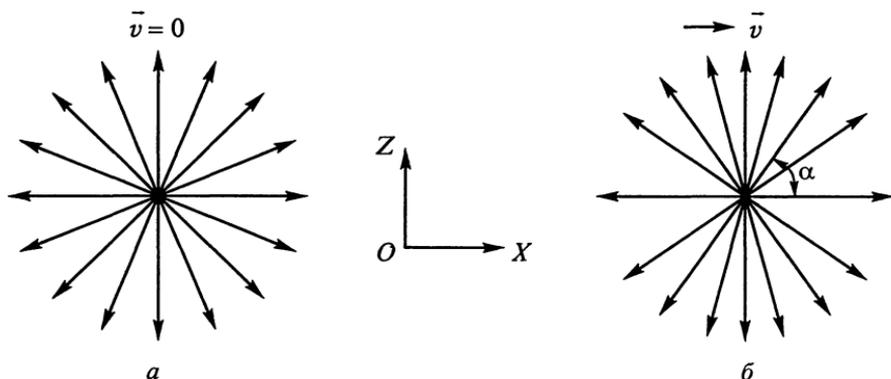


Рис. 10.7

Меня скорость системы отсчета, мы будем получать разные значения напряженности магнитного и электрического полей; иногда даже можно добиться исчезновения одного из полей. Однако невозможно найти такую систему отсчета, где одновременно исчезли бы оба поля, – реальное электромагнитное поле, конечно, существует независимо от выбора системы отсчета.

## 10.6. Значение уравнений Максвелла и границы их применимости

Уравнения Максвелла не вытекают из каких-либо более общих теоретических положений, а являются обобщением опыта. В этом смысле они аналогичны уравнениям Ньютона в механике. Более того, в электродинамике, как и в механике, существует неоднозначность в выборе основных законов, принимаемых в качестве аксиом (постулатов). Как правило, при построении теории за основные принимаются уравнения (10.15)–(10.19), а все остальные законы электродинамики, включая и закон сохранения заряда, получаются как их следствия. В то же время можно пользоваться другой аксиоматикой: принимая за основу уравнения (10.17), (10.18) и закон сохранения заряда (10.9), уже с их помощью получать другие соотношения. Эти подходы полностью равноценны, т. е. приводят к эквивалентным системам уравнений, множества решений которых совпадают.

Уравнения Максвелла лежат в основе всей электротехники и радиотехники с ее многочисленными разветвлениями (телевидение, радиолокация и пр.). В известной степени они являются фундаментальными уравнениями классической оптики; так, законы распространения света (переменного электромагнитного поля) в вакууме и прозрачных средах и некоторые законы поведения света в поглощающих средах могут быть получены из уравнений Максвелла. Наряду с уравнениями Ньютона и законом всемирного тяготения они являются фундаментальными уравнениями классической физики. С другими важнейшими выводами из этих замечательных уравнений мы познакомимся в следующих главах.

Подчеркнем, что уравнения Максвелла не могут быть сведены к законам механики: многочисленные попытки такого рода не дали результатов. Отметим также, что эти уравнения сохраняют свой вид при преобразованиях Лоренца (но при преобразованиях Галилея изменяются).

Уравнения Максвелла связывают друг с другом пространственные и временные производные характеристик электрического и магнитного полей. Это означает, что меняющийся во времени электромагнитный процесс, возникший в некоторый момент в данном

месте, вызовет изменения в другом месте с некоторым запаздыванием, т. е. скорость передачи электромагнитных взаимодействий и распространения полей конечна.

Эта скорость огромна: в вакууме она равна скорости света (свет есть электромагнитный процесс)  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. В веществе она несколько меньше, но все же весьма велика. Это позволяет в ряде случаев пренебречь запаздыванием. Так, рассматривая зарядку конденсатора, мы, в сущности, не имели права считать, что сила тока по всей цепи одинакова: она устанавливается в разных участках цепи с некоторым запаздыванием. Но так как линейные размеры цепи малы по сравнению с расстоянием, на которое передается электромагнитное взаимодействие за время зарядки, то запаздыванием здесь можно пренебречь и считать, что сила тока во всех точках цепи в данный момент одинакова (как и в цепи постоянного тока). Цепи, позволяющие не учитывать запаздывания, называются *квазистационарными*.

Электрические цепи тока технической частоты (50 Гц) в пределах города и даже области квазистационарны. Но, например, линия электропередачи Сибирь – Центр протяжением в тысячи километров уже проявляет некоторую нестационарность. Нестационарность электрической цепи впервые проявилась при создании телеграфной связи между Европой и Америкой (при помощи подводного кабеля, проложенного во второй трети XIX в.).

Исследовать квазистационарные цепи легче, чем нестационарные, волновые; в последних размеры цепи соизмеримы с расстоянием, на которое взаимодействие распространяется за период изменения электромагнитного процесса, и запаздывание играет существенную роль; поэтому в них нельзя не считаться, например, с различием силы тока в разных сечениях цепи в данный момент времени. Волновые свойства нестационарных цепей отчетливо проявляются в некоторых радиочепях (антенны, волноводы), частично рассматриваемых в главе 13 и более подробно изучаемых в курсе радиотехники.

Как и всякая физическая теория, теория Максвелла имеет границы приложения. Она применима:

а) для расстояний  $R$  между зарядами, превышающих внутриатомные расстояния. Грубо говоря, должно быть  $R > 10^{-10}$  м;

б) для частот изменения поля, не превышающих  $10^{13} \dots 10^{14}$  Гц. Это ограничение связано с проявлением при высоких частотах квантовых свойств излучения и вещества. Но уже при значительно меньших частотах (около  $10^{10}$  Гц) из-за инертности молекулярных диполей и из-за существования собственных колебаний этих диполей явления поляризации усложняются, и для правильного их описания приходится считать электрическую восприимчивость зависящей от частоты электромагнитного поля, что значительно услож-

няет математическое описание электродинамических явлений в веществе. Замечательно, что это утверждение принадлежит самому Максвеллу;

в) для полей, в которых заряженные частицы приобретают (за время между столкновениями с другими заряженными или нейтральными частицами) лишь энергию, достаточно малую по сравнению со средней энергией беспорядочного движения частиц среды. Для большинства веществ это отвечает напряженности полей  $E < 10^5$  В/м (не все среды могут выдержать такие поля, не разрушаясь).

При несоблюдении этого условия возникают нелинейные явления: свойства среды и их характеристики ( $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ ) начинают зависеть от напряженности поля, уравнения становятся нелинейными.

## Глава 11

### КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

#### 11.1. Условия квазистационарности. Переменный ток.

Действующие значения напряжения и силы тока.

##### Резистор в цепи переменного тока

В § 10.6 было введено понятие квазистационарных цепей, т. е. цепей, в которых время распространения электромагнитного процесса по цепи  $t$  много меньше времени его изменения  $T$ . Если процесс периодичен (период  $T$ ), то условие квазистационарности принимает форму

$$t \ll T. \quad (11.1)$$

Умножая обе части неравенства на скорость распространения процесса, получаем слева размер системы  $L$ , а справа – длину электромагнитной волны  $\lambda$ ; условие квазистационарности принимает вид:

$$L \ll \lambda. \quad (11.2)$$

Квазистационарными являются большинство радиотехнических (за исключением сверхвысокочастотных) устройств, измерительных, вычислительных и других электрических схем. Особое значение для повседневной практики имеют цепи переменного тока. По определению, *переменным* называется ток, гармонически меняющийся с течением времени:

$$i = I_m \cos(\omega t - \varphi_0). \quad (11.3)$$

Здесь  $i$  – мгновенное значение силы тока;  $I_m$  – ее амплитудное значение;  $\varphi_0$  – начальная фаза;  $\omega$  – угловая частота, связанная с частотой  $f$  и периодом  $T$  известными соотношениями:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

В промышленных энергетических системах обычно применяется ток частотой  $f = 50$  Гц.

Для получения переменного тока, конечно, необходимы источники гармонической электродвижущей силы. Как указывалось в главе 9 она может создаваться в электрической машине (генераторе), где катушка вращается в сильном магнитном поле; в действительности по ряду технических соображений удобнее делать катушки, где наводится ЭДС индукции, неподвижными, а около них вращать электромагнит.

Если катушку, имеющую  $N$  витков площадью  $S$ , вращать с угловой частотой  $\omega$  в магнитном поле, созданном двумя стержневыми электромагнитами, расположенными на одной прямой, то в катушке наведется ЭДС индукции ( $\vec{B}$  – индукция магнитного поля)

$$\mathcal{E} = \omega BSN \cos \omega t.$$

Для получения значительных ЭДС выгодно брать многovitковые катушки и создавать индукцию не одной парой электромагнитов, а  $p$  парами, симметрично расположенными в пространстве. В этом случае частота изменения ЭДС возрастет в  $p$  раз, что позволит соответственно уменьшить число оборотов катушек в единицу времени; эта идея осуществляется в многополюсных генераторах.

Квазистационарный ток в любой момент времени, подобно постоянному току, имеет одинаковые значения в любом сечении неразветвленной цепи. Это обстоятельство позволяет ввести для описания процессов в квазистационарных цепях понятие мгновенной разности потенциалов между определенными точками цепи переменного тока и говорить о справедливости закона Ома и правил Кирхгофа для мгновенных значений силы тока и напряжений в квазистационарной цепи.

В частности, на участке цепи с резистором, имеющим сопротивление  $R$ , мгновенные значения тока  $i$  и напряжения  $u$  связаны соотношением:

$$u = iR, \tag{11.4}$$

подобным выражению  $U = IR$  для напряжения  $U$  на участке цепи с сопротивлением  $R$  при силе постоянного тока  $I$ .

Выполнение закона Ома для участка цепи переменного тока с резистором приводит к выполнению закона Джоуля–Ленца:

$$p = i^2 R, \tag{11.5}$$

где  $p$  и  $i$  – соответственно мгновенные значения мощности и силы тока.

Опять мы видим, что выражение для мгновенной мощности переменного тока подобно выражению для мощности постоянного тока  $P = I^2 R$ . Разница между мощностью постоянного и переменного токов состоит в том, что мощность постоянного тока не ме-

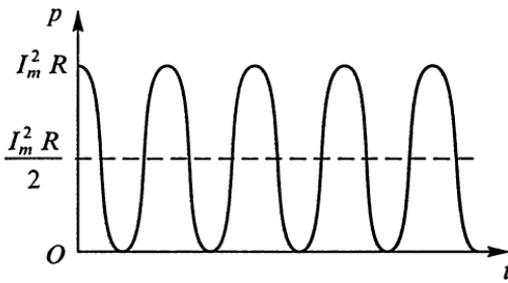


Рис. 11.1

ни, изменяющуюся с удвоенной частотой  $\omega$  около среднего за период значения, равного  $\frac{I_m^2 R}{2}$ , так как показано на рисунке 11.1.

Среднее значение мощности переменного тока за период его изменения численно равно количеству теплоты, выделяемой в резисторе за период, что связано с инерционными свойствами резистора. Эта особенность резисторов позволяет ввести понятие действующего значения переменного тока или напряжения.

Действующим значением переменного тока  $I_d$  называется такое значение постоянного тока, при котором за одинаковое время в цепях постоянного и переменного токов выделяется одинаковое количество теплоты, т. е.:

$$I_d^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt, \quad (11.6)$$

или

$$I_d = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (11.7)$$

Если ток есть периодическая функция времени, то из (11.7) следует, что

$$I_d = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (11.8)$$

Аналогичным образом определяется и действующее значение переменного напряжения:

$$U_d = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (11.9)$$

Большинство электроизмерительных приборов переменного тока градуируются в действующих значениях соответствующих величин. В дальнейшем мы будем обозначать действующие значения переменных величин заглавными прописными буквами, опуская индекс «д».

няется со временем, а мощность переменного тока есть функция времени. Если ток периодически изменяется со временем по закону  $i = I_m \cos \omega t$ , то мгновенная мощность  $p = I_m^2 R \cos^2 \omega t = \frac{I_m^2 R}{2} (\cos 2\omega t + 1)$ , т. е. представляет собой периодическую функцию времени,

Различие между  $U$  и  $U_m$  поясняется простым опытом: небольшую неоновую (или другую газосветную) лампу подключают к потенциометру; параллельно ей подключают вольтметр электромагнитной системы (см. § 7.8). Сначала потенциометр питают постоянным током и регистрируют напряжение  $U_{\text{пос}}$  в момент зажигания лампы. Затем тот же опыт производят на переменном токе и также отмечают напряжение зажигания  $U = \frac{U_{\text{пос}}}{\sqrt{2}}$ . Это объясняется тем, что лампа имеет определенное напряжение зажигания  $U_3$ ; при постоянном токе  $U_{\text{пос}} = U_3$ . При переменном токе зажигание происходит, когда  $U_m = \sqrt{2}U = U_3$ .

Благодаря поверхностному эффекту (см. § 9.6) сопротивление провода переменному току может оказаться больше, чем постоянному. Поэтому следует различать *омическое сопротивление*

$$R_0 = \rho \frac{l}{S},$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление,  $l$  – длина,  $S$  – площадь поперечного сечения провода, и его *активное сопротивление*  $R \geq R_0$ . В цепях технической частоты (50 Гц) различие между  $R$  и  $R_0$  очень мало.

Если в цепи поглощается мощность  $P$  (при перемагничивании магнитопроводов или в несовершенном диэлектрике конденсатора), то для характеристики этой мощности также пользуются понятием активного сопротивления (сопротивление потерь), определяемого уравнением

$$R_{\text{п}} = \frac{P}{I^2}.$$

Оно прибавляется к активному сопротивлению, о котором говорилось выше.

## 11.2. Катушка индуктивности в цепи переменного тока

Если в цепи имеется катушка с индуктивностью  $L$  и некоторым сопротивлением  $R$ , то в цепи постоянного тока индуктивность сказывается только при замыкании и размыкании цепи, а установившийся ток определяется лишь сопротивлением  $R$ . В цепи переменного тока изменения силы тока происходят непрерывно и влияние индуктивности проявляется все время. Мы изучим здесь (как и дальше в этой главе) лишь установившийся процесс. Итак, пусть в цепи (рис. 11.2) сила тока изменяется по закону:

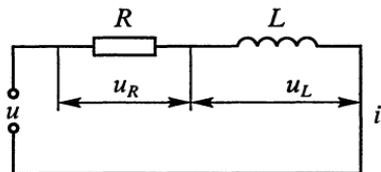


Рис. 11.2

$$i = I_m \cos \omega t.$$

Найдем необходимую для поддержания тока разность потенциалов  $u$ . По правилу Кирхгофа приложенное напряжение должно обеспечить ток в резисторе:  $u_R = iR$  и преодолеть ЭДС самоиндукции:  $u_L = -e = L \frac{di}{dt}$ . Поэтому полное напряжение на концах цепи будет равно

$$\begin{aligned} u &= iR + L \frac{di}{dt} = I_m R \cos \omega t + I_m \omega L \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= U_m \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (11.10)$$

где амплитуда  $U_m$  и начальная фаза  $\varphi$  еще не известны. Для их нахождения удобно воспользоваться методом векторных диаграмм (см. «Механику», § 1.8).

В рассматриваемом случае следует прежде всего построить в произвольном направлении вектор, модуль которого равен общей для всей цепи силе тока  $I$ ; так как действующие значения пропорциональны амплитудным, то безразлично, какими из них пользоваться. Падение напряжения на резисторе сопротивлением  $R$  ( $U_R = IR$ ) изобразится вектором, параллельным вектору  $I$  (рис. 11.3).

Так как напряжение на катушке индуктивности опережает по фазе на  $\frac{\pi}{2}$  напряжение на резисторе, то вектор, соответствующий напряжению на индуктивности, равному

$$U_L = \omega LI = IX_L, \quad (11.11)$$

должен быть повернут относительно вектора напряжения на резисторе  $\frac{\pi}{2}$  против часовой стрелки.

Построив сумму этих векторов, находим вектор, соответствующий полному напряжению:

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = I \sqrt{R^2 + X_L^2} = IZ, \quad (11.12)$$

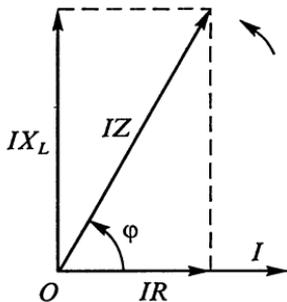


Рис. 11.3

и фазовый сдвиг между  $u$  и  $i$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}. \quad (11.13)$$

Таким образом, полное сопротивление равно

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}. \quad (11.14)$$

Однако выделяющаяся теплота по-прежнему определяется только сопротивлением  $R$ .

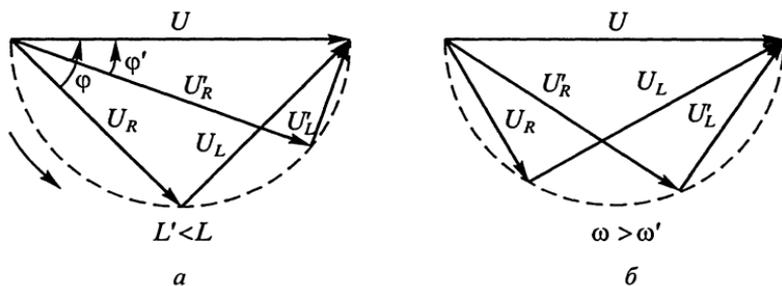


Рис. 11.4

На лекционных демонстрациях схема рисунка 11.2 (а также рисунков 11.5, 11.7, 11.11) дополняется вольтметрами и амперметрами. Для демонстрации фазовых сдвигов лучше всего использовать двухлучевой осциллограф. Если его нет, то можно изучаемые напряжения подать на X- и Y-входы обычного осциллографа, отключив напряжение временной развертки. При одновременной подаче обоих напряжений на экране осциллографа появляется кривая Лиссажу, позволяющая судить о фазовом сдвиге. Напомним, что при  $\varphi = 0$  получается прямая, при  $\varphi = 90^\circ$  и равных амплитудах колебаний напряжения на обоих парах отклоняющих пластин осциллографа – окружность, при остальных значениях  $\varphi$  – эллипсы.

На векторе, определяющем результирующее напряжение в цепи с резистором и катушкой, имеющих сопротивление  $R$  и индуктивность  $L$  определенных значений, можно построить полуокружность (рис. 11.4). Вершина, построенного на векторной диаграмме из векторов напряжений треугольника, будет всегда лежать на этой полуокружности. При заданной частоте и изменении  $L$  треугольник будет изменяться, как показано на рисунке 11.4, а. При заданных  $R$ ,  $L$  и меняющейся частоте треугольник меняется, как показано на рисунке 11.4, б.

Таким образом, индуктивность сказывается тем сильнее, чем больше частота.

Средняя мощность, как и в цепи, лишенной индуктивности, поглощается только активным сопротивлением и составляет

$$P_{\text{ср}} = I^2 R = U \frac{R}{Z} = IU \cos \varphi. \quad (11.15)$$

Но, кроме того, в катушке накапливается магнитная энергия; ее мгновенное значение, равное

$$w = \frac{1}{2} Li^2,$$

периодически меняется от нуля до наибольшего значения, равного

$$W = \frac{1}{2} L I_m^2.$$

Эта энергия то потребляется от источника, то возвращается ему. Действительно, мгновенная мощность может быть представлена так:

$$p = I_m U_m \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) = I_m U_m \cos \varphi \cos^2 \omega t - \\ - \frac{1}{2} I_m U_m \sin \varphi \sin 2\omega t = I_m^2 R \cos^2 \omega t - \frac{1}{2} I_m^2 \omega L \sin 2\omega t.$$

Первое слагаемое все время положительно; оно определяет мощность, поглощаемую по закону Джоуля–Ленца; второе же, определяющее магнитную энергию в цепи, периодически меняет знак с частотой, вдвое превышающей частоту питающего напряжения («+» соответствует поступлению энергии в цепь, «-» – возврату ее источнику); среднее значение этого слагаемого за период равно нулю.

Величину

$$X_L = \omega L, \quad (11.16)$$

характеризующую влияние индуктивности на силу тока в цепи и имеющую размерность сопротивления, называют индуктивным сопротивлением.

Так как на рисунке 11.3 длины всех векторов пропорциональны силе тока, то, разделив их на ее значение, можно получить «треугольник сопротивлений», – этим термином часто пользуются в технике.

Отметим, что идеальная катушка индуктивности, лишенная сопротивления  $R$ , создала бы в цепи между колебаниями силы тока и напряжения фазовый сдвиг  $90^\circ$  и совершенно не поглощала бы мощности, из-за этого индуктивное сопротивление называют реактивным сопротивлением; этим термином подчеркивается, что магнитная энергия не поглощается.

Цепь переменного тока может быть изучена и при помощи метода комплексных амплитуд.

Будем рассматривать ток и напряжение как действительные части соответствующих показательных функций:

$$i = \operatorname{Re} [ \dot{I} \exp(j\omega t) ] = I_m \cos \omega t; \\ u = \operatorname{Re} [ \dot{U} \exp(j\omega t) ] = U_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица.

Здесь комплексные амплитуды равны соответственно:

$$\dot{I} = I_m; \quad \dot{U} = U_m \exp(j\varphi).$$

Так как

$$\frac{di}{dt} = j\omega LI_m \exp(j\omega t),$$

то уравнение (11.10) примет вид:

$$I_m R + jI_m \omega L = I_m R + jI_m X_L = U_m \exp(j\varphi), \quad (11.17)$$

где

$$R + jX_L = Z \exp(j\varphi) = \sqrt{R^2 + X_L^2} \exp(j\varphi); \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L}{R}.$$

Из (11.17) видно, что искомые величины  $U_m$  и  $\varphi$  равны соответственно:

$$U_m = I_m Z = I_m \sqrt{R^2 + X_L^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R},$$

что, конечно, совпадает с выражениями (11.12) и (11.13).

Заметим, что среднюю мощность

$$P_{\text{cp}} = I^2 R = IU \cos \varphi$$

можно получить, вычислив произведение

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{U}^* \dot{i}], \quad (11.18)$$

где  $\dot{U}^*$  – величина, комплексно сопряженная  $\dot{U}$ . Этим способом удобно пользоваться, если параметры цепи ( $R$ ,  $L$ ) не даны.

### 11.3. Конденсатор в цепи переменного тока

Если цепь содержит последовательно включенные резистор и конденсатор (рис. 11.5), то постоянный ток в ней течь не может. Но при переменной разности потенциалов конденсатор периодически перезаряжается, ток проводимости в резисторе дополняется током смещения в конденсаторе; возникает переменный ток, определяемый выражением:

$$i = I_m \cos \omega t.$$

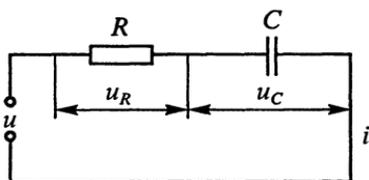


Рис. 11.5

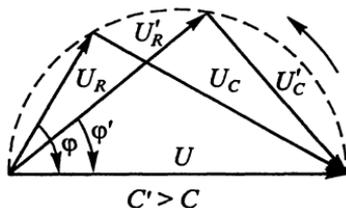


Рис. 11.6

При этом приложенная разность потенциалов

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

должна обеспечить поддержание тока в резисторе

$$u_R = iR$$

и разности потенциалов на конденсаторе (емкостью  $C$ )

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt,$$

где  $q$  – мгновенный заряд конденсатора.

Поэтому должно удовлетворяться уравнение

$$iR + \frac{1}{C} \int i dt = u. \quad (11.19)$$

Применяя комплексный метод и помня, что

$$\int \exp(j\omega t) dt = \frac{1}{j\omega} \exp(j\omega t) = -\frac{j}{\omega} \exp(j\omega t),$$

получаем из последнего уравнения:

$$iR - j \frac{1}{\omega R} i = \dot{U},$$

откуда находим окончательно полное сопротивление цепи  $Z$ :

$$\begin{aligned} \dot{U} &= iZ \exp(j\varphi); \\ Z &= \sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X_C^2}, \end{aligned} \quad (11.20)$$

а также

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_C}{R} = -\frac{1}{\omega RC}. \quad (11.21)$$

Знак «-» указывает на запаздывание напряжения на конденсаторе относительно силы тока. Таким образом, и эта цепь обладает как активным сопротивлением  $R$ , так и реактивным:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (11.22)$$

Поглощение энергии по-прежнему происходит только в резисторе. Средняя (за период) мощность равна

$$P_{\text{cp}} = I^2 R = UI \frac{R}{Z} = UI \cos \varphi.$$

Конденсатор то накапливает энергию, то отдает ее обратно в цепь. Векторная диаграмма для этого случая показана на рисунке 11.6. Если бы сопротивление  $R$  отсутствовало, то фазовый сдвиг  $\varphi$  обратился бы в  $-90^\circ$ ; поглощения энергии при этом не происходило бы.

#### 11.4. Последовательный контур в цепи переменного тока

В общем случае (рис. 11.7) цепь содержит последовательно соединенные резистор, катушку и конденсатор. Тогда при  $i = I_m \cos \omega t$  правило Кирхгофа записывается так:

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = u = U_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (11.23)$$

Для решения этого уравнения подставим в него силу тока, выраженную через заряд конденсатора:

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = u, \quad (11.24)$$

совпадающее по форме с уравнением вынужденных колебаний (см. «Механику», уравнение 10.27). Следовательно, уравнение (11.24) описывает вынужденные электромагнитные колебания. Можно было бы по аналогии с механикой записать решение уравнения (11.24). Но мы получим это решение, используя комплексный метод. Повторяя рассуждения § 11.2, получим:

$$\dot{i}R + j\omega L \dot{i} - j \frac{1}{\omega C} \dot{i} = \dot{U} = U \exp(j\omega t).$$

Отсюда, используя результаты предыдущих параграфов, находим:

$$U_m = I_m Z = I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = I_m \sqrt{R^2 + X^2};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}; \quad X = \omega L - \frac{1}{\omega C}; \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Векторная диаграмма для этой цепи представлена на рисунке 11.8. Из нее легко получить такие же результаты.

Полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

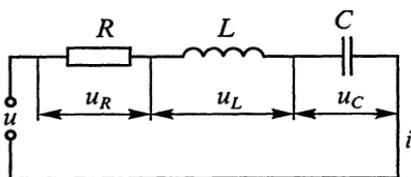


Рис. 11.7

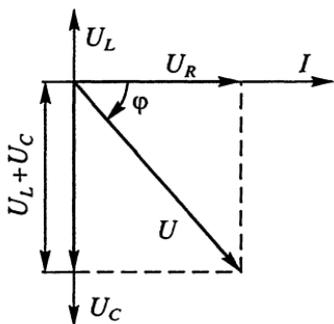


Рис. 11.8

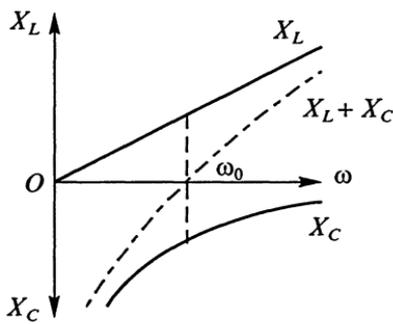


Рис. 11.9

как и в предыдущих случаях, зависит от частоты. На рисунке 11.9 показаны частотные зависимости  $X_L$ ,  $X_C$  и их суммы. Из этих графиков видно, что последовательная цепь при  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$  ведет себя так, как будто бы ее реактивное сопротивление чисто индуктивное, причем эквивалентная индуктивность меньше действительной:

$$\omega L_{\text{экв}} = \omega L - \frac{1}{\omega C}; \quad L_{\text{экв}} < L.$$

При  $\frac{1}{\omega C} > \omega L$  цепь имеет чисто емкостную реактивную нагрузку; при этом для эквивалентной емкости получается:

$$\frac{1}{\omega C_{\text{экв}}} = \frac{1}{\omega C} - \omega L; \quad C_{\text{экв}} < C.$$

Особенно интересен случай, когда реактивная нагрузка цепи исчезает. Это имеет место при частоте  $\omega_0$ , удовлетворяющей условию последовательного резонанса (резонанса напряжений):

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (11.25)$$

При этом падения напряжения на катушке и конденсаторе, всегда противоположные по фазе, оказываются равными друг другу:

$$U_L = I \omega_0 L = \frac{I}{\omega_0 C} = U_C.$$

Поэтому их мгновенная сумма равна нулю, и все внешнее напряжение ложится на активное сопротивление, обеспечивая наибольшую силу тока в цепи; фазовый сдвиг исчезает:

$$Z_p = R; \quad I_p = \frac{U}{R}; \quad \varphi_p = 0. \quad (11.26)$$

Это означает, что при резонансе полное сопротивление цепи просто равно  $R$  – ее активному сопротивлению.

Резонансные значения  $U_L$  и  $U_C$  могут значительно превышать приложенное напряжение  $U$ . Действительно:

$$U_L = I_p \omega_0 L = I_p R \frac{\omega_0 L}{R} = U \frac{\omega_0 L}{R}.$$

Последняя дробь может быть много больше единицы.

Наконец, при резонансе максимальная энергия конденсатора оказывается равной максимальной энергии катушки:

$$\frac{1}{2} C U_{mc}^2 = \frac{1}{2} C \frac{I_{mp}^2}{\omega_0^2 C^2} = \frac{1}{2} L I_{mp}^2. \quad (11.27)$$

Во времени эти максимумы сдвинуты на четверть периода питающего напряжения. Таким образом, происходит периодический обмен энергиями катушки и конденсатора, причем частота этого обмена равна удвоенной частоте изменений напряжения.

Разумеется, состояния резонанса можно достичь, не только изменяя частоту питающего напряжения, но и подбирая соответственно емкость или индуктивность.

Итак, в последовательном контуре происходят вынужденные колебания и возможно явление резонанса. Следовательно, контур обладает собственной частотой:

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Нужно ожидать, что в такой цепи возможны и собственные колебания; в справедливости этого предположения мы убедимся в главе 12. Конечно, в цепях  $(R, L)$  и  $(R, C)$  также происходят вынужденные колебания; но эти цепи не обладают собственной частотой и в них явление резонанса отсутствует.

В более сложных цепях возможно включение нескольких резисторов, конденсаторов и катушек. Когда все они соединены последовательно, то их можно охарактеризовать эквивалентными величинами:

$$R_{\text{экв}} = \sum R_i; \quad L_{\text{экв}} = \sum L_i; \quad \frac{1}{C_{\text{экв}}} = \sum \frac{1}{C_i}.$$

Если в контуре имеются параллельно включенные элементы одного типа, то они тоже могут быть заменены эквивалентными величинами:

$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \sum \frac{1}{R_i}; \quad \frac{1}{L_{\text{экв}}} = \sum \frac{1}{L_i}; \quad C_{\text{экв}} = \sum C_i$$

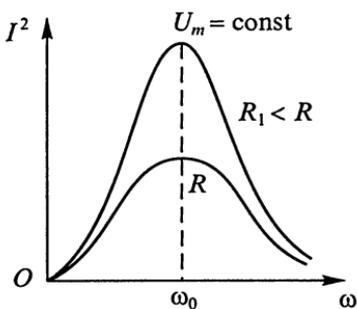


Рис. 11.10

(в обоих случаях для катушек индуктивности это верно, лишь когда их магнитные поля не перекрываются, т. е. отсутствует взаимная индукция).

При параллельном включении разнородных элементов расчет существенно усложняется.

На рисунке 11.10 показаны амплитудно-частотные характеристики последовательной цепи, выражающие зависимость квадрата силы тока от частоты питающего напряжения (при по-

стоянстве амплитуды напряжения и параметров цепи); эти характеристики часто называют резонансными кривыми – на рисунке они приведены для двух различных значений активного сопротивления. Чем сопротивление больше, тем кривая ниже и относительно шире; но кривые никогда не пересекаются.

В «Механике» резонансная кривая была изучена подробно. Там же было установлено, что при ее помощи можно графическим методом определить добротность контура.

По аналогии с механическими колебаниями мы можем написать выражения для добротности:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{L}}{R}, \quad (11.28)$$

где  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  – волновое сопротивление контура,  $\alpha = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания собственных колебаний.

### 11.5. Закон Ома и законы Кирхгофа для цепей переменного тока

Рассмотренные примеры расчета простейших цепей переменного тока убеждают нас в том, что применение метода комплексных амплитуд значительно упрощает эти расчеты из-за того, что операции дифференцирования и интегрирования заменяются алгебраическими операциями умножения и деления.

При этом соотношения между токами и напряжениями в законе Ома для участка цепи заменяются соотношениями между комплексными амплитудами соответствующих величин.

Так, рассматривая электрическую цепь из последовательно соединенных элементов: резистора, катушки и конденсатора, закон Ома для этого участка следует выразить в виде:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}}, \quad (11.29)$$

где  $\dot{i}$  – комплексная амплитуда тока в цепи;  $\dot{U}$  – комплексная амплитуда напряжения;  $\dot{Z}$  – комплексное сопротивление цепи или импеданс цепи.

Импеданс цепи определяется по стандартным правилам расчета сопротивления с учетом того, что комплексное сопротивление резистора есть действительная величина, равная  $R$ , комплексное сопротивление катушки с индуктивностью  $L$  на частоте  $\omega$  равно  $j\omega L$ , комплексное сопротивление конденсатора на частоте  $\omega$  равно  $\frac{1}{j\omega C}$ .

Импеданс  $Z$  последовательно соединенных резистора, катушки и конденсатора в цепи переменного тока с частотой  $\omega$  находится как сумма их комплексных сопротивлений:

$$\dot{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \quad (11.30)$$

Действительная часть импеданса называется активным сопротивлением  $X_A$ , мнимая часть – реактивным сопротивлением цепи  $X_P$ . Модуль импеданса называется полным сопротивлением цепи переменного тока  $Z$ . По определению:

$$Z = \sqrt{X_A^2 + X_P^2}. \quad (11.31)$$

Для последовательно соединенных резистора, катушки и конденсатора активное сопротивление  $X_A = R$ , реактивное сопротивление  $X_P = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ , полное сопротивление  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ .

Отношение реактивного сопротивления к активному определяет сдвиг фаз  $\varphi$  между током и напряжением в цепи. Именно:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_A}{X_P}. \quad (11.32)$$

Для смешанного соединения элементов в электрической цепи импеданс находится методом эквивалентного замещения, при этом в случае последовательного соединения эквивалентное сопротивление цепи равно сумме комплексных сопротивлений отдельных элементов цепи:

$$\dot{Z}_{\text{эkv}} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dots + \dot{Z}_n, \quad (11.33)$$

а в случае параллельного соединения эквивалентная проводимость цепи равна сумме комплексных проводимостей отдельных элементов цепи:

$$\dot{G}_{\text{экв}} = \dot{G}_1 + \dot{G}_2 + \dots + \dot{G}_n, \quad (11.34)$$

где  $\dot{G}_n = \frac{1}{\dot{Z}_n}$  — комплексная проводимость  $n$ -го элемента цепи.

Уравнения Кирхгофа для цепей переменного тока с использованием комплексных амплитуд можно записать следующим образом. Первый закон Кирхгофа запишется в виде:

$$\sum \dot{I}_n = 0. \quad (11.35)$$

Второй закон Кирхгофа будет иметь вид:

$$\sum \dot{I}_n \dot{Z}_n = \sum \dot{\mathcal{E}}_n. \quad (11.36)$$

## 11.6. Резонанс токов в цепи переменного тока

В качестве примера применения закона Ома в комплексной форме для расчета сложной цепи переменного тока рассмотрим важный для практики случай параллельной цепи (рис. 11.11). Здесь обе ветви находятся под одинаковым напряжением. Сопротивление ветви с конденсатором равно

$$\dot{Z}_C = -jX_C.$$

Сопротивление ветви с индуктивностью равно

$$\dot{Z}_L = jX_L + R.$$

Общее сопротивление параллельно включенных ветвей составляет

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_C \dot{Z}_L}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_L} = \frac{-(R + jX_L)jX_C}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} \quad (11.37)$$

и определяет отношение напряжения к полной силе тока. Решать это уравнение в общем виде мы не будем; ограничимся лишь наиболее интересным частным случаем. Предположим, что сопротивление  $R$  невелико, так что в широком диапазоне частот выполняется неравенство

$$R < X_L,$$

причем этот диапазон содержит и частоту  $\omega_0$ , определяемую по формуле (11.25). Тогда выражение (11.37) принимает более простой вид:

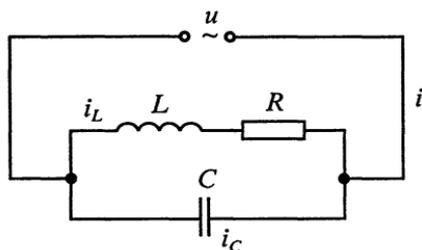


Рис. 11.11

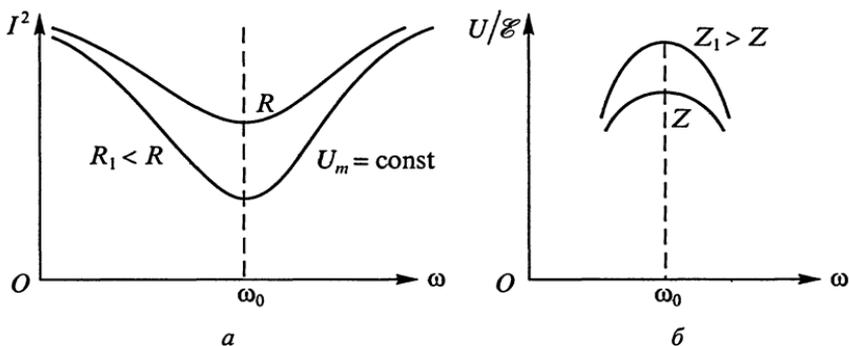


Рис. 11.12

$$\dot{Z} = \frac{X_L X_C}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{L}{C} \frac{1}{R + j(X_L - X_C)}$$

При выполнении условий резонанса:

$$X_L = X_C; \quad \omega = \omega_0$$

контур представляет чисто активное сопротивление:

$$Z_p = \frac{L}{CR} = \frac{\rho^2}{R}, \quad (11.38)$$

которое является наибольшим, так что сила тока в неразветвленной части цепи  $I_p$  оказывается наименьшей; фазовый сдвиг при этом исчезает. Этот случай называют *параллельным резонансом* или резонансом токов, так как силы токов в ветвях (почти противоположные по фазе) очень мало отличаются по модулю. Поэтому, как и в случае последовательного резонанса, здесь происходит обмен энергиями между катушкой и конденсатором, а источник лишь компенсирует потери в резисторе. При этом силы токов  $I_L$  и  $I_C$  могут значительно превосходить силу тока  $I_p$ .

В противоположность последовательному контуру, параллельный контур ведет себя как цепь с емкостной нагрузкой при  $\omega > \omega_0$  и с индуктивной – при  $\omega < \omega_0$ . Его резонансные кривые показаны на рисунке 11.12, а (для разных  $R$ ). Они также не пересекаются друг с другом.

Для лучшего уяснения особенностей параллельного резонанса построим несколько векторных диаграмм, выбрав произвольное направление вектора напряжения за исходное.

При низких частотах  $\left(\omega L < \frac{1}{\omega C}\right)$  сила тока в катушке индуктивности превышает силу тока в конденсаторе, полный ток отстает по фазе от напряжения и полное сопротивление цепи является индуктивным (рис. 11.13, а).

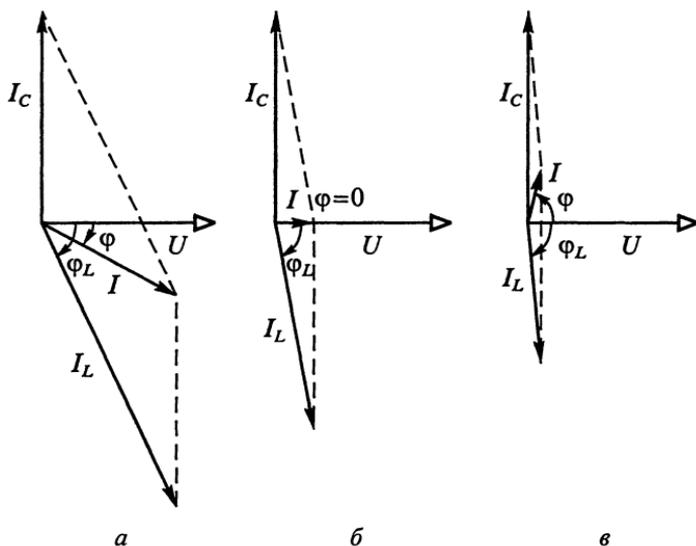


Рис. 11.13

При неизменной частоте будем увеличивать индуктивность. Сила тока в катушке будет уменьшаться, фазовый сдвиг  $\varphi_L$  между током и напряжением увеличится. В конце концов можно будет достичь режима, поясняемого рисунком 11.13, б. Сила полного тока уменьшится, фазовый угол  $\varphi$  обратится в нуль – наступит параллельный резонанс.

Дальнейшее увеличение индуктивности вызовет уменьшение  $I_L$  и возрастание полного тока  $I$ ; последний будет опережать по фазе напряжение  $U$  (см. рис. 11.13, в). Заметим, что на рисунке 11.13 сила тока в конденсаторе во всех случаях одна и та же.

Из векторной диаграммы для случая резонанса ( $\varphi = 0$ ) находим:

$$\operatorname{tg} \varphi_L = \frac{I_C}{I_p} = \omega_0 C Z_p.$$

Но  $\varphi_L$  есть также угол фазового сдвига между током в цепи катушки и напряжением на ней, так что

$$\operatorname{tg} \varphi_L = \frac{\omega_0 L}{R}.$$

Поэтому снова получается найденное выше резонансное сопротивление:

$$Z_p = \frac{L}{CR}. \quad (11.39)$$

Таким образом, свойства параллельной цепи в известном смысле противоположны свойствам последовательной и каждая из них может быть с пользой применена в подходящих условиях.

Рассмотренный здесь случай параллельного резонанса (по току, см. рис. 11.12, *a*) иногда наблюдается в силовых электрических сетях низкой частоты (50 Гц), где напряжение на контуре практически постоянно, так как внутреннее сопротивление источника питания очень мало.

Но в радиотехнических устройствах контур обычно включается в цепь, питаемую источником ЭДС  $\mathcal{E}$  с большим внутренним сопротивлением  $r$ , а используется падение напряжения на контуре, равное

$$U = \mathcal{E} \frac{Z}{Z+r} = \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{r}{Z}}.$$

При этом получается резонансная кривая по напряжению (см. рис. 11.12, *b*), имеющая при резонансе максимум.

## 11.7. Работа и мощность переменного тока

Элементарная работа  $dA$ , совершаемая электрическим полем при протекании квазистационарного тока в цепи, или элементарная работа тока, равна:

$$dA = iudt,$$

где  $i$  и  $u$  – мгновенные значения тока и напряжения в электрической цепи.

Физическая величина, равная отношению элементарной работы тока к промежутку времени, за который она совершена, называется мгновенной мощностью переменного тока и обозначается буквой  $p$ :

$$p = iu. \quad (11.40)$$

В цепях переменного тока мгновенная мощность – переменная во времени величина. Если сдвиг фаз между током и напряжением равен  $\varphi$ , то мгновенная мощность будет изменяться по закону:

$$p = I_m \cos \omega t U_m \cos (\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} I_m U_m [\cos (2\omega t + \varphi) + \cos \varphi]. \quad (11.41)$$

Определяя из полученного выражения среднюю мощность за период  $P$ , получим:

$$P = \int_0^T p \frac{dt}{T} = IU \cos \varphi. \quad (11.42)$$

Эта мощность называется активной мощностью, так как она характеризует работу тока, преобразуемую в энергию, удобную для

использования потребителями. Значение активной мощности зависит не только от действующих значений силы тока  $I$  и напряжения  $U$  в цепи, но и от значения косинуса разности фаз между током и напряжением в цепи.

Если разность фаз равна  $90^\circ$ , то активная мощность равна нулю. Однако это не означает, что в цепи переменного тока не происходит обмена энергией между ее элементами. Наоборот, как следует из выражения (11.41), мощность в цепи может быть весьма значительной в разные моменты времени, но среднее значение остается равным нулю. При этом в одну половину периода источником переменной ЭДС, или генератором, совершается работа по увеличению энергии электрического или магнитного полей в реактивных элементах цепи переменного тока, в другую половину периода накопленная энергия переходит снова к генератору.

Максимальное значение переменной составляющей мощности переменного тока на реактивном элементе цепи называется реактивной мощностью переменного тока и обозначается буквой  $Q$ .

Таким образом:

$$Q = IU_p,$$

где  $U_p$  – эффективное напряжение на реактивном участке цепи.

По закону Ома  $U_p = IX_p$ , и следовательно,

$$Q = I^2 X_p. \quad (11.43)$$

Так как  $X_p = Z \sin \varphi = IU \sin \varphi$ , очевидно, что

$$P^2 + Q^2 = (IU)^2. \quad (11.44)$$

Произведение  $IU$  называется кажущейся мощностью  $S$ . Из (11.44) следует, что

$$S^2 = P^2 + Q^2. \quad (11.45)$$

Для активной, реактивной и кажущейся мощности используют разные единицы. Активная мощность выражается в ваттах, единицей реактивной мощности служит в ар (вольт-ампер реактивный), кажущаяся мощность выражается в вольт-амперах.

Электротехнические устройства, служащие для производства, передачи и потребления электроэнергии, рассчитывают, исходя из значений кажущейся мощности, так как ее активная и реактивная составляющие могут изменяться при изменении нагрузки.

Так как вычисление мощности с математической точки зрения представляет нелинейную операцию, то применение метода комплексных амплитуд для нахождения мощности требует уточнения.

Для определения активной и реактивной составляющих мощности находят произведение комплексной амплитуды силы тока и комплексно-сопряженной амплитуды напряжения:

$$\dot{P} = j \dot{U}^* = IU \cos \varphi + jIU \sin \varphi. \quad (11.46)$$

В полученном соотношении действительная часть  $P$  выражает активную мощность, а мнимая – реактивную.

Этот прием для вычисления мощности с помощью метода комплексных амплитуд применяется и в других областях физики.

## 11.8. Основы электротехники. Линии передачи электрической энергии. Трансформаторы

Изобретатель радиосвязи А. С. Попов предложил весьма изящный опыт, поясняющий три основных принципа электротехники сильных токов. Два стрелочных магнитоэлектрических прибора соединяются двумя проводами, являющимися моделью линии передачи электрической энергии. Если медленно покачивать один из приборов вокруг горизонтальной оси, то за счет механической работы, совершаемой экспериментатором, катушка измерительной системы прибора и его стрелка приходят в колебания. При этом в катушке наводится ЭДС электромагнитной индукции – прибор служит моделью генератора электрической энергии. В линии и втором приборе возникает ток, в результате чего его измерительная катушка и стрелка приходят в колебания. Таким образом, за счет электромагнитного взаимодействия возникает механическое движение – второй прибор является моделью электродвигателя. Если вместо первого прибора раскачивать второй, эти явления повторяются – так демонстрируется принцип обратимости электрических машин (см. § 11.9).

При взаимодействии переменных токов следует принимать во внимание фазовый сдвиг между ними. Мгновенная сила взаимодействия пропорциональна произведению мгновенных значений токов:

$$f \sim i_1 i_2 = I_1 I_2 \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

Средняя за период сила

$$f_{\text{cp}} \sim I_1 I_2 \cos \varphi$$

оказывается пропорциональной косинусу фазового сдвига.

В аудитории взаимодействие токов удобно показать при помощи схемы, показанной на рисунке 11.14. Здесь 1 и 2 – станиольевые ленты длиной около 1 м, расположенные вертикально на расстоянии 1...1,5 см друг от друга, А – амперметры со шкалой до 10 А; сопротивления  $R$ , индуктивность  $L$  и емкость  $C$  подобраны так, чтобы

$$R = \omega L = \frac{1}{\omega C}; \quad R \approx 30 \dots 35 \text{ Ом.}$$

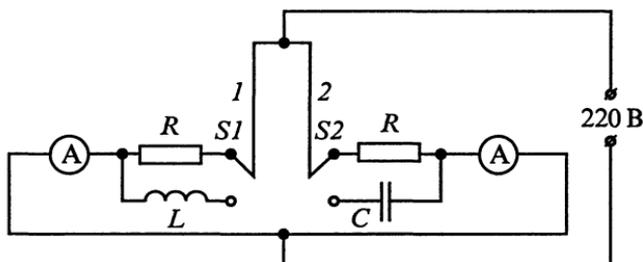


Рис. 11.14

Ключи  $S1$  и  $S2$  позволяют менять объекты, вводимые в цепь. При включении двух резисторов ( $\varphi = 0$ ) ленты притягиваются; при включении одного резистора и конденсатора ( $\varphi = 90^\circ$ ) или резистора и катушки индуктивности ( $\varphi = -90^\circ$ ) взаимодействие отсутствует; при включении конденсатора и катушки индуктивности ( $\varphi = 180^\circ$ ) ленты отталкиваются.

Остановимся кратко на принципах расчета силовых электрических цепей. При расчете требуется не превысить допустимых потерь мощности в передающей сети  $P_{\text{пот}}$  и по возможности снизить расход меди на провода сети.

Пусть потребитель (завод, город), обладающий сопротивлением  $Z = R + jX$ , должен получать мощность  $P$  при напряжении  $U$ . Линия передачи (рис. 11.15) имеет длину  $l/2$  (два провода), она выполнена из меди с удельным сопротивлением  $r$ , сечение проводов равно  $S$ . Допустимые потери определяют максимальное сопротивление линии:

$$R_{\text{л}} \leq \frac{P_{\text{пот}}}{I^2},$$

где  $I$  – сила тока в линии, равная  $I = \frac{U}{Z}$ , а активное сопротивление проводов линии равно  $R_{\text{л}} = \rho \frac{l}{S}$ .

Так как полная мощность, получаемая потребителем, равна

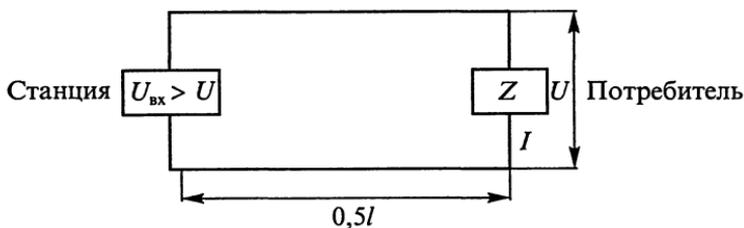


Рис. 11.15

$$P = \frac{U^2}{Z} \cos \varphi,$$

то для площади сечения получаем:

$$S \geq \frac{\rho l}{P_{\text{пот}}} \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi}.$$

Таким образом, выгодно иметь чисто активную нагрузку  $Z$  ( $\cos \varphi = 1$ ), что очевидно, и применять возможно более высокое напряжение. Действительно, по мере увеличения длины передающих линий напряжение передачи приходится увеличивать, в настоящее время – до сотен киловольт. При этом напряжение на входе линии должно быть равно  $U_{\text{вх}} = U + \Delta U$ , где  $\Delta U$  – потери напряжения в линии.

Так как высокие напряжения не могут вырабатываться непосредственно электрическими машинами и не могут предлагаться потребителю, то необходимым элементом линии передачи являются преобразователи напряжения (трансформаторы), позволяющие повысить напряжение (на входе линии, у генераторов) и понизить его на выходе линии (у потребителя).

Рассмотрим элементарную теорию трансформатора, пренебрегая потерями мощности на нагревание обмоток и перемагничивание магнитопровода, а также рассеянием магнитного потока (он частично проходит по воздуху и не пронизывает вторичную обмотку). Это пренебрежение вполне допустимо, так как у больших промышленных трансформаторов потери не превышают 1% передаваемой мощности.

Трансформатор – это замкнутый магнитопровод, на который намотаны две катушки (рис. 11.16) с числом витков  $N_1$  и  $N_2$ . К первой катушке подведено переменное напряжение  $u_1$ . Вторая катушка сначала разомкнута (режим холостого хода). При этом вольтметры измеряют напряжения  $U_1$  и  $U_2$ , связанные друг с другом соотношением

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = n, \quad (11.47)$$

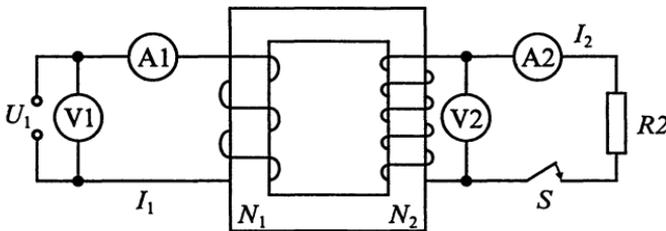


Рис. 11.16

так как обе катушки пронизываются одним и тем же магнитным потоком  $\Phi_0$ , создаваемым первичным током.

Величину  $n$  называют *коэффициентом трансформации*.

Покажем справедливость соотношения (11.47). Первичная катушка, обладающая большой индуктивностью, обтекается довольно слабым током  $I_0$  (ток холостого хода), отстающим от напряжения  $U_1$  почти на  $90^\circ$ . Пренебрегая гистерезисом, можно утверждать, что магнитный поток  $\Phi_0$  пропорционален силе тока  $I_0$ ; он пронизывает первичную катушку и наводит в ней ЭДС самоиндукции, равную

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi_0}{dt} = -U_1, \quad (11.48)$$

которая компенсируется приложенным напряжением  $U_1$ . Одновременно тот же поток наводит во вторичной катушке ЭДС взаимной индукции, равную

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_0}{dt} = U_2,$$

измеряемую вольтметром во вторичной цепи. Отношение  $\frac{U_1}{U_2}$ , как

видно из вышеприведенных выражений, равно  $n$ , что и подтверждается показаниями вольтметров. Векторная диаграмма холостого хода показана на рисунке 11.17 (векторы  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  в нее не входят). Так как фазовый сдвиг между  $I_0$  и  $U_1$  равен  $90^\circ$ , то при холостом ходе трансформатор не поглощает энергии.

При замыкании вторичной цепи на нагрузку сопротивлением  $Z_2$  возникает ток  $I_2$ , создающий магнитный поток  $\Phi_2$ . Ток  $I_2$  отстает по фазе от  $U_2$  (см. рис. 11.17) на угол  $\varphi_2$  (индуктивная нагрузка). Одновременно автоматически изменяется и сила тока в первичной цепи. Причина этого такова: при возникновении магнитного потока  $\Phi_2$  меняется намагничение магнитопровода и нарушается равенство (11.48). Поэтому возникает самопроизвольное (без вмешательства оператора) изменение силы первичного тока, создающего новый магнитный поток  $\Phi_1$ . По закону Ленца этот поток должен быть почти противоположен по фазе потоку  $\Phi_2$ . Равновесие наступает, когда сумма магнитных потоков  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , найденная с учетом фазового сдвига, оказывается снова равной первичному потоку  $\Phi_0$ . Это постоянство магнитного потока – важнейшее утверждение в теории трансформаторов. Из диаграммы

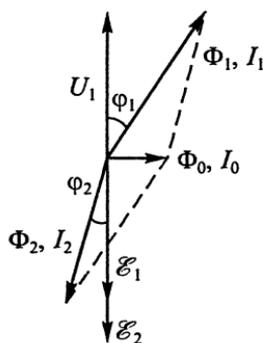


Рис. 11.17

векторной диаграммы холостого хода показана на рисунке 11.17 (векторы  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  в нее не входят). Так как фазовый сдвиг между  $I_0$  и  $U_1$  равен  $90^\circ$ , то при холостом ходе трансформатор не поглощает энергии.

видно, что поток  $\Phi_1$  превышает первичный поток  $\Phi_0$ . Следовательно, и сила тока  $I_1$  превышает силу тока холостого хода  $I_0$ . При этом фазовый угол  $\varphi_1$  между  $U_1$  и  $I_1$  (или  $\Phi_1$ ) оказывается меньше  $90^\circ$ .

При нормальной нагрузке трансформатора потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  значительно превышают  $\Phi_0$ , а углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  невелики. Так как мощность  $P_2$ , которая потребляется вторичной обмоткой при нормальной нагрузке, равная  $U_2 I_2 \cos \varphi_2$ , примерно равна  $U_2 I_2 (\cos \varphi_2 \approx 1)$  и так как она поступает из первичной сети (единственного источника энергии), отдающей трансформатору мощность

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 \approx U_1 I_1,$$

то получается:

$$U_2 I_2 \approx U_1 I_1; \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{n}. \quad (11.49)$$

Однако следует помнить, что при неполной нагрузке трансформатора (когда первичный ток мало отличается от тока холостого хода) соотношение (11.49) для токов выполняется плохо. При перегрузке трансформатора, когда возрастает падение напряжения на сопротивлении его обмоток, перестает выполняться соотношение для напряжений. Более строгая теория трансформатора рассматривается в курсе электротехники.

Справедливость диаграммы (см. рис. 11.17) подтверждает опыт со стержневым трансформатором (магнитопровод имеет форму прямого стержня), вторичная обмотка которого представляет собой один короткозамкнутый виток толстой алюминиевой проволоки (заметная индуктивность при исчезающе малом сопротивлении). Поэтому ток  $I_2$  и поток  $\Phi_2$  отстают от ЭДС  $\mathcal{E}_2$  почти на  $90^\circ$  (рис. 11.18) и потребляемая мощность очень мала. Следовательно, ток  $I_1$  (и поток  $\Phi_1$ ) также сдвинут по фазе относительно  $U_1$  почти на  $90^\circ$ , а относительно  $I_2$  – на угол  $\psi$ , близкий к  $180^\circ$ . Противонаправленные токи  $I_1$  и  $I_2$  отталкиваются с силой  $F$ , а поэтому легкая вторичная обмотка (виток) сбрасывается с сердечника даже при вертикальном положении последнего.

Если же надеть на стержень второе кольцо, то токи в обоих кольцах будут одинаковы по фазе. В этом случае кольца взаимно притягиваются и слегка поднимаются вверх по стержню, но не сбрасываются с него.

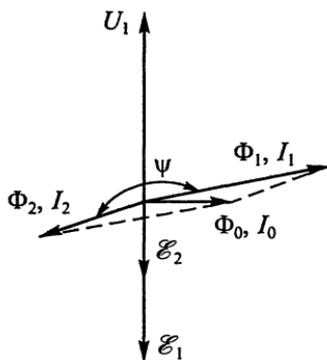


Рис. 11.18

## 11.9. Принципы устройства электрических машин

Генераторы переменного тока строятся на громадные мощности (до миллиона киловатт) при напряжении в десятки киловольт. Схематическое изображение генератора дано на рисунке 11.19. Неподвижный статор содержит катушки, расположенные в плоскости, перпендикулярной чертежу; на рисунке катушки заменены одиночными проводами, сечение которых – маленькие кружки. Провода, соединяющие катушки, показаны сплошной линией, если они расположены на передней стороне статора, пунктиром – если на задней стороне его. Таким образом, все катушки соединены последовательно и выведены к контактам *K*. Внутри статора вращается ротор, имеющий не показанные на рисунке обмотки, питаемые постоянным током и создающие многополюсный электромагнит с чередующимися полюсами. Намагничивающие обмотки присоединены к контактным кольцам *D*, вращающимся вместе с ротором; при помощи скользящих контактов кольца соединены с источником постоянного тока (или с выходом выпрямителя переменного тока).

Такая конструкция машины устраняет трудности, связанные с использованием скользящих контактов при высоких напряжениях и сильных токах.

Если мысленно разрезать машину плоскостью, проходящей вертикально между контактами *K*, и развернуть на плоскость (рис. 11.20), то становится очевидным, что фазы всех ЭДС, индуцируемых в катушках (они и здесь заменены одиночными проводами), одинаковы, а все ЭДС суммируются. Если ротор имеет  $2p$  полюсов, то за один его оборот получится  $p$  полных периодов изменения ЭДС. Если ротор вращается, совершая  $n$  оборотов в секунду, то ЭДС генератора имеет частоту  $f = np$ .

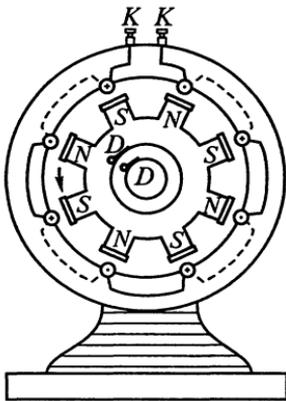


Рис. 11.19

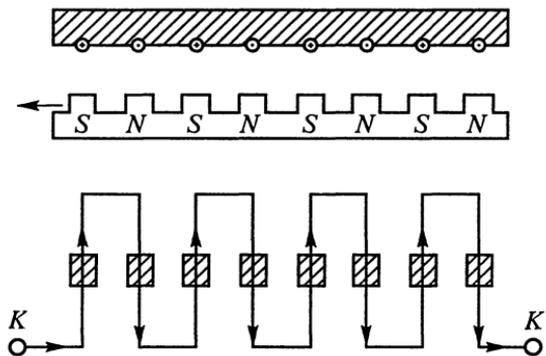


Рис. 11.20

Так как применяемая в силовоточной электротехнике Европы частота ЭДС составляет 50 Гц, то многополюсные машины сравнительно тихоходны. Так, например, генераторы Днепрогэса совершают около 80 оборотов в минуту. Впрочем, имеются и быстроходные турбогенераторы: их частота вращения – 3000 мин<sup>-1</sup>.

Если в статоре размещено  $p$  катушек, имеющих  $N$  витков каждая, то при длине провода  $l$ , диаметре ротора  $D$ , числе полюсов индуктора (статора)  $2p$  и частоте его вращения  $f$  в машине наведется ЭДС, равная

$$\mathcal{E} = 2\pi f N I D p B \cos 2\pi f t,$$

где  $B$  – индукция, создаваемая катушками ротора.

Рассматривая рисунок 11.20, легко убедиться, что при вращении индуктора (ротора), взаимодействующего с током в обмотке статора, ротор испытывает торможение. Работа, совершаемая внешним двигателем (дизельным или турбиной), преодолевающим это электромагнитное торможение, и обеспечивает передачу энергии обмотке статора.

На рисунке 11.21 в увеличенном виде показан участок статора и ротора. Линии магнитной индукции, создаваемой ротором, изображены сплошными линиями; линии магнитной индукции, создаваемой током обмотки статора, изображены пунктирными линиями. Направление вращения ротора показано стрелкой. Все рисунки 11.21 относятся к моменту прохождения тока в статоре через максимум. Рисунок 11.21, *а* соответствует чисто активной нагрузке генератора. Максимум тока совпадает с максимумом ЭДС. При этом магнитная индукция  $\vec{B}_i$  обмотки статора в одном месте усиливает индукцию  $\vec{B}$ , создаваемую ротором, в другом уменьшает ее, так что в целом магнитный поток, обуславливающий ЭДС индук-

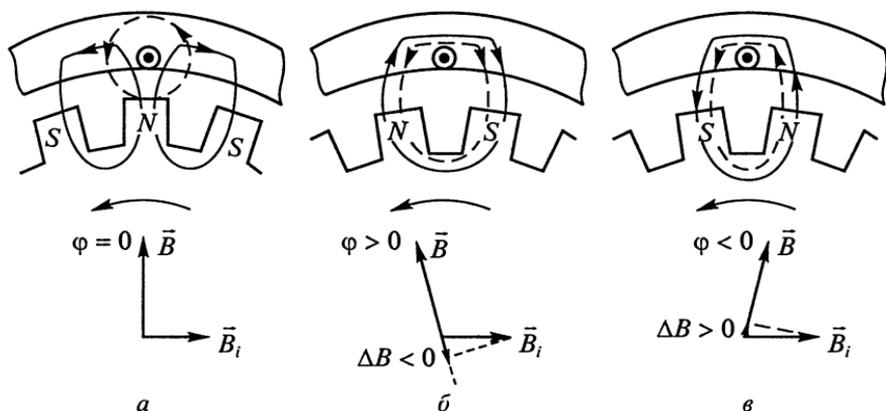


Рис. 11.21

ции, не меняется и ЭДС машины также не изменяется по сравнению с холостым ходом, когда сила тока в обмотке статора равна нулю.

Если генератор работает на индуктивную нагрузку, то ток отстает от ЭДС по фазе (рис. 11.21, б). При этом происходит некоторое размагничивание статора, а потому ЭДС машины уменьшается.

Если же нагрузка емкостная, то ток опережает ЭДС по фазе (рис. 11.21, в); магнитное поле ротора частично прибавляется к полю статора, что приводит к увеличению ЭДС машины по сравнению с холостым ходом.

Рассмотренное явление (реакция якоря, так как обмотка, в которой наводится ЭДС, часто называется якорем) существует во всех электрических машинах, и без учета его нельзя понять способности машин автоматически приспосабливаться к изменениям внешней нагрузки (это относится и к генераторам, и к двигателям).

Любой генератор рассчитан на определенную силу тока и определенную ЭДС. Так как при работе машины на смешанную нагрузку мощность, выделяемая в цепи, определяется выражением

$$P = EI \cos \varphi,$$

а превышать предельную силу тока недопустимо, то мощность, отдаваемая в такую цепь, меньше максимальной мощности  $EI$ , которую способен развить генератор, работая на чисто активную нагрузку. Поэтому номинальная мощность электрических машин выражается не в ваттах, а в вольт-амперах.

Если отключить двигатель, вращающий ротор генератора переменного тока, и приложить к обмотке статора напряжение, превышающее ЭДС генератора, то обмотка ротора машины, по-прежнему обтекаемая постоянным током, будет испытывать действие вращающего момента. При вращении ротора с такой скоростью, когда при переходе индуктора от одного проводника статора к другому ток в статоре изменяет направление на обратное, вращающий момент сохраняет свой знак; при этом машина будет вращаться устойчиво и сможет совершать механическую работу, т. е. превратится в электродвигатель.

Рассмотренное явление называется обратимостью электрической машины и успешно используется в так называемых синхронных электродвигателях (их скорость вращения вполне определенная).

Недостатком синхронных двигателей является, во-первых, необходимость предварительного их раскручивания вспомогательными средствами; во-вторых, они боятся резких колебаний нагрузки, так как могут выпасть из синхронизма и затормозиться.

## 11.10. Асинхронные двигатели. Трехфазная система переменного тока. Машины постоянного тока

В практике широко распространены асинхронные двигатели. Принцип их работы поясняется опытами Араго, описанными в § 9.1, в которых использовалось вращающееся магнитное поле, созданное движущимся постоянным магнитом.

Для получения вращающегося магнитного поля можно применить схему рисунка 11.22. Две катушки (1 и 2) расположены под углом  $90^\circ$  друг к другу и питаются токами, сдвинутыми по фазе во времени на  $90^\circ$ . Для этого они включаются в цепь переменного тока параллельно, причем последовательно с одной из катушек включен резистор  $R$ , а с другой – катушка индуктивности  $L$ . Токи в катушках делаются равными. Тогда поля, создаваемые катушками на пересечении осей последних, характеризуются значениями индукции:

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \vec{B}_x = \vec{B}_m \cos \omega t; \\ \vec{B}_2 &= \vec{B}_y = \vec{B}_m \sin \omega t.\end{aligned}$$

Результирующее поле, имеющее индукцию  $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = B_m$ , будет вращаться в пространстве с частотой, равной частоте тока  $f$ .

В это вращающееся поле помещают ротор (рис. 11.23). В его проводниках наводится ЭДС индукции, и ротор в соответствии с правилом Ленца приходит во вращение в направлении вращения поля, но с меньшей частотой  $f_1 = sf$ ; множитель  $s$ , меньший единицы, называется скольжением. Очевидно, в роторе устанавливается ток частотой

$$f_2 = f - f_1 = f(1 - s),$$

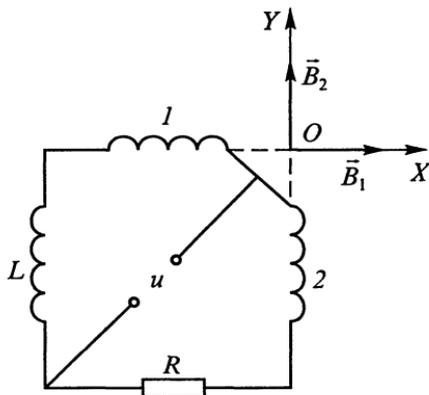


Рис. 11.22

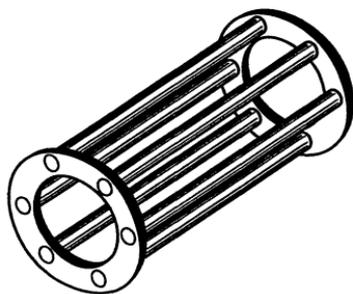


Рис. 11.23

взаимодействующий с вращающимся полем, благодаря чему ротор может совершать некоторую механическую работу.

Магнитное поле ротора вращается в пространстве с частотой

$$f_3 = f_1 + f_2 = f,$$

т.е. синхронно с первоначальным магнитным полем.

Скольжение меняется от единицы (в момент включения двигателя) до значения  $s$ , соответствующего режиму нагрузки двигателя. Если двигатель работает вхолостую, то скольжение минимально.

В промышленных электрических сетях обычно применяется не однофазный ток, который мы рассматривали до сих пор, а более гибкая и экономичная система трехфазного тока. Суть ее заключается в следующем. Вообразим три одинаковые катушки, расположенные в пространстве под углами  $120^\circ$  друг к другу (рис. 11.24, а). Пусть вокруг оси, перпендикулярной чертежу и проходящей через точку пересечения осей катушек, вращается стержневой электромагнит, создающий в пространстве вращающееся магнитное поле с индукцией  $B$ . Тогда в катушках наведутся ЭДС равной амплитуды, но сдвинутые по фазе во времени на  $120^\circ$ :

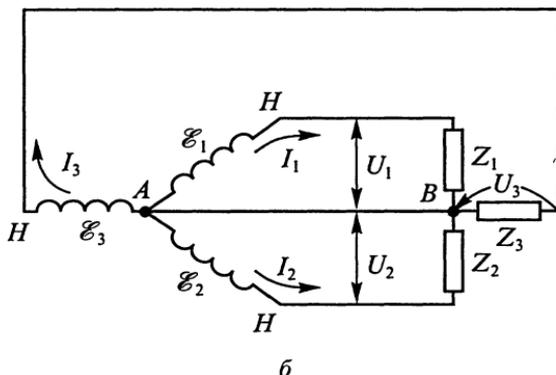
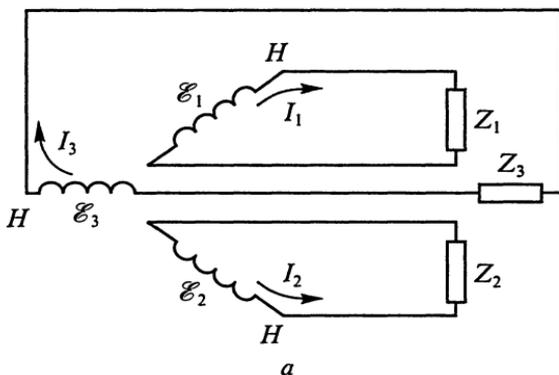


Рис. 11.24

$$e_1 = \mathcal{E}_m \cos \omega t; \quad e_2 = \mathcal{E}_m \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad e_3 = \mathcal{E}_m \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$

Если бы мы использовали их по отдельности, то понадобилось бы шесть проводов для соединения катушек с тремя внешними потребителями  $Z$ .

Назовем «началами» катушек (буквы  $H$  на рис. 11.24,  $a$ ) те их зажимы, где поочередно будет получаться наибольший положительный потенциал, и «концами» – противоположные зажимы. Соединим вместе концы катушек генератора (точка  $A$  на рис. 11.24,  $b$ ) и концы нагрузок (точка  $B$ ). Получится соединение, называемое звездой, с нулевым проводом  $AB$ . В этой схеме потребители находятся под линейными напряжениями  $U_1, U_2, U_3$ , равными фазовым напряжениям (на концах катушек генератора):

$$U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}.$$

Токи в катушках генератора и нагрузках (фазовые) равны токам в соответствующих линейных проводах (линейным):

$$I_{\text{л}} = I_{\text{ф}}.$$

В проводе, соединяющем точки  $A$  и  $B$ , течет ток, мгновенное значение которого равно сумме мгновенных значений фазовых токов:

$$i = i_1 + i_2 + i_3.$$

Так как эти токи сдвинуты по фазе, то суммарное действующее значение этого тока

$$I < I_1 + I_2 + I_3.$$

Благодаря присутствию нулевого провода изменение одной из нагрузок не влияет на напряжения, под которыми находятся другие нагрузки; а это требование, конечно, всегда обязательно.

Если бы все нагрузки всегда были одинаковыми, то ток в нулевом проводе обратился бы в нуль (рис. 11.25) и нулевой провод был бы не нужен.

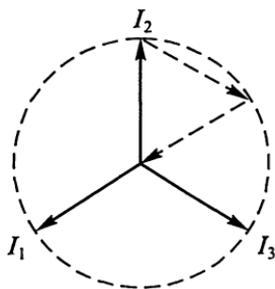


Рис. 11.25

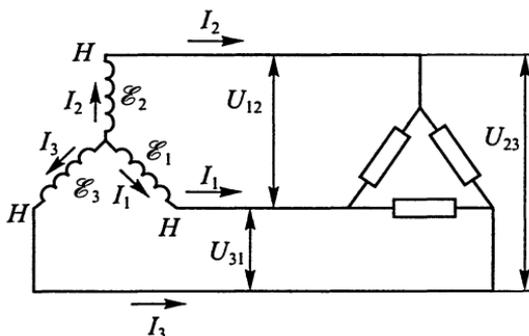


Рис. 11.26

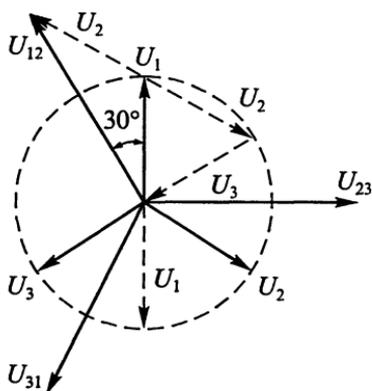


Рис. 11.27

Обычно нагрузки различны. Чтобы сохранить на каждой из них неизменное напряжение, их включают по схеме треугольника (рис. 11.26). При этом каждая из нагрузок находится под линейным напряжением (рис. 11.27), равным

$$U_{\text{л}} = U_{12} = U_1 - U_2; \quad U_{23} = U_3 - U_2;$$

$$U_{31} = U_3 - U_1; \quad U_{\text{л}} = U_{\phi} \sqrt{3}.$$

Если нагрузки равны (симметричная система), то ток в каждой из них равен (рис. 11.28)

$$I_{\text{наг}} = \frac{I_{\text{л}}}{\sqrt{3}},$$

так что полная средняя мощность, потребляемая при этом, равна мощности, отдаваемой генератором, как это и должно быть:

$$P_{\text{ср}} = 3U_{\text{л}} I_{\text{наг}} = 3U_{\phi} I_{\phi}.$$

Таким образом, и здесь достигается экономия проводов линии и изменения одной из нагрузок не влияют на напряжения на остальных нагрузках.

Треугольником можно включать и обмотки генераторов (рис. 11.28). В этом случае все ЭДС включены последовательно, но сумма их равна нулю, и тока в ненагруженном генераторе нет. Когда же к углам треугольника подключаются нагрузки, то токи возникают, причем линейный ток

$$I_{\text{л}} = I_2 - I_1 = I_{\phi} \sqrt{3}$$

равен разности фазовых токов в соответствующих обмотках генератора; векторная диаграмма токов подобна векторной диаграмме напряжений (см. рис. 11.27).

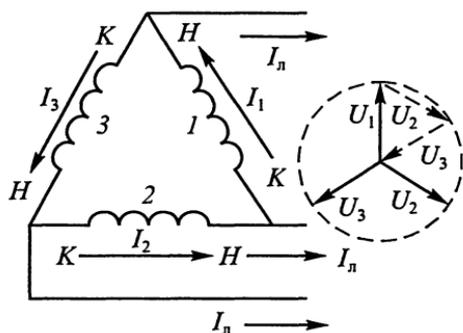


Рис. 11.28

Трехфазная система была изобретена М. О. Доливо-Добровольским (1862–1919) и нашла весьма широкое распространение на практике.

Генератор переменного тока можно снабдить механическим выпрямителем (коллектором), позволяющим полу-

читать на зажимах машины ЭДС, постоянную по знаку и практически постоянную по модулю, – таким образом получаются генераторы постоянного тока.

Принцип их устройства поясняется рисунком 11.29. Между полюсами электромагнита (его обмотка питается этой же самой машиной) помещается стальной цилиндр, по образующим которого располагаются прямые медные провода (число их гораздо больше показанного на рисунке). Они соединены друг с другом проводами, расположенными на торцах цилиндра (на рис. 11.29 сплошными линиями показаны провода, идущие по переднему торцу, пунктиром – по заднему торцу).

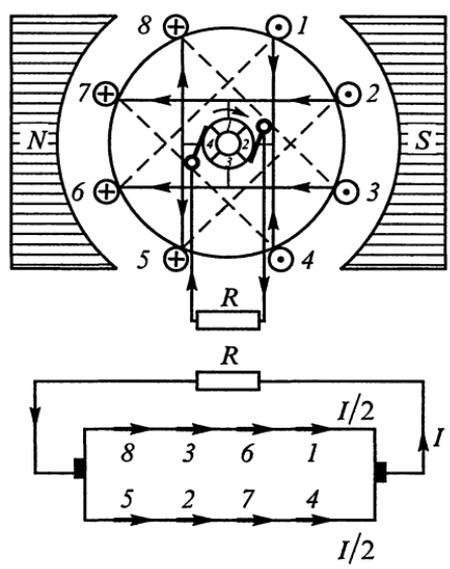


Рис. 11.29

С осью цилиндра жестко связан коллектор – система медных пластин, изолированных друг от друга и от цилиндра. К ним припаяны отводы от обмотки и прижаты два скользящих контакта – щетки (металлические или угольные). От них сделаны выводы к внешней цепи с нагрузкой  $R$ .

На рисунке 11.29 внизу показана развертка обмотки, позволяющая проследить, как распределяются ее провода в данный момент. Оказывается, что обмотка разбита на две части, соединенные параллельно, причем направление индуцированного электрического поля во всех проводниках каждой половины одинаково. При вращении машины щетки будут касаться то одних, то других пластин коллектора, так что провода будут переходить из одной половины обмотки в другую. Но каждый раз в каждой из ветвей обмотки окажутся провода с одинаковым направлением индуцированного поля. Таким образом, между щетками получится разность потенциалов, постоянная по знаку и равная сумме ЭДС, наводимых в половине обмотки машины.

Описанная обмотка, называемая барабанной, была предложена П. Н. Яблочковым (1847–1894).

Если описанную машину подключить к цепи с постоянным напряжением, то возникнет вращение ее якоря в магнитном поле электромагнитов – генератор превратится в электродвигатель, так как принцип обратимости электрических машин справедлив и в этом случае. Более подробное изучение электрических машин – задача курса электротехники.

## Глава 12

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

#### 12.1. Электромеханические аналогии. Собственные электромагнитные колебания

В «Механике» при изучении колебаний уже было обращено внимание на физическое сходство двух процессов: колебаний механического маятника и разряда конденсатора в цепи, содержащей катушку индуктивности. Уравнения, описывающие эти процессы (см. «Механику», уравнения 10.3 и 10.7), оказались тождественными. В обоих случаях потенциальная энергия переходит в кинетическую и обратно, причем часть энергии необратимо теряется (из-за существования трения или сопротивления), переходя во внутреннюю энергию, – происходит нагревание маятника и окружающей среды (или проводов контура).

Это сходство позволило тогда при необходимости иллюстрировать результаты из механики соответствующими результатами более наглядных электромагнитных явлений.

Теперь мы шире используем электромеханические аналогии. Математическая тождественность уравнений, описывающих механические и электромагнитные колебания, позволяет здесь применять полученные в механике результаты, не повторяя их вывода.

Напомним, что в «Механике» была отмечена аналогия следующих величин:

масса $m$	– индуктивность $L$
коэффициент трения $r$	– сопротивление $R$
жесткость $k$	– величина, обратная емкости, $\frac{1}{C}$
сила $F$	– разность потенциалов $u$ (или ЭДС $\mathcal{E}$ )
смещение $x$	– заряд $q$
скорость $v = \frac{dx}{dt}$	– сила тока $i = \frac{dq}{dt}$
ускорение $\frac{dv}{dt}$	– скорость изменения тока $\frac{di}{dt}$

Продолжая аналогию, можно установить следующие соотношения:

импульс  $p = mv$

– магнитный поток  $\Phi = Li$

кинетическая энергия  $\frac{mv^2}{2}$

– энергия магнитного поля  $\frac{Li^2}{2}$

потенциальная энергия деформации

– энергия заряженного конденсатора

$$\frac{1}{2} \frac{F^2}{k} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} Fx$$

$$\frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} qU$$

механическая мощность  $Fv$

– электрическая мощность  $ui$

собственная частота  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

– собственная частота  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Нетрудно установить известное соответствие между рычагом первого рода и трансформатором (преобразование сил и скоростей сопоставляется с преобразованием напряжений и токов).

Электромеханическое подобие можно установить также между величинами, характеризующими вращательное движение, и величинами, характеризующими электромагнитные процессы.

Перейдем теперь к исследованию собственных электромагнитных колебаний.

Явление резонанса, обнаруженное при исследовании вынужденных колебаний в электрической цепи (см. § 11.4 и 11.6), позволяет утверждать, что в ней возможны и собственные колебания с частотой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Для качественной проверки этого утверждения можно воспользоваться схемой, представленной на рисунке 12.1. Когда ключ находится в положении 1, конденсатор большой емкости ( $C \approx 100$  мкФ) заряжается от источника постоянного тока. При положении 2 ключа конденсатор разряжается через катушку большой индуктивности ( $L \approx 10$  Гн), например вторичную обмотку высоковольтного трансформатора. При этом получается сильно затухающий колебательный разряд с периодом, равным десятым долям секунды; его легко контролировать даже стрелочным прибором.

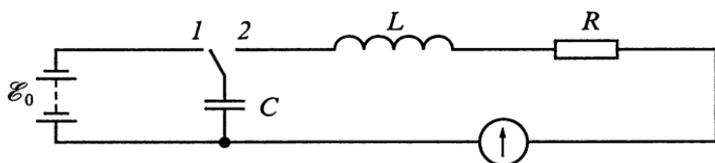


Рис. 12.1

Энергетика процесса такова: энергия электрического поля конденсатора переходит при разряде в энергию магнитного поля катушки; затем за счет явления самоиндукции конденсатор перезаряжается, т.е. происходит обратный переход энергии. Процесс сопровождается нагреванием проводов, что приводит к постепенному ослаблению колебаний.

Запишем закон Кирхгофа для этого процесса: разность потенциалов на конденсаторе в любой момент времени равна падению напряжения на резисторе и на катушке (где нужно скомпенсировать ЭДС самоиндукции):

$$u = \frac{1}{C}q = iR + L \frac{di}{dt}. \quad (12.1)$$

Мгновенный разрядный ток определяется убылью заряда конденсатора:

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{du}{dt}.$$

Поэтому для заряда на конденсаторе  $q$  (а также для пропорциональной ему разности потенциалов) получается уравнение:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0. \quad (12.2)$$

Если это уравнение продифференцировать по времени, то аналогичное уравнение получится и для силы тока. Поэтому для всех этих величин решение имеет одинаковый вид. Но, разумеется, начальные условия для них различны.

Сравнивая уравнение (12.2) с уравнением (10.9) из «Механики», убеждаемся в их формальной тождественности. Поэтому, применяя электромеханическое подобие, можем получить ряд важных результатов.

Решение уравнения (12.2) пишем по аналогии с решением (10.15) из «Механики»:

$$q = q_m \exp(-\alpha t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad (12.3)$$

где  $q_m$  и  $\varphi_1$  определяются из начальных условий. При  $t = 0$  должно быть

$$q = q_0; \quad i = -\frac{dq}{dt} = 0. \quad (12.4)$$

Поэтому получается:

$$\alpha \cos \varphi_1 + \omega_1 \sin \varphi_1 = 0; \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{\alpha}{\omega_1};$$

$$q_m = \frac{q_0}{\cos \varphi_1} = \frac{q_0}{\omega_1} \sqrt{\omega_1^2 + \alpha^2},$$

где

$$\alpha = \frac{R}{2L}; \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad \omega_0^2 > \alpha^2. \quad (12.5)$$

При малых затуханиях ( $\alpha \ll \omega_0$ ) выражения (12.5) имеют более простой вид:

$$q_m = q_0; \quad \varphi_1 = \pi, \quad q = q_0 \exp(-\alpha t) \cos(\omega_1 t + \pi). \quad (12.6)$$

Из «Механики» известно, что добротность  $Q$ , пропорциональная отношению энергии, запасенной в колебательной системе, к потерям ее за период равна  $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$ ; поэтому при электрических колебаниях

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\rho}{R}. \quad (12.7)$$

Отношение амплитуды напряжения к амплитуде силы тока называют волновым сопротивлением контура:

$$\frac{U_m}{I_m} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho. \quad (12.8)$$

Если затухание настолько велико, что  $\omega_0 < \alpha$ , то процесс делается аperiодическим. Его графическое представление было дано на рисунке 10.4 в «Механике».

Для лучшего овладения методом комплексных амплитуд решим при его помощи уравнение (12.2). Решение ищем в виде:

$$q = q_m \exp[j(\omega t + \varphi_0)]. \quad (12.9)$$

Подставив в (12.2) это решение, получим после сокращений:

$$-\omega_0^2 + 2j\alpha + \omega^2 = 0.$$

Приравнивая к нулю действительную и мнимую части по отдельности, находим:

$$\omega = \omega_0; \quad \alpha = 0,$$

т. е. результат, соответствующий отсутствию затухания. Очевидно, в нашем решении кроется какая-то некорректность. Действительно, мы считали  $\omega$  действительной величиной, не имея для этого достаточных оснований. Положим теперь

$$\omega = \omega_1 + j\gamma.$$

Тогда уравнение (12.2) приведет к виду:

$$-\omega_1^2 + \gamma^2 - 2j\omega_1\gamma + 2j\omega_1\alpha - 2\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0.$$

Отсюда

$$\gamma = \alpha; \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha^2,$$

что совпадает с (12.5).

Таким образом, в комплексном виде решение имеет вид:

$$q = q_m \exp(-\alpha t) \exp[j(\omega_1 t + \varphi_0)].$$

Выделяя действительную часть, получаем окончательно:

$$q = q_m \exp(-\alpha t) \cos(\omega_1 t + \varphi_0), \quad (12.10)$$

что совпадает с (12.3).

Мы рассмотрели свободные колебания контура. В главе 11 были изучены установившиеся вынужденные колебания. В реальных условиях, когда контур подключается к источнику периодической ЭДС, оба типа колебаний сосуществуют одновременно – происходит установление колебаний.

Рассмотрим наиболее простой процесс установления, когда затухание контура мало ( $\alpha \ll \omega_0$ ) и имеется резонанс ( $\omega = \omega_0$ ).

Пусть к контуру в момент  $t = 0$  прикладывается внешнее напряжение  $u = U_m \cos \omega_0 t$ . Закон Кирхгофа дает:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = U_m \cos \omega_0 t.$$

Учтя, что заряд конденсатора  $q = \int idt$ , разделим обе части уравнения на  $L$  и, вводя обычные обозначения, получим:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega_0 t. \quad (12.11)$$

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что полным решением этого уравнения является сумма полного решения соответствующего однородного уравнения (с нулевой правой частью) и частного решения уравнения (12.11). Полное решение однородного уравнения нам известно. Это уравнение затухающих колебаний (12.3); частное решение, представляющее незатухающие вынужденные колебания, также известно – это уравнение (11.24).

Следовательно, полное решение уравнения (12.11) получается таким:

$$q = q_1 \exp(-\alpha t) \cos(\omega_0 t + \Theta_1) + q_2 \cos(\omega_0 t + \Theta_2).$$

Начальные условия:

при  $t = 0$

$q = 0; \quad i = \frac{dq}{dt} = 0$ . Кроме того,  $\operatorname{tg} \Theta_2 = \frac{X}{R}$ . Поэтому получаем:

$$q_1 \cos \Theta_1 = -q_2 \cos \Theta_2; \quad (12.12)$$

$$q_1(-\alpha \cos \Theta_1 - \omega_0 \sin \Theta_1) = q_2 \omega_0 \sin \Theta_2.$$

Пренебрегая первым слагаемым в скобке (так как  $\alpha \ll \omega_0$ ), находим:

$$q_1 \sin \Theta_1 = -q_2 \sin \Theta_2. \quad (12.13)$$

Из (12.12) и (12.13) следует:

$$\text{ctg } \Theta_1 = \text{ctg } \Theta_2; \quad \Theta_1 = \Theta_2.$$

Далее, из (12.13) получаем:

$$q_1 = -q_2,$$

и окончательно:

$$q = q_2 [1 - \exp(-\alpha t)] \cos(\omega_0 t + \Theta_2). \quad (12.14)$$

График решения (12.14) показан на рисунке 12.2, а. Нарастание амплитуды происходит до тех пор, пока затухающие колебания не станут практически незаметными, т. е. тем дольше, чем больше добротность контура.

Если  $\omega \neq \omega_0$ , т. е. в отсутствие резонанса, изменение амплитуды происходит не монотонно. При небольшом отличии  $\omega$  от  $\omega_0$  возникают известные из акустики биения (рис. 11.2, б).

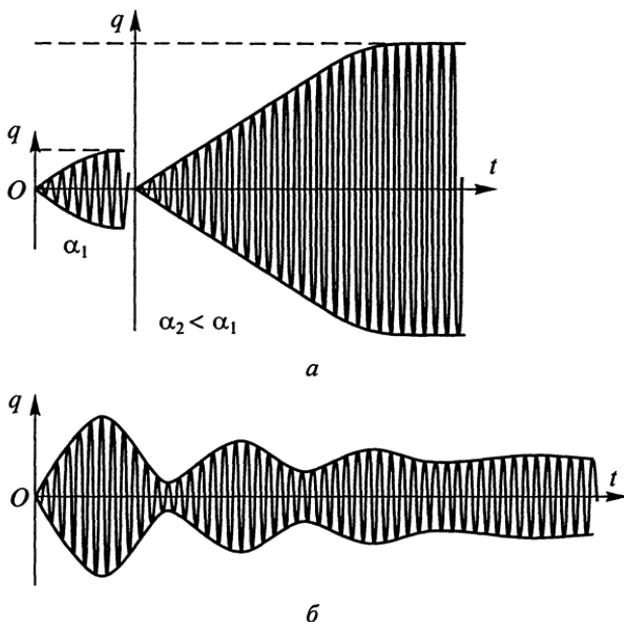


Рис. 12.2

## 12.2. Автоколебания. Полупроводниковый генератор незатухающих колебаний

Как и в механике, в электродинамике важную роль играют системы, способные совершать незатухающие колебания под действием постоянной силы, автоматически воздействующей на систему в надлежащие моменты времени, – автоколебательные системы. Из курса «Механики» известно, что такие системы должны содержать нелинейный элемент, например пружину, у которой деформация не пропорциональна силе, и устройство для осуществления обратной связи. Там же были рассмотрены простые схемы автогенераторов. Идею создания электрической автоколебательной системы можно уяснить при помощи схемы (рис. 12.3), где к контуру ( $L$ ,  $C$ ,  $R$ ), содержащему также гальванометр, подключен источник постоянной ЭДС  $\mathcal{E}$ . В цепи источника имеется ртутный контакт  $K$ , замыкаемый провололочкой, припаянной к концу стрелки гальванометра, при отклонениях стрелки вправо.

Кроме того, стрелка соединена с измерительной катушкой гальванометра (это соединение часто имеется у фабричных гальванометров). В начальный момент контакт не замкнут; замыкание его производит экспериментатор, наклоняя стрелку вправо. Допустим, что отклонение стрелки происходит в направлении тока, текущего через прибор. Тогда при полярности источника, указанной на рисунке, зарядный ток конденсатора, возникший в момент замыкания цепи и значительно превышающий ток через катушку, вызовет отклонение стрелки влево; контакт  $K$  разомкнется, и конденсатор начнет разряжаться через катушку. При этом направление тока изменится, стрелка вновь замкнет контакт, и батарея пополнит запас энергии системы, после чего процесс возобновится и будет протекать неопределенно долго. Здесь мы правильно выбрали полярность питающего источника – правильно отрегулировали обратную связь между системой и источником питания.

Нелинейными свойствами обладает участок цепи, содержащий ртутный контакт: при одном направлении тока его сопротивление ничтожно мало, при другом – неограниченно велико.

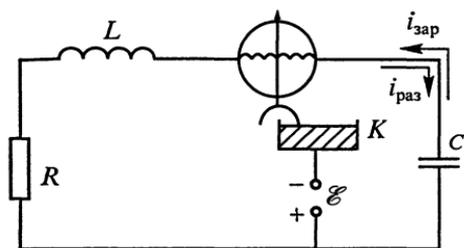


Рис. 12.3

Если изменить полярность источника, то зарядный ток вызовет отклонение стрелки вправо, контакт  $K$  будет замкнут до тех пор, пока зарядный ток конденсатора не станет меньше тока через катушку. Затем под влиянием последнего стрелка отклонится влево, контакт разорвется. Конденса-

тор, разряжаясь через катушку, также вызовет отклонение стрелки влево. Так как затухание контура велико, то ток будет очень слаб и контакт  $K$  не замкнется. Процесс прекратится, так как обратная связь выбрана неправильно.

Рассмотренная схема, обладая большой наглядностью, технически несовершенна и практического значения не имеет. В технике широкое применение нашли полупроводниковые и ламповые генераторы незатухающих электромагнитных колебаний, где управляющим элементом являются транзистор или многоэлектродная лампа, используемые в нелинейном режиме.

Транзисторы – это полупроводниковые приборы, предназначенные, в частности, для усиления и генерирования электромагнитных колебаний; они способны работать в весьма широком диапазоне частот – от сколь угодно низких до частот порядка  $10^{11}$  Гц. Термин «транзистор» – комбинация двух английских слов – *transfer* (передающий) и *resistor* (сопротивление). Транзисторы  $n-p-n$ -типа имеют две области полупроводника  $n$ -типа, разделенные очень тонким слоем (толщиной порядка десятых долей миллиметра) полупроводника  $p$ -типа. Существуют и транзисторы  $p-n-p$ -типа. Принцип работы этих устройств одинаков. Рассмотрим его для транзистора  $n-p-n$ -типа (рис. 12.4, а). В нем левый полупроводник ( $n$ -типа), называемый эмиттером (поставщиком) электронов, включен так, что  $n-p$ -переход работает в пропускном режиме для электронов, являющихся в эмиттере основными носителями заряда. В полупроводнике  $p$ -типа, называемом базой, основными носителями заряда являются дырки, а электроны служат неосновными носителями. Для электронов переход между базой и правым полупроводником  $n$ -типа, называемым коллектором (собирателем) –  $p-n$ -переход – также работает в пропускном режиме. Условное обозначение транзисторов  $n-p-n$ -типа приводится на рисунке 12.4, б.

На рисунке 12.4, а векторы  $\vec{E}$  относятся к полям, образующимся в отсутствие тока через прибор, а векторы  $\vec{E}_1$  – к полям, созданным внешними источниками ЭДС.

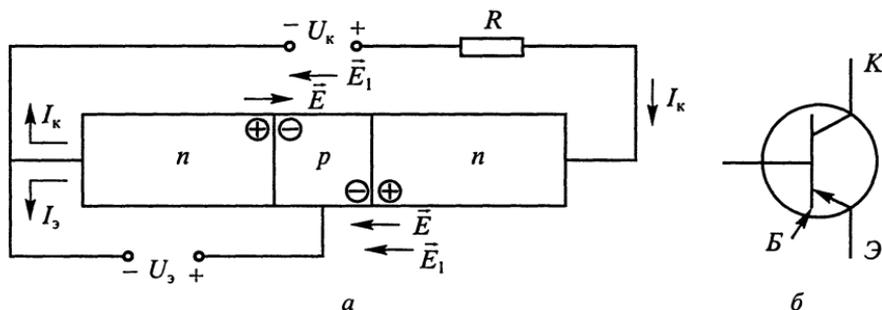


Рис. 12.4

Поле напряженностью  $\vec{E}$  и соответствующая разность потенциалов возникают за счет проникновения электронов из  $n$ -областей в базу ( $p$ -тип), а также за счет перехода дырок из базы в  $n$ -область. Эти поля (и соответствующие разности потенциалов, создающиеся ионами примесей, препятствуют дальнейшей диффузии носителей через каждый переход. Модуль вектора  $\vec{E}$  зависит от характеристик полупроводникового материала, концентрации свободных носителей заряда и внешних условий. В частности, встречные разности потенциалов на  $n-p$ - и  $p-n$ -переходах могут быть различными, если, например, в область полупроводника, служащую эмиттером, вводится больше донорной примеси, чем в коллектор ( $n_3 > n_k$ ). Здесь мы с этим считаться не будем, модули напряженностей примем одинаковыми; ионы примесей, создающие эти поля, условно изображены кружками.

Ток через прибор создается источниками напряжений  $U_k, U_3$ . Роль дырок в рассматриваемом транзисторе  $n-p-n$ -типа является второстепенной и в нашем приближенном описании не учитывается. Включая в две разные электрические цепи оба перехода, объединенные общей базой (возможно и иное включение), можно управлять током в цепи коллектора, изменяя ток в цепи эмиттера.

При подаче на транзистор внешних напряжений  $U_k$  и  $U_3$  создаются внешние поля с напряженностью  $\vec{E}_1$ . На обоих переходах эти поля облегчают прохождение электронов слева направо. Так как база очень тонка, то почти все электроны проходят в коллектор (до 99% потока), создавая ток  $I_k$ . Остальные электроны либо рекомбинируют с дырками, либо же возвращаются через внешнюю цепь в эмиттер, создавая ток  $I_3$ .

Сопrotивление  $p-n$ -перехода для неосновных носителей (электронов) не превышает десятков ом. Сопrotивление  $R$  нагрузки коллектора выбирается значительно большим – его значение и характер (активное или реактивное) определяются требованиями практики.

Предположим, что в цепи эмиттера произошло изменение напряжения на небольшую величину  $u_3$ ; при этом сила тока изменится на

$$i_3 = \frac{u_3}{R_6},$$

где  $R_6$  – сопротивление  $n-p$ -перехода эмиттер – база. Сила тока коллектора при этом изменится на величину

$$i_k \approx -i_3$$

(небольшое различие обусловлено процессами в базе, которых мы рассматривать не будем). Поэтому изменение напряжения на нагрузке составит:

$$u_R = i_K R = -i_3 R = -u_3 \frac{R}{R_6},$$

т. е. произойдет усиление напряжения.

В связи с важностью полученного результата и малой наглядностью проведенных рассуждений выполним их еще раз с несколькими иными позициями.

Напряженности  $\vec{E}_1$  внешних полей (для простоты считаем их одинаковыми) направлены так, что для основных носителей заряда эмиттерный переход открыт, а коллекторный – закрыт. Поэтому последний обладает значительно бóльшим сопротивлением. Для электронов – неосновных носителей заряда в базе – он открыт. Так как внутреннее сопротивление этого закрытого  $p$ – $n$ -перехода очень велико, т. е. ток через такой переход почти не изменяется при значительном изменении напряжения, то в его цепь можно включить нагрузку с большим сопротивлением. Напряжение, приложенное к эмиттерному переходу, вызывает инжекцию электронов в базу, незначительное понижение ее сопротивления (неравновесных свободных электронов в базе все еще существенно меньше, чем дырок), но резкое увеличение тока через открытый для электронов (неосновные носители!) переход база – коллектор. Поэтому при незначительном изменении напряжения, приложенного к эмиттерному переходу, ток через коллекторный переход будет сильно изменяться, и с включенной в его цепь нагрузки можно снимать большие напряжения, т. е. получить усиление.

Чтобы при использовании транзистора как усилителя сохранить форму кривой напряжения, следует работать на прямолинейном участке вольт-амперной характеристики  $I_K = f(U_K)$  (рис. 12.5), т. е. с не слишком сильными сигналами. Выбор рабочей точки  $A$ , вокруг которой происходят колебания напряжения, осуществляется подбором напряжения  $U_{K_0}$ . Если транзистор работает в режиме усиления, то на эмиттер подается переменное напряжение (например, радиосигнал). Различные довольно многочисленные схемы усилителей рассматриваются в курсе радиотехники. Здесь нам важно было лишь пояснить принцип работы усилителя.

При использовании транзистора в режиме генератора колебаний можно воспользоваться схемой (рис. 12.6), где нагрузкой в цепи коллектора является колебательный контур  $LC$ , имеющий собственную частоту  $\omega_0$  (генерацию с этой частотой мы и хотим получить), а в цепи эмиттера имеется катушка обратной связи  $L_3$ , индуктивно связанная с катушкой

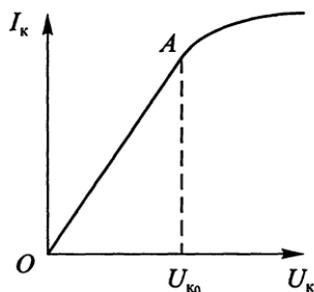


Рис. 12.5

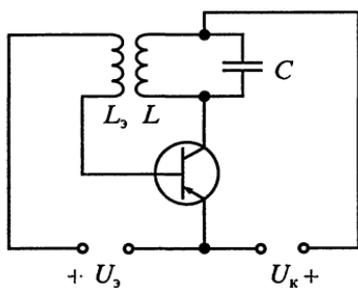


Рис. 12.6

контура. Теперь, при изменении напряжения в цепи эмиттера на  $u_э$  и порожденном им изменении напряжения на контуре  $u_к$ , вследствие взаимной индукции в катушке обратной связи наведется дополнительная ЭДС  $e = \beta u_к$ , где  $\beta$  – коэффициент обратной связи. Если фаза  $u$  подобрана правильно (ее можно изменить на  $180^\circ$  простым перевертыванием катушки контура или переполюсовкой катушки связи), то возникшее случайное колебание (при включении схемы) будет возрастать до некоторого предела, пока потери энергии за период не сравняются с приростом потребления энергии, поставляемой источником.

После этого в схеме будут происходить незатухающие колебания с частотой  $\omega_0$ . Очевидно, это будут автоколебания (см. «Механику», § 10.5). При этом транзистор работает на криволинейной части вольт-амперной характеристики, т.е. является нелинейной системой.

Более подробно работу генератора мы рассмотрим при изучении ламповых генераторов, а здесь ограничимся лишь энергетическими процессами.

Потери мощности в цепи коллектора определяются силой тока  $I_к$  и активным сопротивлением цепи  $R$ :

$$P_1 = I_к^2 R.$$

График этой функции показан на рисунке 12.7 (прямая 1). Мощность, расходуемая источником питания, равна

$$P_2 = U_к I_к.$$

Если схема нелинейна, то сила тока не пропорциональна напряжению, так что график может иметь, в частности, вид, показанный на рисунке 12.7 (кривая 2).

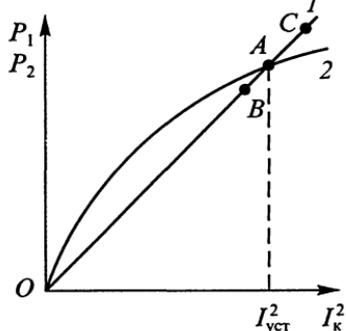


Рис. 12.7

В начале процесса (малый ток  $I_к$ ) мощность, расходуемая источником, превышает потери, так что за каждый период колебаний контур получает дополнительную энергию и амплитуда колебаний растет. Когда достигается состояние, соответствующее точке  $A$  (см. рис. 12.7), потери энергии сравниваются с ее пополнением, устанавливается режим незатухающих колеба-

ний. Он устойчив. Действительно, если случайная флуктуация увеличит амплитуду, то, так как источник не может пополнить увеличившиеся потери, система автоматически придет в исходное положение; это иллюстрируется точкой *C*. Если же в результате случайной флуктуации произойдет уменьшение амплитуды (точка *B*), то избыток энергии, отдаваемой источником, приведет систему в прежнее состояние.

В последние годы полупроводниковые диоды и транзисторы, обладающие рядом достоинств – малыми габаритами и массой, отсутствием накаливаемых катодов, возможностью применения интегральной технологии при создании сложных устройств, – в значительной части применений вытеснили свои аналоги – электровакуумные приборы. Последние, однако, сохраняют свое значение в устройствах, рассчитанных на большую мощность, в случаях, когда необходимы очень низкие собственные шумы и др. В учебных курсах рассмотрение процессов в цепях с электронными лампами важно потому, что изучаемые явления в этом случае более наглядны.

### 12.3. Ламповый генератор незатухающих колебаний

Для усиления и генерирования электромагнитных колебаний в простейших схемах используется трехэлектродная лампа. В такой лампе между катодом и анодом имеется третий электрод – сетка, на которую можно подать напряжение  $U_c + u_c$ . Поэтому анодный ток становится функцией напряжений ( $U_a + u_a, U_c + u_c$ ), и лампа приобретает ряд новых свойств, отсутствующих у двухэлектродной лампы (см. § 6.6). В анодную цепь включается нагрузка сопротивлением  $R$  (это может быть также катушка или параллельный колебательный контур); переменное напряжение  $u_R$  является полезным и передается в дальнейшие участки цепи через конденсатор  $C$ , не позволяющий постоянному напряжению  $U_R$  попасть на выходные зажимы цепи. Вольт-амперная характеристика, связывающая потенциал сетки с анодным током (при неизменном анодном напряжении  $U_a$ ), называется сеточной характеристикой. Вид ее показан на рисунке 12.8. При отрицательных потенциалах сетки (рис. 12.8) поле между ней и катодом может полностью затормозить электроны, и лампа будет заперта. При повышении сеточного напряжения возникает анодный ток, сила анодного тока возрастает, но не пропорционально напряжению. Так как сетка расположена значи-

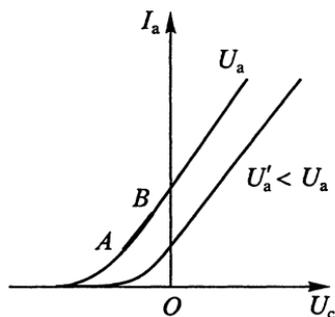


Рис. 12.8

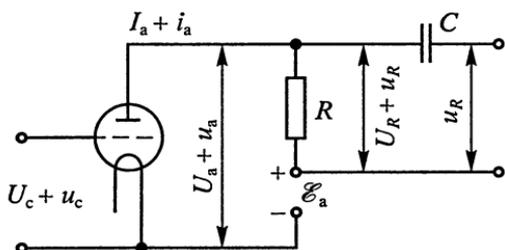


Рис. 12.9

тельно ближе к катоду, чем анод, и экранирует электрическое поле между катодом и анодом, то ток через лампу можно регулировать значительно меньшими изменениями сеточного потенциала, чем анодного.

На практике всегда используется некоторый участок характеристики, например *AB* (рабочий участок), около середины которого (начальной рабочей точки) происходят колебания напряжения и тока.

Если на сетку лампы подать одновременно постоянное напряжение  $U_c$  и переменное  $u_c$  (рис. 12.9), выбрать рабочую точку на прямолинейном участке и ограничить ее перемещение только прямолинейным участком, то между изменениями напряжения и силы тока будет существовать прямая пропорциональность:

$$i_a = S u_a,$$

где  $S = \frac{di_a}{du_c}$  – крутизна характеристики в рабочей точке.

Находя графически (рис. 12.10) изменение анодного тока  $i_a$  (и пропорциональное ему изменение напряжения  $u_R$ ), убеждаемся, что

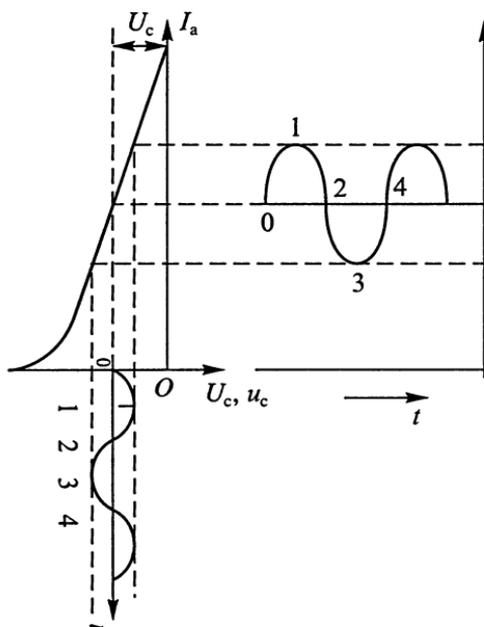


Рис. 12.10

оно соответствует форме изменений сеточного напряжения. При этом графическом представлении масштаб по осям силы токов выбирается одинаковым; по осям времени масштаб может быть и различен. Если подобрать сопротивление  $R$  так, чтобы получалось изменение  $u_a$ , превышающее  $u_c$ , то лампа будет усиливать сигнал  $u_c$ , не искажая его формы. На этом принципе основана работа ламповых усилителей.

Если рабочую точку сдвинуть в криволинейный участок характеристики, то форма анодного тока не будет воспроизводить формы сеточного напряжения

(рис. 12.11). Конечно, для усиления сигналов такой режим непригоден. Но именно он используется для получения незатухающих автоколебаний.

Включим в цепь сетки (рис. 12.12) колебательный контур ( $R, L, C$ ) и источник постоянного напряжения  $U_c$ , обеспечивающий режим, показанный на рисунке 12.11. В анодную цепь включим катушку с индуктивностью  $L_a$ , магнитно-связанную с катушкой индуктивностью  $L$ ; коэффициент взаимной индукции  $M$ ; знак его можно менять, поворачивая одну из катушек на  $180^\circ$  вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину катушки, или меняя местами концы, подключенные к катушке (при этом изменит направление вектор индукции ее магнитного поля).

Рассмотрим только установившийся режим, считая, что в цепи уже существуют незатухающие автоколебания. Выясним, как они могут длительно поддерживаться.

Идея работы автогенератора проста: при колебании напряжения на конденсаторе меняется анодный ток  $i_a$  и в катушке с индуктивностью  $L_a$  возникает переменное магнитное поле, воздействующее на катушку с индуктивностью  $L$ , где создается ЭДС индукции

$$e_c = -M \frac{di_a}{dt}.$$

Если фаза этой ЭДС будет согласована с фазой существующих колебаний, то последние будут ею поддерживаться за счет энергии, поступающей из источника ЭДС  $\mathcal{E}_a$ .

Согласование фаз достигается автоматически при правильном выборе знака коэффициента взаимной индукции  $M$  — он должен быть отрицателен (см. ниже).

При этом сила тока в анодной цепи меняется периодически, но не гармонически. Так как контур ( $LCR$ ) обладает собственной частотой  $\omega_0$ , то он выделит из негармонической ЭДС  $e_c$ , порождаемой измене-

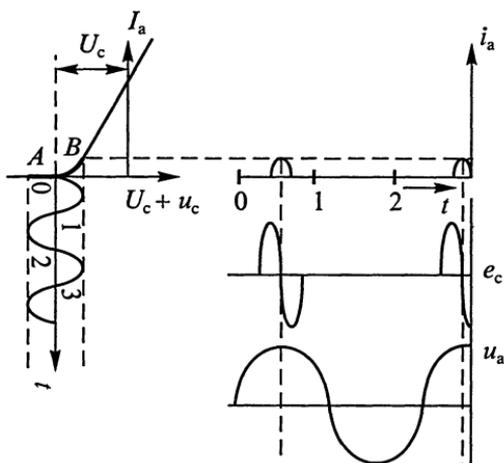


Рис. 12.11

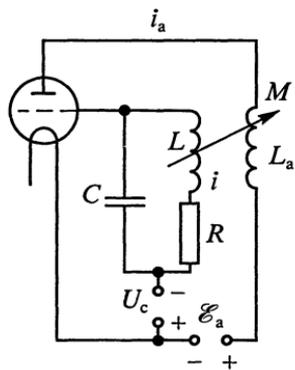


Рис. 12.12

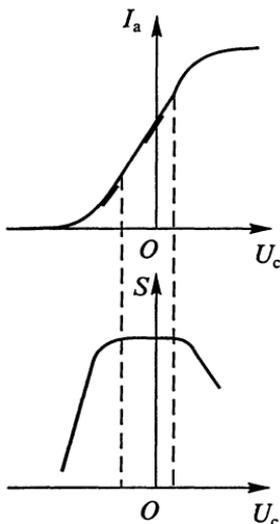


Рис. 12.13

ниями тока  $i_a$ , гармоническую составляющую с частотой  $\omega_0$ , а потому колебания в контуре практически сохраняют гармоничность.

На рисунке 12.11, кроме временной зависимости  $i_a$ , показаны и зависимости  $e_c$  и  $u_a$ . Следует иметь в виду, что амплитуда  $e_c$  не превышает 1...2% амплитуды  $u_c$  и на рисунке изменения  $e_c$  показаны в сильно увеличенном масштабе. Из графика видно, что импульсы  $i_a$  соответствуют изменениям  $u_a$  (т. е. поддерживают существующие колебания, конечно, за счет энергии источника ЭДС  $\mathcal{E}_a$ ).

В выбранном примере анодный ток существует лишь в течение небольшой части периода изменений напряжения; в других случаях он может существовать более длительное время.

Такова элементарная качественная теория автогенератора. Еще раз подчеркнем, что он обязательно должен обладать нелинейностью. В рассматриваемом случае нелинейность характеристики  $I_a = f(U_c)$  определяет нелинейную зависимость крутизны  $S$  от напряжения на сетке  $u_c$ :

$$S = \frac{di_a}{du_c} = f(U_c). \quad (12.15)$$

На рисунке 12.13 изображены характеристика нелинейного элемента  $i_a = f_1(u_c)$  и график функции  $S = f(u_c)$ . На практике обычно используют лишь малый рабочий участок характеристики (два таких участка показаны жирной линией). Верхняя правая часть характеристики используется очень редко.

Проведем теперь элементарное количественное рассмотрение процессов в автогенераторе. Вернемся к схеме на рисунке 12.12. По правилу Кирхгофа можно записать для контура в цепи сетки:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = -M \frac{di_a}{dt}, \quad (12.16)$$

где  $i_a = Su_c$ . Так как заряд конденсатора  $q = Cu_c$ , то (12.16) можно представить в виде:

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = -\frac{M}{LC} \frac{d(Su_c)}{dt}. \quad (12.17)$$

Уравнение (12.17) с учетом (12.15) – нелинейно.

Общих методов строгого решения нелинейных уравнений не существует. Трудность возникает потому, что нарушается принцип

суперпозиции и общее решение уже не равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного, как это было при решении линейного уравнения (12.2).

Нелинейные уравнения решаются различными приближенными методами. Мы применим метод линеаризации уравнения (12.17).

Из рисунка 12.13 следует, что крутизна  $S$  зависит от амплитуды колебаний довольно сложным образом. Можно принять, что каждой установившейся амплитуде отвечает свое постоянное среднее значение крутизны  $S_{cp}$ . При подстановке его в (12.17) уравнение становится линейным, легко разрешимым. В этом и заключается идея метода линеаризации.

Подставив в (12.17) среднюю крутизну и вводя для сокращения записи обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \alpha = \frac{RC + S_{cp}M}{2LC},$$

приводим (12.17) к виду:

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0. \quad (12.18)$$

Нелинейная величина  $\alpha$  зависит от заданных параметров контура ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ) и типа лампы (крутизна  $S$ ). Меняя коэффициент взаимной индукции  $M$ , можно изменять значения  $\alpha$  и получать различные режимы.

В уравнении (12.18)  $\alpha$  – коэффициент, зависящий от амплитуды колебаний и сопротивления  $R$ . Он характеризует потери энергии в резисторе с учетом их компенсации за счет цепи обратной связи. При правильном выборе знака коэффициента взаимной индукции ( $M < 0$ )  $\alpha$  уменьшается – происходит регенерация, энергия поступает в фазе с существующими в контуре колебаниями; наоборот, при неправильном выборе знака  $M$  потери увеличиваются.

Так, если коэффициент  $M$  положителен либо отрицателен, но невелик по модулю, так что

$$|M| < \frac{RC}{S_{cp}},$$

то  $\alpha_1 > 0$ , т. е. получается уже знакомое уравнение (12.2), имеющее решение:

$$u_c = U_m \exp(-\alpha_1 t) \cos(\omega t + \varphi_0).$$

В этом случае колебания затухают, так как либо знак обратной связи выбран неверно и вызванные ею колебания оказываются в противофазе с основными колебаниями, либо же (при  $M < 0$ ), хотя знак выбран правильно, возникающие синфазные колебания настолько

слабы, что вносимая в контур дополнительная энергия не может покрыть потерь на нагревание проводников.

Увеличивая модуль коэффициента взаимной индукции  $M$  в случае, когда  $M < 0$ , можно получить  $\alpha = 0$ . При этом

$$M = -\frac{RC}{S_{\text{ср}}}. \quad (12.19)$$

Следует обратить внимание, что значение  $S_{\text{ср}}$  здесь также изменилось по сравнению с предыдущим случаем. Решением (12.18) будут тогда являться незатухающие автоколебания

$$u_c = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (12.20)$$

Их амплитуду определяет средняя крутизна  $S_{\text{ср}}$ , а не начальные условия.

Условие (12.19) называется условием самовозбуждения автогенератора.

Если еще увеличить модуль  $M$ , так чтобы получить  $\alpha = -\alpha_2$ , то формально получается решение:

$$u_c = U_m \exp(\alpha_2 t) \cos(\omega t + \varphi_0),$$

представляющее неограниченно возрастающие колебания. Физически это невозможно хотя бы из-за ограниченности мощности, которую способен отдать источник ЭДС, питающий цепь. Кроме того, при неограниченном возрастании амплитуды нельзя говорить о среднем значении крутизны.

Реально в этом случае по мере развития колебаний, по тем или иным причинам (из-за уже упомянутой ограниченности мощности источника, появления сеточного тока и т.п.) возникает дополнительный механизм ограничения крутизны;  $\alpha_2$  начнет уменьшаться, и процесс снова вернется к описываемому уравнением (12.20).

Таким образом, с помощью линеаризации нелинейного уравнения (12.17) мы получили возможность вместо него исследовать линейное уравнение (12.18).

Искомое решение в виде (12.20) – гармонические автоколебания. Однако ясно, что этот результат – лишь приближение к действительности. На самом деле автоколебания ангармоничны – ведь мгновенное значение крутизны  $S$  периодически меняется, наибольшее поступление энергии за счет цепи обратной связи осуществляется лишь в те моменты времени, когда крутизна  $S$  максимальна. Сам ( $RLC$ )-контур, обладающий достаточно высокой добротностью, выделит гармоническую составляющую (11.20) из негармонической ЭДС.

Конечно, при получении решения (11.20) нельзя ставить вопрос о процессе установления колебаний: ведь мы допустили заранее,

что колебания уже установились в режиме, отвечающем выбранному значению  $S_{\text{ср}}$ . А как именно достигался этот режим, приближенный метод описать не может; это доступно лишь более строгому рассмотрению задачи. Не имея здесь такой возможности, поясним процесс установления колебаний для того частного случая, когда изменения анодного тока представляют кратковременные толчки, происходящие один раз за период, что отвечает рисунку 12.11.

Пусть толчки постоянны по величине и равны  $I$ . Пусть перед первым толчком ( $t = 0$ ) анодный ток равен  $I_a$ . После первого толчка он примет значение

$$I_1 = I + I_a.$$

Перед вторым толчком, (через период) ток равен

$$I'_1 = I_1 \exp(-\alpha T) = I_1 \exp\left(-\frac{\pi}{Q}\right);$$

здесь  $Q$  – добротность контура. После второго толчка ток увеличивается до значения

$$I_2 = I'_1 + I = I_a \exp\left(-\frac{\pi}{Q}\right) + I \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi}{Q}\right)\right].$$

После  $(k + 1)$ -го толчка ток будет равен

$$I_{k+1} = I_a \exp\left(-k \frac{\pi}{Q}\right) + I \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi}{Q}\right) + \dots + \exp\left(-k \frac{\pi}{Q}\right)\right].$$

В пределе ( $k \rightarrow \infty$ ) получится установившееся значение тока:

$$I_{\text{уст}} = \frac{I}{1 - \exp\left(-\frac{\pi}{Q}\right)} \approx I \frac{Q}{\pi} > I_1,$$

так как обычно  $Q \ll \pi$ . Этот установившийся ток не зависит от начальных условий (от тока  $I_a$ ).

Рассмотренный процесс иллюстрируется рисунком 12.14. Здесь по оси абсцисс отложены номера толчков, а по оси ординат – значения  $I_k$ . Построение выполнено

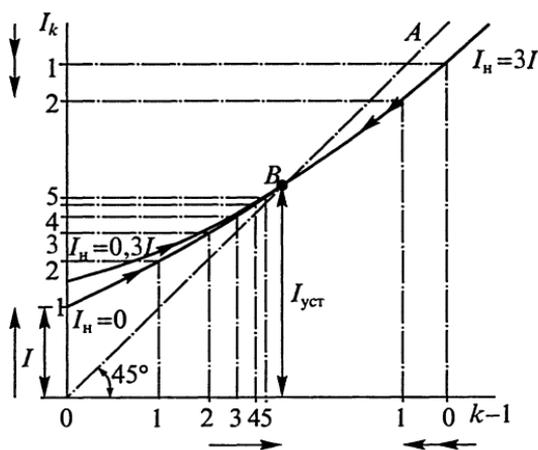


Рис. 12.14

для заданных  $I$  и  $Q$  при трех разных начальных точках:  $I_n = 0$ ;  $I_n = 0,3I$ ;  $I_n = 3I$ .

В первых двух случаях ток стремится к предельному значению  $I_{уст}$  (точка  $B$ ) снизу; в третьем случае ток стремится к тому же предельному значению, но сверху.

Строгий анализ уравнения (12.18) приводит к следующим важным заключениям.

1. Установившиеся колебания негармоничны, но в них присутствует составляющая частотой  $\omega_0$ , которая и выделяется контуром, представляющим для этой частоты наибольшее сопротивление (чисто активное)  $Z = \frac{L}{CR}$  (см. уравнение 11.38).

2. Для возникновения незатухающих колебаний необходимо, чтобы изменения напряжения на лампе и на анодной катушке были противоположны на фазе (т. е. чтобы было  $M < 0$ ).

Из рисунка 12.12 следует, что при росте потенциала сетки растет анодный ток. Поэтому растет и напряжение на анодной нагрузке. Но из-за постоянства ЭДС  $\mathcal{E}_a$  увеличение напряжения на анодной нагрузке должно сопровождаться уменьшением напряжения на лампе.

3. Условие самовозбуждения колебаний

$$M = -\frac{RC}{S_{cp}}$$

приобретает более ясный физический смысл, если ввести коэффициент обратной связи, равный

$$k = \frac{|M|}{L} = \frac{RC}{LS_{cp}} = \frac{1}{\rho^2 S_{cp}}.$$

Коэффициент обратной связи равен отношению модуля коэффициента взаимной индукции (без которого не может быть самовозбуждения) к собственной индуктивности катушки колебательного контура.

При помощи ламповых схем можно получать колебания с частотами от произвольно низких (были бы только достаточно большие индуктивности и емкости) до сотен мегагерц. Получение более высоких частот невозможно как из-за слишком больших значений емкости и индуктивности электродов лампы, так и вследствие конечного времени пролета электронов в лампе, из-за чего теряет силу допущение о пропорциональности между  $i_a$  и  $u_c$ : возникают большие фазовые сдвиги и работа схем нарушается.

Более высокие частоты получаются в лампах, где используется взаимодействие электронного потока с электрическими полями (клистроны, лампы бегущей волны и пр.) и магнитными полями (магнетроны). Здесь удается получить колебания с частотами до  $10^{12}$  Гц. Еще более высокочастотные колебания получают не за счет

использования энергии электронных пучков, а за счет процессов, происходящих в молекулах и атомах вещества, – в этом случае предельно высокими частотами являются частоты, значения которых достигают  $10^{23}$  Гц. Следует отметить, что атомно-молекулярные процессы позволяют получить и значительно более медленные колебания (вплоть до частот порядка десятков мегагерц).

## 12.4. Принципы радиосвязи

Одним из важных применений генераторов незатухающих колебаний является беспроводная связь. По причинам, которые будут освещены ниже, радиосвязь можно осуществить только на достаточно высоких частотах – сотни килогерц и выше. Чтобы можно было передать какое-либо сообщение, необходимо менять в соответствии с ним характер сигнала. Постоянно включенная радиостанция столь же непригодна для передачи сообщений, как и постоянно выключенная (кроме того, первая еще потребляет энергию!). Простое включение и выключение передающей станции позволяет передать сообщение, если установлено условное значение порядка и длительности включений и выключений, например в известной азбуке Морзе.

Но для передачи речи, музыки или изображений сигнал должен быть не условным, а отвечающим форме передаваемого сообщения. В этих случаях прибегают к более сложному воздействию на незатухающее колебание – его модулируют, т. е. меняют в соответствии с сообщением амплитуду, частоту или фазу незатухающих гармонических колебаний. Мы рассмотрим только идею воздействия на амплитуду (амплитудную модуляцию), не вникая в детали технического выполнения этой задачи.

Пусть требуется передать сигнал звуковой частоты ( $40\pi \text{ с}^{-1} < \omega < 4\pi \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ), т. е. низкочастотный. Для простоты положим, что он – гармонический. Этот сигнал воздействует на микрофон, в цепи которого получается напряжение низкой частоты:

$$u_1 = U_1 \cos \Omega t.$$

Это напряжение вместе с напряжением от генератора высокой (несущей) частоты

$$u_2 = U_2 \cos \omega t \quad (\omega \gg \Omega) \quad (12.21)$$

подается в цепь, содержащую нелинейный элемент  $D$  и контур, настроенный на частоту  $\omega$  (рис. 12.15). Пусть характеристика цепи с нелинейным сопротивлением есть

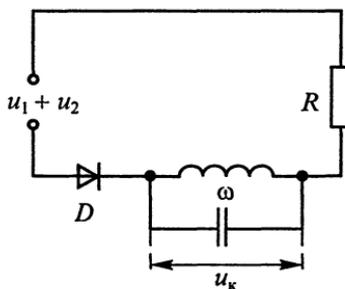


Рис. 12.15

$$i = au + bu^2. \quad (12.22)$$

Тогда в цепи получится сложный ток:

$$i = aU_2 \cos \omega t + 2bU_1U_2 \cos \omega t \cos \Omega t + i_\Omega + i_{2\Omega} + i_{2\omega} + I,$$

где индексы у токов означают их частоты,  $I$  – постоянная составляющая.

Так как в цепи имеется параллельный контур, настроенный на частоту  $\omega$ , то заметное падение напряжения на нем дадут лишь токи, имеющие частоту, близкую к частоте контура:

$$u_k \sim aU_2 \left[ 1 + 2\frac{b}{a}U_1 \cos \Omega t \right] \cos \omega t = aU_2 [1 + M \cos \Omega t] \cos \omega t, \quad (12.23)$$

где  $M$  – коэффициент модуляции, пропорциональный амплитуде  $U_1$  звукового сигнала.

Таким образом, из сложного сигнала выделяется *негармоническая составляющая* частотой  $\omega$  (несущей), у которой амплитуда меняется со звуковой частотой  $\Omega$ .

Уравнение (12.23) можно представить и в таком виде:

$$u_k \sim U_2 \cos \omega t + \frac{1}{2}U_2M \left\{ \cos[(\omega + \Omega)t] + \cos[(\omega - \Omega)t] \right\}, \quad (12.24)$$

т.е. напряжение на нагрузке является суммой трех *гармонических колебаний* – несущего и двух (близких к нему по частоте) боковых; эти колебания происходят с постоянной амплитудой, если не меняется амплитуда модулирующего напряжения, влияющая на коэффициент модуляции  $M$ .

Нужно понять, что представления (12.23) и (12.24) с математической точки зрения совершенно равноценны. Их физическая (или практическая) ценность определяется свойствами аппаратуры, в которой используются сигналы.

Подобная зависимость встречается очень часто. Так, число игроков футбольной команды равно 11 с точки зрения повара, готовящего для команды обед. Но с точки зрения кладовщика, подготавливающего для них спортивную форму, оно равно  $(10 + 1)$ , так как форма вратаря должна отличаться от формы полевых игроков.

В нашем случае первое представление пригодно для приборов, реагирующих на временные изменения сигнала, например при контроле напряжения обычным осциллографом; на экране последнего получается кривая, где ось абсцисс служит осью времени, а ось ординат – осью мгновенных значений напряжения (рис. 12.16).

Второе представление полезно при анализе сигнала прибором, реагирующим на амплитуды и частоты (но нечувствительным к фазам), например электронным анализатором спектра. На его эк-

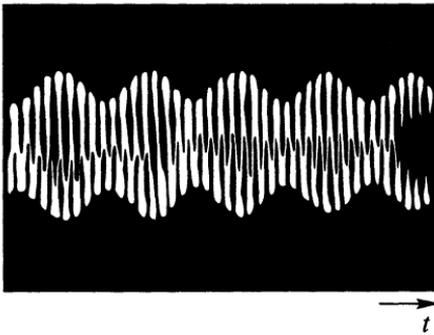


Рис. 12.16

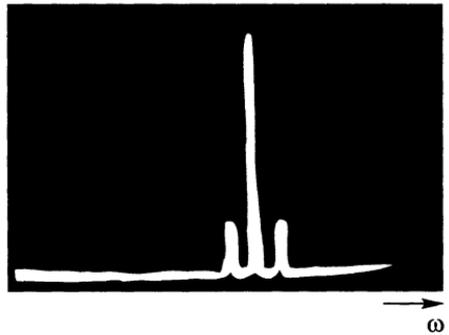


Рис. 12.17

ранее ось абсцисс служит осью частот, а ось ординат – осью амплитуд (рис. 12.17).

Таким образом, в сигнале, модулированном по амплитуде, нет колебаний частотой  $\Omega$ . Из представления (12.24) можно заключить, что контур не должен иметь чрезмерную добротность, – его полоса пропускания (ширина резонансной кривой) должна быть больше, чем  $2\Omega$ , чтобы боковые частоты  $\omega \pm \Omega$  были им воспроизведены.

Но, с другой стороны, добротность контура не должна быть меньше нескольких десятков, чтобы достаточно сильно проявлялись его резонансные свойства. Поэтому необходимо выполнить условие:  $2\Omega = 4\pi F \ll \omega = 2\pi f$ , т.е. ширина канала связи (полосы частот, занятой для передачи) должна быть относительно невелика.

Пусть используется диапазон частот от  $f = 10^6$  Гц до  $f = 10^7$  Гц и  $F = 10^4$  Гц. В этом диапазоне можно разместить довольно большое число независимо работающих передатчиков (каналов связи):

$$N = \frac{\Delta f}{2F} = \frac{0,9 \cdot 10^7}{2 \cdot 10^4} = 450.$$

Если бы передача шла на несущих колебаниях, имеющих в десять раз меньшую разность частот, то число возможных каналов было бы равно всего  $N_1 = 45$  (при  $10^5$  Гц  $\leq f \leq 10^6$  Гц).

Таким образом, повышение несущей частоты диктуется также необходимостью разместить большое число независимых и не мешающих друг другу радиостанций.

Модулированный сигнал (12.23) излучается антенной передатчика (см. гл. 13) в окружающее пространство и улавливается антенной  $A$  приемника (рис. 12.18). К антенне подключен колебательный контур  $LC$ , настроенный в резонанс с несущей частотой

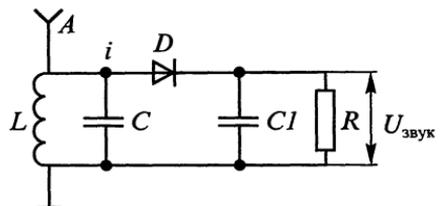


Рис. 12.18

той  $\omega$ . Поэтому на контуре получится усиленное напряжение частотой  $\omega$ , а сигналы станций, работающих одновременно на других частотах, практически не будут влиять на прием нужной станции. Параллельно колебательному контуру подключен нелинейный элемент (детектор)  $D$  с вольт-амперной характеристикой (12.22) и резистор сопротивлением  $R$ , на котором должна быть выделена звуковая частота. Параллельно резистору  $R$  подключен конденсатор  $C1$ .

Ток  $i$  в неразветвленной части цепи детектора будет определяться уравнениями (12.22) и (12.23):

$$\begin{aligned} i &= a(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega t + b[(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega t]^2 = \\ &= I + i_{\text{в.ч.}} 2b \left[ M \cos \Omega t + \frac{M^2}{4} \cos 2\Omega t \right], \end{aligned} \quad (12.25)$$

где  $I = \text{const}$ ;  $i_{\text{в.ч.}}$  – сумма токов высоких частот.

Таким образом, детектор разделяет токи звуковой частоты и высоких частот. Первые должны пройти через резистор, вторые являются лишними.

Емкость  $C1$  конденсатора подбирается так, чтобы его сопротивление гармонически меняющимся токам было связано с не зависящим от частоты сопротивлением резистора соотношениями:

$$\frac{1}{\Omega C_1} > R > \frac{1}{\omega C_1}.$$

При этом условии на цепочке  $RC1$  возникает падение напряжений только звуковых частот ( $\Omega, 2\Omega$ ). Кроме полезного сигнала

$$u_1 \sim M \cos \Omega t,$$

получается искажающее напряжение удвоенной частоты:

$$u_2 \sim \frac{M^2}{4} \cos 2\Omega t.$$




---

**Попов Александр Степанович (1859–1906)**, русский физик, профессор Петербургского политехнического института. Сконструировал весьма чувствительный приемник электромагнитных волн с антенной и применил его сначала для регистрации грозových разрядов, а затем для приема сигналов сконструированного им генератора электромагнитных волн. Обнаружил отражение радиоволн от судна, проходившего между двумя кораблями, поддерживавшими радиосвязь, и тем самым обосновал возможность радиолокации.

Но если  $\frac{M^2}{4} < 0,1$ , то его влияние незначительно. Поэтому коэффициент модуляции  $M$  не должен превышать 0,35.

В случае, когда  $R$  – сопротивление обмотки громкоговорителя, задача приема решена. Если же получающееся напряжение звуковой частоты мало (слабый сигнал), то это напряжение подают на усилитель, а с него на громкоговоритель.

На рисунке 12.19 вверху представлена осциллограмма напряжения (12.23), возникающего на контуре  $LC$  приемной схемы; в средней части рисунка изображена кривая тока через детектор. Напряжение на резисторе  $R$ , получающееся при правильном выборе емкости конденсатора  $C1$ , показано на рисунке 12.19 внизу; оно меняется со звуковой частотой (высокая частота здесь практически отсутствует).

При передаче движущихся изображений (телевидении) модуляция осуществляется сигналами, зависящими от освещенности

того или иного участка передаваемого объекта. Технически это осуществить гораздо труднее, чем модуляцию звуковым сигналом; принципиальная же сторона процесса модуляции остается прежней.

Схемы амплитудной модуляции, как и принципы частотной и фазовой модуляции, рассматриваются в курсе радиотехники.

Впервые радиосвязь, т. е. передача и прием условного телеграфного сигнала, была осуществлена А. С. Поповым в Петербурге (на расстоянии в несколько десятков метров) в 1895 г.

В настоящее время связь осуществляется на космических расстояниях, например с космическими кораблями, летавшими на встречу с кометой Галлея (расстояние около 200 млн км), а также к планете Нептун (расстояние – 4500 млн км).

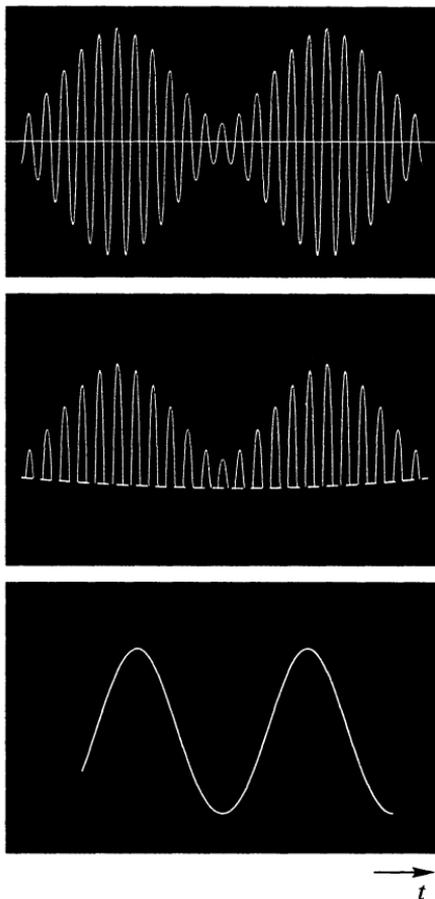


Рис. 12.19

## Глава 13

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### 13.1. Волновое уравнение. Электромагнитные волны

Уравнения Максвелла – основа классической электродинамики – позволяют исследовать весьма широкий круг электромагнитных явлений. Самим Максвеллом было получено важнейшее следствие из этих уравнений: возможность существования в вакууме периодического во времени и пространстве электромагнитного поля – электромагнитных волн. Для вакуума основные уравнения (10.17) и (10.18) принимают вид:

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}; \quad -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

причем

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

Описываемые этими уравнениями поля не связаны ни с зарядами, ни с токами проводимости и являются самостоятельно существующей реальностью. Это одна из форм существования материи – электромагнитное поле.

В дифференциальной форме два первых уравнения запишутся следующим образом (см. 10.21 и 10.23):

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (13.1)$$

Из сказанного видно, что векторы напряженностей и индукций поля имеют вихревой характер, т. е. линии всех полей замкнуты сами на себя. Общее решение уравнений (13.1) затруднительно, так как каждое из полей (электрическое и магнитное) зависит от трех координат и времени. Но при рассмотрении небольшой области пространства можно допустить, что оба поля будут изменяться только вдоль одной оси (например,  $Z$ ) и времени (плоское поле). Тогда производные  $\frac{\partial}{\partial x}$  и  $\frac{\partial}{\partial y}$  обращаются в нуль. Пользуясь уравнениями (13.1)

и приведенными в § 10.3 развернутыми выражениями векторной функции rot, найдем для трех компонент векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  такие выражения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\frac{\partial H_y}{\partial z}; & -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} &= -\frac{\partial E_y}{\partial z}; \\ \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{\partial H_x}{\partial z}; & -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial z}; \\ \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} &= 0; & -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Из двух последних уравнений следует, что

$$E_z = E(x, y, z); \quad H_z = E(x, y, z).$$

Эти уравнения описывают не зависящие от времени постоянные поля. Они не представляют для нас интереса, и мы ограничимся частным случаем:  $E_z = 0; H_z = 0$ .

Остальные уравнения (13.2) распадаются на две независимые группы: одна группа содержит только  $E_x$  и  $H_y$ , другая —  $E_y$  и  $H_x$ . Рассмотрим первую группу:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}; \quad -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z}.$$

Продифференцировав первое уравнение по времени (и умножив на  $\mu_0$ ) и второе уравнение по координате, можно исключить  $H_y$  и получить так называемое волновое уравнение для  $E_x$ :

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}. \quad (13.3)$$

Если исключить  $E_x$ , то такое же волновое уравнение получится для  $H_y$ .

Частным решением волнового уравнения может быть произвольная функция аргумента  $\left(t - \frac{z}{v}\right)$ :

$$E_x = E_m f\left(t - \frac{z}{v}\right), \quad (13.4)$$

имеющая первую и вторую производные. Действительно, подставляя это решение в уравнение (13.3) и требуя, чтобы получилось тождество, находим:

$$\varepsilon_0 \mu_0 E_m f''\left(t - \frac{z}{v}\right) \equiv \frac{E_m}{v^2} f''\left(t - \frac{z}{v}\right),$$

где  $f''$  – вторая производная функции  $f$  по ее аргументу. Отсюда получаем необходимое для тождественности условие:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Очевидно, решение (13.4) характеризует электрическое поле, распространяющееся в направлении возрастающих  $z$  со скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (13.5)$$

С такой же скоростью будет распространяться и магнитное поле. Но, как известно, скорость света в вакууме равна

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \quad (13.6)$$

Так как функция  $f\left(t - \frac{z}{v}\right)$  может быть периодической (и во времени, и в пространстве), то Максвелл заключил, что должны существовать электромагнитные волны и что свет имеет электромагнитную природу. Таким образом, он объединил электромагнетизм и оптику, сделав одно из самых замечательных обобщений в истории физики.

Амплитуда  $E_m$  напряженности поля в (13.4) определяется в зависимости от характера рассматриваемой задачи начальными или граничными условиями. Вторую постоянную интегрирования – начальную фазу – примем равной нулю.

Подставляя  $E_x$  в одно из уравнений, связывающих  $E_x$  и  $H_y$ , получаем:

$$\epsilon_0 E_m f' = -\frac{\partial H_y}{\partial z},$$

где  $f'$  – первая производная функции  $f$  по ее аргументу. Интегрируя по координате, находим:

$$\epsilon_0 v E_m f\left(t - \frac{z}{v}\right) = H_y = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_x. \quad (13.7)$$

Отношение напряженностей полей равно

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0 = 377 \text{ Ом},$$

где  $Z_0$  – волновое сопротивление вакуума.

Если напряженность электрического поля меняется по гармоническому закону, например в уравнении (13.4) функция  $f$  задана косинусом:

$$E_x = E_m \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right],$$

то для напряженности магнитного поля получается:

$$H_y = \frac{E_m}{Z_0} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right], \quad (13.8)$$

т.е. мы имеем бегущую в направлении увеличивающихся  $z$  монохроматическую электромагнитную волну, для которой характерно, что  $E_x$  и  $H_y$  изменяются синфазно.

Переменим знак в аргументе:

$$E_x = E_m \cos \left[ \omega \left( t + \frac{z}{v} \right) \right].$$

Тогда получится (см. 13.2):

$$H_y = -\frac{E_m}{Z_0} \cos \left[ \omega \left( t + \frac{z}{v} \right) \right].$$

Эти выражения определяют волну, бегущую в направлении убывающих  $z$ . В обоих случаях векторы  $\vec{E}_x$ ,  $\vec{H}_y$  и  $\vec{v}$  образуют правую тройку (они взаимно перпендикулярны). Итак, свободно распространяющаяся электромагнитная волна поперечна (для волн, распространяющихся несвободно, например для волн в металлических трубах, поперечность может нарушаться – волна может приобрести дополнительную продольную составляющую). Так как расположение  $\vec{E}_x$  и  $\vec{H}_y$  со временем не меняется, то волна называется *плоско (линейно)-поляризованной*. Плоскость, проведенная через вектор скорости и электрический вектор, называется *плоскостью колебаний*, а плоскость, проходящая через вектор скорости и магнитный вектор, называется *плоскостью поляризации* (этот термин употребляется теперь только в оптике).

*Длиной волны*, как известно, называют расстояние, на которое волна распространяется за период. Поэтому

$$\lambda = vT = 2\pi \frac{v}{\omega} = \frac{2\pi}{k}, \quad (13.9)$$

где  $k$  – волновое число. Поэтому  $E_x = E_m \cos(\omega t - kz)$ .

Легко видеть, что полученные уравнения вида (13.4) и (13.8) для электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля математически подобны уравнениям, характерным для механических волновых процессов (см. «Механику»). Поэтому, как и при изучении колебательных процессов, рассмотрение свойств элект-

ромагнитных волн может быть проведено с широким использованием электромеханических аналогий.

Два других уравнения (13.2) совершенно подобны рассмотренным уравнениям. Очевидно, решение их представляет такую же линейно-поляризованную волну, только с компонентами  $E_y$  и  $H_x$ .

В более общем случае, когда одновременно существуют оба поля ( $E_x, H_y$  и  $E_y, H_x$ ), волна может иметь не линейную, а более сложную поляризацию, так как амплитуды и начальные фазы напряженностей обоих полей могут быть различны. Такие волны будут рассмотрены в «Опике и атомной физике».

Геометрическое место точек, где напряженность  $\vec{E}(\vec{H})$  имеет одну и ту же фазу, называется волновой поверхностью (или волновым фронтом). Направления распространения волны, перпендикулярные волновому фронту, называются лучами. Для рассматриваемого случая (ограниченной области пространства) волновая поверхность является плоской, все лучи параллельны друг другу.

Реальные волны бывают или расходящимися – от источника, или сходящимися, если на их пути находились приспособления, сводящие лучи вместе (превращающие расходящийся фронт в сходящийся). Такими устройствами являются вогнутые зеркала и выпуклые линзы.

Бегущая волна несет с собой энергию. Так как плотность энергии, как было показано (см. 4.3 и 9.9), равна

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_x^2, \quad w_m = \frac{1}{2} \mu_0 H_y^2,$$

то полная энергия единицы объема равна

$$w = w_e + w_m = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E_x H_y = \frac{1}{c} E_x H_y.$$

Через элемент поверхности  $d\vec{S}$ , нормальный к векторам  $\vec{E}_x$  и  $\vec{H}_y$ , в единицу времени в среднем пройдет мощность, равная

$$dP = w_{cp} c dS = E_m H_m \left\{ \left[ f \left( t - \frac{z}{v} \right) \right]^2 \right\}_{cp} dS,$$

где  $w_{cp}$  и  $f_{cp}^2$  – средние значения плотности энергии и квадрата функции  $f$ . Введем вектор Умова – Пойнтинга

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}], \quad (13.10)$$

определяющий поток энергии в единицу времени через единичную площадку, относительно которой вектор нормален. Для гармонических волн среднее значение модуля этого вектора за период колебаний (интенсивность  $I$ ) составляет

$$S_{\text{cp}} = I = \frac{dP}{dS} = \frac{1}{2} E_m H_m = \frac{1}{2} Z_0 H_m^2 = \frac{1}{2} \frac{E_m^2}{Z_0},$$

так как среднее за период значение функции  $\cos^2 \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right]$  равно  $1/2$ . Полученное выражение формально подобно закону Джоуля – Ленца; существенное различие заключается в том, что энергия, описываемая выражением (13.10), либо проникает внутрь объема, ограниченного поверхностью  $S$  (если вектор  $\vec{c}$  антипараллелен  $d\vec{S}$ ), либо же выходит из него – излучается (если  $\vec{c}$  параллелен  $d\vec{S}$ ).

При  $E = 1$  В/м интенсивность равна  $I \approx 1,3 \cdot 10^{-3}$  Вт/м<sup>2</sup>. Примерно такова интенсивность излучения 200-ваттной лампы накаливания на расстоянии около 400 м; но на видимое излучение приходится не более 5% этого значения. Основная часть излучения приходится на более длинноволновый, инфракрасный диапазон волн.

Встречая на пути препятствие, волна должна оказывать на него давление. Возникновению светового давления можно дать наглядное качественное объяснение. Пусть плоская волна ( $\vec{E}_x, \vec{B}_y$ ) нормально падает на металлическую пластину. Под действием поля  $\vec{E}_x$  в пластине возникнет ток плотностью  $\vec{j} = \gamma \vec{E}_x$ , т.е. заряды приобретут скорость  $\vec{v}_x$ . Взаимодействие их с полем  $\vec{B}_y$  определится силой Лоренца, пропорциональной  $[\vec{v}_x, \vec{B}_y]$ , т.е. направленной по оси  $Z$ , – это и есть сила светового давления.

Следуя специальной теории относительности, припишем полю импульс  $p = I/c$ .

Если волна будет падать на плоскую поглощающую поверхность  $dS$ , расположенную перпендикулярно направлению лучей, и будет полностью поглощаться, т.е. отдавать поверхности свой импульс, то элемент поверхности испытывает силу давления

$$df = \frac{I}{c} dS.$$

Следовательно, давление волны (при полном поглощении)  $p_{\text{в}}$  равно

$$p_{\text{в}} = \frac{I}{c}.$$

Если же поверхность полностью отражает волну, не поглощая ее, то давление, очевидно, удваивается, так как при этом импульс меняет знак.

В обычных условиях давление электромагнитных волн очень мало. Так, солнечное излучение, имеющее у поверхности Земли интенсивность  $I = 1500$  Вт/м<sup>2</sup>, создаст на идеально отражающей поверхности давление

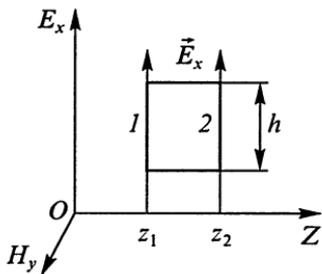


Рис. 13.1

$$p_b = \frac{2I}{c} = 10^{-5} \text{ Па.}$$

Впервые давление электромагнитных волн (световое давление) было измерено в 1899 г. П. Н. Лебедевым, причем теория Максвелла блестяще подтвердилась.

Если в поле плоской волны (рис. 13.1) поместить металлический прямолинейный проводник 1, параллельный вектору  $\vec{E}_x$ , то в нем наведется ЭДС

$$\mathcal{E}_1 = \int_0^h \vec{E}_x \cdot d\vec{h} = hE_m \cos(\omega t - kz),$$

где  $h$  – длина проводника. Такой проводник называют прямой антенной. В нем возникают вынужденные колебания. Он может быть использован для определения поляризации волны, так как при повороте его в плоскости чертежа на некоторый угол  $\varphi$  ЭДС будет убывать пропорционально  $\cos \varphi$ .

Если расположить два таких проводника на расстоянии  $z_2 - z_1$ , то в них наведутся соответственно ЭДС  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= hE_m \cos(\omega t - kz_1); \\ \mathcal{E}_2 &= hE_m \cos(\omega t - kz_2); \end{aligned}$$

где  $k = \frac{\omega}{v}$  – волновое число.

Соединим эти проводники двумя горизонтальными проводниками. Получится рамочная антенна. Циркуляция вектора  $\vec{E}_x$  по контуру антенны, обходимому против часовой стрелки, дает ЭДС  $\mathcal{E}$ , равную

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1, \quad (12.11)$$

так как в горизонтальных участках при заданной поляризации ЭДС не наводится.



**Лебедев Петр Николаевич (1866–1912)**, русский физик, профессор Московского университета. Получил электромагнитные волны длиной в несколько миллиметров, подробно исследовал их свойства. Впервые измерил давление света на твердые тела и газы и показал, что результаты измерений полностью соответствуют расчетам Максвелла.

В рассмотренном случае рамка пронизывается переменным магнитным потоком

$$\Phi = \mu_0 H_m h \int_{z_1}^{z_2} \cos(\omega t - kz) dz,$$

а потому в ней наводится ЭДС:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 H_m h \frac{\omega}{k} [\cos(\omega t - kz_2) - \cos(\omega t - kz_1)],$$

что совпадает с (13.11), так как

$$\mu_0 H_m \frac{\omega}{k} = \mu_0 E_m \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = E_m.$$

При повороте рамки около ее вертикального участка ЭДС уменьшается, так как уменьшается проекция горизонтального участка рамки на ось  $Z$ . Поэтому рассмотренная антенна обладает направленным действием и для максимальной интенсивности приема должна быть правильно ориентирована относительно источника волн, например передающей радиостанции. Это свойство позволяет применить рамку для определения направления на передающую радиостанцию.

В заключение обратим внимание на одну важную особенность изменяющегося во времени магнитного поля. При изучении электромагнитной индукции (см. гл. 9) часто рассматривают *однородное* магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ , пронизывающее некоторый контур. Затем предполагают, что поле начинает изменяться со временем. Читатель должен твердо запомнить, что поле изменения ин-

дукции  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  уже не будет однородным. Если бы однородность сохранилась, то, рассматривая электромагнитную индукцию в круговом витке, мы установили бы (в силу симметрии), что в любых двух диаметрально противоположных участках  $d\vec{l}$  витка должны возникнуть равные по модулю и противоположные по знаку ЭДС  $d\mathcal{E} = \vec{E} \cdot d\vec{l}$ , и суммарная (по всему витку) ЭДС оказалась бы равной нулю. Но это противоречит основному закону Фарадея, так как магнитный поток, охватываемый витком, меняется во времени. В действительности фазы элементарных ЭДС не вполне одинаковы (как в рассмотренном выше примере рамки в поле электромагнитной волны), а потому суммарная ЭДС отлична от нуля. Действительно, если вектор  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  перпендикулярен плоскости витка, то переменное электромагнитное поле должно распространяться в этой плос-

кости. Поэтому фазы  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  у симметрично расположенных участков витка окажутся различными, и суммарная ЭДС  $\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$  не обратится в нуль.

В квазистационарных процессах (гл. 10) это обстоятельство не явно учитывалось.

### 13.2. Экспериментальная проверка волновой теории. Отражение волн. Стоячие волны

Экспериментальное подтверждение выводов Максвелла дал впервые Г. Герц в 1887–1888 гг., уже после кончины Максвелла. Г. Герц получил и исследовал волны, длина которых менялась от нескольких метров до 60 см (волны Герца). Позже многие ученые старались получить более короткие волны, чтобы заполнить пробел между волнами Герца и инфракрасными волнами (длина последних не превышает десятых долей миллиметра; излучаются они нагретыми телами за счет внутриатомных процессов, происходящих в этих телах). Наибольшего успеха в свое время добился П. Н. Лебедев, получивший в 1895 г. волны с длиной волны  $\lambda = 6$  мм. Позже, в 20-х годах XX в. А. А. Глаголева - Аркадьева (1884–1945) смогла получить излучение с длиной волны до десятых долей миллиметра, впервые заполнив указанный выше пробел.

Рассмотрим, как экспериментально были проверены выводы волновой теории Максвелла. Для этой цели удобно применять современные генераторы, излучающие волны с длиной волны  $\lambda \approx 3$  см ( $f \approx 10^{10}$  Гц), модулированные низкой частотой ( $10^3 \dots 10^4$  Гц). Вывод энергии из такого генератора обычно выполняется волноводом – прямоугольной металлической трубой (см. § 13.5). Волна, излучаемая этой трубой, – линейно-поляризованная, что легко проверить, вращая в ее поле прямолинейный полуволновой проводник (диполь), снабженный детектором и присоединенный к осциллографу. При определенной ориентации проводника прием наи-



---

**Герц Генрих Рудольф (1857–1894)**, немецкий физик. Разработал конструкцию излучателя и резонатора (диполь Герца), получил и исследовал электромагнитные волны, предсказанные Максвеллом. Открыл внешний фотоэлектрический эффект.

более силен. При его вращении в собственной плоскости интенсивность приема убывает пропорционально квадрату косинуса угла между первоначальным и новым направлениями:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi$$

(закон Малюса, ранее установленный для световых волн).

Смысл этого закона вполне ясен: если электрическое поле характеризуется вектором напряженности  $\vec{E}$ , а приемный диполь образует с его направлением угол  $\varphi$ , то вдоль диполя действует составляющая, модуль которой равен

$$E_1 = E \cos \varphi.$$

Так как характеристика детектора квадратична (например,  $i = au^2$ ), то показания прибора пропорциональны квадрату амплитуды напряженности поля, т. е. интенсивности.

Прямым доказательством волнового характера изучаемых процессов является образование доступных наблюдению стоячих волн. Если заставить волну отразиться назад от плоского металлического экрана, то между передатчиком и экраном устанавливается стоячая волна; распределение в ней узлов и пучностей электрического поля можно исследовать полуволновым диполем. Для контроля за магнитным полем можно применить маленький виток; если он будет пронизываться магнитным полем, то в нем наведется ЭДС, которую можно контролировать при помощи осциллографа. При этом оказывается, что у самого экрана электрическое поле образует узел, а магнитное – пучность.

Подобный опыт со световыми волнами был выполнен в 1880 г. О. Винером. Он заставлял плоскую волну отражаться от поверхности чистой ртути (рис. 13.2). Над ртутью помещался фоточувствительный слой под очень малым углом  $\alpha$  к ее поверхности. Плоскости пучностей, расположенные на расстоянии  $\lambda/2$  друг от друга (по перпендикуляру к поверхности ртути), пересекали фотослой на гораздо большем расстоянии

$$AB = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha},$$

и почернения в пучностях были отличимы друг от друга. При этом оказалось, что у самой поверхности ртути почернения не было. Но там образовывался узел электрического поля; следовательно, световое действие на фотослой (а также и на

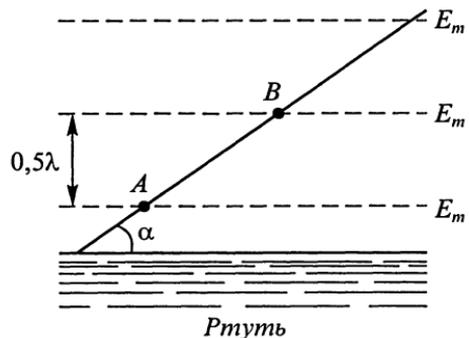


Рис. 13.2

наш глаз) определяется электрическим вектором электромагнитной волны.

Полезно отметить, что проволочная решетка (из параллельных проволок, расстояние между которыми значительно меньше длины волны) отражает волны, имеющие электрический вектор, параллельный проволокам, почти так же хорошо, как и сплошной металлический экран. Если же проволоки решетки перпендикулярны электрическому вектору волны, то последняя проходит практически без отражения. Физическая сущность явления заключается в том, что в первом случае в проволоках возникают вынужденные колебания; сами проволоки становятся источниками вторичного излучения; его взаимодействие с первичной волной приводит к ослаблению поля за решеткой и усилению его перед ней, т. е. к возникновению отражения. Во втором случае, когда вектор напряженности электрического поля перпендикулярен проволокам, в них не могут возникнуть заметные токи; поэтому вторичное излучение незначительно и его влияние на первичную волну практически незаметно.

Если бы мы решили уравнение (13.1) не для вакуума, а для однородного изотропного диэлектрика ( $\epsilon$ ,  $\mu$ ), то во всех полученных результатах следовало бы заменить  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  на  $\epsilon_0\epsilon$  и  $\mu_0\mu$ . Следовательно, для скорости волны в диэлектрике получилось бы:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (13.12)$$

Известно, что в оптике отношение

$$\frac{c}{v} = n$$

называют *показателем преломления*. Следовательно, для диэлектрика показатель преломления должен быть равен

$$n = \sqrt{\epsilon} \quad (\text{закон Максвелла}) \quad (13.13)$$

(так как практически для всех диэлектриков  $\mu$  почти не отличается от единицы).

Для воды ( $\epsilon \approx 80$ ) должно быть  $n \approx 9$ . Между тем для видимого света оказалось, что у воды  $n = 1,33$ .

Максвелл утверждал (и оказался прав), что это расхождение вызвано тем, что относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  зависит от частоты изменения поля. Это явление (дисперсия) будет рассмотрено в оптике. Прямые измерения  $\epsilon$  в переменном электрическом поле были впервые выполнены П. А. З и л о в ы м (1850–1921) еще при жизни Максвелла. Зиллов сравнивал емкости одного и того же конденсатора, сначала находившегося в воздухе, а затем заполненного жидким диэлектриком. Он показал, что значение от-

носительной диэлектрической проницаемости, измеренное в электростатическом поле, превышает значение диэлектрической проницаемости, измеренное в переменном электрическом поле. На результаты Зилова ссылался в своих работах сам Максвелл.

Для длинных электромагнитных волн ( $\lambda > 1,5$  см) у воды действительно получается  $n = 9$ .

Наглядную демонстрацию уменьшения  $\epsilon$  при росте частоты изменений электромагнитного поля можно осуществить, измеряя напряжения на двух последовательно включенных одинаковых плоских конденсаторах (заполненных соответственно воздухом и льдом) при изменении частоты от нескольких десятков герц до 40...50 кГц. При этом площадь ледяной пластины должна несколько превышать площадь металлической пластины конденсатора, чтобы исключить влияние воды, образующейся во время измерений на торцах пластины. Так как при низкой частоте относительная диэлектрическая проницаемость льда равна приблизительно 60, а при высокой – всего нескольким единицам, то при низких частотах напряжение на воздушном конденсаторе будет относительно велико, а при высокой частоте напряжения на обоих конденсаторах будут примерно одинаковыми.

Волновое сопротивление диэлектрика получается равным

$$Z = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{377}{n} \text{ Ом.}$$

Если среда обладает проводимостью, то решение уравнений Максвелла усложняется, так как возникает более или менее заметное поглощение волн. Для всех волн длиннее инфракрасных теория Максвелла хорошо совпадает с экспериментом и при поглощении.

При нормальном падении волны на границу раздела двух сред (под углом, равным нулю), как показывает теория, коэффициент отражения электрического поля (для амплитуды) оказывается равным (см. «Оптику и атомную физику»)

$$\rho_e = \frac{E_{m \text{ отр}}}{E_{m \text{ пад}}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{1 - \frac{n_2}{n_1}}{1 + \frac{n_2}{n_1}}. \quad (13.14)$$

Пусть первая среда – вакуум ( $n_1 = 1$ ), вторая – диэлектрик с  $n_2 = 1,5$ . Тогда

$$\rho_e = \frac{1 - n_2}{1 + n_2} = -\frac{0,5}{2,5} = -0,2,$$

т. е. отражение довольно слабое. Знак «-» означает, что при этом фаза волны при отражении испытывает скачок, равный  $180^\circ$ . В этом

можно убедиться на опыте, заставляя волну отражаться от слоя диэлектрика. Факт прохождения волны через диэлектрик легко показать, закрыв диэлектрическим листом выход передатчика, — прием при этом ослабевает очень незначительно. Рассматривая формально металл как диэлектрик с неопределенно большим значением  $\epsilon$  (ведь электростатическое поле в металле существовать не может), получаем верный результат:

$$\rho_e = -1,$$

т. е. металл создает практически полное отражение; отраженная волна противоположна по фазе падающей; при этом на поверхности металла образуется узел электрического поля.

При отражении от металла меняют знаки вектор  $\vec{E}$  и вектор скорости волны  $\vec{v}$ . Так как векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{v}$  должны образовывать правую тройку, то вектор напряженности магнитного поля не должен менять знак. Соотношение между  $E_m$  и  $H_m$  при отражении должно сохраниться, поэтому коэффициент отражения от металла для магнитного вектора равен

$$\rho_m = -\rho_e = 1.$$

Это означает, что магнитная составляющая волны отражается в фазе с падающей.

Ясно, что при падении волны на границу раздела из оптически более плотной среды ( $n_1 > n_2$ ) отражение для электрической составляющей волны оказывается синфазным с падающей, а для магнитной — противофазным.

Кроме коэффициента отражения по амплитуде, часто пользуются коэффициентом отражения  $R$  (по энергии); он равен  $\rho^2$ . Для диэлектрика при нормальном падении волны

$$R = \frac{(1 - n)^2}{(1 + n)^2}. \quad (13.15)$$

Укажем, наконец, что в бегущей волне, как это видно из (13.8), фазы напряженностей электрического и магнитного полей в данной точке пространства одинаковы. При отражении от металлического плоского зеркала (если угол падения равен нулю) возникает стоячая волна:

$$\begin{aligned} E_{\text{ст}} &= E_m \cos(\omega t - kz) - E_m \cos(\omega t + kz) = 2E_m \sin \omega t \sin kz, \\ H_{\text{ст}} &= H_m \cos(\omega t - kz) + H_m \cos(\omega t + kz) = 2H_m \cos \omega t \cos kz \end{aligned} \quad (13.16)$$

( $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  $\lambda$  — длина волны). И в пространстве, и во времени напряженности  $\vec{E}_{\text{ст}}$  и  $\vec{H}_{\text{ст}}$  сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ , и положения узлов и пучностей неподвижны.

Мгновенное значение модуля вектора Умова–Пойнтинга при этом составляет

$$S = E_{ст} H_{ст} = E_m H_m \sin 2\omega t \sin 2kz.$$

Его среднее значение за период  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , очевидно, равно нулю. Следовательно, в стоячей волне энергия не перемещается непрерывно в направлении оси  $Z$ , как это было у бегущей волны, а переходит из электрической в магнитную и обратно, перемещаясь то в направлении положительных  $z$ , то в направлении отрицательных  $z$  в пределах полуволны.

### 13.3. Электромагнитные волны в двухпроводной линии

Осуществление опытов со свободно распространяющимися в пространстве электромагнитными волнами связано с определенными трудностями: нужно исключить влияние окружающих предметов. Это влияние сказывается меньше, если волну заставить распространяться вдоль линии с равномерно распределенными индуктивностью и емкостью (кабель, двухпроводная линия). В принципе при этом не происходит ничего нового. Но практическая важность таких систем заставляет уделить им внимание.

Коаксиальный кабель (например, телевизионный), состоящий из центрального проводника радиусом  $\rho$  и металлической оболочки радиусом  $R$ , заполненный диэлектриком, является системой, защищенной от внешних влияний. Но внутри кабеля трудно экспериментально исследовать распределение полей. Поэтому рассмотрим более удобную для опытов (хотя и менее помехозащищенную) систему – двухпроводную линию, состоящую из двух длинных проводов диаметром  $2\rho$ , расположенных на расстоянии  $h > \rho$  друг от друга (рис. 13.3) в вакууме. Длина такой двухпроводной линии  $l$  много больше расстояния между проводами ( $l \gg h$ ).

Все основные результаты, которые будут получены для двухпроводной линии, имеют достаточно общий характер, в частности описывают процессы в коаксиальном кабеле.

Если токи в проводах противоположны по направлению, то, как легко видеть, соответствующие им векторы индукции магнитных полей будут вычитаться во внешнем пространстве и складываться между проводами. Поэтому, если расстояние  $h$  не слишком

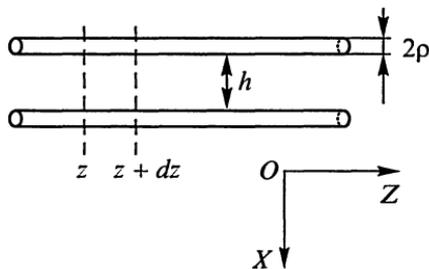


Рис. 13.3

ком велико, можно полем во внешнем пространстве пренебречь. То же относится и к электрическому полю — оно имеет заметную напряженность только между проводами. Таким образом, электромагнитная волна будет распространяться в основном между проводами, как бы направляясь ими. Поле будет распределено вдоль линии; каждой единице длины линии мы должны приписать некоторую индуктивность и емкость ( $L_0, C_0$ ). Проводимость проводов примем неограниченно большой (идеальный проводник, не поглощающий энергии).

Рассмотрим два сечения линии плоскостями  $z$  и  $z + dz$ ; напряжение между проводами и силу тока в первом сечении обозначим  $u(z, t)$  и  $i(z, t)$ . Тогда во втором сечении они будут равны соответственно

$$u + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \quad i + \frac{\partial i}{\partial z} dz.$$

Изменение разности потенциалов связано с возникновением ЭДС самоиндукции в рассматриваемом участке:

$$-\frac{\partial u}{\partial z} dz = L_0 dz \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Изменение силы тока связано с накоплением заряда и изменением разности потенциалов в емкости, присущей участку линии длиной  $dz$ :

$$-\frac{\partial i}{\partial z} dz = C_0 dz \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Сокращая на  $dz$ , получаем выражения, подобные уравнениям Максвелла, записанным ранее (см. 13.2):

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t}; \quad -\frac{\partial u}{\partial z} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Вместо напряженности электрического поля  $\vec{E}$  здесь стоит разность потенциалов, связанная с  $E$ . Вместо напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  стоит связанная с нею сила тока  $i$ .

Производя математические преобразования, подобные преобразованиям, сделанным с уравнениями (13.2), получаем волновые уравнения для напряжения:

$$L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

и для силы тока:

$$L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial z^2}.$$

Эти уравнения, называемые в технике телеграфными, впервые были получены для описания работы телеграфного кабеля, прокладывавшегося между Европой и Америкой. Они нужны, если длина линии соизмерима с длиной волны, в ней распространяющейся; для телеграфа прошлого века длина волны составляла сотни километров.

Для силовых линий электропередачи (частота 50 Гц, длина волны 6000 км) «телеграфными» уравнениями пользуются при расчетах сверхдлинных линий электропередачи (например, Сибирь–Центр). В остальных случаях можно считать линию квазистационарной (см. гл. 10). В разнообразных высокочастотных устройствах они широко используются.

Решение волнового уравнения может представлять бегущую волну напряжения:

$$u = U_m \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right], \quad \text{где } v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (13.17)$$

Такое же выражение получится для волны силы тока:

$$i = I_m \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right].$$

Связь между  $U_m$  и  $I_m$  находим тем же способом, какой мы применяли для установления связи между  $E_m$  и  $H_m$  в § 13.1. Получаем:

$$U_m = Z I_m, \quad (13.18)$$

где  $Z$  – волновое сопротивление линии, равное

$$Z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (13.19)$$

В главе 2 была вычислена линейная емкость двухпроводной линии:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 \pi}{\ln \left( \frac{h}{\rho} \right)},$$

а в главе 9 – ее линейная индуктивность:

$$L_0 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left( \frac{h}{\rho} \right).$$

Поэтому для линии в вакууме скорость распространения электромагнитной волны равна (см. 13.17):

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c. \quad (13.20)$$

Она совпадает со скоростью света. Волновое сопротивление линии зависит от ее размеров:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{h}{\rho}\right) = 120 \ln\left(\frac{h}{\rho}\right), \quad (13.21)$$

где  $Z_0$  выражено в омах.

Постоянство скорости электромагнитных волн в линиях с различными  $C_0$  и  $L_0$  понятно: при изменении расстояния между проводами обе величины меняются в одно и то же число раз, но в противоположном отношении; одна из величин, например, линейная емкость, увеличивается при сближении проводов, а другая – линейная индуктивность – уменьшается, так как уменьшается площадь между проводами.

Этой замечательной особенностью ( $v = c$ ) обладают и многие другие симметричные однородные линии, а также уединенный прямолинейный провод.

Поместим линию в диэлектрик; тогда емкость возрастет (индуктивность не изменится, так как у всех диэлектриков  $\mu = 1$ ); следовательно, скорость распространения волны уменьшится и составит  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$ . Соответственно в  $\sqrt{\epsilon}$  раз сократится и длина волны в линии.

Меня конфигурацию проводов, можно увеличивать их линейную емкость  $C_0$  и индуктивность  $L_0$  и таким образом замедлять электромагнитную волну. Так, если провод свернуть в катушку, у которой витки плотно прилегают друг к другу, то, кроме уже знакомого нам возрастания индуктивности, заметно увеличивается емкость между витками. Поэтому если провод достаточно тонок, то скорость распространения волны вдоль оси катушки уменьшается. Это одна из возможностей создания замедляющей структуры для электромагнитных волн.

Коаксиальный кабель – это прямой круговой металлический цилиндр радиусом  $\rho$ , помещенный внутри полого металлического цилиндра (внутренний радиус  $R_0$ ); пространство между цилиндрами заполнено диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ . В этом пространстве и распространяется электромагнитная волна. Наружный цилиндр экранирует ее от внешних помех. Так как высокочастотное электромагнитное поле проникает в металл лишь на очень малую глубину и там поглощается (поверхностный эффект, см. § 9.6), то, пренебрегая этими потерями, можно изучать распространение волны только в диэлектрике.

В § 2.11 было найдено выражение для емкости цилиндрического конденсатора длиной  $h$ . Линейная емкость равна

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{R_0}{\rho}} = \frac{\epsilon}{18 \cdot 10^9} \frac{1}{\ln \frac{R_0}{\rho}},$$

где  $C_0$  выражено в фарадах на метр.

Выражение для индукции магнитного поля прямого тока  $I$  в окружающем его пространстве было получено в § 7.5:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R},$$

где  $R > \rho$ .

Найдем поток магнитной индукции через прямоугольник со сторонами  $(R_0 - \rho)$  и  $h$ , причем стороны длиной  $h$  совпадают с высотой цилиндров, образующих кабель:

$$\Phi = \frac{\mu_0}{2\pi} h I \int_{\rho}^{R_0} \frac{dR}{R} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \left( \frac{R_0}{\rho} \right) I.$$

Как известно, этот поток определяет индуктивность участка кабеля длиной  $h$ :

$$\Phi = L_0 h I,$$

а линейная индуктивность оказывается равной

$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{R_0}{\rho} \right) = 2 \cdot 10^{-7} \ln \left( \frac{R_0}{\rho} \right),$$

где  $L_0$  выражено в генри на метр.

Как и в случае двухпроводной линии, скорость распространения волны в кабеле равна:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{\sqrt{\epsilon}} = c_1,$$

где  $c_1$  – скорость распространения электромагнитной волны в данном диэлектрике.

Если в линии (кабеле) длиной несколько десятков метров возбудить электромагнитные короткие импульсы напряжения, длящиеся, например,  $\tau \approx 10^{-8}$  с и разделенные паузами продолжительностью  $t = 10^{-6}$  с, то импульс, движущийся со скоростью, составляющей десятые доли скорости света (кабель заполнен диэлектриком с  $\epsilon > 1$ ), успеет за время  $t$  достичь конца кабеля и отразиться обратно. Поэтому, присоединив начало кабеля и выход генератора к

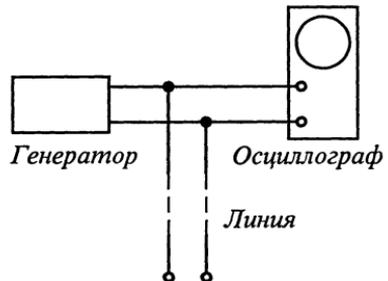


Рис. 13.4

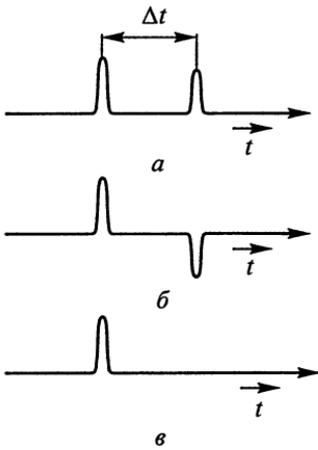


Рис. 13.5

отраженный импульс меняет знак (рис. 13.5, б). Если кабель замкнуть на согласованную нагрузку ( $Z_2 = Z_1$ , см. уравнение 13.14), то отраженный импульс исчезает (рис. 13.5, в): вся энергия, посылаемая генератором в линию, поглощается в нагрузке. Это согласование всегда стараются осуществить на практике.

Возбуждая двухпроводную линию высокочастотным генератором (рис. 13.6) и регулируя ее длину, можно настроить линию в резонанс и получить в ней сильные колебания. Распределение электрического поля в линии показано на рисунке 13.6. У закороченного конца линии получается узел напряжения и пучность силы тока (можно сказать: узел напряженности электрического поля и пучность индукции магнитного поля). Узлы напряжения (напряжение можно контролировать с помощью небольшого диполя, помещенного между проводами линии) расположены на расстоянии полуволны друг от друга, посередине между ними располагаются узлы индукции магнитного поля (их обнаруживают витком).

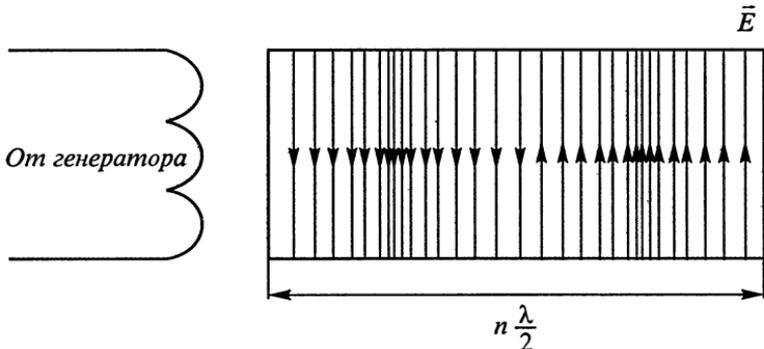


Рис. 13.6

В коротко замкнутой с обоих концов линии резонансные колебания (стоячие волны) возбуждаются при условии, что длина линии равна целому числу половин ( $\lambda/4$ ). На рисунке 13.6 выбрано  $n = 2$ .

Если линия с одного конца замкнута, а с другого – разомкнута, то резонансные колебания (стоячие волны) возникнут при условии, что длина линии равна нечетному числу четвертей волны.

В линии, замкнутой на согласованную нагрузку, резонансные явления не могут возникнуть ни при каких значениях длины линии, так как в ней отсутствует отражение от согласованной нагрузки.

Наконец, если линия замкнута на произвольную нагрузку (сопротивление не равно волновому), одновременно имеет место и поглощение, и частичное отражение волн. Поэтому в линии одновременно существуют и бегущая, и стоячая волны; напряжение в узлах отлично от нуля.

Очень наглядную модель стоячей волны можно получить в таком опыте. Два генератора звуковой частоты  $G1$  и  $G2$  включаются по схеме рисунка 13.7. Сопротивление  $R$  резисторов подбирают в соответствии с данными генераторов;  $R_1 < R$ . Замкнув ключ  $S1$ , регулируют частоту развертки осциллографа  $N$  таким образом, чтобы получить медленно перемещающееся вдоль экрана изображение бегущей волны некоторой частоты  $f$ . При этом синхронизация электронного осциллографа отключена. Разомкнув ключ  $S1$  и замкнув ключ  $S2$ , не меняя регулировки осциллографа, но регулируя частоту и амплитуду генератора  $G2$ , получают на экране волну, бегущую навстречу первой волне с той же (по модулю) скоростью; амплитуды обеих волн делаются равными, частоты генераторов – почти равными.

Затем замыкают оба ключа. На экране получается стоячая волна с неподвижными узлами и пучностями; при этом вертикальные отклонения пучка меняются с очень малой частотой, так что наблюдатель видит все детали этих изменений, характерные для стоячей волны.

Если проводить в согласованной линии достаточно точные измерения, то можно заметить, что показания индикаторов уменьшаются по мере удаления от начала линии (от точек подключения ее к генератору), так как энергия волны частично поглощается в линии. Этот процесс описывается законом:

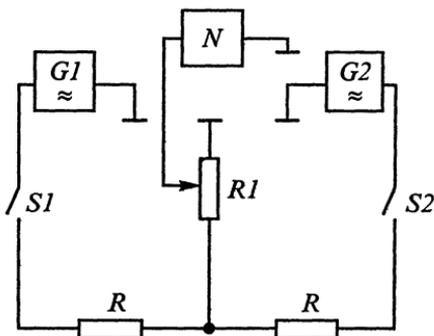


Рис. 13.7

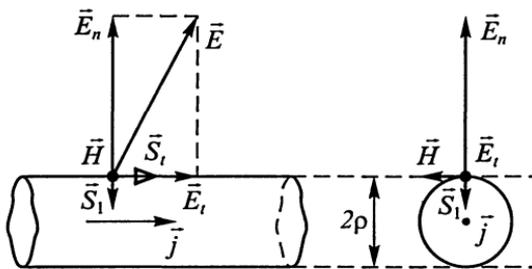


Рис. 13.8

$$W = W_0 \exp(-kz),$$

где  $W_0$  – энергия в начале линии,  $k$  – коэффициент поглощения.

Каким же образом распространяется энергия от источника к месту ее потребления?

Рассмотрим для простоты расчета бесконеч-

но длинную линию, один из проводов которой показан на рисунке 13.8. Пусть участок провода длиной  $dz$  обтекается током плотностью  $\vec{j}$ ; диаметр провода равен  $2\rho$ . Линии напряженности магнитного поля у поверхности провода направлены по касательной к нему; модуль вектора напряженности магнитного поля равен

$$H = \frac{I}{2\pi\rho}, \text{ где } I = j\rho^2.$$

Линии напряженности электрического поля наклонны к поверхности проводника, и вектор  $\vec{E}$  можно разложить на нормальную  $\vec{E}_n$  и касательную  $\vec{E}_t$  составляющие. Вектор  $\vec{E}_n$  имеет разрыв на поверхности, так как провод покрыт поверхностным зарядом (рисунок выполнен для положительного заряда), вектор  $\vec{E}_t$  непрерывен на границе раздела и постоянен по всему сечению проводника (мы пренебрегаем возможностью проявления поверхностного эффекта, см. § 9.6). Поток мощности, определяемый вектором Умова – Пойнтинга (13.10):

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}],$$

можно разложить на две составляющие – радиальную, определяющую поток энергии внутрь провода:

$$\vec{S}_1 = [\vec{E}_t, \vec{H}],$$

и касательную, определяющую поток энергии в окружающей среде вдоль провода:

$$\vec{S}_t = [\vec{E}_n, \vec{H}].$$

Через боковую поверхность отрезка провода длиной  $dz$  внутрь проникает мощность

$$dP = S_1 2\pi\rho dz = E_t dz I = IdU_z,$$

где  $dU_z$  – разность потенциалов на концах отрезка длиной  $dz$ .

Итак, мы пришли к следующему результату: вычисленная поглощенная мощность совпала с поглощаемой мощностью, полу-

ченной ранее (при рассмотрении стационарного процесса), что, конечно, и должно быть.

На рисунке 13.9 показана приблизительная картина распределения линий вектора Умова–Пойнтинга вокруг цепи, состоящей из кругового провода и источника ЭДС стороннего происхождения. В месте нахождения источника ЭДС линии вектора выходят из источника во внешнее пространство. Касательная составляющая вектора определяет поток энергии вдоль провода (во внешнем пространстве), постепенно убывающий вместе с вектором  $\vec{E}_n$ , так как энергия частично уходит внутрь провода и поглощается в нем (потери в линии). Цепь заземлена в точке, диаметрально противоположной источнику. Направление вектора плотности тока  $\vec{j}$  в проводе показано изогнутой стрелкой.

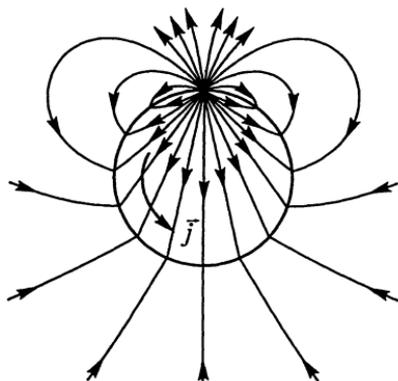


Рис. 13.9

Таким образом, энергия электромагнитного поля распространяется не внутри провода, а в окружающем пространстве. Роль линии, соединяющей источник с потребителем, где энергия поглощается, сводится в основном к направлению внешнего потока мощности. На рисунке 13.8 этот поток определяется горизонтальной составляющей вектора Умова–Пойнтинга:

$$\vec{S}_l = [\vec{E}_n, \vec{H}].$$

В отличие от постоянного переменное электромагнитное поле проникает в металл, испытывая сильное поглощение, лишь на небольшую глубину (см. поверхностный эффект, § 9.6).

### 13.4. Излучение радиоволн

Вообразим двухпроводную линию, разомкнутую с одного конца, настроенную в резонанс и питаемую источником незатухающих колебаний. В линии образуется стоячая электромагнитная волна. Мгновенное распределение электрического поля в линии изображено на рисунке 13.10, а. Начнем разворачивать концы линии (длиной  $\frac{\lambda}{4}$  каждый). Распределение поля при этом изменяется (рис. 13.10, б). Когда мы разведем концы на  $90^\circ$  от их исходного положения, получится прямолинейный диполь (рис. 13.10, в). Длина диполя равна практически половине длины волны (полуволновой диполь); создаваемое диполем электрическое поле будет окру-

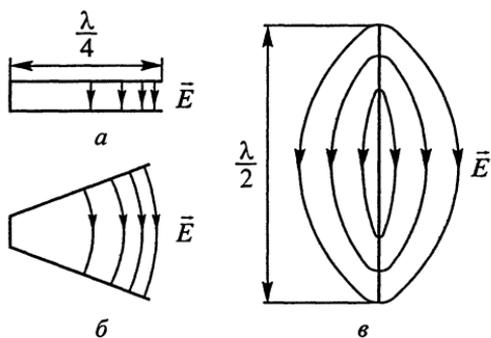


Рис. 13.10

жать его симметрично со всех сторон. Линии напряженности магнитного поля, окружающего диполь, лежат в плоскостях, перпендикулярных оси диполя. Такие полуволновые диполи широко применяются в качестве антенн в телевидении, где пользуются метровыми волнами.

Если горизонтальную плоскость, пересекающую диполь как раз посередине,

заменить реальной проводящей плоскостью, то распределение поля над ней не изменится (см. § 2.3). Такие заземленные (четвертьволновые) антенны применяются при радиосвязи на волнах, длина которых превышает 10...12 м.

Если диполь питается генератором высокочастотных колебаний, то создаваемое им электромагнитное поле излучается в окружающее пространство, теряя непосредственную связь с диполем: например, в некоторый момент поле излучения у диполя может отсутствовать, а в окружающем пространстве оно существует. С течением времени поле распространяется все дальше и дальше. При этом вокруг диполя существует и кулоновское электрическое поле, изменяющееся пропорционально  $\frac{1}{R^3}$  ( $R$  – расстояние от диполя).

Герц показал, что переменное электрическое поле, излучаемое диполем, имеет амплитуду

$$E_m \sim \frac{I_m l}{R \lambda} \sin \theta, \quad (13.22)$$

где  $\theta$  – угол между осью диполя и направлением в рассматриваемую точку,  $\lambda$  – длина волны излучения,  $R$  – расстояние от диполя (длиной  $l$ ) до рассматриваемой точки,  $I_m$  – амплитуда силы тока в диполе. Следует отметить, что поле излучения (13.22) спадает с расстоянием медленнее кулоновского и поэтому проявляется на больших расстояниях, чем последнее.

В радиотехнике высоких частот применяются излучатели длиной  $l = \frac{\lambda}{2}$ ; питающий генератор создает в диполе ток

$$i = I_m \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos \omega t$$

(начало координат совмещено с серединой полуволнового диполя). В этом можно убедиться при помощи маленьких ламп накали-

вания, включенных в середине и у концов полуволнового диполя. При резонансных колебаниях диполя ярко горит первая лампа, а другие практически не светятся.

Уравнение (13.22) справедливо и для поля, излучаемого четвертьволновым заземленным диполем, расположенным вертикально относительно поверхности Земли (которую можно считать плоской). Начало координат при этом совпадает с заземленным концом диполя.

На рисунке 13.11 изображены диаграммы направленности четвертьволнового диполя: *a* – горизонтальная (для плоскости Земли) и *б* – вертикальная (для плоскости, содержащей диполь). Наибольшая напряженность принята за единицу. Длина радиуса-вектора в некотором направлении пропорциональна напряженности; концы радиусов-векторов, не показанных на рисунке, соединены непрерывной кривой.

В горизонтальной плоскости диполь дает всенаправленное излучение, одинаковое во все стороны. В вертикальной плоскости излучение полностью отсутствует вдоль оси диполя и достигает максимума в плоскости, перпендикулярной оси.

Следует иметь в виду, что такой же вид имеет и диаграмма направленности приема: диполь лучше всего реагирует на поле, вектор электрической напряженности которого параллелен его оси, и совсем не реагирует на поле с напряженностью, перпендикулярной оси, что легко проверить на опыте, зондируя поле излучающего диполя другим прямолинейным (полуволновым) диполем.

Поле, описываемое уравнением (13.22), отстает по фазе (запаздывает) относительно изменений поля в непосредственной близости к диполю на  $\omega \frac{R}{c}$ , так как волна распространяется со скоростью *c*.

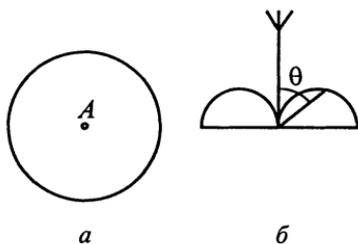


Рис. 13.11

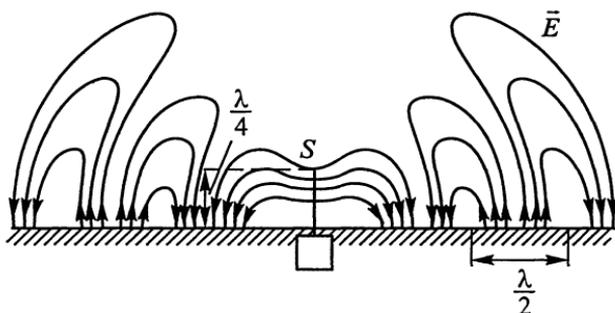


Рис. 13.12

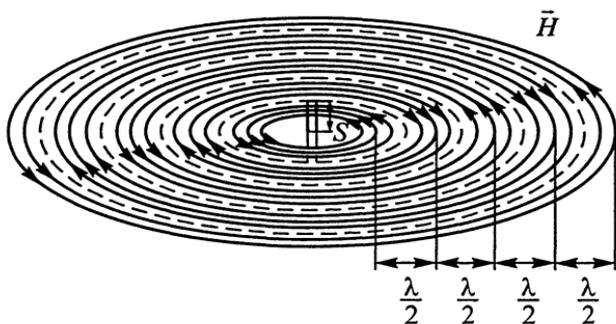


Рис. 13.13

На рисунках 13.12 и 13.13 изображены «мгновенные фотографии» распределения электрического и магнитного полей, излучаемых четвертьволновым заземленным диполем  $S$ . Оба поля существуют совместно.

Излучаемые поля теряют непосредственную связь с излучателем и распространяются в окружающем пространстве со скоростью света. В этом и заключается сущность процесса излучения.

Если пересечь полуволновой диполь проводящей (металлической) горизонтальной плоскостью, проходящей через его середину, то распределение поля не изменится, так как эта плоскость везде образует с линиями поля прямые углы. Тогда мы приходим к картине поля излучения четвертьволнового диполя.

Существенно, что при излучении получается чисто поперечная волна. Напряженность поля излучения обратно пропорциональна расстоянию от диполя до рассматриваемой точки. Поэтому поток мощности излученной волны (см. § 13.1) на бесконечно больших расстояниях имеет конечное значение.

Для изменения диаграммы направленности (что бывает нужно в практике радиосвязи) возбуждают сразу несколько антенн, определенным образом расположенных в пространстве. В результате наложения излучаемых ими полей удастся ослабить суммарное поле в одних направлениях за счет заметного усиления его в других направлениях. Применяемые для этого антенны, естественно, оказываются сложными сооружениями.

Степень направленности излучения сложных антенн характеризуют углом направленности: в пределах этого угла амплитуда напряженности излученного поля меняется от  $E_m$  до  $0,5E_m$ . Другая характеристика – коэффициент направленности по мощности (коэффициент усиления антенны)

$$G = \left( \frac{E_a}{E_0} \right)^2,$$

где  $E_a$  – напряженность поля, созданного сложной антенной в данной точке,  $E_0$  – напряженность поля, созданного в той же точке всенаправленной антенной (при равенстве полной мощности излучения обеих антенн).

В передатчиках сантиметровых волн достигается угол направленности, не превышающий долей градуса; коэффициент  $G$  измеряется тысячами.

Весьма примечательно, что напряженность поля излучения пропорциональна силе тока и частоте колебаний (обратно пропорциональна длине волны). Поэтому заметное поле излучения можно получить преимущественно на высоких частотах.

Мощность излучения (пропорциональная квадрату напряженности поля) оказывается пропорциональной квадрату силы тока в антенне и квадрату частоты. Эту мощность можно формально описать уравнением

$$P = R_{\text{изл}} I^2,$$

где  $R_{\text{изл}}$  – сопротивление излучения, зависящее от геометрии антенны и частоты колебаний; для простых антенн  $R_{\text{изл}}$  составляет десятки ом.

В земных условиях волны, излучаемые антеннами, распространяются в атмосфере, верхние слои которой содержат заметное число заряженных частиц и не могут считаться диэлектрическими слоями. Это осложняет условия распространения. В частности, длинные и средние волны (длиной в километры и сотни или десятки метров) сильно поглощаются или отражаются верхними слоями атмосферы (ионосферой), а поэтому не могут проникнуть сквозь нее. Из-за наличия ионосферы только достаточно короткие волны (дециметровые и короче) пригодны для связи с космическими кораблями, а из космоса до нас волны длиннее метровых не доходят.

Для целей наземной радиосвязи, телевидения и радиолокации теперь применяются радиоволны, длины которых приходятся на диапазон от  $10^3$  до  $10^{-2}$  м.

### 13.5. Волноводы

В настоящее время в радиотехнике сантиметровых волн получили распространение волноводы – металлические трубы, внутри которых распространяются электромагнитные волны. Волноводы позволяют направлять волны в нужном направлении нерасходящимся пучком и предохраняют линию передачи от всевозможных внешних помех.

Так как волноводы применяются и в школьных демонстрационных приборах, то следует хотя бы кратко рассмотреть происходящие в них процессы.

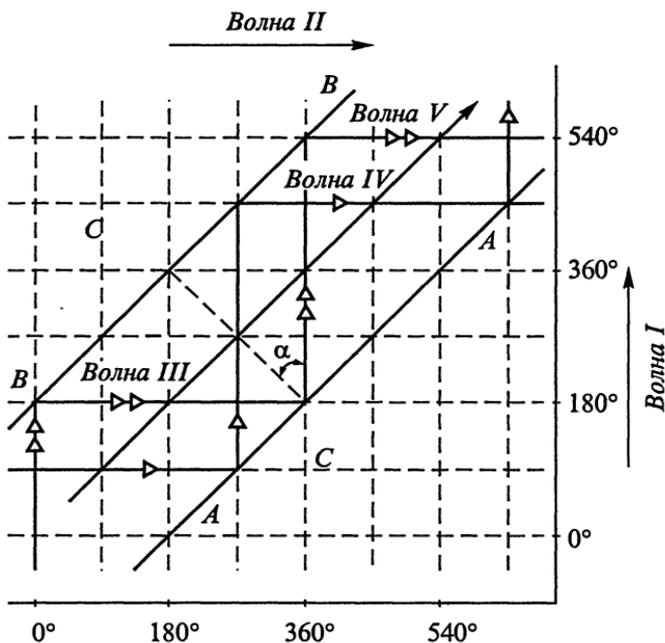


Рис. 13.14

На рисунке 13.14 показано мгновенное расположение двух плоских волн *I* и *II*, распространяющихся под прямым углом друг к другу параллельно плоскости чертежа. На чертеже показаны мгновенные положения фронтов, на которых фаза колебаний каждой из волн отличается на  $90^\circ$ . Амплитуда и частота волн приняты одинаковыми. Электрические векторы  $\vec{E}_z$  волн перпендикулярны плоскости чертежа.

С течением времени вся картина перемещается вдоль чертежа, но разности фаз для соседних фронтов сохраняются неизменными. На рисунке показаны следы двух плоскостей, перпендикулярных чертежу, на которых разность фаз обеих волн составляет  $180^\circ$ . На этих плоскостях, обозначенных *AA* и *BB*, напряженность электрического поля все время равна нулю. Если расположить на них металлические плоскости, то это не изменит процесса, происходящего между плоскостями. Но его можно будет теперь трактовать как многократное отражение обеих волн от этих металлических стенок. Расстояние между стенками равно *D*.

Поместим еще две металлические стенки, параллельные плоскости чертежа на произвольном расстоянии *h* друг от друга. Они также не изменяют распределения поля, так как вектор  $\vec{E}$  им перпендикулярен. Теперь у нас получился прямоугольный волновод; три сечения его показаны на рисунке 13.15, *a*.

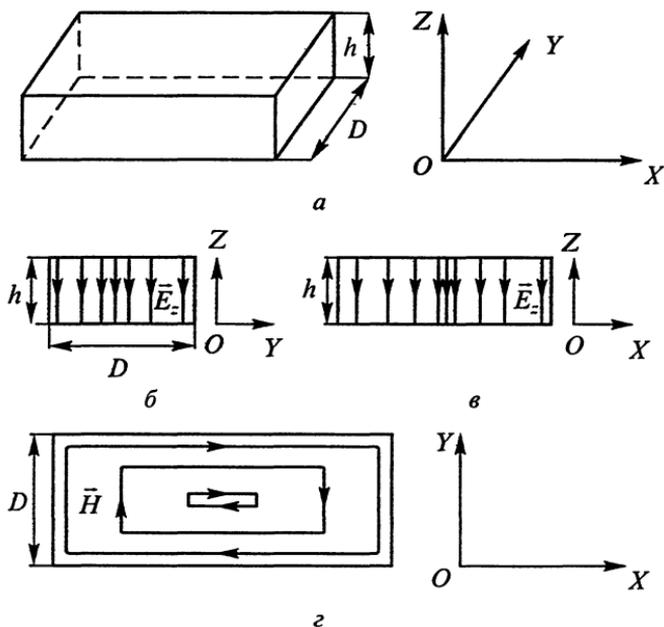


Рис. 13.15

Процесс, происходящий в волноводе, можно описать так (см. рис. 13.14): чисто поперечные волны *III* и *IV*, падающие на стенки *AA* и *BB* волновода под углом  $\alpha = 45^\circ$ , испытывают многократные отражения от последних. Эти волны складываются в единую волну *V*; плоский фронт этой волны *CC* перемещается вдоль оси волновода.

На фронте *CC* амплитуда напряженности электрического поля в разных участках не одинакова. Она меняется от нуля (у поверхности стенок *AA* и *BB*) до  $E_m$  (на оси волновода), так как разность фаз волн меняется от нуля до  $180^\circ$ . Поэтому амплитуда напряженности электрического поля в сечении *CC* описывается уравнением:

$$E_z = E_m \sin\left(\frac{\pi}{D} y\right),$$

если ось ординат параллельна стенкам волновода, имеющим ширину  $D$  (рис. 13.15, б), а ось абсциссов совмещена с осью волновода.

Следовательно, на ширине сечения укладывается половина длины волны:

$$\lambda_{кр} = 2D.$$

Эта длина волны называется *критической*. Дело в том, что в частном случае, соответствующем рисунку 13.14, волны падают на стен-

ки под углом  $\alpha = 45^\circ$ , так как исходные волны  $I$  и  $II$  распространялись под углом  $\varphi = 90^\circ$  друг к другу. В общем же случае они распространяются под произвольным углом  $\varphi$ , а волны  $III$  и  $IV$  встречают стенки волновода также под произвольным углом  $\alpha = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$ , причем

$$\cos \varphi = \frac{\lambda}{2D}. \quad (13.23)$$

При  $\lambda = \lambda_{кр}$  угол  $\alpha$  обращается в нуль, т. е. волны не распространяются вдоль волновода, а движутся перпендикулярно стенкам  $AA$  и  $BB$ . Это одна из особенностей всех волноводов.

Из уравнения (13.23) следует, что длина волны  $\lambda$ , используемая в волноводе, не должна превышать значения  $2D$ .

При распространении волн внутри волновода линии электрической напряженности  $\vec{E}$  имеют концы на зарядах, образующихся на стенках волновода, параллельных плоскости  $XOY$ . Распределение поля вдоль оси волновода показано на рисунке 13.15,  $e$  – образуется бегущая волна:

$$E_z = E_m \sin\left(\frac{\pi}{D} y\right) \cos(\omega t - kx).$$

Линии магнитной напряженности  $\vec{H}$  должны образовать замкнутые кривые, охватывающие линии напряженности  $\vec{E}_z$ , так как в однородной среде магнитное поле – чисто вихревое. Линии схематически показаны на рисунке 13.15,  $z$ .

Таким образом, волна  $V$ , распространяющаяся вдоль оси волновода, уже не является чисто поперечной: существует продольная составляющая магнитного поля  $\vec{H}_x$ .

В рассмотренном случае вектор напряженности  $\vec{E}_z$  перпендикулярен оси волновода. Именно такой случай и осуществлен в демонстрационных генераторах трехсантиметровых волн. Подчеркнем, что вектор  $\vec{E}_z$  параллелен узкой стороне сечения волновода, так как размер  $h$  всегда меньше размера  $D$ .

### 13.6. Понятие о радиолокации

Еще в 1897 г. А. С. Попов обнаружил, что радиосвязь между двумя кораблями нарушалась при прохождении между ними третьего корабля. Он правильно объяснил это отражением радиосигнала от последнего. Это открытие позволило позже (к началу второй мировой войны) создать *радиолокацию* – способ обнаружения далекой цели по отраженному ею радиосигналу.

Идея радиолокации проста. Пусть передатчик излучает короткие электромагнитные импульсы (продолжительностью  $\tau$ ), разде-

ленные паузами, длительность которых  $\tau_1$  на несколько порядков превышает  $\tau$ . Посланный в окружающее пространство импульс может отразиться от цели, находящейся на расстоянии  $R$ , и через промежуток времени, равный

$$t = \frac{2R}{c},$$

вернуться обратно, где его можно зарегистрировать чувствительным приемником. Если антенна с малым углом направленности вращается в пространстве, то таким образом можно обнаружить цели, расположенные в разных местах. При этом, очевидно, наименьшее доступное расстояние до цели равно

$$R_{\min} = \frac{c\tau}{2},$$

так как отраженный сигнал *должен вернуться после прекращения излучения*. Наибольшее возможное удаление цели определится следующим:

$$R_{\max} = \frac{c\tau_1}{2},$$

так как сигнал *должен вернуться до посылки следующего импульса*. При наземной локации  $\tau$  составляет доли микросекунды,  $\tau_1$  – около одной миллисекунды.

Заметим, что здесь обсуждается лишь идея радиолокации. Практические устройства сложны, локация может осуществляться и в непрерывном режиме, а предельная чувствительность зависит от собственных шумов в приемниках.

Пусть антенна передатчика с коэффициентом усиления  $G$  (см. § 13.4) посылает сигналы мощностью  $P_0$ .

Так как поток мощности в направлении максимального усиления есть

$$S_1 = G \frac{P_0}{4\pi R^2},$$

то цель отразит мощность

$$P_1 = \sigma S_1,$$

где  $\sigma$  – эффективная площадь рассеяния. Предполагая рассеяние всенаправленным, находим поток мощности у приемника, расположенного рядом с передатчиком:

$$S_2 = \frac{P_1}{4\pi R^2}.$$

Поэтому в приемник попадает мощность

$$P_2 = AS_2,$$

где  $A = a\lambda^2 G$  – эффективная площадь приемной антенны; коэффициент  $a$  зависит от ее конструкции.

Чтобы сигнал был обнаружен (на фоне неизбежных внешних помех и внутренних шумов приемного устройства) без специальных способов повышения чувствительности приемника, он должен иметь минимальную мощность:

$$P_2 = P_{\min}.$$

Если, как это часто бывает, прием и передача ведутся на одну и ту же антенну, то из предыдущих соотношений находим максимальное расстояние, на котором цель еще может быть обнаружена:

$$R_{\max} = \left( \frac{P_0 a \lambda^2 G^2 \sigma}{16 \pi^2 P_{\min}} \right)^{1/4}.$$

Таким образом, для увеличения  $R_{\max}$  нужно иметь высокочувствительный приемник с малым уровнем собственных шумов и большим коэффициентом усиления антенны, достижимым только на сантиметровых и более коротких волнах.

Современная радиотехника позволяет производить локацию не только приземных, но и космических объектов. Уже в 1946 г. была произведена локация Луны, позволившая уточнить расстояние до нее; позже удалось провести локацию Меркурия, Венеры, Марса и более далеких планет.

В простейшем индикаторе локатора принятый сигнал после детектирования поступает на осциллограф, вызывая всплеск электронного пучка в вертикальном направлении. Сам пучок в момент послышки сигнала начинает двигаться в горизонтальном направлении с постоянной скоростью. Измеряя расстояние вертикального всплеска от начала траектории пучка, можно определить время  $t$  распространения сигнала до цели и обратно, а также и расстояние до цели:

$$R = c \frac{t}{2}.$$

Более совершенные локаторы, например с разверткой электронного пучка, вращающейся по экрану синхронно с поворачивающейся антенной, позволяют видеть расположение сразу многих целей, освещаемых поочередно передающей антенной.

### 13.7. Шкала электромагнитных волн

В настоящее время мы умеем получать монохроматические электромагнитные колебания от произвольно низких частот до частот порядка  $10^{17}$  Гц при помощи различных радиоэлектронных и лазерных устройств.



Рис. 13.16

Кроме того, возбужденные атомы нагретых тел, а также атомы и атомные ядра, возбужденные потоком электронов в некоторых технических устройствах (рентгеновские трубки и ускорители), являются источником монохроматического излучения в диапазоне от  $10^9$  до  $10^{22}$  Гц.

Из космоса к нам приходит излучение атомов небесных тел. Оно охватывает диапазон частот от  $1,6 \cdot 10^7$  до  $10^{22}$  Гц. Кроме того, наблюдается излучение, сопровождающее внутриядерные процессы, имеющее верхнюю границу частоты около  $10^{23}$  Гц.

Как в радиодиапазоне, так и в оптических диапазонах – инфракрасном, видимом и ультрафиолетовом, вплоть до рентгеновского – созданы квантово-механические генераторы монохроматического излучения – лазеры и мазеры, устройство которых будет обсуждаться в «Оптике и атомной физике».

П. Н. Лебедев предложил построить шкалу электромагнитных излучений. По оси абсцисс откладываются в логарифмическом масштабе частоты (или длины волн); их разбивают на условные группы.

Современная шкала изображена на рисунке 13.16. Указаны только главные участки, хотя отдельные участки условно разбиваются на еще более мелкие.

- |  |   |
|--|---|
| I. Медленные колебания (технические частоты), получаемые при помощи электрических машин            | $f < 10^4$ Гц                                   |
| II. Радиоволны, получаемые при помощи электровакуумных, полупроводниковых и других автогенераторов | $10^4$ Гц $< f < 10^{12}$ Гц                    |
| III. Инфракрасное излучение  | $10^{12}$ Гц $< f < 4 \cdot 10^{14}$ Гц         |
| IV. Видимое излучение (свет)   | $4 \cdot 10^{14}$ Гц $< f < 8 \cdot 10^{14}$ Гц |
| V. Ультрафиолетовое излучение  | $8 \cdot 10^{14}$ Гц $< f < 10^{17}$ Гц         |
| VI. Рентгеновское излучение  | $10^{17}$ Гц $< f < 10^{19}$ Гц                 |
| VII. Гамма-излучение   | $10^{19}$ Гц $< f < 10^{23}$ Гц                 |

Излучения, соответствующие участкам III–V, создаются нагретыми телами и лазерами, участку VI – при помощи рентгеновских трубок и ускорителей, участку VII – частично при помощи ускорителей, частично – обязаны процессам, происходящим в космосе.

### 13.8. Излучение электромагнитных волн движущимися зарядами

В заключение кратко остановимся на излучении движущихся заряженных частиц. В § 10.5 было выяснено, что поле равномерно движущегося с нерелятивистской скоростью заряда, перемещаясь вместе с ним, не деформируется; никакого излучения при этом не происходит. Если же заряд движется ускоренно, то он должен излучать, так как возникающие при ускорении изменения поля распространяются (по крайней мере в вакууме) со скоростью, превышающей скорость заряда.

Наибольший интерес представляет излучение колеблющегося заряда.

Рассмотрим элементарный диполь с электрическим моментом

$$p = p_m \sin \omega t = q l_m \sin \omega t. \quad (13.24)$$

Он может представлять колеблющийся электрон в простейшей модели атома; пусть амплитуда колебаний равна  $l_m$ .

Можно показать, что средняя мощность излучения (в ваттах) такого элементарного диполя равна

$$P_{\text{cp}} = 10^{-16} \omega^4 p_m^2. \quad (13.25)$$

Убыль энергии диполя за время  $dt$  составляет

$$-dW = P_{\text{cp}} dt.$$

Допустив, что при прохождении через положение равновесия электрон обладает только кинетической энергией

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 l_m^2 \quad (13.26)$$

и что затухание колебаний приводит к уменьшению амплитуды колебаний (заряд, конечно, не меняется)

$$l_m = l_0 \exp(-\alpha t),$$

получаем закон убывания энергии:

$$-dW = 2\alpha W dt.$$

Следовательно,

$$2\alpha W = P_{\text{cp}}$$

и коэффициент затухания равен

$$\alpha = \frac{P_{\text{ср}}}{2W}. \quad (13.27)$$

Время уменьшения амплитуды в  $e$  раз составляет

$$\tau = \frac{1}{\alpha} = nT = n \frac{2\pi}{\omega},$$

где  $n$  – число колебаний.

Принимая  $q = -1,6 \cdot 10^{19}$  Кл,  $l_0 = 2,5 \cdot 10^{-10}$  м,  $m = 10^{-30}$  кг,  $\omega = 4 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup> (зеленый свет), находим:

$$\alpha = 4,5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}, \quad \tau = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ с}.$$

За время  $\tau$  электрон совершит число колебаний, равное

$$n = \frac{\omega\tau}{2\pi} = 1,4 \cdot 10^7. \quad (13.28)$$

Добротность такой колебательной системы есть

$$Q = \frac{\omega}{2\alpha} = 4,4 \cdot 10^7,$$

что на много порядков превосходит добротность систем, обычно применяемых в радиосвязи. Эти данные пригодятся нам при рассмотрении некоторых оптических вопросов.

В классической модели атома, предложенной в 1911 г. Э. Резерфордом (1871–1937), электроны обращались вокруг положительно заряженного ядра. Но равномерное вращение равносильно двум взаимно перпендикулярным колебаниям, имеющим одинаковые амплитуды, фазовый сдвиг  $90^\circ$  и частоту, равную частоте обращения. Такие электроны должны излучать электромагнитные волны, причем для простейшего атома (водород, один электрон) затухание будет описываться выражением (13.27).

Следовательно, такие атомы должны быть недолговечны – под действием кулоновской силы электрон должен упасть на ядро. Оценим время уменьшения первоначальной энергии в  $10^4$  раз:

$$W = W_0 \exp(-2\alpha t); \quad t = \frac{4}{9 \cdot 0,43} 10^{-7} \text{ с} = 10^{-7} \text{ с}.$$

Но в действительности атомы весьма устойчивы, т.е. модель Резерфорда является внутренне противоречивой, что было отмечено самим Резерфордом. Как известно, в 1913 г. она была заменена более совершенной квантовой моделью Бора.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Фундаментальные исследования электрических и магнитных явлений, проведенные в основном в XIX в., позволили установить существование в природе наряду с веществом еще одного вида материи – электромагнитного поля.

После теоретических работ Д. Максвелла и экспериментальных исследований Г. Герца и П. Н. Лебедева стало ясно, что в природе кроме вещества существует электромагнитное поле, способное взаимодействовать с веществом, обладающее, как и вещество, энергией и импульсом. Было показано, что электромагнитное поле может существовать в пространстве и времени независимо от вещества, распространяясь в виде волн. Оказалось, что скорость распространения этих волн равна скорости света, что дало основание утверждать, что свет является электромагнитными волнами с определенной частотой колебаний.

Уравнения Максвелла в сжатой форме описали свойства электромагнитного поля и его взаимодействие с веществом. Было установлено, что электромагнитное поле является совокупностью электрического и магнитного полей, способных существовать независимо от вещества. Было открыто новое свойство вещества – электрический заряд, – характеризующее взаимодействие вещества с электромагнитным полем.

Теория Максвелла объединила громадное число электрических, магнитных, оптических явлений, казавшихся совершенно не похожими друг на друга, в единую область электромагнитных явлений. Их описание с помощью теории Максвелла происходило в принципе так же, как и описание механического движения в механике Ньютона. По заданным начальным и граничным условиям для поля, при определенных значениях зарядов и токов в пространстве в начальный момент времени, определялось состояние поля в любой последующий момент времени и в любой точке пространства.

При описании взаимодействия между зарядами и токами учитывалась конечная скорость распространения взаимодействия, равная скорости света.

Длительное время считалось, что электромагнитное поле является состоянием особой среды – эфира, в котором и распространяются электромагнитные волны в виде натяжений и деформаций этой среды. Такие представления были обусловлены механистическими

воззрениями на окружающий мир, в соответствии с которыми любое волновое движение связано с распространением колебаний в некоторой среде. Идея о существовании эфира казалась заманчивой еще и потому, что позволяла поставить вопрос о нахождении абсолютной системы отсчета, связанной с эфиром, и решить, наконец, проблему абсолютного пространства, поставленную еще Ньютоном. Однако все попытки экспериментального обнаружения эфира оказались безуспешными. В 1905 г. А. Эйнштейн окончательно отказался от идеи эфира, что позволило рассматривать электромагнитное поле как самостоятельный физический объект, существующий в природе наряду с веществом.

Открытие нового вида материи – электромагнитного поля – вызвало глубокие изменения в мировоззрении не только ученых, но и людей, далеких от науки.

Результаты фундаментальных исследований свойств электромагнитного поля легли в основу промышленных технологий по использованию энергии электромагнитного поля, создания новых средств беспроводной связи. Бурное развитие электротехники, радиотехники, радиофизики, техники связи, транспорта оказало значительное влияние на условия жизни большинства людей на Земле.

Электродинамикой заканчивается классический период развития физики как науки и начинается новый этап ее развития, связанный с революционными идеями физики XX столетия.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Единицы СИ электрических и магнитных величин

Величина			Единица	
Наименование	Обозначение	Размерность	Наименование	Обозначение
Сила электрического тока (с) <sup>1</sup>	$I, i$	I	ампер	А
Электрический заряд (с)	$Q, q$	IT	кулон	Кл
Плотность тока (в)	$j$	IL <sup>-2</sup>	ампер на квадратный метр	А/м <sup>2</sup>
Поверхностная плотность электрического заряда (с)	$\sigma$	ITL <sup>-2</sup>	кулон на квадратный метр	Кл/м <sup>2</sup>
Поляризованность (в)	$P$	ITL <sup>-2</sup>	кулон на квадратный метр	Кл/м <sup>2</sup>
Электрический момент диполя (в)	$p$	ITL	кулон-метр	Кл·м
Поток электрического смещения (с)	$\Phi_e$	IT	кулон	Кл
Электрическая индукция (в)	$D$	IL <sup>-2</sup> T	кулон на квадратный метр	Кл/м <sup>2</sup>
Электрическое напряжение (с)	$U, u$	I <sup>-1</sup> L <sup>2</sup> MT <sup>-3</sup>	вольт	В
Электрический потенциал (с)	$\varphi$			
Электродвижущая сила (с)	$\mathcal{E}$			
Напряженность электрического поля (в)	$E$	I <sup>-1</sup> LMT <sup>-3</sup>	вольт на метр	В/м
Электрическая емкость (с)	$C$	I <sup>2</sup> L <sup>-2</sup> M <sup>-1</sup> T <sup>4</sup>	фарад	Ф

<sup>1</sup> Буквы «с» и «в» обозначают соответственно «скаляр» и «вектор».

Величина			Единица	
Наименование	Обозначение	Размерность	Наименование	Обозначение
Электрическая постоянная вакуума (с)	$\epsilon_0$	$I^2L^{-3}M^{-1}T^4$	фарад на метр	Ф/м
Относительная диэлектрическая проницаемость (с)	$\epsilon$	нулевая	–	–
Электрическое сопротивление (с)	$R, r$	$I^{-2}L^2MT^{-3}$	ом	Ом
Удельное электрическое сопротивление (с)	$\rho$	$I^{-2}L^3MT^{-3}$	омметр	Ом·м
Электрическая проводимость (с)	$G$	$I^2L^{-2}M^{-1}T^3$	сименс	См
Удельная электрическая проводимость (с)	$\gamma$	$I^2L^{-3}M^{-1}T^3$	сименс на метр	См/м
Магнитная индукция(в)	$B$	$I^{-1}MT^{-2}$	тесла	Тл
Магнитный поток (с)	$\Phi_m$	$I^{-1}ML^2T^{-2}$	вебер	Вб
Напряженность магнитного поля (в)	$H$	$IL^{-1}$	ампер на метр	А/м
Магнитный момент электрического тока (в)	$p_m$	$IL^2$	ампер-квадратный метр	А·м <sup>2</sup>
Индуктивность (с)	$L$	$I^{-2}ML^2T^{-2}$	генри	Гн
Взаимная индуктивность (с)	$M$	$I^{-2}ML^2T^{-2}$	генри	Гн
Магнитная постоянная вакуума (с)	$\mu_0$	$I^{-2}MLT^{-2}$	генри на метр	Гн/м
Относительная магнитная проницаемость (с)	$\mu$	нулевая	–	–
Намагниченность (в)	$J$	$IL^{-1}$	ампер на метр	А/м
Вектор Умова – Пойнтинга (в)	$S$	$MT^{-3}$	ватт на квадратный метр	Вт/м <sup>2</sup>

### К расчету поверхностного эффекта

Отношение сопротивления  $R$  (при токе частотой  $f$ ) к сопротивлению  $R_0$  (при постоянном токе) есть сложная функция параметра

$$a = 0,14D \sqrt{\frac{f\mu}{\rho}},$$

где  $D$  – диаметр провода, см,  $f$  – частота тока, Гц,  
 $\rho$  – удельное сопротивление материала провода, мкОм·см,  
 $\mu$  – относительная магнитная проницаемость вещества провода.

Для медной проволоки приводятся некоторые данные:

Таблица 1<sup>1</sup>

$R/R_0$	1,001	1,005	1,08	1,32	2,06
$a$	0,6	1	2	3	5

Таблица 2

$f$ , Гц	$D$ , см				
50	0,80	1,34	2,68	4,02	6,70
5000	0,08	0,134	0,27	0,40	0,67
$5 \cdot 10^4$	0,025	0,042	0,085	0,127	0,212
$5 \cdot 10^6$	0,003	0,004	0,09	0,013	0,021

<sup>1</sup> Значения  $R/R_0$  и  $a$ , приведенные в таблице 1, получены при значениях  $f$  и  $D$ , указанных в таблице 2.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
Введение .....	4
<b>Глава 1. Электростатическое поле в вакууме .....</b>	<b>8</b>
1.1. Электризация тел. Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда .....	8
1.2. Закон Кулона. Электростатическое поле в вакууме. Вектор напряженности. Поле диполя .....	10
1.3. Теорема Остроградского – Гаусса в электростатике и ее применение для расчета полей в вакууме .....	17
1.4. Дифференциальная форма теоремы Остроградского – Гаусса. Опыт Кавендиша .....	24
1.5. Элементарный заряд. Опыт Милликена .....	26
1.6. Работа поля при перемещении заряда. Потенциал электростатического поля и его связь с напряженностью поля. Разность потенциалов .....	29
1.7. Потенциалы некоторых полей .....	31
<b>Глава 2. Электростатическое поле при наличии проводников .....</b>	<b>35</b>
2.1. Поле заряженного проводника .....	35
2.2. Проводники во внешнем электростатическом поле .....	37
2.3. Метод зеркальных изображений .....	39
2.4. Электрическая емкость уединенного проводника. Конденсаторы. Соединения конденсаторов .....	41
<b>Глава 3. Электростатическое поле при наличии диэлектриков .....</b>	<b>48</b>
3.1. Поляризация диэлектриков. Полярные и неполярные молекулы .....	48
3.2. Векторы поляризации и электрической индукции. Диэлектрическая проницаемость и восприимчивость .....	51
3.3. Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в диэлектрике .....	54
3.4. Электрическое поле на границе двух диэлектриков .....	56
3.5. Пьезоэлектрики, пирозлектрики, электреты, сегнетоэлектрики .....	63
<b>Глава 4. Энергия взаимодействия зарядов и энергия электростатического поля .....</b>	<b>69</b>
4.1. Энергия взаимодействия точечных зарядов и непрерывно распределенных зарядов .....	69
4.2. Энергия заряженного проводника и заряженного конденсатора .....	70
4.3. Энергия и плотность энергии электростатического поля .....	72

<b>Глава 5. Постоянный электрический ток</b> .....	74
5.1. Электрический ток. Плотность тока. Сила тока .....	74
5.2. Закон Ома для участка цепи .....	76
5.3. Электропроводность. Температурный коэффициент проводимости .....	79
5.4. Расчет сопротивления соединения проводников методом эквивалентного замещения .....	81
5.5. Сторонние силы. Электродвижущая сила. Источники тока .....	84
5.6. Основные сведения об источниках ЭДС .....	87
5.7. Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, и для замкнутой цепи .....	91
5.8. Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля – Ленца. Дифференциальная форма закона Джоуля – Ленца .....	95
5.9. Работа и мощность в электрической цепи постоянного тока. КПД источника тока .....	98
5.10. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа и примеры их применения .....	99
5.11. Моделирование электростатического поля электрическим полем постоянного тока .....	103
5.12. Зарядка и разрядка конденсатора .....	104
<b>Глава 6. Природа электропроводности</b> .....	107
6.1. Природа тока в металлах .....	107
6.2. Электропроводность диэлектриков и полупроводников .....	113
6.3. Электропроводность жидкостей .....	121
6.4. Электропроводность газов. Несамостоятельный разряд .....	127
6.5. Самостоятельный разряд в газах. Плазма .....	130
6.6. Термоэлектронная эмиссия. Электронные лампы .....	137
<b>Глава 7. Постоянное магнитное поле в вакууме</b> .....	140
7.1. Закон Ампера. Индукция магнитного поля. Сила Лоренца .....	140
7.2. Контур с током в магнитном поле .....	146
7.3. Работа силы Ампера. Магнитный поток. Вихревой характер магнитной индукции .....	149
7.4. Закон Био – Савара – Лапласа .....	151
7.5. Закон полного тока .....	155
7.6. Дифференциальная форма закона полного тока .....	157
7.7. Некоторые приложения основных законов магнитного поля .....	159
7.8. Электроизмерительные приборы .....	162
7.9. Особенности движения заряженных частиц в магнитном поле .....	166
7.10. Определение удельного заряда электрона. Масс-спектрометры .....	169
7.11. Ускорители заряженных частиц .....	171
7.12. Магнитогидродинамический эффект. Эффект Холла .....	174
7.13. Магнитное поле равномерно движущегося заряда .....	176
<b>Глава 8. Магнитные свойства вещества</b> .....	178
8.1. Магнитное поле в магнетиках. Намагниченность магнетиков .....	178
8.2. Напряженность магнитного поля. Закон полного тока в магнетиках. Магнитная восприимчивость и проницаемость .....	181

8.3. Магнитное поле на границе двух магнетиков .....	183
8.4. Элементарная теория диамагнетизма .....	185
8.5. Элементарная теория парамагнетизма .....	187
8.6. Ферромагнетики .....	189
8.7. Элементарная теория ферромагнетизма .....	196
8.8. Магнитные методы изучения строения вещества .....	198
<b>Глава 9. Электромагнитная индукция .....</b>	<b>200</b>
9.1. Опыты Фарадея. Закон электромагнитной индукции .....	200
9.2. ЭДС индукции и индукционный ток .....	203
9.3. Физический смысл ЭДС индукции. Работа силы Лоренца .....	206
9.4. Самоиндукция. ЭДС самоиндукции .....	210
9.5. Взаимная индукция .....	212
9.6. Некоторые применения электромагнитной индукции .....	214
9.7. Магнитная энергия тока. Энергия взаимодействия токов .....	219
9.8. Установление тока в цепи с катушкой индуктивности .....	221
9.9. Энергия и плотность энергии магнитного поля .....	222
9.10. Силы, испытываемые контуром с током в собственном магнитном поле .....	224
9.11. Электромагниты. Магнитное поле Земли .....	225
<b>Глава 10. Электромагнитное поле .....</b>	<b>230</b>
10.1. Магнитоэлектрическая индукция. Ток смещения .....	230
10.2. Уравнения Максвелла в интегральной форме .....	236
10.3. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме .....	237
10.4. Некоторые следствия из уравнений Максвелла .....	240
10.5. Относительность магнитного и электрического полей .....	243
10.6. Значение уравнений Максвелла и границы их применимости .....	249
<b>Глава 11. Квазистационарные электрические цепи .....</b>	<b>252</b>
11.1. Условия квазистационарности. Переменный ток. Действующие значения напряжения и силы тока. Резистор в цепи переменного тока .....	252
11.2. Катушка индуктивности в цепи переменного тока .....	255
11.3. Конденсатор в цепи переменного тока .....	259
11.4. Последовательный контур в цепи переменного тока .....	261
11.5. Закон Ома и законы Кирхгофа для цепей переменного тока .....	264
11.6. Резонанс токов в цепи переменного тока .....	266
11.7. Работа и мощность переменного тока .....	269
11.8. Основы электротехники. Линии передачи электрической энергии. Трансформаторы .....	271
11.9. Принципы устройства электрических машин .....	276
11.10. Асинхронные двигатели. Трехфазная система переменного тока. Машины постоянного тока .....	279
<b>Глава 12. Электромагнитные колебания .....</b>	<b>284</b>
12.1. Электромеханические аналогии. Собственные электромагнитные колебания .....	284
12.2. Автоколебания. Полупроводниковый генератор незатухающих колебаний .....	290

12.3. Ламповый генератор незатухающих колебаний .....	295
12.4. Принципы радиосвязи .....	303
<b>Глава 13. Электромагнитные волны .....</b>	<b>308</b>
13.1. Волновое уравнение. Электромагнитные волны .....	308
13.2. Экспериментальная проверка волновой теории. Отражение волн. Стоячие волны .....	316
13.3. Электромагнитные волны в двухпроводной линии .....	321
13.4. Излучение радиоволн .....	329
13.5. Волноводы .....	333
13.6. Понятие о радиолокации .....	336
13.7. Шкала электромагнитных волн .....	338
13.8. Излучение электромагнитных волн движущимися зарядами .....	340
<b>Заключение .....</b>	<b>342</b>
<b>Приложение .....</b>	<b>344</b>

*Учебное издание*

**Гершензон Евгений Михайлович  
Малов Николай Николаевич  
Мансуров Андрей Николаевич**

**Электродинамика**

**Учебник**

Редактор *В. А. Обменина*  
Технический редактор *Е. Ф. Коржуева*  
Компьютерная верстка: *Л. А. Вишнякова*  
Корректор *В. Т. Козлова*

Диaposитивы предоставлены издательством.

Подписано в печать 17.12.2001. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 2. Печать офсетная.  
Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 22,0. Тираж 30 000 экз. (1-й завод 1 – 5 500 экз.).  
Заказ №1267.

Лицензия ИД № 02025 от 13.06.2000. Издательский центр «Академия».  
Гигиенический сертификат № 77.99.1.953.П.1704.4.99 от 06.04.1999.  
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17-Б, к. 223. Тел./факс: (095) 334-8337, 330-1092.

Отпечатано на Саратовском полиграфическом комбинате.  
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.