ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

В.И. Игошин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

+

П д

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ
серия основана в 1996 г.

В.И. Игошин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Рекомендовано
УМО по образованию в области подготовки
педагогических кадров в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
44.03.05 «Педагогическое образование»

Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com

Москва
ИНФРА-М
2016

УДК 512.8; 161.2(075.8)
ББК 22.12; 87.4я73
И269

Игошин В.И.

И269 Математическая логика: Учеб. пособие. — М.: ИНФРА-М, 2016. — 399 с. + *CD-R*. — (Высшее образование).

ISBN 978-5-16-005204-5

Подробно изложены основы математической логики, привлечен материал школьного курса математики для его логического анализа, охарактеризованы взаимосвязи математической логики с компьютерами и информатикой.

Для студентов университетов, технических и педагогических вузов, обучающихся по специальностям «Математика», «Прикладная математика», «Математик-педагог», «Учитель математики» на уровнях бакалавриата, магистратуры, а также специалитета.

УДК 512.8; 161.2(075.8)
ББК 22.12; 87.4я73

ISBN 978-5-16-005204-5

Предисловие

Логика образует такой пласт общечеловеческой культуры, без освоения которого в настоящее время не может состояться ни одна мыслящая личность. Математическая логика – вершина развития логики, достигнутая ею в XX веке. Органично соединив в себе традиционную логику, восходящую к Аристотелю, и методы современной математики, она получила столь глубокие и поразительные результаты, не принимать в расчёт которые стало просто невозможно не только тем, кто изучает, преподаёт и творит математику, но и всем, для кого методы рассуждений, обоснований и доказательств являются главными методами деятельности. Кроме того, результаты, полученные математической логикой, легли в основу проектирования и создания электронно-вычислительных машин (компьютеров) и программного обеспечения к ним, нашли широчайшие применения в областях информатики и систем искусственного интеллекта.

Настоящая книга предназначена всем, кто изучает математическую логику в высших учебных заведениях. Автор знакомит будущих специалистов с основными понятиями и методами математической логики, показывает взаимосвязи математической логики с математической наукой, со школьным курсом математики, с современными компьютерами.

В главе I дано подробное изложение алгебры (логики) высказываний, так как важно, чтобы именно на начальном этапе знакомства с предметом у студента сформировалась требуемая система понятий, составляющих фундамент математической логики. Глава завершается рассмотрением булевых функций, возникших из алгебры логики и оказавшихся действенным математическим инструментом для конструирования функциональных и релейно-контактных (переключательных) схем – элементов современных компьютеров. В главе II происходит знакомство с иным подходом к алгебре высказываний: она строится как аксиоматическая теория на базе трёх схем аксиом и одного правила вывода. Основная цель главы III, в которой излагается логика предикатов, – выработать у студентов культуру употребления кванторов общности и существования, правильного их понимания и правильного оперирования выражениями (формулами) с кванторами. В вопросах применения логики предикатов значительное внимание уделяется записям на её языке различных предложений, строению математических теорем и методам их доказательств. В главе IV рассмотрен аксиоматический метод в математике, его логические основы. Здесь на неформальном, содержательном, уровне показано, как математическая логика вторгается в различные разделы математической науки, образуя их фундаментальные аксиоматические основы.

Глава V носит исторический характер: в ней рассказывается, как происходило взаимодействие математики и логики в процессе их развития и о кризисах, сопровождавших это развитие, важнейшим из которых был кризис в основаниях математики на рубеже XIX и XX веков. В главе VI представлен один из путей выхода из этого кризиса, выработанный математиками в первой половине XX века. Для этого курс математической логики поднимается на новый качественный уровень: математические теории начинают изучаться с формальной точки зрения. Сначала изучаются свойства формализованного исчисления предикатов: доказываются теоремы Гёделя о существовании модели, о полноте и адекватности этого исчисления, теорема компактности, теорема Лёвенгейма-Сколема. Затем даётся обзор формализаций теорий множеств, арифметики и числовых систем.

Знаки $\Longleftrightarrow$ и $\Longrightarrow$ почти всегда используются для сокращённой записи слов "*тогда и только тогда*" и "*если ..., то ...*" соответственно. Исключения составляют §14 и §15, где первый знак используется для обозначения равносильности предикатов, а второй – для следования предикатов. Знак $\equiv$ обозначает графическое совпадение (одинаковость) формул (логики высказываний или логики предикатов). Для множеств комплексных, действительных, рациональных, целых и натуральных чисел используются стандартные обозначения: C, R, Q, Z и N соответственно. Конец доказательства отмечается значком $\square$.

К пособию прилагается диск, на котором содержится "ТЕТРАДЬ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ" с печатной основой. Распечатав её, учащийся получает минимальный набор задач по данному курсу. В тетради приведены образцы решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения. Ссылки на неё делаются в тексте учебника следующим образом: Тетрадь МЛ. Более объёмный набор задач содержится в сборнике: *В.И.Игошин. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов*. - М.: Изд. центр "Академия", 2008. Ссылки на него по ходу изложения теоретического материала делаются следующим образом: Задачник.

г. Саратов,
1 июля 2011 г. *В.Игошин*

Введение

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА В СИСТЕМЕ СОВРЕМЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Предварим изучение математической логики кратким введением, в котором попытаемся осознать роль и место логики в мышлении, в науке, в математике и в обучении.

Логика и интуиция. Мыслительная деятельность человека представляет собой сложный и многогранный процесс, происходящий как на сознательном, так и на бессознательном (подсознательном) уровнях. Главнейшим качеством мышления является его способность открывать новые факты, новые неизвестные доселе знания, способность изобретать.

Логика и интуиция – два противоположных и неразрывно связанных между собой свойства человеческого мышления. Дедуктивное (логическое) мышление отличается тем, что оно от истинных посылок всегда приводит к истинному заключению, не опираясь при этом на опыт, интуицию и другие внешние факторы. Интуиция представляет собой способность постижения истины путём прямого её усмотрения без её обоснования с помощью логически строгого доказательства (латинское слово intuitio означает "пристальное всматривание"). Таким образом, интуиция выступает своего рода антиподом, противовесом логики и строгости. Логическая часть мыслительного процесса протекает на уровне сознания, интуитивная – на подсознательном уровне. Развитие науки и, в особенности, математики не мыслимо без интуиции.

Вопрос о противопоставлении логического и интуитивного (интеллектуального и чувственного) давно переведён историей развития процесса познания в вопрос о взаимодействии этих двух ипостасей человеческого сознания в ходе этого процесса. Эта же история дала на него вполне определённый ответ. Для познания мира – и физического и духовного – абсолютно необходимы два совершенно различных метода: с одной стороны, логический, строго доказательный, а с другой – интуиция, непосредственное синтетическое суждение, не опирающееся на доказательство. Гипертрофия (преувеличение роли) как строгой логики, так и интуиции являются крайностями. "Обе эти крайности, – справедливо считает Я.Стюарт[1], – бьют мимо цели: вся сила математики – в разумном сочетании интуиции и строгости. Контролируемый дух и вдохновенная логика!"

Подведём итог словами выдающегося математика XX века А.Пуанкаре: "Таким образом, логика и интуиция играют каждая свою необходимую роль. Обе они неизбежны. Логика, которая одна может дать достоверность, есть орудие доказательства; интуиция есть орудие изобретательства."[2]

Логика традиционная и математическая логика. Термин "логика" происходит от греческого слова $\lambda o \gamma o \zeta$ (логос), что означает "мысль", "разум", "слово", "понятие". Традиционная или формальная логика, берущая своё начало от Аристотеля, понимается как наука, изучающая формы и законы мышления, методы, с помощью которых люди в действительности делают выводы, связь логических форм с языком. Эти логические формы, категории и законы мышления сформировались в результате общественной практики. Именно практическая деятельность человека в процессе познания окружающей действительности, миллиарды раз приводя его сознание к повторению одних и тех же логических фигур, откристаллизовала эти фигуры в законы логики. Таким образом, логика представляет собой определённый способ отражения действительности. Именно соблюдение логических законов делает мышление правильным, т.е. способным при выполнении ряда условий достигать истинного знания. Логика изучает то общее, что связывает мысли в их движении к познанию истины. Она есть наука о законах и формах правильного мышления. Она изучает формы рассуждений, отвлекаясь от их конкретного содержания; устанавливает, что из чего следует, ищет ответ на вопрос, как мы рассуждаем? Специфика логики состоит в том, что она изучает не объективный мир природы и не субъективный мир переживаний и чувств, а абстрактное мышление, посредством которого человек познаёт и то и другое.

Математическая логика, называемая также символической или теоретической логикой, выросла из логики традиционной, но явилась значительным её расширением. Эта наука, с одной стороны, применила математические методы для изучения общих структур (форм) правильного мышления и тем самым оформилась как раз-

---

[1] *Стюарт Я.* Концепции современной математики. - Минск: Выш.шк., 1980.- 384 с. (с.14)

[2] *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука, 1983. – 560 с. (с.167)

дел математики. С другой стороны, математическая логика сделала предметом своего изучения процесс доказательства математических теорем, сами математические теории. Математическая логика явилась, таким образом, инструментом для исследований в области оснований математики. Данный раздел математической логики получил название теории доказательства, или метаматематики.

Ни одна из этих двух логик не может в полной мере включать другую как частный случай, но они тесно связаны между собой, переплетаются друг с другом. Математическая логика, являясь более общей, более абстрактной, чем традиционная формальная логика, в то же время является и более конкретной, так как она имеет более широкое применение, даёт возможность решать множество конкретных практических задач, не разрешимых средствами традиционной формальной логики. Аппарат исчислений и формальных систем в математической логике гораздо более совершенен, нежели аппарат традиционной логики. Поэтому он может применяться к решению таких сложных задач, которые недоступны классической логике. Математическая логика способствует более глубокому пониманию логики традиционной, сохранению этой последней и поднятию её на более высокую ступень. В лице математической логики логика традиционная достигла определённого уровня совершенства, ибо ей удалось воспользоваться математикой не только по форме, но и по существу.

Математическая логика – логика или математика? Вопрос о соотношении логики и математики в математической логике издавна интересовал философов, близких к математике, и математиков, близких к философии. Является ли математическая логика логикой в традиционном (философском) понимании, т.е. изучает ли она формы мышления и методы, с помощью которых люди в действительности делают выводы, или же она является чисто математической дисциплиной со своим абстрактным предметом, не имеющим ничего общего к реальному процессу мышления? Подобные вопросы возникли потому, что в лице математической логики математика впервые проникла в гуманитарную сферу, в её святая святых – в сферу человеческого мышления, ранее подвластную лишь философии. Это проникновение было столь стремительным и успешным, что многие философы и мыслители его просто не поняли и не осознали.

Доказанная австрийским математиком и логиком К.Гёделем (1906 – 1978) в 1931 году теорема о неполноте формальной арифметики с небывалой силой показала, что математическая логика –

это, прежде всего, логика, что к человеческому мышлению эта наука имеет самое непосредственное отношение. Она убедительно показала, что совершенно безнадёжно рассчитывать на то, что можно создать полную и непротиворечивую систему аксиом для арифметики или какой-либо теории, содержащей арифметику. (Полнота системы аксиом означает, что, исходя из неё, можно вывести все истинные предложения данной науки). Отсюда следует, что аксиоматический подход к арифметике натуральных чисел не в состоянии охватить всю область истинных арифметических утверждений. Отсюда также вытекает, что то, что мы интуитивно понимаем под процессом математического доказательства, не сводится к использованию аксиоматического метода и законов традиционной и математической логики. Этот самоограничительный закон логики сама логика смогла установить, только развившись в логику математическую. Это ли не убедительнейшее доказательство того, что математическая логика имеет самое прямое отношение к мышлению и его законам.

Известный российский логик П.С.Порецкий точно подметил, что математическая логика по предмету своему есть логика, а по методу – математика.

Математическая логика в обучении математике. Логика и математика в процессе обучения математике взаимодействуют неизбежно. Важно, чтобы это дидактическое взаимодействие не было стихийным, а сознательно организовывалось и направлялось педагогом. В нём можно .loвыделить два аспекта. Во-первых, при обучении математике логика выступает как инструмент педагогики математики, т.е. как инструмент изучения математики. Логика для педагогики математики – инструмент особый. Это – не метод, не средство и не форма обучения. Это – именно инструмент. Во-вторых логика, (как своеобразная часть математики) предстаёт как предмет педагогики математики, т.е. как объект, изучаемый в рамках математики и с помощью математики. Но и в этом своём качестве логика выступает как педагогика математики, ибо изучение логики с помощью математического материала в конечном итоге способствует более осознанному и глубокому изучению самой математики.

Чтобы сделать логику действенным инструментом в обучении математике, а также при изучении математики, необходимо соблюдать ряд принципов. Это – те общие положения, связанные с логикой, которые имеют фундаментальное значение для методики обучения математике. Они указывают основные направления проникновения логики в методику. Нарушение этих принципов, несоблюдение их в процессе обучения математике приводит в итоге к искаженному видению обучаемым как общей картины математики, так и отдельных её деталей.

1) Принцип обучения строению (структуре) математических утверждений. Здесь необходимо, во-первых, научиться видеть логическую структуру математического утверждения, будь то определение или теорема, отчётливо видеть, где и какие логические связки участвуют в формулировке. При этом, если это определение понятия, то важно, какого оно типа – через ближайший род и видовое отличие, индуктивное, рекуррентное, генетическое или аксиоматическое. Если это теорема, то необходимо чётко увидеть, что в ней дано и что требуется доказать, какова структура условий и структура заключения. Сюда относится также понимание сути необходимых и достаточных условий, прямой и обратной теорем и их различных видов. Во-вторых, необходимо научиться понимать, какие утверждения равносильны каким, т.е. научиться преобразовывать структуру математического утверждения равносильным образом. Чем больше усвоено логических равносильностей, тем выше логическая культура учителя.

2) Принцип обучения понятию доказательства математической теоремы. Здесь необходимо уяснить, что доказательство теоремы – это последовательность (цепочка) утверждений, каждое из которых есть либо условие теоремы, либо аксиома, либо получено из двух предыдущих утверждений последовательности по правилу вывода: из утверждений P и $P \to Q$ следует утверждение Q. Построив такую цепочку, мы доказываем, что из A выводится B, в результате чего делаем вывод, что справедлива теорема $A \to B$. Обоснованием этому переходу служит логическая теорема о дедукции. Всякий раз при доказательстве теоремы нужно стремиться к тому, чтобы эта цепочка-доказательство вырисовывалась бы в сознании учащегося как можно более отчётливо.

3) Принцип обучения методам доказательства математических теорем. Здесь необходимо, во-первых, научиться методам построения цепочки утверждений $A = A_0, A_1, ..., A_n = B$ для доказательства теоремы $A \to B$. Синтетический (или прямой) метод – построение цепочки в прямом направлении, от A к B. Аналитический метод (или метод восходящего анализа) - построение цепочки в обратном направлении, от B к A. Во-вторых, необходимо уяснить, что для доказательства теоремы $A \to B$ достаточно доказать теорему $\neg B \to \neg A$, или $(A \wedge \neg B) \to \neg A$, или $(A \wedge \neg B) \to B$ (варианты метода доказательства от противного), вместо теоремы A достаточно доказать теорему $(\neg A \to (B \wedge \neg B)) \to A$ (метод приведения к

абсурду), вместо $A \to C$ – две теоремы $A \to B$ и $B \to C$ (метод цепного заключения) и т.д.

4) Принцип обучения строению математических теорий. Здесь имеется в виду уяснение сути аксиоматического метода при построении математической теории и при её преподавании, уяснение сути первоначальных (неопределяемых) понятий теории, её аксиом и теорем, вплоть до метатеории (свойств этой теории) – непротиворечивости, полноты, категоричности, независимости системы аксиом. Знание аксиоматических теорий, лежащих в основаниях школьных математических курсов: аксиоматические построения геометрии на основе систем аксиом Евклида, Гильберта, Вейля и т.д.; аксиоматическая теория числовых систем как основания школьного курса алгебры и начал анализа.

Математическая логика помогает обосновать и облегчает применение указанных логических принципов. Они должны органично войти в сознание всякого преподающего и изучающего математику, ибо без их соблюдения в процессе обучения математике изучаемый предмет рискует утратить те качества и черты, которые собственно и выделяют его из системы прочих наук.

Математическая логика и современные ЭВМ. Широчайшее распространение компьютеров, проникающих буквально во все сферы нашей жизни, требует и массового внедрения, начиная с самого раннего возраста, компьютерной культуры, т.е. понимания возможностей компьютера и умения взаимодействовать с ним. Тесная связь методов математической логики и современных компьютеров прослеживается по следующим двум направлениям. Эти методы используются как при физическом конструировании и создании компьютеров (алгебра высказываний и булевы функции – математический аппарат для конструирования переключательных и функциональных схем, составляющих элементную базу компьютеров), так и при создании математического обеспечения к ним (в основе многочисленных языков программирования лежат теория алгоритмов, теория формальных систем, логика предикатов; например, название языка PROLOG означает сокращение от слов "ПРОграммирование ЛОГическое"). Кроме того, синтез логики и компьютеров привёл к возникновению баз данных и экспертных систем, что явилось важнейшими этапами на пути к созданию искусственного интеллекта – машинной модели человеческого разума.

Понимание всех этих взаимосвязей неотделимо от современного высшего математического, технического и педагогического образования.

Глава I.

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Высказывание – первый важнейший объект изучения математической логики. Алгебра высказываний изучает способы построения высказываний из имеющихся высказываний, закономерности таких способов сочетания высказываний. Алгебра высказываний является фундаментом математической логики.

§1. Высказывания и операции над ними

Понятие высказывания. Под *высказыванием* понимается такое предложение, которое что-либо утверждает (или отрицает) и о котором можно судить истинно оно или ложно. Именно это свойство – быть истинным или ложными – является определящим свойством высказывания. Высказывание не может быть одновременно и истинным, и ложным. Вот что говорил по этому поводу основоположник логики как науки древнегреческий философ Аристотель в трактате "Об истолковании": "Всякая речь что-либо обозначает... Но не всякая речь есть высказывающая речь, а лишь та, в которой содержится истинность или ложность чего-либо; мольба, например, есть речь, но она не истинная и не ложная. Итак, прочие речи оставлены здесь без внимания, ибо рассмотрение их более подобает искусству красноречия или стихотворному искусству; к настоящему исследованию относится высказывающая речь".

Таким образом, наличие у предложения значения истинности – то характеристическое свойство, которое выделяет высказывания из класса всех предложений языка.

В дальнейшем будем считать, что имеется первоначальная совокупность некоторых простейших высказываний, называемых элементарными или исходными, о каждом из которых точно известно, истинно или ложно. Причём, в этой совокупности имеются как истинные высказывания, так и ложные.

Договоримся обозначать конкретные высказывания начальными заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, D, \ldots$ или теми же буквами с индексами внизу.

Приведём примеры высказываний, которые используем и в дальнейшем:

A_1: "*Москва – столица России*",

A_2: "*Саратов находится на берегу Невы*",

A_3: "*Все люди смертны*",

A_4: "*Сократ – человек*",

A_5: "$7 < 4$",

A_6: "*Волга впадает в Каспийское море*",

A_7: "*А.С.Пушкин – великий русский математик*",

A_8: "*Снег – белый*".

Будем сопоставлять истинному высказыванию символ 1, а ложному – символ 0. Другими словами, введём функцию λ, заданную на совокупности всех высказываний и принимающую значения в двухэлементном множестве $\{0, 1\}$, по следующему правилу:

$$\lambda(P) = \begin{cases} 1, & \text{если высказывание } P \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если высказывание } P \text{ ложно.} \end{cases}$$

Функция λ называется функцией истинности, а значение $\lambda(P)$ называется ***логическим значением*** или ***значением истинности*** высказывания P. Для приведённых высказываний имеем логические значения $\lambda(A_1) = 1$, $\lambda(A_2) = 0$, $\lambda(A_3) = 1$, $\lambda(A_4) = 1$, $\lambda(A_5) = 0$, $\lambda(A_6) = 1$, $\lambda(A_7) = 0$, $\lambda(A_8) = 1$.

Отметим, что в литературе имеются следующие обозначения для истинных высказываний: 1, И, t (от английского truth – истинный) и для ложных высказываний: 0, Л, f (от английского false – ложный). Из этих обозначений мы предпочитаем 1 и 0. Это обусловлено рядом причин. Во-первых, таблицы истинности для формул алгебры высказываний принимают более лаконичный и стандартизированный вид, так как в этом случае наборы значений пропозициональных переменных можно расположить в порядке возрастания чисел, которые этими наборами закодированы в двоичной системе счисления. Например, для случая трёх пропозициональных переменных X, Y, Z набор значений этих переменных 000 означает двоичную запись десятичного числа 0, набор 001 – двоичную запись десятичного числа 1, набор 010 – двоичную запись десятичного числа 2, 011 – 3, 100 – 4, 101 – 5, 110 – 6, 111 – 7. Во-вторых, более удобный и математически строгий вид принимают многие формулы и алгоритмы алгебры высказываний. В-третьих, обозначение 0 и 1 принято и более целесообразно в приложениях математической логики к компьютерам и информатике.

Из элементарных высказываний с помощью операций над высказываниями или логических связок строят сложные высказывания. Перейдём к точному описанию таких построений.

Отрицание высказывания. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.[3] *Отрицанием* высказывания P называется новое высказывание, обозначаемое $\neg P$ (читается: "не P" или "не верно, что P"), которое истинно, если высказывание P ложно, и ложно, если высказывание P истинно. Другими словами, логическое значение высказывания $\neg P$ связано с логическим значением высказывания P, как указано в следующей таблице, называемой ***таблицей истинности операции отрицания***:

$\lambda(P)$	$\lambda(\neg P)$
0	1
1	0

Здесь может возникнуть вопрос, почему приписывание истинности или ложности высказыванию $\neg P$ осуществляется именно на основании приведённой таблицы. Конечно, можно ответить, что об определениях не спорят. Но ведь мы желаем построить математическую теорию (алгебру выказываний), которая в какой-то мере отражала бы реально существующий в природе человеческого мышления процесс построения составных высказываний из элементарных и вкладывания в эти составные высказывания реального смысла. Затем мы должны будем развить нашу математическую теорию, а полученные выводы применить в практике мышления и при этом не прийти в противоречие с общеизвестными законами мышления. К определению отрицания с помощью приведённой таблицы (как в прочем и других логических связок с помощью соответствующих таблиц, о чём речь пойдёт ниже) пришли в результате большого предварительного опыта, и такое определение полностью оправдало себя на практике.

ПРИМЕР 1.2. Применим операцию отрицания к высказыванию A_6: "*Волга впадает в Каспийское море*". Отрицание читают так: "*Неверно, что* A_6". Или же частицу "не" переносят на такое место (ча-

---

[3]В книге принята нумерация всех элементов по параграфам. Так, в обозначениях "Определение 2.1", "Теорема 2.2", "Пример 2.3" и т.д. первая цифра указывает на номер параграфа, в котором находится данный элемент, вторая – на его порядковый номер.

ще всего ставят перед сказуемым), чтобы получилось правильно составленное предложение: "*Неверно, что Волга впадает в Каспийское море*" или "*Волга не впадает в Каспийское море*". Таблица из определения 1.1 даёт для данного высказывания следующее логическое значение: $\lambda(\neg A_6) = \neg\lambda(A_6) = \neg 1 = 0$, т.е. высказывание $\neg A_6$ ложно. Ложность высказывания $\neg A_6$ обусловлена только истинностью исходного высказывания A_6 и определением 1.1, но никак не соображениями смысла (содержания) высказывания $\neg A_6$. Другое дело, что само определение 1.1 потому-то и сделано таким, что оно правильно (или, как говорят, адекватно) отражает факты, известные нам из практики.

Конъюнкция двух высказываний. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Конъюнкцией* двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \wedge Q$ или $P\&Q$ (читается "P и Q"), которое истинно лишь в единственном случае, когда истинны оба исходных высказывания P и Q, и ложно во всех остальных случаях. Другими словами, логическое значение высказывания $P \wedge Q$ связано с логическими значениями высказываний P и Q, как указано в следующей таблице, называемой *таблицей истинности операции конъюнкции*:

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \wedge Q)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Практика полностью подтвердила, что именно такое распределение значений истинности наиболее соответствует тому смыслу, который придаётся в процессе мыслительной деятельности связующему союзу "и".

ПРИМЕР 1.4. Применим операцию конъюнкции к высказываниям A_2 и A_3. Получим высказывание $A_2 \wedge A_3$: "*Саратов находится на берегу Невы*, и *все люди смертны*". Конечно, мы не воспринимаем это высказывание как истинное из-за первой, ложной, части. К выводу о ложности полученного высказывания также придём, исходя из логических значений исходных высказываний A_2 и A_3 и определения 1.3 конъюнкции на основании приведённой там таблицы. В самом деле, $\lambda(A_2 \wedge A_3) = \lambda(A_2) \wedge \lambda(A_3) = 0 \wedge 1 = 0$.

Дизъюнкция двух высказываний. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. *Дизъюнкцией* двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \vee Q$ (читается "P или Q"), которое истинно в тех случаях, когда хотя бы одно из высказываний P или Q истинно, и ложно в единственном случае, когда оба высказывания P и Q, ложны. Другими словами, $P \vee Q$ – такое высказывание, логическое значение которого связано с логическими значениями исходных высказываний P и Q как указано в следующей таблице, называемой *таблицей истинности операции дизъюнкции*:

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \vee Q)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ПРИМЕР 1.6. Применим операцию дизъюнкцию к высказываниям A_3 и A_5. Получим составное высказывание $A_3 \vee A_5$: "Все люди смертны, или $7 < 4$". Несмотря на первоначально кажущуюся странность этого высказывания, нет сомнений в его истинности. К аналогичному заключению приводит также формальное вычисление логического значения данного высказывания по таблице из определения 1.5, исходя из логических значений высказываний A_3 и A_5: $\lambda(A_3 \vee A_5) = \lambda(A_3) \vee \lambda(A_5) = 1 \vee 0 = 1$. В то же время высказывание "*Саратов находится на берегу Невы*, или *А.С.Пушкин – великий русский математик*", являющееся дизъюнкцией высказываний A_2 и A_7, безусловно, ложно, что полностью согласуется с формальным вычислением его логического значения по таблице из определения 1.5: $\lambda(A_2 \vee A_7) = \lambda(A_2) \vee \lambda(A_7) = 0 \vee 0 = 0$.

Импликация двух высказываний. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. *Импликацией* двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \to Q$ (читается: "если P, то Q", или "из P следует Q", или "P влечёт Q", или "P достаточно для Q", или "Q необходимо для P"), которое ложно в единственном случае, когда высказывание P истинно, а Q – ложно, а во всех остальных случаях – истинно. Другими словами, логическое значение высказывания $P \to Q$ связано с логическими значениями высказываний P и Q, как указано в следующей таблице, называемой *таблицей истинности операции импликации*:

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \to Q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

В высказывании $P \to Q$ высказывание P называется посылкой или антецедентом, а высказывание Q – следствием или консеквентом.

При определении импликации с ещё большей силой встаёт вопрос, почему именно такое распределение принято в её таблице истинности. Последние две строки в ней достаточно хорошо согласуются с нашим пониманием выражения "*если ... , то ...*". Их обоснованием могут служить следующие соображения. Импликация призвана отразить процесс рассуждения, умозаключения. Общая характеристика этого процесса следующая. Если мы исходим из истинной посылки и правильно (верно) рассуждаем, то мы приходим к истинному заключению (следствию, выводу). Другими словами, если мы исходили из истинной посылки и пришли к ложному выводу, значит, мы неверно рассуждали. В импликации $P \to Q$ имеется посылка P, следствие Q и процесс рассуждения $\to$. Процесс рассуждения как раз и моделируется результатом операции $P \to Q$. Приведённое соображение служит обоснованием результата $1 \to 0 = 0$, а также результата $1 \to 1 = 1$.

Определённые сомнения возникают при оценке адекватности первых двух строк в таблице, определяющей импликацию. В первой строке при ложной посылке и ложном следствии импликация признаётся истинной. Следующие два примера добавляют аргументов в пользу такого определения логического значения импликации в этом случае. Рассмотрим такое высказывание: "*Если число делится на 5, то и его квадрат делится на 5*". Его истинность не вызывает сомнения. В частности, мы могли бы сказать: "*Если 10 делится на 5, то 10^2 делится на 5*", или "*Если 11 делится на 5, то и 11^2 делится на 5*". В первом из этих высказываний и посылка, и следствие истинны, во втором – и посылка, и следствие ложны. Тем не менее, оба этих высказывания истинны. Для большей убедительности второе высказывание можно сформулировать в сослагательной форме: "*Если бы 11 делилось на 5, то и 11^2 делилось бы на 5*".

В пользу второй строки таблицы, когда импликация остаётся истинной при ложной посылке и истинном следствии говорит такой пример. Высказывание "*Если первое слагаемое делится на 5 и второе слагаемое делится на 5, то и сумма делится на 5*", несомненно истинно. Но, в частности, мы могли бы сказать: "*Если 10 делится на 5 и 20 делится на 5, то 30 делится на 5*" или "*Если 12 делится на 5 и 13 делится на 5, то 25 делится на 5*". В первом из этих высказываний и посылка истинна (как конъюнкция двух истинных выражений) и следствие истинно. Во втором же высказывании посылка ложна (как конъюнкция двух ложных высказываний), а следствие истинно. Тем не менее, как мы уже отметили, оба этих высказывания признаются истинными.

Пример 1.8. Высказывание $A_6 \to A_5$: "*Если Волга впадает в Каспийское море, то* $7 < 4$" – ложно, так как $\lambda(A_6 \to A_5) = \lambda(A_6) \to \lambda(A_5) = 1 \to 0 = 0$. Высказывание "*Если Саратов находится на берегу Невы*, то *А.С.Пушкин – великий русский математик*", являющееся импликацией высказываний A_2 и A_7, истинно, так как $\lambda(A_2 \to A_7) = \lambda(A_2) \to \lambda(A_7) = 0 \to 0 = 1$.

Эквивалентность двух высказываний. Определение 1.9. *Эквивалентностью* двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \leftrightarrow Q$ (читается: "P эквивалентно Q", или "P необходимо и достаточно для Q", или "P тогда и только тогда, когда Q", или "P если и только если Q"), которое истинно в том и только в том случае, когда одновременно оба высказывания P и Q либо истинны, либо ложны, а во всех остальных случаях – ложно. Другими словами, логическое значение высказывания $P \leftrightarrow Q$ связано с логическими значениями высказываний P и Q, как указано в следующей таблице, называемой *таблицей истинности операции эквивалентности*:

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \leftrightarrow Q)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пример 1.10. Высказывание "$7 < 4$ тогда и только тогда, когда *снег белый*", являющееся эквивалентностью высказываний A_5 и A_8, ложно, так как $\lambda(A_5 \leftrightarrow A_8) = \lambda(A_5) \leftrightarrow \lambda(A_8) = 0 \leftrightarrow 1 = 0$. Напротив, высказывание "*Саратов находится на берегу Невы*, если и только если *А.С.Пушкин – великий русский математик*" – истинно, так как оно является эквивалентностью двух ложных высказываний.

Общий взгляд на логические операции. Ещё раз отметим, что только логические значения или значения истинности, а не содержание высказываний интересуют нас в развиваемой теории. Поэтому каждое из введённых определений (1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9) операций над высказываниями можно рассматривать как определение некоторого действия над символами 0 и 1, т.е. как определение некоторой операции на двухэлементном множестве $\{0, 1\}$. Например, отрицание задаёт следующие правила действия с этими символами: $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$, конъюнкция – следующие: $0 \wedge 0 = 0$, $0 \wedge 1 = 0$, $1 \wedge 0 = 0$, $1 \wedge 1 = 1$, импликация – следующие: $0 \to 0 = 1$, $0 \to 1 = 1$, $1 \to 0 = 0$, $1 \to 1 = 1$ и так далее.

Учитывая два правила действия с символами 0 и 1, определяемые отрицанием, можно записать равенство для вычисления логического значения высказывания $\neg P$:

$$\lambda(\neg P) = \neg\lambda(P) . \tag{1.1}$$

Указанные четыре правила действия с символами 0 и 1, определяемые конъюнкцией, позволяют записать равенство для вычисления логического значения высказывания $P \wedge Q$:

$$\lambda(P \wedge Q) = \lambda(P) \wedge \lambda(Q) . \tag{1.2}$$

Аналогично, правила действия с символами 0 и 1, сформулированные в определениях 1.5, 1.7, 1.9, дают возможность записать равенства для вычисления логических значений высказываний $P \vee Q$, $P \to Q$ и $P \leftrightarrow Q$ соответственно:

$$\lambda(P \vee Q) = \lambda(P) \vee \lambda(Q) , \tag{1.3}$$

$$\lambda(P \to Q) = \lambda(P) \to \lambda(Q) , \tag{1.4}$$

$$\lambda(P \leftrightarrow Q) = \lambda(P) \leftrightarrow \lambda(Q) . \tag{1.5}$$

Равенства (1.2) – (1.5) можно записать в виде одного соотношения:

$$\lambda(P * Q) = \lambda(P) * \lambda(Q),$$

где значок $*$ обозначает один из символов логических операций $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$.

Равенства (1.1) – (1.5) фактически использовались при вычислениях логических значений высказываний $\neg A_6$, $A_2 \wedge A_3$, $A_3 \vee A_5$, $A_2 \vee A_7$, $A_6 \to A_5$, $A_2 \to A_7$, $A_5 \leftrightarrow A_8$, которые были проделаны выше в качестве примеров применения операций над высказываниями.

Решите из Тетради МЛ задачи №№ 1.1 – 1.15 о логических операциях над высказываниями.

Мышление, язык, логика. Во введении мы определили логику как науку о законах и формах правильного мышления. Если часть мыслительных процессов и проходит на подсознательном уровне, то выражение их результатов происходит на уровне сознания, причём, непременно с использованием языка. Язык в той или иной мере отражает процесс мышления и его результат. Мысль, родившаяся в глубинах подсознания, в конечном итоге выражается предложением (утверждением, суждением, высказыванием) на языке. При этом, язык понимается как знаковая система, предназначенная для фиксации, хранения, переработки и передачи информации.

Важнейшим свойством суждения является его истинностное значение, т.е. истинно это суждение или ложно. Что такое "истина" и что такое "ложь"? Как определить истинностное значение высказывания? Суждение считается истинным, если утверждаемая в нём ситуация имеет место в действительности. В противном случае суждение считается ложным.

Классическое философское определение понятия истины дано Аристотелем в его "Метафизике": "В самом деле, говорить, что сущее не существует, или не-сущее существует, это – ложь, а говорить, что сущее существует, а не-сущее не существует, это – правда."[4] Или ещё: "... Истину говорит тот, кто считает разъединённое разъединённым и связанное – связанным, а ложное – тот, кто думает обратно тому, как дело обстоит с вещами... Не потому ты беден, что мы считаем тебя бедным, а, наоборот, именно потому, что ты беден, мы, утверждающие это, говорим правду." [5]

Таким образом, содержание мышления составляет отражаемая действительность, а основной характеристикой содержания мышления является истинность мысли, или адекватность мысли отражаемому предмету. Мы хотим изучать мышление через посредство его выражения на языке, и мы начинаем строить математическую модель этого явления.

Мы представляем себе мышление как совокупность суждений о предметах и явлениях окружающего мира и ряд отношений между этими суждениями. Первый шаг на пути построения модели состоит в том, что мы отвлекаемся (абстрагируемся) от конкретного содержания суждений, а оставляем от каждого суждения лишь одну его характеристику – истинностное значение. Мы приходим к двухэлементному множеству $\{0,1\}$.

Далее, мы обнаруживаем в нашем языке языковые союзы "не", "и", "или", "если ..., то ...", "тогда и только тогда" и т.д., которые мы часто употребляем для соединения простых суждений в более сложные, составные. За этими действиями в языке стоят некие логические операции, существо которых состоит в логическом преобразовании истинностных значений исходных суждений в истинностные значения составных суждений. Так мы приходим к логическим операциям "отрицание", "конъюнкция", "дизъюнкция", "импликация", "эквивалентность", которые по существу представ-

---

[4]*Аристотель.* Метафизика, IV, 7, 1011в20. - М.-Л.: Соцэкгиз, 1934, с.75.

[5]*Аристотель.* Соч.: в 4-х т.- М.: Мысль, 1976, т.1, с.250.

ляют собой алгебраические операции на двухэлементном множестве $\{0,1\}$. Это множество вместе с заданными на нём алгебраическими операциями представляет собой алгебраическую структуру $< \{0,1\};\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow>$, называемую ***алгеброй логики***, или ***алгеброй высказываний***, или ***булевой алгеброй***. Она и служит для нас математической моделью мышления, выражаемого на языке.

Итак, каждая из введённых логических операций является неким математическим образом, моделью соответствующего логического союза нашего языка. Эти понятия призваны отразить на языке нулей и единиц соответствующие союзы нашего мышления, которыми человечество пользуется в течении тысячелетий. Вне всякого сомнения, язык нулей и единиц значительно беднее человеческого языка и это отражение достаточно грубо и несовершенно. Тем не менее, какие-то основные черты, существенные аспекты этих процессов мышления понятия логических операций всё же отражают. Так, отрицание, конъюнкция и эквивалентность достаточно точно передают суть логических союзов "*не*", "*и*", "*тогда и только тогда, когда*" соответственно. Хуже обстоит дело с дизъюнкцией, призванной отразить языковый союз "*или*". Следует отметить, что, кроме рассматриваемой нами дизъюнкции, называемой ***дизъюнкцией в не исключающем смысле*** (она истинна тогда и только тогда, когда по меньшей мере один её член истинен), некоторые авторы рассматривают ***дизъюнкцию в исключающем смысле*** (или ***строгую дизъюнкцию***): она истинна тогда и только тогда, когда истинен точно один её член.

Наименее адекватным соответствующему союзу языка является понятие импликации, которое призвано отразить логический союз "*если... , то...* ". Это и понятно: на этом союзе основан один из сложнейших умственных процессов – процесс построения выводов, умозаключений. Импликация остаётся всё же самой "коварной" из всех логических операций, и её определение при всех приведённых доводах оставляет в нас чувство неуютности. И это неспроста. Наиболее наглядно эта неадекватность определения языку проявится в ходе развития алгебры высказываний, когда мы, например, придём к тому, что тавтологией окажется следующая формула: $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$. Это означает, что какие бы ни были высказывания P и Q по меньшей мере одно из высказываний $P \rightarrow Q$ или $Q \rightarrow P$ непременно будет истинным. Этот факт уже не согласуется с общепринятой практикой, и он ещё раз подтверждает, что понятие импликации лишь весьма условно и приблизительно переводит на язык нулей и единиц тот смысл, который имеется в виду при построении фразы типа "*если ..., то ...*".

Из всего сказанного следует сделать вывод о том, что тонкое и многообразное человеческое мышление не так легко поддаётся научному осмыслению и изучению и что алгебра высказываний – всего лишь одно из приближений, всего лишь шаг на пути к познанию человеческого мышления.

Отметим, что термин "конъюнкция" происходит от латинского слова conjunctio, что означает "соединение", термин "дизъюнкция" – от латинского dusjunctio, что означает "разъединение", термин "импликация" – от латинских слов implicatio – "сплетение" и implico – "тесно связываю".

Построенная модель именно и позволит нам изучать формы мышления, а также позволит точнее понять, какое мышление (какие его формы) следует считать правильными. Форма мысли, а мысль у нас представлена высказыванием языка, – это то, что остаётся, если полностью отвлечься (абстрагироваться) от конкретного её содержания, от содержательного многообразия отражаемого. Полностью отринув содержание, мы оставляем от мыслей лишь их формы. Таким образом, форма мысли – это то общее, что имеют разные по содержанию мысли. Изучение этих форм и отношений между ними и составляет предмет логики как науки. В этом смысле логику называют формальной логикой, т.е. наукой о формах мыслей (подобно тому, как геометрия – наука о пространственных формах предметов).

Здесь можно, продолжая мысль Норберта Винера с математики на логику, сказать, что логика призвана находить порядок в хаосе мыслей, который нас окружает. Вспоминается также и Давид Гильберт: "Математика есть искусство называть разные вещи одним и тем же именем."

В следующем параграфе мы продолжим изучение нашей математической модели мышления – алгебры логики, в направлении изучения разнообразных форм мыслей, которые в нашей модели выражаются так называемыми формулами алгебры высказываний.

§2. Формулы алгебры высказываний

Конструирование сложных высказываний. С помощью логических операций, рассмотренных в §1, из простейших высказываний можно строить высказывания более сложные. Например, из высказываний A_2, A_3, A_7 можно построить такое высказывание: "Если Саратов находится на берегу Невы и все люди смертны, то А.С.Пушкин – великий русский математик". Построенное высказывание символически записывается так: $(A_2 \wedge A_3) \to A_7$. Конечно, оно звучит несколько странно, поскольку соединяет в себе столь разнородные понятия, которые обычно существуют раздельно друг от друга. Но нас, ещё раз подчёркиваем, интересует не содержание этого высказывания, а его логическое значение. Оно может быть определено, исходя из логических значений исходных высказываний A_2, A_6, A_7 и той схемы, по которой из исходных высказываний построено сложное высказывание. Так как $\lambda(A_2) = 0$, $\lambda(A_3) = 1$, $\lambda(A_7) = 0$, то, используя соотношения (1.4), (1.2) и определения 1.7, 1.3, находим: $\lambda[(A_2 \wedge A_3) \to A_7] = \lambda(A_2 \wedge A_3) \to \lambda(A_7) = (\lambda(A_2) \wedge \lambda(A_3)) \to \lambda(A_7) = (0 \wedge 1) \to 0 = 0 \to 0 = 1$. Итак, высказывание $(A_2 \wedge A_3) \to A_7$ истинно.

Для конструирования данного сложного высказывания из простейших высказываний A_2, A_3 и A_7 нужно применить операцию конъюнкции к первым двум высказываниям, а затем к полученному высказыванию и к третьему исходному высказыванию применить операцию импликации. Это словесное описание схемы конструирования данного сложного высказывания можно заменить описанием символическим: $(X \wedge Y) \to Z$, где X, Y, Z – некоторые символы (переменные), вместо которых можно подставить любые конкретные высказывания. Такая схема конструирования составного высказывания может быть применена к различным конкретным высказываниям, а не только к высказываниям A_2, A_3, A_7. Например, по этой схеме из высказываний A_4, A_8, A_5 построим высказывание "Если Сократ – человек и снег – белый, то $7 < 4$". Находим его логическое значение: $\lambda[(A_4 \wedge A_8) \to A_5] = \lambda(A_4 \wedge A_8) \to \lambda(A_5) = (\lambda(A_4) \wedge \lambda(A_8)) \to \lambda(A_5) = (1 \wedge 1) \to 0 = 1 \to 0 = 0$. Таким образом, та же самая схема построения составного высказывания привела к ложному высказыванию. Однако ввиду разнородности понятий, которыми оперирует исходные высказывания A_4, A_8, A_5, трудно на интуитивной основе судить об истинности высказывания $(A_4 \wedge A_8) \to A_5$.

По рассматриваемой схеме построено и следующее высказывание: "Если 100 делится на 5 и 100 делится на 2, то 100 делится на 10". Формальное вычисление логического значения данного высказывания показывает, что оно истинно, с чем вполне согласуются наши интуитивные представления об этом высказывании.

Итак, символическая запись $(X \wedge Y) \to Z$ является своего рода формулой. Конечно, более привычны формулы типа $S = \pi r^2$ (формула площади круга), $E = mgh$ (формула потенциальной энергии тела) и им подобные. Тем не менее, выражение $(X \wedge Y) \to Z$ также можно считать формулой – формулой схемы конструирования составных высказываний из более простых.

Понятие формулы алгебры высказываний. В формулу $(X \wedge Y) \to Z$ вместо переменных X, Y, Z можно подставлять конкретные высказывания, после чего вся формула будет превращаться в некоторое составное высказывание. Переменные, вместо которых можно подставлять высказывания, т.е. переменные, пробегающие множество высказываний, называют *пропозициональными переменными*, или высказывательными переменными, или переменными высказываниями. Будем обозначать пропозициональные переменные заглавными буквами латинского алфавита P, Q, R, S, X, Y, Z или такими же буквами с индексами $P_1, P_2, ..., Q_1, Q_2, ..., X_1, X_2, ..., Y_1, Y_2$, ... Теперь сформулируем точное определение формулы алгебры высказываний.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 (*формулы алгебры высказываний*).

1. Каждая отдельно взятая пропозициональная переменная есть формула алгебры высказываний.

2. Если F_1 и F_2 – формулы алгебры высказываний, то выражения $\neg F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются формулами алгебры высказываний.

3. Никаких других формул алгебры высказываний, кроме получающихся согласно пунктам 1 и 2, нет.

Определения такого типа называются индуктивными. В них имеются прямые пункты (в данном случае пункты 1, 2), где задаются объекты, которые в дальнейшем именуются определяемым термином (в данном случае – формулами алгебры высказываний), и косвенный пункт (в данном случае пункт 3), в котором говорится, что такие объекты исчерпываются объектами, заданными в прямых пунктах. Среди прямых пунктов имеются базисными пункты (в данном случае пункт 1), где указываются некоторые конкретные объекты, именуемые в дальнейшем определяемым термином, и индуктивные пункты (в данном случае пункт 2), где даются правила получения определяемых объектов, в частности из объектов, перечисленных в базисных пунктах.

Индуктивный характер определения формулы позволяет решать две взаимно обратные задачи. Во-первых, строить новые (всё более сложные) формулы из уже имеющихся и, во-вторых, определять, будет ли данное выражение, составленное из пропозициональных переменных, символов логических операций и скобок, формулой алгебры высказываний. Для решения второй задачи отметим следующее. Из определения следует, что для каждой формулы должна существовать конечная последовательность всех её подформул, т.е. такая конечная последовательность, которая начинается с входящих в данную формулу пропозициональных переменных, заканчивается самой этой формулой, и каждый член этой последовательности, не являющийся пропозициональной переменной, есть либо отрицание уже имеющегося члена этой последовательности, либо получается из двух уже имеющихся членов этой последовательности их соединением с помощью одного из знаков $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ и заключением полученного выражения в скобки. Такую последовательность всех подформул данной формулы иногда называют ***порождающей последовательностью*** для данной формулы. Наличие такой последовательности у логического выражения служит критерием того, что выражение является формулой.

Приведём ПРИМЕРЫ ФОРМУЛ. На основании пункта 1 определения 2.1 формулами будут пропозициональные переменные: P, Q, R, X, Y, Z; $P_1, P_2, \dots, Q_1, Q_2, \dots, X_1, X_2, \dots$. Далее, на основании пункта 2 того же определения из этих формул построим следующие: $\neg P$, $\neg Q$, $\neg X$, $\neg Y$, $\neg Z$, $(P \vee R)$, $(X \wedge Y)$, $(X \to Z)$, $(Q \leftrightarrow R)$, $(Y \vee Z)$. Из построенных формул также на основании пункта 2 строим ещё более сложные формулы: $(\neg P \wedge \neg Q)$, $(P \wedge \neg P)$, $((X \wedge Y) \to Z)$, $((X \to Z) \wedge (Y \vee Z))$, $((P \vee R) \to (Q \leftrightarrow R))$, $((X \to Z) \to Y)$. Ясно, что процесс построения все более сложных формул может продолжаться безгранично.

Приведём ПРИМЕРЫ ВЫРАЖЕНИЙ, НЕ ЯВЛЯЮЩИХСЯ ФОРМУЛАМИ. Это в каком-то смысле нелепые выражения. К примеру, выражение $((XY) \to Z)$ было бы формулой на основании пункта 2 определения 2.1, если бы формулами были выражения (XY) и Z. Выражение Z есть пропозициональная переменная, и потому на основании пункта 1 определения 2.1 является формулой. Рассмотрим выражение (XY). Оно было бы формулой, если бы между формулами X и Y стоял один из знаков логических связок. Но такого знака нет. Следовательно, выражение (XY) не формула, и, значит, формулой не является исходное выражение $((XY) \to Z)$.

Вот ещё примеры выражений, не являющихся формулами (убедитесь в этом самостоятельно): $((P \neg Q) \wedge (P \to \neg R))$, $(P \wedge Q \vee R)$, $((X \to) \wedge Z)$, $(X \vee \neg Y) \to (\neg X \wedge \neg Y)$.

То, что последнее выражение не является формулой, может сначала вызвать недоумение. Но после сопоставления его с пунктом 2 определения 2.1 отмечаем, что в последнем выражении не достаёт внешних скобок для того, чтобы считать его формулой. Действительно, если бы мы сочли данное выражение формулой, то на основании пункта 2 формулой было бы и выражение $((X \vee \neg Y) \to (\neg X \wedge \neg Y) \leftrightarrow Z)$. Но оно бессмысленно, потому что неопределённо: неизвестно, какую операцию нужно выполнять первой, импликацию или эквивалентность. А от этого, как можно проверить (проверьте!), будет зависеть логическое значение составного высказывания (см. следующий пункт), получающегося из последнего выражения, если его превратить в формулу указанием последовательности действий и придать пропозициональным переменным , Y и Z конкретные значения (высказывания). Если бы в исходном выражении стояли внешние скобки, т.е. если бы оно было формулой $((X \vee \neg Y) \to (\neg X \wedge \neg Y))$, то проделанное в предыдущем абзаце построение привело бы к формуле $(((X \vee \neg Y) \to (\neg X \wedge \neg Y)) \leftrightarrow Z)$.

Итак, требование внешних скобок у формулы не является излишним формализмом. Тем не менее, внешние скобки придают формуле громоздкость и, если данная формула не входит составной частью в более сложную формулу, не несут никакой информации и смысловой нагрузки. Поэтому внешние скобки в окончательно записанной формуле договариваются опускать. Например, формулу $((X \wedge Y) \to Z)$ будем записывать в виде $(X \wedge Y) \to Z$, а вместо формулы $((X \vee \neg Y) \to (\neg X \wedge \neg Y))$ будем писать $(X \vee \neg Y) \to (\neg X \wedge \neg Y)$. Но если данная формула должна будет войти составной частью в более сложную формулу, то сначала заключаем её во внешние скобки и только потом отправляем в процедуру построения новой формулы.

Логическое значения составного высказывания. Если в формулу алгебры высказываний $F(X_1, X_2, ...X_n)$ вместо пропозициональных переменных X_1, X_2,...,X_n подставить конкретные высказывания A_1, A_2,...,A_n соответственно, то получится некоторое новое составное высказывание $F(A_1, A_2, ...A_n)$. Оно называется ***конкретизацией*** формулы $F(X_1, X_2, ...X_n)$ на выборе высказываний A_1, A_2,...,A_n. Как определить логическое значение $\lambda(F(A_1, A_2, ...A_n))$ полученного составного высказывания, если известны логические значения $\lambda(A_1)$, $\lambda(A_2)$,...,$\lambda(A_n)$ исходных высказываний A_1, A_2,...,A_n?

Прежде чем сформулировать в следующей теореме ответ на поставленный вопрос, введём одно понятие. В первом параграфе отмечалось, что только логические значения высказываний, а не их содержание рассматриваются в алгебре высказываний. Это даёт возможность несколько упростить обозначения и терминологию. Так, каждое ложное высказывание можно рассматривать как элемент 0, а каждое истинное – как элемент 1 двухэлементного множества $\{0,1\}$, и писать вместо $\lambda(P) = 0$ или $\lambda(P) = 1$ лишь только $P = 0$ или $P = 1$ соответственно. Далее, если формула $F(X_1, X_2, ...X_n)$ при подстановке вместо её пропозициональных переменных X_1, X_2,...,X_n высказываний A_1, A_2,...,A_n с логическими значениями $\lambda(A_1) = \alpha_1$, $\lambda(A_2) = \alpha_2$,..., $\lambda(A_n) = \alpha_n$ превращается в высказывание $F(A_1, A_2,..., A_n)$ с логическим значением $\lambda(F(A_1, A_2, ...A_n)) = \alpha$, то будем говорить, что формула $F(X_1, X_2, ...X_n)$ принимает значение α, если её переменные X_1, X_2,...,X_n принимают значения α_1, α_2,...,α_n соответственно, и писать $X_1 = \alpha_1$, $X_2 = \alpha_2$,...,$X_n = \alpha_n$ и $F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \alpha$, где α_1, α_2,...,α_n, $\alpha \in \{0, 1\}$. Для нахождения значения $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ нужно подставить в формулу $F(X_1, X_2, ...X_n)$ вместо пропозициональных переменных X_1, X_2,...,X_n значения α_1, α_2,...,α_n соответственно и в полученном выражении последовательно проделать все действия с нулями и единицами, предписываемые правилами таблиц из определений 1.1, 3, 5, 7, 9. В результате получим 0 или 1. Полученное значение будем обозначать $F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и называть ***значением*** данной формулы $F(X_1, X_2, ...X_n)$ на данном наборе нулей и единиц α_1, α_2,...,α_n. Например, вычислим значение формулы

$$F(X_1, X_2, ..., X_n) \equiv (X_1 \to \neg X_2) \wedge (X_2 \leftrightarrow (X_1 \vee \neg X_3))$$

на наборе 0,1,1 :

$$F(0,1,1) = (0 \to \neg 1) \wedge (1 \leftrightarrow (0 \vee \neg 1)) = (0 \to 0) \wedge (1 \leftrightarrow (0 \vee 0)) =$$
$$= 1 \wedge (1 \leftrightarrow 0) = 1 \wedge 0 = 0\,.$$

Теорема 2.2. *Логическое значение составного высказывания $F(A_1, A_2, \ldots A_n)$ равно значению формулы $F(X_1, X_2, ...X_n)$ на наборе $\lambda(A_1)$, $\lambda(A_2)$,..., $\lambda(A_n)$ логических значений составляющих высказываний A_1, A_2,...,A_n, т.е.*

$$\boxed{\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = F(\lambda(A_1), \lambda(A_2), ..., , \lambda(A_n))}\,.$$

Доказательство. Докажем утверждение методом полной математической индукции по числу символов логических операций, входящих в формулу $F(X_1, X_2, ...X_n)$.

Если формула $F(X_1, X_2, ...X_n)$ содержит 0 символов логических операций, то она представляет собой пропозициональную переменную, скажем X_1, т.е. $F(X_1, X_2, ...X_n) \equiv X_1$ (знак $\equiv$ обозначает абсолютную тождественность двух формул, графическую одинаковость левой и правой частей). Тогда доказываемое соотношение сводится к тривиальному равенству: $\lambda(A_1) = \lambda(A_1)$.

Если формула $F(X_1, X_2, ...X_n)$ содержит лишь один символ логической операции, то она является одной из следующих формул: $\neg X_1$, $X_1 \wedge X_2$, $X_1 \vee X_2$, $X_1 \to X_2$, $X_1 \leftrightarrow X_2$. В этих случаях доказываемое равенство есть одно из равенств (1.1)–(1.5).

Предположим теперь, что утверждающееся в теореме равенство верно для всех формул алгебры высказываний, содержащих не более k символов логических операций. Докажем, что оно верно для формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$, содержащей $k+1$ символов логических операций. На основании определения 2.1 формула F имеет один из следующих видов: $\neg F_1$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \to F_2$, $F_1 \leftrightarrow F_2$, где F_1, F_2 – некоторые формулы, каждая из которых содержит уже не более k символов логических операций. Нужно провести доказательство для всех пяти случаев. Но в силу принципиальной идентичности этих доказательств проделаем одно, например, для случая $F \equiv F_1 \wedge F_2$. Вычисляем :

$$\lambda(F(A_1, A_2, ...A_n)) = \lambda(F_1(A_1, A_2, ...A_n) \wedge F_2(A_1, A_2, ...A_n)) =$$
$$= \lambda(F_1(A_1, A_2, ...A_n)) \wedge \lambda(F_2(A_1, A_2, ...A_n)) =$$
$$= F_1(\lambda(A_1), ..., \lambda(A_n)) \wedge F_2(\lambda(A_1), ..., , \lambda(A_n)) .$$

В проделанных вычислениях второе равенство основано на определении 1.3 логической операции конъюнкции. Третье равенство основано на предположении индукции о том, что для формул F_1 и F_2 соотношение теоремы выполняется. Наконец, четвёртое равенство записано на основании того, что $F \equiv F_1 \wedge F_2$.

Аналогичным образом соотношение теоремы доказывается и во всех остальных случаях конструирования формулы F из формул F_1 и F_2.

Следовательно, утверждение теоремы верно для любой формулы F алгебры высказываний. □

Итак, здесь необходимо понять, что логическое значении составного высказывания – это, по-существу, значение некоторого (логического) выражения при некотором наборе конкретных значений всех входящих в него (пропозициональных) переменных. При этом, (пропозициональные) переменные могут принимать значения 0 или 1, само выражение принимает значение 0 или 1 и вычисляется это значение (в силу теоремы 2.2) посредством применения к значениям 0 и 1 предписываемых данным выражением логических действий. Логические действия над величинами 0 и 1 выполняются по правилам, определяемым таблицами истинности этих действий (операций) – отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности. Таким образом, мы фактически начинаем иметь дело с некоей новой, логической, алгеброй, или алгеброй логики, которая как бы "параллельна" привычной школьной алгебре.

Компонента	**Школьная алгебра**	**Алгебра логики**
Базисное множество	R – множество вещественных чисел	$\{0,1\}$ – двухэлементное множество
Операции над элементами базисного множества	$+\ ,\ -\ ,\ \cdot\ ,\ :$	$\neg\ ,\ \wedge\ ,\ \vee\ ,\ \rightarrow\ ,\ \leftrightarrow$
Переменные	вещественные $a, b, c, ...x, y, z, ...$	пропозициональные $P, Q, R, ...X, Y, Z, ...$
Формулы (правильно построенные выражения)	$ax + by + cz$, ax^2+bx+c и т.д.	$(\neg P \wedge Q) \leftrightarrow R$, $\neg(P \rightarrow Q) \vee R$ и т. д.

Сравним компоненты этих двух алгебр с помощью приводимой таблицы. Аналогия со школьной алгеброй будет продолжена в разделе, связанном с равносильными преобразованиями в алгебре логики.

Составление таблиц истинности для формул. На основании теоремы 2.2 можно для данной формулы F алгебры высказываний найти логические значения всех тех высказываний, в которые формула превращается при подстановке вместо всех её пропозициональных переменных различных конкретных высказываний. При этом говорят о логическом значении самой формулы и о логических значениях её пропозициональных переменных. При нахождении логических значений формулы, соответствующих всевозможным наборам значений её пропозициональных переменных, удобной формой записи является табличная форма.

Примеры составления таблиц истинности см. в Задачнике, №№ 1.25л, 1.28л. Решите из Тетради МЛ задачи №№ 1.16 – 1.20, призванные закрепить понятие формулы и её логического значения.

Классификация формул алгебры высказываний. Формулы алгебры высказываний подразделяется на следующие типы: выполнимые, тавтологии, опровержимые и тождественно ложные.

Формула алгебры высказываний $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется *выполнимой*, если некоторая её конкретизация является истинным высказыванием, т.е. существуют такие конкретные высказывания $A_1, A_2, ..., A_n$, которые, будучи поставленными в эту формулу вместо переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ соответственно, превращает её в истинное высказывание. Иначе говоря, $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ выполнима, если существуют такие конкретные высказывания $A_1, A_2, ..., A_n$, что $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$. Выполнимой формулой является, в частности, формула, рассмотренная в примере 2.4. Она превращается в истинное высказывание, если, например, вместо пропозициональных переменных P, Q, R подставить ложные высказывания. Выполнима также и формула, рассмотренная в первом пункте настоящего параграфа: $(X \wedge Y) \to Z$.

Формула $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется *тавтологией*, или *тождественно истинной*, если она превращается в истинное высказывание при всякой подстановке вместо переменных конкретных высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$, т.е. если $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 1$ для любых высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$. Формула из примера 2.3. является тавтологией. Для обозначения тавтологии используется знак $\models$, который ставится перед формулой, являющейся тавтологией. Таким образом, запись $\models F(X_1, X_2, ..., X_n)$ означает, что формула $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ является тавтологией. В частности, для указанного примера можем записать $\models (X \to Y) \vee (Y \to X)$.

Формула $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется *опровержимой*, если существуют такие конкретные высказывания $A_1, A_2, ..., A_n$, которые превращают данную формулу в ложное высказывание $F(A_1, A_2, ..., A_n)$, т.е. $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 0$. Другими словами, опровержимые формулы – это формулы, не являющиеся тавтологиями. Опровержимой является формула, рассмотренная в примере 2.4. Она обращается в ложное высказывание лишь тогда, когда вместо всех переменных P, Q, R подставлены истинные высказывания. Формула, рассматривавшаяся в первом пункте настоящего параграфа, также опровержима.

Наконец, формула $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется *тождественно ложной*, или *противоречием*, если $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = 0$ для любых конкретных высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$. Другими словами, тождественно ложные формулы – это такие формулы, которые не являются выполнимыми.

Примеры формул различных типов приведены в Задачнике, №№ 1.26 – 1.28. При решении задач на классификацию формул полезно отказаться от механического составления таблиц истинности и научиться решать их методом анализа структуры формулы и нахождения тех отдельных наборов значений переменных, на которых формула принимает определяющее значение (№№ 1.27, 1.28 Задачника и Тетрадь МЛ, №№ 1.18, 1.19, а также 1.23 и 1.24).

Мышление и математическая логика. В заключение обратим внимание на то, что нами начат фундаментальный процесс исследования математическими методами ещё одной области действительности. Это – область человеческого мышления. Мы начали процесс математизации логики. Этот процесс начался с математизации языка. Мы фактически построили своеобразную знаковую систему – *символический язык логики высказываний.* Эта знаковая (математическая) система пытается отразить человеческий язык, на котором происходит оформление мыслительных процессов. Этот язык основывается на алфавите, состоящем из следующих символов:

1) пропозициональных букв: P, Q, R, ... ;
2) символов логических операций: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
3) технических знаков: (,) .

Словами построенного языка являются формулы логики высказываний. Предложения обычного (русского) языка могут быть переведены на символический язык логики высказываний, где они представляются формулами логики высказываний. (См. Задачник, №№ 1.13, 1.14 и особенно, §3). Следует иметь в виду, что при таком переводе сохраняется логическое содержание, логическая структура предложения, но, конечно же, теряется его языковая красота и психологические оттенки. Формула представляет собой формальную последовательность знаков, составленную по строгим правилам, нарушение которых недопустимо. Такой перевод высказывания естественного языка на символический язык называется его *формализацией.* В частности, перевод высказывания на символический язык логики высказываний есть его формализация в рамках символической логики высказываний. Получаемая формула показывает способ соединения простых высказываний в составное при помощи логических союзов. Она представляет как бы в "чистом виде" логическую структуру составного высказывания.

Формула логики высказываний сама по себе не имеет никакого содержания. В частности, она не является ни истинной, ни ложной. Она превращается в высказывание, истинное или ложное, при всякой подстановке вместо всех её пропозициональных переменных любых конкретных высказываний. Такой процесс подстановки называется *интерпретацией* данной формулы алгебры высказываний.

Таким образом, имеется два взаимно обратных процесса (две процедуры): формализация и интерпретация. Если имеется формула F и высказывание A есть результат её интерпретации, то сама формула F будет формализацией высказывания A. Обратно, если имеется высказывание A и формула F есть его формализация, то высказывание A будет одной из интерпретаций формулы F. Итак, формализация – это переход от высказывания естественного языка к формуле логики высказываний, а интерпретация – переход от формулы логики высказываний к высказыванию естественного языка. Таблица истинности или таблица значений формулы логики высказываний – это таблица, которая указывает логическое значение формулы при любой её интерпретации.

Осознание этих понятий исключительно важно на данном этапе, поскольку они являются ключевыми для изучения в дальнейшем более глубоких разделов математической логики. На данном этапе делается первый шаг на пути формализации – важнейшего метода математической логики.

§3. Тавтологии алгебры высказываний

О значении тавтологий. Тавтологии представляют собой схемы построения истинных высказываний, независимо от содержания и истинности составляющих высказываний. Так, если для установления того, истинны или нет высказывания *"Саратов основан в 1590 году"*, *"Солнце вращается вокруг Земли"*, необходимо обладать специальными знаниями или заглянуть в специальную литературу, то для выяснения значения истинности высказываний *"Треугольник ABC прямоугольный, или треугольник ABC не прямоугольный"*, *"Неверно, что информация о наследственных признаках хранится в генах, и эта информация в генах не хранится"* уже не нужно обладать знаниями ни в математике, ни в генетике. Вывод об истинности последних высказываний делаем, исходя не из их содержания, а из их формы, структуры.структура первого высказывания выражается формулой $X \vee \neg X$, а второго – формулой $\neg(X \wedge \neg X)$. Легко убедиться в том, что обе эти формулы суть тавтологии. Данные формулы дают две схемы построения всегда истинных высказываний. И такова каждая формула, являющаяся тавтологией. Но главное значение тавтологий не в этом.

Основное значение тавтологий состоит в том, что некоторые из них предоставляют правильные способы построения умозаключений, т.е. такие способы, которые от истинных посылок всегда приводят к истинным выводам. А ведь именно такие рассуждения углубляют наши знания и обогащают их истинными сведениями. В частности, любая тавтология алгебры высказываний вида $F \to G$ соответствует некоторой общей схеме логического умозаключения. Поясним сказанное на примере следующей тавтологии указанного вида (внешние скобки опущены): $((\neg X \to Y) \wedge (\neg X \to \neg Y)) \to X$. (Проверьте, действительно ли данная формула является тавтологией.) Попытаемся выяснить, какой схеме логического умозаключения она соответствует. Схема логического умозаключения, описываемая данной тавтологией, часто используется в математических доказательствах. Она состоит в следующем. Допустим, что требуется доказать истинность некоторого утверждения A. Предполагается, что истинно его отрицание $\neg A$. Затем доказывается, что имеется некоторое такое утверждение B, для которого истинными являются оба утверждения $\neg A \to B$ и $\neg A \to \neg B$. Доказательства истинности этих импликаций зависят от содержания высказываний A и B и устанавливаются на основании методов и законов той математической теории, к которой они относятся. Считаем, что истинность утверждений $\neg A \to B$ и $\neg A \to \neg B$ установлена. Одновременный вывод двух утверждений B и $\neg B$ – противоречие, абсурд. Тогда утверждаем, что истинно высказывание A. Такой метод доказательства называется ***методом приведения к абсурду.***

Термин "тавтология" имеет греческое происхождение и составлен из двух слов $\tau\alpha\upsilon\tau o\zeta$ [то же самое] и $\lambda o\gamma o\zeta$ [слово] и означает повторение одного и того же определения, суждения иными, близкими по смыслу словами. Конечно, тавтология – это нечто одно и то же. Лучше всего это видно для тавтологий, в которых заключительной логической связкой является эквивалентность $\leftrightarrow$. Например, тавтология $(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$ выражает одинаковость форм (формул) в её левой и правой частях. Здесь речь идёт о внутренней, сущностной, семантической одинаковости, выражаемой разными словами – формами (формулами). Совершенно аналогично в этом смысле арифметическое тождество $x(y+z) = xy+xz$. Это – тоже выражение одной и той же внутренней сущности посредством различных слов. И каждое из этих двух выражений является объективным законом, действующим каждый в своей сфере: первый в сфере мыслительных процессов, второй – в сфере чисел. Каждый из этих законов несёт объективную информацию об определённой части окружающего нас мира. Труднее в этом смысле истолковать тавтологии вида $P \vee \neg P$, $P \to P$, $P \to (Q \to P)$ и т.п., но на них данный термин просто распространяется.

Основные тавтологии. Приведём некоторые основные тавтологии, выражающие свойства логических операций, а также тавтологии, на которых основаны некоторые схемы математических доказательств.

Теорема 3.1. *Следующие формулы алгебры высказываний являются тавтологиями:*

а) *закон исключённого третьего* $P \vee \neg P$;
б) *закон отрицания противоречия* $\neg(P \wedge \neg P)$;
в) *закон двойного отрицания* $\neg\neg P \leftrightarrow P$;
г) *закон тождества* $P \to P$;
д) *закон контрапозиции* $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$;
е) *закон силлогизма (правило цепного заключения)*

$$((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R) ;$$

ж) *закон противоположности* $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$;
з) *правило добавления антецедента ("истина из чего угодно")*

$$P \to (Q \to P) ;$$

и) *правило "из ложного что угодно"* $\neg P \to (P \to Q)$;
к) *правило модус поненс (modus ponens)*

$$(P \wedge (P \to Q)) \to Q ;$$

л) *правило модус толленс (modus tollens)*

$$((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P ;$$

м) *правило перестановки посылок*

$$(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (Q \to (P \to R)) ;$$

н) *правило объединения (и разъединения) посылок*

$$(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \to R) ;$$

о) *правило разбора случаев*

$$((P \to R) \wedge (Q \to R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \to R) ;$$

п) *правила приведения к абсурду*

$$((\neg P \to Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)) \to P , \quad (\neg P \to (Q \wedge \neg Q)) \to P .$$

Доказательство. Отметим, что непосредственно из определений логических операций вытекает тождественная истинность формул а), б), в), г). Установим тождественную истинность некоторых формул (для остальных проверьте самостоятельно).

л) Изучая тавтологии, важно уяснить, что имеется простой и надёжный алгоритм (общий метод), позволяющий для *любой* формулы логики высказываний дать ответ на вопрос, является она тавтологией логики высказываний или нет – этот алгоритм состоит в построении её таблицы истинности. Составим таблицу истинности данной формулы:

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \to Q)$	$\lambda(\neg Q)$	$\lambda((P \to Q) \wedge \neg Q)$	$\lambda(\neg P)$	F
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Последний столбец таблицы, состоящий из значений истинности данной формулы, содержит единицы. Это означает, что данная формула – тавтология.

н) Доказательство тождественной истинности формул с помощью составления их таблиц истинности проходит автоматически. Проведём следующее доказательство, рассуждая о тех значениях, которые формула может принимать.

Покажем, что левая часть данной эквивалентности обращается в ложное высказывание тогда и только тогда, когда в ложное высказывание обращается формула, стоящая в правой части эквивалентности. Действительно, формула $P \to (Q \to R)$ превращается в ложное высказывание, если и только если $\lambda(P) = 1$, $\lambda(Q \to R) = 0$. В свою очередь, $\lambda(Q \to R) = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda(Q) = 1$ и $\lambda(R) = 0$. Итак, $\lambda(P \to (Q \to R)) = 0$ в том и только в том случае, когда $\lambda(P) = 1$, $\lambda(Q) = 1$, $\lambda(R) = 0$. С другой стороны, формула $(P \wedge Q) \to R$ обращается в ложное высказывание, если и только если $\lambda(P \wedge Q) = 1$ и $\lambda(R) = 0$. В свою очередь, $\lambda(P \wedge Q) = 1$ тогда и только тогда, когда $\lambda(P) = 1$ и $\lambda(Q) = 1$. Итак, $\lambda((P \wedge Q) \to R) = 0$ в том и только в том случае, когда $\lambda(P) = 1$, $\lambda(P) = 1$ и $\lambda(R) = 0$. Доказанное означает, что правая и левая части эквивалентности одновременно превращается либо в истинное высказывание, либо в ложное. Следовательно, по определению эквивалентности вся формула всегда превращается в истинное высказывание, т.е. является тавтологией. □

Тавтологии, собранные в теореме 3.1, лежат в основе многих математических рассуждений, что уже обсуждалось в начале §3 относительно тавтологии п). По поводу применения некоторых других тавтологий в процессе математических рассуждений будем говорить в §7. Тавтологии последующих теорем данного параграфа выражают свойства логических операций.

Теорема 3.2. (*Свойства конъюнкции и дизъюнкции*). *Следующие формулы алгебры высказываний являются тавтологиями:*

а) *законы идемпотентности* $(P \wedge P) \leftrightarrow P$, $\quad (P \vee P) \leftrightarrow P$;

б) *законы упрощения* $(P \wedge Q) \to P, \qquad P \to (P \vee Q)$;

в) *законы коммутативности*

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P), \qquad (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P);$$

г) *законы ассоциативности*

$$(P \wedge (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R),$$
$$(P \vee (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R);$$

д) *законы дистрибутивности*

$$(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P' \wedge Q) \vee (P \wedge R)),$$
$$(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R));$$

е) *законы поглощения*

$$(P \wedge (P \vee Q)) \leftrightarrow P, \qquad (P \vee (P \wedge Q)) \leftrightarrow P;$$

ж) *законы де Моргана*

$$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q), \quad \neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем для примера, что первый закон де Моргана является тавтологией. Пусть A и B – произвольные конкретные высказывания. Рассмотрим два составных высказывания $\neg(A \wedge B)$ и $\neg A \ \wedge negB$, получающиеся из частей данной эквивалентности при замене пропозициональных переменных P и Q конкретными высказываниями A и B соответственно. Предположим, во-первых, что высказывание $\neg(A \wedge B)$ истинно. Тогда конъюнкция $A \wedge B$ ложна; следовательно, по меньшей мере одно из высказываний A или B ложно. Но в таком случае хотя бы одно из высказываний $\neg A$ или $\neg B$ истинно, следовательно, их дизъюнкция $\neg A \wedge \neg B$ истинна. Предположим, во-вторых, что высказывание $\neg(A \wedge B)$ ложно. Тогда конъюнкция $A \wedge B$ истина. Следовательно, оба высказывания A и B истинны, а их отрицания $\neg A$ и $\neg B$ – оба ложны, т.е. дизъюнкция $\neg A \wedge \neg B$ ложна. Таким образом, для любых двух высказываний значения частей рассматриваемой эквивалентности совпадают. Следовательно, формула тождественно истинна. □

Рекомендуется доказать самостоятельно тождественную истинность оставшихся формул этой теоремы, а также остальных теорем настоящего пункта.

ТЕОРЕМА 3.3. (*Свойства импликации и эквивалентности*). *Следующие формулы алгебры высказываний являются тавтологиями:*

а) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$;

б) $P \to (Q \to (P \wedge Q))$;

в) $(P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R))$;

г) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to R))$;

д) $(\neg Q \wedge (P \to Q)) \to \neg P))$;

е) $(\neg P \wedge (P \vee Q)) \to Q$;
ж) $(P \to Q) \to ((P \vee R) \to (Q \vee R))$;
з) $(P \to Q) \to ((P \wedge R) \to (Q \wedge R))$;
и) $(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$;
к) $(P \to Q) \vee (Q \to P)$;
л) $(\neg Q \to \neg P) \to ((\neg Q \to P) \to Q)$;
м) $((P \to Q) \wedge (R \to Q)) \leftrightarrow ((P \vee R) \to Q)$;
н) $((P \to Q) \wedge (P \to R)) \leftrightarrow (P \to (Q \wedge R))$;
о) $P \leftrightarrow P$;
п) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$;
р) $((P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)) \to (P \leftrightarrow R)$.

Теорема 3.4. (*Выражение одних логических операций через другие*). *Следующие формулы алгебры высказываний являются тавтологиями*:

а) $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$;
б) $(P \to Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$;
в) $(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q$;
г) $(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(P \to \neg Q$;
д) $(P \vee Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q$;
е) $(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \to Q$;
ж) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$.

Основные правила получения тавтологий. Опишем два правила, которые позволяют получать новые тавтологии из уже имеющихся.

Теорема 3.5. (*Правило заключения*). *Если формулы* F *и* $F \to H$ *являются тавтологиями, то формула* H *также тавтология.*

$$\boxed{\models F \text{ и } \models F \to H \quad \Longrightarrow \quad \models H} \ .$$

Доказательство. Пусть $\models F(X_1, ..., X_n)$ и $\models F(X_1, ..., X_n) \to H(X_1, ..., X_n)$. Предположим, что формула $H(X_1, ..., X_n)$ не является тавтологией. Это означает, что существуют такие конкретные высказывания $A_1,...,A_n$, что $\lambda(H(A_1, ..., A_n)) = 0$. Поскольку $F(X_1, ..., X_n)$ – тавтология, то для $A_1,...,A_n$ имеем $\lambda(F(A_1, ..., A_n)) = 0$. Вычисляем, пользуясь соотношением (1.4):

$$\lambda(F(A_1, ..., A_n) \to H(A_1, ..., A_n)) =$$
$$= \lambda(F(A_1, ..., A_n)) \to \lambda(H(A_1, ..., A_n)) = 1 \to 0 = 0 ,$$

что противоречит тождественной истинности формулы $F \to H$. Следовательно, предположение неверно. Тогда $\models H$, что и требовалось доказать. □

Правило заключения называется также ***правилом отделения*** или ***правилом модус поненс (modus ponens)***. Второе правило получения тавтологий носит название правила подстановки.

Пусть в формуле F содержится пропозициональная переменная X (а возможно и другие пропозициональные переменные), и H – любая формула. Если в формулу F вместо символа X везде, где он входит в F, вставить формулу H, то получим новую формулу. Она обозначается $S_X^H F$ и называется ***формулой, полученной из F в результате подстановки в неё формулы H вместо пропозициональной переменной X***. Например, если в формулу $((X \vee Y) \to (X \wedge \neg Y))$ сделать подстановку: вместо вместо переменной Y подставить формулу $(X_1 \wedge X_2)$, то получим $((X \vee (X_1 \wedge X_2)) \to (X \wedge \neg(X_1 \wedge X_2)))$. Если в ту же формулу вместо переменной Y подставить формулу Z, то произойдёт просто замена переменной, в результате которой получится формула $((X \vee Z) \to (X \wedge \neg Z))$.

Если формула F содержит две пропозициональных переменных X и Y (а возможно, и ещё несколько), то можно определить одновременную подстановку двух формул H и G в формулу F вместо пропозициональных переменных X и Y соответственно как одновременную замену символа X всюду, где он входит в F, формулой H и символа Y всюду, где он входит в F, формулой G. Получающуюся формулу обозначают $S_{X,Y}^{H,G} F$. Например, подстановка в формулу $(X \to (X \wedge Y))$ вместо переменной X формулы $(X_1 \vee X_2)$, а вместо переменной Y формулы $\neg Z$ приводит к формуле: $((X_1 \vee X_2) \to ((X_1 \vee X_2) \wedge \neg Z)$.

Аналогично определяется одновременная подстановка в формулу F и большего числа формул (трёх, четырёх и т.д.).

Теорема 3.6. (*Правило подстановки*). ***Если формула F, содержащая пропозициональную переменную X, является тавтологией, то подстановка в формулу F вместо переменной X любой формулы H снова приводит к тавтологии.*** $\boxed{\models F \quad \Longrightarrow \quad \models S_X^H F}$.

Доказательство. Так как $\models F(X, Y, ...)$, то формула $F(X, Y, ...)$ превращается в истинное высказывание при подстановке вместо всех пропозициональных переменных $X, Y, ...$ любых конкретных высказываний. Истинность получаемого высказывания не зависит от структуры подставляемых вместо $X, Y, ...$ высказываний. В частности, вместо X может быть подставлено высказывание, которое само является конкретизацией формулы $H(Z_1, ..., Z_k)$ на некотором наборе конкретных высказываний. Но это и означает, что тавтологией будет формула $F(H(Z_1, ..., Z_k), Y, ...)$, т.е. $\models S_X^H F$, что и требовалось доказать. □

Например, если в тавтологию $(X \to (Y \to X))$ выполнить подстановку формулы $(X_1 \wedge \neg X_2)$ вместо переменной X, то придём к тавтологии $((X_1 \wedge \neg X_2) \to (Y \to (X_1 \wedge \neg X_2)))$.

Замечание 3.7. Отметим, что правило подстановки позволяет рассматривать каждую из тавтологий, приведённых в теоремах 3.1-3.4, не как отдельно взятую тавтологию, а как схему образования тавтологий. Значит, каждая из пропозициональных переменных в данных формулах может рассматриваться не как переменная, а как произвольная формула алгебры высказываний. Например, тавтология из теоремы 3.3б даёт бесконечное множество тавтологий вида $\models F_1 \to (F_2 \to (F_1 \wedge F_2))$, где F_1, F_2 – произвольные формулы алгебры высказываний.

Два рассмотренных правила образования тавтологий – модус поненс и подстановки – будем называть *основными*. Существуют и другие правила, которые рассмотрим ниже (в §6); их будем называть *вторичными* или *производными* правилами.

Решите из Тетради МЛ задачи №№ 1.21 – 1.29 о тавтологиях.

§4. Логическая равносильность формул

Понятие равносильности формул. Определение 4.1. Формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $G(X_1, X_2, ..., X_n)$ алгебры высказываний называются *равносильными* (*эквивалентными*), если при любых значениях входящих в них пропозициональных переменных логические значения получающихся из формул F и G высказываний совпадают. Для указания равносильности формул используют обозначение $F \cong G$. Определение равносильных формул можно записать символически:

$$F \cong G \iff \lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = \lambda(G(A_1, A_2, ..., A_n)) \qquad (4.1)$$

для любых конкретных высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$.

Не следует думать, что в обе формулы F и G непременно входят одни и те же переменные. Некоторые из переменных $X_1, X_2, ..., X_n$

могут фактически отсутствовать в любой из них. Проверим, например, равносильность формул $\neg X_1$ и $\neg X_2 \wedge (X_2 \vee \neg X_1)$. Для этого составим таблицы истинности обеих формул и убедимся, что значения истинности получающихся из них высказываний одинаковы для любых одинаковых наборов значений пропозициональных переменных X_1 и X_2.

$\lambda(X_1)$	$\lambda(X_2)$	$\lambda(\neg X_1)$	$\lambda(X_2 \vee \neg X_1)$	$\lambda(\neg X_1 \wedge (X_2 \vee \neg X_1))$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	0

Проверьте самостоятельно справедливость равносильностей $X_1 \vee \neg X_1 \ \cong\ X_2 \vee \neg X_2, \quad X_1 \wedge \neg X_1 \ \cong\ X_2 \wedge \neg X_2$.

Признак равносильности формул. Сущность признака состоит в выявлении тесной связи между понятием равносильности формул и понятием тавтологии.

ТЕОРЕМА 4.2. (*Признак равносильности формул*). *Две формулы F и G алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда формула $F \leftrightarrow G$ является тавтологией*:

$$\boxed{F \cong G \quad \Longleftrightarrow \quad \models F \leftrightarrow G}\ . \tag{4.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $F \cong G$, то, по определению 4.1, $\lambda(F(A_1,..., A_n)) = \lambda(G(A_1,..., A_n))$ для любых высказываний $A_1, ..., A_n$. Тогда, по определению 1.9 операции эквивалентности $\lambda(F(A_1, ..., A_n)) \leftrightarrow \lambda(G(A_1, ..., A_n)) = 1$, откуда на основании соотношения (1.5) заключаем:

$$\lambda(F(A_1, ..., A_n) \ \leftrightarrow\ G(A_1, ..., A_n)) \ = \ 1$$

для любых $A_1, ..., A_n$. Последнее означает по определению тавтологии, что $\models F \leftrightarrow G$. Обратными рассуждениями доказывается утверждение: если $\models F \leftrightarrow G$, то $F \cong G$. Теорема доказана. □

Отметим, что равносильность формул – это *не* (логическая) *операция* над формулами, а *отношение* между формулами логики высказываний. Это означает, что если F и G – формулы, то выражение $F \cong G$ уже не является формулой алгебры высказываний. Оно – утверждение о некотором взаимоотношении между формулами F и G, лишь сокращённая (символическая) запись утверждения (высказывания) *об* этих формулах: "F равносильна G". Это утверждение либо истинно, либо ложно, т.е. F и G либо находятся в отношении равносильности, либо нет. В приводимом ниже следствии из теоремы 4.2 устанавливаются некоторые свойства этого отношения между формулами алгебры высказываний.

Следствие 4.3. *Отношение равносильности* $\cong$ *между формулами алгебры высказываний*:

а) *рефлексивно*: $F \cong F$;

б) *симметрично*: если $F_1 \cong F_2$, то $F_2 \cong F_1$;

в) *транзитивно*: если $F_1 \cong F_2$ и $F_2 \cong F_3$, то $F_1 \cong F_3$,

т.е. *отношение равносильности* $\cong$ *является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Рефлексивность следует непосредственно из тавтологии теоремы 3.3 о и теоремы 4.2.

Для доказательства симметричности отношения $\cong$ предположим, что $F_1 \cong F_2$, т.е. на основании признака равносильности (теорема 4.2) $\models F_1 \leftrightarrow F_2$. Тогда по тавтологии теоремы 3.3,п заключаем: формула $F_2 \leftrightarrow F_1$ принимает всегда те же самые значения, что и формула $F_1 \leftrightarrow F_2$, т.е. только истинные значения. Следовательно, $\models F_2 \leftrightarrow F_1$, или, по признаку равносильности, $F_2 \cong F_1$. Симметричность доказана.

Наконец, если $F_1 \cong F_2$ и $F_2 \cong F_3$, т.е. $\models F_1 \leftrightarrow F_2$ и $\models F_2 \leftrightarrow F_3$, то на основании определения конъюнкции заключаем, что: $\models (F_1 \leftrightarrow F_2) \wedge (F_2 \leftrightarrow F_3)$. Привлекая теперь тавтологию из теоремы 3.3 р и правило заключения для получения тавтологий (теорема 3.5), получаем $\models F_1 \leftrightarrow F_3$, или (по теореме 4.2) $F_1 \cong F_3$. Следовательно, отношение $\cong$ транзитивно.

Таким образом, отношение $\cong$ есть отношение эквивалентности, что и требовалось доказать. □

Как и всякое отношение эквивалентности, отношение $\cong$ разбивает множество, на котором оно задано, на непересекающиеся классы эквивалентных элементов. В данном случае множество всех формул алгебры высказываний распадается на попарно непересекающиеся классы, в каждом из которых находятся равносильные между собой формулы. Один класс, например, образуют все тавтологии, другой – все тождественно ложные формулы, имеется и бесконечно много других классов.

Примеры равносильных формул. В теореме 4.4 перечисляются некоторые основные равносильности. Они получаются, исходя из тавтологий, приведённых в теоремах 3.1 - 3.4, на основании признака равносильности формул.

Теорема 4.4. *Справедливы следующие равносильности:*

а) $\neg\neg P \cong P$;
б) $P \to Q \cong \neg Q \to \neg P$;
в) $P \leftrightarrow Q \cong \neg P \leftrightarrow \neg Q$;
г) $P \to (Q \to R) \cong (P \wedge Q) \to R$;
д) $(P \to R) \wedge (Q \to R) \cong (P \vee Q) \to R$;
е) $P \wedge P \cong P$;
ж) $P \vee P \cong P$;
з) $P \wedge Q \cong Q \wedge P$;
и) $P \vee Q \cong Q \vee P$;
к) $P \wedge (Q \wedge R) \cong (P \wedge Q) \wedge R$;
л) $P \vee (Q \vee R) \cong (P \vee Q) \vee R$;
м) $P \wedge (Q \vee R) \cong (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;
н) $P \vee (Q \wedge R) \cong (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$;
о) $P \wedge (P \vee Q) \cong P$;
п) $P \vee (P \wedge Q) \cong P$;
р) $\neg(P \wedge Q) \cong \neg P \vee \neg Q$;
с) $\neg(P \vee Q) \cong \neg P \wedge \neg Q$;
т) $P \leftrightarrow Q \cong Q \leftrightarrow P$;
у) $P \to Q \cong \neg P \vee Q$;
ф) $P \to Q \cong \neg(P \wedge \neg Q$;
х) $P \wedge Q \cong \neg(P \to \neg Q)$;
ц) $P \vee Q \cong \neg P \to Q$;
ч) $P \leftrightarrow Q \cong (P \to Q) \wedge (Q \to P)$;
ш) $P \vee \neg P \cong 1, \quad P \wedge \neg P \cong 0$;
щ) $P \vee 1 \cong 1, \quad P \wedge 1 \cong P$;
э) $P \vee 0 \cong P, \quad P \wedge 0 \cong 0$.

Сформулируем и докажем лемму о замене, которая служит основанием для равносильных преобразований и упрощения формул.

Лемма 4.5 (о замене). *Если* $G(Y_1, ..., Y_s) \cong H(Y_1, ..., Y_s)$, *то для любой формулы алгебры высказываний* $F(X_1, ..., X_{i-1}, Y, X_{i+1}, ..., X_n)$ *имеет место равносильность*

$$F(X_1, ..., X_{i-1}, G(Y_1, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n) \cong$$
$$\cong F(X_1, ..., X_{i-1}, H(Y_1, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n).$$

Другими словами, если в формуле некоторую её подформулу заменить на равносильную ей формулу, то полученная формула будет равносильна исходной.

Доказательство. Поскольку формулы $G(Y_1, ..., Y_s)$ и $H(Y_1, ..., Y_s)$ принимают всегда одинаковые значения при одинаковых значениях пропозициональных переменных Y_1, ..., Y_s, поэтому формулы $F(X_1, ..., X_{i-1}, G(Y_1, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n)$ и $F(X_1, ..., X_{i-1}, H(Y_1, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n)$ принимают одинаковые значения при любых одинаковых наборах значений переменных $X_1, ..., X_n$, $Y_1, ..., Y_s$. Следовательно,

$$\models F(X_1, ..., X_{i-1}, G(Y_1, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow F(X_1, ..., X_{i-1}, H(Y_1, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n),$$

т.е. $F(X_1, ..., X_{i-1}, G(Y_1, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n) \cong$
$$\cong F(X_1, ..., X_{i-1}, H(Y_1, ..., Y_s), X_{i+1}, ..., X_n),$$
что и требовалось доказать. □

Например, на основании этой леммы и равносильности из теоремы 4.4 п, формула $(\neg X_1 \to (Y_1 \vee (Y_1 \wedge Y_2))) \vee X_2$ равносильна формуле $(\neg X_1 \to Y_1) \vee X_2$.

Общая формулировка леммы о замене может быть конкретизирована следующим образом в соответствии с индуктивным определением формулы. Пусть имеется формула $\neg F$. Если $F \cong G$, то $\neg F \cong \neg G$. Далее, пусть исходная формула имеет следующее строение $F_1 \wedge F_2$. Если $F_1 \cong G_1$, то $F_1 \wedge F_2 \cong G_1 \wedge F_2$. Если, кроме того, $F_2 \cong G_2$, то $F_1 \wedge F_2 \cong G_1 \wedge F_2 \cong G_1 \wedge G_2$, т.е. $F_1 \wedge F_2 \cong G_1 \wedge G_2$. Об этом свойстве говорят, что отношение равносильности формул *стабильно* относительно операции конъюнкции. (Предыдущее свойство означает стабильность относительно отрицания). Аналогично, отношение равносильности стабильно и относительно остальных логических операций – дизъюнкции, импликации и эквивалентности. Это означает, что если $F_1 \cong G_1$ и $F_2 \cong G_2$, то $F_1 \vee F_2 \cong G_1 \vee G_2$, $F_1 \to F_2 \cong G_1 \to G_2$, $F_1 \leftrightarrow F_2 \cong G_1 \leftrightarrow G_2$.

Равносильные преобразования формул. Используя лемму о замене и равносильности из теоремы 4.4, можем от одной формулы переходить к равносильной ей формуле. Такой переход называется ***равносильным преобразованием*** исходной формулы. Равносильные преобразования формул применяются прежде всего для упрощения формул.

Пример 4.6. Упростим формулу $\neg(X_1 \to \neg X_2) \wedge \neg(X_2 \to \neg X_1)$, используя равносильности из теоремы 4.4:

$$\neg(X_1 \to \neg X_2) \wedge \neg(X_2 \to \neg X_1) \cong$$
$$\cong \neg(\neg X_1 \vee \neg X_2) \wedge \neg(\neg X_2 \vee \neg X_1) \cong$$

$$\cong \neg(\neg X_1 \vee \neg X_2) \wedge \neg(\neg X_1 \vee \neg X_2) \cong$$
$$\cong \neg(\neg X_1 \vee \neg X_2) \cong \neg\neg X_1 \wedge \neg\neg X_2 \cong X_1 \wedge X_2 .$$

Равносильным преобразованиям формул, и, в частности, упрощениям формул посвящены задачи 1.30 – 1.39 в Тетради МЛ.

Равносильные преобразования формул применяются также для приведения формул к специальным видам или к специальным формам – к так называемой совершенной дизъюнктивной нормальной форме или к совершенной конъюнктивной нормальной форме, имеющим исключительно важное значение как в самой алгебре высказываний, так и в её приложениях. Об этом речь пойдёт в следующем параграфе.

Замечание 4.7. Отметим, что если некоторая формула является тавтологией, то и всякая равносильная ей формула также является тавтологией:

$$\boxed{\models F \text{ и } F \cong G \implies \models G} .$$

Сделанное замечание позволяет обнаружить ещё одну сферу применения равносильных преобразований: доказательство тождественной истинности тех или иных формул. Для этого данную формулу нужно равносильными преобразованиями свести к формуле, очевидно являющейся тавтологией. (См. Задачник, №№ 1.60, 1.61).

Равносильности в логике и тождества в алгебре. Понятие логической равносильности формул развивает алгебру высказываний в направлении, параллельном известной школьной алгебре. Равносильность формул $F(X_1, ..., X_n)$ и $G(X_1, ..., X_n)$ – это не что иное как их тождественное равенство с точки зрения школьной алгебры, с той лишь разницей, что тождественность рассматривается относительно различных базисных множеств: в школьной алгебре относительно множества R всех вещественных чисел, а в алгебре логики – относительно двухэлементного множества $\{0, 1\}$.

В школьной алгебре	**В алгебре логики**
тождественное равенство (тождество) $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ *означает, что выражения в левой и правой его частях принимают одинаковые значения при всех значениях вещественных переменных* $a, b \in R$.	*равносильность* $\neg(P \wedge Q) \cong \neg P \vee \neg Q$ *означает, что выражения в левой и правой его частях принимают одинаковые значения при всех значениях пропозициональных переменных* $P, Q \in \{0,1\}$.

Ввиду конечности базисного множества алгебры логики, проверить справедливость той или иной равносильности можно механическим перебором всех возможных наборов значений (пропозициональных) переменных, входящих в равносильность, и вычислением на них значений левой и правой частей равносильности. В школьной алгебре бесконечность базисного множества R не позволяет доказать ни одно тождество методом перебора всех значений входящих в него переменных. Для этого разработан метод тождественных преобразований алгебраических выражений, опирающийся на основные свойства арифметических операций над вещественными числами. Этими свойствами являются перестановочность (коммутативность) и сочетательность (ассоциативность) сложения и умножения, распределительность (дистрибутивность) умножения относительно сложения и т.п. Правда, ввиду нестрогости введения понятия вещественного числа в школьном курсе математики, сами эти свойства принимаются без доказательства.

Подобно тому, как в школьной алгебре понятие тождества (тождественного равенства) приводит к понятию тождественного преобразования алгебраических выражений, так в алгебре логики понятие равносильности формул естественным образом приводит к понятию равносильного преобразования формул логики высказываний. Здесь важно уяснить, что равносильные преобразования формул основываются на лемме 4.5 о замене. Равносильные преобразования используют основные равносильности, приведённые в теореме 4.4.

Полезно сравнить свойства логических операций, выраженные в основных равносильностях, со свойствами арифметических операций, помня, что некоторые логические операции имеют претензии на аналогию с некоторыми арифметическими операциями. Так, конъюнкция нередко называется логическим умножением, а дизъюнкция – логическим сложением. Наиболее разительны отличия в следующих свойствах: идемпотентность конъюнкции и дизъюнкции (это означает, что невозможны степени и "умножения" на натуральные числа), дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции, законы поглощения. Таким образом, мы приходим к некоей новой алгебре, необычной по сравнению со школьной алгеброй, основанной на вещественных числах. Это и есть *алгебра логики* или *алгебра высказываний*. Равносильные преобразования в ней, как и в школьной алгебре, предназначены для приведения логических выражений (формул) к определённому виду.

§5. Нормальные формы для формул алгебры высказываний

Для каждой формулы алгебры высказываний можно указать равносильную ей формулу, содержащую из логических связок лишь отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. Для этого нужно, используя равносильности теоремы 4.4 у,ч, выразить все имеющиеся в формуле импликации и эквивалентности через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. Так, для формулы $(\neg X \wedge (X \to Y)) \to Y$ равносильной ей формулой, не содержащей логических связок $\to$ и $\leftrightarrow$, будет, например, формула $\neg(\neg X \wedge (\neg X \vee Y)) \vee Y$. Выразить данную формулу через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию возможно не одним способом, а многими. К примеру, рассматриваемая формула равносильна также следующим формулам, содержащим из логических связок лишь $\neg$, $\wedge$ и $\vee$: $\neg\neg X \vee Y$, $X \vee Y$, $(X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Y)$, $(X \wedge \neg Y) \vee Y$, $(X \wedge \neg Y) \vee ((X \vee \neg X) \wedge Y)$, $(X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y)$. Среди всевозможных выражений данной формулы через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание некоторые играют важную роль как в алгебре высказываний, так и в её приложениях. Рассмотрение таких выражений, называемых совершенными нормальными формами, и составляет цель настоящего параграфа.

Понятие нормальных форм. *Конъюнктивным одночленом от переменных* $X_1, X_2, ..., X_n$ называется конъюнкция этих переменных или их отрицаний. Здесь "или" употребляется в неисключающем смысле, т.е. в конъюнктивный одночлен может входить одновременно и переменная, и её отрицание. Приведём примеры конъюнктивных одночленов: $X_1 \wedge X_1$, $X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3$, $X_2 \wedge \neg X_1 \wedge X_3 \wedge \neg X_2 \wedge X_5$, $X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_1 \wedge X_3 \wedge X_1$[1].

Дизъюнктивным одночленом от переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ называется дизъюнкция этих переменных или их отрицаний (и здесь союз "или" употребляется в неисключающем смысле). Приведём примеры дизъюнктивных одночленов: $\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3$, $X_2 \vee X_2$, $X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3 \vee \neg X_1 \vee X_4 \vee X_2$, $\neg X_2 \vee X_1 \vee \neg X_4 \vee X_1 \vee X_4$[2].

Дизъюнктивной нормальной формой называется дизъюнкция конъюнктивных одночленов, т.е. выражение вида $K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_p$, где все K_i, $i = 1, 2, ..., p$, являются конъюнктивными одночленами (не обязательно различными). Аналогично ***конъюнктивной нор-***

---

[1]Ввиду ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции (теорема 4.4 к,л) скобки внутри каждого из данных одночленов не пишутся.

[2]См. предыдущую сноску.

мальной формой называется конъюнкция дизъюнктивных одночленов $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_p$, где все D_j, $j = 1, 2, \ldots q$, являются дизъюнктивными одночленами (не обязательно различными). Будем также называть дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой указанные выражения при $p = 1$ или $q = 1$.

Нормальную форму, представляющую формулу F (т.е. равносильную F), будем называть просто *нормальной формой этой формулы.*

Нетрудно понять, что всякая формула обладает как дизъюнктивной, так и конъюнктивной нормальными формами. В самом деле, всякую формулу можно выразить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Используя законы де Моргана (теорема 4.4,р,с) и свойство дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции (теорема 4.4,м), можем преобразовать равносильным образом полученное выражение к дизъюнкции конъюнктивных одночленов (к дизъюнктивной нормальной форме). Если же к исходному выражению применить свойство дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции (теорема 4.4,н), то его можно свести к конъюнкции дизъюнктивных одночленов (к конъюнктивной нормальной форме).

Очевидно, что у данной формулы F существует неограниченно много как дизъюнктивных, так и конъюнктивных нормальных форм. Одни из них более громоздкие и сложные, другие – более простые. (См. Задачник, №№ 2.1; 2.2).

Здесь мы можем продолжить до некоторого момента аналогию со школьной алгеброй. В школьной алгебре выражения типа ax, xyz, $(a+b)uv$ (последнее действие в них – умножение) называются одночленами, а выражения типа $a+b$, $ax+b$, $xy+uv+p$ (последнее действие – сложение) называются многочленами. В алгебре логики логическое умножение (конъюнкция) и логическое сложение (дизъюнкция) равноправны по своим свойствам. Поэтому выражения типа $X \wedge Y$, $X \wedge Y \wedge Z$ называются конъюнктивными одночленами, а выражения типа $X \vee Y$, $X \vee Y \vee Z$ – дизъюнктивными одночленами. Образования из одночленов типа $(X \wedge Y) \vee (P \wedge Q \wedge R)$, $(P \vee Q) \wedge (X \vee Y \vee Z)$ называются не многочленами, а нормальными формами. На этом аналогия заканчивается. Далее, вводятся понятия совершенных нормальных форм – дизъюнктивной и конъюнктивной.

Совершенные нормальные формы. Среди множества дизъюнктивных (равно как и конъюнктивных) нормальных форм, которыми обладает данная формула алгебры высказываний, существует уникальная форма: она единственна для данной формулы. Это так называемая совершенная дизъюнктивная нормальная форма (среди конъюнктивных форм – совершенная конъюнктивная нормальная форма).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Одночлен (конъюнктивный или дизъюнктивный) от переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ называется *совершенным*, если в него от каждой пары $X_i, \neg X_i$ $(i = 1, 2, ..., p)$, входит точно одна буква. Нормальная форма (дизъюнктивная или конъюнктивная) от переменных X_1, X_2, ..., X_n называется *совершенной* от этих переменных, если в неё входят лишь совершенные одночлены (конъюнктивные или дизъюнктивные соответственно) от $X_1, X_2, ..., X_n$.

Приведём пример совершенной конъюнктивной нормальной формы от четырёх переменных X_1, X_2, X_3, X_4:
$(X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee X_4) \wedge (\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3 \vee X_4) \wedge (X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3 \vee X_4)$.

Вот несколько примеров совершенных дизъюнктивных нормальных форм: $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y)$,

$$(X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee \\ \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z),$$

$$(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3 \wedge X_4) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3 \wedge X_4).$$

Представление формул алгебры высказываний совершенными дизъюнктивными нормальными формами. Введём обозначение, которое будет удобно в дальнейшем:

$$X^\alpha = \begin{cases} X, \text{ если } \alpha = 1, \\ \neg X, \text{ если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что $0^0 = 1$, $0^1 = 0$, $1^0 = 0$, $1^1 = 1$, т.е. $X^\alpha = 1$ тогда и только тогда, когда $X = \alpha$; и $X^\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $X \neq \alpha$ (см. пояснения о значении формулы перед теоремой 2.2).

Введём ещё одно обозначение. Вместо дизъюнкции $X_1 \vee X_2 \vee ... \vee X_n$ будем писать $\bigvee_{i=1}^n X_i$. В частности, запись

$$\bigvee\nolimits_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} H(X_1, ..., X_n, \alpha_1, ..., \alpha_n)$$

обозначает дизъюнкцию всевозможных выражений (формул) $H(X_1,..., X_n, \alpha_1, ... , \alpha_n)$, зависящих от переменных $X_1, ..., X_n$, когда индексы суммирования (дизъюнктирования) $\alpha_1, ..., \alpha_n$ пробегают всевозможные упорядоченные наборы длины n, составленные из нулей и единиц. Например,

$$\bigvee\nolimits_{(\alpha,\beta)}(X^\alpha \wedge Y^\beta) = (X^0 \wedge Y^0) \vee (X^0 \wedge Y^1) \vee (X^1 \wedge Y^0) \vee (X^1 \wedge Y^1) = \\ = (\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y).$$

Лемма 5.2. *Для всякой формулы* $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ *алгебры высказываний справедливо разложение*

$$F(X_1, X_2, ..., X_n) \cong \bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)} (F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \wedge X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge X_n^{\alpha_n}) .$$

Доказательство. Возьмём произвольный набор из нулей и единиц $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ (каждое ξ_i, где $1 \leq i \leq n$, есть либо 0, либо 1) и вычислим значения формул, стоящих в правой и левой частях доказываемой равносильности, при $X_1 = \xi_1$, $X_2 = \xi_2$, ..., $X_n = \xi_n$. Справа получим

$$\bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)} (F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \wedge \xi_1^{\alpha_1} \wedge \xi_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge \xi_n^{\alpha_n}) ,$$

что представляет собой дизъюнкцию нескольких конъюнктивных одночленов. Каждый конъюнктивный одночлен характеризуется индексным набором нулей и единиц $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Если для данного конъюнктивного одночлена набор $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ нулей и единиц таков, что $\alpha_1 \neq \xi_1$, или $\alpha_2 \neq \xi_2$, ... , или $\alpha_n \neq \xi_n$, то, согласно определению формулы X^α, введённому в начале пункта, будем иметь $\xi_1^{\alpha_1} = 0$, или $\xi_2^{\alpha_2} = 0$, ... , или $\xi_n^{\alpha_n} = 0$. Но тогда и весь данный конъюнктивный одночлен будет равен нулю и потому на результат дизъюнкции влияния не окажет, и значит из числа дизъюнктивных "слагаемых" может быть безболезненно исключён. Только один конъюнктивный одночлен окажется не равным нулю – тот, что характеризуется таким набором $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, который равен взятому в начале набору $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, т.е. для которого $\alpha_1 = \xi_1$, $\alpha_2 = \xi_2$, ..., $\alpha_n = \xi_n$. Только для этого конъюнктивного одночлена будем иметь

$$F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \wedge \xi_1^{\alpha_1} \wedge \xi_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge \xi_n^{\alpha_n} =$$

$$= F(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \wedge \xi_1^{\xi_1} \wedge \xi_2^{\xi_2} \wedge ... \wedge \xi_n^{\xi_n} =$$

$$= F(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \wedge 1 \wedge 1 \wedge ... \wedge 1 = F(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) .$$

Таким образом, конъюнктивный одночлен, соответствующий индексному набору $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, равен $F(\xi_1, \xi_2, .., \xi_n)$. Этому же значению равна и вся дизъюнкция, потому что, как показано выше, все остальные конъюнктивные одночлены равны нулю.

С другой стороны, формула, стоящая в левой части доказываемого равенства, обратится при $X_1 = \xi_1$, $X_2 = \xi_2$, ... , $X_n = \xi_n$ в то же самое значение $F(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$. Набор нулей и единиц $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ был выбран произвольно. Следовательно, формулы в левой и правой частях равносильности действительно равносильны. Лемма доказана. □

Теорема 5.3 (*о представлении формул алгебры высказываний совершенными дизъюнктивными нормальными формулами*). *Каждая не тождественно ложная формула алгебры высказываний от n аргументов имеет единственную (с точностью до перестановки дизъюнктивных членов) совершенную дизъюнктивную нормальную форму.*

Доказательство. Существование. Всякая формула $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ обладает указанным в предыдущей лемме разложением. Поскольку формула $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ не тождественно ложна, поэтому существуют такие наборы $(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$ нулей и единиц, что $F(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) = 1$. Наборы $(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$, обращающие формулу F в нуль, будут обращать в нуль также и конъюнктивные одночлены, входящие в дизъюнкцию и соответствующие данным индексным наборам. Поэтому все такие одночлены исключим из дизъюнкции. Итак, в дизъюнкции остаются конъюнктивные одночлены, соответствующие лишь индексным наборам $(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$ нулей и единиц, для которых $F(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) = 1$. Тогда разложение для формулы F принимает следующий вид:

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_n) \cong \bigvee_{\substack{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\ F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1}} (F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_n}) \cong$$

$$\cong \bigvee_{\substack{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\ F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1}} (F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge \xi_1^{\alpha_1} \wedge \xi_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \xi_n^{\alpha_n}) ,$$

где дизъюнкция ("суммирование") ведётся по всем индексным наборам $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ нулей и единиц, для которых $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$. Выражение, стоящее в правой части полученной равносильности, есть не что иное, как совершенная дизъюнктивная нормальная форма от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$, потому что каждый конъюнктивный одночлен $X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_n}$, входящий в дизъюнкцию, совершенен (каждая переменная $X_1, X_2, \ldots, X_n$ входит в него точно один раз, либо сама, либо со знаком отрицания в зависимости от значения её показателя степени).

Единственность. Предположим, что некоторая формула $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ имеет два представления совершенными дизъюнктивными нормальными формами:

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_n) \cong K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_q \quad \text{и}$$

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_n) \cong K_1^* \vee K_2^* \vee \ldots \vee K_r^* ,$$

где K_i, $1 \leq i \leq q$, и K_j^*, $1 \leq j \leq r$, есть совершенные конъюнктивные одночлены от переменных $X_1, X_2, ..., X_n$. Причём, не нарушая общности, считаем, что ни один из одночленов $K_1, K_2, ..., K_q$ не повторяется в этом наборе, потому что повторяющиеся одночлены можно исключить ввиду идемпотентности дизъюнкции (теорема 4.4,ж). Аналогична ситуация в наборе $K_1^*, K_2^*, ..., K_r^*$. Тогда $K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_q \cong K_1^* \vee K_2^* \vee ... \vee K_r^*$. Пусть совершенный конъюнктивный одночлен K_1 имеет вид $K_1 \equiv (X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge X_n^{\alpha_n})$. Придадим переменным $X_1, X_2, ..., X_n$ значения $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ соответственно. Тогда совершенный конъюнктивный одночлен K_1 примет значение 1 и, следовательно, вся совершенная дизъюнктивная нормальная форма, стоящая в левой части равенства, станет равна единице. Тогда и правая часть данного равенства обратится в единицу, и для набора $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ значений переменных одна из совершенных элементарных конъюнкций K^*, например K_j^*, также станет равна единице. Если K_j^* имеет вид $K_j^* \equiv (X_1^{\beta_1} \wedge X_2^{\beta_2} \wedge ... \wedge X_n^{\beta_n})$, то доказанное означает, что $\alpha_1^{\beta_1} \wedge \alpha_2^{\beta_2} \wedge ... \wedge \alpha_n^{\beta_n} = 1$. Последнее равенство возможно в том и только в том случае, когда $\alpha_1^{\beta_1} = 1$, $\alpha_2^{\beta_2} = 1, ..., \alpha_n^{\beta_n} = 1$, что может быть лишь тогда и только тогда, $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$, ... , $\beta_n = \alpha_n$. Следовательно, $K_j^* \equiv (X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge ... \wedge X_n^{\alpha_n})$, т.е. $K_j^* = K_1$. Таким образом, совершенная элементарная конъюнкция K_1 встречается среди совершенных элементарных конъюнкций $K_1^*, K_2^*, ..., K_r^*$. Тем же самым способом устанавливается, что любая из совершенных элементарных конъюнкций $K_1, K_2, ..., K_q$ встречается среди $K_1^*, K_2^*, ..., K_r^*$, и обратно, любая из совершенных элементарных конъюнкций $K_1^*, K_2^*, ..., K_r^*$ встречается среди $K_1, K_2, ..., K_q$. Ввиду того, что одночлены в данных наборах не повторяются, то $q = r$ и обе части равносильности $K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_q \cong K_1^* \vee K_2^* \vee ... \vee K_r^*$ отличаются самое большее порядком членов дизъюнкции. □

Доказанная теорема – одна из важнейших в алгебре высказываний. Если вы до конца разобрали обе части доказательства (существование и единственность), то значит вы *начали* понимать категории и методы математической логики как математической науки. Доказательство существования состоит из двух частей – леммы и собственно теоремы. Доказательство единственности полностью содержится в теореме и не опирается на лемму.

Представление формул алгебры высказываний совершенными конъюнктивными нормальными формами. Понятия и теоремы этого пункта носят двойственный характер по отношению к соответствующим понятиям и теоремам предыдущего пункта. Вводится следующее обозначение:

$$^{\beta}X = \begin{cases} \neg X, & \text{если } \beta = 1, \\ X, & \text{если } \beta = 0. \end{cases}$$

Легко проверяется, что $^{0}0 = 0$, $^{1}0 = 1$, $^{0}1 = 1$, $^{1}1 = 0$, т.е. $^{\beta}X = 1$ тогда и только тогда, когда $X \neq \beta$; и $^{\beta}X = 0$ тогда и только тогда, когда $X = \beta$.

Вместо конъюнкции $X_1 \wedge X_2 \wedge ... \wedge X_n$ будем писать $\bigwedge_{i=1}^{n} X_i$. В частности, запись $\bigwedge_{(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)} H(X_1,...,X_n,\beta_1,...,\beta_n)$ обозначает дизъюнкцию всевозможных выражений (формул) $H(X_1,...,X_n,$ $\beta_1,...,\beta_n)$, зависящих от переменных $X_1,...,X_n$, когда индексы произведения (конъюнктирования) $\beta_1,...,\beta_n$ пробегают всевозможные упорядоченные наборы длины n, составленные из нулей и единиц. Например,

$$\bigwedge_{(\alpha,\beta)}(^{\alpha}X \vee {}^{\beta}Y) = (^{0}X \vee^{0} Y) \wedge (^{0}X \vee^{1} Y) \wedge (^{1}X \vee^{0} Y) \wedge (^{1}X \vee^{1} Y) =$$
$$= (X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) .$$

Аналогично доказательству леммы 5.2 доказывается лемма 5.4.

ЛЕММА 5.4. *Для всякой формулы алгебры высказываний* $F(X_1,$ $..., X_n)$ *справедливо разложение*

$$F(X_1,...,X_n) \cong \bigvee_{(\beta_1,...,\beta_n)} (F(\beta_1,...,\beta_n) \vee {}^{\beta_1}X_1 \vee ... \vee {}^{\beta_n}X_n).$$

Подобно теореме 5.3 выводится теорема 5.5.

ТЕОРЕМА 5.5 (*о представлении формул алгебры высказываний совершенными конъюнктивными нормальными формами*). *Каждая формула алгебры высказываний от n переменных, не являющаяся тавтологией, имеет единственную (с точностью до перестановки конъюнктивных членов) совершенную конъюнктивную нормальную форму.*

Доказательство этой теоремы можно восстановить, руководствуясь доказательством теоремы 5.3.

Два способа приведения формулы алгебры высказываний к совершенной нормальной форме. Эти два способа проистекают из двух способов задания формулы алгебры высказываний: с помощью таблицы её значений или с помощью аналитической формы записи.

Если формула задана таблицей своих значений, то из доказательств теорем 5.3 и 5.5 о представлении формул совершенными нормальными формами необходимо вынести формулу (в некоем обычном понимании смысла этого термина) разложения формулы алгебры высказываний в совершенную нормальную форму. Для случая СДН-формы эта формула имеет следующий вид:

$$F(X_1, ..., X_n) \cong \bigvee_{F(\alpha_1,...,\alpha_n)=1} (X_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge X_n^{\alpha_n}), \qquad \text{где}$$

$$X^{\alpha} = \begin{cases} X, & \text{если} \quad \alpha = 1\,, \\ \neg X, & \text{если} \quad \alpha = 0\,. \end{cases}$$

По сути эта формула описывает следующее ПРАВИЛО (АЛГОРИТМ) ОТЫСКАНИЯ СОВЕРШЕННОЙ ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ДЛЯ ДАННОЙ ФОРМУЛЫ: ***нужно выбрать все те наборы значений её переменных, на которых формула принимает значение 1; для каждого такого набора выписать совершенный конъюнктивный одночлен, принимающий значение 1 на этом наборе и только на нём; полученные совершенные конъюнктивные одночлены соединить знаками дизъюнкции.*** (См. Тетрадь МЛ, №№ 1.41, 1.45, 1.47, 1.49 и Задачник, № 2.6, л).

Для случая СКН-формы эта формула выглядит так:

$$F(X_1, ..., X_n) \cong \bigwedge_{F(\beta_1,...,\beta_n)=1} ({}^{\beta_1}X_1 \vee ... \vee {}^{\beta_n}X_n), \qquad \text{где}$$

$${}^{\beta}X = \begin{cases} \neg X, & \text{если} \quad \beta = 1\,, \\ X, & \text{если} \quad \beta = 0\,. \end{cases}$$

Она, в свою очередь, описывает следующее ПРАВИЛО (АЛГОРИТМ) ОТЫСКАНИЯ СОВЕРШЕННОЙ КОНЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ДЛЯ ДАННОЙ ФОРМУЛЫ: ***нужно выбрать все те наборы значений её переменных, на которых формула принимает значение 0. Для каждого такого набора выписать совершенный дизъюнктивный одночлен, принимающий значение 0 на этом наборе и только на нём. Полученные совершенные дизъюнктивные одночлены соединить знаками конъюнкции.*** (См. Тетрадь МЛ, №№ 1.42, 1.46, 1.48, 1.50 и Задачник, № 2.9, л).

Примеры нахождения совершенных нормальных форм по этим правилам см. в Задачнике, №№ 2.11 л, 2.12 л.

Второй способ приведения формул алгебры высказываний к совершенной нормальной форме основан на равносильных преобразованиях данной формулы. В этом случае формула должна быть задана в аналитической форме. Для приведения формулы к совершенной нормальной форме нужно сначала привести её к дизъюнктивной (или конъюнктивной) нормальной форме. (Алгоритм такого приведения подробно рассмотрен в Задачнике №№ 2.1 л, 2.2 л.) Затем нужно продолжить равносильные преобразования полученных нормальных форм с тем, чтобы довести их до совершенства. (Примеры приведения рассмотрены в Тетради МЛ, №№ 1.43а, 1.44а и в Задачнике №№ 2.3 л, 2.4 л.)

В заключение отметим, что одной из сфер применения нормальных форм является та, где требуется получить аналитическое (формульное) выражение для формулы алгебры высказываний, которая задана своей таблицей значений (таблицей истинности), т.е. про которую известно, на каких наборах она принимает 0, а на каких – 1. Примеры таких задач приведены в Тетради МЛ, №№ 1.62, 1.63, а также 1.64, 1.65 и в Задачнике №№ 2.20, 2.27 – 2.31.

§6. Логическое следование формул

Раздел алгебры высказываний, изучающий закономерности логического следования, логического умозаключения, является её сердцевиной. Именно в этом разделе на данном уровне развития математической логики решается основная задача логики, состоящая в нахождении общих способов установления связей логических значений одних высказываний с логическими значениями других высказываний на основании исследования *формальной структуры* высказываний. Одно из важнейших предназначений логики состоит в том, чтобы устанавливать, что из чего следует, т.е. устанавливать, высказывания какой структуры следуют из высказываний какой структуры (часть общего назначения математики, по выражению Норберта Винера: находить порядок в хаосе, который нас окружает). Знание этих закономерностей необходимо прежде всего самой математической науке. С помощью таких знаний происходит доказательство математических теорем и, следовательно, развитие математики. Это знание важно и для других наук, для систематизации научного знания вообще, да и в повседневной жизни оно служит инструментом рассуждений, обоснований и доказательств.

Понятие логического следствия. Когда говорят, что из одного или нескольких предложений $A_1, A_2, ..., A_m$ следует предложение B, то подразумевают следующее: всякий раз, когда окажутся истинными все предложения $A_1, A_2, ..., A_m$, истинным будет и предложение B. Вот примеры таких следований: "Если летом я устроюсь на временную работу (утверждение A), то у меня будут заработанные деньги (утверждение B)". "Если у меня будут заработанные деньги (утверждение B), то я куплю видеомагнитофон (утверждение C)". Если днём я не приготовлю уроки на завтра (утверждение A_1), и если вечером я пойду в кино (утверждение A_2), то завтра я буду не готов к занятиям (утверждение D)". Установление справедливости приведённых суждений не относится к компетенции математической логики, а осуществляется на основе анализа их содержания и смысла.

Задача математической логики (в частности, алгебры высказываний) в вопросах логического следования состоит в том, чтобы указать такие формы высказываний $A_1, A_2, ..., A_m$, B, когда последнее высказывание непременно было бы следствием m первых, независимо от конкретного содержания всех этих высказываний. Формы высказываний выражаются, как нам известно, формулами алгебры высказываний. Итак, теория логического следования (в рамках алгебры высказываний) должна изучать закономерности образования формул $F_1, F_2, ..., F_m$, H таких, что первые m из них связаны с последней отношением логического следования.

Вернёмся к двум первым суждениям, приведённым в начале пункта: $A \to B$ и $B \to C$. Вынесем относительно них следующее умозаключение: "Если $A \to B$ и $B \to C$, то $A \to C$. Формулировка данного суждения без использования математической символики будет, конечно, неуклюжа. Поэтому сформулируем его так: "Если высказывание $A \to B$ верно и высказывание $B \to C$ верно, то верно и высказывание $A \to C$". Нет никаких сомнений в том, что высказанное суждение справедливо. Более того, мы осознаём его справедливость, даже не интересуясь содержанием простейших высказываний A, B и C. Значит высказывание, имеющее форму $X \to Z$, следует из двух высказываний, имеющих формы $X \to Y$ и $Y \to Z$, независимо от того, каковы высказывания X, Y и Z.

Перейдём теперь к точному определению понятия логического следствия и к изучению свойств этого понятия.

Определение 6.1. Формула $G(X_1, ..., X_n)$ называется *логическим следствием формул* $F(X_1, ..., X_n)$, ..., $F_m(X_1, ..., X_n)$, если формула $G(X_1, ..., X_n)$ превращается в истинное высказывание при всякой такой подстановке вместо всех её пропозициональных переменных $X_1, ..., X_n$ конкретных высказываний, при которой в истинное высказывание превращаются все формулы $F(X_1, ..., X_n)$, ..., $F_m(X_1, ..., X_n)$.

То, что формула G является логическим следствием формул

$F_1, ..., F_m$, записывается так: $F_1, ..., F_m \models G$. Формулы $F_1, ..., F_m$ называются ***посылками*** для логического следствия G.

Таким образом, $F_1, ..., F_m \models G$, если для любых высказываний $A_1, ..., A_n$ из $\lambda(F_1(A_1, ..., A_n)) = 1$, ..., $\lambda(F_m(A_1, ..., A_n)) = 1$ следует $\lambda(G(A_1, ..., A_n)) = 1$ Наконец можно и так сказать о логическом следствии. Составим таблицы истинности для формул $F_1, ..., F_m, G$. Предположим: если в какой-то строке таблицы все формулы $F_1, ..., F_m$ принимают значение 1, то в этой строке непременно и формула G принимает значение 1. Это и будет означать, что G является логическим следствием формул $F_1, ..., F_m$.

Из сформулированного определения вытекает чёткий алгоритм проверки формул на логическое следование. Рассмотрим его действие для случая, например, трёх формул-посылок, зависящих от трёх переменных: $F_1(X,Y,Z)$, $F_2(X,Y,Z)$, $F_3(X,Y,Z) \models G(X,Y,Z)$. Все эти формулы должны быть заданы таблицами своих значений:

X	Y	Z	$F_1(X,Y,Z)$	$F_2(X,Y,Z)$	$F_3(X,Y,Z)$	$G(X,Y,Z)$
0	0	0	α_0	β_0	γ_0	ξ_0
0	0	1	α_1	β_1	γ_1	ξ_1
0	1	0	α_2	β_2	γ_2	ξ_2
0	1	1	α_3	β_3	γ_3	ξ_3
1	0	0	α_4	β_4	γ_4	ξ_4
1	0	1	α_5	β_5	γ_5	ξ_5
1	1	0	α_6	β_6	γ_6	ξ_6
1	1	1	α_7	β_7	γ_7	ξ_7

Алгоритм действует следующим образом. Он просматривает последовательно по строкам таблицы значений формул F_1, F_2, F_3, G. Если хотя бы один элемент нулевой строки $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ равен 0, то без просмотра значения формулы G в этой строке (т.е. числа ξ_0) происходит переход к просмотру следующей строки $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Если все элементы $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ нулевой строки равны 1, то просматривается значение ξ_0 формулы G в этой строке. При $\xi_0 = 0$ выдается результат: формула H не является логическим следствием формул F_1, F_2, F_3. При $\xi_0 = 1$ происходит переход к просмотру следующей строки $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. И так далее. Если после просмотра последней строки $\alpha_7, \beta_7, \gamma_7$, ξ_7 должен произойти переход к просмотру следующей строки, то это означает, что определение логического следования выполнено и формула G является логическим следствием формул F_1, F_2, F_3.

Разберите действие этого алгоритма при решении конкретных задач на логическое следование. (См. Тетрадь МЛ, № 1.55, 1.56, 1.57

и Задачник, №№ 1.34, 1.35 м, 1.36 л).

Два свойства логического следования. Свойства, формулируемые в теореме 6.2, используются для доказательства того, что какая-то формула является логическим следствием некоторых формул (см. пример 7.10 ниже).

ТЕОРЕМА 6.2. *Отношение логического следования между формулами алгебры высказываний обладает следующими свойствами:*

а) $F_1, F_2, ..., F_m \models F_i$, для $i = 1, 2, ..., m$;

б) если $F_1, F_2, ..., F_m \models G_j$ для $j = 1, 2, ..., p$ и $G_1, G_2, ..., G_p \models H$, то $F_1, F_2, ..., F_m \models H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Фактически это свойство состоит в следующем: $F_i \models F_i$. Оно непосредственно вытекает из определения 6.1 логического следования и означает, что отношение логического следования рефлексивно.

б) В частном случае при $m = p = 1$ данное свойство утверждает: если $F \models G$ и $G \models H$, то $F \models H$. Другими словами, отношение логического следования транзитивно. Докажем исходное утверждение. Строим таблицу истинности для всех формул, указанных в пункте б), перечислив все пропозициональные переменные $X_1, X_2, ..., X_n$, входящие хотя бы в одну из этих формул. Рассмотрим какую-нибудь строку этой таблицы, в которой каждая формула $F_1, F_2, ..., F_m$ получает истинностное значение, равное 1. Тогда на основании условий каждая из формул $G_1, G_2, ..., G_p$ также принимает истинностное значение, равное 1. Следовательно, и H имеет значение 1. Таким образом, для всякого набора истинностных значений переменных $X_1, X_2, ..., X_n$, для которого каждая формула $F_1, F_2, ..., F_m$ принимает значение 1, формула H также принимает значение 1. Это означает, что $F_1, F_2, ..., F_m \models H$. □

Признаки логического следствия. То, что некоторая формула является логическим следствием каких-то формул, можно выразить также, сказав, что подходящая формула является тавтологией. В этом существо признаков, о которых пойдет речь в настоящем пункте, чем еще раз подчеркивается важное значение тавтологий.

ТЕОРЕМА 6.3. (*Признак логического следствия*). *Формула G будет логическим следствием формулы F тогда и только тогда, когда формула $F \to G$ является тавтологией:*

$$\boxed{F \models G \iff \models F \to G}\ .$$

Доказательство. Необходимость. Дано: $F(X_1, ..., X_n) \models G(X_1, ..., X_n)$, т.е. если для набора высказываний $A_1, ..., A_n$, если имеет место $\lambda(F(A_1, ..., A_n)) = 1$, то и $\lambda(G(A_1, ..., A_n)) = 1$. Тогда для любого набора высказываний $A_1, ..., A_n$ имеет место равенство $\lambda(F(A_1, ..., A_n)) \rightarrow \lambda(G(A_1, ..., A_n)) = 1$, поскольку равенство нулю возможно лишь в том случае, когда $\lambda(F(A_1, ..., A_n)) = 1$ и $\lambda(G(A_1, ..., A_n)) = 0$, но такая ситуация исключена условием. Следовательно, на основании равенства (1.4), $\lambda(F(A_1, ..., A_n) \rightarrow G(A_1, ..., A_n)) = 1$ для любых высказываний $A_1, ..., A_n$. Это и означает, что формула $F(X_1, ..., X_n) \rightarrow G(X_1, ..., X_n)$ – тавтология, т.е. $\models F \rightarrow G$.

Достаточность. Дано: $\models F \rightarrow G$. Тогда: $\lambda(F(A_1, ..., A_n) \rightarrow G(A_1, ..., A_n)) = 1$ для любых высказываний $A_1, ..., A_n$, откуда в силу равенства (1.4), $\lambda(F(A_1, ..., A_n)) \rightarrow \lambda(G(A_1, ..., A_n)) = 1$. Предположим теперь, что $\lambda(F(A_1, ..., A_n)) = 1$. Тогда: $1 \rightarrow \lambda(G(A_1, ..., A_n)) = 1$, откуда, на основании определения 1.7, $\lambda(G(A_1, ..., A_n)) = 0$, ибо в противном случае $1 \rightarrow 0 = 1$ – противоречие. Но это значит, по определению 6.1 логического следствия, что $F \models G$. □

Следующая теорема даёт признаки того, что формула является логическим следствием двух или большего количества формул.

Теорема 6.4. *Для любых формул* $F_1, F_2, ..., F_m, G$ $(m \geq 2)$ *следующие утверждения равносильны*:

а) $F_1,\ F_2,\ ...,\ F_m \models G$;
б) $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \models G$;
в) $\models (F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m) \rightarrow G$.

Доказательство. Утверждения б) и в) равносильны на основании предыдущей теоремы. Докажем равносильность утверждений а) и б).

а) $\Longrightarrow$ б). Дано: $F_1, F_2, ..., F_m \models G$. Покажем, что $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \models G$. Пусть $A_1, ..., A_n$ – такие конкретные высказывания, что

$$\lambda(F_1(A_1, ..., A_n) \wedge ... \wedge F_m(A_1, ..., A_n)) = 1 . \qquad (6.1)$$

Тогда по равенству (1.2)

$$\lambda(F_1(A_1, ..., A_n)) \wedge ... \wedge \lambda(F_m(A_1, ..., A_n)) = 1 . \qquad (6.2)$$

Отсюда по определению 1.3

$$\lambda(F_1(A_1, ..., A_n)) = 1, \ ... \ , \lambda(F_m(A_1, ..., A_n)) = 1 . \qquad (6.3)$$

Но поскольку по условию $F_1, F_2, ..., F_m \models G$, поэтому отсюда следует, что $\lambda(G(A_1, ..., A_n)) = 1$. Следовательно, $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \models G$.

б) $\Longrightarrow$ а). Дано: $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \models G$. Покажем, что $F_1, F_2, ..., F_m \models G$. Предположим, что справедливы все соотношения (6.3) для некоторых $A_1, ..., A_n$. Тогда имеет место соотношение

(6.2), из которого на основании равенства (1.2) приходим к соотношению (6.1). Из последнего на основании условия $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \models G$, заключаем: $\lambda(G(A_1, ..., A_n)) = 1$. Но это и означает, что $F_1, F_2, ..., F_m \models G$. □

Следование и равносильность формул. Если говорить о следовании из одной формулы другой, то получаем бинарное отношение на совокупности всех формул алгебры высказываний. Две формулы F и G (в указанном порядке) находятся в данном отношении, если $F \models G$.

В §4 рассмотрено бинарное отношение равносильности на совокупности всех формул алгебры высказываний. Две формулы F и G (в указанном порядке) находятся в этом отношении, если $F \cong G$. Там же (следствие 4.3) установлено, что отношение равносильности формул есть отношение эквивалентности. Теперь установим взаимосвязь между отношением равносильности и отношением следования.

Теорема 6.5. *Две формулы алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда каждая из них является логическим следствием другой:* $\boxed{F \cong G \iff F \models G \text{ и } G \models F}$.

Доказательство. Необходимость. Дано: $F \cong G$. По определению равносильности обе формулы $F(X_1, ..., X_n)$ и $G(X_1, ..., X_n)$ для любых конкретных высказываний $A_1, ...A_n$ превращаются в высказывания $F(A_1, ..., A_n)$ и $G(A_1, ..., A_n)$, которые одновременно либо оба истинны, либо оба ложны. А раз так, то каждое из высказываний $F(A_1, ..., A_n) \to G(A_1, ..., A_n)$ и $G(A_1, ..., A_n) \to F(A_1, ..., A_n)$ истинно для любых конкретных высказываний $A_1, ...A_n$. Это означает, что $\models F \to G$ и $\models G \to F$, откуда, по теореме 6.3, $F \models G$ и $G \models F$.

Достаточность. Дано: $F \models G$ и $G \models F$. Тогда по теореме 6.3, $\models F \to G$ и $\models G \to F$. Поскольку формула $F \to G$ всегда превращается в истинное высказывание и формула $G \to F$ всегда превращается в истинное высказывание, то и их конъюнкция $(F \to G) \wedge (G \to F)$ является формулой, которая превращается в истинное высказывание всегда, т.е. $\models (F \to G) \wedge (G \to F)$. Но, на основании теоремы 4.4 ч, $(F \to G) \wedge (G \to F) \cong F \leftrightarrow G$. Тогда, по замечанию 4.7, $\models F \leftrightarrow G$, а по теореме 4.2, $F \cong G$. □

Замечание 6.6. Если некоторая формула является тавтологией, то и всякое её логическое следствие также является тавтологией. Символически: $\boxed{\models F \text{ и } F \models G \implies \models G}$.

Продумайте это утверждение самостоятельно.

Метод от противного проверки формул на логическое следование. Требуется выяснить, является или нет формула $G(X_1, \ldots, X_n)$ логическим следствием формул $F_1(X_1, \ldots, X_n)$, ... , $F_m(X_1, \ldots, X_n)$, т.е. $F_1, F_2, \ldots, F_m \models G$? Предположим, что G не есть логическое следствие формул $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Значит, существуют такие конкретные высказывания $A_1, \ldots, A_n$, что высказывание $G(A_1, \ldots, A_n)$ ложно в то время, как все высказывания $F_1(A_1, \ldots, A_n), \ldots, F_m(A_1, \ldots, A_n)$ истинны. Если при этом удаётся найти распределение нулей и единиц между значениями переменных $X_1, \ldots, X_n$, соответствующее сделанному предположению, то предположение верно. Если же возникает противоречие, то предположение неверно. Посмотрим на примерах, как это делается.

Пример 6.7. Выясните, выполняется ли логическое следование

$$X \to (\neg Y \vee Z), \ \neg X, \ Y \to Z \ \models \ X \vee Z .$$

Допустим, что существуют такие конкретные высказывания A, B, C, что $\lambda(A \to (\neg B \vee C)) = 1$, $\lambda(\neg A) = 1$, $\lambda(B \to C) = 1$, но $\lambda(A \vee C) = 0$. Тогда из последнего соотношения получаем $\lambda(A) = 0$, $\lambda(C) = 0$, что не противоречит соотношению $\lambda(\neg A) = 1$. Далее, соотношение $\lambda(B \to C) = 1$ даёт $\lambda(B) = 0$ (так как $\lambda(C) = 0$). Наконец, вычислив при данных значениях A, B и C значение $\lambda(A \to (\neg B \vee C))$, убеждаемся: оно равно 1, что находится в полном соответствии с допущением. Следовательно, приходим к выводу: если высказывания A, B, C таковы, что $\lambda(A) = \lambda(B) = \lambda(C) = 0$, то при подстановке $X = A$, $Y = B$, $Z = C$ все формулы-посылки примут значение 1, а формула $X \vee Z$ примет значение 0. Значит, формула $X \vee Z$ не является логическим следствием формул $X \to (\neg Y \vee Z)$, $\neg X$, $Y \to Z$.

Разберите также пример № 1.58а и решите задачи 1.58 б, в, г, 1.59 из Тетради МЛ.

Метод резолюций проверки формул на логическое следование. В заключение данного параграфа будут рассмотрены так называемые традиционные правила логических умозаключений. Эти правила были выделены традиционной логикой, начиная с Аристотеля, и представляют собой правила, которые наиболее часто употребляются в человеческой мыслительной практике.

С появлением вычислительных машин и связанными с ними работами по созданию систем искусственного интеллекта возрос интерес к механическому доказательству математических теорем, к используемым при этом логическим методам доказательств. При этом выяснилось, что общепринятые логические правила умозаключений, свойственные человеку в его рассуждениях, в частности, правило modus ponens (MP), специально выбраны "слабыми", чтобы человек смог индуктивно проследить за каждым шагом процедуры доказательства. В 1965 г. американский логик Дж. Робинсон открыл более сильное правило вывода, которое он назвал *правилом* (или *принципом*) *резолюции*. Это правило трудно поддаётся восприятию человеком, но исключительно эффективно реализуется на компьютере. Оно имеет следующий вид:

$$\boxed{G \vee F,\ H \vee \neg F \models G \vee H}\ . \qquad (6.4)$$

Нетрудно проверить, что формула $G \vee H$ действительно является логическим следствием двух формул, стоящих слева. При этом говорят, что формула $G \vee F$ ***резольвирует*** с формулой $H \vee \neg F$, формула $G \vee H$ называется ***резольвентой*** формул $G \vee F$ и $H \vee \neg F$ (по переменной F), и пишут $G \vee H = Res_F(G \vee F,\ H \vee \neg F)$.

Если при этом в условии отсутствует формула G (или она тождественно ложна), то правило (6.4) принимает следующий вид:

$$F,\ H \vee \neg F \models H\ , \qquad (6.5)$$

представляющий собой известное нам правило Modus Ponens: $F,\ F \to H \models H$. Таким образом, правило MP вытекает из правила резолюции, т.е. правило резолюции сильнее, чем правило MP. Если же в условии правила (6.4) отсутствует формула H (или она тождественно ложна), то правило (6.4) принимает следующий вид: $G \vee F,\ \neg F \models G$. Наконец, в случае отсутствия и G и H говорят, что правило резолюции даёт (порождает) пустую формулу. (Фактически это означает, что из F и $\neg F$ выводится любая формула).

Мы уже установили, что правило резолюции логически сильнее правила Modus Ponens. Сравним эти два правила с ещё одним правилом умозаключений, или, как говорят, правилом вывода, – ***правилом цепного заключения***:

$$\boxed{F \to G,\ G \to H \models F \to H}\ . \qquad (6.6)$$

Мы уже обсуждали это правило в конце первого пункта настоящего параграфа. (Другие правила логических умозаключений будут рассмотрены в последнем пункте настоящего параграфа). Оказывается, и правило резолюции, и правило MP вытекают из правила цепного заключения (ЦЗ). В самом деле, предположим, что правило ЦЗ справедливо.

Рассмотрим посылки правила резолюции: $G \vee F,\ H \vee \neg F$. Руководствуясь известными равносильностями алгебры высказываний, представим их в виде: $\neg G \to F,\ \ F \to H$ соответственно. Тогда из этих посылок по правилу цепного заключения логически следует формула $\neg G \to H$, или, что равносильно, $G \vee H$. Таким образом, мы доказали, что имеет место следующее логическое следование: $G \vee F,\ H \vee \neg F \models G \vee H$, т.е. правило резолюции.

Рассмотрим посылки правила Modus Ponens: $F, \quad F \to H$. Представим их в равносильном виде: $1 \to F, \quad F \to H$ соответственно. Тогда из этих посылок по правилу цепного заключения логически следует формула $1 \to H$, или, что равносильно, H. Таким образом, мы доказали, что имеет место следующее логическое следование: $F, \quad F \to H \quad \models \quad H$, т.е. правило Modus Ponens.

Итак, правило цепного заключения настолько логически ёмко, что содержит в себе как правило резолюции (для этого в качестве посылок правила ЦЗ нужно взять формулы следующего частного вида: $\neg G \to F, \quad F \to H$), так и правило Modus Ponens (для этого в качестве посылок правила ЦЗ нужно взять формулы вида: $1 \to F$, $F \to H$).

Картину логической зависимости рассмотренных трёх правил вывода представим в виде следующей схемы:

Правило цепного заключения

$$F \to G, \quad G \to H \quad \models \quad F \to H$$

Правило резолюции

$$\neg G \to F,\ F \to H \models \neg G \to H$$

$$G \vee F, \quad H \vee \neg F \quad \models \quad G \vee H$$

Правило Modus Ponens

$$F, \quad H \vee \neg F \quad \models \quad H$$

$$1 \to F, \quad F \to H \quad \models \quad 1 \to H$$

$$F, \quad F \to H \quad \models \quad H$$

Приступим теперь к описанию ***метода резолюций*** проверки формул алгебры высказываний на логическое следование, который основывается на рассмотренном правиле резолюции. Отметим прежде одну простую идею.

Пусть даны формулы $F_1, ..., F_m$ и G. Нетрудно доказать, что формула G будет логическим следствием формул $F_1, ..., F_m$ тогда и только тогда, когда формула $F_1 \wedge ... \wedge F_m \wedge \neg G$ является противоречием (т.е. тождественно ложна). В самом деле,

$$F_1, \ \dots, \ F_m \models G \quad \Longleftrightarrow \quad \models (F_1 \ \wedge \ \dots \ \wedge F_m) \ \to \ G$$

(см. теорему 6.5). Далее, формула $(F_1 \wedge ... \wedge F_m) \to G$ будет тавтологией, если и только если её отрицание $\neg((F_1 \wedge ... \wedge F_m) \to G)$ будет противоречием (тождественно ложной формулой). Равносильными преобразованиями эта формула приводится к требуемой:

$$\neg((F_1 \wedge ... \wedge F_m) \to G) \cong \neg(\neg(F_1 \wedge ... \wedge F_m) \vee G) \cong$$
$$\cong \neg(\neg F_1 \vee ... \vee \neg F_m \vee G) \cong F_1 \wedge ... \wedge F_m \wedge \neg G \,.$$

В свою очередь, чтобы доказать тождественную ложность формулы $F_1 \wedge ... \wedge F_m \wedge \neg G$ достаточно доказать, что из совокупности формул $F_1, ..., F_m, \neg G$ логически следует любая формула. Для этого и служит *метод резолюций*. Он состоит в том, что к формулам из множества $\{F_1, ..., F_m, \neg G\}$ применяется правило резолюции. Получаемые формулы (резольвенты) также включаются в это множество и к ним также может применяться это правило вывода. Порождение резольвент происходит до тех пор, пока не будет получена пустая формула. Как было отмечено выше, это и будет означать, что исходное множество $\{F_1, ..., F_m, \neg G\}$ формул противоречиво, а формула $F_1 \wedge ... \wedge F_m \wedge \neg G$ тождественно ложна.

Формулы из множества $\{F_1, ..., F_m, \neg G\}$ не всегда будут иметь такой вид, к которому правило резолюции возможно будет применить. Поэтому если заданы произвольные формулы $F_1, ..., F_m, G$, то нужно составить формулу $F_1 \wedge ... \wedge F_m \wedge \neg G$, привести её равносильными преобразованиями к (совершенной) конъюнктивной нормальной форме: $F_1 \wedge ... \wedge F_m \wedge \neg G \cong D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_k$, а затем применять метод резолюций к множеству $S = \{D_1, D_2, ..., D_k\}$ (элементы этого множества называются *дизъюнктами* данной совокупности формул).

Пример 6.8. Пусть: $F_1 \equiv K \vee L$, $F_2 \equiv K \to M$, $F_3 \equiv L \to N$, $G \equiv M \vee N$. Найдём $\neg G \equiv \neg(M \vee N)$. Составим конъюнкцию формул F_1, F_2, F_3, $\neg G$ и преобразуем её к конъюнктивной нормальной форме:

$$F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \neg G \equiv (K \vee L) \wedge (K \to M) \wedge (L \to N) \wedge \neg(M \vee N) \equiv$$
$$\equiv (K \vee L) \wedge (\neg K \vee M) \wedge (\neg L \vee N) \wedge \neg M \wedge \neg N \,.$$

Получим множество дизъюнктов данной совокупности формул: $S = \{K \vee L, \neg K \vee M, \neg L \vee N, \neg M, \neg N\}$. Применим к этому множеству метод резолюций:

$$\Phi_1 = Res_M(\neg K \vee M, \neg M) = \neg K \,;$$
$$\Phi_2 = Res_N(\neg L \vee N, \neg N) = \neg L \,;$$
$$\Phi_3 = Res_K(K \vee L, \neg K) = L \,;$$
$$\Phi_4 = Res_L(L, \neg L) = \emptyset \,.$$

Полученное противоречие доказывает выполнимость логического следования: $K \vee L,\ K \to M,\ L \to N \models M \vee N$.

Метод резолюций по существу является разновидностью рассмотренного в предыдущем пункте метода от противного: в данном методе процесс получения противоречия алгоритмизируется посредством правила резолюции, и этот алгоритм может эффективно осуществляться компьютером.

Методу резолюций посвящены в Тетради МЛ задачи № 1.60, 1.61.

Нахождение следствий из данных посылок. Мы научились определять, является ли данная формула логическим следствием некоторых других данных формул. Теперь возникает вопрос, как можно находить все формулы, являющиеся логическим следствием данной совокупности формул. Следующая теорема даёт ключ к решению этой задачи.

ТЕОРЕМА 6.9. *Формула $H(X_1, ..., X_n)$, не являющаяся тавтологией, тогда и только тогда будет логическим следствием формул $F_1(X_1, ..., X_n)$, ..., $F_m(X_1, ..., X_n)$, не все из которых являются тавтологиями, когда все совершенные дизъюнктивные одночлены из разложения формулы H в совершенную конъюнктивную нормальную форму входят в совершенную конъюнктивную нормальную форму формулы $F_1(X_1, ..., X_n) \wedge ... \wedge F_m(X_1, ..., X_n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Дано: $F_1, ..., F_m \models H$. Тогда, по теореме 6.5, $F_1 \wedge ... \wedge F_m \models H$. Найдём для формул $F_1 \wedge ... \wedge F_m$ и H их совершенные конъюнктивные нормальные формы. Такая форма для каждой не тождественно истинной формулы существует и единственна с точностью до порядка совершенных дизъюнктивных одночленов в конъюнкции (см. теорему 5.4). Пусть $D_1 \wedge ... \wedge D_k$ – СКН-форма для формулы $F_1 \wedge ... \wedge F_m$ а $H_1 \wedge ... \wedge H_l$ – СКН-форма для формулы H. Тогда: $F_1 \wedge ... \wedge F_m \cong D_1 \wedge ... \wedge D_k$, $H \cong H_1 \wedge ... \wedge H_l$.

Допустим, что заключение теоремы не выполняется, т.е. среди совершенных дизъюнктивных одночленов $H_1, ..., H_l$ имеется такой, которого нет среди совершенных дизъюнктивных одночленов $D_1, ..., D_k$. Не нарушая общности (ввиду несущественности порядка вхождения одночленов $H_1, ..., H_l$ в СКН-форму $H_1 \wedge ... \wedge H_l$, можем считать, что таким одночленом является, например, H_1. Итак, $H_1(X_1, ..., X_n) \not\cong D_1(X_1, ..., X_n)$, ..., $H_1(X_1, ..., X_n) \not\cong D_k(X_1, ..., X_n)$. Тогда существует единственный набор значений $A_1, ..., A_n$, на котором совершенный дизъюнктивный одночлен $H_1(X_1, ..., X_n)$ принимает значение 0: $\lambda(H_1(A_1, ..., A_n)) = 0$, откуда

$$\lambda(H(A_1, ..., A_n)) = 0 \tag{6.7}$$

Этот набор выбирается следующим образом. Если переменная X_i, входит в H_1 без знака отрицания, то A_i таково, что $\lambda(A_i) = 0$; если X_i, входит в H_1 со знаком отрицания, то A_i таково, что $\lambda(A_i) = 1$ $(1 \leq i \leq n)$. Каждый из совершенных дизъюнктивных одночленов $D_1, ..., D_k$ в силу его отличия от совершенного дизъюнктивного одночлена H_1, обращается на данном наборе в 1: $\lambda(D_1(A_1, ..., A_n)) = 1, \ldots, \lambda(D_k(A_1, ..., A_n)) = 1$. Тогда

$$\lambda(D_1(A_1, ..., A_n) \wedge \ldots \wedge D_k(A_1, ..., A_n)) = 1,$$

откуда, в силу равносильности $D_1 \wedge \ldots \wedge D_k \cong F_1 \wedge \ldots \wedge F_m$, получаем $\lambda(F_1(A_1, ..., A_n) \wedge \ldots \wedge F_m(A_1, ..., A_n)) = 1$. Следовательно, $\lambda(F_1(A_1, ..., A_n)) \wedge \ldots \wedge \lambda(F_m(A_1, ..., A_n)) = 1$, и значит,

$$\lambda(F_1(A_1, ..., A_n)) = 1, \ldots, \lambda(F_m(A_1, ..., A_n)) = 1. \qquad (6.8)$$

Соотношения (6.7) и (6.8) противоречат условию: $F_1, ..., F_m \models H$. Следовательно, в СКН-форме формулы H нет ни одного совершенного дизъюнктивного одночлена, который отсутствовал бы в СКН-форме формулы $F_1 \wedge \ldots \wedge F_m$.

Достаточность. Пусть $D_1 \wedge \ldots \wedge D_k$ – СКН-форма формулы $F_1 \wedge \ldots \wedge F_m$. Тогда $F_1 \wedge \ldots \wedge F_m \cong D_1 \wedge \ldots \wedge D_k$. Пусть, далее, $H \equiv D_{i_1} \wedge \ldots \wedge D_{i_s}$, где $1 \leq i_1, ..., i_s \leq k$ и $i_1, ..., i_s$ – попарно различны. Тогда ясно, что если при некоторой подстановке формула $F_1 \wedge \ldots \wedge F_m$ принимает истинное значение, то и равносильная ей формула $D_1 \wedge \ldots \wedge D_k$ также принимает значение 1. Следовательно, и все члены $D_1, ..., D_k$ последней конъюнкции принимают значение 1, включая члены $D_{i_1}, ..., D_{i_s}$. Но тогда и конъюнкция $D_{i_1} \wedge \ldots \wedge D_{i_s} \equiv H$ также принимает значение 1. Значит, $F_1, ..., F_m \models H$.

Теорема доказана. □

Эта теорема определяет следующее ПРАВИЛО (АЛГОРИТМ) ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ВСЕХ (НЕРАВНОСИЛЬНЫХ) ФОРМУЛ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ЛОГИЧЕСКИМИ СЛЕДСТВИЯМИ ИЗ ПОСЫЛОК $F_1, ..., F_m$: 1) *составить конъюнкцию* $F_1 \wedge \ldots \wedge F_m$; 2) *найти СКН-форму формулы* $F_1 \wedge \ldots \wedge F_m$; 3) *выписать все совершенные дизъюнктивные одночлены найденной СКН-формы, а также всевозможные конъюнкции этих одночленов. Полученное множество формул и является искомым.* (См. Задачник, № 2.34, л).

Нахождение посылок для данного следствия. Задача нахождения *всех* формул, из которых данная формула логически следует, является обратной по отношению к той, которая была рассмотрена в предыдущем пункте. Её решение основывается на следующей теореме.

ТЕОРЕМА 6.10. *Чтобы найти все формулы, логическим следст-*

нием каждой из которых будет данная формула $G(X_1, ..., X_n)$, нужно действовать по следующему алгоритму. Найти СКН-форму для формулы $G(X_1, ..., X_n)$; выявить все совершенные дизъюнктивные одночлены, которые в ней отсутствуют; составить всевозможные конъюнкции формулы $G(X_1, ..., X_n)$ с недостающими дизъюнктивными одночленами. Получившаяся совокупность формул (вместе с формулой G) будет искомой (с точностью до равносильности формул).

Доказательство. Ясно, что из каждой формулы этой совокупности будет логически следовать формула G, так как $G \wedge H \models G$ (конъюнкция сильнее каждого из сомножителей). Обратно, покажем, что каждая формула F, из которой логически следует данная формула G, имеет указанный вид, т.е. представляет собой конъюнкцию формулы G и некоторых совершенных дизъюнктивных одночленов, отсутствующих в СКН-форме для G. В самом деле, пусть $F \models G$ и $G \cong D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_k$ – СКН-форма для формулы $G(X_1, ..., X_n)$ и $F \cong \Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge ... \wedge \Delta_s$ – СКН-форма для формулы $F(X_1, ..., X_n)$. По определению логического следования, $F \models G$ означает, что если формула $F(X_1, ..., X_n)$ на некотором наборе $A_1, ..., A_n$ значений пропозициональных переменных приняла значение 1, то и формула $G(X_1, ..., X_n)$ на этом наборе примет значение 1. Другими словами, если формула $G(X_1, ..., X_n)$ на некотором наборе $A_1, ..., A_n$ значений пропозициональных переменных принимает значение 0, то и формула $F(X_1, ..., X_n)$ на этом наборе принимает значение 0. Но все наборы значений переменных, на которых G принимает значение 0, находятся во взаимно однозначном соответствии с совершенными дизъюнктивными одночленами $D_1, D_2, ...D_k$, образующими СКН-форму для формулы G, т.е. если $G(A_1, ..., A_n) = 0$, то $D_i(A_1, ...A_n) = 0$, для некоторого $1 \leq i \leq k$. Следовательно, $F(A_1, ..., A_n) = 0$ и, значит, на этом же наборе принимает значение 0 некоторый совершенный дизъюнктивный одночлен Δ_i, входящий в ее СКН-форму. Но тогда этот одночлен совпадает с одночленом D_i. Таким образом, каждый совершенный дизъюнктивный одночлен D_i из СКН-формы для G входит в СКН-форму для формулы F, т.е. СКН-форма для F имеет вид: $F \cong D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_k \wedge \Delta_{k+1} \wedge ... \wedge \Delta_s$, где $\Delta_{k+1}, ..., \Delta_s$ – совершенные дизъюнктивные одночлены от переменных $X_1, ..., X_n$, не входящие в СКН-форму для формулы G.

Теорема полностью доказана. □

Разберите решение задачи № 2.39 л из Задачника.

Правила логических умозаключений. Традиционная логика, восходящая к Аристотелю, и с самого начала поставившая перед собой задачу отвечать на вопрос что из чего следует, выделила ряд форм правильных умозаключений. Эти, так называемые традиционные виды умозаключений, служили своего рода эталонами при определении правильности тех или иных дедуктивных умозаключений, поскольку традиционная логика ещё не располагала универсальными средствами для установления правильности или неправильности дедуктивных умозаключений. Такие методы были выработаны лишь математической логикой, и о них мы говорили выше. Традиционные виды умозаключений классифицируют и называют по типу суждений-посылок в них. Рассмотрим эти виды.

Модусы. Первые два модуса представляют собой условно-категорические умозаключения, т.е. такие умозаключения, в которых одна из посылок – условное суждение ($F \to G$), а другая посылка и заключение – простые категорические суждения (F, G, $\neg F$, $\neg G$).

1. Утверждающий модус (Modus Ponens) – от утверждения условия к утверждению заключения:

$$\frac{F, \quad F \to G}{G} \qquad (\textit{Modus Ponens}).$$

Это означает, что формула G является логическим следствием формул $F \to G$ и F, т.е. $F \to G, F \models G$. Проверка правильности этой схемы сводится к установлению того, что формула $(F \wedge (F \to G)) \to G$ является тавтологией логики высказываний.

Пример умозаключения по данной схеме:

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
В треугольниках ABC и $A'B'C'$: $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$.

ΔABC и $\Delta A'B'C'$ подобны.

2. Отрицающий модус (Modus Tollens) – от отрицания заключения к отрицанию условия:

$$\frac{F \to G, \quad \neg G}{\neg F} \qquad (\textit{Modus Tollens}).$$

Это означает, что формула $\neg F$ является логическим следствием формул $F \to G$ и $\neg G$, т.е. $F \to G, \neg G \models \neg F$. Проверка правильности этой схемы сводится к проверке того, что формула $((F \to G) \wedge \neg G) \to \neg F$ является тавтологией логики высказываний.

Пример умозаключения по данной схеме:

$$\frac{\textit{Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.} \quad \textit{Треугольники } \Delta ABC \textit{ и } \Delta A'B'C' \textit{ не подобны.}}{\textit{В треугольниках } ABC \textit{ и } A'B'C'\text{: } \angle A \neq \angle A', \ \angle B \neq \angle B'.}$$

Ещё два модуса представляют собой ***разделительно-категорические умозаключения***, т.е. такие умозаключения, в которых одна из посылок – разделительное суждение $F \dot{\vee} G$, а другая посылка и заключение – простые категорические суждения (F, G, $\neg F$, $\neg G$).

3. Утверждающе-отрицающий модус (Modus Ponendo Tollens) – от утверждения одного условия к отрицанию другого условия:

$$\frac{F \dot{\vee} G, \quad F}{\neg G} \quad \text{или} \quad \frac{F \dot{\vee} G, \quad G}{\neg F}.$$

В этом модусе дизъюнкция рассматривается в строгом (исключающем) смысле.

Пример умозаключения по этой схеме:

Приговор суда или обвинительный (F) или оправдательный (G).
Приговор суда по данному делу обвинительный (F).

Приговор суда по данному делу не оправдательный ($\neg G$).

Данная схема допускает следующие обобщения:

$$\frac{F \dot{\vee} G \dot{\vee} H, \quad F}{\neg G \wedge \neg H}, \qquad \frac{F \dot{\vee} G \dot{\vee} H, \quad G}{\neg F \wedge \neg H}, \qquad \frac{F \dot{\vee} G \dot{\vee} H, \quad H}{\neg F \wedge \neg G}.$$

Пример умозаключения по этой схеме:

Треугольник может быть либо остроугольным, либо прямоугольным, либо тупоугольным.
Треугольник ABC – прямоугольный.

Треугольник ABC не остроугольный и не тупоугольный.

Если рассматривать дизъюнкцию в нестрогом (неисключающем) смысле, то данная схема уже не будет правильной, так как формула алгебры высказываний $((F \vee G) \wedge F) \to \neg G$, соответствующая этой схеме, уже не будет тавтологией.

4. Отрицающее-утверждающий модус (modus tollendo ponens) – от отрицания одного условия к утверждению другого условия:

$$\frac{F \vee G, \quad \neg F}{G} \quad \text{или} \quad \frac{F \vee G, \quad \neg G}{F}.$$

В этом модусе большая посылка ($F \vee G$) должна быть полным (закрытым) дизъюнктивным суждением, т.е. в ней должны быть перечислены все возможные альтернативы. Если альтернатив больше, чем две то данная схема принимает один из следующих видов:

$$\frac{F \vee G \vee H, \quad \neg F}{G \vee H}, \qquad \frac{F \vee G \vee H, \quad \neg F, \quad \neg G}{H}.$$

В этом модусе дизъюнкция, вообще говоря, не обязана браться в строгом (исключающем) смысле. Но нередко, ввиду того, что в большой посылке ($F \vee G \vee H$) требуется перебор всех возможных альтернатив, условия F, G, H оказываются взаимоисключающими, т.е. дизъюнкция оказывается строгой. Такова ситуация, например, в следующем умозаключении:

Целое число может быть либо отрицательным, либо положительным, либо равным нулю.
Целое число z не отрицательно и не равно нулю.

Целое число z положительно.

Дилеммы. Дилеммы представляют собой условно-разделительные (лемматические) умозаключения. Это – такие умозаключения, в которых одна посылка является разделительным суждением, а несколько посылок (не меньше двух) – условными суждениями. Дилеммы бывают двух видов: конструктивные (созидательные) и деструктивные (разрушительные). Каждый из этих видов, в свою очередь, может быть простым и сложным.

5. Простая конструктивная дилемма представляет собой умозаключение по следующей схеме:

$$\frac{F_1 \to G, \quad F_2 \to G, \quad F_1 \vee F_2}{G}.$$

В первых двух посылках утверждается, что из двух различных оснований F_1 и F_2 вытекает одно и то же следствие G. В третьей посылке $F_1 \vee F_2$, являющейся дизъюнктивным суждением, утверждается, что одно или другое из этих оснований истинно. В заключении утверждается следствие G. Эта схема называется также *правилом рассуждения по случаям.*

Пример умозаключения по этой схеме:

Если четырёхугольник является ромбом (F_1), то
его диагонали перпендикулярны (G).
Если четырёхугольник является квадратом (F_2), то
его диагонали перпендикулярны (G).
Четырёхугольник $ABCD$ – ромб или квадрат.

Диагонали четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны.

6. Сложная конструктивная дилемма есть умозаключение по схеме:

$$\frac{F_1 \to G_1, \quad F_2 \to G_2, \quad F_1 \vee F_2}{G_1 \vee G_2}.$$

Она отличается от простой конструктивной дилеммы тем, что в первых двух посылках из двух различных оснований F_1 и F_2 вытекают различные следствия G_1 и G_2 соответственно.

Пример умозаключения по этой схеме:

Если четырёхугольник является параллелограммом (F_1), то его
диагонали точкой пересечения делятся пополам (G_1).
Если четырёхугольник является равнобочной трапецией (F_2), то
его диагонали равны (G_2).
Четырёхугольник $ABCD$ – либо параллелограмм, либо
равнобочная трапеция.

Диагонали четырёхугольника $ABCD$ точкой пересечения
делятся пополам.

7. Простая деструктивная дилемма есть умозаключение по схеме:

$$\frac{F \to G_1, \quad F \to G_2, \quad \neg G_1 \vee \neg G_2}{\neg F}.$$

В первых двух посылках утверждается, что из одного и того же основания F вытекают два различных следствия G_1 и G_2. Третья посылка есть дизъюнкция отрицаний обоих этих следствий. В заключении отрицается основание.

Пример умозаключения по данной схеме:

Если четырёхугольник является квадратом (F), то его
диагонали перпендикулярны (G_1).
Если четырёхугольник является квадратом (F), то
его диагонали равны (G_2).
Диагонали четырёхугольника $ABCD$ – либо не перпендикулярны, либо не равны.

Четырёхугольник $ABCD$ – не квадрат.

8. Сложная деструктивная дилемма есть умозаключение по схеме:

$$\frac{F_1 \rightarrow G_1, \quad F_2 \rightarrow G_2, \quad \neg G_1 \lor \neg G_2}{\neg F_1 \lor \neg F_2}.$$

Она отличается от простой деструктивной дилеммы тем, что в первых двух посылках из двух различных оснований F_1 и F_2 вытекают различные следствия G_1 и G_2 соответственно.

Пример умозаключения по этой схеме:

Если четырёхугольник является параллелограммом (F_1), то его диагонали точкой пересечения делятся пополам (G_1).
Если четырёхугольник является равнобочной трапецией (F_2), то его диагонали равны (G_2).
Диагонали четырёхугольника $ABCD$ либо не делятся пополам точкой пересечения, либо не равны.

Четырёхугольник $ABCD$ – либо не параллелограмм, либо не равнобочная трапеция.

9. Если в разделительной посылке условно-разделительного умозаключения имеется не два члена (как в случае дилеммы), а три, и соответственно имеется три условных суждения, то такое условно-разделительное умозаключение называется *трилеммой*. Так, простая конструктивная трилемма есть умозаключение, осуществляемое по схеме:

$$\frac{F_1 \rightarrow G, \quad F_2 \rightarrow G, \quad F_3 \rightarrow G, \quad F_1 \lor F_2 \lor F_3}{G}.$$

Аналогичным образом можно составить схемы остальных трёх видов трилемм.

Правила введения и удаления логических связок. **10.** Правило введения конъюнкции (сокращённо ВК) есть умозаключение по схеме:

$$\frac{F \; , \; G}{F \land G}.$$

Согласно этому правилу из двух суждений со структурой F и G можно выводить образованное из них конъюнктивное суждение $F \land G$.

Пример умозаключения по правилу ВК:

$$\frac{a < x \quad , \quad x < b}{a < x \;\land\; x < b \quad (\text{или сокращённо } a < x < b)}.$$

11. Правило удаления конъюнкции (сокращённо УК) есть умозаключение по схеме:

$$\frac{F \wedge G}{F} \quad \text{или} \quad \frac{F \wedge G}{G}$$

Правило УК устанавливает, что из конъюнкции суждений можно вывести суждение, являющееся членом этой конъюнкции.

Примеры умозаключений по правилу УК:

$$\frac{\textit{Число 15 делится на 5 и на 3}}{\textit{Число 15 делится на 5}}, \quad \frac{\textit{Число 15 делится на 5 и на 3}}{\textit{Число 15 делится на 3}}.$$

12. Правило введения дизъюнкции (сокращённо ВД):

$$\frac{F}{F \vee G} \quad \text{или} \quad \frac{G}{F \vee G}.$$

С помощью правила ВД устанавливается, что из суждения F (соответственно G) можно выводить дизъюнктивное суждение со структурой $F \vee G$.

Пример умозаключения по правилу ВД:

$$\frac{\textit{Этот четырёхугольник – ромб}}{\textit{Этот четырёхугольник – ромб или квадрат}}.$$

13. Правило введения эквивалентности (сокращённо ВЭ):

$$\frac{F \to G, \quad G \to F}{F \leftrightarrow G}.$$

Правило ВЭ разрешает из импликативного (условного) суждения со структурой $F \to G$ и обратного по отношению к нему суждения со структурой $G \to F$ выводить суждение эквивалентности $F \leftrightarrow G$.

Пример умозаключения по правилу ВЭ:

Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.
Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.

14. Правило удаления эквивалентности (сокращённо УЭ):

$$\frac{F \leftrightarrow G}{F \to G} \quad \text{или} \quad \frac{F \leftrightarrow G}{G \to F}$$

Правило УЭ устанавливает, что из суждения эквивалентности вида $F \leftrightarrow G$ можно выводить как импликативное (условное) суждение вида $F \rightarrow G$, так и обратное ему импликативное суждение вида $G \rightarrow F$.

Примеры умозаключений по правилу УЭ:

Ромб является квадратом тогда и только тогда, когда его диагонали равны.

Если ромб – квадрат, то его диагонали равны.

Ромб является квадратом тогда и только тогда, когда его диагонали равны.

Если диагонали ромба равны, то он является квадратом.

15. Правило введения двойного отрицания (сокращённо ВО):

$$\frac{F}{\neg\neg F}$$

Правило ВО устанавливает, из суждения вида F можно выводить это же дважды отрицаемое суждение.

Пример умозаключения по правилу ВО:

Число 8 – чётное.

Неверно, что число 8 – нечётное.

16. Правило удаления двойного отрицания (сокращённо УО):

$$\frac{\neg\neg F}{F}$$

Согласно правилу УО из дважды отрицаемого суждения вида F можно выводить само суждение вида F.

Пример умозаключения по правилу УО:

Неверно, что вертикальные углы не равны.

Вертикальные углы равны.

17. В заключение этого раздела отметим, что умозаключение по схеме пункта 1 (утверждающий модус) можно рассматривать как правило удаления импликации (УИ), а умозаключение по схеме пункта 4 (отрицающе-утверждающий модус) – как правило удаления дизъюнкции (УД).

Ещё раз напомним, что проверка правильности всех схем умозаключений, приведённых в пунктах 1-16 и имеющих характер логического следования $F_1, ..., F_m \models G$, основана на следующей логической теореме (см. Учебник, теорема 6.4): данное следование выполняется тогда и только тогда, когда формула $(F_1 \wedge ... \wedge F_m) \rightarrow G$ является тавтологией алгебры высказываний.

Эту проверку можно осуществить также и методом от противного. Проверим, например, справедливость простой, деструктивной дилеммы, схема которой приведена в пункте 7. Для этого нужно доказать справедливость следующего логического следования:

$$F \rightarrow G_1, \quad F \rightarrow G_2, \quad \neg G_1 \vee \neg G_2 \models \neg F \ .$$

Допустим противное, т.е. данная схема не справедлива. Это означает, что при некоторых значениях пропозициональных переменных, входящих в формулы F, G_1, G_2, формулы-посылки превратятся в истинные высказывания $F \rightarrow G_1 = 1$, $F \rightarrow G_2 = 1$, $\neg G_1 \vee \neg G_2 = 1$, а формула-следствие превратится в ложное высказывание $\neg F = 0$. Из последнего соотношения следует, что $F = 1$. Далее, из $F = 1$ и $F \rightarrow G_1 = 1$ следует $G_1 = 1$, и из $F = 1$ и $F \rightarrow G_2 = 1$ следует $G_2 = 1$. Наконец, из $G_1 = 1$ и $G_2 = 1$ следует $\neg G_1 \vee \neg G_2 = \neg 1 \vee \neg 1 = 0 \vee 0 = 0$, что противоречит тому, что $\neg G_1 \vee \neg G_2 = 1$. Значит, сделанное допущение неверно и логическое следование выполняется.

Наконец, отметим, что рассмотренные в п.п. 1-16 умозаключения носят прямой характер: они указывают на выводимость суждений конкретного вида из других суждений конкретного вида.

Непрямые (косвенные) правила вывода. Это такие правила, которые позволяют делать вывод о правомерности одних умозаключений, исходя из правомерности других умозаключений. Рассмотрим здесь два таких правила.

18. Правило введения импликации (ВИ):

$$\frac{\Gamma,\ F \ \models\ G}{\Gamma \ \models\ F \rightarrow G} \ .$$

Эта запись означает: если из совокупности суждений $\Gamma \cup \{F\}$, где Γ – некоторое множество суждений, выводится суждение G, то из совокупности Γ выводится импликативное (условное) суждение $F \rightarrow G$.

Правило ВИ часто используется в процессах доказательства, когда для получения заключения приходится прибегать к введению в качестве посылок некоторых дополнительных допущений, облегчающих процесс доказательства. Правило устанавливает, что если на основании множества посылок Γ и дополнительного допущения

F мы получим некоторое суждение G, то можем заключить о выводимости из этих посылок импликации $F \to G$.

19. Правило приведения к абсурду:

$$\frac{\Gamma,\ F\ \models\ G; \qquad \Gamma,\ F\ \models\ \neg G}{\Gamma\ \models\ \neg F}.$$

Это правило устанавливает, что если при некотором дополнительном допущении F в процессе вывода получается два противоречащих друг другу суждения G и $\neg G$, то данное допущение должно быть отвергнуто как ложное, а истинным должно быть признано его отрицание $\neg F$.

Дополнительные (производные) правила вывода. Здесь рассмотрим ещё несколько правил вывода. Все они могут быть выведены из основных правил, сформулированных выше. В сущности их можно признать излишними, так как можно обойтись без них. Тем не менее, их применение зачастую сокращает процесс вывода, а сам процесс делает более наглядным и интуитивно представимым. Так что эти правила играют, таким образом, вспомогательную роль.

20. Правило условного (гипотетического) силлогизма (или правило цепного заключения):

$$\frac{F\ \to\ G,\ \ G\ \to\ H}{F\ \to\ H}.$$

Пример умозаключения, построенного по этому правилу:

Если многоугольник – квадрат, то он ромб.
Если многоугольник – ромб, то он параллелограмм.

Если многоугольник – квадрат, то он – параллелограмм.

21. Правило контрапозиции:

$$\frac{F\ \to\ G}{\neg G\ \to\ \neg F} \qquad \text{или} \qquad \frac{\neg G\ \to\ \neg F}{F\ \to\ G}$$

Пример умозаключения, построенного по этому правилу:

Если радиус окружности проведён в точку касания окружности и прямой, то он перпендикулярен этой прямой.

Если радиус окружности не перпендикулярен прямой, касающейся окружности, то он проведён не в точку касания.

22. Правило расширенной (или сложной) контрапозиции:

$$\frac{(F \wedge G) \to H}{(F \wedge \neg H) \to \neg G}, \qquad \frac{(F \wedge \neg H) \to \neg G}{(F \wedge G) \to H}.$$

Пример умозаключения, построенного по этому правилу:

Если прямая l перпендикулярна двум прямым a и b, лежащим в плоскости π (утверждение F) и прямые a и b не параллельны (утверждение G), то прямая l перпендикулярна всякой прямой c, лежащей в плоскости π (утверждение H).

Если прямая l перпендикулярна двум прямым a и b, лежащим в плоскости π (утверждение F) и прямая l не перпендикулярна некоторой прямой c, лежащей в этой плоскости (утверждение $\neg H$), то прямые a и b параллельны (утверждение $\neg G$).

23. Правило объединения посылок (или правило импортации):

$$\frac{F \to (G \to H)}{(F \wedge G) \to H}.$$

Пример умозаключения, построенного по этому правилу:

Если две окружности равны, то, если хорда одной окружности больше хорды другой окружности, то первая хорда расположена ближе к центру своей окружности, чем вторая к центру своей окружности.

Если две окружности равны и хорда одной окружности больше хорды другой окружности, то первая хорда расположена ближе к центру своей окружности, чем вторая к центру своей окружности.

24. Правило разъединения посылок (или правило экспортации):

$$\frac{(F \wedge G) \to H}{F \to (G \to H)}$$

Для иллюстрации применения этого правила можно воспользоваться предыдущим примером, поменяв местами посылку и заключение.

25. Правило перестановки посылок:

$$\frac{F \to (G \to H)}{G \to (F \to H)}$$

26. Правила отрицания конъюнкции (ОК) и отрицания дизъюнкции (ОД) (правила де Моргана):

$$\frac{\neg(F \wedge G)}{\neg F \vee \neg G} \quad \text{и} \quad \frac{\neg(F \vee G)}{\neg F \wedge \neg G}$$

Отметим, что каждое из правил 20 – 26 также может быть обосновано с помощью методов алгебры высказываний: либо методом от противного, либо с помощью сведения правила к соответствующей формуле алгебры высказываний и доказательства её тождественной истинности.

Решите задачи 2.9 и 2.10 из Тетради МЛ, посвящённые правилам логических умозаключений.

§7. Приложение алгебры высказываний к логико-математической практике

Прямая и обратная теоремы. Многие математические теоремы имеют структуру, выражаемую формулой $X \to Y$. Утверждение X называется *условием теоремы*, а утверждение Y – её *заключением*. Например: "*Если в четырёхугольнике все стороны равны между собой* (A_1)*, то его диагонали перпендикулярны* (B_1)". Символическая запись этой теоремы: $A_1 \to B_1$. Второй пример: "*Если один из углов треугольника прямой* (A_2)*, то квадрат длины одной стороны этого треугольника равен сумме квадратов длин двух других его сторон* (B_2)". Символически: $A_2 \to B_2$. Тщательный анализ второй теоремы позволяет выявить в ней более сложную структуру. Именно, условие A_2 представляет собой дизъюнкцию трёх утверждений: $A'_2 \vee A''_2 \vee A'''_2$, где высказывание A'_2 есть "$\alpha = 90°$", высказывание A''_2 есть "$\beta = 90°$" и высказывание A'''_2 – "$\gamma = 90°$" (символами α, β, γ обозначены величины углов треугольника). Аналогично, заключение B_2 также представляет собой дизъюнкцию трёх утверждений: $B'_2 \vee B''_2 \vee B'''_2$, где B'_2 есть высказывание $a^2 = b^2 + c^2$", B''_2 есть высказывание $b^2 = a^2 + c^2$" и B'''_2 есть высказывание $c^2 = a^2 + b^2$" (символами a, b, c обозначены длины сторон треугольника, лежащие против углов величины α, β, γ соответственно). Таким образом, теорема $A_2 \to B_2$ при более пристальном рассмотрении имеет вид $(A'_2 \vee A''_2 \vee A'''_2) \to (B'_2 \vee B''_2 \vee B'''_2)$.

Итак, если некоторая теорема имеет форму $X \to Y$, то утверждение $Y \to X$ называется *обратным* для данной теоремы. Это утверждение может быть справедливым, и тогда оно называется *теоремой обратной для теоремы* $X \to Y$, которая, в свою очередь, называется *прямой теоремой.* Если же утверждение $Y \to X$ не выполняется, то говорят, что обратная теорема для теоремы $X \to Y$ неверна. Так, для теорем $A_1 \to B_1$ и $A_1 \to B_1'$ обратные теоремы неверны, а для теоремы $A_1 \to B_1''$ справедлива обратная теорема $B_1'' \to A_1$ (проверьте!). Таким образом, при доказательстве теоремы нужно чётко выделять, каково её условие и что доказывается. Доказательство прямой теоремы не даёт оснований для вывода о том, что и обратная теорема также верна. Обратная теорема требует специальной проверки. Это обусловлено тем, что формулы $X \to Y$ и $Y \to X$, выражающие структуры прямой и обратной теорем, не равносильны, в чём мы убедились на приведённых примерах. Их неравносильность можно усмотреть также из таблиц истинности данных формул.

Структура теоремы $A_1 \to B_1$ достаточно проста. Рассмотрим теорему более сложной структуры: "*В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны*". Чтобы чётко выделить условие данной теоремы и заключение, сформулируем её следующим образом: "*Если два треугольника равны* (A)*, то из равенства двух углов этих треугольников* (B) *следует равенство их противолежащих сторон* (C)". Символически теорема записывается так: $A \to (B \to C)$, т.е. она имеет строение, описываемое формулой $P \to (Q \to R)$. На основании равносильности, получающейся из тавтологии теоремы 3.1,м (правило перестановки посылок), данная формула равносильна формуле $Q \to (P \to R)$, а на основании равносильности теоремы 4.4,г (см. также тавтологию теоремы 3.1,н – правило объединения и разъединения посылок) она равносильна формуле $(P \wedge Q) \to R$. Следовательно, теорема $A \to (B \to C)$ может быть сформулирована в виде $B \to (A \to C)$: "*Если два угла двух треугольников равны* (B)*, то из равенства этих треугольников* (A) *следует равенство их сторон, противолежащих этим углам* (C)". Наконец третий вид данной теоремы $(A \wedge B) \to C$ – "*Если треугольники равны* (A) *и в них два угла равны* (B)*, то и противолежащие стороны равны* (C)". Таким образом, условие этой теоремы состоит из двух утверждений A и B или представляет собой их конъюнкцию $A \wedge B$, а заключением является утверждение C.

Если теперь зададимся целью сформулировать теорему, обратную рассмотренной теореме $A \to (B \to C)$, то столкнёмся с некоторыми трудностями, преодолеть которые помогает алгебра высказываний. Обратная теорема – такая, в которой условие и заключение прямой теоремы поменялись местами. В рассматриваемой прямой теореме два условия и одно заключение. Это приводит к тому, что получается не одна обратная теорема, а несколько. Так, обращение первых трёх форм данной теоремы приводит к следующим обратным утверждениям:

1) $(B \to C) \to A$: *"Если из равенства двух углов треугольников следует равенство их противолежащих сторон, то такие треугольники равны"*;

2) $(A \to C) \to B$: *"Если отрезки обладают тем свойством, что, будучи сторонами в равных треугольниках, они лежат против равных углов, то эти отрезки равны"*;

3) $C \to (A \wedge B)$: *"Если сторона одного треугольника равна стороне другого треугольника, то треугольники равны и углы, противолежащие этим сторонам, равны"*.

Наконец, можем сформулировать ещё два обратных утверждения, получающихся из суждений $A \to (B \to C)$ и $B \to (A \to C)$ перестановкой двух последних высказываний. Иначе говоря, эти обратные утверждения получаются перестановкой местами одного из двух условий прямой теоремы и её заключения:

4) $A \to (C \to B)$: *"Если треугольники равны, то из равенства двух их сторон следует равенство противолежащих углов"*;

5) $B \to (C \to A)$: *"Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то из равенства противолежащих этим углам сторон вытекает равенство самих треугольников"*.

Предлагается самостоятельно убедиться в том, что лишь второе и четвёртое из обратных утверждений справедливы, т.е. действительно являются теоремами, а остальные утверждения неверны.

Необходимые и достаточные условия. С понятиями прямой и обратной теорем тесно связан вопрос о необходимых и достаточных условиях. Если некоторая математическая теорема имеет структуру, выражаемую формулой $X \to Y$, то высказывание Y называется *необходимым условием* для высказывания X (другими словами, если X истинно, то Y с необходимостью должно быть также истинно), а высказывание X называется *достаточным условием* для высказывания Y (другими словами, для того чтобы Y было истинным, достаточно, чтобы истинным было высказывание X). Посмотрим с этой точки зрения на первую теорему $A_1 \to B_1$. Необходимым условием равенства в четырёхугольнике всех сторон является перпендикулярность его диагоналей. Иначе, достаточным условием для перпендикулярности диагоналей четырёхугольника является равенство всех его четырёх сторон.

Одно и то же утверждение может иметь несколько необходимых условий. Так, необходимыми условиями равенства всех сторон четырёхугольника являются, кроме указанного, деление его диагоналей в точке пересечения пополам (B_1'), деление диагоналями соответствующих углов пополам (B_1'') и т. д. Аналогично, одно и то же утверждение может иметь несколько достаточных условий. Так, для перпендикулярности диагоналей четырёхугольника достаточно также, чтобы в нём было две пары равных смежных сторон.

После того, как доказана теорема $X \to Y$, возникает вопрос, будет ли найденное необходимое условие достаточным или достаточное – необходимым. Иначе говоря, будет ли верно утверждение $Y \to X$, называемое обратным по отношению к теореме $X \to Y$? Известно, что условие перпендикулярности диагоналей четырёхугольника (B_1), необходимое для равенства всех его сторон (A_1), не будет достаточным для такого равенства. Для проверки нужно привести пример четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями, у которого не все стороны равны (сделайте это!).

Если справедливы утверждения $X \to Y$ и $Y \to X$, т.е. справедливо $X \leftrightarrow Y$, то говорят, что X – необходимое и достаточное условие для Y, и наоборот, что Y – необходимое и достаточное условие для X, или же что Y является *критерием* (для) X. Математическая наука изобилует утверждениями вида $X \leftrightarrow Y$, представляющими собой необходимые и достаточные условия, и их приходится отыскивать в самых разных её областях. Происходит это приблизительно следующим образом. Предположим, требуется найти необходимое и достаточное условие для некоторого утверждения X. Начинают с отыскания ряда необходимых условий для X, т.е. утверждений $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$, следующих из X : $X \to Y_1, X \to Y_2, X \to Y_3, \dots$. При этом каждый раз пытаются анализировать, не окажется ли то или иное найденное условие или какая-либо их совокупность (конъюнкция) достаточным условием для X, т.е окажется ли истинной какая-либо из импликаций: $Y_1 \to X$, $Y_2 \to X$, $Y_3 \to X$, $(Y_1 \wedge Y_2) \to X$, $(Y_1 \wedge Y_3) \to X$, $(Y_2 \wedge Y_3) \to X$, $(Y_1 \wedge Y_2 \wedge Y_3) \to X$, ...

Так, в примере с четырёхугольником имеем два необходимых условия B_1 и B_1' для свойства A, т.е. верны две теоремы $A_1 \to B_1$, $A_1 \to B_1'$. Затем, если ни одно из необходимых условий в отдельности не является достаточным (именно такая ситуация в данном примере), то пытаются проверять на достаточность всевозможные конъюнкции этих условий. Так, в указанном примере справедливо следующее утверждение: $(B_1 \wedge B_1') \to A$. (Убедитесь в этом самостоятельно.) Поэтому конъюнкция $B_1 \wedge B_1'$ является достаточным условием для свойства A.

Рассмотрим ещё один пример.

Пример 7.1. Пусть требуется найти необходимое и достаточное условие того, что выпуклый четырёхугольник является квадратом (A). Находим ряд необходимых условий для этого утверждения:

B_1: "*Диагонали четырёхугольника перпендикулярны*" ;
B_2: "*Диагонали четырёхугольника равны*" ;
B_3: "*Диагонали четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам*".

Ясно, что каждое из утверждений $A \to B_1$, $A \to B_2$, $A \to B_3$ верно. Анализируем обратные утверждения. Очевидно, не верны следующие из них:

Утверждение	**Контрпример**
$B_1 \to A$	Ромб, не являющийся квадратом
$B_2 \to A$	Прямоугольник, не являющийся квадратом
$B_3 \to A$	Параллелограмм

Не верны также и следующие утверждения:

Утверждение	**Контрпример**
$(B_1 \wedge B_2) \to A$	Укажите самостоятельно
$(B_1 \wedge B_3) \to A$	Ромб, не являющийся квадратом
$(B_2 \wedge B_3) \to A$	Прямоугольник, не являющийся квадратом

И только соединение (конъюнкция) всех трёх необходимых для A условий B_1, B_2, B_3 даёт условие, достаточное для A. Это – $B_1 \wedge B_2 \wedge B_3$: Диагонали четырёхугольника перпендикулярны, равны и делятся пополам точкой их пересечения. Таким образом, истинно утверждение $(B_1 \wedge B_2 \wedge B_3) \to A$. Кроме того, из истинности утверждений $A \to B_1, A \to B_2, A \to B_3$ вытекает истинность утверждения $A \to (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3)$. Итак, необходимым и достаточным условием для A является условие $B_1 \wedge B_2 \wedge B_3$.

Решите задачи №№ 2.1 – 2.3 из Тетради МЛ.

Противоположная и обратная противоположной теоремы. Закон контрапозиции. Для теоремы, сформулированной в виде импликации $X \to Y$, кроме обратного утверждения $Y \to X$

можно сформулировать *противоположное утверждение*. Им называется утверждение вида $\neg X \to \neg Y$. Утверждение, противоположное данной теореме, может быть также теоремой т.е. быть истинным высказыванием, но может таковым и не быть. Это следует из того, что формулы $X \to Y$ и $\neg X \to \neg Y$ не равносильны, в чём нетрудно убедиться, составив таблицы истинности данных формул (составьте их). В этом можно убедиться и на примерах. Возьмём теорему $A_1 \to B_1$ из предыдущего пункта: "*Если в четырёхугольнике все стороны равны, то его диагонали перпендикулярны*". Составляем противоположное утверждение $\neg A_1 \to \neg B_1$: "*Если в четырёхугольнике все стороны не равны, то его диагонали не перпендикулярны*". Последнее утверждение неверно, т.е. теоремой не является. Рассмотрим ещё одну теорему: "*Если сумма цифр натурального числа делится на три, то и само число делится на три*". Противоположное утверждение для этой теоремы также справедливо, т.е. является теоремой, противоположной данной: "*Если сумма цифр натурального числа не делится на три, то и само число не делится на три*". Итак, в том случае, когда утверждение $X \to Y$ истинно, утверждение $\neg X \to \neg Y$ может быть как истинным, так и ложным. Это означает, что утверждение, противоположное доказанной теореме, в свою очередь нуждается в доказательстве или опровержении.

При составлении противоположных утверждений к теоремам, условия и заключения которых представляют собой конъюнкции или дизъюнкции нескольких высказываний, нужно пользоваться законами де Моргана (см. теорему 4.4,р,с). Вспомним, например, теорему $A_2 \to B_2$ из первого пункта, более подробная запись которой имела вид

$$(A_2' \lor A_2'' \lor A_2''') \to (B_2' \lor B_2'' \lor B_2''') :$$

$$(\alpha = 90^\circ \lor \beta = 90^\circ \lor \gamma = 90^\circ) \to$$
$$\to ((a^2 = b^2 + c^2) \lor (b^2 = a^2 + c^2) \lor (c^2 = a^2 + b^2)) .$$

Противоположное утверждение для данной теоремы формулируется следующим образом:

$$(\alpha \neq 90^\circ \land \beta \neq 90^\circ \land \gamma \neq 90^\circ) \to$$
$$\to ((a^2 \neq b^2 + c^2) \land (b^2 \neq a^2 + c^2) \land (c^2 \neq a^2 + b^2)) .$$

Предлагается выяснить, справедливо ли это утверждение, т.е. является ли оно теоремой.

Остаётся рассмотреть ещё один вид теорем, связываемых с прямыми теоремами вида $X \to Y$, и установить взаимоотношения между этими видами. Имеется в виду теорема, обратная противоположной: $\neg Y \to \neg X$. Мы не случайно назвали теоремой утверждение, обратное противоположному. Оно действительно будет истинным тогда и только тогда, когда истинно исходное утверждение, что вытекает из равносильности $X \to Y \cong \neg Y \to \neg X$ (см. теорему 4.4,б), называемой законом контрапозиции. Таким образом на основании закона контрапозиции предложение, обратно противоположное какой-либо теореме, само является теоремой, и вместо доказательства данной теоремы можно доказывать обратно противоположную ей теорему.

Модификация структуры математической теоремы. Приведём ряд равносильностей, которые помогают модифицировать структуру математической теоремы, не нарушая при этом её логики. Проверьте равносильными преобразованиями их справедливость.

1) $X \to (Y \wedge Z) \cong (X \to Y) \wedge (X \to Z)$.

Эта равносильность позволяет теорему, имеющую два следствия (заключения Y и Z), расчленить на две теоремы $X \to Y$ и $X \to Z$. Число следствий может быть любым конечным. В частности,

$$X \to (Y \wedge Z \wedge V) \cong (X \to Y) \wedge (X \to Z) \wedge (X \to V).$$

2) $(X \vee Y) \to Z \cong (X \to Z) \wedge (Y \to Z)$.

Эта равносильность также, как и предыдущая, позволяет теорему, в которой условие представляет собой дизъюнкцию двух условий, расчленить на две теоремы $X \to Z$ и $Y \to Z$. Она также допускает обобщения типа:

$$(X \vee Y \vee Z) \to V \cong (X \to V) \wedge (Y \to V) \wedge (Z \to V).$$

На практике данная равносильность скорее применяется в обратном направлении – для объединения ряда теорем с общим заключением в одну. Например, рассмотрим следующие три теоремы. $A \to D$ ($B \to D$, $C \to D$): *Если две биссектрисы (высоты, медианы) треугольника равны, то треугольник – равнобедренный.* На основании рассматриваемой равносильности их можно объединить в одну $(A \vee B \vee C) \to D$: *Если в треугольнике две биссектрисы, или две высоты, или две медианы равны, то треугольник – равнобедренный.*

3) $(X \wedge Y) \to Z \cong (X \wedge \neg Z) \to \neg Y$.

Эта равносильность представляет собой обобщение понятия теоремы, обратной противоположной (в последнем случае равносильность имеет вид: $Y \to Z \cong \neg Z \to \neg Y$).

Рассмотрим, например, следующую геометрическую теорему. *Если прямая l перпендикулярна двум прямым a и b, лежащим в плоскости π* (утверждение A), *и прямые a и b не параллельны $a \nparallel b$* (утверждение B), *то прямая l перпендикулярна всякой прямой c, лежащей в плоскости π* (утверждение C). На основании рассматриваемой равносильности, будет справедлива следующая теорема. *Если прямая l перпендикулярна двум прямым a и b, лежащим в плоскости π* (утверждение A) *и не перпендикулярна некоторой прямой c, лежащей в этой плоскости* (утверждение $\neg C$), *то прямые a и b параллельны $a \parallel b$* (утверждение $\neg B$).

Ясно, что на основании той же равносильности будет справедлива и такая теорема $(B \wedge \neg C) \to \neg A$: *Если две прямые a и b, лежащие в плоскости π, не параллельны $a \nparallel b$* (утверждение B) *и прямая l не перпендикулярна хотя бы одной прямой c, лежащей в плоскости π* (утверждение $\neg C$), *то l не перпендикулярна одной из прямых a или b* (утверждение $\neg A$).

4) $(X \wedge Y) \to Z \cong (X \to Z) \vee (Y \to Z)$.

Данная равносильность служит ярким примером того, что к трактовке логических равносильностей в рассмотренном выше духе следует всё же относиться с осторожностью. Рассмотрим в связи с данной равносильностью, например, следующие утверждения.

A: *Четырёхугольник – прямоугольник.*
B: *Четырёхугольник – ромб.*
C: *Четырёхугольник – квадрат.*

Тогда утверждение в левой части равносильности примет вид $(A \wedge B) \to C$: *Если четырёхугольник является прямоугольником и ромбом, то он является квадратом.* Оно, несомненно, истинно. В то же время утверждение в правой части принимает вид $(A \to C) \vee (B \to C)$: *Если четырёхугольник является прямоугольником, то он является квадратом, или же он является квадратом, если он является ромбом.* Это утверждение конечно же ложно. При этом, равносильность 4) справедлива, что можно проверить простыми равносильными преобразованиями.

Последняя равносильность доставляет нам ещё одно свидетельство того, что математическая логика отражает процесс человеческого мышления с определённой степенью приближённости.

Методы доказательства математических теорем. *Метод доказательства от противного* – несомненно, один из самых распространённых в математике методов доказательства теорем, берущий своё начало от знаменитого геометрического трактата Евклида

"Начала". Суть его состоит в следующем. Для того, чтобы доказать утверждение (теорему) $X \to Y$: *"Если X, то Y"*, предполагается, что верно утверждение X. Отсюда нужно логическими рассуждениями прийти к утверждению Y. Вместо этого делается предположение, противное (т.е. противоположное) тому, которое требуется доказать, именно, предполагается $\neg Y$. Далее, рассуждая на основании этого предположения, мы приходим к нелепому выводу $\neg X$. "Нелепость" (абсурдность) его состоит в том, что он противоречит исходному данному утверждению X. Получение такого вывода заставляет нас отвергнуть сделанное предположение $\neg Y$ и принять то, которое требовалось доказать – Y.

Что же происходит в этих рассуждениях с точки зрения (математической) логики? А происходит то, что доказательство данной теоремы $X \to Y$ фактически заменяется (подменяется) доказательством теоремы $\neg Y \to \neg X$, противоположной обратной (или обратной противоположной) для данной теоремы. Почему это возможно сделать? Потому что в этом состоит логический закон контрапозиции $X \to Y \cong \neg Y \to \neg X$, устанавливающий равносильность этих утверждений. Таким образом, описанный метод доказательства от противного основывается на логическом законе контрапозиции.

Метод доказательства от противного применяется также и в других формах. Например, вместо импликации $X \to Y$ доказывают равносильную ей импликацию $(X \wedge \neg Y) \to \neg X$, т.е. предполагая, что истинны утверждения X и $\neg Y$, выводят истинность утверждения $\neg X$ в противоречие с предположением. На основании равносильности $X \to Y \cong (X \wedge \neg Y) \to \neg X$ делается вывод об истинности импликации $X \to Y$. Вторая равносильность $X \to Y \cong (X \wedge \neg Y) \to Y$ даёт возможность заменить доказательство импликации $X \to Y$ доказательством импликации $(X \wedge \neg Y) \to Y$, т.е. предположив, что истинны утверждения X и $\neg Y$, вывести отсюда истинность утверждения Y в противоречие с предположением. Наконец ещё одна форма этого метода, являющаяся также одной из форм метода приведения к абсурду (о котором мы говорили в первом пункте §3), основана на равносильности $X \to Y \cong (X \wedge \neg Y) \to (Z \wedge \neg Z)$. Предполагая, что истинны утверждения X и $\neg Y$, выводим из них некоторое утверждение и его отрицание.

Метод приведения к абсурду (нелепости, противоречию) (по латыни *reductio ad absurdum*) имеет две модификации, которые являются существенно различными как по форме, так и по существу, т.е. по своей логической (дедуктивной) силе. Это – метод приведения *противоположного* утверждения к абсурду и метод приведения *данного* утверждения к абсурду.

Метод приведения противоположного утверждения к абсурду состоит в следующем. Пусть требуется доказать утверждение X. Рассматривается (допускается) противоположное ему утверждение (т.е утверждение, являющееся его отрицанием) $\neg X$ и из него выводятся два противоречащих друг другу утверждения (т.е некоторое утверждение и его отрицание) Y и $\neg Y$: $\neg X \to Y$ и $\neg X \to \neg Y$. Из этого делается вывод о том, что справедливо исходное утверждение X. Оправданием этому методу может служить следующая тавтология: $(\neg X \to \neg Y) \to ((\neg X \to Y) \to X)$.

Метод приведения данного утверждения к абсурду состоит в следующем. Пусть требуется опровергнуть утверждение X, т.е. доказать отрицательное утверждение $\neg X$. В этом случае два противоречащих друг другу утверждения Y и $\neg Y$ выводятся не из отрицания $\neg X$, а из самого данного утверждения X: $X \to Y$ и $X \to \neg Y$. Из этого делается вывод о том, что справедливо утверждение $\neg X$, т.е. данное утверждение X опровергнуто. Оправданием этому методу служит следующая формула, также являющаяся тавтологией: $(X \to \neg Y) \to ((X \to Y) \to \neg X)$.

Доказательство *методом приведения к абсурду* может основываться также на следующей тавтологии (см. теорему 3.1,п): $\models (\neg X \to (Y \wedge \neg Y)) \to X$. Метод доказательства, основанный на данной тавтологии, состоит в следующем. Допустим, нужно доказать некоторое утверждение X. Предполагаем, что справедливо его отрицание $\neg X$ и выводим отсюда некоторое утверждение Y и его отрицание $\neg Y$. В результате заключаем, что справедливо утверждение X.

Нередко в математических доказательствах используется *правило цепного заключения*, или *правило силлогизма* (см. теорему 3.1,п). Пусть нужно доказать утверждение $P \to R$. Находим такое утверждение Q, для которого можем доказать истинность утверждений $P \to Q$ и $Q \to R$. Тогда на основании правила силлогизма заключаем, что справедливо и утверждение $P \to R$. Например, из двух теорем: "*Если треугольник равносторонний, то все его углы равны*" и "*Если в треугольнике все углы равны, то величина каждого его угла равна* 60°" – по правилу силлогизма получаем теорему: "*Если треугольник равносторонний, то величина каждого его угла равна* 60°".

Существуют и другие методы математических доказательств, состоятельность которых подтверждается математической логикой.

Доказанная ниже теорема 7.18 предоставляет ещё один метод получения математических теорем.

Дедуктивные и индуктивные умозаключения. На этом этапе весьма целесообразно рассмотреть вопрос о том, что представляют собой рассуждения, умозаключения, каковы их структура, виды и критерии правильности, какие умозаключения изучает логика и в частности, математическая логика.

Умозаключение есть логическая (мыслительная) операция (процедура), состоящая в получении нового суждения (высказывания, утверждения) из одного или нескольких ранее известных суждений. Ранее известные суждения, входящие в состав умозаключения, называются его *посылками*, а новое суждение называется его *следствием* (или *заключением*). С содержательной точки зрения умозаключение есть переход от уже имеющегося (наличного) знания к новому знанию. С формальной точки зрения умозаключение есть переход от посылок к следствию. В логике умозаключение принято представлять в виде фигуры, в которой посылки записаны одна под другой и отделены горизонтальной чертой, под которой записано следствие. *Рассуждение* есть последовательность умозаключений, причём, посылками последующих умозаключения служат следствия предыдущих умозаключений данной последовательности.

Умозаключения делятся на дедуктивные и индуктивные. Расхожим является мнение о том, что дедуктивные умозаключения – это "умозаключения от общего к частному", а индуктивные – "от частного к общему". Эти "определения" лишь в самых общих чертах характеризуют, в частности, дедуктивные умозаключения. Это одно приведённое свойство ещё не является для них определяющим. *Дедуктивное умозаключение*, прежде всего, основано на анализе формальной (логической) структуры посылок и следствия, *индуктивное умозаключение* основано на анализе их содержания. Таким образом, дедуктивное умозаключение основано на логике, а индуктивное – на интуиции.

Рассмотрим и проанализируем следующие примеры.

Пример 7.2.

Если четырёхугольник является квадратом, то его диагонали равны.

Четырёхугольник ABCD – квадрат.

Диагонали четырёхугольника ABCD равны.

Пример 7.3.

Если число делится на 6, то оно чётное.
Число 18 делится на 6.

Число 18 чётное.

Пример 7.4.
Дуб – лиственное дерево.
Берёза – лиственное дерево.
Липа – лиственное дерево.

Все деревья – лиственные.

Пример 7.5.
Обь замерзает зимой.
Енисей замерзает зимой.
Лена замерзает зимой.

Все сибирские реки замерзают зимой.

В примерах 7.2 и 7.3 мы делаем соответствующие выводы, исходя из анализа формальной структуры посылок и следствия, фактически не обращая внимания на их содержание. Более того, с точки зрения логики, эти умозаключения представляются нам одинаковыми, не смотря на то, что они не имеют друг с другом ничего общего по содержанию. Это – типичные примеры дедуктивных умозаключений. В то же время, переходя от посылок к следствиям в умозаключениях примеров 7.4 и 7.5, мы не можем отвлечься от их содержания. И хотя эти умозаключения также имеют одинаковую структуру, анализ их содержания приводит нас к построению неверного умозаключения. Дело в том, что все посылки каждого из этих умозаключений истины, но вывод истинен только в примере 7.5, а в примере 7.4 он ложен. Таким образом, умозаключения примеров 7.4 и 7.5 не носят дедуктивный характер, они не основаны на анализе формальной структуры умозаключения, на строгих законах формальной логики. Это – индуктивные умозаключения. Их изучение не входит в задачу формальной логики.

Ещё более ярким примером индуктивного умозаключения, в котором связь между посылками и следствием является связью не по логической форме, а по содержанию, является следующее умозаключение.

Пример 7.6.
Спичка зажжена.
Зажжённая спичка поднесена к бумаге.

Бумага воспламеняется.
В нём связь между посылками и следствием носит и вовсе некий физический, причинно-следственный, характер.

Важнейшим методологическим вопросом, связанным с дедуктивными умозаключениями, является вопрос об определении правильности (верности) умозаключения. Распространенная ошибка здесь состоит в том, что правильность умозаключения отождествляется с истинностью получаемого на основании этого умозаключения вывода: умозаключение считается правильным, если "в результате мы приходим к истине". Это не так. ***Правильность*** дедуктивного умозаключения означает, что оно приводит к истинному выводу не всегда, но *всякий* раз, когда оно исходит из *всех* истинных посылок. Другими словами, умозаключение считается правильным, если мы, имея посылки и следствия данной структуры (как определено в умозаключении), при условии истинности всех посылок непременно будем получать истинность следствия. Таким образом, чтобы доказать неправильность умозаключения, нужно указать такую его конкретизацию (пример), в которой все посылки были бы истинными, а следствие было бы ложным. Такой пример называется ***опровергающим*** (или ***контрпримером***).

Итак, в правильном дедуктивном умозаключении следствие должно быть истинным при условии истинности всех посылок. Отсюда не следует делать вывод, что если среди посылок имеются ложные, то следствие должно быть ложным, хотя и такая ситуация возможна. Следующий пример показывает, что даже при всех ложных посылках правильное умозаключение может дать истинное следствие.

Пример 7.7.
Если треугольник равносторонний, то он прямоугольный.
Если треугольник прямоугольный, то в нём все внутренние углы равны.

Если треугольник равносторонний, то в нём все внутренние углы равны.

Данное умозаключение правильное, так как основано на схеме: $X \to Y,\ Y \to Z \models X \to Z$ (правило цепного заключения – правило 20 из §6).

В случае, когда среди посылок умозаключения имеются ложные, говорят о наличии в умозаключении ***фактической ошибки***; если же неправильным является само дедуктивное умозаключение, то говорят о ***логической ошибке***.

В заключение обратим внимание на то, что в отличие от высказываний (суждений), которые делятся на истинные и ложные, умозаключения делятся на *правильные* и *неправильные*. Это терминологическое различие не является случайным. Дело в том, что каждое высказывание утверждает наличие или отсутствие у предметов или явлений тех или иных свойств или отношений между ними. Поэтому каждое высказывание имеет в качестве своего "прообраза" некоторые связи и отношения между предметами и явлениями реального мира и допускает, хотя бы в принципе, проверку на истинность (мы рассматривали такие задачи в начале курса – см. Тетрадь МЛ, № 1.1, Задачник, №№ 1.1, 1.2). Именно это обстоятельство подчеркивают, говоря, что данное высказывание является истинным или ложным. В то же время в реальном мире не происходит никаких реальных процессов и явлений, которые можно было бы считать "прообразами" логической операции перехода от одних высказываний к другим. Эта логическая операция является чисто умственной, она происходит лишь в нашем сознании и даже в принципе не допускает "проверки на истинность". Выделение правильных умозаключений является одним из видов познавательной деятельности, который связан с другими видами познания и основан в конечном итоге на громадном практическом опыте человечества.

Правильные и неправильные дедуктивные умозаключения. В §6 разработана теория, позволяющая давать ответ на вопрос – является или нет та или иная формула логическим следствием данной совокупности формул, а также находить все логические следствия из данных формул. Применим её к рассуждениям, представляющим собой последовательности высказываний (суждений), для того, чтобы определить правильно рассуждение или нет, т.е. правильное или неправильное умозаключение сделано с помощью данного рассуждения из данных посылок.

Пример 7.8. Рассмотрим следующее рассуждение:

"*Если четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм, то его противоположные углы равны. Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм.* Следовательно, *его противоположные углы равны*".

Чтобы ответить на вопрос, верно ли это рассуждение, нужно выяснить, будет ли формула алгебры высказываний, отражающая структуру заключения данного рассуждения, логическим следствием формул алгебры высказываний, отражающих структуры его посылок. Структура посылок выражается формулами $X \to Y$, , а структура заключения – формулой Y. (Легко убедиться в этом, если вместо пропозициональной переменной X подставить в формулы высказывание "*Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм*", а вместо Y – высказывание: "*Противоположные углы четырёхугольника $ABCD$ равны*".) Известно (см. правило 1 из §6 - Modus Ponens), что формула Y является логическим следствием формул $X \to Y$, X. Поэтому проведённое рассуждение является правильным, и сделанное заключение действительно следует из посылок.

Рассуждения такой формы нередки в математике. Приведём ещё одно подобное рассуждение. "*Если 10 делится на 3, то 100 делится на 3. 10 делится на 3.* Следовательно, *100 делится на 3*". Проведённое рассуждение правильно, но его заключение ложно. Это обстоятельство не должно нас смущать: ведь правильное рассуждение приводит к истинному утверждению при условии, что все посылки рассуждения были истинными. В данном случае из двух посылок одна не истинна.

Пример 7.9. Рассмотрим следующее рассуждение:

"*Если курс математической логики неинтересен, то он полезен. Курс математической логики бесполезен или нетруден. Курс математической логики труден. Следовательно, этот курс интересен*".

Введём обозначения:

X: "*Курс математической логики интересен*" ,

Y: "*Курс математической логики полезен*" ,

Z: "*Курс математической логики труден*" .

Тогда для ответа на вопрос, правильно ли приведённое рассуждение, нужно выяснить, справедливо ли следующее логическое следование: $\neg X \to Y, \ \neg Y \vee \neg Z, \ Z \ \models \ X$.

Покажем, что оно справедливо. На основании равносильности из теоремы 4.4,у вторую посылку можно заменить на $Y \to \neg Z$. Далее по правилу 6.14 имеем $\neg X \to Y, \ Y \to \neg Z \ \models \ \neg X \to \neg Z$. Затем по правилу 21 из §6 (правило контрапозиции), $\neg X \to \neg Z \ \models \ \neg\neg Z \to \neg\neg X$. Последняя формула, на основании равносильности из теоремы 4.4,а, равносильна формуле $Z \to X$. Наконец, привлекая ещё не использованную третью посылку Z, получаем на основании правила 1 из §6 (Modus Ponens), $Z, Z \to X \ \models \ X$. Учитывая свойство выводимости, установленное в теореме 6.2,б, заключаем, что рассматриваемое логическое следование справедливо и, таким образом, данное рассуждение правильно.

Решите задачи №№ 2.4 – 2.8, 2.11 – 2.14 из Тетради МЛ, посвящённые анализу правильности рассуждений.

Обратим особое внимание на два типа наиболее часто встречающихся неправильных рассуждений. Первое рассуждение выглядит так. Мы исходим из некоторого предположения и, правильно рассуждая, приходим к правильному выводу. Отсюда делаем вывод, что сделанное предположение верно. С точки зрения математической логики схема этого рассуждения такова: из истинности утверждений $X \to Y$ и Y делается вывод об истинности утверждения X. Чтобы ответить на вопрос о правильности такой схемы рассуждений, рассмотрим два примера рассуждений, основанных на этой схеме.

Пример 7.10. *Если число натуральное, то оно рациональное* ($A \to B$). *Число 17 рациональное* (B). Следовательно, *число 17 натуральное* (A).

Пример 7.11. *Если число натуральное, то оно рациональное* ($A \to B$). *Число 3/4 рациональное* (B). Следовательно, *число 3/4 натуральное* (A).

В каждом из этих рассуждений обе посылки являются истинными утверждениями. Но в первом случае мы приходим к истинному заключению (число 17 – натуральное), а во втором – к ложному (число 3/4 не натуральное). Это означает, что неверной является сама схема построения умозаключения, примененная в этих примерах. Неверность, неправомочность схемы означает, что между посылками и заключением нет отношения логического следования. Здесь ещё раз уместно подчеркнуть, что правильность умозаключения определяется формой умозаключения, а не истинностью входящих в него утверждений. Иначе говоря, анализируя правильность рассуждения, нужно помнить о том, что его правильность не совпадает с истинностью полученного заключения. Схема умозаключения – это и есть то, что изучает логика, а истинность утверждений, входящих в рассуждение – это прерогатива той науки (или практики), откуда взяты эти утверждения. Развивая эту мысль, можно сказать, что и термин "следует" употребляется в разных смыслах. Важно понимать существенное различие между следованиями: "из $F \to G$ следует $\neg G \to \neg F$" и "из $a < 3$ следует $a < 5$". Первое есть утверждение логики, логическое следование. Второе есть свойство отношения порядка $<$ в каком-то числовом множестве, есть некое математическое следование (т.е. следование в рамках некоторой математической теории). Мы придём к подробному рассмотрению этой связи в главе "Аксиоматические теории" при уточнении понятия доказательства.

Итак, неправильность рассмотренной схемы рассуждений приводит к тому, что относительно исходного предположения X нельзя сделать вывод о его истинности: оно может быть как истинным, так и не истинным, причём, его истинность или ложность никак не связана с проведённым рассуждением. Этот же вывод подтверждает математическая логика: логическое следование $X \to Y,\ Y \models X$ не справедливо, потому что формула $((X \to Y) \wedge Y) \to X$ не является тавтологией (проверьте!).

Тем не менее, рассуждения по указанной схеме встречаются в школьной практике, особенно в алгебре и тригонометрии. Такие рассуждения иногда относят к разряду занимательной математики, где они получили название "парадоксов" или "софизмов".

Пример 7.12. Рассмотрим пример софизма. Докажем, что $3 = 7$. Из чисел 3 и 7 вычтем одно и то же число 5. Получим $3 - 5 = -2$, $7 - 5 = 2$. Возведём числа -2 и 2 в квадрат. В результате получим равные числа: $(-2)^2 = 4$ и $2^2 = 4$. Следовательно, должны быть равны и исходные числа: 3=7.

Ясно, что полученное заключение ложно. Проанализируем проведённое рассуждение, чтобы обнаружить допущенную ошибку. Рассуждение состоит из трёх шагов. Выделим эти шаги более отчётливо.

1-ый шаг (вычитание из целых чисел 3 и 7 целого числа 5).
Первая посылка $A \to B$: "Если a и b – целые числа, то их разность $a - b$ существует и есть число целое".
Вторая посылка A: "Числа 3 и 5 (а также 7 и 5) – целые".
Заключение B: "Разности $3 - 5$ и $7 - 5$ существуют, и $3 - 5 = -2$, $7 - 5 = 2$".
Данное умозаключение сделано по правилу MP: $X \to Y, X \models Y$ и потому является правильным.

2-ой шаг (возведение чисел -2 и 2 в квадрат).
Первая посылка $A \to B$: "Если число a целое, то его квадрат a^2 существует и является неотрицательным целым числом".
Вторая посылка A: "Число -2 (а также число 2) – целое".
Заключение B: "Квадраты чисел -2 и 2 существуют, причём $(-2)^2 = 4$ и $2^2 = 4$".
Умозаключение и здесь сделано по правилу MP: $X \to Y, X \models Y$ и потому и на этом шаге рассуждения ошибка не допущена.

3-ий шаг (заключение о равенстве чисел 3 и 7).
Первая посылка $A \to B$: "Если целые числа равны, то равны и их квадраты".
Вторая посылка B: "Квадраты целых чисел -2 и 2 равны: $4 = 4$".

Заключение A: "Равны сами числа -2 и 2, т.е. $3-5=7-5$, т.е. $3=7$".
На данном этапе рассуждения умозаключение сделано по схеме: $X \to Y, Y \models X$, которая не является правильной. Следовательно, в этом умозаключении сделана логическая ошибка, которая и привела к ложному выводу, несмотря на то, что исходили мы из всех истинных посылок.

Второй распространённый тип неправильных рассуждений выглядит так. Мы исходим из некоторого неверного предположения и, правильно рассуждая, приходим к некоторому выводу. Отсюда делаем заключение, что полученный вывод не верен. С точки зрения математической логики схема этого рассуждения такова: из истинности утверждений $\neg X$ и $X \to Y$ делается вывод об истинности утверждения $\neg Y$. Следующие два примера рассуждений, основанных на этой схеме, позволяют нам ответить на вопрос о правомочности её.

Пример 7.13. *Если число натуральное, то оно рациональное* $(A \to B)$. *Число 3/4 не натуральное* $(\neg A)$. Следовательно, *число 3/4 не рациональное* $(\neg B)$.

Пример 7.14. *Если число натуральное, то оно рациональное* $(A \to B)$. *Число* $\sqrt{2}$ *не натуральное* $(\neg A)$. Следовательно, *число* $\sqrt{2}$ *не рациональное* $(\neg B)$.

В каждом из этих рассуждений обе посылки являются истинными утверждениями. Но в первом случае мы приходим к ложному заключению (число 3/4 – рациональное), а во втором – к истинному (число $\sqrt{2}$ не рациональное). Это снова означает, что неверной является сама схема построения умозаключения, примененная в этих примерах, т.е. эта схема при всех истинных посылках не обязательно даёт истинное следствие. Вывод, основанный на примерах, подтверждается математической логикой: из формул $X \to Y$ и $\neg X$ не следует формула $\neg Y$, в чём нетрудно убедиться, проверив, что формула $((X \to Y) \wedge \neg X) \to \neg Y$ не является тавтологией.

Решение "логических" задач. Алгебра высказываний может быть с успехом применена к решению одного типа задач, которые называют "логическими задачами". Эти задачи можно решать и непосредственным рассуждением, но не всегда очевиден путь таких рассуждений. Применение алгебры высказываний даёт единый и достаточно общий метод решения указанных задач. Рассмотрите пример 2.15 и решите самостоятельно задачи 2.16 – 2.20 из <u>Тетради МЛ</u> и задачи № 3.54 и № 3.57 в <u>Задачнике</u>.

Принцип полной дизъюнкции. Этот принцип носит также название теоремы об обратимости системы импликаций, или закона замкнутой системы утверждений, или закона Гаубера. Обратим внимание на то, что этот принцип представляет собой обобщение ситуации, связанной с отношениями между истинностными значениями прямой, обратной, противоположной и обратной противоположной теорем. В самом деле, для утверждений: $A \to B$ (прямая теорема), $\neg A \to \neg B$ (противоположная теорема), $B \to A$ (обратная теорема), $\neg B \to \neg A$ (теорема, обратная противоположной) справедливо следующее: если первые два из них $A \to B$ и $\neg A \to \neg B$ верны, то верны оба вторых утверждения $B \to A$ и $\neg B \to \neg A$. Если исходных утверждений будет не два, а больше, то этот случай и рассматривается в теореме об обратимости системы импликаций. Она позволяет делать вывод о справедливости обратных теорем, если посылки и следствия прямых теорем удовлетворяют некоторым условиям.

Теорема 7.15. (*об обратимости системы импликаций, или принцип полной дизъюнкции*). *Пусть справедливы все следующие прямые теоремы* ($m \geq 2$):

$$A_1 \to B_1, \quad A_2 \to B_2, \quad \dots \quad, \quad A_m \to B_m \ ,$$

причём из посылок A_1, A_2, ... , A_m *по меньшей мере одна выполняется (истинна), а следствия* $B1, B_2, ..., B_m$ *попарно исключают друг друга (т.е. никакие два различных следствия не могут быть истинны одновременно, т.е истинны все следующие утверждения* $\neg(B_i \wedge B_j)$, *для* $1 \leq i, j \leq m$, $i \neq j$). *Тогда справедливы и все обратные импликации:*

$$B_1 \to A_1, \quad B_2 \to A_2, \quad \dots \quad, \quad B_m \to A_m \ .$$

Доказательство. Покажем сначала истинность первой обратной импликации: $B_1 \to A_1$.

Если высказывание B_1 ложно, то импликация $B_1 \to A_1$ истинна в силу определения импликации 1.7. Предположим теперь, что высказывание B_1 истинно. Покажем, что тогда все высказывания $A_2, A_3, ..., A_m$ – ложны. Допустим противное: например, пусть A_2 – истинно. Тогда из истинности высказываний A_2 и $A_2 \to B_2$ в силу определения импликации заключаем, что высказывание B_2 – истинно. Таким образом, два различных следствия B_1 и B_2 прямых теорем истинны. Это противоречит условию. Следовательно, высказывание A_2 не может быть истинным. Аналогично, не могут быть истинными высказывания $A_3, ..., A_m$. Итак, все высказывания $A_2, A_3, ..., A_m$ ложны. Но, по условию, по меньшей мере одна из посылок $A_1, A_2, ..., A_m$ истинна. Следовательно, истинной должна быть посылка A_1. Итак, высказывания B_1 и A_1 истинны. Тогда, по определению 1.7 импликации, истинна импликация $B_1 \to A_1$.

Совершенно аналогично устанавливается истинность и остальных обратных импликаций $B_2 \to A_2$, ..., $B_m \to A_m$. Рекомендуется провести эти рассуждения, например, для следующей импликации $B_2 \to A_2$. □

Принцип полной дизъюнкции представляет собой фактически утверждение о логическом следовании одного утверждения из каких-то других, т.е. это есть ещё одно правило логического умозаключения в дополнение к тем, которые рассмотрены в §6. Сформулируем, например, в виде такого правила данный принцип в случае, когда $n = 2$:

$$\frac{P_1 \to Q_1, \;\; P_2 \to Q_2, \;\; P_1 \vee P_2, \;\; \neg(Q_1 \wedge Q_2)}{(Q_1 \to P_1) \wedge (Q_2 \to P_2)}.$$

Принцип полной дизъюнкции имеет весьма широкое применение во всех дисциплинах школьного курса математики. Рассмотрим один такой пример.

Пример 7.16. В школьном курсе геометрии доказываются следующие три теоремы:

"*Квадрат длины стороны, лежащей против острого угла треугольника, меньше суммы квадратов длин двух других сторон этого треугольника*";

"*Квадрат длины стороны, лежащей против прямого угла треугольника, равен сумме квадратов длин двух других сторон этого треугольника*" (теорема Пифагора);

"*Квадрат длины стороны, лежащей против тупого угла треугольника, больше суммы квадратов длин двух других сторон этого треугольника*".

Проанализируем данные утверждения в аспекте применимости к ним теоремы 7.15. Введём следующие обозначения для высказываний:

A_1: "*В треугольнике угол α острый*";
A_2: "*В треугольнике угол α прямой*";
A_3: "*В треугольнике угол α тупой*";
B_1: "$a^2 < b^2 + c^2$";
B_2: "$a^2 = b^2 + c^2$";
B_3: "$a^2 > b^2 + c^2$",

где a, b, c – длины сторон треугольника, а α – его угол, лежащий против стороны длины a. Тогда сформулированные три теоремы можно записать символически: $A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_2$, $A_3 \to B_3$.

Ясно, что из трёх посылок A_1, A_2, A_3 этих утверждений по меньшей мере одна истинна (угол α в треугольнике непременно должен быть либо острым, либо прямым, либо тупым), а следствия B_1, B_2, B_3 попарно исключают друг друга (в силу закона трихотомии для действительных чисел). Поэтому на основе теоремы 7.15, заключаем, что истинны и все три обратные импликации: $B_1 \to A_1$, $B_2 \to A_2$, $B_3 \to A_3$.

Например, теорема $B_2 \to A_2$, обратная теореме Пифагора, читается так: "*Если в треугольнике квадрат длины некоторой стороны равен сумме квадратов длин двух других его сторон, то этот треугольник – прямоугольный, причём, прямым углом является угол, лежащий против первой стороны*".

Одно обобщение принципа полной дизъюнкции.

ТЕОРЕМА 7.17. *Пусть справедливы все следующие прямые теоремы ($m \geq 2$):*

$(A_1 \wedge C) \to B_1$, $(A_2 \wedge C) \to B_2$, ... , $(A_m \wedge C) \to B_m$, *причём, из посылок* $A_1, A_2, ..., A_m$ *по меньшей мере одна выполняется (истинна), а следствия* $B_1, B_2, ..., B_m$ *попарно исключают друг друга (т.е. никакие два различных следствия не могут быть истинны одновременно). Тогда справедливы и все следующие обратные импликации:*

$(B_1 \wedge C) \to A_1$, $(B_2 \wedge C) \to A_2$, ... , $(B_m \wedge C) \to A_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала истинность первой обратной импликации: $(B_1 \wedge C) \to A_1$.

Если высказывание B_1 ложно, то посылка $B_1 \wedge C$ ложна и, значит, импликация $(B_1 \wedge C) \to A_1$ истинна. Предположим теперь, что высказывание B_1 истинно. Тогда, если при этом высказывание C ложно, то снова посылка $B_1 \wedge C$ ложна и, значит, импликация $(B_1 \wedge C) \to A_1$ истинна. Предположим теперь, что и высказывание C истинно. Покажем, что тогда все высказывания $A_2, A_3, ..., A_m$ ложны. Допустим противное: например, пусть A_2 истинно. Тогда из истинности высказываний A_2, C (а значит и истинности их конъюнкции $A_2 \wedge C$) и $(A_2 \wedge C) \to B_2$ очевидно вытекает истинность высказывания B_2. Таким образом, два различных следствия B_1 и B_2 прямых теорем истинны. Это противоречит условию. Следовательно, высказывание A_2 не может быть истинным. Аналогично не могут быть истинными высказывания $A_3, ..., A_m$. Итак, все высказывания $A_2, A_3, ..., A_m$ ложны. Но, по условию, по меньшей мере одна из посылок $A_1, A_2, ..., A_m$ истинна. Следовательно, истинной должна быть посылка A_1. Итак, высказывания B_2, C и A_1 истинны. Тогда истинна конъюнкция $B_1 \wedge C$ и истинна импликация $(B_1 \wedge C) \to A_1$, являющаяся обратной по отношению к первой данной импликации $(A_1 \ \wedge \ C) \ \to \ B_1$.

Совершенно аналогично устанавливается истинность и остальных обратных импликаций $(B_2 \wedge C) \ \to \ A_2$, ... , $(B_m \wedge C) \ \to \ A_m$. □

Пример 7.18. Примером применения данной общелогической теоремы могут служить следующие три утверждения а), б), в), выражающие свойство монотонности операции умножения в кольце целых чисел, или в поле рациональных чисел (в правом столбце помещены обратные для них теоремы а'), б'), в'), справедливые на основании доказанной теоремы 7.17):

а)	$x < y,\ z > 0 \implies xz < yz,$	а')	$xz < yz,\ z > 0 \implies x < y,$
б)	$x > y,\ z > 0 \implies xz > yz,$	б')	$xz > yz,\ z > 0 \implies x > y,$
в)	$x = y,\ z > 0 \implies xz = yz,$	в')	$xz = yz,\ z > 0 \implies x = y.$

Аналогично для следующих трёх утверждений г), д), е) о целых числах:

г)	$x < y,\ z < 0 \implies xz > yz,$	г')	$xz > yz,\ z < 0 \implies x < y,$
д)	$x > y,\ z < 0 \implies xz < yz,$	д')	$xz < yz,\ z < 0 \implies x > y,$
е)	$x = y,\ z < 0 \implies xz = yz,$	е')	$xz = yz,\ z < 0 \implies x = y.$

§8. Булевы функции и их применение

Теория булевых функций являет собой ещё один прекрасный пример того, как математика, начав решать одну из прикладных практически важных задач (мы начали с построения математической модели мышления, выражаемого на языке), затем от этой практики отрывается, уносится в заоблачные дали абстракций и начинает развивать этот свой раздел по своим собственным внутренним законам. Но эта же теория даёт и второй не менее впечатляющий и значимый пример: развившись в этом своём абстрактном качестве до достаточно высокого уровня, эта теория вдруг находит реальные приложения в практической жизни столь поразительной эффективности, которой не дал, может быть, ни один другой раздел математики за всю многовековую историю её развития. Эти приложения связаны с конструированием и созданием электронно-вычислительных машин (компьютеров), которые на рубеже XX и XXI веков начали в корне преобразовывать само существование всего человечества.

Различные области математики имеют дело с разнообразными функциями. Это и действительные функции действительного аргумента, изучающиеся в курсе математического анализа, и комплексные функции комплексного аргумента, известные из теории функций комплексного переменного, и вектор-функции скалярного аргумента, играющие важную роль в дифференциальной геометрии, и скалярные функции векторных аргументов (например, скалярное и смешанное произведения векторов), и вектор-функции векторных аргументов (векторное произведение двух векторов), и функции, заданные и принимающие значения в множестве натуральных чисел (например, функция Эйлера, известная из теории чисел), и многие другие. В настоящем параграфе познакомимся с ещё одним видом функций – булевыми функциями. Они возникли при математической постановке задач логики. Их называют также функциями алгебры логики. Они получили свое название по имени замечательного английского математика Джорджа Буля (1815 – 1864), который первым начал применять математические методы в логике.

Происхождение булевых функций. В конце §1 отмечалось, что каждое из определений 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9 операций над высказываниями (отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности) можно рассматривать как определение некоторого действия над символами 0 и 1, т.е. как определение некоторой функции, заданной на двухэлементном множестве $\{0,1\}$ и принимающей значения в том же множестве. Символом 0 обозначалось любое ложное высказывание, а символом 1 – любое истинное. Например, отрицание представляет собой в этом смысле функцию одного аргумента $f_2(x)$, которая принимает следующие значения: $f_2(0) = 1$, $f_2(1) = 0$; конъюнкция представляет собой функцию двух аргументов $g_1(x,y)$, принимающую следующие значения: $g_1(0,0) = 0$, $g_1(0,1) = 0$, $g_1(1,0) = 0$, $g_1(1,1) = 1$ и т.д. В §2 эта мысль была развита дальше: отмечено, что каждая формула алгебры высказываний $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ от n пропозициональных переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ определяет, по существу, некоторую функцию от n аргументов, сопоставляющую любому набору длины n, составленному из элементов двухэлементного множества $\{0,1\}$, единственный элемент того же множества. Этот элемент является логическим значением того составного высказывания, в которое превращается данная формула, если вместо всех её пропозициональных переменных подставить конкретные высказывания, имеющие соответствующие значения истинности. Легко понять, что высказывания (точнее, их содержание) здесь ни при чём. Функция, о которой идёт речь, определяется структурой формулы F и определениями 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9, которые понимаются как определения действий над символами 0, 1 – элементами двухэлементного множества $\{0,1\}$.

В связи с этим естественно рассмотреть функции, заданные на двухэлементном множестве $\{0,1\}$ и принимающие значения в нём же, безотносительно к формулам алгебры высказываний, т.е. сами по себе. Тогда функции, определяемые таблицами в определениях 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9, а также функции, определяемые формулами алгебры высказываний, будут служить примерами таких функций. Такие функции, заданные и принимающие значения в двухэлементном множестве, появляющиеся в алгебре высказываний, носят название функций алгебры логики или булевых функций.

Введя понятие булевой функции, мы окончательно отрываемся от того содержательного смысла, который имели в виду в алгебре высказываний: пропозициональные переменные служили там обозначениями для высказываний языка. Теперь же остались только два символа 0 и 1 и понятие булевой функции. Чтобы ещё более оттенить это обстоятельство, обозначим переменные, пробегающие множество $\{0,1\}$, малыми буквами латинского алфавита x, y, z, u, v, ... , $x_1, x_2, ..., x_n$, ... и будем называть их *булевыми*.

Теории булевых функций значительное внимание уделяется в курсе дискретной математики, поэтому в этом параграфе мы изучим лишь некоторые свойства булевых функций и посмотрим, как эти функции могут применяться в алгебре высказываний и в теории релейно-контактных схем.

Булевы функции от одного и двух аргументов. *Булева функция от одного аргумента* есть отображение $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$. Нетрудно перечислить все булевы функции от одного аргумента (их четыре):

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таким образом, $f_0(x) = 0$ (тождественный нуль), $f_1(x) = x$ (тождественная функция), $f_2(x) = x'$ (отрицание, или инверсия), $f_3(x) = 1$ (тождественная единица).

Булева функция от двух аргументов – это отображение $g : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, сопоставляющее любой упорядоченной паре, составленной из элементов 0 и 1 (а таких упорядоченных пар будет четыре), либо 0, либо 1. Перечислим все возможные булевы функции от двух аргументов (их шестнадцать) в форме следующей таблицы:

		0	$\cdot$	$\to'$	x	$\leftarrow'$	y	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$
x	y	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

		y'	$\leftarrow$	x'	$\to$	$\mid$	1
x	y	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1

Заметим: функции пронумерованы так, что номер функции, записанный в двоичной системе счисления, даёт последовательность значений соответствующей функции. Например, двоичная запись числа 13 имеет вид: 1101. Соответствующая функция $g_{13}(x,y)$ принимает следующие значения: $g_{13}(0,0) = 1$, $g_{13}(0,1) = 1$, $g_{13}(1,0) = 0$, $g_{13}(1,1) = 1$.

Многие из перечисленных функций имеют названия и специальные обозначения. Приведём их, сгруппировав функции в пары по тому принципу, что каждая функция из пары является отрицанием другой функции этой пары.

Первые две функции, которые рассматриваются, $g_0(x,y) = 0$ и $g_{15}(x,y) = 1$ – *тождественный ноль* и *тождественная единица*.

Далее, функция $g_1(x,y)$ называется *конъюнкцией* (или *логическим умножением*) и обозначается $x \cdot y$, или xy. Таким образом, $g_1(x,y) = x \cdot y$. Конъюнкция принимает значение 1 в том и только в том случае, когда оба её аргумента принимают значение 1. Отрицание конъюнкции, функция $g_{14}(x,y)$, называется *штрихом Шеффера* и обозначается $x \mid y$. Таким образом, $g_{14}(x,y) = (x \cdot y)' = x \mid y$. Эта функция принимает значение 0 в том и только в том случае, когда функция $g_1(x,y)$ принимает значение 1, т.е. в случае, когда оба её аргумента принимают значение 1.

Функция $g_7(x,y)$ называется *дизъюнкцией* (или *логическим сложением*) и обозначается $x \vee y$. Таким образом, $g_7(x,y) = x \vee y$. Функция $g_8(x,y)$, являющаяся отрицанием функции $g_7(x,y)$, носит название *стрелка Пирса* (или *функция Вебба*) и обозначается $x \downarrow y$. Итак, $g_8(x,y) = (x \vee y)' = x \downarrow y$.

Функция $g_{13}(x,y)$ называется *импликацией* и обозначается $x \to y$, т.е. $g_{13}(x,y) = x \to y$. Аргумент x в этой функции называется посылкой (антецедентом) импликации, а аргумент y – её следствием (консеквентом). Отрицанием импликации является функция $g_2(x,y) = (x \to y)'$. Специального названия она не имеет.

Функция $g_{11}(x,y)$ называется *антиимпликацией* или *обратной импликацией*, потому что представляет собой импликацию с посылкой y и следствием x. Таким образом, $g_{11}(x,y) = y \to x$. Её отрицанием является функция $g_4(x,y) = (y \to x)'$, не имеющая названия.

Функция $g_9(x,y)$ называется *эквивалентностью* и обозначается $x \leftrightarrow y$, так что $g_9(x,y) = (x \leftrightarrow y)$. Она принимает значение 1 тогда и только тогда, когда оба её аргумента принимают одинаковые значения. Функция $g_6(x,y)$, являющаяся отрицанием функции $g_9(x,y)$, называется *сложением по модулю два*, или *суммой Жегалкина*, и обозначается $x + y$.

Наконец остаются ещё две пары функций. В первую пару входят функции $g_3(x,y)$ и $g_{12}(x,y)$. Первая из них принимает всегда те же самые значения, что и её первый аргумент, т.е. $g_3(x,y) = x$, а вторая функция является отрицанием первой: $g_{12}(x,y) = x'$. Во вторую пару входят функции $g_5(x,y)$ и $g_{10}(x,y)$. Первая из них принимает всегда те же самые значения, что и её второй аргумент, то есть $g_5(x,y) = y$, а вторая функция является отрицанием первой: $g_{10}(x,y) = y'$.

Из введённых простейших булевых функций можно строить с помощью суперпозиций более сложные булевы функции. Например, если в функцию $x \vee t$ вставить вместо аргумента t функцию $y \cdot z$, то получим следующую сложную функцию: $x \vee (y \cdot z)$. Если в неё в свою очередь вставить вместо аргумента z функцию $u \to v$, то получим сложную функцию $x \vee (y \cdot (u \to v))$. И так далее. В результате получаются булевы функции от трёх, четырёх и большего числа аргументов.

Булевым функциям посвящён раздел 3 Тетради МЛ. Задачи №№ 3.1 – 3.4 имеют дело с определениями этих функций.

Нетрудно установить некоторые важнейшие свойства введённых функций. При этом две булевы функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ называются *равными*, если каждому набору значений аргументов x, y обе функции сопоставляют один и тот же элемент из множества $\{0,1\}$, т.е. $f(a,b) = g(a,b)$ для любых $a, b \in \{0,1\}$. Например, $x \vee y = y \vee x$.

Для отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности эти свойства аналогичны соответствующим свойствам соответствующих логических операций над высказываниями. Например, идемпотентность, коммутативность и ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции, законы дистрибутивности, поглощения, де Моргана и т.д. Выражения одних булевых функций через другие:

а) $x \cdot y = (x' \vee y')'$;	ж) $x' = x \mid x$;
б) $x \vee y = (x' \cdot y')'$;	з) $x \mid y = (x \cdot y)'$;
в) $x \vee y = (x \to y) \to y$;	и) $x \vee y = x' \mid y' = (x \mid x) \mid (y \mid y)$;
г) $x \vee y = x' \to y$;	к) $x' = x \downarrow x$;
д) $x \to y = x' \vee y$;	л) $x \downarrow y = (x \vee y)'$;
е) $x \leftrightarrow y = (x \to y) \cdot (y \to x)$;	м) $x \cdot y = x' \downarrow y' = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$.

В задачах 3.5 – 3.8, 3.10 Тетради МЛ рассматриваются выражения одних булевых функций через другие; в частности, выражения через единственную функцию штрих Шеффера | или через единственную функцию стрелка Пирса $\downarrow$. В задаче 3.9 – свойства функции сложение по модулю два (суммы Жегалкина).

Булевы функции от n аргументов – это отображения вида $f:\ \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, сопоставляющие любой упорядоченной двоичной n-ке $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ либо 0, либо 1. Можно доказать, что таких n-ок имеется всего 2^n штук, а булевых функций от n аргументов – 2^{2^n} штук.

Для произвольной булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ справедливы следующие формулы, называемые формулами разложения этой функции по переменной x_1:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \;=\; (x_1 \cdot f(1, x_2, ..., x_n)) \vee (x_1' \cdot f(0, x_2, ..., x_n)) \;,$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \;=\; (x_1 \vee f(0, x_2, ..., x_n)) \cdot (x_1' \vee f(1, x_2, ..., x_n)) \;.$$

Подобным образом могут быть записаны формулы разложения булевой функции по любой её переменной. Запишите, например, такие разложения по последней переменной x_n.

Из этих представлений методом полной математической индукции легко доказывается, что *всякая булева функция* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *от любого числа аргументов может быть представлена в виде суперпозиции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания; причём, знак отрицания стоит только непосредственно около переменной и не стоит ни около каких внутренних скобок.*

Булевы функции и формулы алгебры высказываний. Установим сначала соответствие между формулами алгебры высказываний и булевыми функциями. Это делается следующим образом.

Во-первых, определяется взаимнооднозначное соответствие между пропозициональными переменными и булевыми переменными, при котором прописная буква, обозначающая пропозициональную переменную, соответствует той же самой строчной букве, обозначающей булеву переменную:

$$P,\ Q,\ R,\ X,\ Y,\ Z,\ X_1,\ X_2,\ \dots,\ Y_1,\ Y_2,\ \dots$$

$$p,\ q,\ r,\ x,\ y,\ z,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ y_1,\ y_2,\ \dots$$

Во-вторых, устанавливается соответствие между знаками логических связок и знаками одноимённых булевых функций:

Логические связки	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\to$	$\leftrightarrow$
Булевы функции	$'$	$\cdot$	$\vee$	$\to$	$\leftrightarrow$

Наконец скобкам ставятся в соответствие те же скобки. Тогда каждой формуле алгебры высказываний соответствует единственная булева функция, а каждой булевой функции соответствует формула алгебры высказываний. Чтобы найти для данной формулы алгебры высказываний соответствующую ей булеву функцию, достаточно каждую прописную букву формулы заменить на такую же строчную букву, а каждый символ логической операции – на символ одноименной булевой функции.

Например, формуле $(P \leftrightarrow \neg Q) \to ((\neg X_1 \vee X_2) \wedge \neg Z)$ соответствует булева функция $(p \leftrightarrow q') \to ((x_1' \vee x_2) \cdot z')$.

Если булева функция задана с помощью формулы, то для того, чтобы найти соответствующую этой функции формулу алгебры высказываний, нужно в выражении для булевой функции заменить строчные буквы такими же прописными буквами, а каждый символ булевой функции $'$, $\cdot$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ заменить соответственно на символ одноименной логической операции $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$. Здесь возникает неоднозначность такого обратного соответствия, поскольку булева функция может иметь множество различных формульных выражений. Например, функция, рассмотренная в предыдущем абзаце, имеет также следующие формульные выражения:

$$(p \leftrightarrow q') \to (x_1' \cdot z' \vee x_2 \cdot z')\ ,$$

$$((p \to q') \cdot (q' \to p)) \to ((x_1' \vee x_2) \cdot z')\ ,$$

$$((p' \vee q') \cdot (p \vee q)) \to (x_1' \cdot z' \vee x_2 \cdot z')$$

и т.д. Этим выражениям сопоставляются соответственно следующие формулы алгебры высказываний:

$$(P \leftrightarrow \neg Q) \rightarrow ((\neg X_1 \wedge \neg Z) \vee (X_2 \wedge \neg Z)) \ ,$$

$$((P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg Q \rightarrow P)) \rightarrow ((\neg X_1 \vee X_2) \wedge \neg Z) \ ,$$

$$((\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)) \rightarrow ((\neg X_1 \wedge \neg Z) \vee (X_2 \wedge \neg Z)) \ .$$

Следовательно, все перечисленные формулы соответствуют одной и той же булевой функции.

Возникает вопрос, всякой ли булевой функции соответствует некоторая формула алгебры высказываний? Другими словами, всякая ли булева функция может быть выражена (представлена) некоторой формулой алгебры высказываний? Если булева функция задана с помощью формулы, то соответствующая этой функции формула алгебры высказываний отыскивается так, как описано в предыдущем абзаце. Если же булева функция задана не в виде формулы, то, в силу утверждения из конца предыдущего пункта, формульное выражение для неё тем не менее существует, и, следовательно, представляющая её формула алгебры высказываний может быть найдена по правилу, описанному выше.

Нормальные формы булевых функций. Итак, всякая булева функция может быть представлена некоторой формулой алгебры высказываний. Нетрудно понять, что всякая формула алгебры высказываний, *равносильная* формуле, представляющей некоторую булеву функцию f, будет представлять функцию, *равную* f. В частности, одной из таких представляющих формул будет совершенная дизъюнктивная нормальная форма (если данная булева функция не равна тождественно 0, т.е. представляющая формула не тождественно ложна) или совершенная конъюнктивная нормальная форма (если данная булева функция не равна тождественно 1, т.е. представляющая формула не является тавтологией). Отыскав совершенную нормальную форму для формулы алгебры высказываний, представляющей данную булеву функцию (применяя правила, полученные в теоремах 5.2 и 5.4), можно перейти от этой формулы к формульному выражению для данной булевой функции. Его будем называть ***совершенной*** (***дизъюнктивной*** или ***конъюнктивной***) ***нормальной формой*** данной булевой функции, сокращенно *СДН-формой* или соответственно *СКН-формой*. Каждая из них для данной булевой функции, если она существует, единственна.

Применение булевых функций к релейно-контактным схемам. Булевы функции широко применяются при описании работы дискретных управляющих систем (переключательных схем, схем из функциональных элементов, логических сетей и т.д.), при исследовании некоторых электрических цепей, так называемых релейно-контактных схем.

Под *релейно-контактной* (или *переключательной*) *схемой* понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Оно может быть предназначено, например, для соединения (или разъединения) полюсов источника тока с некоторым потребителем. Контакты релейно-контактной схемы могут быть двух типов: *замыкающие* и *размыкающие*. Каждый контакт подключён к некоторому реле (переключателю). К одному реле может быть подключено несколько контактов, как замыкающих, так и размыкающих. Технически реле представляет собой катушку с металлическим сердечником, вблизи которого находится соответствующий контакт.

Когда реле срабатывает (т.е. через катушку с металлическим сердечником пропускается электрический ток), металлический сердечник намагничивается и замыкает все находящиеся при нём замыкающие контакты. Одновременно все размыкающие контакты, относящиеся к данному реле, размыкаются. Поскольку замыкающие контакты при отсутствии в реле электрического тока разомкнуты, то они называются также *нормально разомкнутыми*. Аналогично, размыкающие контакты называются также *нормально замкнутыми*. При обесточивании обмоток реле (т.е. когда реле отключается) все замыкающие контакты снова размыкаются, а все размыкающие замыкаются.

Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменная x_1 или x_2, ..., или x_n, которая принимает значение 1, когда реле срабатывает, и принимает значение 0 при отключении реле. На чертеже все замыкающие контакты, подключенные к реле x, обозначаются тем же символом x, а все размыкающие контакты, подключенные к этому реле, обозначаются отрицанием x'. Это означает, что при срабатывании реле x все его замыкающие контакты x проводят ток и им сопоставляется значение 1, а все размыкающие контакты x' не проводят электрический ток и им сопоставляется значение 0. При отключенном реле x создаётся противоположная ситуация: все его замыкающие контакты x разомкнуты, т.е. в этот момент им сопоставляется (переменная x принимает) значение 0, а все его размыкающие контакты x' замкнуты, т.е. в этот момент им сопоставляется (переменная x' принимает) значение 1.

Всей релейно-контактной схеме тогда ставится в соответствие булева переменная y, зависящая от булевых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, сопоставленным тем реле, которые участвуют в схеме. Если при данном наборе состояний реле $x_1, x_2, ..., x_n$ (какие-то из этих реле находятся в сработанном состоянии – под током, какие-то отключены – обесточены) вся релейно-контактная схема проводит электрический ток, то переменной y ставится в соответствие (другими словами, переменная y принимает) значение 1. Если же при этом наборе состояний реле $x_1, x_2, ..., x_n$ схема не проводит электрический ток, то считаем, что переменная y принимает значение 0. Поскольку каждый набор состояний реле $x_1, x_2, ..., x_n$ характеризуется набором, составленным из нулей и единиц, длины n, то данная релейно-контактная схема определяет некоторое правило, по которому каждому такому набору длины n, составленному из нулей и единиц, сопоставляется либо 0, либо 1. Таким образом, каждая релейно-контактная схема, в которой занято n независимых реле (контактов в ней может быть n или больше), определяет некоторую булеву функцию y от n аргументов. Она принимает значение 1 на тех и только тех наборах значений аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$ которые соответствуют тем состояниям реле $x_1, x_2, ..., x_n$, при которых данная схема проводит электрический ток. Такая булева функция $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***функцией проводимости*** данной релейно-контактной схемы.

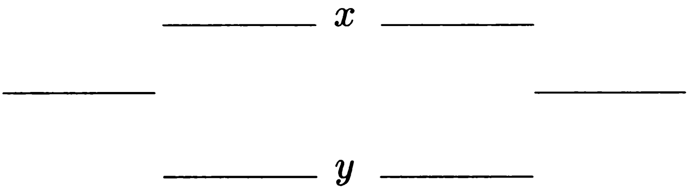
Таким образом, теория булевых функций предоставляет математическую модель реальных физических релейно-контактных схем.

Рассмотрим некоторые релейно-контактные схемы и найдём их функции проводимости. Первая схема состоит из двух последовательно соединённых контактов x и y, т.е. контактов, связанных с двумя независимыми реле x и y, каждое из которых срабатывает независимо от другого.

$$\text{———————} \quad x \quad \text{———————} \quad y \quad \text{———————}$$

Ясно, что данная схема проводит электрический ток тогда и только тогда, когда оба контакта x и y замкнуты, т.е. только тогда, когда обе переменных x и y принимают значение 1. Булева функция от двух аргументов x, y, удовлетворяющая такому условию, нам хорошо известна. Это конъюнкция $x \cdot y$. Таким образом, функцией проводимости релейно-контактной схемы, состоящей из двух последовательно соединенных контактов x и y, является конъюнкция $x \cdot y$. Говорят, что *последовательное соединение двух контактов* реализует конъюнкцию соответствующих этим контактам булевых переменных.

Вторая релейно-контактная схема состоит из двух параллельно соединенных контактов x и y.



Ясно, что эта схема проводит электрический ток в том и только в том случае, когда по меньшей мере один из контактов x или y замкнут, т.е. лишь в случае, когда хотя бы одна из булевых переменных x или y принимает значение 1. Булева функция от двух аргументов x и y, удовлетворяющая этому условию, также хорошо нам известна. Это дизъюнкция $x \vee y$. Таким образом, функцией проводимости релейно-контактной схемы, состоящей из двух параллельно соединенных контактов x и y, является дизъюнкция $x \vee y$. Говорят, что *параллельное соединение двух контактов* реализует дизъюнкцию соответствующих этим контактам булевых переменных.

Итак, с помощью релейно-контактных схем можно реализовывать булевы функции: конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Возможна ли аналогичная реализация и других булевых функций? Ответ положительный. Поскольку всякая булева функция может быть выражена через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание, причём отрицание стоит лишь непосредственно около переменных и не стоит ни около каких внутренних скобок, а конъюнкция, дизъюнкция и отрицание, как показано только что, реализуются на релейно-контактных схемах, то и *всякая булева функция может быть реализована с помощью релейно-контактной схемы*, т.е. может быть построена такая схема, для которой данная булева функция служит функцией проводимости. Ознакомьтесь с примерами, разобранными в Задачнике, №№ 7.2 л, 7.3 л .

В теории релейно-контактных схем выделяются две основные задачи – задача анализа и задача синтеза релейно-контактных схем.

Задача анализа состоит в изучении характера работы данной схемы и её упрощении. Две релейно-контактные схемы называются *равносильными*, если одна из них проводит ток тогда и только тогда, когда другая схема проводит ток. Иначе говоря, две схемы равносильны, если они обладают одинаковыми функциями проводимости. Из двух равносильных схем более простой считается та, которая содержит меньшее число контактов. Задача упрощения релейно-контактной схемы состоит в нахождении более простой равносильной ей схемы. Обычно она решается следующим образом. Для данной релейно-контактной схемы составляется её функция проводимости. Затем эта функция с помощью тождественных преобразований, использующих известные свойства булевых функций, упрощается, т.е. сводится к функции, имеющей меньшее число вхождений переменных, нежели исходная функция. Наконец строится релейно-контактная схема, отвечающая упрощённой булевой функции.

Рассмотрите решённую в Тетради МЛ задаче 4.1 а, показывающую, как нужно составлять функцию проводимости данной схемы и упрощать её. Решите самостоятельно задачи №№ 4.1 б – е, 4.2, 4.3, 4.11 на анализ релейно-контактных схем, в Задачнике – примеры №№ 7.5 л, 7.9.

Составление релейно-контактных схем с заданными условиями работы называется *задачей синтеза* релейно-контактных схем. Она является второй важной задачей теории релейно-контактных схем, состоящей в том, что требуется построить схему, которая проводила бы электрический ток лишь при вполне определённых задаваемых условиях. По этим условиям сначала составляется таблица значений булевой функции проводимости требуемой схемы. Далее, с помощью СДН-форм или СКН-форм для булевых функций находится аналитическое (формульное) выражение для этой булевой функции. Затем эта функция с помощью тождественных преобразований, использующих известные свойства булевых функций, максимально упрощается. Наконец строится релейно-контактная схема, отвечающая упрощённой булевой функции.

В Тетради МЛ приведены примеры решения таких задач, а также – задачи для самостоятельного решения на синтез релейно-контактных схем: №№ 4.4 – 4.10. Проанализируйте приведённые в Задачнике решения задач №№ 7.9, 7.20.

Релейно-контактные схемы в ЭВМ. Первая электронно-вычислительная машина была создана в 1946 году в США. Для записи и обработки в ЭВМ числовой и символьной информации удобным с технической точки зрения оказался язык двоичных чисел – нулей и единиц. Поэтому естественно было ожидать, что методы математической науки, исследовавшей двузначные функции, рано или поздно найдут применение в процессе создания такой техники. Впервые предположение о возможности применения алгебры логики в технике было высказано в 1910 году известным физиком П.Эренфестом (1880 – 1933). Булевы функции стали математическим аппаратом для исследования релейно-контактных схем (эта связь окончательно была осознана в 30-х годах XX века), а сами схемы к середине XX века нашли многочисленные применения в автоматической технике – в телефонии, железнодорожной сигнализации, централизации и блокировке, релейной защите, телемеханике и наконец – при проектировании быстродействующих ЭВМ. О некоторых простых, но очень важных релейно-контактных схемах, используемых в ЭВМ, и пойдёт речь в настоящем параграфе.

Одноразрядный двоичный полусумматор. Числа в ЭВМ хранятся в двоичной системе в ячейках памяти поразрядно. С технической точки зрения в двоичной системе оказалось удобно не только хранить числа, но и выполнять над ними различные действия. Так, сложение двоичных чисел осуществляется на основе следующих правил: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 10$. Сложение по этим правилам делается по каждому разряду двух ячеек, в которых хранятся слагаемые. Если же происходит переполнение данного разряда (что возможно только при сложении $1 + 1$), то происходит перенос единицы в следующий разряд. Таким образом, процесс сложения в одном разряде может быть охарактеризован двумя булевыми функциями: $S(x, y)$ и $P(x, y)$, зависящими от складываемых чисел x и y. Первая функция $S(x, y)$ представляет собой значение суммы, записываемое в тот же разряд соответствующей ячейки, в котором происходит сложение. Вторая функция – функция переноса $P(x, y)$ даёт значение числа, переносимого в следующий, более старший, разряд при переполнении разряда, в котором происходит сложение. Таблицы истинности этих функций следующие:

x	y	$S(x,y)$	$P(x,y)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Используя СДН-формы, выписываем для них выражения, по которым легко построить соответствующие релейно-контактные схемы: $S(x, y) = x'y \vee xy'$, $P(x, y) = xy$.

Одноразрядный двоичный сумматор. При сложении двух чисел описанные в предыдущем пункте действия совершаются лишь в первом, самом младшем, разряде ячеек, хранящих слагаемые. Во всех же остальных разрядах, начиная со второго, в процессе сложения участвуют уже не два слагаемых x_k и y_k, но ещё и число, переносимое из предыдущего разряда и равное значению функции переноса $P_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$ в этом разряде. Таким образом, функция сумма S_k в k-ом разряде ($k \geq 2$) зависит от трёх аргументов

$S_k(x_k, y_k, P_{k-1})$. От этих же аргументов зависит и функция переноса из k-то разряда $P_k(x_k, y_k, P_{k-1})$. Составим таблицы значений этих функций:

x_k	y_k	P_{k-1}	$S_k(x_k, y_k, P_{k-1})$	$P_k(x_k, y_k, P_{k-1})$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Используя СДН-формы, найдите аналитические выражения для этих функций, упростите их, преобразуя тождественным образом, и наконец начертите соответствующие релейно-контактные схемы. Построив такие схемы для каждого разряда и обеспечив их надлежащее соединение, можно получить схему многоразрядного двоичного сумматора, осуществляющего сложение двоичных чисел в ЭВМ.

Человек привык оперировать с числами в десятичной системе счисления. Для ЭВМ более удобна двоичная система. Поэтому важную роль в ЭВМ играют устройства, обеспечивающие взаимопонимание человека и машины, т.е. устройства, переводящие информацию с языка человека на язык машины и обратно. Такими устройствами являются, например, шифраторы, осуществляющие перевод чисел из десятичной системы в двоичную, и дешифраторы, осуществляющие обратный перевод. При их конструировании также используются релейно-контактные схемы.

Глава II.

ФОРМАЛИЗОВАННЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В этой главе рассматривается аксиоматический подход к алгебре высказываний, т.е. такой же подход, какой используется при строгом построении геометрии на базе какой-либо системы аксиом, например, Гильберта, Вейля и т.д. Алгебра высказываний предстанет как аксиоматическая теория, в определенном смысле достигнет наивысшей степени строгости и совершенства. Общим вопросам аксиоматических теорий будут посвящены главы IV и VI, так что формализованное исчисление высказываний, которое строится в настоящей главе, будет служить примером аксиоматической теории.

Применительно к алгебре высказываний аксиоматический подход состоит в следующем. Из всех формул алгебры высказываний выделяется некоторая часть. Формулы из этой части объявляются аксиомами. Определяется некоторое правило, по которому из одних формул можно получать новые. Аксиомы выделяются и правило определяется так, что по нему из аксиом могут быть получены все тавтологии алгебры высказываний и только они. Таким образом, тавтологии алгебры высказываний оказываются теоремами аксиоматической теории, в результате получаем аксиоматическое построение алгебры высказываний.

В качестве системы аксиом могут быть выбраны разные части совокупности всех формул алгебры высказываний. То же относится к правилам получения новых формул. В зависимости от выбора получаются различные аксиоматизации алгебры высказываний. Общим для них является то, что все они обладают одним и тем же множеством теорем – это совокупность всех тавтологий алгебры высказываний. Мы рассмотрим лишь одну из возможных аксиоматизаций.

Описанный подход к построению формализованного исчисления высказываний называют гильбертовским, а само такое исчисление называют исчислением гильбертовского типа. Одно такое исчисление будет рассмотрено в первых трёх параграфах настоящей главы.

Существует и другой подход к построению формализованного исчисления высказываний. Этот подход был разработан немецким математиком Г.Генценом в 30-ых годах XX столетия и получил название генценовского подхода, а получаемое при этом исчисление – исчислением натурального (или естественного) вывода. Исчисление этого типа будет рассмотрено в параграфе 12 настоящей главы.

В конце параграфа 8 мы говорили о применении методов математической логики при конструировании компьютеров. В заключительном параграфе этой главы будет рассказано об обратном процессе – применении компьютеров для доказательства теорем математической логики.

§9. Система аксиом и теория формального вывода

В настоящем параграфе будет заложена основа аксиоматической теории высказываний, определены понятия доказательства и теоремы, рассмотрены примеры доказательств теорем и развита теория формального вывода. На протяжении всего параграфа будем находиться как бы внутри аксиоматической теории, будем развивать саму эту теорию.

Начало аксиоматической теории высказываний: первоначальные понятия, система аксиом, правило вывода. К *первоначальным, неопределяемым понятиям* аксиоматической теории высказываний относятся следующие: $X_1, X_2, ..., X_n$ – пропозициональные переменные; $\neg$, $\rightarrow$ – логические связки; (,) – технические знаки. Первоначальным понятием является также понятие *формулы*, которое определяется (как и в алгебре высказываний, см. определение 2.1) индуктивным образом:

1) каждая пропозициональная переменная есть формула;

2) если F_1 и F_2 – формулы, то выражения $\neg F_1$, $(F_1 \rightarrow F_2)$ также являются формулами;

3) никаких других формул, кроме получающихся согласно пунктам 1 и 2, нет.

Следующий шаг в построении аксиоматической теории высказываний состоит в выборе системы аксиом. К качестве аксиом выбираются формулы следующих видов:

(A1) $F \rightarrow (G \rightarrow F)$,
(A2) $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$,
(A3) $(\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow ((\neg G \rightarrow F) \rightarrow G))$.

где F, G, H – произвольные формулы. Таким образом, каждое из выражений (A1), (A2), (A3) задаёт лишь форму аксиомы. Они превращаются в аксиомы, если вместо F, G и H подставить конкретные формулы (в частности, пропозициональные переменные). Следовательно, каждое из этих выражений задаёт бесконечное множество формул. Все они называются аксиомами. Поэтому каждое из выражений (A1), (A2), (A3) называют схемой аксиом.

Наконец, заключительный шаг, закладывающий основу аксиоматической теории высказываний, состоит в выборе *правил вывода*. Единственным правилом вывода будет служить правило заключения (или отделения, или modus ponens, или сокращенно MP): из формул F и $F \to G$ непосредственно следует формула G.

Как и в алгебре высказываний, договоримся внешние скобки у формулы не писать.

Поскольку в аксиомах не участвуют связки $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, то их придётся определить. Введём следующие определения:

$$(F \wedge G) \quad \text{означает} \quad \neg(F \to \neg G)\ ,$$
$$(F \vee G) \quad \text{означает} \quad (\neg F \to G)\ ,$$
$$(F \leftrightarrow G) \quad \text{означает} \quad ((F \to G) \wedge (G \to F))\ .$$

Смысл, например, первого из определений состоит в том, что, каковы бы ни были формулы F и G, формула $(F \wedge G)$ служит обозначением для формулы $\neg(F \to \neg G)$.

Понятие вывода и его свойства. Заложив основу будущей аксиоматической теории в виде системы аксиом и правила вывода, приступим к её развитию, т.е. к доказательству теорем. Прежде всего уточним понятия доказательства и теоремы.

Определение 9.1. *Доказательством* или *выводом* формулы F из множества формул Γ называется такая конечная последовательность $B_1, B_2, ..., B_s$ формул, каждая формула которой является либо аксиомой, либо формулой из Γ, либо получена из двух предыдущих формул этой последовательности по правилу MP, а последняя формула B_s совпадает с F ($B_s \equiv F$). Если имеется вывод формулы F из множества Γ, то говорят, что F *выводима* из Γ, или что Γ *выводит* F, и пишут $\Gamma \vdash F$. Элементы из Γ называются *гипотезами* или *посылками вывода*. Если же имеется вывод формулы F из пустого множества гипотез, то говорят, что F *выводима из аксиом*, или что F *доказуема*, а последовательность $B_1, B_2, ..., B_s$ называется *доказательством* этой формулы. Саму F называют *теоремой* и пишут $\vdash F$. Таким образом, запись $\vdash F$ служит сокращением утверждения "F есть теорема".

Если множество Γ конечно: $\Gamma = \{F_1, F_2, ..., F_m\}$, то вместо $\{F_1, F_2, ..., F_m\} \vdash G$ будем писать $F_1, F_2, ..., F_m \vdash G$.

Совокупность аксиом, правил вывода и всех теорем, выводимых из аксиом, и представляет собой ***аксиоматическую теорию высказываний***, или ***формализованное исчисление высказываний***. Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы научиться доказывать теоремы в данной теории, т.е. научиться строить выводы формул из аксиом.

Приведём пример доказательства какой-нибудь формулы.

Пример 9.2. Доказать: $\vdash F \to F$.

Для доказательства того, что формула $F \to F$ является теоремой формализованного исчисления высказываний, нужно построить вывод (доказательство) этой формулы из аксиом. Таким выводом является, например, следующая последовательность формул:

(1) $(F \to ((F \to F) \to F)) \to ((F \to (F \to F)) \to (F \to F))$,
(2) $F \to ((F \to F) \to F)$,
(3) $(F \to (F \to F)) \to (F \to F)$,
(4) $F \to (F \to F)$,
(5) $F \to F$.

Поясним. Формула (1) представляет собой аксиому (A2), в которой в качестве формул F и H взята формула F, а в качестве формулы G взята формула $F \to F$. Формула (2) представляет собой аксиому (A1), в которой в качестве формулы G берётся формула $F \to F$. Формула (3) получена из формул (1) и (2) по правилу MP. Формула (4) есть аксиома (A1). Наконец, формула (5) получена из формул (3) и (4) по правилу MP.

Таким образом, $\vdash F \to F$.

В следующей теореме отмечается несколько простых, но важных свойств понятия выводимости из гипотез.

Теорема 9.3 (*свойства выводимости*).

а) *Если* $\Gamma \vdash F$ *и* $\Gamma \subseteq \Delta$, *то* $\Delta \vdash F$.

б) $\Gamma \vdash F$ *тогда и только тогда, когда в* Γ *существует такое конечное подмножество* Δ, *что* $\Delta \vdash F$.

в) *Если* $\Gamma \vdash G$ *для любой формулы* G *из множества* Δ *и* $\Delta \vdash F$, *то* $\Gamma \vdash F$.

Доказательство. а) Данное свойство выражает следующий очевидный факт: если формула F выводима из множества посылок Γ, то она будет выводима и из всякого множества, получающегося добавлением к Γ новых посылок.

б) Достаточность вытекает из свойства (а). Обратно, если $\Gamma \vdash F$, то, по определению 9.1, существует вывод F из Γ, т.е. некоторая конечная последовательность формул, использующая, следовательно, лишь конечное число посылок из Γ. Поэтому можно считать, что именно эта конечная часть формул из Γ и выводит формулу F.

в) По условию, $\Delta \vdash F$. Тогда, ввиду предыдущего свойства (б), в Δ существует такое конечное подмножество Δ_0, что $\Delta_0 \vdash F$. Пусть $\Delta_0 = \{B_1, B_2, ..., B_k\}$. По условию, кроме того, $\Gamma \vdash B_1$, $\Gamma \vdash B_2$, ..., $\Gamma \vdash B_k$, т.е. имеются выводы каждой из формул $B_1, B_2, ..., B_k$ из множества гипотез Γ, представляющие собой конечные последовательности формул. Выпишем эти последовательности одну за другой и добавим к ним последовательность, являющуюся выводом формулы Γ из множества гипотез $\Delta_0 = \{B_1, B_2, ..., B_k\}$. Полученная таким образом последовательность будет представлять собой вывод формулы F из множества гипотез Γ, т.е. $\Gamma \vdash F$. □

Теорема о дедукции и следствия из неё. Процесс построения доказательств для тех или иных формул может оказаться достаточно сложным как в идейном, так и в техническом плане. Теорема о дедукции, о которой пойдёт речь, выявляет некоторую общую закономерность при таких построениях и тем самым облегчает процесс построения доказательства, что будет видно из последующих примеров.

Теорема 9.4 (*о дедукции*). *Если* $F_1, ..., F_{m-1}, F_m \vdash G$, *то* $F_1, ..., F_{m-1} \vdash F_m \to G$. *В частности, если* $F \vdash G$, *то* $\vdash F \to G$.

Доказательство. Пусть последовательность формул

$$B_1,\ B_2,\ \dots,\ B_i,\ \dots,\ B_s\,. \tag{1}$$

является выводом формулы G из гипотез $F_1, ..., F_{m-1}, F_m$ (такая последовательность существует, поскольку, по условию, $F_1, ..., F_{m-1}$, $F_m \vdash G$. Следовательно, формула B_s есть формула G, т.е. $B_s \equiv G$ ($\equiv$ – знак графического совпадения, одинаковости формул). Рассмотрим последовательность формул:

$$F_m \to B_1,\ F_m \to B_2,\ \dots,\ F_m \to B_i,\ \dots,\ F_m \to B_s\,. \tag{2}$$

На последнем месте данной последовательности стоит формула $F_m \to G$ (так как $B_s \equiv G$). Но эта последовательность, вообще говоря, не является выводом из гипотез $F_1, ..., F_{m-1}$. Тем не менее, её можно превратить в такой вывод, если перед каждой формулой последовательности добавить подходящие формулы. Для этого покажем методом математической индукции по l, что

$$F_1,\ \dots,\ F_{m-1}\ \vdash\ F_m \to B_l. \tag{3}$$

1) $\underline{l=1}$. Покажем, что $F_1, \ldots, F_{m-1} \vdash F_m \to B_1$. Для формулы B_1 как первого члена последовательности (1), являющейся выводом G из $F_1, \ldots, F_{m-1}, F_m$, могут представиться следующие возможности:

а) B_1 есть либо одна из аксиом, либо одна из гипотез $F_1, \ldots, F_{m-1}$. В этом случае вывод формулы $F_m \to B_1$ из гипотез $F_1, \ldots, F_{m-1}$ строится так:

$$B_1,\ B_1 \to (F_m \to B_1),\ F_m \to B_1. \tag{4}$$

Вторая формула здесь есть аксиома (A1), а третья получена из первых двух по правилу MP. Таким образом, в последовательность (2) перед первой формулой нужно добавить первую и вторую формулы из последовательности (4).

б) B_1 есть гипотеза F_m. Тогда формула $F_m \to B_1$ принимает вид $F_m \to F_m$. Но, согласно примеру 9.2, эта формула выводима не только из гипотез $F_1, \ldots, F_{m-1}$, а выводима просто из аксиом. Её вывод, приведённый в примере 15.2, нужно вписать в последовательность (2) перед первой формулой в этом случае.

2) $\underline{l \le k}$. Предположим, что утверждение (3) верно для всех $l \le k$ и все необходимые выводы добавлены перед всеми k первыми формулами последовательности (2).

3) $\underline{l = k+1}$. Покажем теперь, что утверждение (3) верно для $l = k+1$, т.е. справедлива выводимость: $F_1, \ldots, F_{m-1} \vdash F_m \to B_{k+1}$. Для формулы B_{k+1} как члена последовательности (1), являющейся выводом G из гипотез $F_1, \ldots, F_{m-1}, F_m$, могут представиться следующие возможности:

а), б) B_{k+1} есть либо одна из аксиом, либо одна из гипотез $F_1, \ldots, F_{m-1}, F_m$. Данные возможности абсолютно аналогичны соответствующим возможностям из случая $l = 1$ (там лишь нужно B_1 заменить на B_{k+1}.

в) B_{k+1} получена из двух предыдущих формул B_i, B_j последовательности (1) по правилу MP. Следовательно, $1 \le i < k+1$, $1 \le j < k+1$ и формула $_j$, имеет вид $B_i \to B_{k+1}$, т.е. $B_j \equiv B_i \to B_{k+1}$. Поскольку $1 \le i < k+1$ и $1 \le j < k+1$, поэтому формулы $F_m \to B_i$ и $F_m \to B_j$, стоят в последовательности (2) перед формулой $F_m \to B_{k+1}$ и, следовательно, по предположению индукции, справедливы утверждения о том, что имеются выводы этих формул из гипотез $F_1, \ldots, F_{m-1}$. Выпишем эти выводы последовательно друг за другом (они завершаются формулами $F_m \to B_i$ и $F_m \to (B_i \to B_{k+1})$ соответственно; напоминаем, что $B_j \equiv B_i \to B_{k+1}$):

....
(α) $\qquad F_m \to B_i$,

....
$(\alpha+\beta)$ $\qquad F_m \to (B_i \to B_{k+1})$.

Продолжим эти выводы следующими формулами:

$(\alpha+\beta+1)$ $\quad F_m \to (B_i \to B_{k+1})) \to ((F_m \to B_i) \to (F_m \to B_{k+1}))$,
$(\alpha+\beta+2)$ $\quad (F_m \to B_i) \to (F_m \to B_{k+1})$,
$(\alpha+\beta+3)$ $\quad F_m \to B_{k+1}$.

Первая из формул есть аксиома (A2), вторая формула получена из первой и формулы $(\alpha+\beta)$ по правилу MP, третья получена из второй и формулы (α) по правилу MP. Таким образом, построенная последовательность есть в этом случае вывод формулы $F_m \to B_{k+1}$ из гипотез F_1, ..., F_{m-1}.

Итак, утверждение (3) верно для любого $l = 1, 2, ..., s$. При $l = s$ получаем (напоминаем, что $B_s \equiv G$): $F_1, ..., F_{m-1} \vdash F_m \to G$, что и требовалось доказать. □

В задаче № 8.11 Задачника рассматривается процесс пополнения последовательности (2) до вывода (т.е. процесс восстановления вывода формулы $F_m \to G$ из формул $F_1, ..., F_{m-1}$), исходя из данного вывода формулы G из формул $F_1, ..., F_{m-1}, F_m$ применительно к конкретным формулам $F_1, ..., F_{m-1}, F_m, G$.

Следствие 9.5. $F_1, ..., F_{m-1}, F_m \vdash G$ *тогда и только тогда, когда* $F_1, ..., F_{m-1} \vdash F_m \to G$.

Доказательство. Необходимость представляет собой теорему о дедукции. Обратно, если $F_1, ..., F_{m-1} \vdash F_m \to G$, то существует соответствующий вывод: $B_1, ..., B_{s-1}, F_m \to G$. Дополним его двумя формулами F_m и G. Получим последовательность $B_1, ..., B_{s-1}, F_m \to G$, F_m, G, представляющую собой вывод формулы G из гипотез $F_1, ..., F_{m-1}, F_m$, потому что предпоследняя формула этой последовательности есть одна из гипотез, а последняя получена из двух предшествующих ей формул по правилу MP. Следовательно, $F_1, ..., F_{m-1}, F_m \vdash G$.

Следствие 9.6. $F_1, ..., F_{m-1}, F_m \vdash G$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash F_1 \to (F_2 \to ... \to (F_{m-1} \to (F_m \to G))...)$.

Данное следствие получается в результате m-кратного применения предыдущего следствия.

Применение теоремы о дедукции. С помощью теоремы о дедукции сначала будет доказана одна лемма, которая затем вместе с теоремой о дедукции будет использована для доказательства того, что ряд формул являются теоремами формализованного исчисления высказываний.

Лемма 9.7. *Для любых формул* F, G, H *справедливы следующие выводимости*:

а) $F \to G,\ G \to H \ \vdash F \to H$;
б) $F \to (G \to H),\ G \ \vdash F \to H$.

Доказательство. а) Покажем сначала, что $F \to G,\ G \to H,\ F \vdash H$. Для этого построим последовательность, являющуюся соответствующим выводом: $F \to G$, $G \to H$, F, G, H. Поясним. Первые три формулы последовательности суть гипотезы. Четвёртая формула G получена из первой и третьей формул последовательности по правилу MP, а пятая – из второй и четвёртой по тому же правилу. Итак, $F \to G,\ G \to H,\ F \vdash H$. Отсюда, на основании теоремы о дедукции заключаем, что $F \to G,\ G \to H \vdash F \to H$.

б) Нетрудно видеть, что $F \to (G \to H),\ G,\ F \vdash H$, откуда требуемая выводимость следует на основании теоремы о дедукции. □

Теорема 9.8. *Для любых формул* F, G *следующие формулы являются теоремами формализованного исчисления высказываний*:

а) $\neg\neg F \to F$;
б) $F \to \neg\neg F$;
в) $\neg F \to (F \to G)$;
г) $(\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$;
д) $(F \to G) \to (\neg G \to \neg F)$;
е) $F \to (\neg G \to \neg(F \to G))$;
ж) $(F \to G) \to ((\neg F \to G) \to G)$.

Доказательство. а) Обоснуем возможность доказательства (построения вывода из аксиом) этой формулы.

(1)	$(\neg F \to \neg\neg F) \to ((\neg F \to \neg F) \to F))$,	аксиома (A3)
(2)	$\neg F \to \neg F$,	пример 9.2
(3)	$(\neg F \to \neg\neg F) \to F$,	(1),(2), лемма 9.7,б
(4)	$\neg\neg F \to (\neg F \to \neg\neg F)$,	аксиома (A1)
(5)	$\neg\neg F \to F$.	(4),(3), лемма 9.7,а

Обратим внимание на то, что сама последовательность (1)-(5) не является выводом формулы $\neg\neg F \to F$ из аксиом. Чтобы превратить её в вывод, нужно перед формулами (2) и (5) вписать их выводы из аксиом. Для формулы (2) это сделать нетрудно. Обоснование формулы (5) опирается на утверждение леммы 9.7а, которое, в свою очередь, обосновано с помощью теоремы о дедукции. Поэтому, чтобы это утверждение можно было использовать в формальном выводе, его необходимо превратить в некоторую формулу, вывод которой, в свою очередь, должен быть построен на основании теоремы о дедукции. Продумайте самостоятельно эти взаимосвязи.

б) Строим последовательность формул, которая также выводом не является, служит лишь обоснованием возможности построения такого вывода, но которую можно дополнить до вывода без принципиальных трудностей:

(1)	$(\neg\neg\neg F \to \neg F) \to ((\neg\neg\neg F \to F) \to \neg\neg F))$,	аксиома (A3)
(2)	$\neg\neg\neg F \to \neg F$,	теорема 9.8,а
(3)	$(\neg\neg\neg F \to F) \to \neg\neg F$,	правило MP: (1),(2)
(4)	$F \to (\neg\neg\neg F \to F)$,	аксиома (A1)
(5)	$F \to \neg\neg F)$.	лемма 9.7,а: (4),(3)

в) В двух предыдущих доказательствах теорема о дедукции применялась опосредованно, через посредство леммы 9.7. В настоящей задаче происходит прямое применение этой теоремы. Это делается следующим образом. Покажем сначала, что $\neg F, F \vdash G$. Приводим соответствующий вывод, обосновать который предлагается самостоятельно (это уже действительно вывод, но пока ещё вывод из гипотез – вывод формулы G из гипотез $\neg F, F$):

(1) $\neg F$,
(2) F ,
(3) $F \to (\neg G \to F)$,
(4) $\neg F \to (\neg G \to \neg F)$,
(5) $\neg G \to F$,
(6) $\neg G \to \neg F$,
(7) $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$,
(8) $(\neg G \to F) \to G$,
(9) G .

Итак, $\neg F, F \vdash G$. Тогда, по теореме о дедукции, $\neg F \vdash F \to G$. Применяя ещё раз теорему о дедукции, получаем $\neg F \to (F \to G)$.

г) Покажем, что $\neg G \to \neg F, F \vdash G$. Для этого строим соответствующий вывод (обоснуйте его самостоятельно):

(1) $\neg G \to \neg F$,
(2) F ,

(3) $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$,
(4) $(\neg G \to F) \to G$,
(5) $F \to (\neg G \to F)$,
(6) $\neg G \to F$,
(7) G .

Итак, $\neg G \to \neg F,\ F \ \vdash\ G$. Применив теперь дважды теорему о дедукции, получаем требуемый результат.

д) Покажем сначала, что $F \to G \ \vdash\ \neg G \to \neg F$. Строим последовательность формул, которая выводом не является (снова обращаемся к лемме 9.7 и ещё к доказанным выше теоремам а), б) и г), но может быть дополнена до такового:

(1)	$F \to G$,	гипотеза
(2)	$\neg\neg F \to F$,	теорема 9.8,а
(3)	$\neg\neg F \to G$,	лемма 9.7,а: (2),(1)
(4)	$G \to \neg\neg G$,	теорема 9.8, б
(5)	$\neg\neg F \to \neg\neg G$,	лемма 9.7,а: (3),(4)
(6)	$(\neg\neg G \to \neg\neg F) \to (\neg F \to \neg G)$,	теорема 9.8,г
(7)	$\neg F \to \neg G$.	правило MP: (5), (6)

Применив теорему о дедукции, получаем требуемое утверждение.

е) По правилу MP имеем $F, F \to G \ \vdash\ G$. Тогда по теореме о дедукции $F \ \vdash\ (F \to G) \to G$. Применяем ещё раз теорему о дедукции: $\vdash\ F \to ((F \to G) \to G)$. Далее, по пункту д) настоящей теоремы имеем (взяв в качестве F формулу $F \to G$, а в качестве G – саму G): $((F \to G) \to G) \to (\neg G \to \neg(F \to G))$. Из этих двух последних утверждений на основании леммы 9.7а, получаем $\vdash F \to (\neg G \to \neg(F \to G))$.

ж) Покажем сначала, что $F \to G, \neg F \to G \ \vdash\ G$. В самом деле, строим соответствующую последовательность (определите самостоятельно, что это – вывод из гипотез или обоснование возможности его построения):

(1) $F \to G$,
(2) $\neg F \to G$,
(3) $(F \to G) \to (\neg G \to \neg F)$,
(4) $\neg G \to \neg F$,
(5) $(\neg F \to G) \to (\neg G \to \neg\neg F)$,
(6) $\neg G \to \neg\neg F$,
(7) $(\neg G \to \neg\neg F) \to ((\neg G \to \neg F) \to G)$,

(8) $(\neg G \to \neg F) \to G$,

(9) G .

Итак, $F \to G, \neg F \to G \vdash G$. Следовательно, по теореме о дедукции $F \to G \vdash (\neg F \to G) \to G$. Ещё раз применяя теорему о дедукции, получаем: $(F \to G) \to ((\neg F \to G) \to G)$.

Производные правила вывода. Нами уже довольно глубоко развита аксиоматическая теория высказываний: теорема о дедукции, вскрыв важное свойство выводимости, оказалась мощным средством, облегчающим доказательства того, что та или иная формула является теоремой формализованного исчисления высказываний. Следующим шагом на этом пути служит выявление дальнейших закономерностей процесса выведения одних формул из других и формулировка таких закономерностей в виде правил вывода. Получаемые вторичные правила вывода носят названия *производных правил вывода.* Разделим их на две группы и сформулируем их в двух теоремах: в одной – производные правила введения логических связок, в другой – производные правила удаления таких связок. Для формулировки правил будет использоваться символическая запись. Например, правило

$$\frac{\Gamma \vdash F; \qquad \Gamma \vdash F \to G}{\Gamma \vdash G};$$

состоит в следующем: "Если $\Gamma \vdash F$ и $\Gamma \vdash F \to G$, то $\Gamma \vdash G$" .

Теорема 9.9 (*правила введения логических связок*). *Справедливы следующие производные правила вывода, называемые правилами введения логических связок* (*где* Γ – *некоторое, возможно, и пустое множество формул*):

а) *введение импликации* ($\to$ -вв) :

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \to G};$$

б) *введение конъюнкции* ($\wedge$ -вв) :

$$\frac{\Gamma \vdash F; \qquad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G};$$

в) *введение дизъюнкции* ($\vee$ -вв) :

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G}, \qquad \frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G};$$

г) *введение отрицания* (*приведение к абсурду*) ($\neg$ -вв) :

$$\frac{\Gamma,\ F \vdash G;\quad \Gamma,\ F \vdash \neg G}{\Gamma \vdash \neg F}.$$

Доказательство. а) Данное правило есть не что иное, как теорема о дедукции (теорема 9.4).

б) Обосновать правило предлагается самостоятельна. Напомним только, что запись $F \wedge G$, согласно определению, означает $\neg(F \to \neg G)$.

в) Обоснуем первое правило. При доказательстве теоремы 9.8,в показано, что $\neg F, F \vdash G$, или $F, \neg F \vdash G$. Отсюда, по теореме о дедукции, заключаем, что $F \vdash \neg F \to G$, т.е., на основании определения логической связки дизъюнкции, $F \vdash F \vee G$. Поэтому если $\Gamma \vdash F$, то отсюда, в силу теоремы 9.3 в, заключаем, что $\Gamma \vdash F \vee G$.

Обосновать второе правило введения дизъюнкции предлагается самостоятельно.

г) Пусть дано, что $\Gamma,\ F \vdash G$ и $\Gamma,\ F \vdash \neg G$. Тогда, по теореме о дедукции, $\Gamma \vdash F \to G$ и $\Gamma \vdash F \to \neg G$. Выпишем друг за другом обе последовательности формул, представляющие собой выводы формул $F \to G$ и $F \to \neg G$ из множества посылок Γ:

....

(α) $\qquad F \to G$

....

$(\alpha+\beta)$ $\qquad F \to \neg G$.

Продолжим полученную последовательность следующим образом:

$(\alpha+\beta+1)$	$(F \to G) \to (\neg G \to \neg F)$,	теорема 9.8д
$(\alpha+\beta+2)$	$\neg G \to \neg F$,	MP: (α),$(\alpha+\beta+1)$
$(\alpha+\beta+3)$	$(\neg G \to \neg F) \to (\neg\neg F \to \neg\neg G)$,	теорема 9.8д
$(\alpha+\beta+4)$	$\neg\neg F \to \neg\neg G$,	MP: $(\alpha+\beta+2)$, $(\alpha+\beta+3)$
$(\alpha+\beta+5)$	$(F \to \neg G) \to (\neg\neg G \to \neg F)$,	теорема 9.8д
$(\alpha+\beta+6)$	$\neg\neg G \to \neg F$,	MP: $(\alpha+\beta)$, $(\alpha+\beta+5)$
$(\alpha+\beta+7)$	$(\neg\neg G \to \neg F) \to (\neg\neg F \to \neg\neg\neg G)$,	теорема 9.8д
$(\alpha+\beta+8)$	$\neg\neg F \to \neg\neg\neg G$,	MP: $(\alpha+\beta+6)$, $(\alpha+\beta+7)$
$(\alpha+\beta+9)$	$\neg\neg\neg G \to \neg G$,	теорема 9.8а
$(\alpha+\beta+10)$	$\neg\neg F \to \neg G$,	лемма 9.7а: $(\alpha+\beta+8)$, $(\alpha+\beta+9)$
$(\alpha+\beta+11)$	$(\neg\neg F \to \neg\neg G) \to ((\neg\neg F \to \neg G) \to \neg F)$,	аксиома (A3)
$(\alpha+\beta+12)$	$(\neg\neg F \to \neg G) \to \neg F$,	MP: $(\alpha+\beta+4)$, $(\alpha+\beta+11)$
$(\alpha+\beta+13)$	$\neg F$.	MP: $(\alpha+\beta+10)$, $(\alpha+\beta+12)$

Тем самым доказано, что $\Gamma \vdash \neg F$.

ТЕОРЕМА 9.10 (*правила удаления логических связок.*) *Справедливы, следующие производные правила вывода, называемые правилами удаления логических связок (где* Г *некоторое, возможно, и пустое множество формул)*:

а) *удаление импликации* ($\to$ -уд) :

$$\frac{\Gamma \vdash F; \quad \Gamma \vdash F \to G}{\Gamma \vdash G};$$

б) *удаление конъюнкции* ($\wedge$ -уд) :

$$\frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F}, \qquad \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash G};$$

в) *удаление конъюнкции* ($\wedge$ -уд) :

$$\frac{\Gamma,\ F,\ G \vdash H}{\Gamma,\ F \wedge G \vdash H};$$

г) *удаление дизъюнкции* (*Генцен*) :

$$\frac{\Gamma \vdash F \vee G; \quad \Gamma, F \vdash H; \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H};$$

д) *удаление дизъюнкции* (*Клини*) :

$$\frac{\Gamma, F \vdash H; \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma, F \vee G \vdash H};$$

е) *сильное удаление отрицания* (*сильное* $\neg$ -уд) :

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg F}{\Gamma \vdash F};$$

ж) *слабое удаление отрицания* (*слабое* $\neg$ -уд) :

$$\frac{\Gamma \vdash F; \quad \Gamma \vdash \neg F}{\Gamma \vdash G}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Это правило получается непосредственно на основании правила вывода modus ponens (MP).

б) Обоснуем второе из двух правил удаления конъюнкции, предоставив сделать обоснование первого правила самостоятельно. Пусть $\Gamma \vdash F \wedge G$. Покажем, что $F \wedge G \vdash G$. Напомним, что по определению конъюнкции запись $F \wedge G$ означает $\neg(F \to \neg G)$. Поэтому нужно показать, что $\neg(F \to \neg G) \vdash G$. Строим соответствующий вывод:

(1) $\neg(F \to \neg G)$, гипотеза
(2) $\neg(F \to \neg G) \to (\neg G \to \neg(F \to \neg G))$, аксиома (A1)
(3) $\neg G \to \neg(F \to \neg G)$, MP: (1),(2)
(4) $(\neg G \to \neg(F \to \neg G)) \to ((\neg G \to (F \to \neg G)) \to G)$, аксиома (A3)
(5) $(\neg G \to (F \to \neg G)) \to G$, MP: (3),(4)
(6) $\neg G \to (F \to \neg G)$, аксиома (A1)
(7) G. MP: (5),(6)

Итак, $\Gamma \vdash F \wedge G$ и $F \wedge G \vdash G$. Следовательно, по теореме 9.3 в заключаем, что $\Gamma \vdash G$.

е) Пусть $\Gamma \vdash \neg\neg F$. Ввиду теоремы 9.8,а имеем $\vdash \neg\neg F \to F$, что, на основании следствия 9.6 из теоремы о дедукции, даёт выводимость $\neg\neg F \vdash \to F$. Следовательно, из двух выводимостей $\Gamma \vdash \neg\neg F$ и $\neg\neg F \vdash \to F$ по теореме 9.3 в, заключаем, что $\Gamma \vdash F$.

Теорема доказана. □

Остальные правила вывода рассматриваются в Задачнике, №№ 8.19, 8.20. Там же в задачах 8.21 и 8.22 приведены примеры доказательств с использованием производных правил вывода.

Значение логической теоремы о дедукции для доказательства математических теорем. В заключение, обратим внимание на следующее обстоятельство. При доказательстве математической теоремы вида $A \to B$ ("*Если* A, *то* B") мы, исходя из утверждения A, строим такую последовательность утверждений $A \equiv A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_{n-1},\ A_n \equiv B$, в которой каждое последующее является логическим следствием предыдущего. В результате фактически доказывается, что утверждение B является логическим следствием утверждения A, т.е. $A \models B$. Поскольку в процессе доказательства мы опирались на некоторые ранее доказанные теоремы, совокупность которых обозначим Γ, то, значит нами доказана выводимость $\Gamma, A \models B$. Отсюда мы негласно заключаем, что требуемая теорема $A \to B$ доказана, т.е. утверждение $A \to B$ истинно. Спрашивается, на основании чего делается этот вывод. Он делается на основании правила введения импликации, которое утверждает, что из выводимости $\Gamma, A \models B$ следует выводимость $\Gamma \models A \to B$.

В формальных логических исчислениях (высказываний и предикатов) понятие формального вывода (из аксиом) служит моделью процесса реального доказательства математической теоремы. Таким образом, с точки зрения теории формального вывода доказательство теоремы $A \to B$ означает доказательство следующего утверждения: $A \vdash B$, или с учётом гипотез: $\Gamma, A \vdash B$. Как уже было сказано, отсюда мы обычно негласно заключаем, что справедливо утверждение $A \to B$. С точки зрения теории формального вывода это означает, что справедливо утверждение $\vdash A \to B$ (или соответственно $\Gamma \vdash A \to B$). Переход от утверждения: $A \vdash B$ (или соответственно $\Gamma, A \vdash B$) к утверждению $\vdash A \to B$ (соответственно $\Gamma \vdash A \to B$) носит уже не математический (присущий данной математической теории) характер, а чисто логический характер. И обоснование этого перехода даёт математическая логика, теория формального вывода. Этот переход есть не что иное, как теорема (метатеорема по отношению к математической теории) о дедукции.

Таким образом, соответствующий переход (логический шаг), негласно совершаемый при доказательстве математических теорем, получает строгое логико-математическое обоснование.

Итак, здесь необходимо уяснить, что теория формального вывода, разработанная математической логикой, не умозрительное построение абстрактной науки, а отражение реальных явлений математического мира. Эта теория есть составная часть аксиоматического метода в математике, понимание которого началось ещё с Евклида. Но Евклид осознал лишь необходимость наличия неких первоначальных утверждений (аксиом), из которых все последующие выводились бы с помощью доказательств. Он не дошёл до осознания необходимости первоначальных понятий и, тем более, он не мог формализовать понятия выводимости, следования, доказательства. В формализованных логических исчислениях эта сторона аксиоматического метода доведена до полного формализма: мы точно знаем, что значит, что из одного утверждения следует другое. (Ключевым моментом в этом определении является правило MP). В этом и заключается одно из значений математической логики для более осознанного, строгого и критического подхода к доказательству теорем из различных разделов математики.

§10. Полнота и другие свойства формализованного исчисления высказываний

Если в предыдущем параграфе мы находились как бы внутри аксиоматической теории высказываний, развивая её саму, то сейчас будем смотреть на построенную теорию со стороны и будем создавать науку об аксиоматической теории высказываний. Мы установим ряд важных свойств этой теории: полноту, разрешимость, непротиворечивость.

Доказуемость формулы и её тождественная истинность (синтаксис и семантика). В основе формализованного исчисления высказываний лежат понятия, относящиеся к так называемой области синтаксиса, т.е. понятия, представляющие собой некие абстрактные, лишённые смысла знаки и формальные действия с ними: алфавит, формула, аксиома, правило вывода, доказательство, теорема. Эти понятия принято называть *синтаксическими.*

В то же время алгебра высказываний, изученная нами в главе I, пронизана содержательным смыслом: за каждой пропозициональной переменной стоит конкретное высказывание нашего языка, каждая формула может превращаться в конкретное составное высказывание, некоторые формулы могут превращаться только в истинные высказывания (тавтологии) и т.д. Говорят, что это – область семантики: здесь каждое понятие наполнено каким-то внутренним содержанием, смыслом. Понятия истины и лжи, тождественной истинности и тождественной ложности формул, равносильности и логического следования формул считают понятиями *семантическими.*

Каково же взаимоотношение между формализованным исчислением высказываний и алгеброй высказываний, между синтаксисом и семантикой? Перекинуть мостик от одной области к другой и призвана теорема полноты, о которой пойдёт речь в настоящем параграфе. Оказывается, формализованное исчисление высказываний построено так, что всякая его теорема является тавтологией (тождественно истинной формулой) алгебры высказываний, и обратно, для всякой тавтологии алгебры высказываний можно построить её вывод из аксиом формализованного исчисления высказываний, т.е. доказать, что она является теоремой исчисления. В этом состоит теорема полноты. Таким образом, теорема полноты как бы свяжет абстрактную аксиоматическую теорию высказываний и содержательную алгебру высказываний, теорию с практикой, и тем самым продемонстрирует адекватность отражения абстрактной теорией наших практических знаний о высказываниях языка.

Сформулируем и докажем первую часть теоремы полноты.

Теорема 10.1. *Всякая доказуемая в формализованном исчислении высказываний формула является тождественно истинной формулой (или тавтологией) алгебры, высказываний.*

Символически: $\boxed{\vdash F \quad \Longrightarrow \quad \models F}$.

Доказательство. Пусть формула F доказуема в формализованном исчислении высказываний и последовательность $B_1, B_2, \ldots, B_s$ представляет собой вывод формулы F из аксиом.

Покажем, что F – тавтология. Доказательство будем вести индукцией по длине s вывода этой формулы.

$\underline{s=1}$. Тогда последовательность-вывод состоит из единственной формулы B_1, которая, следовательно, может быть на основании определения вывода только аксиомой. Все три аксиомы (A1), (A2) и (A3) являются тавтологиями алгебры высказываний на основании теорем 3.1,з, 3.3,а, 3.3,л соответственно.

$\underline{s \leq n}$. Предположим теперь, что все формулы, имеющие вывод длины $s \leq n$, являются тавтологиями. Это предположение индукции.

$\underline{s = n+1}$. Покажем, что всякая формула, имеющая вывод длины $s = n+1$, также является тавтологией. В самом деле, пусть F – произвольная формула и $B_1, B_2, ..., B_n, B_{n+1} \equiv F$ – её вывод длины $n+1$. На основании предположения индукции, первые n членов данной последовательности – тавтологии. Рассмотрим формулу B_{n+1}. По определению вывода, она может быть либо аксиомой (и тогда она является тавтологией, как было отмечено в первой части доказательства), либо получена из двух предыдущих членов этой последовательности B_i и B_j $(1 \leq i \leq n-1,\ 2 \leq j \leq n)$ по правилу modus ponens (MP). Во втором случае тогда $B_j \equiv B_i \to B_{n+1}$ и, кроме того, обе формулы B_i и B_j являются тавтологиями на основании предположения индукции. Итак, $\models B_i$ и $\models B_i \to B_{n+1}$. Следовательно, по теореме 3.5 (правило заключения), $\models B_{n+1}$.

Итак, какой бы длины ни имела вывод в формализованном исчислении высказываний формула, она будет тавтологией алгебры высказываний. □

Для доказательства второй части теоремы полноты (т.е. теоремы, обратной к только что доказанной теореме) понадобится одна лемма, которой и посвящается следующий пункт.

Лемма о выводимости. Пусть $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ – упорядоченный набор длинны n, составленный из нулей и единиц, т.е. каждое $\sigma_i = 0$ или 1 (i=1,2,..., n). Из доказательства теоремы 10.3 известно, что всего таких наборов имеется 2^n штук.

Определение 10.2. *σ-двойником*, где $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, для формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется сама эта формула, если она превращается в истинное высказывание $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ при подстановке вместо её пропозициональных переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ таких высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$ соответственно, что $\lambda(A_1) = \sigma_1$, $\lambda(A_2) = \sigma_2, \ldots, \lambda(A_n) = \sigma_n$, и называется формула $\neg F(X_1, X_2, ..., X_n)$, если при указанной подстановке она превращается в ложное высказывание $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ Обозначение σ-двойника для формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ следующее: $F^\sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$. Тогда символически данное определение можно записать так:

$$F^\sigma(X_1, X_2, ..., X_n) = \begin{cases} F(X_1, X_2, ..., X_n), & F(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1, \\ \neg F(X_1, X_2, ..., X_n), & F(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0. \end{cases}$$

Пример 10.3. Найти σ-двойники для формул

$$F(X_1, X_2, X_3, X_4) \equiv (X_1 \to \neg X_2) \lor (X_3 \land (\neg X_1 \leftrightarrow X_4)),$$

$$G(X_1, X_2, X_3, X_4) \equiv (X_1 \lor \neg X_3) \leftrightarrow (X_2 \land (\neg X_3 \to \neg X_4)),$$

если $\sigma = (0,1,1,0)$.

Находим сначала значения этих формул при подстановке вместо переменных X_1, X_2, X_3, X_4 значений 0, 1, 1, 0, соответственно:

$$F(0,1,1,0) = (0 \to \neg 1) \lor (1 \land (\neg 0 \leftrightarrow 0)) = (0 \to 0) \lor (1 \land (1 \leftrightarrow 0)) =$$
$$= 1 \lor (1 \land 0) = 1 \lor 0 = 1,$$
$$G(0,1,1,0) = (0 \lor \neg 1) \leftrightarrow (1 \land (\neg 1 \to \neg 0)) = (0 \lor 0) \leftrightarrow (1 \land (0 \to 1)) =$$
$$= 0 \leftrightarrow (1 \land 1) = 0 \leftrightarrow 1 = 0.$$

Тогда, но определению σ-двойника, имеем:

$$F^\sigma(X_1, X_2, ..., X_n) \equiv (X_1 \lor \neg X_3) \leftrightarrow (X_2 \land (\neg X_3 \to \neg X_4)),$$

$$G^\sigma(X_1, X_2, ..., X_n) \equiv \neg((X_1 \lor \neg X_3) \leftrightarrow (X_2 \land (\neg X_3 \to \neg X_4))).$$

Лемма 10.4 (о выводимости). *Для всякой формулы $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и всякого набора $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, где $\sigma_i = 0$ или 1 (i=1,2,..., n), справедлива следующая выводимость:*

$$X_1^{\sigma_1}, X_2^{\sigma_2}, \ldots, X_n^{\sigma_n} \vdash F^\sigma(X_1, X_2, ..., X_n),$$

где

$$X_i^{\sigma_i} = \begin{cases} X_i, & \textit{если} \quad \sigma_i = 1, \\ \neg X_i, & \textit{если} \quad \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Для доказательства применим индукцию по числу l логических связок, использованных при построении формулы F.

$\underline{l = 0}$ (в формуле F нет логических связок). В этом случае формула F есть пропозициональная переменная, например, X_1. Тогда $F^\sigma = X_1^\sigma$ и утверждение леммы принимает следующую очевидную форму: $X_1^\sigma \vdash X_1^\sigma$.

$\underline{l \le k}$. Предположим, что утверждение леммы справедливо для всех формул с числом логических связок $l \le k$.

$\underline{l = k+1}$. Покажем тогда, что утверждение леммы будет справедливо и для любой формулы с числом логических связок $l = k+1$. Пусть $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ – произвольная такая формула. Тогда, на основании определения формулы формализованного исчисления высказывании (см. первый пункт §9), F имеет один из следующих двух видов: $F \equiv \neg G$ или $F \equiv G \to H$. Рассмотрим последовательно эти две возможности.

Пусть сначала $F \equiv \neg G$. Тогда формула $G(X_1, X_2, ..., X_n)$ содержит логических связок $\le k$, и для неё, по предположению индукции, будет справедлива выводимость

$$X_1^{\sigma_1}, X_2^{\sigma_2}, ..., X_n^{\sigma_n} \quad \vdash \quad G^\sigma(X_1, X_2, ..., X_n) \ .$$

Покажем, что $G^\sigma \vdash F^\sigma$, т.е. $G^\sigma \vdash (\neg G)^\sigma$. В самом деле, если набор $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ таков, что $G(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0$, то $\neg G(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1$, и, по определению 10.2 σ-двойника, имеем $G^\sigma = \neg G$ и $(\neg G)^\sigma = \neg G$. В этом случае требуемая выводимость принимает следующую очевидную форму: $\neg G \vdash \neg G$. Если же набор $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ таков, что $G(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1$, то $\neg G(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0$, и соответствующие σ-двойники таковы: $G^\sigma = G$ и $(\neg G)^\sigma = \neg\neg G$. В этом случае требуемая выводимость принимает форму $G \vdash \neg\neg G$. Данная выводимость действительно справедлива на основании теоремы 9.8,б и следствия 9.5 из теоремы о дедукции.

Итак, $X_1^{\sigma_1}, X_2^{\sigma_2}, ..., X_n^{\sigma_n} \vdash G^\sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $G^\sigma \vdash F^\sigma$. Тогда, в силу теоремы 9.3 в, $X_1^{\sigma_1}, X_2^{\sigma_2}, ..., X_n^{\sigma_n} \vdash F^\sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Рассмотрим теперь вторую возможность: $F \equiv G \to H$. Снова каждая из формул G и H содержит логических связок $\le k$; для каждой из них будет справедливо предположение индукции

$$X_1^{\sigma_1}, X_2^{\sigma_2}, ..., X_n^{\sigma_n} \quad \vdash \quad G^\sigma(X_1, X_2, ..., X_n); \qquad (10.1)$$

$$X_1^{\sigma_1}, X_2^{\sigma_2}, ..., X_n^{\sigma_n} \quad \vdash \quad H^\sigma(X_1, X_2, ..., X_n) \ . \qquad (10.2)$$

Покажем, что $G^\sigma, H^\sigma \vdash F^\sigma$, т.е. $G^\sigma, H^\sigma \vdash (G \to H)^\sigma$. Расшифруем значения σ-двойников во всех случаях, которые могут представиться.

Случай 1. Набор $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ таков, что $G(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0$ и $H(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0$. Тогда $G(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \to H(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0 \to 0 = 1$ и σ-двойники имеют вид: $G^\sigma \equiv \neg G$, $H^\sigma \equiv \neg H$, $(G \to$

$H)^\sigma \equiv G \to H$. Требуемая выводимость принимает следующий вид: $\neg G, \neg H \vdash G \to H$.

Покажем, что это действительно так. В самом деле, на основании теоремы 9.8,в, имеем $\vdash \neg G \to (G \to H)$. Тогда, по следствию 9.5 из теоремы о дедукции, заключаем, что $\neg G \vdash G \to H$. Применив теорему 9.3, а, получаем $\neg G, \neg H \vdash G \to H$.

Случай 2. Набор $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ таков, что $G(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0$ и $H(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1$. Тогда $G(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \to H(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0 \to 1 = 1$ и σ-двойники имеют в этом случае следующий вид: $G^\sigma \equiv \neg G$, $H^\sigma \equiv H$, $(G \to H)^\sigma \equiv G \to H$. Требуемая выводимость принимает следующий вид: $\neg G, H \vdash G \to H$. Её доказательство ничем не отличается от доказательства выводимости в предыдущем случае.

Случай 3. Набор $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ таков, что $G(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1$ и $H(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0$. Тогда $G(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \to H(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1 \to 0 = 0$ и σ-двойники имеют следующий вид: $G^\sigma \equiv G$, $H^\sigma \equiv \neg H$, $(G \to H)^\sigma \equiv \neg(G \to H)$. Требуемая выводимость принимает следующий вид: $G, \neg H \vdash \neg(G \to H)$. Покажем, что это действительно так. Ясно, что справедливы выводимости $G, \neg H, G \to H \vdash \neg H$ и $G, \neg H, G \to H \vdash H$ (первая очевидна, а вторая следует на основе правила MP: $G, G \to H \vdash H$). Из них, по правилу введения отрицания (теорема 9.9,г), получаем $G, \neg H \vdash \neg(G \to H)$.

Случай 4. Набор $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ таков, что $G(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1$ и $H(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1$. Тогда $G(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \to H(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1 \to 1 = 1$ и σ-двойники имеют вид: $G^\sigma \equiv G$, $H^\sigma \equiv H$, $(G \to H)^\sigma \equiv G \to H$. Требуемая выводимость принимает следующий вид: $G, H \vdash G \to H$.

Проверим, что это действительно так. Рассмотрим последовательность формул $H, H \to (G \to H), G \to H$. Первую формулу последовательности будем считать гипотезой. Вторая формула представляет собой аксиому (A1) формализованного исчисления высказываний, а третья получена из двух предыдущих по правилу MP. Следовательно, рассматриваемая последовательность есть вывод её последней формулы $G \to H$ из гипотезы H. Итак, $H \vdash G \to H$. Вспоминая теорему 9.3,а, заключаем, что $G, H \vdash G \to H$.

Итак, рассмотренные четыре случая приводят к заключению: для любого набора σ нулей и единиц справедлива выводимость $G^\sigma, H^\sigma \vdash F^\sigma$. Эта выводимость вместе с выводимостями (10.1) и (10.2) на основании теоремы 19.3 в даёт следующую выводимость: $X_1^{\sigma_1}, X_2^{\sigma_2}, \ldots, X_n^{\sigma_n} \vdash F^\sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Тем самым сделан шаг индукции и можно заключить, что утверждение леммы справедливо для любой формулы F.

Лемма доказана. $\square$

Полнота формализованного исчисления высказываний. В первом пункте настоящего параграфа было сказано, что полнота формализованного исчисления высказываний состоит в совпадении множества доказуемых формул с множеством тавтологий. Включение первого множества во второе (первая часть теоремы полноты) было установлено в теореме 10.1. Теперь нами всё подготовлено к тому, чтобы доказать вторую часть теоремы о полноте формализованного исчисления высказываний.

ТЕОРЕМА 10.5. *Всякая тождественно истинная формула (или тавтология) алгебры высказываний доказуема в формализованном исчислении высказываний. Символически:* $\boxed{\models F \quad \Longrightarrow \quad \vdash F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть формула $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ является тавтологией алгебры высказываний. На основании леммы 10.4 о выводимости, имеем $X_1^{\sigma_1}, X_2^{\sigma_2}, ..., X_n^{\sigma_n} \vdash F^{\sigma}(X_1, X_2, ..., X_n)$ для любого набора $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ из нулей и единиц. Поскольку формула $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ при любой подстановке превращается в истинное высказывание (она – тавтология), то для любого набора $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ σ-двойником формулы F будет сама эта формула, т.е. $F^{\sigma} = F$ для любого σ. Тогда $X_1^{\sigma_1}, X_2^{\sigma_2}, ..., X_n^{\sigma_n} \vdash F(X_1, X_2, ..., X_n)$. В частности, для $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}, 1)$ имеем (в этом случае $X_n^{\sigma_n} = X_n^1 = X_n$):

$$X_1^{\sigma_1},\ X_2^{\sigma_2},\ ...\ ,\ X_{n-1}^{\sigma_{n-1}}, X_n \ \vdash\ F(X_1, X_2, ..., X_n), \tag{10.3}$$

а для $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}, 0)$ имеем (в этом случае $X_n^{\sigma_n} = X_n^0 = \neg X_n$):

$$X_1^{\sigma_1},\ X_2^{\sigma_2},\ ...\ ,\ X_{n-1}^{\sigma_{n-1}}, \neg X_n \ \vdash\ F(X_1, X_2, ..., X_n). \tag{10.4}$$

Из выводимостей (10.3) и (10.4) по правилу удаления дизъюнкции (теорема 9.10,д) получаем

$$X_1^{\sigma_1},\ X_2^{\sigma_2},\ ...\ ,\ X_{n-1}^{\sigma_{n-1}},\ X_n \vee \neg X_n \ \vdash\ F(X_1, X_2, ..., X_n)\ .$$

Поскольку формула $X_n \vee \neg X_n$ выводима из аксиом (см. определение связки $\vee$ в начале §9 и пример 9.2), поэтому её можно исключить из числа посылок последней выводимости. Тогда

$$X_1^{\sigma_1},\ X_2^{\sigma_2},\ ...\ ,\ X_{n-1}^{\sigma_{n-1}} \ \vdash\ F(X_1, X_2, ..., X_n)\ .$$

Далее нужно брать в качестве σ наборы следующих видов: $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ...\ , 1, \sigma_n)$ и $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., 0, \sigma_n)$, для которых соответственно получим

$$X_1^{\sigma_1},\ X_2^{\sigma_2},\ \dots,\ X_{n-2}^{\sigma_{n-2}},\ X_{n-1}\ \vdash\ F(X_1,X_2,\dots,X_n)\ \text{ и}$$

$$X_1^{\sigma_1},\ X_2^{\sigma_2},\ \dots,\ X_{n-2}^{\sigma_{n-2}}, \neg X_{n-1}\ \vdash\ F(X_1,X_2,\dots,X_n).$$

Отсюда, также по правилу удаления дизъюнкции, получаем

$$X_1^{\sigma_1},\ X_2^{\sigma_2},\ \dots,\ X_{n-2}^{\sigma_{n-2}},\ X_{n-1} \vee \neg X_{n-1}\ \vdash\ F(X_1,X_2,\dots,X_n)$$

и далее $$X_1^{\sigma_1},\ X_2^{\sigma_2},\ \dots,\ X_{n-2}^{\sigma_{n-2}}\ \vdash\ F(X_1,X_2,\dots,X_n)\ .$$

Проделав n раз эту процедуру, придём к заключению, что $\vdash F$, т.е. формула F доказуема в формализованном исчислении высказываний.

Теорема доказана. □

Объединив теоремы 10.1 и 10.5, получим теорему о полноте.

Теорема 10.6 (*о полноте формализованного исчисления высказываний*). ***Формула тогда и только тогда доказуема в формализованном исчислении высказываний (является теоремой исчисления), когда она является тавтологией алгебры высказываний.***

Символически: $\boxed{\vdash F \iff \models F}$.

Теорема адекватности. Теорема является обобщением предыдущей теоремы о полноте и вытекает из неё.

Теорема 10.7 (адекватности). *Формула G выводима в формализованном исчислении высказываний из конечного множества гипотез Γ тогда и только тогда, когда она является логическим следствием всех формул из этого множества. Символически:*

$$\boxed{F_1,F_2,\dots,F_m \vdash G \iff F_1,F_2,\dots,F_m \models G}\ .$$

Доказательство. Пусть $F_1,F_2,\dots,F_m \vdash G$. Тогда, по следствию 9.6 из теоремы о дедукции, данное утверждение эквивалентно тому, что

$$\vdash F_1 \to (F_2 \to \dots \to (F_{m-1} \to (F_m \to G))\dots)\ .$$

Это утверждение, в свою очередь, эквивалентно, на основании теоремы полноты, следующему:

$$\models F_1 \to (F_2 \to \dots \to (F_{m-1} \to (F_m \to G))\dots)\ .$$

Теперь мы оказываемся в алгебре высказываний. На основании теоремы 4.4,г, последняя формула равносильна формуле

$$(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_m) \to G\ .$$

(Точнее, на основании этой теоремы можно утверждать равносильность данных формул лишь при $m = 2$, но ясно, что утверждение нетрудно распространить и на произвольное натуральное число m, например, методом математической индукции, что рекомендуется проделать самостоятельно. Тогда из тождественной истинности одной из формул и их равносильности заключаем, что и вторая формула также будет тавтологией (см. замечание 4.7). Итак,

$$\models (F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m) \rightarrow G .$$

Это утверждение, на основании теоремы 6.4, эквивалентно следующему: $F_1, F_2, \ldots, F_m \models G$, что и требовалось доказать. □

Непротиворечивость формализованного исчисления высказываний. Непротиворечивость – важнейшее свойство, которым должна обладать аксиоматическая теория. Противоречивая теория никакой ценности не имеет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.8. Аксиоматическая теория называется *непротиворечивой*, если ни для какого утверждения A, сформулированного в терминах этой теории, само утверждение A и его отрицание $\neg A$ не могут быть одновременно теоремами данной теории. Если для некоторого утверждения A теории оба утверждения A и $\neg A$ – теоремы этой теории, то аксиоматическая теория называется *противоречивой*.

Применительно к формализованному исчислению высказываний непротиворечивость означает, что в нём не существует такой формулы F, что сама формула и её отрицание $\neg F$ являются теоремами формализованного исчисления высказываний, т.е. выводимы из аксиом. Следующая теорема утверждает, что это действительно так.

ТЕОРЕМА 10.9 (*о непротиворечивости формализованного исчисления высказываний*). *Формализованное исчисление высказываний есть непротиворечивая аксиоматическая теория.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, т.е. формализованное исчисление высказываний противоречиво. Значит, имеется такая формула F, что F и $\neg F$ являются теоремами формализованного исчисления высказываний. Тогда, по теореме 10.1, каждая из формул F и $\neg F$ является тавтологией алгебры высказываний. Но последнее невозможно на основании определения тавтологии. Следовательно, формализованное исчисление высказываний непротиворечиво. □

Разрешимость формализованного исчисления высказываний. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.10. Аксиоматическая теория называется *разрешимой*, если существует алгоритм, позволяющий для любого утверждения, сформулированного в терминах теории, ответить на вопрос, будет или нет это утверждение теоремой данной теории.

Теорема 10.11 (*о разрешимости формализованного исчисления высказываний*). ***Формализованное исчисление высказываний есть разрешимая аксиоматическая теория.***

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно указать алгоритм, позволяющий для каждой формулы формализованного исчисления высказываний отвечать на вопрос, можно или нельзя вывести её из аксиом. Такой алгоритм есть. На основании теоремы 10.6 о полноте формализованного исчисления высказываний, доказуемость формулы в формализованном исчислении высказываний эквивалентна тождественной истинности данной формулы в алгебре высказываний. Для проверки последнего свойства нужно составить таблицу истинности формулы. Если последний столбец таблицы будет состоять лишь из единиц, то формула – тавтология и, следовательно, теорема формализованного исчисления высказываний. Если же там встретятся нули, то формула – не тавтология, а значит, и не теорема. □

§11. Независимость системы аксиом формализованного исчисления высказываний

В этом параграфе продолжим изучение аксиоматической теории высказываний как таковой. Здесь будет подвергнута анализу основа теории – система аксиом, на которой она базируется, и установлено важное её свойство.

Понятие независимости. После того, как теория построена (§9) и установлен ряд её свойств (§10), обратимся к её истокам – к системе аксиом. Здесь возникает много вопросов. Почему в качестве аксиом выбраны именно эти формулы? Можно ли взять другие формулы в качестве аксиом? (Уже отмечалось, что имеется множество других аксиоматик для аксиоматической теории высказываний.) Можно ли сократить число аксиом до двух или одной? Можно ли из данной системы аксиом безболезненно исключить одну или две формулы? Ответу на последний вопрос и посвящается настоящий параграф.

Определение 11.1. Аксиома A из системы аксиом Σ называется *независящей от остальных аксиом* этой системы, если её нельзя вывести (доказать) из множества $\Sigma \setminus \{A\}$ всех остальных аксиом системы Σ, кроме аксиомы A. Система аксиом Σ называется *независимой*, если каждая её аксиома не зависит от остальных.

Из определения следует, как нужно доказывать независимость той или иной аксиомы от остальных аксиом данной системы. Нужно смоделировать одновременно все аксиомы данной системы, кроме той, независимость которой доказывается, т.е. построить модель, в которой бы выполнялись все аксиомы данной системы, кроме анализируемой аксиомы. Это означает, что каждому первоначальному понятию и отношениям между понятиями нужно придать конкретное содержание посредством каких-то конкретных предметов и отношений между ними. Причём, сделать это нужно так, чтобы выбранные конкретные предметы и отношения между ними обладали свойствами, сформулированными в аксиомах из системы $\Sigma \setminus \{A\}$, и не обладали бы свойством AA. Такая совокупность конкретных предметов и отношений между ними называется *моделью системы аксиом* $\Sigma \setminus \{A\}$. Наличие её доказывает независимость аксиомы A от аксиом из $\Sigma \setminus \{A\}$. В самом деле, ведь если A можно было бы вывести из $\Sigma \setminus \{A\}$, то во всякой модели, в которой выполнялись бы все аксиомы из $\Sigma \setminus \{A\}$, непременно выполнялась бы и аксиома A, и такой модели, в которой выполнялись бы все аксиомы из $\Sigma \setminus \{A\}$ и не выполнялась A, просто не существовало бы.

Докажем, что система аксиом (A1), (A2), (A3) формализованного исчисления высказываний независима с помощью построения соответствующих моделей.

Независимость аксиомы (A1). Доказательство осуществляется построением модели, в которой выполняются аксиомы (A2) и (A3), но не выполняется аксиома (A1).

Лемма 11.2. *Аксиома* (A1) *не зависит от остальных аксиом* (A2) *и* (A3) *формализованного исчисления высказываний.*

Доказательство. Рассмотрим трёхэлементное множество $M = \{0, 1, 2\}$ и введём в нём две операции. Первая операция – унарная,

A	$\neg A$
0	1
1	1
2	0

A	B	$A \to B$
0	0	0
0	1	2
0	2	2
1	0	2
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

сопоставляющая каждому элементу $A \in M$ элемент из M, обозначаемый $\neg A$; вторая – бинарная, сопоставляющая любым двум элементам $A, B \in M$ элемент из M, обозначаемый $A \to B$. Причём, сопоставление осуществляется по правилам, определяемым приведёнными выше таблицами.

Если теперь всем переменным, входящим в формулу формализованного исчисления высказываний, придать некоторые значения из M, то согласно введённым правилам, сама формула примет некоторое значение из M. Формулу, всегда принимающую значение 0, назовём ***выделенной***.

Во-первых, покажем, что всякая формула, получающаяся по схеме аксиом (A2), является выделенной. Для этого составим таблицу значений формулы (A2) (в ней для подформул формулы (A2) введены обозначения: $K \equiv F \to (G \to H)$, $L \equiv (F \to G) \to (F \to H)$):

F	G	H	$G \to H$	K	$F \to G$	$F \to H$	L	(A2)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	2	2	0	2	2	0
0	0	2	2	2	0	2	2	0
0	1	0	2	2	2	0	0	0
0	1	1	2	2	2	2	0	0
0	1	2	0	0	2	2	0	0
0	2	0	0	0	2	0	0	0
0	2	1	0	0	2	2	0	0
0	2	2	0	0	2	2	0	0
1	0	0	0	2	2	2	0	0
1	0	1	2	0	2	2	0	0
1	0	2	2	0	2	0	0	0
1	1	0	2	0	2	2	0	0
1	1	1	2	0	2	2	0	0
1	1	2	0	2	2	0	0	0
1	2	0	0	2	0	2	2	0
1	2	1	0	2	0	2	2	0
1	2	2	0	2	0	0	2	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	2	0	0	0	0	0
2	0	2	2	0	0	0	0	0
2	1	0	2	0	0	0	0	0
2	1	1	2	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0	0	0

Во-вторых, необходимо показать, что всякая формула, получающаяся по схеме аксиом (A3), также является выделенной. Предлагается самостоятельно составить таблицу значений формулы (A3) и убедиться в том, что в её последнем столбце стоят лишь нули (в таблице будет девять строк).

В-третьих, покажем, что правило вывода Modus Ponens MP сохраняет свойство выделенности, т.е., если формулы F и $F \to G$ выделенные, то и формула G – выделенная. В самом деле, в таблице, определяющей операцию $\to$ над элементами множества $M = \{0, 1, 2\}$, видим, что формулы F и $F \to G$ принимают одновременно значение 0 только в первой строке. Но в этой строке и формула G также принимает значение 0.

Итак, на основании трёх доказанных утверждений можно сделать следующий вывод: всякая формула, выводимая из аксиом (A2) и (A3) с помощью правила MP, является выделенной.

Теперь, чтобы убедиться, что формула (A1) не может быть выведена из аксиом (A2) и (A3) с помощью правила (MP), нужно установить, что она не является выделенной. В самом деле, если, например, F принимает значение 1, а G принимает значение 2, то вычисляем значение формулы (A1): $F \to (G \to F) = 1 \to (2 \to 1) = 1 \to 0 = 2 \neq 0$.

Требуемая модель построена, и лемма тем самым полностью доказана. □

Независимость аксиомы (A2). Здесь строится модель, в которой выполняются аксиомы (A1) и (A3), но не выполняется аксиома (A2).

Лемма 11.3. *Аксиома* (A2) *не зависит от аксиом* (A1) *и* (A3) *формализованного исчисления высказываний.*

Доказательство. Снова рассмотрим трёхэлементное множество $M = \{0, 1, 2\}$, но операции $\neg$ и $\to$ над его элементами зададим по-другому, с помощью следующих таблиц:

A	$\neg B$
0	1
1	0
2	1

A	B	$A \to B$
0	0	0
0	1	2
0	2	1
1	0	0
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

Снова назовём формулу исчисления высказываний *выделенной*, если при всякой подстановке вместо её переменных любых элементов из M она принимает значение 0. Предлагается самостоятельно проверить, что всякая формула, построенная как по схеме аксиом (A1), так и по схеме аксиом (A3), является выделенной. Нетрудно также видеть, что правило вывода MP сохраняет свойство выделенности, т.е. если формулы F и $F \to G$ выделенные, то и формула G выделенная. Следовательно, всякая формула, выводимая из аксиом (A1) и (A3) с помощью правила MP, является выделенной.

Теперь, чтобы убедиться, что формула (A2) не может быть выведена из аксиом (A1) и (A3) с помощью правила MP, нужно установить, что (A2) не является выделенной. Действительно, если, например, F придать значение 0, G – 0 и H – 1, то (A2) примет значение 2. □

Независимость аксиомы (A3). Метод построения соответствующей модели не единственный путь доказательства независимости той или иной аксиомы от остальных аксиом данной системы. Покажем независимость аксиомы (A3) другим методом.

Лемма 11.4. *Аксиома* (A3) *не зависит от остальных аксиом* (A1) и (A2) *формализованного исчисления высказываний.*

Доказательство. Пусть F – произвольная формула формализованного исчисления высказываний. Обозначим через $h(F)$ формулу, полученную из F стиранием всех вхождений знака $\neg$ в формуле F. Легко понять, что для всякого частного случая F схем (A1) и (A2) формула $h(F)$ есть тавтология алгебры высказываний. Далее, правило вывода modus ponens (MP) обладает следующим свойством: если $h(F \to G)$ и $h(F)$ – тавтологии, то и $h(G)$ – тавтология (так как $h(F \to G)$ совпадает с формулой $h(F) \to h(G)$). Следовательно, всякая формула F, выводимая из (A1) и (A2) с помощью правила MP, имеет в качестве $h(F)$ тавтологию.

Убедимся, что формула (A3) не выводима из (A1), (A2) с помощью правила MP. Для этого нужно проверить, что какая-либо конкретная формула F, получающаяся по схеме (A3), имеет в качестве $h(F)$ формулу, не являющуюся тавтологией. Действительно, формула $h[(\neg X \to \neg X) \to ((\neg X \to X) \to X)]$ есть следующая $(X \to X) \to ((X \to X) \to X)$. Нетрудно проверить, что последняя формула не является тавтологией. (Найдите её значение при $X = 0$.) Следовательно, формула (A3) не выводима из (A1) и (A2). □

Независимость системы аксиом. Из лемм 11.2–11.4 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 11.5. *Система аксиом* (A1), (A2), (A3) *формализованного исчисления высказываний независима.* □

В заключение отметим, что построение формализованного исчисления высказываний возможно осуществлять на базе различных систем аксиом. Обзор таких систем аксиом и возникающих на их основе формализованных исчислений высказываний дан в книге[1], §8.7, стр. 316 – 334.

§12. Исчисление высказываний натурального вывода

В этом параграфе будет охарактеризован ещё один подход к построению формализованного исчисления высказываний, разработанный в 30-ых годах прошлого века немецким математиком Г.Генценом. Считается, что этот подход более адекватно, нежели гильбертовский, описывает процесс поиска и строение математических доказательств – рассуждений в области математики.

Общая характеристика генценовского подхода. Обобщённо можно сказать, что рассуждение – это последовательность (цепочка) умозаключений. Точнее, рассуждение – это процедура последовательного пошагового перехода от одних высказываний, принятых в качестве исходных (и называемых обычно посылками) к другим высказываниям (называемым заключениями или следствиями). Дедуктивное рассуждение – это такое рассуждение, в котором все посылки и заключения представляют собой явно и чётко сформулированные утверждения, а вывод абсолютно достоверен в том смысле, что между посылками и заключением сохраняется отношение логического следования, т.е. если мы уверены в истинности всех посылок, то мы в такой же степени можем быть уверены в истинности заключения. Математические доказательства – идеальный образец дедуктивных рассуждений.

Исчисление натурального (или естественного) вывода, построенное Г.Генценом, даёт строгое описание реального процесса дедуктивного рассуждения – иначе говоря, процесса доказательства. Точное описание процесса рассуждения означает прежде всего выявление

[1] *Игошин В.И.* Математическая логика как педагогика математики. – Саратов: Издательский центр "Наука", 2009. – 360 с.

тех элементарных "шагов", из которых он складывается. Генцену удалось найти простые и ясные формулировки правил, по которым производятся элементарные шаги рассуждения. Именно эти правила лежат в основе исчисления натурального вывода.

В заключение отметим, что хотя исчисление натурального вывода принято считать теорией (или математической моделью), наиболее точно и адекватно отражающей процесс дедуктивных рассуждений, тем не менее, даже она в тех пределах, в которых она осуществляет формализацию рассуждений, не даёт непреложного алгоритма для *поиска* доказательства. Её выводы громоздки, а их поиск требует порой нетривиальной изобретательности и смекалки. Поэтому логическая формализация рассуждения до сих пор остаётся – и, будем надеяться, останется дальше, – только средством (хотя и очень важным) их теоретического изучения, а практически рассуждать каждый должен по-прежнему исключительно с помощью собственной головы.

Правила вывода исчисления высказываний натурального вывода. В отличии от исчислений гильбертовского типа, которые содержат как аксиомы, так и правила вывода, логические исчисления генценовского типа содержат только правила вывода. Как обычно, имеется алфавит (состоящий из пропозициональных переменных), символы логических связок $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, скобки; определяется понятие формулы исчисления высказываний. Основным неопределяемым (первоначальным) понятием является понятие *выводимости* (или *следования*) одной формулы из множества других формул. Свойства этого понятия описываются с помощью системы правил, называемых правилами вывода исчисления естественного вывода. Имеется три группы таких правил: правила введения логических связок, правила удаления логических связок, особые правила. Каждой из четырёх пропозициональных логических связок $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ отвечают два правила – правило введения и правило удаления символа этой связки.

Правила введения логических связок	Правила удаления логических связок
1) *Введение конъюнкции* (ВК): $\dfrac{F,\ G}{F \wedge G}$.	2) *Удаление конъюнкции* (УК): $\dfrac{F \wedge G}{F}$, $\dfrac{F \wedge G}{G}$.

3) *Введение дизъюнкции* (ВД): $$\frac{F}{F \vee G}, \quad \frac{G}{F \vee G}.$$	**4)** *Удаление дизъюнкции (по Клини)* (УДК): $$\frac{\Gamma,\ F \vdash H;\ \Gamma,\ G \vdash H}{\Gamma,\ F \vee G \vdash H}.$$
5) *Введение импликации* (ВИ): $$\frac{\Gamma,\ F \vdash G}{\Gamma \vdash F \to G}.$$	**6)** *Удаление импликации* (УИ): $$\frac{F,\ F \to G}{G}.$$
7) *Введение отрицания (приведение к абсурду)* (ВО): $$\frac{\Gamma,\ F \vdash G;\ \Gamma,\ F \vdash \neg G}{\Gamma \vdash \neg F}.$$	**8)** *Удаление отрицания (сильное)* (УО): $$\frac{\neg\neg F}{F}.$$

Особые правила вывода
9) *Правило тривиальной выводимости* (ТВ): Если $F \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash F$ (в частности, $F \vdash F$) .
10) *Транзитивность выводимости* (ТР): Если $F_1, F_2, ..., F_m \vdash G_1$, $F_1, F_2, ..., F_m \vdash G_2$, ... $F_1, F_2, ..., F_m \vdash G_k$, и $G_1, G_2, ..., G_k \vdash H$, то $F_1, F_2, ..., F_m \vdash H$. (Здесь используется запись $F_1, F_2, ..., F_m \vdash G$ вместо записи $\{F_1, F_2, ..., F_m\} \vdash G$) .

Во-первых, отметим, что каждое из правил вывода представляет собой формулировку разрешения нечто осуществить, а именно если даны формулы того вида, который указан выражениями, стоящими над чертой (***посылки правила***), то правило разрешает записать после этого формулу того вида, который имеет выражение, стоящее под чертой (***заключение правила***). Во-вторых, каждая из букв F, G, H, участвующая в записях правил вывода, служит обозначением любой формулы логики высказываний, а Г обозначает любое конечное множество любых таких формул (множество гипотез), которое может быть и пустым. Это означает, что данные правила являются своего рода схемами, которые могут наполняться разнообразным конкретным содержанием.

Поясним теперь содержательный смысл сформулированных правил. Как уже было сказано, по этим правилам производятся мельчайшие "элементарные шаги" дедуктивного рассуждения.

Первые три правила, а также пятое и шестое настолько естественны и просты, что мы пользуемся ими, практически не замечая их не фиксируя на них своего внимания и сознания. Доказав два утверждения A и B, мы из этого делаем вывод, что истинно также утверждение "A и B" (введение конъюнкции); обратно, если доказано "A и B", мы заключаем, что истинно каждое из утверждений A, B по отдельности (удаление конъюнкции); если доказано хотя бы одно из утверждений A, B, отсюда делается заключение об истинности утверждения "A или B" (введение дизъюнкции); если из A можно вывести B, то считается доказанным условное утверждение "Если A, то B" (введение импликации, в исчислении высказываний гильбертовского типа это утверждение носит название теоремы о дедукции); обратно, из истинности условного утверждения и его посылки делается вывод об истинности заключения (удаление импликации). Последний способ рассуждения известен ещё в традиционной логике, где он назывался modus ponens. Под этим же традиционным названием он фигурирует обычно в логических исчислениях гильбертовского типа.

Удаление дизъюнкции (по Клини) постулирует по существу следующее правило: если некоторое утверждение H доказуемо (выводимо), исходя как из утверждения F, так и из утверждения G, то оно доказуемо и исходя из дизъюнкции этих утверждений $F \vee G$. Термин "удаление" в данной ситуации вызывает определённое недоумение: символа дизъюнкции в посылках правила не было, а в заключении он появился. Но такова историческая традиция. Существуют и другие формулировки правила удаления дизъюнкции, которые более отвечают своему названию. Приведём две таких формулировки.

4') *Удаление дизъюнкции (по Генцену) (УДГ)* :

$$\frac{\Gamma \vdash F \vee G\,;\ \ \Gamma,\ F \vdash H\,;\ \ \Gamma,\, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}\,.$$

Логический приём, описываемый этим правилом, известен под названием *"доказательство разбором случаев"*: если в какой-то ситуации (описываемой множеством предложений Γ) возможны два случая F и G (не обязательно исключающие друг друга) и в каждом из этих случаев удаётся доказать утверждение H, то это утверждение можно считать вообще доказанным для данной ситуации. Например, если мы доказали, что все целые числа, большие или равные нулю, обладают некоторым свойством, а затем доказали также, что этим свойством обладают все целые числа, меньшие или равные нулю, то мы можем считать доказанным, что данным свойством обладают вообще все целые числа.

4") *Удаление дизъюнкции*:

$$\frac{\Gamma \vdash F \vee G\,;\ \Gamma \vdash \neg F}{\Gamma \vdash G}\,.$$

Суть этого правила: если в какой-то ситуации (описываемой множеством предложений Γ) установлена возможная истинность одного из двух утверждений F или G, а затем доказана невозможность утверждения F, то отсюда можно сделать вывод об истинности утверждения G.

Очевидно, что из правила (УДК) следует правило (УДГ). В самом деле, если $\Gamma, F \vdash H$ и $\Gamma, G \vdash H$, то по правилу (УДК) $\Gamma, F \vee G \vdash H$. Поскольку, кроме того, по условию правила (УДГ), $\Gamma \vdash F \vee G$, и по правилу (ТВ), $\Gamma \vdash \Gamma$, то из трёх последних выводимостей в силу правила транзитивности (ТР) заключаем, что $\Gamma \vdash H$.

Введение отрицания – это тот приём доказательства, который называется ***приведением к абсурду***, или ***к нелепости*** (по латыни reductio ad absurdum): если, допустив, что (при условии Γ) утверждение F истинно, мы приходим к истинности двух отрицающих друг друга утверждений G и $\neg G$ (к абсурду), то мы можем считать, что (при условии Γ) утверждение F ложно, т.е. истинно его отрицание $\neg F$.

Сильное удаление отрицания – это приём доказательства, известный также под названием закона или правила (снятия) двойного отрицания. Известна также и слабая форма этого правила:

8') *Удаление отрицания (слабое) (УО)*:

$$\frac{F,\ \neg F}{G}\,.$$

Оно утверждает, что из двух взаимоотрицающих друг друга формул выводится любая формула ("из лжи – всё что угодно"). Это

– не что иное, как один из основных логических законов – закон противоречия.

Включение в список правил вывода особых правил вывода (правило тривиальной выводимости и правило транзитивности выводимости) интуитивно вполне оправдано. Эти правила носят, скорее, не логический, а структурный и технический характер. Они действительно органично присущи понятию выводимости, которое мы хотим смоделировать (формализовать) с помощью системы натурального вывода.

Прямые и непрямые правила вывода. Обратим внимание ещё на одно обстоятельство, связанное с правилами вывода. Простой взгляд на эти правила показывает, что правила 4, 5, 7 (а также 9, 10) отличаются от остальных тем, что в их условиях и заключениях содержится множество формул (гипотез) Γ и знак выводимости ⊢. Это так называемые непрямые (условные) правила вывода: они позволяют делать вывод о наличии некоторой выводимости на основе некоторых имеющихся выводимостей. (Имеются в виду выводимости каких-то формул из некоторых множеств формул). Все остальные правила вывода являются *прямыми* (безусловными): они явно указывают на возможность выведения некоторой формулы из других формул.

Конечной целью всякой формальной системы логики является выведение (доказательство) в этой системе всех общезначимых логических формул. В аксиоматических системах гильбертовского типа доказательства начинаются с формул, выбранных в качестве аксиом и разворачиваются посредством применения к этим формулам, а также к доказанным формулам, зафиксированных правилами. Таким образом, в исчислениях гильбертовского типа правила вывода фактически применяются для выведения (доказательства) предложений из уже доказанных (выведенных) предложений.

В исчислениях генценовского типа первоначальных предложений (формул), выбранных в качестве аксиом, нет, а есть лишь правила вывода. Поэтому в таких исчислениях правила вывода могут быть применены к *любым* предложениям, а не только к уже доказанным. Если предложение получено по какому-либо правилу вывода из *доказанного* предложения, то тем самым оно доказано. Но если предложение выведено по правилу вывода из недоказанного предложения, то тем самым оно само ещё не доказано. Для того, чтобы был возможен логический переход от утверждений о выводимости предложений из гипотез к утверждениям о доказуемости предложений как раз и необходимы непрямые правила вывода, важнейшим из которых является правило (ВИ) введения импликации.

Доказательство в исчислении генценовского типа всегда начинается с гипотез (т.е. с недоказанных предложений), исследуются следствия из них, получающиеся по правилам вывода, и затем, используют информацию вида $F \vdash G$ (т.е. G выводима из F) для того, чтобы заключить по правилу (ВИ), что предложение $F \to G$ доказуемо.

Прежде чем приступить к построению выводов в рассматриваемом исчислении, отметим ещё следующее. Каждое прямое правило вывода можно сформулировать в непрямой форме. Например, правило введения конъюнкции (ВК) можно сформулировать так:

$$\frac{\Gamma \vdash F;\ \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}.$$

Обоснуем эту формулировку. Пусть $\Gamma \vdash F$ и $\Gamma \vdash G$. По правилу (ВК) имеем $F, G \vdash F \wedge G$. Тогда из этих трёх выводимостей на основании правила (ТР) транзитивности выводимости заключаем, что $\Gamma \vdash F \wedge G$.

В то же время непрямые правила вывода 4, 5, 7 не допускают переформулировки в прямой форме по причинам изложенным выше.

Начало исчисления высказываний натурального вывода. Начнём с примеров простейших выводов из гипотез, в которых используются только прямые правила вывода.

Пример 12.1. Покажем, что $F \wedge G \vdash G \wedge F$. Для этого построим последовательность применений правил вывода, начав их применение к единственной в данном случае гипотезе $F \wedge G$:

(1)	$F \wedge G \vdash G$	(УК)
(2)	$F \wedge G \vdash F$	(УК)
(3)	$G, F \vdash G \wedge F$	(ВК)
(4)	$F \wedge G \vdash G \wedge F$	(ТР): (1), (2), (3)

Поясним. Выводимости (1), (2) – применение правила удаления конъюнкции; (3) – введение конъюнкции. Заключительный шаг (4) – применение правила транзитивности к выводимостям (1), (2), (3): в (1) и (2) из одной и той же посылки $F \wedge G$ выводятся формулы G и F, а в (3) – из совокупности формул G, F выводится формула $G \wedge F$. На шаге (4) применяется правило (ТР): из общей посылки $F \wedge G$ в (1) и (2) выводится заключение $G \wedge F$ выводимости (3).

В теории натурального вывода последовательность шагов принято записывать в форме так называемого *дерева вывода*. Вот как оно выглядит в данном случае:

$$3\,\frac{1\,\frac{F\wedge G}{G}(\text{УК})\quad 2\,\frac{F\wedge G}{F}(\text{УК})}{G\wedge F}(\text{ВК})\;.$$

Слева от черты дроби указан номер шага; справа – применяемое на данном шаге правило вывода; над чертой дроби – посылки; под чертой – заключение. Заключения предыдущих шагов становятся посылками последующих. В самом верху дерева (в верхней части кроны) – исходные посылки; в самом низу (в кроне) – выводимая формула. Считается, что именно эта наглядность служит наиболее адекватному отражению формальной теорией творческого (интуитивного) процесса поиска доказательства.

Пример 12.2. $(F \wedge G) \wedge H \vdash F \wedge (G \wedge H)$.

Строим дерево вывода:

$$9\,\cfrac{3\,\cfrac{1\,\cfrac{(F\wedge G)\wedge H}{F\wedge G}(\text{УК})}{F}(\text{УК})\qquad 7\,\cfrac{4\,\cfrac{1\,\cfrac{(F\wedge G)\wedge H}{F\wedge G}(\text{УК})}{G}(\text{УК})\qquad 2\,\cfrac{(F\wedge G)\wedge H}{H}(\text{УК})}{G\wedge H}(\text{ВК})}{F\wedge(G\wedge H)}(\text{ВК})$$

Представим теперь это рассуждение в виде последовательности выводимостей:

(1)	$(F\wedge G)\wedge H \vdash F\wedge G$	(УК)
(2)	$(F\wedge G)\wedge H \vdash H$	(УК)
(3)	$F\wedge G \vdash F$	(УК)
(4)	$F\wedge G \vdash G$	(УК)
(5)	$(F\wedge G)\wedge H \vdash F$	(ТР): (1), (3)
(6)	$(F\wedge G)\wedge H \vdash G$	(ТР): (1), (4)
(7)	$G, H \vdash G\wedge H$	(ВК)
(8)	$(F\wedge G)\wedge H \vdash G\wedge H$	(ТР): (6), (2), (7)
(9)	$F, G\wedge H \vdash F\wedge(G\wedge H)$	(ВК)
(10)	$(F\wedge G)\wedge H \vdash F\wedge(G\wedge H)$	(ТР): (5), (8), (9)

Пример 12.3. $F,\ F\to G,\ G\to H \vdash H$.

(1) $F,\ F \to G,\ G \to H\ \vdash\ F$ (ТВ)
(2) $F,\ F \to G,\ G \to H\ \vdash\ F \to G$ (ТВ)
(3) $F,\ F \to G\ \vdash\ G$ (УИ)
(4) $F,\ F \to G,\ G \to H\ \vdash\ G$ (ТР) (1); (2); (3)
(5) $F,\ F \to G,\ G \to H\ \vdash\ G \to H$ (ТВ)
(6) $G,\ G \to H\ \vdash H$ (УИ)
(7) $F,\ F \to G,\ G \to H\ \vdash\ H$ (ТР) (4), (5), (6)

ПРИМЕР 12.4. $F,\ G\ \vdash\ F \vee G$.

(1) $F,\ G\ \vdash\ F$ (ТВ)
(2) $F\ \vdash\ F \vee G$ (ВД)
(3) $F,\ G\ \vdash\ F \vee G$ (ТР) (1) (2)

Если к этой последовательности добавить следующие шаги:
(4) $F \wedge G\ \vdash\ F$ (УК)
(5) $F \wedge G\ \vdash\ G$ (УК)
(6) $F \wedge G\ \vdash\ F \vee G$, (ТР) (4), (5), (3)
то получим доказательство того, что $F \wedge G\ \vdash\ F \vee G$.

ПРИМЕР 12.5. $((F \wedge G) \vee H) \to K,\ F,\ G\ \vdash\ K$.

(1) $((F \wedge G) \vee H) \to K,\ F,\ G\ \vdash\ F$ (ТВ)
(2) $((F \wedge G) \vee H) \to K,\ F,\ G\ \vdash\ G$ (ТВ)
(3) $F, G\ \vdash\ F \wedge G$ (ВК)
(4) $((F \wedge G) \vee H) \to K,\ F,\ G\ \vdash\ F \wedge G$ (ТР)
(5) $F \wedge G\ \vdash\ (F \wedge G) \vee H$ (ВД)
(6) $((F \wedge G) \vee H) \to K,\ F,\ G\ \vdash\ (F \wedge G) \vee H$ (ТР) (4); (5)
(7) $((F \wedge G) \vee H) \to K,\ F,\ G\ \vdash\ ((F \wedge G) \vee H) \to K$ (ТВ)
(8) $(F \wedge G) \vee H,\ ((F \wedge G) \vee H) \to K\ \vdash\ K$ (УИ)
(9) $((F \wedge G) \vee H) \to K,\ F,\ G\ \vdash\ K$ (ТР): (6), (7), (8)

Рассмотрим теперь примеры выводов, в которых, наряду с прямыми правилам вывода необходимо применить и непрямые правила вывода.

ПРИМЕР 12.6. $F \vee G\ \vdash\ G \vee F$.

(1) $F\ \vdash\ G \vee F$ (ВД)
(2) $G\ \vdash\ G \vee F$ (ВД)
(3) $F \vee G\ \vdash\ G \vee F$. (УДК): (1), (2)

На шаге (3) применено правило удаления дизъюнкции, в котором множество гипотез $\Gamma = \emptyset$.

ПРИМЕР 12.7. $F\ \vdash\ \neg\neg F$.

(1) $F,\ \neg F\ \vdash\ F$ (ТВ)

(2) $F, \neg F \vdash \neg F$ (ТВ)
(3) $F \vdash \neg\neg F$ (ВО)

Отметим, что обратная выводимость $\neg\neg F \vdash F$ постулирована в правиле (УО).

Пример 12.8. $G \vdash F \to G$.

(1) $G, F \vdash G$ (ТВ)
(2) $G \vdash F \to G$ (ВИ)

Отметим, что, применив, к последней выводимости ещё раз правило (ВИ), мы придём к обоснованию теоремы $\vdash G \to (F \to G)$.

Пример 12.9. $F \to G, \neg G \vdash \neg F$.

(1) $F \to G, F \vdash G$ (УИ)
(2) $F \to G, \neg G, F \vdash F \to G$ (ТВ)
(3) $F \to G, \neg G, F \vdash F$ (ТВ)
(4) $F \to G, \neg G, F \vdash G$ (ТР): (2), (3), (1)
(5) $F \to G, \neg G, F \vdash \neg G$ (ТВ)
(6) $F \to G, \neg G \vdash \neg F$ (ВО): (4), (5).

Применив к последней выводимости правило (ВИ), получим выводимость: $F \to G \vdash \neg G \to \neg F$. Эту выводимость, нетрудно трансформировать в следующее правило вывода: *если* $F \vdash G$, *то* $\neg G \vdash \neg F$.

Пример 12.10. $(F \vee G) \vee H \vdash F \vee (G \vee H)$.

(1) $F \vdash F \vee (G \vee H)$ (ВД)
(2) $G \vdash G \vee H$ (ВД)
(3) $G \vee H \vdash F \vee (G \vee H)$ (ВД)
(4) $G \vdash F \vee (G \vee H)$ (ТР): (2), (3)
(5) $F \vee G \vdash F \vee (G \vee H)$ (УДК): (1), (4)
(6) $H \vdash G \vee H$ (ВД)
(7) $H \vdash F \vee (G \vee H)$ (ТР): (6), (3)
(8) $(F \vee G) \vee H \vdash F \vee (G \vee H)$ (УДК): (5), (7)

Применив к доказанной выводимости правило (ВИ), придём к следующей теореме: $((F \vee G) \vee H) \to (F \vee (G \vee H))$.

Конечной целью построения исчисления натурального вывода является установление того факта, что в этом исчислении доказуемыми формулами являются все тавтологии алгебры высказываний и только они. Мы уже отмечали, что для установления доказуемости формулы необходимо применять непрямые правила вывода – введение импликации и введение отрицания. В примерах 8 и 10 показано, как правило (ВИ) приводит к соответствующей теореме. Аналогично можно получить следующие теоремы из примеров 1, 2, 6, 7 соответственно:

$\vdash\ (F \wedge G) \to (G \wedge F)$,
$\vdash\ ((F \wedge G) \wedge H) \to (F \wedge (G \wedge H))$,
$\vdash\ (F \vee G) \to (G \vee F)$,
$\vdash\ F \to \neg\neg F$.

Приведём ещё два примера, где для получения теоремы применяется правило (ВИ).

Пример 12.11. $\vdash\ (F \to (G \to H)) \to ((F \wedge G) \to H)$.

(1)	$F \to (G \to H),\ F \wedge G\ \vdash\ F \wedge G$	(ТВ)
(2)	$F \wedge G\ \vdash\ F$	(УК)
(3)	$F \wedge G\ \vdash\ G$	(УК)
(4)	$F \to (G \to H),\ F \wedge G\ \vdash\ F$	(ТР): (1),(2)
(5)	$F \to (G \to H),\ F \wedge G\ \vdash\ G$	(ТР): (1),(3)
(6)	$F \to (G \to H),\ F \wedge G\ \vdash\ F \to (G \to H)$	(ТВ)
(7)	$F,\ F \to (G \to H)\ \vdash\ G \to H$	(УИ)
(8)	$F \to (G \to H),\ F \wedge G\ \vdash\ G \to H$	(ТР): (4),(6),(7)
(9)	$G,\ G \to H\ \vdash\ H$	(УИ)
(10)	$F \to (G \to H),\ F \wedge G\ \vdash\ H$	(ТР): (5),(8),(9)
(11)	$F \to (G \to H)\ \vdash\ (F \wedge G) \wedge H$	(ВИ): (10)
(12)	$\vdash (F \to (G \to H)) \to ((F \wedge G) \to H)$	(ВИ): (11)

Пример 12.12. $\vdash\ ((F \wedge G) \to H) \to (F \to (G \to H))$.

Постройте самостоятельно требуемую последовательность выводимостей, начав с гипотез $(F \wedge G) \to H),\ F,\ G$.

Приведём пример обоснования теоремы с использованием правила введения отрицания.

Пример 12.13. $\vdash F \vee \neg F$.

(1)	$\neg(F \vee \neg F),\ F\ \vdash\ F$	(ТВ)
(2)	$F\ \vdash\ F \vee \neg F$	(ВД)
(3)	$\neg(F \vee \neg F),\ F\ \vdash\ F \vee \neg F$	(ТР): (1), (2)
(4)	$\neg(F \vee \neg F),\ F\ \vdash\ \neg(F \vee \neg F)$	(ТВ)
(5)	$\neg(F \vee \neg F)\ \vdash\ \neg F$	(ВО): (3),(4)
(6)	$\neg F\ \vdash\ F \vee \neg F$	(ВД)
(7)	$\neg(F \vee \neg F)\ \vdash\ F \vee \neg F$	(ТР): (5),(6)
(8)	$\neg(F \vee \neg F)\ \vdash\ \neg(F \vee \neg F)$	(ТВ)
(9)	$\vdash \neg\neg(F \vee \neg F)$	(ВО): (7),(8)

(10) $\vdash F \vee \neg F$ (УО): (9)

Из рассмотренных примеров ясно, что построение выводов является творческой задачей. Она состоит в первоначальном умелом выборе посылок, в нахождении нужной последовательности выводимостей, в умении исключить все лишни посылки. Чтобы этот поиск не был случайным и не носил характера перебора всех мыслимых возможностей, полезно принять во внимание ряд простых соображений, которые можно назвать эвристическими приёмами или эвристиками. Эвристика – это, образно говоря, то, что позволяет уменьшить число переборов.

Во-первых, если среди исходных посылок есть формулы, являющиеся конъюнкцией каких-либо двух формул, то нам, вероятно, придётся применить к этой формуле правило удаления конъюнкции, аналогично, для остальных пропозициональных связок.

Во-вторых, если формула, которую требуется вывести, представляет собой конъюнкцию, то для её выведения, по-видимому, придётся применить один или несколько раз правило введения конъюнкции; аналогично для остальных пропозициональных связок.

В-третьих, если мы хотим нечто вывести из дизъюнкции с помощью правила удаления дизъюнкции, мы должны сначала вывести это из каждого её члена в отдельности.

В-четвёртых, если требуется вывести отрицание какой-либо формулы, то весьма вероятно, что без правила введения отрицания вряд ли удастся обойтись.

Пример 12.14. Поупражняйтесь самостоятельно в обоснованиях следующих выводимостей:

а) $F \wedge G \ \vdash \ F \vee G$;
б) $F \wedge G, \ G \wedge H \ \vdash \ F \wedge H$;
в) $F \wedge (G \wedge H) \ \vdash \ (F \wedge G) \wedge H$;
г) $F \vee (G \vee H) \ \vdash \ (F \vee G) \vee H$;
д) $F \to G, \ G \to H \ \vdash \ F \to H$;
е) $F \to (G \to H) \ \vdash \ G \to (F \to H)$;
ж) $F \to G, \ F \to \neg G \ \vdash \ \neg F$;
з) $F \to G, \ G \to H \ \vdash \ (F \vee G) \to H$;
и) $(F \vee G) \wedge (G \to H) \ \vdash \ F \vee H$.

Введём пропозициональную связку *эквивалентность* следующим образом:

$$F \leftrightarrow G \quad \text{означает} \quad (F \to G) \wedge (G \to F).$$

Тогда на основании правила (ВК) получаем правило (ВЭ) – правило *введения эквивалентности*:

$$\frac{F \to G; \quad G \to F}{F \leftrightarrow G},$$

или другими словами

$$\frac{F \vdash G; \quad G \vdash F}{F \leftrightarrow G},$$

Ясно, что если $\vdash F \leftrightarrow G$, то $F \vdash G$ и $G \vdash F$ (нужно применить правило (УК)). Такие формулы F и G, каждая из которых выводима из другой, называются *дедуктивно эквивалентными*.

Из примера 12.1 видно, что дедуктивно эквивалентны формулы $F \wedge G$ и $G \wedge F$ (ясно, что первую формулу можно вывести из второй точно так же, как вторую из первой, поскольку через F и G обозначены произвольные формулы). Дедуктивно эквивалентны также формулы $F \vee G$ и $G \vee F$ (пример 12.6), $(F \wedge G) \wedge H$ и $F \wedge (G \wedge H)$ (примеры 12.2, 12.14в), $(F \vee G) \vee H$ и $F \vee (G \vee H)$ (примеры 12.10, 12.14г), $F \to (G \to H)$ и $(F \wedge G) \to H$ (примеры 12.11, 12.12).

Пример 12.15. Докажите дедуктивную эквивалентность следующих формул:

а) $F \wedge (G \vee H)$ и $(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$;
б) $F \vee (G \wedge H)$ и $(F \vee G) \wedge (F \vee H)$;
в) $F \wedge F$ и F;
г) $F \vee F$ и F;
д) $F \wedge (G \vee F)$ и F;
е) $F \vee (G \wedge F)$ и F;
ж) $\neg(F \vee G)$ и $\neg F \wedge \neg G$;
з) $\neg(F \wedge G)$ и $\neg F \vee \neg G$;
и) $F \to G$ и $\neg G \to \neg F$;
к) $F \to G$ и $\neg F \vee G$;
л) $F \to G$ и $\neg(F \wedge \neg G)$.

Полнота, непротиворечивость, адекватность и разрешимость натурального исчисления высказываний. Обоснованием всякого формального (синтаксического) логического исчисления, дающим ему, своего рода, право на существование, является тот факт, что оно адекватно формализует основные понятия содержательной (семантической) логики. К числу таких понятий относятся понятия истинностного значения, тождественно истиной формулы (тавтологии), логического следования формул, равносильности формул. Адекватность формализации понятия тавтологии состоит в том, что в формальном исчислении доказуемы те и только те формулы, которые являются тавтологиями в содержательной логике (в алгебре высказываний):

$$\vdash F(x_1, ..., x_n) \iff \models F(x_1, ..., x_n) .$$

Это свойство формального исчисления называется его *полнотой*. Можно показать, что построенное в предыдущем пункте исчисление высказываний натурального вывода обладает этим свойством, т.е. является полным. Утверждение о полноте формального исчисления состоит из двух утверждений. Первое – всякая теорема (доказуемая формула) формализованного исчисления является тавтологией содержательной логики (это утверждение называют иногда семантической пригодностью исчисления). Второе – всякая тавтология содержательной логики является теоремой (доказуемой формулой) формального исчисления (это утверждение, обычно, более сложное чем первое, называют полнотой исчисления).

Из свойства полноты формального исчисления вытекает, в частности, его *непротиворечивость*: не может существовать такой формулы, чтобы и она, и её отрицание были доказуемы в этом исчислении. В самом деле, если бы такая формула существовала, то в силу свойства полноты, и сама формула и её отрицание были бы тавтологиями (тождественно истинными формулами), а это, очевидно невозможно.

Адекватность формализации понятия логического следования формул состоит в том, что в формальном исчислении формула G выводима из формул $F_1, F_2, ..., F_m$ тогда и только тогда, когда в содержательной логике она является логическим следствием этих формул:

$$F_1, F_2, ..., F_m \vdash G \iff F_1, F_2, ..., F_m \models G.$$

И это свойство формального исчисления обычно без труда выводится из его свойства полноты.

Понятие равносильности формул содержательной логики формализуется понятием дедуктивной эквивалентности формул в формальном исчислении: две формулы логики высказываний дедуктивно эквивалентны в исчислении естественного вывода тогда и только тогда, когда они равносильны в содержательной логике (т.е. в алгебре высказываний):

$$F \vdash G \text{ и } G \vdash F \iff F \cong G .$$

Наконец натуральное исчисление высказываний является *разрешимой аксиоматической теорией*: существует алгоритм, позволяющий для любой формулы этого исчисления ответить на вопрос, является она теоремой данной теории или нет. Этот алгоритм также порождён теоремой полноты этого исчисления, отмеченной выше.

Таким образом, дедуктивные средства, используемые в построенном исчислении естественного вывода, хорошо обоснованы, и мы можем им полностью доверять.

§13. Применение компьютеров для доказательства теорем математической логики

Мы уже отмечали, что формальные аксиоматические теории с их чёткими понятиями аксиом и правил вывода казалось бы созданы для того, чтобы их развитие поручить электронно-вычислительной машине. И конечно же самым первым претендентом на союз с компьютером является формализованное исчисление высказываний. Исторически так оно и произошло: первые теоремы, доказанные компьютером, были теоремы формализованного исчисления высказываний. В логике и компьютерных науках стали говорить об автоматическом, или механическом, или машинном доказательстве теорем. В настоящем параграфе даётся краткий обзор исследований по созданию компьютерных программ для поиска доказательств теорем в различных формализованных исчислениях высказываний.

В 1957 г. известные американские специалисты по информатике А.Ньюэлл, Г.Саймон, Дж.Шоу[2] сообщили, что при помощи разработанной ими программы "*Логик-теоретик*" на электронно-вычислительной машине IBM-704 получены доказательства для 38 из 52 теорем формализованного исчисления высказываний, содержащихся в известном труде *Б.Рассела* и *А.Уайтхеда* "Principia Matematica" (1925 - 1927 гг.). В дальнейшем на ЭВМ с большим быстродействием удалось вывести все 52 теоремы.

В память машины с самого начала было помещено пять аксиом исчисления высказываний Рассела-Уайтхеда и три правила вывода. Кроме того, программа составлена так, что каждая из уже доказанных теорем оставалась в памяти машины и могла использоваться для дальнейших доказательств. Алгоритм поиска доказательств имел так называемый эвристический характер. Под "эвристиками"

---

[2] *Ньюэлл А., Шоу Дж.С., Саймон Г.А.* Процессы творческого мышления / В сб.: Психология мышления. - М.: Прогресс, 1965, с. 500 - 530.

здесь понимается выявление общих правил, позволяющих решить поставленную задачу без необходимости систематического перебора всех потенциально существующих вариантов. С помощью своей программы "Логик-теоретик" её создатели попытались смоделировать процесс поиска такого доказательства человеком. В качестве доводов, подтверждающих, что программа моделирует человеческое мышление, приводились результаты сравнения записей доказательств теорем в виде программы с записями рассуждений "думающего вслух" человека.

В основу алгоритма программы "*Логик-теоретик*" были положены следующие три эвристические метода: метод подстановки, метод отделения (modus ponens) и метод целеобразования.

Метод подстановки предназначен для поиска среди исходных аксиом и ранее доказанных теорем такой, которую требуется доказать в данный момент. При этом программа пытается определить какие переменные или подформулы в уже имеющейся формуле нужно заменить и на какие формулы, чтобы получить ту формулу, которую требуется доказать. Для этого программа выполняет подстановки одних формул в другие и осуществляет равносильные преобразования формул на основании наличия в своей памяти основных равносильностей алгебры высказываний (коммутативность, ассоциативность, идемпотентность конъюнкции и дизъюнкции, законы поглощения и де Моргана, выражение импликации через дизъюнкцию и отрицание и т.п.).

Сам поиск доказательства той или иной теоремы (формулы) осуществляется методами отделения и целеобразования. *Метод отделения* состоит в том, что доказываемая формула заменяется более простой, доказав которую мы затем доказываем исходную формулу. Если F – теорема, подлежащая доказательству, то машина ищет аксиому или уже доказанную теорему вида $G \to F$. Затем делается попытка решить подзадачу – доказать теорему G. Если она окажется доказанной, то из двух теорем G и $G \to F$ по правилу MP (modus ponens) оказывается доказанной и теорема F.

Метод целеобразования предусматривает многократное использование метода отделения. Например, при необходимости доказать теорему $F \to H$ машина ищет ранее доказанную теорему вида $F \to G$. Если такая теорема найдена в памяти, то перед машиной встаёт новая подзадача – доказать теорему $G \to H$. Если и её доказательство найдено, то из этих импликаций выводится требуемая теорема $F \to H$.

Таким образом, общая идея алгоритма поиска доказательства заданной теоремы F состоит в восстановлении цепочки-доказательства так называемым обратным ходом, отправляясь от самой формулы F и восстанавливая её вплоть до уже доказанных теорем или до аксиом.

Процесс поиска предшествующих формул исключительно неоднозначен и, как бы он ни был организован, носит переборный характер. И успешность выбора той или иной формулы не может быть оценена локально, в момент выбора. Поэтому программа вынуждена перебирать варианты, заходить в тупики, проходить циклы прежде, чем она сможет найти правильный путь решения. Повышение эффективности процесса вывода – центральная проблема всех автоматизированных систем дедуктивного вывода.

Как уже отмечено, с помощью этой программы было доказано 38 теорем из 52 теорем исчисления высказываний из книги Рассела и Уайтхеда "Principia Matematica". Например, первая из этих теорем имеет вид: $(F \to \neg F) \to \neg F$. Эту теорему машина доказала в четыре шага и напечатала результат на выводном устройстве через 10 секунд после начала работы программы. Доказывая теорему $(F \vee (G \vee H)) \to ((F \vee G) \vee H)$, машина через 23 минуты после начала работы объявила об исчерпании возможностей данной программы. Простая на вид, но сложная для доказательства теорема $\neg(F \to G) \to \neg F$ была доказана через 12 минут в пять этапов. На этом примере, кстати, наглядно демонстрируются принципиальные преимущества эвристических методов: если бы та же машина использовала не эвристические, а лишь чисто переборные методы, то для доказательства последней теоремы ей потребовалось бы несколько тысяч лет машинного времени.

Создатели программы "*Логик-теоретик*" показали также, что их программа может не только доказывать известные теоремы исчисления высказываний, но и может выдвигать новые теоремы и стремиться к их доказательству.

Аналогичные исследования по проблеме машинного поиска логического вывода велись и в Советском Союзе. Наибольшую известность получили ИССЛЕДОВАНИЯ Н.А.ШАНИНА и его сотрудников. В работе[3] решается такая проблема: в заданном конкретном формализованном исчислении высказываний требуется составить алгоритм, выясняющий, для любых формул $F_1, F_2, ..., F_m$ и G этого ис-

[3] *Шанин Н.А. и др.* Алгоритм машинного поиска естественного логического вывода в исчислении высказываний. - М.-Л., 1965. - 39 с.

числения, выводима ли формула G из формул $F_1, F_2, ..., F_m$, и при утвердительном ответе на этот вопрос искомый алгоритм должен строить (и это в проблеме главное) вывод формулы G из формул $F_1, F_2, ..., F_m$. Машинная программа, реализующая удовлетворяющий указанным требованиям алгоритм, работала на машине "Урал-4" – одной из лучших советских электронно-вычислительных машин первой половины 60-х годов.

Отметим также РАБОТЫ АМЕРИКАНСКОГО ПРОГРАММИСТА ВАН ХАО[4], который в 1959 г. составил три программы для доказательства теорем исчисления высказываний и исчисления предикатов, реализовав их на машине IBM-704. Первая из них позволила машине за 37 минут доказать более двухсот теорем из первых пяти глав упоминавшейся книги Рассела и Уайтхеда "Principia Matematica", причём 12/13 этого времени было израсходовано на ввод и вывод данных, так что время, собственно потраченное на доказательство, составило менее трёх минут. По второй программе машина сама составляла формулы исчисления высказываний и выбирала из них нетривиальные теоремы, строя их доказательства. В течении часа было образовано и проверенно около 14 тысяч формул, из которых выделено около тысячи теорем.

Наконец третья программа предназначалась для доказательства более 150 теорем следующих пяти глав "Principia Matematica" для исчисления предикатов с равенством. В течении часа машина нашла доказательства для 85 % этих теорем. В одном случае машина дала доказательство из второй главы, которое было стройнее и короче доказательства, приведённого Расселом и Уайтхедом.

Позже появились программы, которые для доказательства теорем формализованного исчисления высказываний стали эффективно использовать метатеорию, т.е теоремы о теоремах формальной теории. Первой такой программой стала ПРОГРАММА ФРАНЦУЗСКОГО МАТЕМАТИКА Ж.ПИТРА, созданная в 1966 году. Использование метатеорем позволило осуществить наибольший глобальный обзор поиска и сконцентрировать внимание на наиболее важных направлениях, не загружая память несущественными результатами. Эта программа работает с шестью формализованными исчислениями высказываний, базирующимися на системах аксиом Рассела, Лукашевича, Гильберта, Бернея и Шеффера. Она отыскивает все основные теоремы, причём иногда даёт для них оригинальные доказательст-

[4] *Ван Хао.* На пути к механической математике / В сб.: Кибернетический сборник, вып.5. - М.: ИЛ, 1962, с. 114 - 165.

ва.

Программа умеет работать и на уровне предположений: ей задаётся конкретное выражение и требуется его доказать. Программа преуспела в том, что смогла доказать некоторые теоремы, которые её создатель не смог доказать. Вот суждение об этом самого Лукашевича: "Нужно быть очень опытным и искусным в построении логических доказательств, чтобы вывести закон коммутативности $(P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$ или даже закон упрощения $P \to (Q \to P)$". Программа Ж.Питра эффективно доказывает оба этих утверждения в рассматриваемой аксиоматике.

В заключение отметим, что в 90-ые годы прошлого века сотрудниками Института философии Российской Академии наук А.В.Смирновым и А.Е.Новодворским[5] создана компьютерная программа "DEDUCTIO" интерактивного поиска вывода в исчислении натурального вывода.

---

[5] *Смирнов В.А., Маркин В.И., Новодворский А.Е., Смирнов А.В.* Логика и компьютер: доказательство и его поиск (Курс логики и компьютерный практикум). – М.: Наука, 1996.

Глава III.
ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Предикаты вслед за высказываниями являются следующим важным предметом, исследуемым математической логикой. Понятие предиката обобщает понятие высказывания, а теория предикатов представляет собой более тонкий инструмент, по сравнению с теорией высказываний, для изучения закономерностей процессов умозаключения и логического следования, составляющих предмет математической логики. Кроме того, В 70-ые годы XX века, основываясь на языке логики предикатов, был создан язык программирования, получивший название Пролог, который нашёл многочисленные применения при проектировании систем искусственного интеллекта. В настоящей главе рассматриваются основы логики предикатов.

§14. Основные понятия, связанные с предикатами

Понятие предиката. В высказывании все чётко: это – конкретное утверждение о конкретных объектах – истинное или ложное. Предикат – предложение, похожее на высказывание, но всё же им не являющееся: о нём нельзя судить, истинно оно или ложно. Дадим точное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.1. *n-местным предикатом*, определённым на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, называется предложение, содержащее n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ соответственно.

Для n-местного предиката будем использовать обозначение $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называют *предметными*, а элементы множеств $M_1, M_2, ..., M_n$, которые эти переменные пробегают, – конкретными предметами. Всякий n-местный предикат

$P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определённый на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, представляет собой функцию n аргументов, заданную на указанных множествах и принимающую значения в множестве всех высказываний. Поэтому предикат называют также *функцией-высказыванием.*

Рассмотрим примеры. Предложение "*Река x впадает в озеро Байкал*" является одноместным предикатом, определённым над множеством всех названий рек. Подставив вместо предметной переменной x название "*Баргузин*", получим высказывание "*Река Баргузин впадает в озеро Байкал*". Это высказывание истинно. Подставив вместо предметной переменной x название "*Днепр*", получим ложное высказывание "*Река Днепр впадает в озеро Байкал*".

Другой пример. Предложение (выражение) "$x^2 + y^2 \leq 9$" является двухместным предикатом, заданным над множествами R, R. Множества, на которых задан двухместный предикат, совпадают. Говорят, что двухместный предикат задан на множестве R. Пара действительных чисел 2, 2 превращает данный предикат в истинное высказывание: "$2^2 + 2^2 \leq 9$", а пара чисел 2, 3 – в ложное: "$2^2 + 3^2 \leq 9$".

Дальнейшие примеры предикатов приведены в Тетради МЛ: № 5.1.

Отметим ещё один подход к понятию предиката. Как мы уже говорили, предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определённый на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, превращается в конкретное высказывание $P(a_1$, a_2, ..., $a_n)$, если вместо предметных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ подставить в него конкретные предметы (элементы $a_1, a_2, ..., a_n$) из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ соответственно. Это высказывание может быть либо истинным, либо ложным, т.е. его логическое значение равно 1 или 0. Следовательно, данный предикат определяет функцию n аргументов, заданную на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$ и принимающую значение в двухэлементном множестве $\{0, 1\}$, т.е. $P(x_1, x_2, ..., x_n) : M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \rightarrow \{0,1\}$. Иногда эту функцию и называют предикатом.

Классификация предикатов. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.2. Предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, называется:

а) *тождественно истинным*, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ любых конкретных предметов $a_1, a_2, ..., a_n$ из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ соответственно он превращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$;

б) *тождественно ложным*, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ любых конкретных предметов из множеств

$M_1, M_2, ..., M_n$ соответственно он превращается в ложное высказывание;

в) ***выполнимым*** (***опровержимым***), если существует по меньшей мере один набор конкретных предметов $a_1, a_2, ..., a_n$ из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ соответственно, при подстановке которого вместо соответствующих предметных переменных в предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ последний превратится в истинное (ложное) высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Приведём примеры. Одноместный предикат "*Город x расположен на берегу реки Волги*", определённый на множестве названий городов, является выполнимым, потому что существуют города, названия которых превращают данный предикат в истинное высказывание, или, как говорят, удовлетворяют этому предикату (например, *Ульяновск*, *Саратов* и т.д.). Но данный предикат не будет тождественно истинным, потому что существуют города, названия которых превращают его в ложное высказывание, или, как говорят, не удовлетворяют этому предикату (например, *Прага*, *Якутск* и т.д.). Этот же предикат являет собой пример опровержимого, но не тождественно ложного предиката (продумайте!).

Второй пример. Одноместный предикат "$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$", определённый на множестве действительных чисел, тождественно истинный. Наконец, двухместный предикат "$x^2 + y^2 \leq 0$", заданный также на множестве действительных чисел, является тождественно ложным предикатом, потому что любая пара действительных чисел превращает его в ложное высказывание (не удовлетворяет ему).

Отметим некоторые достаточно очевидные *закономерности взаимосвязей* между предикатами различных типов (рекомендуется осмыслить их): 1) каждый тождественно истинный предикат является выполнимым, но обратное неверно; 2) каждый тождественно ложный предикат является опровержимым, но обратное неверно; 3) каждый не тождественно истинный предикат будет опровержимым, но, вообще говоря, не будет тождественно ложным; 4) каждый не тождественно ложный предикат будет выполнимым, но, вообще говоря, не будет тождественно истинным.

Множество истинности предиката. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.3. ***Множеством истинности*** предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданного на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, называется совокупность всех упорядоченных n-систем $(a_1, a_2, ..., a_n)$, в которых $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$, таких, что данный предикат обращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ при подстановке $x_1 = a_1, x_2 = a_2, ..., x_n = a_n$. Это множество будем обозначать P^+. Таким образом,

$$P^{+} = \{(a_1, a_2, ..., a_n): \ \lambda(P(a_1, a_2, ..., a_n)) = 1\}.$$

Множество P^{+} истинности n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ представляет собой n-арное отношение между элементами множеств $M_1, M_2, ..., M_n$, т.е. подмножество прямого (декартова) произведения этих множеств: $P^{+} \subseteq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$. Если предикат $P(x)$ одноместный, заданный над множеством M, то его множество истинности P^{+} является подмножеством множества M: $P^{+} \subseteq M$.

Например, множеством истинности двухместного предиката "*Точка x принадлежит прямой y*", заданного на множестве E всех точек плоскости и на множестве F всех прямых этой плоскости, является бинарное отношение принадлежности (инцидентности) между точками и прямыми плоскости. Другой пример. Множество истинности двухместного предиката $S(x, y)$: "$x^2 + y^2 = 9$", заданного на множестве R, есть множество всех таких пар действительных чисел, которые являются координатами точек плоскости, образующими окружность с центром в начале координат и радиуса 3. Наконец, если $A(x)$: "$|a| > 2$" – одноместный предикат над R, то $A^{+} =]-\infty, -2\,[\, \cup\,]\, 2, +\infty\,[$.

Решите задачи о множествах истинности различных предикатов из Тетради МЛ: № 5.2.

В терминах множества истинности легко выразить понятия, связанные с классификацией предикатов (определение 18.2). В самом деле, нетрудно понять, что n-местный предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, будет:

а) тождественно истинным тогда и только тогда, когда $P^{+} = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$;

б) тождественно ложным тогда и только тогда, когда $P^{+} = \emptyset$;

в) выполнимым тогда и только тогда, когда $P^{+} \neq \emptyset$;

г) опровержимым тогда и только тогда, когда $P^{+} \neq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$.

На языке множеств истинности ещё более отчётливо проясняются закономерности взаимосвязей между предикатами различных типов, отмеченные в конце предыдущего пункта. Проанализируйте их ещё раз.

Равносильность и следование предикатов. Определение 14.4. Два n-местных предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданных над одними и теми же множествами $M_1, M_2, ..., M_n$, называются ***равносильными***, если набор предметов (элементов) $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ превращает первый предикат в истинное высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ в том и только в том случае, когда этот набор превращает в истинное высказывание $Q(a_1, a_2, ..., a_n)$ второй предикат.

Другими словами (на языке множеств истинности), предикаты $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают: $P^+ = Q^+$.

Утверждение о равносильности двух предикатов P и Q символически будем записывать так: $P \iff Q$. Отношение равносильности предикатов является отношением эквивалентности, так что совокупность всех n-местных предикатов, определённых на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, распадается на непересекающиеся классы равносильных предикатов (все они определяют одну и ту же функцию, заданную на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$ и принимающую значения в двухэлементном множестве $\{0, 1\}$). Переход от предиката P_1 к равносильному ему предикату P_2 называется ***равносильным преобразованием*** первого. Это понятие очень важно для школьной математики, потому что изучаемые в ней уравнения и неравенства представляют собой частные виды предикатов. Решение уравнения и неравенства есть поиск его множества истинности. При таком поиске мы проделываем над уравнением и неравенством различные преобразования, и здесь важно, чтобы эти преобразования были равносильными, т.е. чтобы найденное множество оказалось бы множеством истинности именно исходного уравнения или неравенства. Аналогична ситуация при решении систем уравнений или неравенств.

Рассмотрим простой пример. Пусть требуется решить уравнение (найти множество истинности предиката): $4x - 2 = -3x - 9$. Преобразуем его равносильным образом: $4x - 2 = -3x - 9 \iff 4x + 3x = -9 + 2 \iff x = -1$. Ответ: $\{-1\}$ – множество всех решений данного уравнения (множество истинности данного предиката).

Отметим следующее немаловажное обстоятельство: два предиката могут быть равносильны, если их рассматривать над одним множеством, и не равносильны, если их рассматривать над другим (в частности, объемлющим первое) множеством. Такова, например, ситуация с предикатами: $\sqrt{x \cdot y} = 15$ и $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15$. (Дальнейшие примеры подобного рода см. в Тетради МЛ: № 5.8 и в Задачнике, № 9.22, г).

Определение 14.5. Предикат $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданный над множествами $M_1, M_2, ..., M_n$, называется *следствием* предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданного над теми же множествами, если он превращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений предметных переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание превращается предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Другими словами (в терминах множеств истинности), можно сказать, что предикат Q является следствием предиката P тогда и только тогда, когда $P^+ \subseteq Q^+$.

Утверждение о том, что предикат Q является следствием предиката P, будем символически записывать так: $P \Longrightarrow Q$.

Например, одноместный предикат, определённый на множестве натуральных чисел, "*n делится на 3*" является следствием одноместного предиката, определённого на том же множестве, "*n делится на 6*". Из двух предикатов, упомянутых перед последним определением, первый будет следствием второго, если считать, что оба предиката заданы на множестве Z целых чисел.

Язык множеств истинности позволяет установить взаимосвязь между понятиями равносильности и следования предикатов: два предиката, определённые на одних и тех же множествах, равносильны тогда и только тогда, когда каждый из них является следствием другого. Кроме того, этот же язык даёт возможность без труда установить следующие простые теоремы.

ТЕОРЕМА 14.6. *Каждые два тождественно истинных (тождественно ложных) предиката, заданных на одних и тех же множествах, равносильны. Обратно, всякий предикат, равносильный тождественно истинному (тождественно ложному) предикату, сам является тождественно истинным (тождественно ложным) предикатом.*

ТЕОРЕМА 14.7. *Каждый тождественно истинный n-местный предикат является следствием любого другого n-местного предиката, определённого на тех же множествах. Каждый n-местный предикат является следствием любого тождественно ложного n-местного предиката, определённого на тех же множествах.*

ТЕОРЕМА 14.8. *Пусть* $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ *и* $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ *– два n-местных предиката, определённые на одних и тех же множествах, такие, что* $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ *есть следствие* $P(x_1, x_2, ..., x_n)$: $P(x_1, x_2, ..., x_n) \Longrightarrow Q(x_1, x_2, ..., x_n)$. *Тогда:*

а) *если* $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ *тождественно истинный (выполнимый), то и* $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ *тождественно истинный (выполнимый);*

б) *если* $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ *тождественно ложный (опровержимый), то и* $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ *тождественно ложный (опровержимый).*

Докажем, например, последнюю теорему. Поскольку $P \Longrightarrow Q$, поэтому $P^+ \subseteq Q^+$. Если теперь P тождественно истинный предикат, то $P^+ = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, (где $M_1, M_2, ..., M_n$ – множества, на которых определены n-местные предикаты P и Q). Но $Q^+ \subseteq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$. Поэтому $Q^+ = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, и, значит, предикат Q тождественно истинный предикат. Если же P выполнимый, то $P^+ \neq \emptyset$. Но $P^+ \subseteq Q^+$. Тогда $Q^+ \neq \emptyset$ и Q – выполнимый предикат.

Далее, пусть Q – тождественно ложный предикат. Тогда $Q^+ = \emptyset$. Но $P^+ \subseteq Q^+$, поэтому $P^+ = \emptyset$. Следовательно, предикат P – тождественно ложный. Наконец, пусть Q – опровержимый предикат. Тогда $Q^+ \neq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$. Поскольку, кроме того, $P^+ \subseteq Q^+$ и $P^+ \subseteq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, поэтому $P^+ \neq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$. Следовательно, предикат P опровержимый. □

Отыщите самостоятельно в настоящем и предыдущем пунктах данного параграфа утверждения, обосновывающие остальные сформулированные теоремы. О следовании и равносильности предикатов решите задачу № 5.7 из Тетради МЛ.

§15. Логические операции над предикатами

Над предикатами можно проделывать те же самые логические операции, что и над высказываниями: отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, эквивалентность. Рассмотрим эти операции в их связи с операциями над множествами.

Отрицание предиката. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1. *Отрицанием* n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определённого на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, называется новый n-местный предикат, определённый на тех же множествах, обозначаемый $\neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$ (читается: "неверно, что $P(x_1, x_2, ..., x_n)$"), который превращается в истинное высказывание при всех тех значениях предметных переменных, при которых исходное высказывание превращается в ложное высказывание.

Другими словами, предикат $\neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$ таков, что для любых предметов $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$, ... , $a_n \in M_n$ высказывание $\neg P(a_1, a_2, ..., a_n)$ является отрицанием высказывания $P(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Например, нетрудно понять, что отрицанием одноместного предиката "$x \leq 3$", определённого на множестве R, является одноместный предикат "$x > 3$", определённый на том же множестве R. Отрицанием предиката "*Река x впадает в озеро Байкал*" является предикат "*Река x не впадает в озеро Байкал*" (оба одноместных предиката определены на множестве названий рек). Отрицанием предиката "$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$" является предикат "$\sin^2 x + \cos^2 x \neq 1$" $(x, y \in R)$.

ТЕОРЕМА 15.2. *Для n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, множество истинности его отрицания $\neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$ совпадает с дополнением множества истинности данного предиката:* $\boxed{(\neg P)^+ = \overline{P^+}}$.

(Здесь следует понимать, что дополнение рассматривается в множестве $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, т.е. $(\neg P)^+ = (M_1 \times M_2 \times ... \times M_n) \setminus P^+$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определениям 15.1, 14.3 и определению дополнения множества имеем

$$(\neg P)^+ = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : \lambda(P(a_1, a_2, ..., a_n)) = 0\} =$$
$$= \{(a_1, a_2, ..., a_n) : (a_1, a_2, ..., a_n) \notin P^+\} = \overline{P^+} =$$
$$= (M_1 \times M_2 \times ... \times M_n) \setminus P^+ ,$$

что и требовалось доказать. □

СЛЕДСТВИЕ 15.3. *Отрицание предиката будет тождественно истинным предикатом тогда и только тогда, когда исходный предикат тождественно ложен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В §14 (пункт "Множество истинности предиката") тождественная истинность предиката выражена на языке множества истинности; она означает, что $(\neg P)^+ = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$. Подставим в это равенство значение для $(\neg P)^+$ из настоящей теоремы:

$$(M_1 \times M_2 \times ... \times M_n) \setminus P^+ = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n .$$

Вспоминая определение разности двух множеств и учитывая, что $P^+ \subseteq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, заключаем, что $P^+ = \emptyset$. Значит, предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ тождественно ложен. Следствие доказано. □

Рассмотрим ещё один пример. Требуется выяснить, является ли предикат $O(f)$: "*f – нечётная функция*" отрицанием предиката $E(f)$: "*f – чётная функция*" (оба одноместных предиката определены на множестве всех действительных функций одного действительного аргумента). Множество истинности O^+ предиката $O(f)$ не является дополнением множества истинности E^+ предиката $E(f)$, потому что не всякая функция, не являющаяся чётной, будет непременно нечётной. Другими словами, существуют функции, не являющиеся одновременно ни чётными, ни нечётными (приведите пример!). Следовательно, предикат $O(f)$ не есть отрицание предиката $E(f)$.

Замечание 15.4. В алгебре высказываний существенным было не содержание высказывания, а лишь его значение истинности, т.е. отождествлялись (не различались) между собой, с одной стороны, все истинные высказывания, а с другой, – все ложные. В некотором смысле аналогичная ситуация имеется и в алгебре предикатов: здесь не различают равносильные предикаты. Подходя с такой точки зрения к определению 15.1 отрицания предиката, можем за отрицание данного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ принять любой из равносильных предикатов, удовлетворяющих этому определению. Например, отрицанием предиката "$|x| > 2$", заданного на R, является каждый из следующих (равносильных между собой) предикатов: "$|x| \leq 2$", "$(x \geq -2) \ \wedge \ (x \leq 2)$", "$x \in [-2,\ 2]$", а отрицанием предиката "$x^2 \geq 0$", также определённого на R (этот предикат тождественно истинный), является каждый из следующих предикатов: "$\sin x = 2$", "$x^2 < 0$", "$e^x < 0$", "$|x| < 0$" и т.д.

Сделанное замечание следует иметь в виду при рассмотрении и остальных логических операций в настоящем параграфе.

Конъюнкция двух предикатов. Определение 15.5. *Конъюнкцией* n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определённого на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, и m-местного предиката $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$, определённого на множествах $N_1, N_2, ..., N_m$, называется новый $(n+m)$-местный предикат, определённый на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, $N_1, N_2, ..., N_m$, обозначаемый $P(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge Q(y_1, y_2, ..., y_m)$ (читается "$P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$"), который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых оба исходных предиката превращаются в истинные высказывания.

Другими словами, предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n) \ \wedge \ Q(y_1, y_2, ..., y_m)$ таков, что для любых предметов $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ и $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, ..., b_n \in N_m$ высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n) \ \wedge$ $Q(b_1, b_2, ..., b_m)$ является конъюнкцией высказываний $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $Q(b_1, b_2, ..., b_m)$.

Например, конъюнкцией двух одноместных предикатов "$x > -3$" и "$x < 3$", определённых на R, будет одноместный предикат "$(x > -3) \ \wedge \ (x < 3)$", записываемый короче в виде: "$-3 < x < 3$", который равносилен предикату "$|x| < 3$" (см. замечание 19.4).

Второй пример. Конъюнкцией двух одноместных предикатов "$x = 0$" и "$y = 0$", заданных на R, является двухместный предикат "$(x = 0) \wedge (y = 0)$", заданный также на R, который равносилен предикату "$x^2 + y^2 = 0$", определённому на R.

Операцию конъюнкцию можно применять к предикатам, имеющим общие переменные. В этом случае число переменных в новом предикате равно числу $n + m - k$, где n – число переменных первого предиката, m – число переменных второго предиката, k – число переменных общих для обоих предикатов. Именно таков первый из только что рассмотренных двух примеров. Более того, если оба предиката определены на одних и тех же множествах и зависят от одних и тех же переменных, то для них справедлива следующая теорема.

Теорема 15.6. *Для n-местных предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, определённых на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, множество истинности конъюнкции $P(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ совпадает с пересечением множеств истинности исходных предикатов:* $\boxed{(P \wedge Q)^+ = P^+ \cap Q^+}$.

Доказательство. Согласно определениям 15.5, 14.3 и определению пересечения множеств, имеем:

$$(P \wedge Q)^+ =$$
$$= \{(a_1, a_2, ..., a_n) : \lambda(P(a_1, a_2, ..., a_n) \wedge Q(a_1, a_2, ..., a_n)) = 1\} =$$
$$= \{(a_1, a_2, ..., a_n) : \lambda(P(a_1, a_2, ..., a_n) = 1 \text{ и } \lambda(Q(a_1, a_2, ..., a_n)) = 1\} =$$
$$= \{(a_1, a_2, ..., a_n) : \lambda(P(a_1, a_2, ..., a_n) = 1\} \cap$$
$$\cap \{(a_1, a_2, ..., a_n) : \lambda(Q(a_1, a_2, ..., a_n)) = 1\} =$$
$$= P^+ \cap Q^+ .$$

Следствие 15.7. *Конъюнкция двух предикатов тождественно истинна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно истинны.*

Доказательство. Согласно §14 (пункт "Множество истинности предиката"), тождественная истинность предиката $P \wedge Q$ означает, что $(P \wedge Q)^+ = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$. Тогда на основании теоремы $P^+ \cap Q^+ = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, т.е. пересечение двух подмножеств P^+ и Q^+ множества $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ совпадает с самим этим множеством. Следовательно, $P^+ = Q^+ = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, что означает: предикаты P и Q тождественно истинны. □

Значительный раздел школьной математики составляют системы уравнений и неравенств. При их решении используется теорема 15.6. Пусть, например, требуется решить систему неравенств $|x| < 3$, $x \geq 2$. Для этого нужно найти множество истинности предиката "$(|x| < 3) \land (x \geq 2)$", определённого на R. Используем теорему 15.6:

$$((|x| < 3) \land (x \geq 2))^+ = (|x| < 3)^+ \cap (x \geq 2)^+ =$$

$$=]-3, 3[\cap [2, +\infty[= [2, 3[.$$

Таким образом, решением данной системы является множество (полуинтервал) $[\,2,\ 3\,[$.

Следует отметить, что в предикаты $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, о которых идёт речь в теореме 15.6, некоторые предметные переменные могут в действительности не входить, т.е., как говорят, быть фиктивными. Это нужно понимать так, что значение истинности высказывания, в которое превращается данный предикат, не зависит от того, какие предметы подставляются вместо таких (фиктивных) переменных. При решении систем уравнений и неравенств данная ситуация встречается часто. Так, например, решением системы уравнений $x+y=1$, $y+z=2$, $z+x=3$ является множество, состоящее из одной упорядоченной тройки чисел (1,0,2), хотя первое уравнение не зависит от z, второе – от x, а третье – от y.

Дизъюнкция двух предикатов. Определение 15.8. *Дизъюнкцией* n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определённого на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, и m-местного предиката $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$, определённого на множествах $N_1, N_2, ..., N_m$, называется новый $(n+m)$-местный предикат, определённый на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, $N_1, N_2, ..., N_m$, обозначаемый $P(x_1, x_2, ..., x_n) \lor Q(y_1, y_2, ..., y_m)$ (читается "$P(x_1, x_2, ..., x_n)$ или $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$"), который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых в истинное высказывание превращаются по меньшей мере один из исходных предикатов.

Другими словами, предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n) \lor Q(y_1, y_2, ..., y_m)$ таков, что для любых предметов $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ и $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, ..., b_n \in N_m$ высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n) \lor Q(b_1, b_2, ..., b_m)$ является дизъюнкцией высказываний $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $Q(b_1, b_2, ..., b_m)$.

Операцию дизъюнкцию, как и операцию конъюнкцию (см. абзац перед теоремой 15.6), можно применять к предикатам, имеющим общие переменные. Например, дизъюнкцией одноместных предикатов

"x – *чётное число*" и "x – *простое число*", определённых на N, является одноместный предикат, определённый на N: "x – *чётное или простое число*". Ещё пример. Дизъюнкцией одноместных предикатов "$x \neq 0$" и "$y \neq 0$", определённых на R, является двухместный предикат "$(x \neq 0) \lor (y \neq 0)$", также определённый на R, который равносилен предикату "$x^2 + y^2 \neq 0$" над R.

Следующая теорема аналогична теореме 15.6.

ТЕОРЕМА 15.9. *Для n-местных предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, определённых на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, множество истинности дизъюнкции $P(x_1, x_2, ..., x_n) \lor Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ совпадает с объединением множеств истинности исходных предикатов:* $\boxed{(P \lor Q)^+ = P^+ \cup Q^+}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 15.6, поэтому предлагаем провести его самостоятельно.

СЛЕДСТВИЕ 15.10. *Дизъюнкция двух предикатов есть выполнимый предикат тогда и только тогда, когда, по меньшей мере, один из данных предикатов выполним.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно §14 (пункт "Множество истинности предиката"), выполнимость предиката $P \lor Q$ означает, что $(P \lor Q)^+ \neq \emptyset$. Отсюда, на основании теоремы, $P^+ \cup Q^+ \neq \emptyset$. Последнее возможно в том и только в том случае, если $P^+ \neq \emptyset$ или $Q^+ \neq \emptyset$, т.е. если предикат P выполним или выполним предикат Q. □

СЛЕДСТВИЕ 15.11. *Дизъюнкция двух предикатов тождественно ложна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно ложны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предлагается провести самостоятельно.

Например, пусть требуется решить уравнение $x^2 - x - 6 = 0$, т.е. найти множество истинности этого предиката, определённого на R. Находим его, применяя теорему 15.9: $\{x:\ x^2 - x - 6 = 0\} =$

$$= \{x:\ (x+2)(x-3) = 0\} = \{x:\ (x+2=0) \lor (x-3=0)\} =$$

$$= \{x:\ x+2=0\} \cup \{x:\ x-3=0\} = \{-2\} \cup \{3\} = \{-2,\ 3\}\ .$$

Второй пример. Дизъюнкция $(x^2+y^2 < 0) \lor (xy = 0)$ двух двухместных предикатов, определённых на R, есть выполнимый предикат, потому что выполним один из них: $xy = 0$ (проверьте).

Свойства отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. После введения трёх операций над предикатами возникает вопрос, как они влияют на равносильность предикатов, каковы закономерности образования с помощью этих операций равносильных предикатов? Аналогичны вопросы для следования предикатов. Ответ даёт следующая теорема.

ТЕОРЕМА 15.12. *Если во всех формулах теоремы 3.2 под P, Q, R понимать предикаты, определённые на соответствующих множествах, знак $\leftrightarrow$ всюду заменить на знак $\Longleftrightarrow$, а знак $\rightarrow$ на знак $\Longrightarrow$, то получим верные утверждения о предикатах.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, например, вторую формулу д) из теоремы 3.2. Она превращается в следующее утверждение: $(P \vee (Q \wedge R)) \Longleftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$, означающее равносильность предикатов $P \vee (Q \wedge R)$ и $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$, независимо от предикатов P, Q, R. Проверим, верно ли данное утверждение. В самом деле, каждый из двух предикатов при любой подстановке вместо предметных переменных конкретных предметов из соответствующих множеств превращаются в такие высказывания, которые, на основании тавтологии из теоремы 3.2,д, имеют одинаковые значения истинности. На основании определения равносильности предикатов, это и означает, что данные предикаты равносильны. □

Импликация и эквивалентность двух предикатов. Импликация $P(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow Q(y_1, y_2, ..., y_m)$ определяется как такой предикат, что для любых предметов $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ и $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, ..., b_n \in N_m$ высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n) \rightarrow Q(b_1, b_2, ..., b_m)$ является импликацией высказываний $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $Q(b_1, b_2, ..., b_m)$. Аналогично определяется эквивалентность двух предикатов. Нетрудно проверить, что импликация двух предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, есть тождественно истинный предикат тогда и только тогда, когда её заключение является следствием посылки, а эквивалентность тождественно истинна, если и только если исходные предикаты равносильны. Свойства этих операций над предикатами, подобно свойствам операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции над предикатами (см. теорему 15.12), получаются из соответствующих тавтологий теоремы 3.3. Так, если P, Q, R – предикаты, то, например,

а) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Longrightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$;

д) $(\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)) \Longrightarrow \neg P$;

п) $(S \leftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$

и т.д. Аналогично, из тавтологий теоремы 3.4 получаются равносильности, выражающие одни логические операции над предикатами через другие. Например,

а) $(P \to Q) \iff (Q \to P)$;

в) $(P \wedge Q) \iff \neg(\neg P \vee \neg Q)$;

ж) $(P \leftrightarrow Q) \iff ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$

и так далее для любых предикатов P, Q, R .

Решите задачи №№ 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 из Тетради МЛ.

§16. Кганторные операции над предикатами

Рассмотренные в предыдущем параграфе операции над предикатами в определённом смысле аналогичны соответствующим операциям над высказываниями. Специфика природы предикатов позволяет ввести над ними такие операции, которые не имеют аналогов среди операций над высказываниями. Имеются в виду две кванторные операции над предикатами (или операции квантификации) – квантор общности и квантор существования, о которых и пойдёт речь в настоящем параграфе.

Квантор общности. Известно, что для превращения одноместного предиката в высказывание нужно подставить вместо его переменной какой-нибудь конкретный предмет из области задания предиката. Имеется ещё один способ для такого превращения – это применение к предикату операций связывания квантором общности или квантором существования. Каждая из этих операций ставит в соответствие одноместному предикату некоторое высказывание, истинное или ложное в зависимости от исходного предиката.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16.1. Операцией *связывания квантором общности* называется правило, по которому каждому одноместному предикату $P(x)$, определённому на множестве M, сопоставляется высказывание, обозначаемое $(\forall x)(P(x))$ (читается: "для всякого [значения] x $P(x)$ [истинное высказывание]"), которое истинно в том и только в том случае, когда предикат $P(x)$ тождественно истинен, и ложно в противном случае, то есть

$$\lambda[(\forall x)(P(x))] = \begin{cases} 1, \text{ если } P(x) \text{ – тождественно истинный предикат;} \\ 0, \text{ если } P(x) \text{ – опровержимый предикат.} \end{cases}$$

При чтении высказывания $(\forall x)(P(x))$ слова в квадратных скобках могут опускаться. Высказывание $(\forall x)(P(x))$ называется ***универсальным высказыванием*** для предиката $P(x)$. Символ $\forall$ происходит от первой буквы английского слова "*All*" – все. Сам символ $(\forall x)$ также называют квантором общности по переменной x.

Например, рассмотрим два одноместных предиката на множестве N: "$1 \leq x$" и "$x \mid 30$". Первый предикат тождественно истинный, поэтому применение к нему операции связывания квантором общности даёт истинное высказывание: $(\forall x)(1 \leq x)$ – "*для всякого x 1 не превосходит x*". Второй предикат опровержим, поэтому операция связывания квантором общности, применённая к нему, даёт ложное высказывание: $(\forall x)(x \mid 30)$ – "*для любого x число x является делителем числа 30*".

В выражении $(\forall x)(P(x))$ переменная x уже перестаёт быть переменной в обычном смысле этого слова, т.е. вместо неё невозможно подставлять какие бы то ни было конкретные значения. Говорят, что переменная x ***связанная***, кажущаяся или немая. Такая ситуация уже встречалась в математике: переменные могут быть связаны не только квантором. Так, связанными являются переменные в следующих выражениях:

$$\int_0^2 x dx\ , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ , \qquad \{x:\ x \geq 0\}.$$

Это означает, что каждое из приведённых выражений не зависит от связанных переменных, т.е. сущность выражения не изменится, если связанную переменную обозначить любой другой буквой. Так, первое из трёх выражений, вне зависимости от переменной, равно 2, второе равно 0, а третье есть действительная полупрямая $[0;\ +\infty\ [$. Аналогично, высказывание $(\forall x)(1 \leq x)$ может быть прочитано так: "*1 не превосходит всякое натуральное число*" – и в таком виде оно вообще не содержит переменных.

Если одноместный предикат $P(x)$ задан на конечном множестве $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, то нетрудно понять, что высказывание $(\forall x)(P(x))$ эквивалентно (имеет то же логическое значение) конъюнкции $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$. В самом деле, по определению 20.1, истинность высказывания $(\forall x)(P(x))$ означает, что предикат тождественно истинен, т.е. каждое из высказываний $P(a_1)$, $P(a_2)$, ... , $P(a_n)$, в которые этот предикат превращается, истинно. Последнее равносильно истинности конъюнкции $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$.

Следовательно, для предикатов, заданных на конечном множестве, операция связывания квантором общности может быть выражена через конъюнкцию. Для предикатов, заданных на бесконечном множестве, такого сделать нельзя, и в этом случае операция связывания квантором общности является существенно новой.

Можно подметить ещё одну особенность операции связывания квантором общности по сравнению с операциями из предыдущего параграфа. Те операции ставили в соответствие одному или двум предикатам новый *предикат*, а операция связывания квантором общности сопоставляет предикату *высказывание*. На это можно сказать следующее. Во-первых, каждое высказывание для достижения большей общности сейчас и в дальнейшем можно рассматривать как предикат, содержащий 0 предметных переменных, т.е. как нульместный предикат. Во-вторых, мы пока применяли квантор общности лишь к одноместным предикатам. Переходим к рассмотрению вопроса о применении операции связывания квантором общности к предикатам с любым числом предметных переменных, такая операция предстанет операцией в полном смысле слова: предикатам она будет сопоставлять предикаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16.2. Операцией *связывания квантором общности* по переменной x_1 называется правило, по которому каждому n-местному ($n \geq 2$) предикату $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определённому на множествах M_1, M_2, ..., M_n, сопоставляется новый $(n-1)$-местный предикат, обозначаемый $(\forall x_1)(P(x_1, x_2, ..., x_n))$ (читается: "для всех x_1 $P(x_1, x_2, ..., x_n)$"), который для любых предметов $a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ превращается в высказывание $(\forall x_1)(P(x_1, a_2, ..., a_n))$, истинное в том и только в том случае, когда одноместный предикат $P(x_1, a_2, ..., a_n)$, определённый на множестве M_1, тождественно истинен, и ложное в противном случае, то есть

$$\lambda[(\forall x_1)(P(x_1, a_2, ..., a_n))] = \begin{cases} 1, & \text{если } P(x_1, a_2, ..., a_n) \text{ -- тождественно истинный предикат от } x_1; \\ 0, & \text{если } P(x_1, a_2, ..., a_n) \text{ -- опровержимый предикат от } x_1. \end{cases}$$

Например, рассмотрим двухместный предикат "$y \leq x$", определённый на множестве N. Применим к нему квантор общности по переменной x. Получим одноместный предикат $(\forall x)(y \leq x)$, зависящий от переменной y. Этот предикат может превратиться как в истинное высказывание (при $y = 1$), так и в ложное (при подстановке вместо y любых натуральных чисел, кроме 1).

Второй пример. Двухместный предикат "$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$", определённый на R, тождественно истинен. Поэтому применение к нему квантора общности по любой переменной, например по y, даёт одноместный предикат (по x), который будет тождественно истинным $(\forall y)((x+y)^2 = x^2+2xy+y^2)$.

Заметим в заключение, что к $(n-1)$-местному предикату $(\forall x_1)(P(x_1, x_2, ..., x_n))$, зависящему от переменных $x_2, ..., x_n$, можно снова применить операцию связывания квантором общности по одной из свободных переменных. В результате получится $(n-2)$-местный предикат и т.д.

Например, применив к одноместному предикату $(\forall x)(y \leq x)$ квантор общности по переменной y, получим нуль-местный предикат, т.е. высказывание $(\forall y)(\forall x)(y \leq x)$. Ясно, что полученное высказывание ложно, потому что предикат $(\forall x)(y \leq x)$ опровержим. Применив квантор общности по переменной x к одноместному предикату из второго примера, получим истинное высказывание $(\forall x)(\forall y)((x+y)^2 = x^2+2xy+y^2)$.

Квантор существования. Как и в предыдущем пункте, начнём рассмотрение с операции связывания квантором существования, применяемой к одноместному предикату.

Определение 16.3. Операцией *связывания квантором существования* называется правило, по которому каждому одноместному предикату $P(x)$, определённому на множестве M, сопоставляется высказывание, обозначаемое $(\exists x)(P(x))$ (читается: "существует [значение] x такое, что $P(x)$ [истинное высказывание]"), которое ложно в том и только в том случае, когда $P(x)$ тождественно ложен, и истинно в противном случае, то есть

$$\lambda[(\exists x)(P(x))] = \begin{cases} 0, \text{ если } P(x) - \text{ тождественно ложный предикат;} \\ 1, \text{ если } P(x) - \text{ выполнимый предикат.} \end{cases}$$

При чтении высказывания $(\exists x)(P(x))$ слова в квадратных скобках могут опускаться. Высказывание $(\exists x)(P(x))$ называется *экзистенциальным высказыванием* для предиката $P(x)$. Символ $\exists$ происходит от первой буквы английского слова "*Exist*" – существовать. Сам символ $\exists x$ также называют *квантором существования по переменной* x.

Например, рассмотрим два одноместных предиката, определённых на множестве N: "$x = x+1$" и "$x \mid 30$". Первый предикат тождественно ложный, поэтому применение к нему операции связывания квантором существования даёт ложное высказывание: $(\exists x)(x = x + 1)$ – "*существует натуральное число, равное себе плюс 1*". Второй предикат выполним, поэтому операция связывания квантором существования, примененная к нему, даёт истинное высказывание: $(\exists x)(x \mid 30)$ – "*существует натуральное число, делящее число 30*".

Подобно выражению $(\forall x)(P(x))$, в выражении $(\exists x)(P(x))$ переменная x также перестаёт быть переменной в обычном смысле слова: это – ***связанная переменная.***

Если одноместный предикат $P(x)$ задан на конечном множестве $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, то высказывание $(\exists x)(P(x))$ эквивалентно (имеет то же логическое значение) дизъюнкции $P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n)$. В самом деле, по определению 16.3, ложность высказывания $(\exists x)(P(x))$ означает, что предикат $P(x)$ тождественно ложен, т.е. каждое из высказываний $P(a_1)$, $P(a_2)$, ... , $P(a_n)$, в которые данный предикат может превратиться, ложно. Последнее равносильно ложности дизъюнкции $P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n)$.

Значит, для предикатов, заданных на конечном множестве, операция связывания квантором существования может быть выражена через дизъюнкцию. Для предикатов, заданных на бесконечном множестве, такого сделать нельзя, и в этом случае операция связывания квантором существования является существенно новой.

Наконец рассмотрим вопрос о применении операции связывания квантором существования к предикатам с любым числом предметных переменных.

Определение 16.4. Операцией ***связывания квантором существования*** по переменной x_1 называется правило, по которому каждому n-местному ($n \geq 2$) предикату $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определённому на множествах M_1, M_2, ..., M_n, сопоставляется новый $(n-1)$-местный предикат, обозначаемый $(\exists x_1)(P(x_1, x_2, ..., x_n))$ (читается: "существует такой x_1, что $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, который для любых предметов $a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ превращается в высказывание $(\exists x_1)(P(x_1, a_2, ... , a_n))$, ложное в том и только в том случае, когда одноместный предикат $P(x_1, a_2, ..., a_n)$, определённый на множестве M_1, тождественно ложен, и истинное в противном случае, то есть

$$\lambda[(\exists x_1)(P(x_1, a_2, ..., a_n))] = \begin{cases} 0, & \text{если } P(x_1, a_2, ..., a_n) \text{ – тождественно ложный предикат от } x_1; \\ 1, & \text{если } P(x_1, a_2, ..., a_n) \text{ – выполнимый предикат от } x_1. \end{cases}$$

Например, рассмотрим двухместный предикат "$y \leq x$", определённый на R. Применим к нему квантор существования по переменной x. Получим одноместный предикат $(\exists x)(y \leq x)$, зависящий от переменной y. Этот предикат всегда превращается в истинное высказывание, если вместо y подставлять конкретные числа, т.е. является тождественно истинным предикатом.

Второй пример. Двухместный предикат "$x^2 + y^2 < 0$", определённый на R, тождественно ложен. Поэтому применение к нему квантора существования по любой переменной, например, по x, даёт одноместный (по y) предикат, который будет тождественно ложным: $(\exists x)(x^2 + y^2 < 0)$.

Заметим в заключение, что к $(n-1)$-местному предикату $(\exists x_1)(P(x_1, x_2, ..., x_n))$, зависящему от переменных $x_2, ..., x_n$, можно снова применить одну из операций квантификации – квантор общности или квантор существования по одной из свободных переменных. В результате получим $(n-2)$-местные предикаты, например, $(\forall x_2)(\exists x_1)(P(x_1, x_2, ..., x_n))$ и $(\exists x_2)(\exists x_1)(P(x_1, x_2, ..., x_n))$.

Например, применив к тождественно истинному одноместному предикату $(\exists x)(y \leq x)$, заданному на N, квантор общности, получим истинное высказывание: $(\forall y)(\exists x)(y \leq x)$ – "*для всякого натурального числа существует большее него натуральное число*". Применив к тому же одноместному предикату квантор существования, получим также истинное высказывание: $(\exists y)(\exists x)(y \leq x)$ – "*существуют два натуральных числа, из которых одно не превосходит другое*". Далее, применив к выполнимому одноместному предикату $(\forall x)(y \leq x)$, заданному на N, квантор существования, получим истинное высказывание $(\exists y)(\forall x)(y \leq x)$ – "*существует наименьшее натуральное число*". Наконец, применив квантор существования к одноместному тождественно ложному предикату $(\exists x)(x^2 + y^2 < 0)$, получим ложное высказывание: $(\exists y)(\exists x)(x^2 + y^2 < 0)$.

Решите задачи № 5.9, 6.1 из Тетради МЛ, посвящённые кванторным операциям над предикатами.

Численные кванторы. В математике часто встречаются выражения вида "*по меньшей мере n*" ("*хотя бы n*"), "*не более чем n*", "*n и только n*" ("*ровно n*", "*точно n*"), где n – натуральное число. Эти выражения называют численными кванторами. Они имеют чисто логический смысл, потому что их можно выразить без числительных на языке кванторов общности и существования, логических операций над предикатами и знака $=$, обозначающего тождество (совпадение) объектов.

Рассмотрим случай $\underline{n=1}$. Предложение "*По меньшей мере один объект обладает свойством P*" имеет тот же смысл, что и предложение "*Существует объект, обладающий свойством P*", т.е.

$$(\exists x)(P(x)) \ . \tag{16.1}$$

Далее, предложение "*не более чем один объект обладает свойством P*" равнозначно по смыслу предложению "*Если есть объекты, обладающие свойством P, то они совпадают*", т.е.

$$(\forall x)(\forall y)[(P(x) \ \wedge \ P(y)) \ \rightarrow \ x=y] \ . \tag{16.2}$$

Наконец, предложение "*Один и только один объект обладает свойством P*" равнозначно конъюнкции высказываний (16.1) и (16.2):

$$(\exists x)(P(x)) \wedge (\forall x)(\forall y)[(P(x) \wedge P(y)) \ \rightarrow \ x=y] \tag{16.3}$$

Сопоставление одноместному предикату $P(x)$ высказывания (16.3) носит название операции связывания *квантором существования и единственности*, а само высказывание (16.3) иногда обозначают так:

$$(\exists \, ! \, x)(P(x)) \ . \tag{16.4}$$

Символ $\exists \, ! \, x$ называют *квантором существования и единственности* по переменной x.

Например, используя этот квантор, запишем высказывание: "*Всякая сходящаяся последовательность имеет точно один предел*":

$$(\forall a_n)((\exists a)(a=\lim a_n) \ \rightarrow \ (\exists! a)(a=\lim a_n)) \ .$$

Рассмотрим теперь случай $\underline{n=2}$. Предложение "*По меньшей мере два объекта обладают свойством P*" означает то же что и предложение "*Существуют два различных объекта, обладающих свойством P*", т.е.

$$(\exists x)(\exists y)(P(x) \ \wedge \ P(y) \ \wedge \ x \neq y) \ . \tag{16.5}$$

Далее, предложение "*Не более чем два объекта обладают свойством P*" равнозначно по смыслу предложению "*Каковы бы ни были объекты x, y, z, если все они обладают свойством P, то по меньшей мере два из них совпадают*", которое символически записывается так:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall y)[(P(x) \ \wedge \ P(y) \ \wedge \ P(z)) \ \rightarrow \ (x=y \ \vee \ x=z \ \vee \ y=z]. \tag{16.6}$$

Наконец, предложение "*Два и только два объекта обладают свойством P*" совпадает по смыслу с конъюнкцией высказываний (16.5) и (16.6).

Совершенно аналогично выражаются через обычные кванторы и логические операции численные кванторы при $n > 2$. Рекомендуется самостоятельно записать соответствующие выражения для $\underline{n=3}$.

Ограниченные кванторы. Нередки в математической практике обороты следующего вида: "*Всякий объект, обладающий свойством P, обладает также и свойством Q*" и "*Среди объектов, обладающих свойством P, существует объект, обладающий также и свойством Q*". Первое высказывание равнозначно по смыслу высказыванию "*Всякий объект, если он обладает свойством P, то он обладает свойством Q*", которое на языке логики предикатов записывается так:

$$(\forall x)(P(x) \;\rightarrow\; Q(x)) \;. \tag{16.7}$$

Сопоставление двум данным одноместным предикатам $P(x)$ и $Q(x)$ высказывания (7) носит название операции связывания *ограниченным квантором общности*, а само высказывание (7) иногда обозначают

$$(\forall P(x))(Q(x)) \;. \tag{16.8}$$

Символ $\forall P(x)$ также называют ограниченным квантором общности.

Например, высказывание "*Для всякого $x > 1$ справедливо $\ln x > 0$*" ($x \in R$) на языке логики предикатов записывается как $(\forall x)(x > 1 \;\rightarrow\; \ln x > 0)$, а с использованием ограниченного квантора общности записывается в виде $(\forall x > 1)(\ln x > 0)$.

Второе из приведённых в начале настоящего пункта высказываний равнозначно по смыслу высказыванию "*Существует объект, обладающий свойством P и обладающий свойством Q*", которое на языке логики предикатов записывается так:

$$(\exists x)(P(x) \;\wedge\; Q(x)) \;. \tag{16.9}$$

Сопоставление двум данным одноместным предикатам $P(x)$ и $Q(x)$ высказывания (9) носит название операции связывания *ограниченным квантором существования*, а само высказывание (9) иногда обозначается

$$(\exists P(x))(Q(x)) \;. \tag{16.10}$$

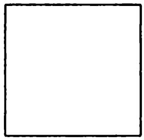
Символ $\exists P(x)$ также называют ограниченным квантором существования.

Например, (ложное) высказывание "*Существует действительное число, квадрат которого равен -1*" на языке логики предикатов запишется так: $(\exists x)(x \in R \;\wedge\; x^2 = -1)$, или с использованием ограниченного квантора существования запишется в виде $(\exists x \in R)(x^2 = -1)$.

Решите задачу № 6.7 из Тетради МЛ, посвящённую численным кванторам.

Логический квадрат. Кванторные операции (или операции квантификации) над предикатами – важнейший принципиальный шаг, отличающий теорию предикатов от теории высказываний. Систему взаимоотношений между универсальными и экзистенциальными высказываниями, возникающими при определении операций взятия квантора общности и квантора существования, схематично представляют в виде следующего так называемого "*логического квадрата*".

$$(\forall x)(P(x)) \qquad\qquad (\forall x)(\neg P(x))$$



$$(\exists x)(P(x)) \qquad\qquad (\exists x)(\neg P(x))$$

Универсальные высказывания $(\forall x)(P(x))$ и $(\forall x)(\neg P(x))$, стоящие в двух верхних вершинах квадрата, не могут быть (ни для какого предиката $P(x)$) одновременно истинными (хотя, конечно же, могут быть одновременно ложными). Говорят, что эти высказывания являются *противными* или *контрарными*. Экзистенциальные высказывания $(\exists x)(P(x))$ и $(\exists x)(\neg P(x))$, стоящие в двух нижних вершинах квадрата, наоборот, не могут быть (ни для какого предиката $P(x)$) одновременно ложными (хотя, конечно же, могут быть одновременно истинными). Говорят, что эти высказывания являются *субпротивными* или *субконтрарными*. Высказывания, стоящие в вершинах каждой диагонали квадрата, противоречат друг другу, т.е. являются отрицанием одно другого. Наконец, под каждым из универсальных высказываний, стоящих у верхних вершин, стоит высказывание у нижней вершины, следующее из него, т.е. такое, что импликация этих высказываний (для любого предиката $P(x)$) является истинным высказыванием.

В заключение отметим, что кванторы в явном виде впервые были введены немецким математиком Готлобом Фреге в работе "Bergriffsschrift" ("Исчисление понятий", 1879). В 1885 г. английский логик Чарльз Пирс ввёл термины "квантор", "квантификация", происшедшие от латинских слов *quantun* – "сколько" и *facio* – "делать". Это означает, что квантор показывает, о скольких (всех или некоторых) объектах говорится в том или ином предложении. Символику для кванторов в виде перевёрнутых латинских букв ввёл итальянский математик Дж. Пеано в 90-ые годы XIX века. После использования квантоов Пеано, Шрёдером, Расселом они стали широко распространяться.

§17. Формулы логики предикатов

В алгебре высказываний мы подробно изучили (§§2 – 6) одно из важнейших её понятий и инструментов – понятие формулы алгебры высказываний. Теперь наша задача состоит в том, чтобы определить и изучить соответствующее понятие в логике предикатов, а затем на его основе продемонстрировать, насколько тоньше и точнее язык и логика предикатов отражают процессы человеческого мышления, нежели это делают язык и логика высказываний.

Понятие формулы логики предикатов. Это понятие вводится аналогично понятию формулы алгебры высказываний. Сначала задаётся ***алфавит*** символов, из которых будут составляться формулы:

предметные переменные: x, y, z, x_i, y_i, z_i $(i \in N)$;

нульместные предикатные переменные: P, Q, R, P_i, Q_i, R_i $(i \in N)$;

n-местные $(n \geq 1)$ предикатные переменные: $P(\,,...,\,)$, $Q(\,,...,\,)$, $R(\,,...,\,)$, $P_i(\,,...,\,)$, $Q_i(\,,...,\,)$, $R_i(\,,...,\,)$ $(i \in N)$ с указанием числа свободных мест в них;

символы логических операций: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;

кванторы: $\forall$, $\exists$;

вспомогательные символы: (,) – скобки; , – запятая.

Теперь дадим определение формулы логики предикатов, которое также носит индуктивный характер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17.1 (*формулы логики предикатов*).

1) Каждая нульместная предикатная переменная есть ***формула***.

2) Если $P(\,,...,\,)$ – n-местная предикатная переменная, то $P(x_1, ..., x_n)$ есть ***формула***, в которой все предметные переменные $x_1, ..., x_n$ ***свободны***.

3) Если F – формула, то $\neg F$ – также ***формула***. ***Свободные*** (***связанные***) предметные переменные в формуле $\neg F$ те и только те, которые являются свободными (связанными) в F.

4) Если F_1, F_2 – формулы, и если предметные переменные, входящие одновременно в обе эти формулы, свободны в каждой из них, то выражения $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются ***формулами***. При этом предметные переменные, свободные (связанные) хотя бы в одной из формул F_1, F_2 называются ***свободными*** (***связанными***) и в новых формулах.

5) Если F – формула и x – предметная переменная, входящая в F свободно, то выражения $(\forall x)(F)$ и $(\exists x)(F)$ также являются ***формулами***, в которых переменная x связанная, а все остальные

предметные переменные, входящие в формулу F свободно или связанно, остаются и в новых формулах соответственно такими же.

6) Никаких других формул логики предикатов, кроме получающихся согласно пунктам 1–5, нет.

Формулы, определённые в пунктах 1 и 2, называются *элементарными* (или *атомарными*). Формулы, не являющиеся элементарными, называются *составными*.

Например, P, $Q(x,\ y,\ z)$, $R(x_1, x_2)$ – элементарные формулы, а $(\exists y)(P(x,\ y, z))$, $(\forall x)(\exists y)(P(x, y, z))$, $(((\forall x)(P(x)) \wedge Q) \rightarrow \neg(\exists y)(R(x, y)))$ – составные формулы. При этом, в первой составной формуле предметная переменная y связана, а переменные x, z – свободные. Во второй составной формуле свободна лишь переменная z, остальные – связаны. В третьей составной формуле первое вхождение переменной x связано, а второе – свободно. Переменная y связана. Последнюю формулу более целесообразно было бы записать в следующем виде (заменив связанную переменную x какой-нибудь буквой, не входящей в данную формулу): $(((\forall z)(P(z)) \wedge Q) \rightarrow \neg(\exists y)(R(x, y)))$.

Как и в алгебре высказываний, договоримся внешние скобки у формулы не писать, если только она не является частью более сложной формулы. Отметим кстати, что на основании пунктов 1, 3 и 4 сформулированного определения, всякая формула алгебры высказываний будет также и формулой логики предикатов.

В формулах вида $(\forall\xi)(F)$ и $(\exists\xi)(F)$ формула F называется *областью действия квантора* $\forall\xi$ или $\exists\xi$ соответственно. Тогда ясно, что вхождение предметной переменной в формулу будет связанным, если эта переменная находится в области действия квантора по этой переменной.

Формулы, в которых нет свободных предметных переменных, называются *замкнутыми*, а формулы, содержащие свободные предметные переменные, – *открытыми*. Так, все приведённые выше формулы логики предикатов, кроме формулы P, являются открытыми.

Примеры замкнутых формул: P, $(\forall z)(R(z))$, $(\exists x)(\forall y)(P(x, y))$, $(\forall x)(Q(x)) \rightarrow \neg(\forall x)(\exists y)(R(x, y))$.

Классификация формул логики предикатов. Если в формулу логики предикатов вместо каждой предикатной переменной подставить конкретный предикат, определённый на некотором выбранном множестве M, то формула превратится в конкретный предикат, заданный над множеством M. При этом, если исходная формула была замкнутой, то полученный конкретный предикат окажется нульместным, то есть будет высказыванием. Если же исходная формула была открытой, то есть содержала свободные вхождения предметных переменных, то в результате подстановки получим предикат, зависящий от некоторых предметных переменных. Если теперь подставить вместо этих предметных переменных конкретные предметы из множества M, то полученный предикат, а в конечном итоге – исходная формула, превратится в конкретное высказывание.

Превращение формулы логики предикатов в высказывание описанным выше способом, а также само получаемое высказывание, называется *интерпретацией* этой формулы на множестве M. Итак, если формула логики предикатов замкнутая, т.е. не содержит свободных предметных переменных, то её интерпретация состоит из одного этапа и сводится к подстановке вместо всех предикатных переменных конкретных предикатов, в результате чего формула превращается в конкретное высказывание (нульместный предикат). Если же формула логики предикатов открытая, т.е. содержит ряд свободных предметных переменных, то её интерпретация состоит из двух этапов. Во-первых, вместо всех предикатных переменных необходимо подставить конкретные предикаты, в результате чего формула превратится в конкретный предикат, зависящий от такого количества предметных переменных, сколько было свободных предметных переменных в исходной формуле. Во-вторых, нужно придать значение каждой предметной переменной, от которой зависит получившийся предикат, в результате чего этот предикат (и, значит, вся исходная формула) превратится в конкретное высказывание (истинное или ложное).

Пример 17.2. Дадим интерпретацию формуле $(\forall x)(\exists y)(P(x,y))$. В качестве множества M возьмём множество всех мужчин, а вместо предикатной переменной $P(x,y)$ подставим конкретный предикат, определённый на M: "*x есть отец y*". Тогда исходная формула превратится в следующее (очевидно, ложное) высказывание $(\forall x)(\exists y)(x$ есть отец $y)$. – "*у каждого мужчины есть сын*". Этой же формуле можно дать и другую интерпретацию. Возьмём в качестве M множество N всех натуральных чисел, а вместо предикатной переменной $P(x,y)$ подставим предикат "$x < y$", определённый на N. Тогда исходная формула превратится в (очевидно, истинное) высказывание $(\forall x)(\exists y)(x < y)$ – "*для каждого натурального числа существует большее него натуральное число*".

Пример 17.3. В предыдущем примере была рассмотрена интерпретация замкнутой формулы. Дадим интерпретацию открытой формуле $(\exists z)(P(x,y,z) \to Q(x,y,z)) \to R$. В качестве множества M возьмём множество N всех натуральных чисел. Вместо предикатных переменных $P(x,y,z)$ и $Q(x,y,z)$ подставим трёхместные предикаты "$x \cdot y = z$" и "$x + y = z$" соответственно, а вместо нульместного предиката R подставим (ложное) высказывание "$2 = 4$". Тогда данная формула превратится в двухместный предикат (от предметных переменных x, y):

$$(\exists z)(x \cdot y = z \quad \to \quad x + y = z) \quad \to \quad 2 = 4.$$

Посмотрим, в какие высказывания может превращаться данный предикат при подстановке вместо его переменных x и y конкретных предметов (чисел) из N. Нетрудно понять, что двухместный предикат $(\exists z)(x \cdot y = z \quad \to \quad x + y = z)$ превращается в истинное высказывание при любой подстановке вместо его предметных переменных x и y натуральных чисел. В самом деле, для натуральных m и n получаем высказывание

$$(\exists z)(m \cdot n = z \quad \to \quad m + n = z)\ .$$

Одноместный предикат (зависит от z) $m \cdot n = z \to m + n = z$, стоящий под знаком квантора $\exists z$, выполним, потому что всегда можно найти такое натуральное число k, что $m \cdot n \neq k$ и $m + n \neq k$, т.е. высказывания $m \cdot n = k$ и $m + n = k$ будут ложны, и, значит, высказывание $m \cdot n = k \to m + n = k$ – истинно. А раз так, то высказывание $(\exists z)(m \cdot n = z \quad \to \quad m + n = z)$ истинно. Поэтому высказывание $(\exists z)(m \cdot n = z \quad \to \quad m + n = z) \to 2 = 4$, в которое превращается данный предикат, ложно. Итак, исходная открытая формула логики предикатов превращена в тождественно ложный предикат. Нетрудно понять, что если вместо предикатных переменных $P(x,y,z)$ и $Q(x,y,z)$ подставить только что рассмотренные предикаты, а вместо нульместной предикатной переменной R – любое истинное высказывание, то исходная формула превратится в тождественно истинный предикат.

Сформулируем классификационные определения для формул логики предикатов.

Определение 17.4. Формула логики предикатов называется *выполнимой* (*опровержимой*) на множестве M, если при некоторой подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на этом множестве, она превращается в выполнимый (опровержимый) предикат.

Другими словами, формула выполнима (опровержима) на M, если существует истинная (ложная) её интерпретация на M. Формула из примера 17.2 является как выполнимой, так и опровержимой.

Ещё один пример такой формулы приведён в Задачнике, № 9.35,л. А в задаче 9.54 подробно разбирается пример формулы, выполнимой на множестве из трёх элементов и невыполнимой ни на каком множестве из двух элементов.

Определение 17.5. Формула логики предикатов называется тождественно истинной (тождественно ложной) на множестве M, если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на этом множестве, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

В задачах 9.53, 9.58 Задачника приводятся примеры формул тождественно истинных на одних множествах, но не являющихся таковыми на других множествах.

Определение 17.6. Формула логики предикатов называется *общезначимой*, или *тавтологией* (*тождественно ложной* или *противоречием*), если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на каких угодно множествах, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат. (Тот факт, что формула F является тавтологией, обозначается как и в алгебре высказываний $\models F$.)

Так, формула из примера 17.3 не является тавтологией, потому что она хотя и превратилась при одной подстановке в тождественно истинный предикат, при другой она оказалась превращённой в предикат тождественно ложный. Поэтому данная формула не является и противоречием.

Пример 17.7. Покажем, что формула $\neg P(x) \wedge (\forall y)(P(y))$ является противоречием, т.е. тождественно ложной. В самом деле, допустим противное: на некотором множестве M имеется конкретный предикат $A(x)$ такой, что данная формула превращается в выполнимый предикат (от x) $\neg A(x) \wedge (\forall y)(A(y))$. Последнее означает: найдётся предмет $a \in M$ такой, что высказывание $\neg A(a) \wedge (\forall y)(A(y))$ истинно. Истинность конъюнкции даёт истинность высказываний $\neg A(a)$ и $(\forall y)(A(y))$. Из истинности первого следует, что высказывание $A(a)$ ложно, а из истинности второго, что предикат $A(y)$ тождественно истинный, и значит, для любого предмета из M, в том числе и для $a \in M$, высказывание $A(a)$ истинно. Получаем противоречие, исключающее предположение о непротиворечивости исходной формулы. Следовательно, она тождественно ложна.

Нахождение тавтологий является одной из важнейших задач логики предикатов, как и алгебры высказываний. Но если в алгебре высказываний имеется общий метод определения, является или нет данная формула тавтологией (это – метод составления таблицы истинности для формулы), то в логике предикатов такого общего метода не существует. Каждая формула подлежит изучению индивидуальным методом на тождественную истинность. Дело здесь в том, что каждое высказывание имеет только одно из двух логических значений: "истина" или "ложь"", тогда как значение предиката зависит от выбора значений его предметных переменных, что, вообще говоря, можно сделать бесконечным числом способов. Мы вернёмся к этой проблеме в §19, где рассмотрим её для формул некоторых частных видов.

Рассмотрим наиболее важные тавтологии логики предикатов.

Тавтологии логики предикатов. О значении тавтологий алгебры высказываний подробно говорилось в §3. Всё сказанное там сохраняет своё значение и для тавтологий логики предикатов. Но, как уже отмечалось, язык логики предикатов более тонок, и потому тавтологии логики предикатов более тонко отражают процессы логических умозаключений.

Рассмотрение тавтологий логики предикатов начнём с установления того, что простейшие тавтологии логики предикатов получаются из тавтологий алгебры высказываний, а тавтологии алгебры высказываний образуют часть тавтологий логики предикатов.

ТЕОРЕМА 17.8. *Всякая формула, получающаяся из тавтологии алгебры высказываний заменой входящих в неё пропозициональных переменных произвольными предикатными переменными, является, тавтологией логики предикатов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ – тавтология алгебры высказываний и $P_1(x_1, x_2, ..., x_{m_1})$, $P_2(y_1, y_2, ..., y_{m_2})$, ... , $P_n(z_1, z_2, ..., z_{m_n})$ – предикатные переменные. Подставим их в данную формулу вместо пропозициональных переменных X_1, X_2, ..., соответственно. Получим формулу логики предикатов:

$$F(P_1(x_1, ..., x_{m_1}), \ ... \ , P_n(z_1, ..., z_{m_n})) \ .$$

Если теперь вместо предикатных переменных подставить произвольные конкретные предикаты $A_1(x_1, x_2, ..., x_{m_1})$, $A_n(z_1, z_2, ..., z_{m_n})$, то формула превратится в конкретный предикат

$$F(A_1(x_1, ..., x_{m_1}), \ ... \ , A_n(z_1, ..., z_{m_n})) \ .$$

Этот предикат тождественно истинный, потому что подстановка вместо предметных переменных $x_1, ..., x_{m_1}, ..., z_1, ..., z_{m_n}$ любых конкретных предметов $a_1, ..., a_{m_1}$, ..., c_1, ..., c_{m_n} из соответствующего множества превращает данный предикат в высказывание

$$F(A_1(x_1,...,x_{m_1}),\ ...\ ,\ A_n(z_1,...,z_{m_n}))\ ,$$

которое может быть получено также в результате подстановки в исходную тавтологию $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ алгебры высказываний вместо пропозициональных переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ конкретных высказываний $A_1(a_1, ..., a_{m_1}),\ ...\ ,\ A_n(c_1, ..., c_{m_n}))$ соответственно, и потому истинно. Следовательно, формула $F(P_1,\ P_2, ..., P_n)$ логики предикатов также является тавтологией. Теорема доказана. □

В последующих теоремах приводятся наиболее важные тавтологии логики предикатов, не сводящиеся к тавтологиям алгебры высказываний. Все такие тавтологии содержат кванторы.

ТЕОРЕМА 17.9 (*законы де Моргана для кванторов*). *Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями*:

а) $\neg(\forall x)(P(x)) \ \leftrightarrow\ (\exists x)(\neg P(x))$;
б) $\neg(\exists x)(P(x)) \ \leftrightarrow\ (\forall x)(\neg P(x))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем тождественную истинность первой формулы. (Тождественную истинность второй предлагается проверить самостоятельно). Данная формула замкнута, т.е. не имеет свободных предметных переменных. Поэтому подставив в эту формулу вместо предикатной переменной $P(x)$ любой конкретный одноместный предикат $A(x)$, определённый на некотором множестве M, получим высказывание

$$\neg(\forall x)(A(x)) \ \leftrightarrow\ (\exists x)(\neg A(x)) \qquad (*)$$

Для доказательства его истинности нужно убедиться, что обе части эквивалентности одновременно истинны или одновременно ложны. В самом деле, высказывание $\neg(\forall x)(A(x))$ истинно тогда и только тогда, когда высказывание $(\forall x)(A(x))$ ложно, что возможно, на основании определения 16.1, тогда и только тогда, когда предикат $A(x)$ опровержим. Далее, опровержимость предиката $A(x)$ означает выполнимость его отрицания $\neg A(x)$ (обдумайте это!), что равносильно, на основании определения 20.3, истинности высказывания $(\exists x)(\neg A(x))$. Итак, высказывание $\neg(\forall x)(A(x))$ истинно тогда и только тогда, когда истинно высказывание $(\exists x)(\neg A(x))$. Следовательно, высказывание (*) истинно, что и доказывает тождественную истинность первой формулы. □

Непосредственно из этой теоремы и закона двойного отрицания (теорема 3.2,в) вытекает следствие.

СЛЕДСТВИЕ 17.10 (*выражение кванторов друг через друга*). *Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями*:

а) $(\forall x)(P(x)) \ \leftrightarrow\ \neg(\exists x)(\neg P(x))$;

б) $(\exists x)(P(x)) \;\leftrightarrow\; \neg(\forall x)(\neg P(x))$.

Заметим, что законы де Моргана для кванторов напоминают аналогичные законы для конъюнкции и дизъюнкции в алгебре высказываний. Можно сказать, эти законы для кванторов представляют собой обобщения соответствующих законов для конъюнкции и дизъюнкции подобно тому, как сами операции квантификации являются обобщениями операций конъюнкции и дизъюнкции, о чём уже говорилось в §16.

Теорема 17.11 (*законы пронесения кванторов через конъюнкцию и дизъюнкцию*). *Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:*

а) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \;\leftrightarrow\; (\forall x)(P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x))$;
б) $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \;\leftrightarrow\; (\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x))$;
в) $(\forall x)(P(x) \vee Q) \;\leftrightarrow\; (\forall x)(P(x)) \vee Q$;
г) $(\exists x)(P(x) \wedge Q) \;\leftrightarrow\; (\exists x)(P(x)) \wedge Q$.

Доказательство. а) Подставим вместо предикатных переменных $P(x)$ и $Q(x)$ конкретные предикаты $A(x)$ и $B(x)$, определённые на некотором множестве M. Формула превратится в высказывание

$$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \;\leftrightarrow\; (\forall x)(A(x)) \wedge (\forall x)(B(x)) . \qquad (*)$$

Докажем его истинность. На основании определения 20.1, высказывание $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ истинно тогда и только тогда, когда предикат $A(x) \wedge B(x)$ тождественно истинен, что на основании следствия 19.7 возможно в том и только в том случае, когда оба предиката $A(x)$ и $B(x)$ – тождественно истинны. Далее, тождественная истинность предикатов $A(x)$ и $B(x)$ равносильна, ввиду определения 16.1, истинности высказываний $(\forall x)(A(x))$ и $(\forall x)(B(x))$ соответственно, что равносильно истинности их конъюнкции $(\forall x)(A(x)) \wedge (\forall x)(B(x))$. Итак, левая и правая части эквивалентности (*) одновременно истинны и одновременно ложны, что даёт истинность всего высказывания (*) и тождественную истинность доказываемой формулы.

г) В этой формуле Q – нульместная предикатная переменная. Поэтому подставим в данную формулу вместо $P(x)$ конкретный одноместный предикат $A(x)$, определённый на некотором множестве M, а вместо Q конкретное высказывание B. Формула превратится в высказывание

$$(\exists x)(A(x) \wedge B) \;\leftrightarrow\; (\exists x)(A(x)) \wedge B . \qquad (**)$$

Докажем его истинность. Действительно, на основании определения 16.3, высказывание $(\exists x)(A(x) \wedge B)$ истинно тогда и только тогда, когда предикат $A(x) \wedge B$ выполним. Последнее возможно, если и только если предикаты $A(x)$ и B выполнимы. (Напомним, что в конце предыдущего параграфа было условлено под выполнимостью нульместного предиката (высказывания) понимать его истинность.) Далее, выполнимость предиката $A(x)$ и истинность высказывания B равносильны истинности высказываний $(\exists x)(A(x))$ и B, а значит, и истинности их конъюнкции $(\exists x)(A(x)) \wedge B$. Следовательно, высказывание (**) истинно для любых $A(x)$ и B, и поэтому рассматриваемая формула – тавтология.

Тождественную истинность формул б) и в) предлагается доказать в качестве упражнения. □

Полезно проанализировать и сопоставить между собой тавтологии, связанные с пронесением кванторов через различные логические операции, представленные в теоремах 17.11 и 17.12. Особая важность этих тавтологий будет обнаружена в следующем параграфе, где рассматриваются равносильные преобразования формул логики предикатов. Здесь мы имеем следующее. Квантор общности безоговорочно проносится через конъюнкцию (а также выносится из обоих членов конъюнкции – эта процедура важна для будущих равносильных преобразований формул), а квантор существования – через дизъюнкцию (теорема 17.11 а, б). Проблемы начинаются при столкновении квантора общности с дизъюнкцией и квантора существования с конъюнкцией. Здесь общезначимыми являются формулы не с эквивалентностями, а с импликацией (см. задачи 9.43 в,г Задачника):

$$\models\ (\exists x)(P(x)\ \wedge\ Q(x))\ \rightarrow\ ((\exists x)(P(x))\ \wedge\ (\exists x)(Q(x)))\ ,$$

$$\models\ ((\forall x)(P(x))\ \vee\ (\forall x)(Q(x)))\ \rightarrow\ (\forall x)(P(x)\ \vee\ Q(x))\ .$$

Оставив читателю доказательства общезначимости приведённых формул, укажем примеры предикатов, которые показывают не общезначимость формул, являющихся обратными импликациями по отношению к данным. Для первой формулы такими предикатами могут служить, например, следующие предикаты, заданные над множеством всех вещественных чисел R: "$x < 1$" и "$x > 2$". Они посылку обратной импликации превращают в истинное высказывание $(\exists x)(x < 1)\ \wedge\ (\exists x)(x > 2)$, а заключение – в ложное высказывание $(\exists x)(x < 1 \wedge x > 2)$. Для второй формулы подойдут предикаты, также заданные над R: "$x \leq 0$" и "$x > 0$", превращающие посылку обратной импликации в истинное высказывание $(\forall x)(x \leq 0 \vee x > 0)$, а следствие – в ложное высказывание $(\forall x)(x \leq 0)\ \vee\ (\forall x)(x > 0)$.

Отметим, что, тем не менее, равносильное пронесение квантора общности через дизъюнкцию и квантора существования через конъюнкцию возможно. Это тот случай, когда один из членов дизъюнкции или конъюнкции не зависит от той предметной переменной, квантор по которой проносится (см. теорему 17.11 в,г).

Теорема 17.12 (*законы пронесения кванторов через импликацию*). ***Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:***

а) $(\forall x)(P(x) \to Q) \leftrightarrow ((\exists x)(P(x)) \to Q)$;
б) $(\exists x)(P(x) \to Q) \leftrightarrow ((\forall x)(P(x)) \to Q)$;
в) $(\forall x)(Q \to P(x)) \leftrightarrow (Q \to (\forall x)(P(x)))$;
г) $(\exists x)(Q \to P(x)) \leftrightarrow (Q \to (\exists x)(P(x)))$.

Доказательство. Отметим, что предикатная переменная Q в этих формулах может быть не только нульместной, но и любой n-местной, важно лишь, чтобы в неё не входила предметная переменная x. Итак, пусть Q есть $Q(y_1, ..., y_n)$. Будем считать для краткости, что Q есть одноместная предикатная переменная $Q(y)$.

а) Предположим, что данная формула не является тавтологией. Тогда существуют такие конкретные предикаты $A(x)$ и $B(y)$, определённые на множествах M и M_1 соответственно, что предикат (от y)

$$(\forall x)(A(x) \to B(y)) \leftrightarrow ((\exists x)(A(x)) \to B(y))$$

опровержим, т.е. обращается в ложное высказывание при подстановке вместо предметной переменной y некоторого конкретного предмета $b \in M_1$: $\lambda[(\forall x)(A(x) \to B(b)) \leftrightarrow ((\exists x)(A(x)) \to B(b))] = 0$. Эквивалентность ложна, если её члены принимают разные значения истинности, т.е. здесь могут представиться две возможности. Первая

$$\lambda[(\forall x)(A(x) \to B(b))] = 1 , \tag{1}$$
$$\lambda[(\exists x)(A(x)) \to B(b)] = 0; \tag{2}$$

и вторая

$$\lambda[(\forall x)(A(x) \to B(b))] = 0, \tag{3}$$
$$\lambda[(\exists x)(A(x)) \to B(b)] = 1. \tag{4}$$

Рассмотрим первую возможность. Из (2) по определению 1.7 импликации имеем

$$\lambda[(\exists x)(A(x))] = 1 ; \tag{5}$$
$$\lambda[B(b)] = 0 ; \tag{6}$$

Далее, из (5) по определению 16.3 квантора существования заключаем, что предикат $A(x)$ выполним, т.е.

$$\lambda[A(a)] = 1 ; \tag{7}$$

для некоторого $a \in M$. Вернёмся к соотношению (1). По определению 20.1 квантора общности предикат $A(x) \to B(b)$ – тождественно истинен. В частности, если вместо предметной переменной x подставить $a \in M$, то получим истинное высказывание $\lambda[A(a) \to B(b)] = 1$. Но, учитывая (6) и (7), получаем $\lambda[A(a) \to B(b)] = \lambda[A(a)] \to \lambda[B(b)] = 1 \to 0 = 0$. Противоречие.

Рассмотрим вторую возможность, выраженную в соотношениях (3), (4). Из (3), на основании определения 20.1 квантора общности, следует, что предикат $A(x) \to B(b)$ опровержим, т.е. $\lambda[A(a) \to B(b)] = 0$ для некоторого $a \in M$. Тогда, по определению импликации 1.7:

$$\lambda[A(a)] = 1, \quad \lambda[B(b)] = 0. \tag{8}$$

Ввиду последнего соотношения, из соотношения (4) заключаем, что $\lambda[(\exists x)(A(x))] = 0$. Последнее означает тождественную ложность предиката $A(x)$ (определение 16.3). В частности, для предмета $a \in M$ имеем $\lambda[A(a)] = 0$, что противоречит первому из соотношений (8).

Итак, в каждом случае приходим к противоречию, доказывающему невозможность сделанного предположения. Следовательно, данная формула – тавтология.

г) Предположим, что данная формула не является тавтологией. Тогда существуют такие конкретные предикаты $A(x)$ и $B(y)$, определённые на множествах M и M_1 соответственно, что предикат (от y) $(\exists x)(B(y) \to A(x)) \leftrightarrow (B(y) \to (\exists x)(A(x)))$ опровержим, т.е. обращается в ложное высказывание при подстановке вместо предметной переменной y некоторого конкретного предмета b из M_1:

$$\lambda[(\exists x)(B(b) \to A(x)) \leftrightarrow (B(b) \to (\exists x)(A(x)))] = 0.$$

Эквивалентность ложна в двух случаях. Во-первых, когда

$$\lambda[(\exists x)(B(b) \to A(x))] = 1, \tag{1}$$
$$\lambda[B(b) \to (\exists x)(A(x))] = 0, \tag{2}$$

и, во-вторых, когда

$$\lambda[(\exists x)(B(b) \to A(x))] = 0, \tag{3}$$
$$\lambda[B(b) \to (\exists x)(A(x))] = 1. \tag{4}$$

Рассмотрим первый случай. Из (2) по определению 1.7 импликации, заключаем:

$$\lambda[B(b)] = 1; \tag{5}$$
$$\lambda[(\exists x)(A(x))] = 0. \tag{6}$$

Последнее соотношение говорит о том, что предикат $A(x)$ тождественно ложен (определение 16.3). Далее, соотношение (1) показывает, на основании того же определения 16.3, что предикат $B(b) \to A(x)$ выполним. Учитывая соотношение (5), получаем: существует такой элемент $a \in M$, что $\lambda[A(a)] = 1$. Последнее противоречит доказанной выше тождественной ложности предиката $A(x)$.

Получить противоречие во втором случае, выраженном в соотношениях (3), (4), предлагается ссамостоятельно. Таким образом, рассматриваемая формула – тавтология.

Докажите самостоятельно тождественную истинность двух оставшихся формул. □

Проанализируем теперь ситуацию, связанную с пронесением кванторов через импликацию, а также их вынесением за знак импликации. В случаях, когда один из членов импликации (посылка или заключение) не зависит от той предметной переменной, квантор по которой проносится, равносильность здесь также возможна. Но ситуация здесь несколько отличается от той, которая имеет место в случаях конъюнкции и дизъюнкции. Если от предметной переменной, стоящей под знаком квантора, не зависит посылка импликации, то соответствующий квантор без изменения проносится к заключению импликации (теорема 17.12 в). Если же от предметной переменной, стоящей под знаком квантора, не зависит заключение импликации, то соответствующий квантор при пронесении его к посылке импликации переворачивается, т. е. меняется на противоположный: квантор общности на квантор существования, а квантор существования – на квантор общности (теорема 17.12 а,б).

В ситуации с импликацией имеет место одна интересная тавтология: если оба члена импликации зависят от переменной, стоящей под знаком квантора, то через импликацию можно равносильным образом пронести квантор существования, но при постановке его перед посылкой он поменяется на квантор общности (см. № 9.45 з из Задачника):

$$\models\ (\exists x)(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow ((\forall x)(P(x)) \to (\exists x)(Q(x))).$$

В то же время, если мы рассмотрим аналогичную формулу для квантора общности:

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x))\ \leftrightarrow\ ((\exists x)(P(x)) \to (\forall x)(Q(x)))\ ,$$

то она уже не будет тавтологией. Тавтологией будет лишь импликация:

$$\models\ ((\exists x)(P(x)) \to (\forall x)(Q(x))) \to (\forall x)(P(x) \to Q(x)).$$

Докажите это самостоятельно. То, что обратная импликация не будет тавтологией, подтверждает пример двух предикатов $P(x)$: "x делится на 4" и $Q(x)$: "x чётно", заданных над множеством натуральных чисел (см. Задачник, № 9.45 л).

Отметим, далее, что, используя импликацию, квантор общности можно следующими двумя способами пронести через импликацию предикатов, каждый из которых зависит от переменной, стоящей под знаком квантора (см. Задачник, № 9.45 д, е):

$\models (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)(P(x)) \to (\forall x)(Q(x)))$,

$\models (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x)(P(x)) \to (\exists x)(Q(x)))$.

Проверьте, что формулы действительно являются тавтологиями, а обратные импликации таковыми не являются.

В то же время аналогичная конструкция с квантором существования $(\exists x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x)(P(x)) \to (\exists x)(Q(x)))$ уже не будет тавтологией (см. Задачник, № 9.45 ж). Пример: $P(x)$: "x – четно", $Q(x)$: "$x < 1$", $x \in N$. Не будет тавтологией и обратная импликация. Пример: $P(x)$: "$x > 2$", $Q(x)$: "$x < 1$", $x \in R$.

ТЕОРЕМА 17.13 (*законы удаления квантора общности и введения квантора существования*). *Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:*

а) $(\forall x)(P(x)) \;\to\; P(y)$;

б) $P(y) \;\to\; (\exists x)(P(x))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что первая формула тождественно истинна (проделайте соответствующую проверку и для второй формулы). Предположим, что формула не тождественно истинна. Это значит: существует такой предикат $A(x)$, определённый на некотором множестве M, что предикат (от y) $(\forall x)(A(x)) \to A(y)$ опровержим, т.е. превращается в ложное высказывание при подстановке вместо y некоторого $a \in M$: $\lambda[(\forall x)(A(x)) \to A(a)] = 0$. Последнее означает, что

$$\lambda[(\forall x)(A(x))] = 1 \; ; \qquad (1)$$

$$\lambda[A(a)] = 0 \, . \qquad (2)$$

Из соотношения (1) заключаем, что предикат $A(x)$ тождественно истинный. Но это противоречит соотношению (2). Следовательно, сделанное предположение неверно, и данная формула – тавтология. □

ТЕОРЕМА 17.14 (*законы коммутативности для кванторов*). *Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:*

а) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)) \;\leftrightarrow\; (\forall y)(\forall x)(P(x,y))$;

б) $(\exists x)(\exists y)(P(x,y)) \;\leftrightarrow\; (\exists y)(\exists x)(P(x,y))$;

в) $(\exists y)(\forall x)(P(x,y)) \;\to\; (\forall x)(\exists y)(P(x,y))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тождественная истинность первых двух формул достаточно очевидна (проверьте самостоятельно).

Предположим, что третья формула – не тавтология. Тогда существует такой предикат $A(x,y)$, определённый на множествах M_1 и M_2, что высказывание $(\exists y)(\forall x)(A(x,y)) \to (\forall x)(\exists y)(A(x,y))$ ложно. Импликация ложна, если и только если

$$\lambda[(\exists y)(\forall x)(A(x,y))] = 1, \qquad (1)$$
$$\lambda[(\forall x)(\exists y)(A(x,y))] = 0. \qquad (2)$$

Из (1) по определению квантора существования следует, что предикат (от y) $(\forall x)(A(x,y))$ выполним, т.е. $\lambda[(\forall x)(A(x,b))] = 1$ для некоторого $b \in M_2$. Последнее, по определению 20.1 квантора общности, означает, что предикат $A(x,b)$ тождественно истинен на M_1. Следовательно, тождественно истинным на M_1 будет и одноместный (от x) предикат $(\exists y)(A(x,y))$. Но тогда, по определению квантора общности, $\lambda[(\forall x)(\exists y)(A(x,y))] = 1$, что противоречит соотношению (2). Следовательно, данная формула – тавтология.

Теорема доказана. □

Во всех доказанных тавтологиях предикатные переменные нульместны, одноместны или (в последней теореме) двухместны. Сохранится ли тождественная истинность этих формул, если считать, что входящие в них предикатные переменные зависят от произвольного числа предметных переменных? Положительный ответ содержится в следующей теореме.

Теорема 17.15. ***Если в тавтологиях теорем 17.9 - 17.14 считать, что предикатные переменные зависят от произвольного конечного числа предметных переменных, то полученные формулы будут также тавтологиями логики предикатов.***

Доказательство. При доказательстве теоремы 17.12 уже предпринята попытка к расширению смысла приведённых там тавтологий: под предикатной переменной Q понималась n-местная предикатная переменная $Q(y_1, y_2, ..., y_n)$. Можно было бы и под одноместной предикатной переменной $P(x)$ понимать m-местную предикатную переменную $P(x_1, x_2, ..., x_m)$, а квантор общности рассматривать по x_1, считая, что x_1 не входит в число предметных переменных предикатной переменной $Q(y_1, y_2, ..., y_n)$.

Докажем, например, тождественную истинность формулы из теоремы 17.11, в, считая P m-местной предикатной переменной $P(x_1, x_2, ..., x_m)$, а Q – n-местной предикатной переменной $Q(y_1, y_2, ..., y_n)$. Причём, пусть x_1 не содержится среди предметных переменных $y_1, y_2, ..., y_n$, хотя некоторые (или все) из переменных $x_2, ..., x_m$ могут содержаться среди переменных $y_1, y_2, ..., y_n$. Итак, требуется доказать тождественную истинность формулы:

$$(\forall x_1)(P(x_1, x_2, ..., x_m) \vee Q(y_1, y_2, ..., y_n)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall x_1)(P(x_1, x_2, ..., x_m)) \vee Q(y_1, y_2, ..., y_n)\ . \qquad (*)$$

Подставим вместо предикатных переменных P и Q конкретные предикаты $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ и $B(y_1, y_2, ..., y_n)$, определённые на множествах $M_1, M_2, ..., M_m$ и $N_1, N_2, ..., N_n$ соответственно. Получим $(m-1+n)$-местный предикат

$$(\forall x_1)(A(x_1, x_2, ..., x_m) \vee B(y_1, y_2, ..., y_n)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall x_1)(A(x_1, x_2, ..., x_m)) \vee B(y_1, y_2, ..., y_n), \qquad (**)$$

определённый на множествах $M_2, ..., M_m, N_1, N_2, ..., N_n$ (в случае, если некоторые переменные $x_2, ..., x_m$ встречаются среди переменных $y_1, y_2, ..., y_n$, "местность" полученного предиката будет меньше). Докажем тождественную истинность данного предиката. Для этого проверим, что он превратится в истинное высказывание для произвольных элементов $a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n$ множеств $M_2, ..., M_m$, $N_1, N_2, ..., N_n$ соответственно. Действительно, рассмотрим одноместный (от x_1) предикат $A(x_1, a_2, ..., a_m)$, определённый на множестве M_1, полученный из предиката $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ в результате подстановки вместо предметных переменных $x_2, ..., x_m$ элементов $a_2, ..., a_m$ соответственно, и высказывание $B(b_1, b_2, ..., b_n)$. Подставим их в тавтологию теоремы 17.11,в вместо одноместной предикатной переменной $P(x)$ и нульместной предикатной переменной Q соответственно. Получим истинное высказывание

$$(\forall x_1)(A(x_1, a_2, ..., a_m) \vee B(b_1, b_2, ..., b_n)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\forall x_1)(A(x_1, a_2, ..., a_m)) \vee B(b_1, b_2, ..., b_n).$$

Но ясно, что именно это высказывание получится, если в предикат (**) подставить вместо его предметных переменных $x_2, ..., x_m$, $y_1, y_2, ..., y_n$ элементы $a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n$ соответственно. Итак, любые предикаты превращают формулу (*) в тождественно истинный предикат. Следовательно, эта формула – тавтология. □

Замечание 17.16. В распространении взгляда на тавтологии, выраженного в теоремах 17.9 – 17.14 можно пойти ещё дальше: считать, что буквы P и Q представляют собой произвольные формулы логики предикатов, а не просто n-местные предикатные переменные (представляющие собой на основании определения 17.1 так называемые элементарные или атомарные формулы). Получаемые формулы также будут тавтологиями логики предикатов.

Рекомендуется самостоятельно проделать пропущенные доказательства тождественной истинности формул логики предикатов в теоремах настоящего параграфа. Такая работа позволит глубже проникнуть в сущность понятий "для всех" и "существует", научит различать их и выделять в математической практике. Эти знания и навыки будут способствовать более отчётливому осознанию природы математических понятий, строения доказательств математических теорем, образуют значительный пласт логической и общематематической культуры.

§18. Равносильные преобразования формул и логическое следование формул логики предикатов

Понятие равносильности формул. Определение 18.1. Две формулы, F и H логики предикатов называются *равносильными на множестве* M, если при любой подстановке в эти формулы вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, определённых на M, формулы превращаются в равносильные предикаты. Если две формулы равносильны на любых множествах, то их будем называть просто *равносильными*. Равносильность формул будем обозначать так: $F \cong H$.

Приведём пример двух неравносильных формул логики предикатов. Покажем, что $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \not\cong (\forall x)(P(x)) \vee (\forall x)(Q(x))$. В самом деле, подставим вместо предикатных переменных $P(x)$ и $Q(x)$ конкретные предикаты $A(x)$ и $B(x)$, определённые на множестве N соответственно, где $A(x)$ есть "*x – чётно*", а $B(x)$ есть "*x– нечётно*". Тогда левая формула превратится в высказывание (нульместный предикат) "*каждое натуральное число либо нечётно, либо чётно*", которое истинно. Правая формула превращается в высказывание (нульместный предикат) "*либо каждое натуральное число чётно, либо каждое натуральное число нёчетно*", которое ложно.

Нетрудно понять на основании определений 18.1 и 17.6, что формулы F и H равносильны тогда и только тогда, тогда формула $F \to H$ является тавтологией: $\boxed{F \cong H \iff \models F \leftrightarrow H}$.

Это замечание вместе с теоремами 17.9 – 17.14 позволяет указать наиболее важные примеры равносильных формул (см. Задачник, № 9.49).

Как и в алгебре высказываний, можно заменять одну равносильную формулу другой. Переход от одной равносильной формулы к другой называется *равносильным преобразованием* исходной формулы. В процессе равносильных преобразований формул логики предикатов могут использоваться равносильности, известные из алгебры высказываний.

Приведённая форма для формул логики предикатов. Равносильные преобразования позволяют приводить формулы к тому или иному более удобному виду. Один из таких видов носит название приведённой формы.

Определение 18.2. *Приведённой формой* для формулы логики предикатов называется такая равносильная ей формула, в которой из операций алгебры высказываний имеются только операции $\neg$, $\wedge$, $\vee$, а знаки отрицания относятся лишь к предикатным переменным и к высказываниям.

ТЕОРЕМА 18.3. *Для каждой формулы логики предикатов существует приведённая форма.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведём доказательство методом математической индукции по числу логических связок в формуле (включая кванторы общности и существования).

Если формула не имеет логических связок, т.е. является атомарной, то она сама имеет приведённую форму. Предположим, что всякая формула, содержащая не больше $k-1$ логических связок, обладает приведённой формой. Покажем теперь, что приведённой формой обладает также и всякая формула, содержащая k логических связок. Пусть F – такая формула. Тогда, на основании определения 17.1, она имеет один из следующих видов: $\neg F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$, $(\forall\xi)(F_1)$, $(\exists\xi)(F_1)$. Каждая из формул F_1, F_2 содержит логических связок не более $k-1$, и поэтому, по предположению индукции, обладает приведённой формой. Пусть F_1^* и F_2^* – приведённые формы для формул F_1 и F_2 соответственно. Отсюда формулы $(F_1^* \wedge F_2^*)$, $(F_1^* \vee F_2^*)$, $(\forall\xi)(F_1^*)$, $(\exists\xi)(F_1^*)$ являются приведёнными формами для формул $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(\forall\xi)(F_1)$, $(\exists\xi)(F_1)$ соответственно.

Остаётся рассмотреть случаи, когда F имеет один из следующих видов: $\neg F_1$, $(F_1 \to F_2)$ или $(F_1 \leftrightarrow F_2)$.

Пусть F есть $\neg F_1$. Тогда формула $\neg F_1^*$ может не быть приведённой формой для формулы $\neg F_1$. Строго говоря, для этого случая следует провести доказательство также методом математической индукции по числу логических связок формулы F_1^*. Если F_1^* атомарна, т.е. F_1^* – предикатная переменная P, то $(\neg F_1)^*$ есть $\neg P$ – приведённая форма. Если же F_1^* – составная формула, то задача сводится к пронесению знака $\neg$ через кванторы и операции $\wedge$ и $\vee$ (другие логические операции не входят в приведённую форму F_1^*). Это пронесение осуществляется на основании равносильностей из логики предикатов и алгебры высказываний, называемых законами де Моргана (см. теоремы 17.9 и 4.4, р, с). Итак, если F есть $\neg F_1$ и F_1 обладает приведённой формой F_1^*, то мы сможем найти приведённую форму и для F.

Далее, пусть F есть $(F_1 \to F_2)$. Тогда, на основании теоремы 4.4,у формула F равносильна формуле $(\neg F_1 \vee F_2)$. Заменив формулы F_1 и F_2 на равносильные им приведённые формы F_1^* и F_2^*

соответственно, получим равносильную формулу $(\neg F_1^* \vee F_2^*)$, которая, вообще говоря, не является приведённой. Но, на основании предыдущего абзаца, можно найти для формулы $\neg F_1^*$ приведённую форму F_1^{**}. Тогда ясно, что формула $(F_1^{**} \vee F_2^*)$ имеет приведённый вид и равносильна исходной формуле F.

Наконец, если F есть $(F_1 \leftrightarrow F_2)$, то на основании равносильности теоремы 4.4,ч F равносильна формуле $((F_1 \to F_2) \wedge (F_2 \to F_1))$. В предыдущем абзаце было показано, как найти приведённые формы $(F_1^{**} \vee F_2^*)$ и $(F_2^{**} \vee F_1^*)$ для формул $(F_1 \to F_2)$ и $(F_2 \to F_1)$ соответственно. Тогда ясно, что формула $(F_1^{**} \vee F_2^*) \wedge (F_2^{**} \vee F_1^*)$ имеет приведённый вид и равносильна исходной формуле F.

Итак, в любом случае формула F обладает приведённой формой. Теорема доказана. □

Разберите пример № 9.51,л из Задачника и решите остальные задачи из этого номера.

Предваренная нормальная форма для формул логики предикатов. Ещё одним удобным видом формулы, к которому её можно привести равносильными преобразованиями, является предваренная нормальная форма.

Определение 18.4. *Предваренной нормальной формой* для формулы логики предикатов называется такая её приведённая форма, в которой все кванторы стоят в её начале, а область действия каждого из них распространяется до конца формулы, т.е. это формула вида $(K_1x_1)...(K_mx_m)\ (F(x_1, ..., x_n))$, где K_i, есть один из кванторов $\forall$ или $\exists$ $(i = 1, ..., m)$, $m \leq n$, а формула F не содержит кванторов и является приведённой формулой. (Заметим, что кванторы в формуле могут отсутствовать вовсе.)

Теорема 18.5. *Для каждой формулы, логики предикатов существует предваренная нормальная форма.*

Доказательство. Проведём доказательство по индукции, следуя правилу построения формул логики предикатов (определение 17.1).

Если формула атомарна, то она сама представляет собой предваренную нормальную форму. Поскольку каждая формула F равносильна формуле, полученной из более простых формул F_1 и F_2 с помощью операций $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$, (операции $\vee$ и $\to$, $\leftrightarrow$ выражаются через $\neg$, $\wedge$, $\vee$), то теперь остаётся научиться находить предваренные нормальные формы для формул $\neg F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$,

$(\forall\xi)(F_1)$, $(\exists\xi)(F_1)$, если известны предваренные нормальные формы F_1^* и F_2^* формул F_1 и F_2 соответственно. Пусть, например, F_1^* имеет вид $(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)...(\exists x_n)(G_1(x_1,...,x_n))$, а F_2^* имеет вид $(\exists y_1)(\forall y_2)...(\forall y_m)(G_2(y_1,...,y_m))$.

Рассмотрим формулу $\neg F_1$. Поскольку $F_1 \cong F_1^*$, поэтому $\neg F_1 \cong \neg F_1^*$. Но формула $\neg F_1^*$, в свою очередь, равносильна на основании законов де Моргана для кванторов (теорема 17.9) формуле

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)...(\forall x_n)(\neg G_1(x_1,...,x_n)).$$

Остаётся по законам де Моргана для конъюнкции и дизъюнкции (теорема 4.4, p, c) пронести знак отрицания до предикатных переменных: $\neg G_1 \cong G_1^*$. Тогда $\neg F_1$ будет иметь предваренную нормальную форму

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\forall x_3)...(\forall x_n)(G_1^*(x_1,...,x_n)).$$

Далее, покажем, как отыскивается предваренная нормальная форма для F, если F есть $(F_1 \wedge F_2)$. Поскольку при переименовании связанной переменной формула, очевидно, переходит в равносильную, поэтому можно считать, что переменные $x_1,...,x_n$ не входят в формулу F_2^*, а переменные $y_1,...,y_m$ не входят в F_1^*. Ясно, что $F_1 \wedge F_2 \cong F_1^* \wedge F_2^*$, но последняя формула ещё не представляет собой предваренной нормальной формы. Покажем, как её можно преобразовать к такой форме. На основании равносильности (получаемой из тавтологии) теоремы 17.11,а, формула $(F_1^* \wedge F_2^*)$ равносильна формуле

$$(\forall x_1)[(\forall x_2)(\exists x_3)...(\exists x_n)(G_1(x_1,...,x_n)) \wedge$$
$$\wedge (\exists y_1)(\forall y_2)...(\forall y_m)(G_2(y_1,...,y_m))] .$$

Теперь можно производить равносильные преобразования под знаком квантора $\forall x_1$ в квадратных скобках, потому что в результате связывания квантором по одной и той же переменной x_1 двух равносильных формул мы снова получим равносильные формулы. Тогда, на основании той же равносильности, последняя формула равносильна формуле

$$(\forall x_1)(\forall x_2)[(\exists x_3)...(\exists x_n)(G_1(x_1,...,x_n)) \wedge$$
$$\wedge (\exists y_1)(\forall y_2)...(\forall y_m)(G_2(y_1,...,y_m))] .$$

И так далее. Наконец, на основании равносильности (получаемой из тавтологии) теоремы 17.11,г последняя формула равносильна формуле

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)...(\exists x_n)[(G_1(x_1,...,x_n)) \wedge$$
$$\wedge (\exists y_1)(\forall y_2)...(\forall y_m)(G_2(y_1,...,y_m))] .$$

Таким же образом кванторы, стоящие перед формулой G_2, выносятся за квадратные скобки. В результате получим формулу

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)...(\exists x_n)(\exists y_1)(\forall y_2)...(\forall y_m)[G_1(x_1,...,x_n) \wedge G_2(y_1,...,y_m)],$$

равносильную формуле $(F_1 \wedge F_2)$ и являющуюся предваренной нормальной формой этой формулы.

Аналогичным образом при помощи равносильностей (получаемых из тавтологий) теоремы 17.11,б, можно построить предваренную нормальную форму для формулы $(F_1 \vee F_2)$, исходя из предваренных нормальных форм F_1^* и F_2^* формул F_1 и F_2 соответственно.

Наконец, нетрудно понять, что формула $(\forall\xi)(F_1^*)$ равносильна формуле $(\forall\xi)(F_1)$ и является её предваренной нормальной формой. Аналогично, $(\exists\xi)(F_1^*)$ – предваренная нормальная форма для формулы $(\exists\xi)(F_1)$.

Итак, в каждом случае F обладает предваренной нормальной формой. Теорема доказана. □

Разберите пример № 9.52,м из Задачника и решите остальные задачи из этого номера.

Логическое следование формул логики предикатов. Понятие логического следования для формул логики предикатов соответствует понятию логического следования для формул алгебры высказываний. Формула G логики предикатов называется *логическим следствием* формулы F, если при всякой интерпретации, при которой F превращается в тождественно истинный предикат, формула G также превращается в тождественно истинный предикат. Запись: $F \models G$. Как и в алгебре высказываний, $\boxed{F \models G \iff \models F \to G}$.

Также две формулы равносильны тогда и только тогда, когда каждая из них является логическим следствием другой. Поэтому здесь целесообразно ещё раз обратить внимание на такие тавтологии, имеющие форму импликации, для которых обратные импликации тавтологиями не являются. Так, закон о перестановке разноимённых кванторов (теорема 17.14в) приводит к логическому следованию: $(\exists y)(\forall x)(F(x,y)) \models (\forall x)(\exists y)(F(x,y))$, причём, обратное следование не выполняется.

Аналогичные примеры логических следований дают тавтологии, связанные с пронесением кванторов через знаки логических операций, которые мы обсуждали в предыдущем параграфе:

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \models (\exists x)(P(x)) \wedge (\exists x)(Q(x)),$$
$$(\forall x)(P(x)) \vee (\forall x)(Q(x)) \models (\forall x)(P(x) \vee Q(x)),$$
$$(\exists x)(P(x)) \to (\forall x)(Q(x)) \models (\forall x)(P(x) \to Q(x)),$$
$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \models (\forall x)(P(x)) \to (\forall x)(Q(x)),$$
$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \models (\exists x)(P(x)) \to (\exists x)(Q(x)).$$

Наконец, обратим внимание на тавтологии теоремы 21.13, выражающие законы удаления кванторы общности и введения квантора существования: $\models (\forall x)(F(x)) \to F(y)$, $\models F(y) \to (\exists x)(F(x))$, при условии, что предметная переменная y не входит свободно в формулу $F(x)$. Из этих тавтологий получаются следующие логические следования:

$(\forall x)(F(x)) \models F(y)$ – *правило удаления квантора общности* (или *правило универсальной конкретизации*) ;

$F(y) \models (\exists x)(F(x))$ – *правило введения квантора существования* (или *правило экзистенциального обобщения*).

Эти правила можно представить также в следующих видах:

$$\frac{\Gamma \models F(x)}{\Gamma \models (\forall x)(F(x))}\ ; \qquad \frac{\Gamma, F(x) \models G}{\Gamma, (\exists x)(F(x)) \models G}\ ,$$

при условии, что ни в одну формулу из совокупности Γ и в формулу G предметная переменная x не входит свободно.

Обоснуем, например, первое из этих правил (второе обоснуйте самостоятельно). По условию, $\Gamma \models F(x)$, т.е. формула $F(x)$ превращается в тождественно истинный предикат при всякой такой интерпретации, при которой в тождественно истинные предикаты превращаются все формулы из совокупности Γ. Пусть мы имеем такую интерпретацию и при ней формула $F(x)$ превращается в тождественно истинный предикат $F_0(x, y_1, ..., y_n)$ от переменных $x, y_1, ..., y_n$. Тогда, по определению квантора общности, предикат $(\forall x)(F_0(x, y_1, ..., y_n))$ от переменных $y_1, ..., y_n$ также будет тождественно истинным. Это и означает, что $\Gamma \models (\forall x)(F(x))$.

Метод резолюций проверки формул логики предикатов на логическое следование. Основная идея метода резолюций применительно к формулам логики предикатов та же самая, что и для формул алгебры высказываний (см. §6 выше). Отличие начинается при нахождении множества дизъюнктов исходной совокупности формул F_1, F_2, ... , F_m, G, которая проверяется на логическое следование.

Каждая формула логики предикатов, которая участвует в доказательстве по методу резолюций, должна быть представлена в специальном стандартном виде. Первый шаг на пути к преобразованию формулы к такому виду – это приведение её к предваренной нормальной форме, бескванторная часть которой приведена к конъюнктивной нормальной форме. Эта процедура подробно рассмотрена нами выше в этом параграфе.

Например, применяя указанную процедуру к формуле

$$(\forall x)\{P(x) \to [(\forall y)(P(y) \to R(x,y)) \ \wedge \ \neg(\forall y)(Q(x,y) \to P(y))]\} \ \cong$$

получаем:

$$\cong (\forall x)\{\neg P(x) \vee [(\forall y)(\neg P(y) \vee R(x,y)) \wedge (\exists y)(\neg(\neg Q(x,y) \vee P(y)))]\} \cong$$

$$\cong \ (\forall x)\{\neg P(x) \vee [(\forall y)(\neg P(y) \vee R(x,y)) \wedge (\exists y)(Q(x,y) \wedge \neg P(y))]\} \cong$$

$$\cong \ (\forall x)\{\neg P(x) \vee [(\forall y)(\neg P(y) \vee R(x,y)) \wedge (\exists t)(Q(x,t) \wedge \neg P(t))]\} \cong$$

$$\cong \ (\forall x)\{\neg P(x) \vee (\forall y)(\exists t)[(\neg P(y) \vee R(x,y)) \wedge (Q(x,t) \wedge \neg P(t))]\} \cong$$

$$\cong \ (\forall x)(\forall y)(\exists t)\{\neg P(x) \vee [(\neg P(y) \vee R(x,y)) \wedge Q(x,t) \wedge \neg P(t)]\} \cong$$

$$\cong \ (\forall x)(\forall y)(\exists t)[(\neg P(x) \ \vee \neg P(y) \vee R(x,y)) \ \wedge$$

$$\wedge \ (\neg P(x) \vee Q(x,t)) \wedge (\neg P(x) \vee \neg P(t))] \ .$$

Далее, производится так называемая *сколемизация* полученной формулы, целью которой является удаление всех кванторов существования. Эта процедура заключается в следующем. Если на первом месте в формуле стоит квантор существования, то стоящая под ним предметная переменная всюду в данной формуле заменяется некоторым конкретным предметом (индивидом), и сам квантор существования опускается. Например, для формулы $(\exists x)(\forall y)(P(x,y))$ эта процедура даёт $(\forall y)(P(a,y))$. Если перед квантором существования $\exists y$ стоят кванторы общности $\forall x_1, \ ... \ , \ \forall x_k$, то выбирается новый k-местный функциональный символ f и все y в формуле заменяются на $f(x_1, ..., x_k)$, а квантор $\exists y$ опускается. Получаемая формула называется *сколемовской нормальной формой* для данной формулы. Например, для рассмотренной выше формулы эта процедура даёт:

$$(\forall x)(\forall y)[(\neg P(x) \ \vee \ \neg P(y) \ \vee \ R(x,y)) \ \wedge$$

$$\wedge \ (\neg P(x) \ \vee \ Q(x, f(x,y))) \ \wedge \ (\neg P(x) \vee \neg P(f(x,y)))] \ .$$

Получившиеся дизъюнктивные одночлены образуют *множество дизъюнктов* исходной формулы, которое, подобно тому как это было в исчислении высказываний, участвует в доказательстве по методу резолюций. Для вышерассмотренной формулы приходим к следующему множеству дизъюнктов:

$$S = \{\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee R(x,y), \quad \neg P(x) \vee Q(x, f(x,y)),$$
$$\neg P(x) \vee \neg P(f(x,y))\} .$$

Выше мы установили, что для доказательства выводимости формулы G из формул $F_1, ..., F_m$ в исчислении высказываний достаточно доказать тождественную ложность формулы $F_1 \wedge ... \wedge F_m \wedge \neg G$, т.е. противоречивость множества дизъюнктов $\{F_1, ..., F_m, \neg G\}$. Аналогичным способом можно действовать и в исчислении предикатов. Но здесь нужно попытаться построить модель множества формул $\{F_1, ..., F_m, \neg G\}$, т.е. найти такую интерпретацию, при которой все бы эти формулы превратились в истинные высказывания. Если такая модель существует, то G не может быть следствием формул $F_1, ..., F_m$. Если же такой модели не существует, то G является следствием формул $F_1, ..., F_m$. Ясно, что в общем случае поиск такой интерпретации придётся вести среди необозримо большого количества интерпретаций (в зависимости от вида формул $F_1, \ldots, F_m, G$). Но, оказывается, круг исследуемых интерпретаций всё же можно значительно сузить. Достаточно рассматривать интерпретации не на всевозможных множествах, а на так называемом универсуме Эрбрана. Интерпретации, возникающие на универсуме Эрбрана, называются *эрбрановскими интерпретациями.*

Универсум Эрбрана для множества S формул логики предикатов обозначается $H(S)$ и строится рекурсивно следующим образом:

1) множество всех индивидов из S принадлежит $H(S)$; если в S их нет, то $H(S)$ приписывается произвольный индивид a;

2) если термы $t_1, ..., t_n$ принадлежат S, то $H(S)$ содержит также $f(t_1, ..., t_n)$, где f – любой n-местный функциональный символ из S;

3) никаких других термов в $H(S)$ нет.

Ясно, что при выборе любой интерпретации, т.е. при произвольном приписывании значений истинности (0 или 1) простейшим (атомарным) формулам из S, никаких других объектов предметной области, помимо объектов из $H(S)$, не потребуется. В этом смысле $H(S)$ – наиболее общая область интерпретации формул из S, так что поиск модели множества формул S можно ограничить эрбрановскими интерпретациями, и если мы установим, что такой модели для множества $\{F_1, ..., F_m, \neg G\}$ среди этих интерпретаций нет, то её не будет существовать вовсе, и тогда, как мы отметили выше,

G будет следствием формул $F_1, ..., F_m$. Если же модель множества формул S существует, то она существует и среди её эрбрановских интерпретаций. Универсум Эрбрана, вообще говоря, бесконечен, но счётен.

Например, если задано следующее множество формул (дизъюнктов) $S = \{P(x) \vee Q(a) \vee \neg P(f(a)),\ \neg Q(b) \vee P(g(x,y))\}$, имеющее множество индивидов $\{a, b\}$ и множество функциональных символов $\{f, g\}$, то его универсум Эрбрана представляет собой бесконечное множество

$$H(S) = \{a, b, f(a), f(b), g(a,a), g(a,b), g(b,a), g(b,b), f(f(a)), ...\}.$$

Второй пример. Пусть в формулы из S входят константы (индивиды) a, b, c, предметные переменные x, y, z, одноместная предикатная переменная P и двухместная предикатная переменная Q. Тогда $H(S) = \{a, b, c\}$. Для построения эрбрановской интерпретации множества формул S нужно далее приписать значения истинности каждой конкретизации предикатных переменных на $P(x)$ и $Q(y, z)$ на универсуме Эрбрана. Перечислим сначала все такие конкретизации: $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$, $Q(a,a)$, $Q(a,b)$, $Q(a,c)$, $Q(b,a)$, $Q(b,b)$, $Q(b,c)$, $Q(c,a)$, $Q(c,b)$, $Q(c,c)$. (Совокупность всех этих конкретизаций называется *эрбрановской базой*). Каждому элементу этой базы нужно теперь приписать значение истинности 0 или 1. Поскольку элементов в базе 12, то, как мы знаем, это можно сделать $2^{12} = 4096$ различными способами. Таким образом, мы получим 4096 эрбрановских интерпретаций данного множества формул.

Форма правила резолюции в логике предикатов остаётся той же самой, что и в логике высказываний. Но в формулах логики предикатов содержатся предметные переменные, которых не было в формулах логики высказываний, и применение данного правила здесь несколько усложняется. В этом случае над формулами логики предикатов производится ещё одна процедура (после того, как из них после их сколемизации образовано множество дизъюнктов) – *процедура унификации предметных переменных*.

Суть этой процедуры состоит в том, что в данных формулах некоторые предметные переменные заменяются конкретными предметами (индивидами) для того чтобы к тем формулам, к которым нельзя было раньше применить правило резолюций, теперь это стало возможным. Например, если к формулам $P(a) \vee \neg Q(a,b)$ и $Q(x,y) \vee \neg R(x,y)$ нельзя применить правило резолюций, то после замены (подстановки) во второй формуле x на a и y на b получаем формулы $P(a) \vee \neg Q(a,b)$ и $Q(a,b) \vee \neg R(a,b)$, к которым это правило применимо и оно даёт формулу (резольвенту)

$P(a) \vee \neg R(a,b)$. (Отметим, что к формулам $P(a) \vee \neg Q(b,c)$ и $Q(c,c) \vee \neg R(b,c)$ правило резолюции не применимо – говорят, что они не резольвируют). Подстановку t в x обозначим $\{t/x\}$. В случае выполнения множества подстановок $\{t_1/x_1, ..., t_n/x_n\}$ необходимо соблюдение ряда условий:

а) x_i является переменной, а t_i – термом (константой, переменной, символом функции), отличным от x_i;

б) для любой пары подстановок t_i/x_i и t_j/x_j в правых частях символов $/$ не содержатся одинаковые переменные.

Как и в исчислении высказываний, в исчислении предикатов правило резолюции, применённое к формулам $P(a)$ и $\neg P(a)$, даёт пустую формулу. Это означает, что исходное множество формул $F_1, ..., F_m, \neg G$ противоречиво и, значит, формула G выводима из формул F_1, ... , F_m. С точки зрения семантики возможность выведения пустой формулы означает, что нельзя построить эрбрановскую модель множества формул $F_1, ..., F_m, \neg G$.

§19. Проблемы разрешения для общезначимости и выполнимости формул логики предикатов

Постановка проблемы и её неразрешимость в общем виде. В алгебре высказываний было установлено, что существует чёткий алгоритм, позволяющий для каждой формулы алгебры высказываний ответить на вопрос, будет ли данная формула выполнима, тождественно истинна или тождественно ложна. Для этого нужно составить таблицу истинности формулы и посмотреть на распределение нулей и единиц в её последнем столбце. Аналогичная проблема возникает и для формул логики предикатов: существует ли единый алгоритм, позволяющий для каждой формулы логики предикатов определить, будет ли она выполнимой или общезначимой? Ответ отрицательный: *общего такого алгоритма не существует.* Это было доказано в 1936 году американским математиком А.Чёрчем. Тем не менее, для некоторых частных видов формул данная проблема допускает решение. В настоящем параграфе покажем, как решается проблема разрешения для некоторых типов формул.

Решение проблемы для формул на конечных множествах. Если формула логики предикатов рассматривается на конечном множестве, то вместо её предикатных переменных могут подставляться конкретные предикаты, определённые на этом конечном множестве. Ввиду того, что операции квантификации на конечном множестве сводятся к конъюнкции и дизъюнкции (см. §16), задача о выполнимости и общезначимости формулы логики предикатов на конечном множестве сводится к задаче о выполнимости или общезначимости некоторой формулы алгебры высказываний. Последняя задача, как мы знаем, эффективно разрешима.

Продемонстрируем идею действия этого алгоритма на конкретном примере. Рассмотрим формулу логики предикатов $(\forall y)(\exists x)(\neg P(x,y) \wedge P(y,y))$ и выясним, будет ли она выполнима или общезначима на двухэлементном множестве $\{a,b\}$. Напомним, (см. §20), что поскольку на этом множестве высказывание $(\forall x)(R(x))$ эквивалентно конъюнкции $R(a) \wedge R(b)$, а высказывание $(\exists x)(R(x))$ – дизъюнкции $R(a) \vee R(b)$, поэтому данная формула равносильна формуле $(\exists x)(\neg P(x,a) \wedge P(a,a)) \wedge (\exists x)(\neg P(x,b) \wedge P(b,b))$, которая, в свою очередь, равносильна формуле

$$[(\neg P(a,a) \wedge P(a,a)) \vee (\neg P(b,a) \wedge P(a,a))] \wedge \\ \wedge [(\neg P(a,b) \wedge P(b,b)) \vee (\neg P(b,b) \wedge P(b,b))].$$

Одна двухместная предикатная переменная $P(x,y)$ исходной формулы как бы распалась на четыре пропозициональных переменных $P(a,a)$, $P(a,b)$, $P(b,a)$, $P(b,b)$ последней формулы, потому что при подстановке в исходную формулу вместо $P(x,y)$ двухместного предиката, определённого на $\{a,b\}$, указанные четыре переменные превратятся в (вообще говоря, различные) конкретные высказывания. Так что последняя формула есть по сути дела формула алгебры высказываний. Чтобы это увидеть совсем отчётливо, обозначим указанные четыре пропозициональные переменные буквами P, R, Q, S соответственно. Тогда полученная формула примет вид:

$$[(\neg P \wedge P) \vee (\neg Q \wedge P)] \wedge [(\neg R \wedge S) \vee (\neg S \wedge S)].$$

Составив таблицу истинности данной формулы алгебры высказываний (или каким-либо другим способом, как это делалось в алгебре высказываний), легко установить, что формула не является тавтологией, но выполнима: она превратится в истинное высказывание, если вместо P и S подставить истинные высказывания, а вместо Q и R – ложные. Применительно к исходной формуле логики предикатов это означает, что она не общезначима на двухэлементном множестве, но выполнима в нём: она превратится в выполнимый предикат, если вместо предикатной переменной $P(x,y)$ подставить в формулу такой конкретный двухместный предикат, который при одинаковых значениях его предметных переменных x и y превращается в истинные высказывания, а при разных – в ложные.

Проблема разрешения выполнимости: влияние мощности множества. Во-первых, нетрудно понять, что если некоторая формула выполнима или тождественно истинна на некотором множестве, то то же самое будет иметь место и на любом другом множестве с тем же самым числом элементов, т.е. на любом другом множестве равномощном с исходным (это следует из наличия взаимно однозначного отображения этих множеств друг на друга). Поэтому проблема разрешимости выполнимости и общезначимости формул логики предикатов состоит фактически в том, чтобы ответить на вопрос, для каких множеств данная формула выполнима (соответственно, общезначима), а для каких нет.

В дополнение к уже установленным результатам укажем ещё ряд результатов в этом направлении. Так, теорема Лёвенгейма утверждает, что если формула выполнима на каком-нибудь бесконечном множестве, то она выполнима и на счётно бесконечном множестве (доказательство можно найти, например, в книге П.С.Новикова [1.10]).

Дальнейшее сведение проблемы разрешимости со счётно бесконечных множеств на конечные, для которых проблемы разрешимости, как мы знаем, решаются, невозможно. Приведём пример формулы, выполнимой на бесконечном множестве и не выполнимой ни на каком конечном множестве. Наличие такой формулы позволит сделать, в частности, следующий вывод относительно проблемы разрешения для выполнимости формул логики предикатов: по выполнимости формулы на некотором множестве нельзя судить о выполнимости этой формулы на его подмножествах.

Вот пример такой формулы:

$$(\forall x)(\exists y)(P(x,y)) \ \wedge \ (\forall x)(\neg P(x,x)) \ \wedge$$
$$\wedge \ (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(P(x,y) \wedge P(y,z)) \to P(x,z)].$$

Можно сказать, что эта формула характеризует нерефлексивность (второй член конъюнкции) и транзитивность (третий член конъюнкции) некоего двухместного предиката $P(x,y)$. Эта замкнутая формула превращается в истинное высказывание если в неё вместо предикатной переменной $P(x,y)$ подставить двухместный предикат "$x < y$", определённый на множестве всех натуральных чисел:

$$(\forall x)(\exists y)(x < y) \ \wedge \ (\forall x)(\neg(x < x)) \ \wedge$$

$$\wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x < y \ \wedge \ y < z) \ \rightarrow \ x < z] \, .$$

Покажем, что эта формула не выполнима ни на каком конечном множестве. Допустим противное, т.е., предположим, что существует конкретный предикат $A(x, y)$, определённый на конечном множестве M, такой, что высказывание

$$(\forall x)(\exists y)(A(x, y)) \ \wedge \ (\forall x)(\neg A(x, x)) \ \wedge$$
$$\wedge \ (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(A(x, y) \ \wedge \ A(y, z)) \ \rightarrow \ A(x, z)] \qquad (*)$$

истинно. Тогда истинным высказыванием будет и каждый член конъюнкции (*). В частности, истинно, высказывание $(\forall x)(\exists y)(A(x, y))$. Возьмём элемент $a_1 \in M$. Тогда из истинности последнего высказывания следует: существует такой элемент $a_2 \in M$, что высказывание $A(a_1, a_2)$ истинно. Далее, аналогично существует такой $a_3 \in M$, что истинно высказывание $A(a_2, a_3)$, и так далее. Поскольку множество M конечно, то не все элементы $a_1, a_2, a_3, \ldots$ попарно различны. Пусть $a_p = a_{p+q}$ $(q > 0)$. Тогда из истинности высказываний $A(a_p, a_{p+1})$, $A(a_{p+1}, a_{p+2})$, ..., $A(a_{p+q-1}, a_{p+q})$ в силу истинности высказывания (третий член истинной конъюнкции (*))

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(A(x, y) \ \wedge \ A(y, z)) \ \rightarrow \ A(x, z)]$$

заключаем, что истинно высказывание $A(a_p, a_{p+q})$, т.е. высказывание $A(a_p, a_p)$. Но это противоречит истинности высказывания (второй член истинной конъюнкции (*)) $(\forall x)(\neg A(x, x))$. Полученное противоречие доказывает, что никакой конкретный предикат, определённый на конечном множестве, не может превратить данную формулу в истинное высказывание, т.е. данная формула невыполнима ни на каком конечном множестве.

Другие примеры формул, выполнимых на бесконечном множестве и не выполнимых ни на каком конечном множестве, приведены в Задачнике, № 9.56.)

Далее, примеры формул из задач 9.54 и 9.55 Задачника показывают, что положительное решение проблемы выполнимости формулы на некотором конечном множестве не влечёт её положительного решения для этой формулы на множествах с меньшим числом элементов.

Тем не менее, проблема выполнимости обладает одним общим свойством: если некоторая формула логики предикатов выполнима в каком-нибудь множестве, то она выполнима также и в каждом множестве с большим числом элементов.

Проблема разрешения выполнимости: влияние структуры формулы. Укажем ряд результатов, которые сводят (редуцируют) проблему разрешимости для произвольных формул логики предикатов к проблеме разрешимости формул некоторых специальных видов. Будем считать, не нарушая общности, что все формулы, о которых идёт речь, не имеют свободных предметных переменных, т.е. являются замкнутыми.

Во-первых, мы уже отмечали (см. теорему 17.5), что для всякой формулы логики предикатов существует равносильная ей формула в предваренной нормальной форме. Более того, в 30-ые годы Сколем доказал, что для каждой формулы логики предикатов можно указать формулу в предваренной нормальной форме, кванторная приставка которая имеет вид $(\forall x_1)...(\forall x_m)(\exists y_1)...(\exists y_n)$ (так называемая *нормальная форма Сколема*), которая относительно выполнимости равнозначна первой. Это означает, что при решении проблемы выполнимости, не уменьшая общности, можно ограничиться рассмотрением лишь формул, имеющих кванторные приставки указанного вида.

Далее, для каждой формулы можно указать равнозначную ей в отношении выполнимости формулу, в которой имеются только одноместные и двуместные предикатные переменные (Лёвенгейм, 1915). Можно, далее, ограничиться даже такими формулами в которых встречается только один единственный двуместный предикатный символ и, кроме того, приставка имеет вид:

$$(\exists x_1)...(\exists x_m)(\forall y_1)(\forall y_2)(\exists z)(\forall u_1)...(\forall u_n).$$

(Кальмар, 1936). При решении проблемы выполнимости можно также ограничиться формулами, приставки которых имеют форму:

$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\exists y_1)...(\exists y_n)$ (Гёдель, 1933),

или же форму $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(\forall u_1)...(\forall u_n)$ (Аккерман, 1936).

Имеются и другие предложения редукции рассматриваемой проблемы либо к формулам с кванторными приставками специфических видов, либо к формулам, содержащим предикатные переменные от определенного числа переменных.

Решение проблемы для формул, содержащих только одноместные предикатные переменные. В этом случае проблема сводится к проблеме разрешения выполнимости и общезначимости формулы на некотором конечном множестве, которая, как установлено выше, имеет эффективное решение. Такое сведение осуществляется на основе следующей теоремы и следствия из неё.

Теорема 19.1. *Если формула логики предикатов, содержащая только одноместные предикатные переменные, выполнима, то она выполнима на конечном множестве, содержащем не более 2^n элементов, где n – число различных предикатных переменных, входящих в рассматриваемую формулу.*

Следствие 19.2. *Если замкнутая формула $F(P_1, P_2, ..., P_n)$, в которую входят только одноместные предикатные переменные $P_1, P_2, ..., P_n$, тождественно истинна на множестве из 2^n элементов, то она общезначима.* □

Проблема разрешения общезначимости и мощность множества, на котором рассматривается формула. Обратимся к проблеме общезначимости. Теорема Лёвенгейма, отмеченная выше, применительно к проблеме разрешения общезначимости звучит так: *если формула тождественно истинна в счётно бесконечной области, то она общезначима.* Но снова, как и для проблемы выполнимости формул, переход от (счётно) бесконечных множеств к конечным или обратно является качественным. Следующий пример показывает, что в отличие от проблемы выполнимости, разрешимость проблемы общезначимости на некотором множестве не влечёт её разрешимости на множестве, объемлющем данное.

Пример 19.3. Докажем, что следующая формула тождественно истинна на любом конечном множестве, но не является таковой на бесконечном множестве:

$$(\forall x, y, z)[R(x, x) \wedge (R(x, z) \to (R(x, y) \vee R(y, z)))] \to (\exists x)(\forall y)(R(x, y)).$$

Во-первых, отметим, что предикат "$x \leq y$", заданный на бесконечном множестве Z, превращает данную формулу в ложное высказывание:

$$(\forall x, y, z)[x \leq x \ \wedge \ (x \leq z \ \to \ (x \leq y \vee y \leq z))] \ \to \ (\exists x)(\forall y)(x \leq y),$$

ибо посылка этой импликации истинна, а следствие ложно.

Во-вторых, докажем, что данная формула тождественно истинна на любом конечном множестве. Доказательство будем вести индукцией по числу элементов в множестве. Если $M = \{a_1, a_2\}$, то истинным будут утверждения $R(a_1, a_1)$, $R(a_2, a_2)$ и $R(a_1, a_1) \to (R(a_1, a_2) \vee R(a_2, a_1))$, а, значит, и дизъюнкция $R(a_1, a_2) \vee R(a_2, a_1)$. Если при этом истинно $R(a_1, a_2)$, то истинно $(\forall y)(R(a_1, y))$, т.е. истинно заключение $(\exists x)(\forall y)(R(x, y))$ импликации данной формулы и вся данная формула. Аналогично, если истинно $R(a_2, a_1)$, то истинно $(\forall y)(R(a_2, y))$ и снова истинна вся данная формула.

Предположим теперь, что данная формула тождественно истинна на всяком конечном множестве, содержащем не больше чем n элементов. Покажем тогда, что она будет тождественно истинна и на любом $(n+1)$-элементном множестве. Пусть $M = \{a_1, ..., a_n, a_{n+1}\}$. В силу тождественной истинности данной формулы на n-элементном подмножестве $M' = \{a_1, ..., a_n\}$ и предположения истинности на M' посылки данной формулы, имеем истинные высказывания:

$$(\forall x)(R(x,x)) \text{ и } (\forall x)(R(x,x) \rightarrow (\forall y)(R(x,y) \vee R(y,x))) .$$

Тогда истинно заключение $(\exists x)(\forall y)(R(x,y))$. Не нарушая общности, можно считать, что таким x будет элемент a_1, т.е. $(\forall y)(R(a_1,y))$, т.е. истинны все утверждения $R(a_1,a_2)$, ... , $R(a_1,a_n)$.

Мы хотим доказать, что данная формула истинна на $(n+1)$-элементном множестве $M = \{a_1, ..., a_n, a_{n+1}\}$. Для этого нужно показать, что на нём в предположении истинности посылки данной формулы верно её заключение $(\exists x)(\forall y)(R(x,y))$. Если верно $R(a_1, a_{n+1})$, то утверждение доказано. Если же $R(a_1,a_{n+1})$ не верно, то, в силу истинности дизъюнкции $R(a_1,a_{n+1}) \vee R(a_{n+1},a_1)$, заключаем, что истинно $R(a_{n+1},a_1)$.

Далее, в силу истинности в M посылки $(\forall x,y,z)(R(x,z) \rightarrow (R(x,y) \vee R(y,z)))$ и утверждений $R(a_1,a_2)$,..,$R(a_1,a_n)$, приходим к истинности всех следующих дизъюнкций: $R(a_1,a_{n+1}) \vee R(a_{n+1},a_2)$, ... , $R(a_1,a_{n+1}) \vee R(a_{n+1},a_n)$. Поскольку первый член каждой дизъюнкции ложен, то истинны все вторые члены $R(a_{n+1},a_2)$, ... , $R(a_{n+1},a_n)$. Учитывая ещё и истинность $R(a_{n+1},a_1)$ и, кроме того, $R(a_{n+1},a_{n+1})$, приходим к истинности утверждения $(\forall y)(R(a_{n+1},y))$ на M. Это означает истинность на M заключения данной формулы $(\exists x)(\forall y)(R(x,y))$ и всей данной формулы.

Ситуация с проблемой разрешимости общезначимости, отмеченная в рассмотренном примере, имеет место не только при переходе от конечного множества к бесконечному, но и при переходе от одного конечного к другому конечному, содержащему большее количество элементов. Соответствующий пример формулы, тождественно истинной в области из трёх элементов и не являющейся таковой в области из четырёх элементов, приведён в Задачнике, № 9.57:

$$(\exists x)(\forall y)[R(x,y) \rightarrow (\neg R(y,x) \rightarrow (R(x,x) \leftrightarrow R(y,y)))] .$$

В Задачнике, № 9.58, показано, что следующая формула тождественно истинна на любом конечном множестве, но не является таковой на бесконечном множестве:

$$(\forall x,y,z)[R(x,x) \wedge (R(x,z) \rightarrow (R(x,y) \vee R(y,z)))] \rightarrow (\exists x)(\forall y)(R(x,y)).$$

Решение проблемы для $\forall$-формул и $\exists$-формул. В заключение скажем, как решается проблема разрешения общезначимости ещё для двух классов формул логики предикатов – $\forall$-формул и $\exists$-формул: и в этих случаях она сводится к тождественной истинности формул на конечных множествах. Под $\forall$-*формулой* понимается формула $(\forall x_1)(\forall x_2)...(\forall x_n)(F(P_1, P_2, ..., P_k))$, у которой в предваренной нормальной форме кванторная часть содержит только кванторы общности, а под $\exists$-*формулой* понимается формула $(\exists x_1)(\exists x_2)...(\exists x_n)$ $(F(P_1, P_2, ..., P_k))$, у которой в предваренной нормальной форме кванторная часть содержит только кванторы существования, причём, $P_i = P_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = l, 2, ..., k$.

ТЕОРЕМА 19.4. *$\forall$-формула $(\forall x_1)...(\forall x_n)(F(P_1, ..., P_k))$ общезначима тогда и только тогда, когда она тождественно истинна на n-элементном множестве.* □

ТЕОРЕМА 19.5. *$\exists$-формула $(\exists x_1)...(\exists x_n)(F(P_1, ..., P_k))$ общезначима тогда и только тогда, когда она тождественно истинна на одноэлементном множестве.* □

Эти теоремы имеются в Задачнике: №№ 9.63, 9.64.

Итак, рассмотрения настоящего параграфа красноречиво демонстрируют, что в то время как в алгебре высказываний проблемы разрешимости выполнимости и общезначимости формул решались сравнительно легко, в логике предикатов они представляют собой весьма трудные и в целом отнюдь не решённые до конца проблемы.

§20. Применение логики предикатов к логико-математической практике

Некоторые современные математики и методисты склонны относить математику как науку и как учебный предмет к разряду гуманитарных дисциплин, поскольку она изучает язык, на котором, по образному выражению Галилея, написана грандиозная книга Вселенная. Конечно, здесь речь идёт о специфическом языке – языке математическом. Но математика, развиваясь, довела свой язык до такого совершенства и такой выразительной силы, что он вплотную приблизился по своим информационно-выразительным свойствам к общечеловеческому языку. Такого совершенства математический язык достиг, когда математикой был разработан язык математической логики и прежде всего язык логики предикатов. Язык логики предикатов – это по существу открытое вторжение математики в общечеловеческий язык, математизация общечеловеческого языка с целью более точного, более адекватного его использования в первую очередь в самой математике. В языке логики предикатов соединились логика мышления, без которой немыслим общечеловеческий язык, и математика. В человеческий язык вошла математика, а математический язык стал почти неотличим от общечеловеческого, слился с ним.

Поэтому умение грамотно оперировать языком логики предикатов (читай – языком математической логики) является основой современной логической культуры вообще. В связи с этим в настоящем параграфе мы уделим немало внимания записи на языке логики предикатов различных математических предложений, что будет способствовать более глубокому пониманию их структуры.

Практически важнейшей сферой применения логики предикатов к логико-математической практике является сфера построения доказательств различных теорем, основывающаяся на теории логического следования. Более сложное строение формул логики предикатов по сравнению с формулами логики высказываний даёт возможность проводить более сложные доказательства и в результате получать более тонкие заключения. В настоящем параграфе мы попытаемся на простейших примерах проиллюстрировать суть теории логического вывода и её применение.

Будут рассмотрены также приложения логики предикатов к теории множеств, к анализу аристотелевой силлогистики.

Запись на языке логики предикатов различных предложений. С помощью кванторной символики удобно записывать формулировки различных определений и теорем. В процессе такой записи приходится осмысливать данное предложение, отчётливо выделять в нём посылки и следствие (если это теорема), очерчивать более широкий круг понятий и чётко выделять ограничивающее условие (если это определение). Одним словом, перевод расплывчатой словесной формулировки на строгий, не допускающий противоречивых толкований язык логики предикатов способствует чёткости и ясности мышления. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 20.1. Определение предела последовательности "*Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для всякого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число n_0, что для всякого натурального n, большего n_0 $|a_n - a| < \varepsilon$*" на языке логики предикатов записывается так:

$$a = \lim a_n \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$(\forall \varepsilon)[\varepsilon > 0 \to (\exists n_0)(n_0 \in N \wedge (\forall n)(n > n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon))] .$$

Используя символику ограниченных кванторов (см. конец параграфа 16), это определение можно записать компактнее:

$$a = \lim a_n \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon).$$

Нередко требуется доказать, что некоторое число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$, т.е. $a \neq \lim a_n$. Для доказательства нужно построить утверждение, являющееся отрицанием сформулированного определения. Поможет в этом логика предикатов. Используя равносильности логики предикатов, преобразуем отрицание исходной формулы к приведённому виду:

$$\neg(\forall \varepsilon)[\varepsilon > 0 \to (\exists n_0)(n_0 \in N \wedge (\forall n)(n > n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon))] \cong$$

$$\cong (\exists \varepsilon)\neg[\neg(\varepsilon > 0) \vee (\exists n_0)(n_0 \in N \wedge (\forall n)(n > n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon))] \cong$$

$$\cong (\exists \varepsilon)[(\varepsilon > 0) \wedge (\forall n_0)(\neg(n_0 \in N) \vee \neg(\forall n)(\neg(n > n_0) \vee |a_n - a| < \varepsilon))] \cong$$

$$\cong (\exists \varepsilon)[(\varepsilon > 0) \wedge (\forall n_0)(\neg(n_0 \in N) \vee (\exists n)(n > n_0 \wedge \neg(|a_n - a| < \varepsilon)))] \cong$$

$$\cong (\exists \varepsilon)[(\varepsilon > 0) \wedge (\forall n_0)(n_0 \in N \to (\exists n)(n > n_0 \wedge |a_n - a| \geq \varepsilon))] .$$

Полученное утверждение можно записать компактнее, используя символику ограниченных кванторов (см. конец параграфа 16):

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in N)(\exists n > n_0)(|a_n - a| \geq \varepsilon) .$$

Таким образом, утверждение "*Число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$*" раскрывается так: "*Существует такое положительное число ε, что для всякого натурального числа n_0 найдётся такое натуральное $n > n_0$ что $|a_n - a| \geq \varepsilon$).*"

Несходимость последовательности $\{a_n\}$ означает, никакое число не является ее пределом, то есть $(\forall a)(a \neq \lim a_n)$. Это вместе с полученным утверждением даёт

$$(\forall a)(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in N)(\exists n > n_0)(|a_n - a| \geq \varepsilon) .$$

Пример 20.2. Запишем на языке логики предикатов определение простого числа: "*Натуральное число x называется простым, если оно не равно 1 и при всяком разложении его в произведение двух чисел одно из них оказывается равным 1 или x*":

$$\neg(x = 1) \wedge (\forall u)(\forall v)[x = u \cdot v \to ((u = 1) \vee (u = x))] .$$

Отрицание этого утверждения – утверждение о том, что число x составное, записывается следующим образом:

$$(x = 1) \ \vee \ (\exists u)(\exists v)(x = u \cdot v \ \wedge \ u \neq 1 \ \wedge \ u \neq x) \, .$$

Предлагается самостоятельно разобраться в его составлении.

Пример 20.3. Определение "*Точка x_0 из области определения функции f называется точкой максимума функции f, если существует такая δ-окрестность данной точки, что для всех x из этой окрестности $f(x) < f(x_0)$*" на языке логики предикатов запишется так:

$$x_0 \in D_f \ \wedge \ (\exists \delta > 0)(\forall x)(|x - x_0| < \delta \ \rightarrow \ f(x) < f(x_0)).$$

Запишите самостоятельно отрицание данного утверждения.

Пример 20.4. Рассмотрим пример из геометрии. Совокупность векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ... , $\overrightarrow{a_n}$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots , \alpha_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что $\qquad \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} \ = \ \overrightarrow{0}. \qquad (*)$

На логико-математическом языке: (1)

$$(\exists \alpha_1)\ldots(\exists \alpha_n)[(\alpha_1 \neq 0 \vee \ldots \vee \alpha_n \neq 0) \ \wedge \ \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} \ = \ \overrightarrow{0}].$$

В противном случае совокупность векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ... , $\overrightarrow{a_n}$ называется *линейно независимой*. Другими словами, система векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ... , $\overrightarrow{a_n}$ линейно независима, если равенство (*) выполняется *только* с нулевыми коэффициентами $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

На логико-математическом языке: (2)

$$(\forall \alpha_1)\ldots(\forall \alpha_n)[(\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} \ = \ \overrightarrow{0}) \ \rightarrow \ (\alpha_1 = 0 \wedge \ldots \wedge \alpha_n = 0)].$$

Используя средства математической логики (равносильные преобразования формул логики предикатов), убедимся, что формулировка (2) действительно представляет собой отрицание формулировки (1), т.е. $\neg(1) \ \cong \ (2)$. В самом деле:

$$\neg(\exists \alpha_1)\ldots(\exists \alpha_n)[(\alpha_1 \neq 0 \ \vee \ldots \ \vee \alpha_n \neq 0) \ \wedge \ \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}] \ \cong$$

$$\cong \ (\forall \alpha_1)\ldots(\forall \alpha_n)\{\neg[(\alpha_1 \neq 0 \vee \ldots \vee \alpha_n \neq 0) \wedge (\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} \ = \ \overrightarrow{0})]\} \ \cong$$

$$\cong \ (\forall \alpha_1)\ldots(\forall \alpha_n)[\neg(\alpha_1 \neq 0 \vee \ldots \vee \alpha_n \neq 0) \vee \neg(\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} \ = \ \overrightarrow{0})] \ \cong$$

$$\cong \ (\forall \alpha_1)\ldots(\forall \alpha_n)[\neg(\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} \ = \ \overrightarrow{0}) \vee (\alpha_1 = 0 \wedge \ldots \wedge \alpha_n = 0)] \ \cong$$

$$\cong \ (\forall \alpha_1)\ldots(\forall \alpha_n)[(\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} \ = \ \overrightarrow{0}) \ \rightarrow \ (\alpha_1 = 0 \ \wedge \ldots \ \wedge \alpha_n = 0)] \, .$$

Итак, всякая система векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ... , $\overrightarrow{a_n}$ может быть либо линейно зависимой, либо линейно независимой. Третьего не дано.

Сравнение логики предикатов и логики высказываний. В начале §17 уже отмечалось, что язык и логика алгебры предикатов тоньше и точнее отражают процессы мышления, нежели язык и логика алгебры высказываний. Приведём два примера, подтверждающих эту мысль.

Пример 20.5. Рассмотрим высказывание "*Каждый человек имеет мать*". Если на языке алгебры высказываний формулировка данного высказывания сведётся лишь к обозначению его некоторой буквой, скажем A, то на языке логики предикатов возможна формализация, учитывающая внутреннюю (субъектно-предикатную) структуру этого высказывания. Действительно, пусть $P(x, y)$ – двухместный предикат "*x есть мать y*", определённый на множестве всех людей. Тогда данному высказыванию отвечает формула логики предикатов $(\forall y)(\exists x)(P(x, y))$. Рассматриваемое высказывание можно перевести на язык логики предикатов и иначе. Если ввести ещё одноместный предикат $Q(x)$: "*x есть человек*", определённый на произвольном множестве, то высказывание запишется так:

$$(\forall y)[Q(y) \rightarrow (\exists x)(Q(x) \wedge P(x, y))] .$$

Пример 20.6. Этот пример ещё более наглядно демонстрирует выразительные возможности языка логики предикатов по сравнению с языком логики высказываний. Рассмотрим два высказывания: "*В Москве живёт женщина, имеющая брата в Петербурге*" и "*В Петербурге живёт мужчина, имеющий сестру в Москве*". Каждое из данных утверждений следует из другого, т.е. они равносильны. Спрашивается, можно ли выразить эту равносильность на языке алгебры высказываний, на языке логики предикатов? Оказывается второе возможно, а первое нет.

В самом деле, как мы могли бы формализовать данные высказывания на языке алгебры высказываний? Можно обозначить первое высказывание через A, второе – через B. Ясно, что ни о какой равносильности формул A и B говорить не приходится. Можно расчленить данные высказывания на более простые. A_1: "*Женщина живёт в Москве*", A_2: "*Женщина имеет брата в Петербурге*", B_1: "*Мужчина живёт в Петербурге*", B_2: "*Мужчина имеет сестру в Москве*". Тогда первое исходное высказывание есть конъюнкция $A_1 \wedge A_2$, а второе – $B_1 \wedge B_2$. Но и эти две формулы алгебры высказываний не следуют одна из другой.

В отличие от алгебры высказываний формализация на языке логики предикатов позволяет обнаружить равносильность двух данных высказываний. Действительно, введём предикаты, определённые на множестве людей: $P_1(x)$ – "*x – женщина*"; $P_2(x)$ – "*x живёт в Москве*"; $Q_1(x)$ – "*x – мужчина*"; $Q_2(x)$ – "*x живёт в Петербурге*; $S(x, y)$ – "*x есть сестра y*". Тогда высказыванию "*В Москве живёт женщина, имеющая брата в Петербурге*" соответствует формула логики предикатов

$$(\exists x)[P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge (\exists y)(Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge S(x,y))] ,$$

а высказыванию "*В Петербурге живёт мужчина, имеющий сестру в Москве*" – формула

$$(\exists y)[Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge (\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge S(x,y))] ,$$

Покажем, что полученные формулы равносильны, для чего первую из них равносильными преобразованиями сведём ко второй (предлагается обнаружить те равносильности логики предикатов, которые используются на каждом шаге преобразований):

$$\begin{aligned}
&(\exists x)[P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge (\exists y)(Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge S(x,y))] \cong \\
&\cong (\exists x)(\exists y)[P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge S(x,y)] \cong \\
&\cong (\exists y)(\exists x)[Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge S(x,y)] \cong \\
&\cong (\exists y)[Q_1(y) \wedge Q_2(y) \wedge (\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge S(x,y))] .
\end{aligned}$$

Строение математических теорем. Остановимся на формах теорем четырёх видов, выделенных ещё в аристотелевской логике, основоположником которой был один из наиболее разносторонних мыслителей Древней Греции Аристотель (384–322 гг. до н.э.), и названных категорическими суждениями. Многие математические теоремы имеют именно такой вид. Логика предикатов позволит проанализировать их строение, сравнить между собой, и этот анализ будет более тонким, нежели анализ строения теорем, проведённый в алгебре высказываний. (Впрочем, можно заметить, что в алгебре высказываний этот анализ проходил несколько в ином аспекте, и оба анализа скорее дополняют друг друга.)

Величайшая заслуга Аристотеля в области логики состоит в том, что он впервые систематизировал и подверг анализу с некоторой формальной точки зрения приёмы рассуждений, уже практически широко применявшиеся его современниками, но до него остававшиеся ещё теоретически неосознанными, несформулированными. Он показал, что правильное рассуждение можно свести к систематическому применению небольшого числа неизменных правил, независимых от частной природы объектов, относительно которых происходит рассуждение. Тем самым Аристотель применил такие подходы к исследованию рассуждений, которые сделали логику наукой. С точки зрения современной формальной (математической) логики этот особый вид логических рассуждений, который подробно исследовал Аристотель и который получил название силлогического, представляет собой небольшую и довольно элементарную часть, относящуюся к логике предикатов, причём – к логике одноместных предикатов. В своём учении о силлогизме Аристотель выясняет общие закономерности, при которых из двух высказываний-посылок, имеющих вполне определённую логическую структуру (выражаемую специальными формулами логики предикатов, содержащими лишь одноместные предикатные переменные), с необходимостью следует определённое заключение, а когда не следует. Современная форма силлогистики, конечно же, не содержится в её окончательном виде в трудах самого Аристотеля, а является результатом работы его многочисленных комментаторов и последователей – древнегреческих, древнеримских, арабских и средневековых логиков.

Проанализировав строение простых высказываний, (или как говорил Аристотель, категорических суждений), Аристотель пришёл к выводу, что содержание любого из них может быть сведено к утверждению о наличии или отсутствии у предметов определённых свойств. При этом такие утверждения могут относиться не только к отдельным предметам, но и к классам предметов. Высказывание, в котором утверждается, что конкретный предмет обладает или не обладает определённым свойством, называется *единичным* (соответственно, *единичноутвердительным* или *единичноотрицательным*). Например, высказывание "*Число 10 чётное*" является единичноутвердительным. Его содержание сводится к утверждению о наличии у конкретного числа 10 свойства делимости на 2.

Высказывание, в котором утверждается, что все предметы класса обладают или не обладают определённым свойством, называется *общим* (соответственно, *общеутвердительным* или *общеотрицательным*). Например, высказывание "*Все металлы тонут в воде*" общеутвердительное, а высказывание "*Все простые числа не являются чётными*" общеотрицательное.

Высказывание, в котором утверждается, что некоторые предметы класса обладают или не обладают определённым свойством, называется *частным* (соответственно, *частноутвердительным* или *частноотрицательным*). Например, высказывание "*Некоторые реки впадают в озеро Байкал*" является частноутвердительным, а высказывание "*Некоторые прямоугольные треугольники не являются равнобедренными*" – частноотрицательным.

Таким образом, по Аристотелю все простые высказывания делятся на следующие шесть типов: единичноутвердительные, единичноотрицательные, общеутвердительные, общеотрицательные, частноутвердительные, частноотрицательные. Первые два типа высказываний есть высказывания о конкретных предметах, последние четыре – о классах предметов.

По традиции, также восходящей к Аристотелю, типы простых высказываний, относящихся к классам предметов, обозначаются гласными буквами латинского алфавита: A – общеутвердительные, E – общеотрицательные, I – частноутвердительные, O – частноотрицательные. (Эти буквы взяты из латинских слов: affirmo – утверждаю, nego – отрицаю). Далее класс предметов обозначается буквой S, свойство – буквой P. При этом S называется субъектом, а P – предикатом.

Таким образом, указанные выше четыре типа простых высказываний, относящихся к классам предметов, имеют следующую общелогическую форму:

A [общеутвердительное суждение]": "*Все предметы класса S обладают свойством P*". ("*Все S суть P*"). Символически: SaP;

E [общеотрицательное суждение]: "*Ни один предмет класса S не обладает свойством P*". ("*Ни один S не есть P*"). Символически: SeP;

I [частноутвердительное суждение]: "*Некоторые предметы класса S обладают свойством P*". ("*Некоторые S суть P*"). Символически: SiP;

O [частноотрицательное суждение]: "*Некоторые предметы класса S не обладают свойством P*". ("*Некоторые S не суть P*"). Символически: SoP.

Исходя из описанного подхода к простым высказываниям, анализ их строения состоит в выявлении их субъектно-предикатной структуры, т.е. в выявлении в высказывании субъекта и предиката и фиксировании способа связи между ними (по типу A, E, I, O).

Рассмотрим более подробно эти виды суждений.

Общеутвердительное суждение: "*Все S суть P*". Примерами математических теорем, имеющих такое строение, являются следующие: "*Все прямоугольники – параллелограммы*, "*Все* *гомотетии суть преобразования подобия*, "*Все дифференцируемые функции непрерывны*, "*Все поля суть кольца*, "*Все сферы – тела вращения*. Можно указать немало суждений нематематического характера, имеющих такое строение: "*Все люди смертны*, "*Все змеи – пресмыкающиеся*, "*Все планеты – спутники Солнца*.

Суждение "*Все S суть P*" в терминах логики предикатов понимается так: каков бы ни был объект x, если он обладает свойством S (то есть $S(x)$ истинно), то он обладает также свойством P (то есть $P(x)$ истинно). Это утверждение на языке логики предикатов выглядит следующим образом:

$$\mathbf{A}: \qquad \boxed{(\forall x)(S(x) \rightarrow P(x))}\ . \tag{1}$$

(Напомним, что с утверждением такого типа мы уже встречались в §16, когда говорили об ограниченных кванторах: утверждение представляло собой развёрнутую запись ограниченного квантора общности.)

Логика предикатов даёт возможность представить суждение A в несколько ином виде, с использованием квантора существования. Для этого преобразуем формулу (1) равносильным образом, используя равносильности (получающиеся на основе тавтологий) теоремы 17.9,б и теоремы 4.4 а,у,с:

$$(\forall x)(S(x) \rightarrow P(x)) \cong (\forall x)(\neg\neg(\neg S(x) \vee P(x))) \cong$$
$$\cong \neg(\exists x)(\neg(\neg S(x) \vee P(x))) \cong \neg(\exists x)(\neg\neg S(x) \wedge \neg P(x)) \cong$$
$$\cong \neg(\exists x)(S(x) \wedge \neg P(x))\ .$$

В этом виде суждение **A** можно сформулировать так: "*Неверно, что некоторые S не суть P*". Таким образом, $\mathbf{A} \cong \neg\, \mathbf{O}$.

Отметим, что в обыденной речи мы не склонны говорить: "*Все S суть P*", если заведомо знаем, что объектов, удовлетворяющих свойству S, не существует. Обычно, произнося указанное суждение, мы понимаем под ним следующее: "*Существует объект, удовлетворяющий S, и все S суть P*. В переводе на язык логики предикатов оно выглядит так:

$$(\exists x)(S(x)) \wedge (\forall x)(S(x) \rightarrow P(x))\ . \tag{1'}$$

В обыденном употреблении возможно и такое понимание исходного суждения: "*Если существует объект, удовлетворяющий свойству S, то все S суть P*, переводимое на язык логики предикатов следующим образом:

$$(\exists x)(S(x)) \rightarrow (\forall x)(S(x) \rightarrow P(x))\ . \tag{1''}$$

(Проверьте самостоятельно, что формула ($1''$) равносильна формуле (1), и поэтому данное толкование общеутвердительного суждения совпадает с первоначальным его пониманием.)

Всем этим переводам предпочтём перевод (1), и главное соображение здесь состоит в том, что такой перевод, во-первых, проще двух других, а во-вторых, при теоретико-множественном толковании суждения "*Все S суть P*" он позволяет заключить, что множество S всех объектов x, удовлетворяющих свойству $S(x)$, является подмножеством множества P объектов, удовлетворяющих свойству $P(x)$, то есть $S \subseteq P$.

Отметим ещё, что в повседневной речи слово "*все*" в общеутвердительных суждениях порой опускают, так что, например, фраза "*Люди смертны*" обозначает "*Все люди смертны*".

Общеотрицательное суждение: "*Никакое S не есть P*". Вот примеры математических теорем, имеющих такое строение: "*Никакой эллипс не есть алгебраическая линия первого порядка*, "*Никакая осевая симметрия на плоскости не есть движение первого рода*, "*Никакой треугольник не является окружностью*, "*Никакой числовой ряд, у которого предел общего члена не равен нулю, не сходится*. Вот примеры нематематических суждений такого типа: "*Никакие змеи не есть птицы*, "*Никакие камни не разговаривают*.

Смысл общеотрицательного суждения: каков бы ни был объект x, если он обладает свойством S (т.е. $S(x)$ истинно), то он не обладает свойством P (т.е. $P(x)$ ложно). На языке логики предикатов это выражается так:

$$\mathbf{E}: \qquad \boxed{(\forall x)(S(x) \;\to\; \neg P(x))}\ . \qquad (2)$$

Другими словами, общеотрицательное утверждение произносится: "*Все S суть не P*". Можно записать выражение (2) и в виде ограниченного квантора общности: $(\forall S(x))(\neg P(x))$.

Логика предикатов даёт возможность представить суждение E в несколько ином виде, с использованием квантора существования. Для этого формулу E необходимо преобразовать равносильным образом, используя те же равносильности, что и в случае преобразования общеутвердительного суждения:

$$(\forall x)(S(x) \;\to\; \neg P(x)) \;\cong\; (\forall x)(\neg\neg(\neg S(x) \;\vee\; \neg P(x))) \;\cong$$
$$\cong\; \neg(\exists x)(\neg(\neg S(x) \;\vee\; \neg P(x))) \;\cong\; \neg(\exists x)(S(x) \wedge P(x))\ .$$

В этом виде суждение E формулируется так: "*Неверно, что некоторые S суть P*". Таким образом, $\mathbf{E} \cong \neg\,\mathbf{I}$.

Частноутвердительное суждение: "*Некоторые S суть P*". Примерами математических теорем с такими строениями служат следующие: "*Некоторые гомотетии суть движения*", "*Некоторые функции – периодические*", "*Некоторые параллелограммы могут быть вписаны в окружность*", "*Некоторые простые числа чётны*". Приведём примеры нематематических суждений, имеющих такое строение: "*Некоторые люди взошли на Эверест*", "*Некоторые змеи ядовиты*" и т.д.

Частноутвердительному суждению придаётся следующий смысл: существует такой объект x, обладающий свойством $S(x)$, который также обладает и свойством $P(x)$. Тогда ему соответствует следующая формула логики предикатов:

$$\mathbf{I}: \qquad \boxed{(\exists x)(S(x) \wedge P(x))} \; . \tag{3}$$

(Напомним, что это утверждение представляет собой развёрнутую запись ограниченного квантора существования, см. §16.)

Снова, используя технику логики предикатов, можем представить данное суждение в несколько ином виде, с использованием квантора общности:

$$(\exists x)(S(x) \wedge P(x)) \cong (\exists x)(\neg(\neg S(x) \vee \neg P(x))) \cong$$
$$\cong (\exists x)(\neg(S(x) \to \neg P(x))) \cong \neg(\forall x)(\neg(S(x) \to \neg P(x)) \; .$$

Сравнив теперь общеотрицательное суждение E и частноутвердительное суждение I, видим, что каждое из них является отрицанием другого: $\mathbf{I} \cong \neg\, \mathbf{E}$.

Отметим, что в повседневной речи слово "*некоторые*" в частноутвердительных суждениях порой опускают, так что, например, фраза "*Люди взошли на Эверест*" обозначает "*Некоторые люди взошли на Эверест*".

Частноотрицательное суждение: "*Некоторые S не суть P*". Укажем примеры математических теорем такого вида: "*Некоторые треугольники неравнобедренные*", "*Некоторые функции не периодические*", "*Некоторые преобразования подобия не являются движениями*", "*Некоторые ромбы нельзя вписать в окружность*", "*Некоторые группы не абелевы*". Вот примеры нематематических суждений, имеющих частноотрицательный характер: "*Некоторые грибы не съедобны*", "*Некоторые реки не впадают в моря*" и т.д.

Частноотрицательное суждение "*Некоторые S не суть P*" понимается так: существует такой объект x, который обладает свойством S ($S(x)$ истинно) и не обладает свойством P ($P(x)$ ложно, т.е. истинно $\neg P(x)$). На языке логики предикатов это записывается следующим образом:

$$\mathbf{O}: \qquad \boxed{(\exists x)(S(x) \wedge \neg P(x))} \,. \tag{4}$$

Данное выражение можно записать в виде ограниченного квантора существования $(\exists S(x))(\neg P(x))$.

Преобразовав равносильным образом выражение (4) (проделайте самостоятельно), получаем

$$(\exists x)(S(x) \;\wedge\; \neg P(x)) \;\;\cong\;\; \neg(\forall x)(S(x) \;\rightarrow\; P(x)) \,.$$

Эта равносильность показывает, что общеутвердительное суждение A и частноотрицательное суждение O являются отрицаниями друг друга: $\mathbf{O} \;\cong\; \neg\, \mathbf{A}$.

В заключение отметим, что общеотрицательное суждение E и частноутвердительное суждение I допускают обращение. Такой вывод можно сделать, если вспомнить выражения для этих суждений на языке логики предикатов с использованием квантора общности и закон коммутативности конъюнкции:

$$\mathbf{E}: \qquad \neg(\exists x)(S(x) \wedge P(x)) \;\cong\; \neg(\exists x)(P(x) \wedge S(x)) \,,$$

$$\mathbf{I}: \qquad (\exists x)(S(x) \wedge P(x)) \;\cong\; (\exists x)(P(x) \wedge S(x)) \,.$$

Это означает, что "*Никакое S не есть P*" тогда и только тогда, когда "*Никакое P не есть S*", и аналогично суждение "*Некоторые S суть P*" истинно тогда и только тогда, когда истинно суждение "*Некоторые P суть S*". Соответствующая запись с кванторами существования для суждений A и O показывает, что в них буквы S и P переставить нельзя, эти суждения обращения не допускают.

И ещё одно важное замечание. Необходимо отчётливо осознавать, что значит доказать теорему того или иного типа. Так, доказательство общеутвердительных (A) и общеотрицательных (E) теорем должно состоять в построении строгой цепочки логических умозаключений, начинающейся с условий теоремы и заканчивающейся её заключением. Например, при доказательстве теоремы "*Все дифференцируемые функции непрерывны*" нужно, исходя из определения дифференцируемой (в точке) функции, построить строгую цепочку логических заключений, завершающуюся определением непрерывной (в точке) функции. При доказательстве общеотрицательной теоремы "*Никакая осевая симметрия плоскости не является движением первого рода*" нужно, исходя из определения осевой симметрии, построить неопровержимую цепь рассуждений, завершающуюся отрицанием определения движения первого рода. При этом, конечно, нужно знать последнее определение и уметь сформулировать его отрицание (возможно и на языке логики предикатов). Напротив, при доказательстве утверждений частноутвердительных (I) и частноотрицательных (O) цепочек логических рассуждений строить не требуется. Здесь нужно находить или строить примеры. Так, для доказательства частноутвердительного суждения "*Некоторые параллелограммы могут быть вписаны в окружность*" следует указать конкретный пример такого параллелограмма, который можно вписать в окружность (например, прямоугольник). Аналогично, для доказательства частноотрицательного суждения "*Некоторые функции не периодические*" достаточно привести пример хотя бы одной непериодической функции.

Методы рассуждений: аристотелева силлогистика. Наиболее часто употребляемые приёмы логических рассуждений были впервые охарактеризованы ещё аристотелевской логикой и получили название аристотелевских силлогизмов. Создатели известной методической концепции укрупнения дидактических единиц в обучении математике П.М.Эрдниев и Б.П.Эрдниев так характеризуют роль аристотелевской силлогистики в школьном математическом образовании: "В настоящее время образцом логической строгости в школе выступает аристотелевская силлогистика: незыблемым считается порядок, когда из двух посылок (большой и малой) выводится одно заключение."[1]

Итак, расклассифицировав описанным в предыдущем пункте образом простые высказывания на типы **A**, **E**, **I**, **O**, Аристотель приступает к анализу умозаключений, которые можно осуществить на их основе. Он выделяет важнейший вид дедуктивных умозаключений – так называемые силлогистические умозаключения, или силлогизмы. Аристотелевский силлогизм представляет собой схему логического вывода (умозаключения), состоящую из трёх простых высказываний одного из четырёх указанных видов **A**, **E**, **I**, **O**: два первых высказывания – посылки, третье – заключение.

Более точно, умозаключения аристотелевской силлогистики имеют следующее строение. В них рассматриваются три свойства (Аристотель называет их терминами): S, M, P. Первая посылка (называемая *большая*), представляет собой простое высказывание, связывающее M и P; вторая посылка (называемая *малая*) связывает M и S; следствие связывает S и P, причём в следствии всегда S

---

[1] *Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П.* Укрупнение дидактических единиц в обучении математике. – М.: Просвещение, 1986. – 256 с. (С. 176)

выступает в качестве субъекта, а P – в качестве предиката. Фактически, аристотелевский силлогизм есть установление соотношения между двумя свойствами S и P посредством "связующего" свойства M. В зависимости от расположения "связующего" свойства M может быть четыре вида силлогизмов (по Аристотелю – четыре фигуры модусов силлогизмов), которые схематически представляются следующим образом (запись в столбец означает, что суждение, записанное под чертой, является следствием суждений, записанных над чертой):

I фигура	**II фигура**	**III фигура**	**IV фигура**
$\dfrac{MxP \quad SyM}{SzP}$	$\dfrac{PxM \quad SyM}{SzP}$	$\dfrac{MxP \quad MyS}{SzP}$	$\dfrac{PxM \quad MyS}{SzP}$

где $x, y, z \in \{a, e, i, o\}$ и запись SzP (как и MxP и SyM и т.п.) обозначает в зависимости от значения z одно из четырех суждений видов A, E, I, O, включающих соответствующие предикаты S и P. Поскольку каждое из трёх суждений фигуры независимо друг от друга может иметь один из четырёх видов, то каждая фигура доставляет следующее количество силлогизмов (схем): $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Поскольку фигур 4, то получаем $4 \cdot 64 = 256$ силлогизмов. (Выпишите самостоятельно все силлогизмы каждой из четырёх фигур).

Задача аристотелевой силлогистики, блестяще решённая самим Аристотелем, состоит в том, чтобы обнаружить все те силлогизмы (схемы умозаключений), которые справедливы, т.е. представляют собой логические следования. Таких силлогизмов, как установил Аристотель, имеется ровно 19, остальные – неверны. При этом, 4 из 19 правильных силлогизмов оказываются условно правильными.

Для облегчения запоминания всех правильных силлогизмов (или модусов, как их называют) в XIII веке было составлено особое мнемоническое латинское стихотворение. При этом, название силлогизма само по себе непереводимо, но дано так, чтобы из гласных букв в него входили лишь те три буквы из a, e, i, o, которые указывают на характер посылок и следствия данного силлогизма. Выпишем все верные модусы с их латинскими названиями:

I фигура

$$\begin{array}{cccc}
\text{Barbara} & \text{Darii} & \text{Celarent} & \text{Ferio} \\
 & & & \\
MaP & MaP & MeP & MeP \\
SaM & SiM & SaM & SiM \\
\hline
SaP & SiP & SeP & SoP
\end{array}$$

II фигура

$$\begin{array}{cccc}
\text{Baroco} & \text{Camestres} & \text{Cesare} & \text{Festino} \\
 & & & \\
PaM & PaM & PeM & PeM \\
SoM & SeM & SaM & SiM \\
\hline
SoP & SeP & SeP & SoP
\end{array}$$

III фигура

$$\begin{array}{cccccc}
\text{Darapti} & \text{Datisi} & \text{Disamis} & \text{Bocardo} & \text{Felapton} & \text{Ferison} \\
 & & & & & \\
MaP & MaP & MiP & MoP & MeP & MeP \\
MaS & MiS & MaS & MaS & MaS & MiS \\
\hline
SiP & SiP & SiP & SoP & SoP & SoP
\end{array}$$

IV фигура

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Bramantip} & \text{Dimaris} & \text{Camenes} & \text{Fesapo} & \text{Fresison} \\
 & & & & \\
PaM & PiM & PaM & PeM & PeM \\
MaS & MaS & MeS & MaS & MiS \\
\hline
SiP & SiP & SeP & SoP & SoP
\end{array}$$

В предыдущем пункте было показано, как на языке логики предикатов каждое из категорических суждений **A**, **E**, **I**, **O** может быть представлено формулой логики предикатов (см. записи (1), (2), (3), (4)). Тогда каждый из 19 правильных аристотелевских силлогизмов также может быть представлен некоторой формулой логики предикатов. Рассмотрим примеры некоторых силлогизмов и дадим их обоснование методами логики предикатов.

Пример 20.7. Самый распространённый и простой силлогизм *Barbara*:

$$\begin{array}{c}\text{"Все } M \text{ суть } P\text{"},\\ \underline{\text{"Все } S \text{ суть } M\text{"},}\\ \\ \text{"Все } S \text{ суть } P\text{"}.\end{array}$$

Здесь как обе посылки, так и заключение являются общеутвердительными суждениями. Вот пример такого рассуждения. *"Все квадраты суть ромбы"*, *"Все ромбы суть параллелограммы"*. Следовательно, *"Все квадраты суть параллелограммы"*.

Обоснуем справедливость такого рассуждения, для чего представим данный силлогизм на языке логики предикатов:

$$\begin{array}{c}(\forall x)(M(x) \;\to\; P(x)) \;,\\ \underline{(\forall x)(S(x) \;\to\; M(x)) \;,}\\ (\forall x)(S(x) \;\to\; P(x)) \;,\end{array}$$

Нужно проверить, что третья формула является логическим следствием первых двух, т.е. нужно показать, что она превращается в истинное высказывание при всякой такой подстановке вместо её предикатных переменных $S(x)$ и $P(x)$ таких конкретных предикатов, при которой обе первых формулы превращаются в истинные высказывания. В самом деле, на основании равносильности (получаемой из тавтологии) теоремы 17.11,а, для конъюнкции посылок имеем

$$(\forall x)(S(x) \;\to\; M(x)) \;\wedge\; (\forall x)(M(x) \;\to\; P(x)) \;\cong$$
$$\cong\; (\forall x)[(S(x) \;\to\; M(x)) \;\wedge\; (M(x) \;\to\; P(x))]\;.$$

Истинность обеих посылок означает истинность их конъюнкции и, следовательно, ввиду приведённой равносильности тождественную истинность предиката $(S(x) \to M(x)) \;\wedge\; (M(x) \to P(x))$, т.е. истинность высказывания $(S(a) \to M(a)) \wedge (M(a) \to P(a))$ для любого a. Но тогда, на основании закона силлогизма (тавтология теоремы 3.1, е), для любого a будет истинно высказывание $S(a) \to P(a)$, т.е. будет тождественно истинным предикат $S(x) \to P(x)$. Последнее означает, что будет истинно высказывание $(\forall x)(S(x) \to P(x))$, являющееся заключением рассматриваемого силлогизма.

Пример 20.8. Совершенно аналогично обосновывается (предлагается проделать самостоятельно) справедливость силлогизма *Celarent*:

$$\begin{array}{c}\text{"Все } M \text{ суть не } P\text{"},\\ \underline{\text{"Все } S \text{ суть } M\text{"},}\\ \\ \text{"Все } S \text{ суть не } P\text{"}.\end{array}$$

Пример 20.9. Рассмотрим ещё один силлогизм *Festino*:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{"Никакое } P \text{ не есть } M\text{"},\\ \text{"Некоторые } S \text{ суть } M\text{"},\end{array}}{\text{"Некоторые } S \text{ не суть } P\text{"}.}$$

Приведём пример рассуждения, основанного на этой схеме. "*Никакая окружность не является квадратом*, "*Некоторые параллелограммы являются квадратами*. Следовательно, "*Некоторые параллелограммы не являются окружностями*.

Запишем данный силлогизм на языке логики предикатов:

$$\frac{\begin{array}{c}(\forall x)(P(x) \to \neg M(x)),\\ (\exists x)(S(x) \wedge M(x)),\end{array}}{(\exists x)(S(x) \wedge \neg P(x)),}$$

Покажем, что третья формула является логическим следствием первых двух. Из истинности первого высказывания вытекает истинность высказывания $P(a) \to \neg M(a)$ для любого предмета a. Следовательно, на основе равносильностей теоремы 4.4, а, б, истинно высказывание $M(a) \to \neg P(a)$ для любого a.

Докажем, далее, истинность следующего высказывания:

$$(\exists x)(S(x) \wedge M(x)) \to (\exists x)(S(x) \wedge \neg P(x)) . \qquad (*)$$

Допустим, что посылка $(\exists x)(S(x) \wedge M(x))$ истинна. Это означает, что существует такой объект a, что высказывание $S(a) \wedge M(a)$ истинно. Следовательно, истинны оба высказывания $S(a)$ и $M(a)$. Из истинности высказываний $M(a)$ и $M(a) \to \neg P(a)$ вытекает истинность высказывания $\neg P(a)$, что вместе с истинностью $S(a)$ даёт истинность конъюнкции $S(a) \wedge \neg P(a)$ для некоторого объекта a. Последнее означает истинность высказывания $(\exists x)(S(x) \wedge \neg P(x))$. Таким образом, истинность импликации (*) установлена.

Итак, показано, что из первой посылки рассматриваемого силлогизма следует формула (*). Символически это можно выразить так: $F \models G \to H$, где F, G – посылки, а H – следствие рассматриваемого силлогизма. Тогда, на основе теоремы 6.3, заключаем, что $F, G \models H$, т.е. формула H является логическим следствием формул F и G. Рассматриваемый силлогизм действительно справедлив.

Пример 20.10. Приведём пример неверного силлогизма. "*Некоторые B суть C*", "*Некоторые A суть B*", следовательно, "*Некоторые A суть C*". Действительно, эта схема умозаключения неверна, потому что на основании её, например, из истинных утверждений "*Некоторые выпуклые фигуры – круги*" и "*Некоторые многоугольники – выпуклые фигуры*" приходим к ложному выводу "*Некоторые многоугольники являются кругами*". Этому силлогизму соответствует формула логики предикатов:

$$((\exists x)(B(x) \wedge C(x)) \;\wedge\; (\exists x)(A(x) \;\wedge\; B(x))) \;\rightarrow\; (\exists x)(A(x) \wedge C(x)) \;,$$

не являющаяся общезначимой (примеры соответствующих предикатов только что указаны).

Аристотелева силлогистика и логика предикатов. В предыдущем пункте мы показали как аристотелевы силлогизмы переводятся на язык логики предикатов: каждому силлогизму сопоставляется формула логики предикатов, при этом, правильным силлогизмам соответствуют тавтологии (общезначимые формулы) логики предикатов, а неправильным силлогизмам – формулы, не являющиеся тавтологиями.

Тем не менее, при более пристальном рассмотрении этих формул выясняется, что так происходит не для всех правильных аристотелевых силлогизмов: тавтологии соответствуют лишь пятнадцати из них. Остальным четырём правильным силлогизмам *Darapti*, *Felapton*, *Bramantip* и *Fesapo* соответствуют формулы логики предикатов, не являющиеся общезначимыми, т.е. тавтологиями.

Пример 20.11. Рассмотрим формулу, отвечающую силлогизму *Darapti*:

$$((\forall x)(M(x) \rightarrow P(x)) \;\wedge\; (\forall x)(M(x) \rightarrow S(x))) \;\rightarrow\; (\exists x)(S(x) \wedge P(x)) \;.$$

Покажем, что эта формула не является общезначимой. Для этого нужно указать такие конкретные предикаты $A(x), B(x), C(x)$, заданные над некоторым множеством M, что посылка силлогизма превратится в истинное высказывание $(\forall x)(B(x) \rightarrow C(x)) \wedge (\forall x)(B(x) \rightarrow A(x))$, а следствие – в ложное $(\exists x)(A(x) \wedge C(x))$. Для этого достаточно, чтобы предикат $B(x)$ был тождественно ложен, а предикаты $A(x)$ и $C(x)$ обладали бы тем свойством, что для любого предмета $a \in M$ одно из высказываний $A(a)$ или $C(a)$ было бы ложным. Последнее возможно, если, например, один из предикатов $A(x)$ или $C(x)$ является отрицанием другого. Укажите самостоятельно примеры конкретных таких предикатов, например, на множестве натуральных чисел N.

Выпишите самостоятельно формулы логики предикатов для оставшихся трёх "плохих" силлогизмов и докажите, что они не общезначимы. Выпишите также формулы логики предикатов для пятнадцати "хороших" аристотелевых силлогизмов и докажите их общезначимость. (См. Задачник: №№ 9.68 – 9.71).

Какой же вывод можно сделать после анализа результатов перевода аристотелевых силлогизмов на язык логики предикатов? Вывод таков, что логика предикатов, как и алгебра высказываний, далеко не является совершенной математической теорией, отражающей (описывающей) процесс человеческого мышления. И эта теория допускает изъяны, приводит к выводам, не сопоставимым с результатами реальных процессов, которые теория призвана описать. Это же обстоятельство приводит, с одной стороны, к задаче создания аксиоматической теории аристотелевых силлогизмов, в которой каждый верный силлогизм по каким-то правилам выводился бы из аксиом, а с другой стороны, – к задаче построения такой логической системы, которая все же вписывала бы всю традиционную силлогистику в общий ансамбль современной формальной логики. К этим вопросам мы вернёмся в §30.

Теоретико-множественная интерпретация аристотелевой силлогистики. Эта интерпретация, в частности, поможет нам лучше понять причину того, что не все верные силлогизмы выражаются на языке логики предикатов общезначимой формулой. Обозначим множества истинности предикатов $S(x)$, $M(x)$, $P(x)$ через S, M, P соответственно. Тогда утверждения об истинности категорических суждений **A**, **E**, **I**, **O** могут быть следующим образом выражены на теоретико-множественном языке (учитывайте запись этих утверждений на языке логики предикатов, мы говорили уже об этом выше):

$$\textbf{A}:\ S \subseteq P \ \ (S \cap P = S)\,, \qquad \textbf{E}:\ S \cap P = \emptyset\,,$$
$$\textbf{I}:\ S \cap P \neq \emptyset\,, \qquad \textbf{O}:\ S \not\subseteq P \ \ (S \setminus P \neq \emptyset)\,.$$

Нетрудно изобразить с помощью диаграмм Эйлера-Венна взаимоотношения между множествами S и P в каждом случае. (Изобразите самостоятельно).

Теперь каждый аристотелев силлогизм будет представлять собой утверждение о том, что из каких-то двух соотношений между множествами S, M, P непременно следует третье соотношение между множествами S и P.

Пример 20.12. Например, силлогизм *Bocardo* на теоретико-множественном языке запишется так:

$$\begin{array}{ll} MoP & M \not\subseteq P \\ MaS & M \subseteq S \\ \hline SoP & S \not\subseteq P \end{array}$$

Используя свойства отношения включения $\subseteq$, нетрудно установить справедливость данного силлогизма. В самом деле, допустим, что он не справедлив, т.е. $M \not\subseteq P$, $M \subseteq S$, но $S \subseteq P$. Тогда из второго и третьего условий, в силу транзитивности отношения $\subseteq$, заключаем, что $M \subseteq P$, что противоречит первому условию.

Пример 20.13. Ещё один пример верного силлогизма: *Fresison*. Его запись:

$$\begin{array}{ll} PeM & P \cap M = \emptyset \\ MiS & M \cap S \neq \emptyset \\ \hline SoP & S \not\subseteq P \end{array}$$

Предположим, что $S \subseteq P$. Тогда $S \cap P = S$. Учитывая это, находим: $S \cap (P \cap M) = (S \cap P) \cap M = S \cap M \neq \emptyset$ (неравенство на основании второго условия). Следовательно, $P \cap M \neq \emptyset$, что противоречит первому условию.

Пример 20.14. Приведём пример неправильного силлогизма:

$$\begin{array}{ll} MiP & M \cap P \neq \emptyset \\ SeM & S \cap M = \emptyset \\ \hline SoP & S \not\subseteq P \end{array}$$

Диаграмма показывает, что для трех множеств S, M, P возможна ситуация, когда условия выполнены: $M \cap P \neq \emptyset$, $S \cap M \neq \emptyset$, а заключение – нет: $S \subseteq P$. Следовательно, данный силлогизм не верен, т.е. рассуждения по данной схеме не правильны.

Наконец, обратимся к четырём "плохим" с точки зрения логики предикатов правильным силлогизмам *Darapti*, *Felapton*, *Bramantip* и *Fesapo* и постараемся понять, почему выражающие их формулы логики предикатов оказались не общезначимыми.

Пример 20.15. Силлогизм *Darapti* имеет вид:

$$\begin{array}{ll} MaP & M \cap P = M \\ MaS & M \cap S = M \\ \hline SiP & S \cap P \neq \emptyset \end{array}$$

Из условий вытекает, что $M \cap (S \cap P) = M$, т.е. $M \subseteq S \cap P$. Если $M \neq \emptyset$, то $S \cap P \neq \emptyset$, и заключение силлогизма выполняется. Если же $M \neq \emptyset$, то при выполнении условий силлогизма заключение может и не выполниться: $S \cap P = \emptyset$. (Вспомните здесь, что соответствующая формула логики предикатов превращалась в ложное высказывание, если вместо предикатной переменной $M(x)$ подставить тождественно ложный предикат).

Пример 20.16. Силлогизм *Bramantip* имеет вид:

$$\begin{array}{lll} PaM & P \subseteq M & (P \cap M = P) \\ MaS & M \subseteq S & (M \cap S = M) \\ \hline SiP & S \cap P \neq \emptyset & \end{array}$$

Из условий получаем: $(P \cap M) \cap (M \cap S) = P \cap M$, т.е. $S \cap (P \cap M) = P$, откуда $S \cap P = P$. Это означает, что если $P \neq \emptyset$, то $S \cap P \neq \emptyset$, и заключение силлогизма выполняется. Если же $P = \emptyset$, то при выполнении условий силлогизма его заключение может и не выполняться: $S \cap P = \emptyset$.

Пример 20.17. Силлогизм *Felapton* имеет вид:

$$\begin{array}{ll} MeP & M \cap P = \emptyset \\ MaS & M \subseteq S \\ \hline SoP & S \nsubseteq P \end{array}$$

Допустим, что условия верны, но $S \subseteq P$. Тогда $M \subseteq P$, т.е. $M \cap P = M$ и, значит, $M = \emptyset$. Таким образом, при $M = \emptyset$ из выполнимости условий силлогизма может не следовать выполнимость его заключения. Аналогична теоретико-множественная ситуация с силлогизмом *Fesapo*.

Итак, четыре рассмотренных силлогизма с теоретико-множественной точки зрения не выполняются в тех случаях, когда в них участвуют пустые множества. С точки зрения логики предикатов это означает, что мы не исключаем тождественно ложных предикатов. Это означает, что в теоретико-множественной теории силлогизмов, находящейся в рамках логики предикатов, имеется лишь 15 верных силлогизмов. Если же мы исключим из рассмотрения в логике предикатов тождественно ложные предикаты, то мы будем иметь 19 верных силлогизмов.

Что же касается классической аристотелевской силлогистики, то в ней изначально не предполагались пустые термины, т.е. предикаты с пустым множеством субъектов, или, в нашей терминологии, тождественно ложные предикаты. Поэтому классическая аристотелевская силлогистика включает 19 верных силлогизмов.

Отметим, что М.В.Ломоносов (1711–1765), осуществляя нововведения в традиционную логику, не признавал правильными "плохие" силлогизмы *Darapti, Felapton, Bramantip* и *Fesapo*. Это красноречиво говорит о том, насколько глубоко этот гениальный учёный проник и в эту область научного знания.

О других методах рассуждений. Аристотелевская силлогистика охватывает далеко не все типы умозаключений так называемой логики свойств, к которой эту силлогистику принято относить. Полная формализация таких умозаключений осуществляется в логике (одноместных) предикатов. Рассмотрим ещё ряд некоторых типов умозаключений.

Пример 20.18. Вот один такой широко распространенный способ рассуждений. Приведём сначала примеры таких рассуждений. "*Все люди смертны. Сократ – человек. Следовательно, Сократ смертей*". "*Всякое нечетное натуральное число является разностью двух квадратов. 7 есть нечётное натуральное число. Следовательно, 7 является разностью двух квадратов*". Приведённые рассуждения основаны на следующей схеме:

$$\begin{array}{l} (\forall x)(H(x) \to P(x)), \\ \underline{H(a) \qquad\qquad\qquad} \\ P(a), \end{array}$$

означающей, что третья формула является логическим следствием первых двух. Проверим, что это действительно так. Пусть первые две формулы превратились в истинные высказывания $(\forall x)(A(x) \to B(x))$ и $A(a)$ при подстановке вместо предикатных переменных H и P некоторых конкретных предикатов $A(x)$ и $B(x)$ соответственно, определённых на некотором множестве M. Истинность высказывания $(\forall x)(A(x) \to B(x))$ означает тождественную истинность предиката $A(x) \to B(x)$, откуда, в частности, вытекает истинность высказывания $A(a) \to B(a)$. Наконец, из истинности высказываний $A(a)$ и $A(a) \to B(a)$ следует истинность высказывания $B(a)$, полученного из заключительной формулы $P(a)$ в результате подстановки конкретного предиката B на место предикатной переменной P. Тем самым справедливость приведённой схемы рассуждений доказана.

И аристотелевские силлогизмы, и приведённая схема рассуждений обосновываются с привлечением лишь одноместных предикатов. Приведём пример рассуждения, для обоснования которого уже нельзя обойтись только одноместными предикатами.

Пример 20.19. *"Бинарное отношение < на множестве натуральных чисел транзитивно и антирефлексивно. Следовательно, оно не симметрично"*. Символически:

$$\frac{\begin{array}{l}(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \wedge y < z \to x < z),\\ (\forall x)(\neg(x < x))\end{array}}{(\forall x)(\forall y)(x < y \to \neg(y < x)).}$$

Это рассуждение основано на следующей схеме с двухместным предикатом $P(x, y)$:

$$\frac{\begin{array}{l}(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)),\\ (\forall x)(\neg P(x,x))\end{array}}{(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to \neg P(y,x)).}$$

Проверим справедливость этой схемы. Отметим вначале, что тавтологию закона удаления квантора общности (теорема 21.13,a) в терминах логического следования можно трактовать так: формула (y) является логическим следствием формулы $(\forall x)(P(x))$. На основании данного закона, из первой формулы рассматриваемой схемы следует формула

$$(P(x,y) \ \wedge \ P(y,x)) \ \to \ P(x,x) \qquad (1)$$

(переменную z переименовали в x). Далее, из второй формулы рассматриваемой схемы по тому же закону удаления квантора общности следует формула $\qquad \neg P(x,x). \qquad (2)$

При фиксированных x и y две последние формулы превращаются в формулы алгебры высказываний: $(A \wedge B) \to C$, $\neg C$. Используя методы алгебры высказываний (см. §6), нетрудно проверить, что

$$(A \ \wedge \ B) \ \to \ C, \neg C \ \models \ A \ \to \ \neg B \, . \qquad (3)$$

Переводя полученную формулу $A \to \neg B$ на первоначальный язык, получим формулу $P(x, y) \to \neg P(y, x)$. Таким образом, выводимость (3) показывает, что формула $P(x, y) \ \to \ \neg P(y, x)$ является логическим следствием формул (1) и (2) для каждого значения x и y. Следовательно, и формула $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \ \to \ \neg P(y, x))$ будет превращаться в истинное высказывание при всякой такой подстановке вместо предикатной переменной P конкретного предиката, а вместо предметных переменных x и y – конкретных предметов, при которой в истинные высказывания превращаются формулы (1) и (2). Этим завершается проверка справедливости схемы умозаключения.

В заключение приведём пример доказательства математической теоремы, целиком основанного на одной тавтологии логики предикатов. По существу здесь мы имеем пример теоремы из конкретного раздела математики, доказательство которой носит не математический, а чисто логический характер.

Пример 20.20. Рассмотрим следующую тавтологию логики предикатов (см. Задачник, № 9.43, м):

$$(\forall x)(P(x)) \;\to\; (\forall x)(P(x) \lor (Q(x)) \,. \tag{1}$$

Покажем, как она может быть применена к доказательству следующего утверждения: "*Наименьший элемент упорядоченного множества минимален.*"

Напомним определения. Отношением порядка на множестве A называется бинарное отношение $\prec$ на A, удовлетворяющее условиям:

1) рефлексивность: $(\forall x)(x \prec x)$;
2) антисимметричность: $(\forall x, y, z)((x \prec x \;\land\; y \prec x) \;\to\; x = y)$;
3) транзитивность: $(\forall x, y, z)((x \prec y \;\land\; y \prec z) \;\to\; x \prec z)$.

Множество A вместе с заданным на нём отношением порядка $\prec$ называется упорядоченным и обозначается $< A; \prec >$. Элемент a упорядоченного множества $< A; \prec >$ называется наименьшим, если он меньше всех элементов этого множества: $(\forall x)(a \prec x)$, и называется минимальным, если меньше него нет элемента в этом множестве: $\neg(\exists x)(x \prec a)$. Таким образом, утверждение, которое мы хотим доказать, на языке логики предикатов записывается так:

$$(\forall x)(a \prec x) \;\to\; \neg(\exists x)(x \prec a). \tag{2}$$

С помощью равносильных преобразований преобразуем сначала заключение этой импликации:

$$\neg(\exists x)(x \prec a) \;\cong\; (\forall x)[\neg(x \prec a)] \;\cong$$
$$\cong\; (\forall x)[a \prec x \;\lor\; (\neg(a \prec x) \;\land\; \neg(x \prec a))] \;\cong$$
$$\cong\; (\forall x)[(a \prec x \;\lor\; \neg(a \prec x)) \;\land\; (a \prec x \lor \neg(x \prec a))] \;\cong$$
$$\cong\; (\forall x)(a \prec x \lor \neg(x \prec a)) \,.$$

Тогда утверждение (2) имеет вид:

$$(\forall x)(a \prec x) \;\to\; (\forall x)(a \prec x \;\lor\; \neg(x \prec a)). \tag{3}$$

Именно в это высказывание и превращается формула (1) при подстановке в нее вместо переменной $P(x)$ предиката "$a \prec x$", а вместо переменной $Q(x)$ – предиката "$\neg(x \prec a)$". Поскольку формула (1), как мы доказали, общезначима, поэтому высказывание (3), и вместе с ним и высказывание (2) истинны.

Принцип полной дизъюнкции в предикатной форме. Теореме 7.18 об обратимости системы импликаций можно придать следующий предикатный вид.

Теорема 20.21. *Пусть справедливы все следующие прямые теоремы ($m \geq 2$):*

$$(\forall x)(P_1(x) \to Q_1(x)),\ (\forall x)(P_2(x) \to Q_2(x)),\ \dots,(\forall x)(P_m(x) \to Q_m(x)).$$

Причём, для посылок известно, что истинно утверждение $(\forall x)(P_1(x) \vee P_2(x) \vee \dots \vee P_m(x))$, а следствия попарно исключают друг друга, т.е. истинны все высказывания $\neg(\exists x)(Q_i(x) \wedge Q_j(x))$ $(i, j = 1, \dots m, i \neq j)$. Тогда справедливы и все обратные импликации:

$$(\forall x)(Q_1(x) \to P_1(x)),\ (\forall x)(Q_2(x) \to P_2(x)),\ \dots,(\forall x)(Q_m(x) \to P_m(x)).$$

(Предполагается, конечно, что все предикаты заданы над одним и тем же множеством M.)

Доказательство. Покажем сначала, что истинна первая обратная импликация: $(\forall x)(Q_1(x) \to P_1(x))$. Пусть $a \in M$. Если высказывание $Q_1(a)$ ложно, то импликация $Q_1(a) \to P_1(a)$ истинна. Предположим, что высказывание $Q_1(a)$ истинно. Покажем, что тогда все высказывания $P_2(a)$, ..., $P_m(a)$ ложны. Допустим противное: например, пусть $P_2(a)$ истинно. В силу истинности, по условию, универсального высказывания $(\forall x)(P_2(x) \to Q_2(x))$, тогда будет истинна и импликация $P_2(a) \to Q_2(a)$, что вместе с истинностью ее посылки $P_2(a)$ приводит к истинности следствия $Q_2(a)$. Итак, высказывания $Q_1(a)$ и $Q_2(a)$ истинны. Значит, истинна конъюнкция $Q_1(a) \wedge Q_2(a)$ и вместе с ней истинно экзистенциальное высказывание $(\exists x)(Q_1(x) \wedge Q_2(x))$, что противоречит условию, согласно которому истинно отрицание этого высказывания. Таким образом, все высказывания $P_2(a), \dots, P_m(a)$ ложны. Тогда высказывание $P_1(a)$ должно быть истинно, ибо если и оно будет ложным, то ложной будет и дизъюнкция $P_1(a) \vee P_2(a) \vee \dots \vee P_m(a)$, а вместе с ней и универсальное высказывание $(\forall x)(P_1(x) \vee \dots \vee P_m(x))$, что противоречит условию. Итак, высказывания $Q_1(a)$ и $P_1(a)$ истинны. Следовательно, истинна импликация $Q_1(a) \to P_1(a)$.

Итак, мы доказали, что каким бы ни был элемент $a \in M$ (превращающим предикат $Q_1(x)$ в ложное высказывание или превращающим его в истинное высказывание), импликация $Q_1(a) \to P_1(a)$

будет истинной. Следовательно, будет истинно и высказывание $(\forall x)(Q_1(x) \to P_1(x))$.

Совершенно аналогично устанавливается истинность и остальных обратных импликаций: $(\forall x)(Q_2(x) \to P_2(x))$, . . . , $(\forall x)(Q_m(x) \to P_m(x))$. □

Частным видом рассмотренной теоремы об обратимости системы импликаций при $m = 2$ является следующая теорема.

Теорема 20.22. *Пусть справедливы следующие две прямые теоремы:* $(\forall x)(P(x) \to Q_1(x))$ *и* $(\forall x)(\neg P(x) \to Q_2(x))$, *причём следствия* $Q_1(x)$ *и* $Q_2(x)$ *взаимно исключают друг друга, т.е. истинно высказывание* $\neg(\exists x)(Q_1(x) \wedge Q_2(x))$. *Тогда справедливы обратные теоремы:* $(\forall x)(Q_1(x) \to P(x))$ и $(\forall x)(Q_2(x) \to \neg P(x))$.

Для того, чтобы доказать, что данная теорема действительно является частным видом теоремы предыдущего пункта, можно увидеть, что её условие удовлетворяет требованиям условия предыдущей теоремы. Следствия здесь действительно исключают друг друга, а для посылок $P(x)$ и $\neg P(x)$ ясно, что верно утверждение $(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$, чего и требует условие предыдущей теоремы.

Приведём пример двух теорем из геометрии, истинность обратных утверждений для которых может быть установлена с помощью рассмотренного частного случая теоремы об обратимости системы импликаций.

Пример 20.23. Рассмотрим теоремы:

1) "*Если две плоскости параллельны, то всякая плоскость при пересечении с ними даёт две прямые линии, которые также параллельны*". Символически:

$$(\forall \pi_1, \pi_2)[\pi_1 || \pi_2 \to (\forall \pi)(\pi_1 \cap \pi \,||\, \pi_2 \cap \pi)].$$

2) "*Если две плоскости не параллельны, то существует плоскость, которая при пересечении с ними даёт две пересекающиеся прямые линии*". Символически:

$$(\forall \pi_1, \pi_2)[\pi_1 \not\parallel \pi_2 \to (\exists \pi)((\pi_1 \cap \pi) \cap (\pi_2 \cap \pi) \neq \emptyset)].$$

Ясно, что следствия этих утверждений

$$(\forall \pi)(\pi_1 \cap \pi \,||\, \pi_2 \cap \pi)] \quad \text{и} \quad (\exists \pi)((\pi_1 \cap \pi) \cap (\pi_2 \cap \pi) \neq \emptyset)]$$

взаимно исключают друг друга. Тогда можно сделать вывод о справедливости двух обратных утверждений:

1') *"Если при пересечении любых двух данных плоскостей всякой третьей плоскостью получаются две параллельные прямые, то и сами данные плоскости также параллельны".*

2') *"Если при пересечении любых двух данных плоскостей некоторой третьей плоскостью получаются две пересекающиеся прямые, то и сами данные плоскости также пересекаются".*

Метод (полной) математической индукции – специальный метод доказательства, применяемый для доказательства истинности утверждений типа $(\forall x \in N)(P(x))$, т.е. $(\forall x)(x \in N \rightarrow P(x))$. Такие утверждения выражают тот факт, что некоторое свойство P присуще каждому натуральному числу. Аксиоматическое обоснования этого метода будет дано в §29 ниже. Сейчас изложим суть этого метода. Формальной основой метода математической индукции служит одна из аксиом, называемая аксиомой индукции (или математической индукции) и выражающая свойство естественного отношения порядка, имеющегося на множестве всех натуральных чисел. Эта аксиома такова. Если свойством P обладает число 1 и для всякого натурального числа из того, что оно обладает этим свойством, следует, что и непосредственно следующее за ним натуральное число также обладает им, то и всякое натуральное число обладает свойством P. Символически, на языке логики предикатов, эта аксиома записывается так:

$$[P(1) \wedge (\forall x)(P(x) \rightarrow P(x+1))] \rightarrow (\forall y)(P(y)) .$$

Эта аксиома даёт следующий метод доказательства утверждений, выражающих некоторые свойства всех натуральных чисел. Если нужно доказать утверждение $(Ay)(P(y))$, где $y \in N$ ("всякое натуральное число обладает свойством P"), достаточно установить истинность высказывания $P(1)$ ("число 1 обладает свойством P") и доказать, что $(\forall x)(P(x) \rightarrow P(x+1))$, т.е. если x обладает свойством P, то этим свойством обладает и число $x+1$, непосредственно следующее за x.

Таким образом, логическая схема доказательства методом математической индукции может быть представлена следующим образом:

(1)	$P(1)$	устанавливается проверкой
(2)	$(\forall x)(P(x) \rightarrow P(x+1))$	доказывается
(3)	$P(1) \wedge (\forall x)(P(x) \rightarrow P(x+1))$	из (1),(2) по правилу введения конъюнкции

(4) $[P(1) \wedge (\forall x)(P(x) \to P(x+1))] \to (\forall y)(P(y))$ аксиома индукции

(5) $(\forall y)(P(y))$ из (3),(4) по правилу MP

При этом, установление истинности утверждения $P(1)$ называется основанием или базой индукции, предположение об истинности утверждения $P(x)$ называется предположением индукции, последующее доказательство истинности утверждения $P(x+1)$ называется шагом индукции.

Методом математической индукции доказывается утверждение о том, что число двоичных наборов длины n (упорядоченных n-ок), составленных из нулей и единиц, равно 2^n (теорема 10.3), теорема о представлении булевых функций, теорема 9.4 о дедукции. Неоднократно применялась индукция по числу логических связок, входящих в формулу логики высказываний или предикатов (см теоремы 2.2, 18.3, 18.5).

Необходимые и достаточные условия. Отношение следования предикатов и соответствующее ему отношение включения соответствующих множеств истинности этих предикатов могут придать дополнительные штрихи к методике обучения понятиям необходимых и достаточных условий, усвоение которых вызывает значительные затруднения не только у школьников, но и у студентов.

Предположим, что некоторая математическая теорема имеет вид: $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$. Это означает, что предикат $P(x) \to Q(x)$ тождественно истинен, т.е. его множество истинности $(P \to Q)^+ = U$. Используя теоремы 15.2, 15.6, 15.9, находим:

$$U = (P \to Q)^+ = (\neg P \vee Q)^+ = (\neg P)^+ \cup Q^+ = \overline{P^+} \cup Q^+ .$$

Следовательно, $P^+ \subseteq Q^+$, и значит, предикат $Q(x)$ является следствием предиката $P(x)$.

Исходная теорема $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$ означает, что условие $P(x)$ является достаточным для условия $Q(x)$, а $Q(x)$ – необходимым для $P(x)$. Проведенное только что рассуждение показывает, что это будет тогда и только тогда, когда имеет место включение $P^+ \subseteq Q^+$ соответствующих множеств истинности.

Если теперь изобразить эти множества и отношение включения между ними кругами Эйлера, то используя обычные житейские представления о терминах "необходимо" и "достаточно", можно сказать:

1) Чтобы элемент x принадлежал множеству Q^+ (т.е. удовлетворял условию $Q(x)$) (вполне) достаточно, чтобы он принадлежал множеству P^+ (т.е. удовлетворял условию $P(x)$).

2) Чтобы элемент x принадлежал множеству P^+ необходимо, чтобы он принадлежал множеству Q^+ (ибо в противном случае, если он не принадлежит Q^+, то он и подавно не принадлежит множеству P^+).

Полезно научиться оперировать этими понятиями на наглядном языке эйлеровских диаграмм. Эта своего рода материализованная форма умственной деятельности будет способствовать формированию чисто умственных действий, связанных с понятиями необходимых и достаточных условий.

Логика предикатов и алгебра множеств. Логика предикатов имеет самую тесную связь с теорией множеств. Логика предикатов позволяет дать чёткое толкование и обоснование известным теоретико-множественным понятиям и концепциям, а также ввести ряд новых. Например, понятие равенства двух множеств (принцип равнообъёмности) на языке логики предикатов выражается так:

$$\boxed{M_1 = M_2 \quad \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \quad (\forall x)(x \in M_1 \ \leftrightarrow \ x \in M_2)} \ ,$$

а понятие включения множеств – следующим образом:

$$\boxed{M_1 \subseteq M_2 \quad \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \quad (\forall x)(x \in M_1 \ \leftrightarrow \ x \in M_2)} \ .$$

Тогда законы логики предикатов позволяют строго обосновать утверждение, приводимое в следующем примере.

Пример 20.24. $M_1 = M_2 \quad \Longleftrightarrow \quad M_1 \subseteq M_2 \ \wedge \ M_2 \subseteq M_1$. Действительно, доказательство представляет собой цепочку равносильностей:

$$M_1 = M_2 \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall x)(x \in M_1 \ \leftrightarrow \ x \in M_2) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\forall x)[(x \in M_1 \ \to \ x \in M_2) \ \wedge \ (x \in M_2 \ \to \ x \in M_1)] \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\forall x)(x \in M_1 \ \to \ x \in M_2) \ \wedge \ (\forall x)(x \in M_2 \ \to \ x \in M_1) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad M_1 \subseteq M_2 \ \wedge \ M_2 \subseteq M_1 \ .$$

Далее, тавтологии логики высказываний позволяют обосновывать свойства теоретико-множественных операций: дополнения, пересечения, объединения множеств. При этом, каждое множество M мыслится как множество истинности одноместного предиката "$x \in M$". Об этом мы говорили в §8 и приводили примеры доказательств соответствующих свойств с использованием этих тавтологий.

Логика предикатов позволяет ввести новые теоретико-множественные понятия. Покажем, в частности, как обобщаются теоретико-множественные операции объединения и пересечения множеств на случай бесконечного числа множеств. Пусть имеется некоторое семейство $(M_i)_{i\in I}$ подмножеств множества M. (Это означает, что каждому элементу $i \in I$ взаимно однозначно сопоставлено подмножество M_i множества M. Множество I называется множеством индексов семейства $(M_i)_{i\in I}$, а само семейство называется индексированным.) *Объединением данного семейства* называется множество, обозначаемое $\bigcup_{i\in I} M_i$, состоящее из всех таких элементов множества M, которые принадлежат, по меньшей мере, одному из подмножеств семейства:

$$\bigcup_{i\in I} M_i = \{x \in M : \quad (\exists i \in I)(x \in M_i)\}.$$

Пересечением данного семейства называется множество, обозначаемое $\bigcap_{i\in I} M_i$, состоящее из всех таких элементов множества M, которые принадлежат каждому из подмножеств семейства:

$$\bigcap_{i\in I} M_i = \{x \in M : \quad (\exists i \in I)(x \in M_i)\}.$$

Логика предикатов позволяет установить свойства этих теоретико-множественных операций: они в некотором смысле аналогичны соответствующим свойствам объединения и пересечения.

Пример 20.25. Проверим, например, один из законов де Моргана:

$$\overline{\bigcup_{i\in I} M_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{M_i}.$$

Используя закон де Моргана для кванторов (теорема 17.9, б), получаем:

$$\overline{\bigcup_{i\in I} M_i} = \{x : \neg(x \in \bigcup_{i\in I} M_i)\} = \{x : \neg(\exists i \in I)(x \in M_i)\} =$$

$$= \{x : (\forall i \in I)(\neg(x \in M_i))\} = \{x : (\forall i \in I)(\neg(x \in \overline{M_i}))\} = \bigcap_{i\in I} \overline{M_i}.$$

Аналогично можно установить второй закон де Моргана для этих операций, законы дистрибутивности одной операции относительно другой и ряд других свойств.

Большими возможностями располагает логика предикатов в теории бинарных отношений, где на языке предикатов выражаются фактически все понятия этой теории: проекции, срезы, функциональность, однозначность, взаимная однозначность, сюръективность, обращение и произведение бинарных отношений, их рефлексивность, симметричность, транзитивность, антисимметричность, асимметричность, связность и т.д.

§21. Формализованные исчисления предикатов

Задача формализованного исчисления предикатов (ФИП) та же, что и формализованного исчисления высказываний (ФИВ): дать аксиоматическую теорию совокупности всех общезначимых формул (тавтологий) логики предикатов, т.е. научиться выводить (доказывать) все такие формулы и только их, исходя из выбранной системы аксиом с использованием выбранных правил вывода. Это – исчисление предикатов гильбертовского типа. Сначала будет рассмотрено такое исчисление. Как и в случае алгебры высказываний, возможно формализованное исчисление предикатов генценовского типа – исчисление предикатов натурального вывода. Оно будет рассмотрено в заключительном пункте настоящего параграфа.

Первоначальные понятия (язык формализованного исчисления предикатов.) *Алфавит* исчисления предикатов состоит из предметных переменных $x_1, x_2, \ldots$, предметных констант (символы выделенных элементов) $c_1, c_2, \ldots$, предикатных букв $P_1', P_2', \ldots$, $P_k', \ldots$, а также знаков логических связок $\neg$ и $\wedge$, кванторов $\forall$ и $\exists$ и скобок (,). При этом, верхние индексы предикатных и функциональных букв указывают число аргументов соответственно предиката или функции, которые могут быть подставлены вместо этих букв.

Понятие *формулы* определяется в два этапа. Сначала определяются *термы*. Ими являются отдельно взятые предметные переменные и константы, а также выражения вида $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ где f^n – n-местный функциональный символ, $t_1, \ldots, t_n$ – термы. Наконец, определяются формулы:

а) если P_n – предикатная буква, $t_1, \ldots, t_n$ – термы, то $P_n(t_1, \ldots, t_n)$ – формула; при этом, все вхождения переменных в эту формулу называются *свободными*;

б) если F_1, F_2 – формулы, то формулами являются $\neg F_1$, $(F_1 \to F_2)$; причём, все вхождения переменных, свободные в F_1,

F_2, являются свободными и в формулах указанных видов; кроме того, можно считать, что в F_1 и F_2 нет предметных переменных, которые связаны в одной формуле и свободны в другой;

в) если $F(x)$ – формула, содержащая свободные вхождения переменной x, то $(\forall x)(F(x))$ и $(\exists x)(F(x))$ – формулы; при этом, вхождения переменной x в них называются *связанными*; вхождения же всех остальных предметных переменных в эти формулы остаются свободными (связанными), если они были свободными (связанными) в формуле $F(x)$; (формула $F(x)$ *называется областью действия квантора*);

г) никаких других формул, кроме тех, которые строятся по правилам пунктов а), б), в), нет.

Из этого определения ясно, что вхождения переменных в формулу обладают следующими свойствами: свободные и связанные переменные обозначены разными буквами (если это не так, то ясно, что, не нарушая смысла формулы, можно переобозначить в ней связанные переменные); если какой-либо квантор находится в области действия другого квантора, то переменные, связанные этими кванторами, обозначены разными буквами (если это не так, то ясно, что, не нарушая смысла формулы, можно переобозначить в ней соответствующие переменные). Нарушения этих свойств называются *коллизией переменных*.

Так определённые формулы называются *формулами первой ступени* по той причине, что в них разрешается навешивать кванторы только по предметным переменным и не разрешается – по функциональным и предикатным переменным. Возникающее исчисление предикатов называют *исчислением предикатов первой ступени* или *узким исчислением предикатов* (в отличие от расширенного исчисления предикатов), сокращённо, УИП.

Совокупность $G = \{c_1, c_2, ...;\ f_1, f_2, ...;\ P_1, P_2, ...\}$ называется *сигнатурой* рассматриваемого исчисления предикатов. Если в сигнатуре отсутствуют функциональные символы, (и, значит, функциональные термы), то возникающее исчисление предикатов называется *чистым исчислением предикатов*. Оно строится для произвольной предметной области и не зависит от взаимосвязи между предметами в этой области. Это – чисто логическая теория. Именно о таком чистом исчислении предикатов и пойдёт сейчас речь. Если же такие связи имеются и они описываются функциями на этой предметной области, то логика проникает в эту область и в эти связи и возникает логическая теория соответствующей математической дисциплины, или, как говорят, некая *формальная математическая* *теория.* О таких теориях мы поговорим позже, в §30.

Система аксиом исчисления предикатов состоит из двух частей. Первая – это аксиомы формализованного исчисления высказываний:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{A1}) \quad F \to (G \to F)\,, \\
&(\mathrm{A2}) \quad (F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))\,, \\
&(\mathrm{A3}) \quad (\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)\,,
\end{aligned}
$$

где под F, G, H понимаются уже любые формулы исчисления предикатов. Вторая группа аксиом (схем аксиом) – это собственно предикатные аксиомы (схемы аксиом), т.е. аксиомы с кванторами. Выберем в качестве них следующие (называемые ***аксиомами Бернайса***):

$$(\mathrm{PA1}) \quad (\forall x)(F(x)) \to F(y)\,,$$

$$(\mathrm{PA2}) \quad F(y) \to (\exists x)(F(x))\,,$$

где $F(x)$ – любая формула, содержащая свободные вхождения x, причём ни одно из них не находится в области действия квантора по y (если таковой имеется); формула $F(y)$ получена из $F(x)$ заменой всех свободных вхождений x на y.

Существенность последнего требования можно пояснить следующим примером. Рассмотрим в качестве формулы $F(x)$ формулу $(\exists y)(P(x,y))$, где это требование нарушено: свободное вхождение x находится в области действия квантора $\exists y$. Подставив эту формулу в аксиому (PA1), получим формулу $(\forall x)(\exists y)(P(x,y)) \to (\exists y)(P(y,y))$, которая не будет общезначимой. В самом деле, предикат $A(x,y)$: $x < y$, на множестве вещественных чисел R, превращает её в ложное высказывание: $(\forall x)(\exists y)(x < y) \to (\exists y)(y < y)$.

Правила вывода. К правилу вывода модус поненс (MP) из исчисления высказываний добавляются ещё два правила вывода:

$$(\forall - \text{правило, или правило обобщения}) \qquad \frac{F \to G(x)}{F \to (\forall x)(G(x))}\,,$$

$$(\exists - \text{правило, или правило обобщения}) \qquad \frac{G(x) \to F}{(\exists x)(G(x)) \to F}\,,$$

при условии, что $G(x)$ содержит свободное вхождение x, а F не содержит.

Последнее требование также весьма существенно. Его нарушение может привести по этим правилам к ложным выводам из истинных посылок. Так, например, взяв предикаты $A(x)$: $6 \mid x$ и

$B(x)$: $3 \mid x$ над N, получим тождественно истинный предикат $A(x) \to B(x)$: $6 \mid x \to 3 \mid x$. Но, применив к нему правило обобщения, получим уже опровержимый предикат: $6 \mid x \to (\forall x)(3|x)$ (он превращается в ложное высказывание при тех x, которые делятся на 6). Если к предикату $6 \mid x \to 3 \mid x$ применить, в нарушение условия, $\exists$-правило, то получим также опровержимый предикат $(\exists x)(6 \mid x \to 3 \mid x)$. Применив же к последнему предикату уже на корректных основаниях $\forall$-правило, придём к ложному высказыванию $(\exists x)(6 \mid x) \to (\forall x)(3 \mid x)$.

Теория формального вывода. Определения формального доказательства (формального вывода из аксиом и из гипотез), доказуемой формулы (теоремы) в формализованном исчислении предикатов даются так же, как и в формализованном исчислении высказываний (см. определение 15.1) с точностью до добавления двух новых аксиомных схем (PA1) и (PA2) и двух новых правил вывода $\forall$-правила и $\exists$-правила.

Уточним всё же понятие формальной выводимости формулы из гипотез в исчислении предикатов. Формула G называется *выводимой из гипотез* $F_1, ..., F_m$ с фиксированными вхождениями (в гипотезы) свободных переменных, если существует такая конечная последовательность формул $B_1, B_2, ..., B_k, ..., B_s \equiv G$, каждая формула, которая является либо аксиомой, либо гипотезой, либо получена из предыдущих формул последовательности по одному из правил вывода. (Сама эта последовательность называется *выводом* G из гипотез $F_1, ..., F_m$). При этом, если B_k есть первая гипотеза, встречающаяся в выводе, то дальше в этом выводе не могут быть использованы $\forall$- и $\exists$- правила вывода по любой переменной x, которая входит свободно хотя бы в одну из гипотез. Обозначение используется как и в исчислении высказывании: $F_1, ..., F_m \vdash G$. Если гипотезы отсутствуют, то говорят, что G *выводима из аксиом*, или просто *выводима* и называют G *теоремой* формализованного исчисления предикатов и пишут $\vdash G$.

Отметим сначала, что так как все формулы, выводимые в исчислении высказываний, являются также выводимыми в исчислении предикатов, то, совершая подстановки в выводимые формулы исчисления высказываний, мы будем получать выводимые формулы исчисления предикатов. (Тем не менее, всякую выводимую формулу исчисления предикатов таким способом получить нельзя). Следовательно, все производные правила вывода, установленные для исчисления высказываний, остаются справедливыми и для исчисления предикатов, и мы будем пользоваться этим.

Дальнейшее изучение формализованного исчисления предикатов происходит по Задачнику, §11. Это исчисление строится там в форме систематизированной подборки задач на доказательство теорем ФИП. Подборка начинается с построения выводов из аксиом. Затем рассматривается построение выводов из гипотез. Наконец – теорема о дедукции и её применение к доказательству теорем ФИП. Теорема о дедукции в ФИП формулируется так же, как и в ФИВ: если $F_1, ..., F_{m-1}, F_m \vdash G$, то $F_1, ..., F_{m-1} \vdash F_m \to G$ (в частности, если $F \vdash G$, то $\vdash F \to G$). Не отличается и идея доказательства, с той лишь разницей, что появятся случаи, связанные с получением формулы в последовательности-выводе не только по правилу MP, но и по $\forall$-правилу и по $\exists$-правилу. Исчисление предикатов будет развито настолько, что все рассмотренные в §21 тавтологии логики предикатов окажутся теоремами построенного формализованного исчисления предикатов. Что касается свойств этого исчисления, то они будут рассмотрены в §29 ниже.

Исчисление предикатов натурального вывода. К имеющимся в исчисление высказываний натурального вывода правилам вывода (см. §12) добавляются правила вывода, связанные с кванторами – правила введения и удаления кванторов. Слово "формула" будет теперь означать "формула логики предикатов".

Правила введения кванторов	Правила удаления кванторов
11) *Введение квантора общности* (В$\forall$): $$\frac{\Gamma \vdash F(x)}{\Gamma \vdash (\forall x)(F(x))},$$ при условии, что x не входит свободно ни в одну формулу из Γ.	**12)** *Удаление квантора общности* (У$\forall$): $$\frac{(\forall x)(F(x))}{F(y)},$$ при условии, что x не находится в области действия квантора по y.
13) *Введение квантора существования* (В$\exists$): $$\frac{F(y)}{(\exists x)(F(x))},$$ при условии, что x не находится в области действия квантора по y.	**14)** *Удаление квантора существования* (У$\exists$): $$\frac{\Gamma,\ F(x) \vdash G}{\Gamma,\ (\exists x)(F(x)) \vdash G}.$$ при условии, что x не входит свободно в G и ни в одну формулу из Γ.

Правила (У$\forall$) и (В$\exists$) – безусловные, (В$\forall$) и (У$\exists$) – условные. Если вспомнить, что кванторы общности и существования можно понимать как обобщения конъюнкции и дизъюнкции соответственно, то станет ясно, что правила введения и удаления кванторов общности и существования – это, по существу, распространённые на "бесконечный случай" правила введения и удаления конъюнкции и дизъюнкции.

Поясним, какие элементарные шаги дедуктивного рассуждения производятся по сформулированным кванторным правилам.

Правило (В$\forall$): если для фиксированного, но *произвольного* элемента заданного множества мы установили, что он (при некотором условии Г) обладает свойством F, то мы можем заключить, что этим свойством (при условии Г) обладают *все* элементы данного множества.

Правило (В$\exists$): из истинности утверждения "y обладает свойством F" вытекает истинность утверждения "В данном множестве существует элемент, обладающий свойством F". Заметим, что в частности, правило (В$\exists$) может иметь и следующий вид:

$$\boxed{F(x) \vdash (\exists x)(F(x))} \; .$$

Правило (У$\forall$): из утверждения "Все элементы данного множества обладают свойством F" следует, что для любого элемента y данного множества справедливо утверждение "y обладает свойством F". Заметим, что, в частности, правило (У$\forall$) может иметь и следующий вид: $\boxed{(\forall x)(F(x)) \vdash F(x)}$.

Правило (У$\exists$): если для фиксированного, но *произвольного* элемента y заданного множества из того, что он обладает свойством F, следует (при условии Г) утверждение G, то это утверждение будет следовать (при условии Г) также из утверждения о *существовании* в данном множестве элемента, обладающего свойством F.

Начало исчисления предикатов натурального вывода. Приведём ряд примеров выводов, в которых используются кванторные правила.

Пример 21.1. $(\forall x)(\forall y)(F(x,y)) \vdash (\forall y)(\forall x)(F(x,y))$.

(1)	$(\forall x)(\forall y)(F(x,y)) \vdash (\forall y)(F(u,y))$	(У$\forall$)
(2)	$(\forall y)(F(u,y)) \vdash F(u,v)$	(У$\forall$)
(3)	$(\forall x)(\forall y)(F(x,y)) \vdash (F(u,v))$	(ТР): (1),(2)
(4)	$(\forall x)(\forall y)(F(x,y)) \vdash (\forall x)(F(x,v))$	(В$\forall$)
(5)	$(\forall x)(\forall y)(F(x,y)) \vdash (\forall y)(\forall x)(F(x,y))$.	(В$\forall$)

Пример 21.2. $(\exists x)(\exists y)(F(x,y)) \vdash (\exists y)(\exists x)(F(x,y))$.

(1)	$F(x,y) \vdash (\exists x)(F(x,y))$	(В$\exists$)
(2)	$(\exists x)(F(x,y)) \vdash (\exists y)(\exists x)(F(x,y))$	(В$\exists$)
(3)	$F(x,y) \vdash (\exists y)(\exists x)(F(x,y))$	(ТР): (1),(2)
(4)	$(\exists y)(F(x,y)) \vdash (\exists y)(\exists x)(F(x,y))$	(У$\exists$)
(5)	$(\exists x)(\exists y)(F(x,y)) \vdash (\exists y)(\exists x)(F(x,y))$.	(У$\exists$)

Пример 21.3. $(\exists y)(\forall x)(F(x,y)) \vdash (\forall x)(\exists y)(F(x,y))$.

(1)	$F(x,y) \vdash (\exists y)(F(x,y))$	(В$\exists$)
(2)	$F(x,y) \vdash (\forall x)(\exists y)(F(x,y))$	(В$\forall$): (1)
(3)	$(\forall x)(F(x,y)) \vdash F(x,y)$	(У$\forall x$)
(4)	$(\exists y)(\forall x)(F(x,y)) \vdash F(x,y)$	(У$\exists$)
(5)	$(\exists y)(\forall x)(F(x,y)) \vdash (\forall x)(\exists y)(F(x,y))$.	(ТР): (4),(2)

Пример 21.4. Кванторные аналоги законов де Моргана:

а) $(\forall x)(\neg F(x)) \vdash \neg(\exists x)(F(x))$;

б) $\neg(\exists x)(F(x)) \vdash (\forall x)(\neg F(x))$;

в) $(\exists x)(\neg F(x)) \vdash \neg(\forall x)(F(x))$;

г) $\neg(\forall x)(F(x)) \vdash (\exists x)(\neg F(x))$.

Решение. **а)** В процессе построения доказательства будем использовать также и доказанные ранее, в исчислении высказываний, правила:

(1)	$(\forall x)(\neg F(x)) \vdash \neg F(y)$	(У$\forall$)
(2)	$\neg\neg F(y) \vdash \neg(\forall x)(\neg F(x))$	Пример 12.9: (1)
(3)	$F(y) \vdash \neg\neg F(y)$	Пример 12.7
(4)	$F(y) \vdash \neg(\forall x)(\neg F(x))$	(ТР): (3),(2)
(5)	$(\exists y)(F(y)) \vdash \neg(\forall x)(\neg F(x))$	(У$\exists$): (4)
(6)	$\neg\neg(\forall x)(\neg F(x)) \vdash \neg(\exists y)(F(y))$	Пример 12.9: (5)
(7)	$(\forall x)(\neg F(x)) \vdash \neg\neg(\forall x)(\neg F(x))$	Пример 12.7
(8)	$(\forall x)(\neg F(x)) \vdash \neg(\exists y)(\neg F(y))$	(ТР): (7),(6)

Обратите внимание на использование примера 12.9 на шагах (2), (6) и примера 12.7 на шагах (3), (7). Эти примеры относятся к исчислению высказываний натурального вывода и разобраны в параграфе 12 выше.

Пример 21.5. Следующие выводимости дают правила внесения и вынесения кванторов общности и существования через конъюнкцию и дизъюнкцию при условии, что один из членов конъюнкции или дизъюнкции не содержит переменную, находящуюся под знаком этого квантора (формула G):

а) $(\forall x)(F(x) \wedge G) \vdash (\forall x)(F(x)) \wedge G$;

б) $(\forall x)(F(x)) \wedge G \vdash (\forall x)(F(x) \wedge G)$;

в) $(\forall x)(F(x) \vee G) \vdash (\forall x)(F(x)) \vee G$;

г) $(\forall x)(F(x)) \vee G \vdash (\forall x)(F(x) \vee G)$;

д) $(\exists x)(F(x) \wedge G) \vdash (\exists x)(F(x)) \wedge G$;

е) $(\exists x)(F(x)) \wedge G \vdash (\exists x)(F(x) \wedge G)$;

ж) $(\exists x)(F(x) \vee G) \vdash (\exists x)(F(x)) \vee G$;

з) $(\exists x)(F(x)) \vee G \vdash (\exists x)(F(x) \vee G)$.

Р е ш е н и е . Докажем некоторые из этих выводимостей.

а)

(1) $(\forall x)(F(x) \wedge G) \vdash F(x) \wedge G$ (У$\forall$)
(2) $F(x) \wedge G \vdash F(x)$ (УК)
(3) $F(x) \wedge G \vdash (\forall x)(F(x))$ (В$\forall$): (2)
(4) $(\forall x)(F(x) \wedge G) \vdash (\forall x)(F(x))$ (ТР): (1),(3)
(5) $F(x) \wedge G \vdash G$ (УК)
(6) $(\forall x)(F(x) \wedge G) \vdash G$ (ТР): (1),(5)
(7) $(\forall x)(F(x)),\ G \vdash (\forall x)(F(x)) \wedge G$ (ВК)
(8) $(\forall x)(F(x) \wedge G) \vdash (\forall x)(F(x)) \wedge G$ (ТР): (4),(6),(7)

д)

(1) $F(x) \wedge G \vdash F(x)$ (УК)
(2) $F(x) \vdash (\exists x)(F(x))$ (В$\exists$)
(3) $F(x) \wedge G \vdash (\exists x)(F(x))$ (ТР): (1),(2)
(4) $F(x) \wedge G \vdash G$ (УК)
(5) $(\exists x)(F(x)), G \vdash (\exists x)(F(x)) \wedge G$ (ВК)
(6) $F(x) \wedge G \vdash (\exists x)(F(x)) \wedge G$ (ТР): (3),(4); (5)
(7) $(\exists x)(F(x) \wedge G) \vdash (\exists x)(F(x)) \wedge G$ (У$\exists$): (6)

е)

(1) $F(x),\ G \vdash F(x) \wedge G$ (ВК)
(2) $(\exists x)(F(x)),\ G \vdash F(x) \wedge G$ (У$\exists$): (1)
(3) $(\exists x)(F(x)) \wedge G \vdash (\exists x)(F(x))$ (УК)
(4) $(\exists x)(F(x)) \wedge G \vdash G$ (УК)
(5) $(\exists x)(F(x)) \wedge G \vdash F(x) \wedge G$ (ТР): (3),(4); (2)
(6) $F(x) \wedge G \vdash (\exists x)(F(x) \wedge G)$ (В$\exists$)
(7) $(\exists x)(F(x)) \wedge G \vdash (\exists x)(F(x) \wedge G)$ (ТР): (5);(6)

Пример 21.6. Следующие выводимости дают правила внесения и вынесения кванторов общности и существования через конъюнкцию, дизъюнкцию и импликацию при условии, что оба члена конъюнкции, дизъюнкции или импликации содержат переменную, находящуюся под знаком этого квантора:

а) $(\forall x)(F(x) \wedge G(x)) \vdash (\forall x)(F(x)) \wedge (\forall x)(G(x))$;

б) $(\forall x)(F(x)) \wedge (\forall x)(G(x)) \vdash (\forall x)(F(x) \wedge G(x))$;

в) $(\exists x)(F(x) \vee G(x)) \vdash (\exists x)(F(x)) \vee (\exists x)(G(x))$;

г) $(\exists x)(F(x)) \vee (\exists x)(G(x)) \vdash (\exists x)(F(x) \vee G(x))$;

д) $(\forall x)(F(x)) \vee (\forall x)(G(x)) \vdash (\forall x)(F(x) \vee G(x))$;

е) $(\exists x)(F(x) \wedge G(x)) \vdash (\exists x)(F(x)) \wedge (\exists x)(G(x))$;

ж) $(\forall x)(F(x) \to G(x)) \vdash (\forall x)(F(x)) \to (\forall x)(G(x))$;

з) $(\exists x)(F(x) \to G(x)) \vdash (\exists x)(F(x)) \to (\exists x)(G(x))$.

Докажите их самостоятельно.

Полнота натурального исчисления предикатов. Как и в случае пропозиционального исчисления естественного вывода, можно доказать, что понятие доказуемости для предикатного исчисления естественного вывода совпадает по объёму с понятием тождественной истинности (общезначимости): формула логики предикатов доказуема в этом исчислении тогда и только тогда, когда она общезначима. Это утверждение называется теоремой о полноте исчисления предикатов. Впервые она была доказана К. Гёделем в 1930г.

Подобно пропозициональному исчислению, отсюда выводятся свойство непротиворечивости предикатного исчисления и теорема адекватности. Последняя утверждает, что формула G выводима в исчислении предикатов из формул $F_1, F_2, ..., F_m$ тогда и только тогда, когда она в содержательной логике предикатов является их логическим следствием. Наконец, связь между понятиями дедуктивной эквивалентности и равносильности для предикатного исчисления такова же, как и для пропозиционального: две формулы логики предикатов дедуктивно эквивалентны в предикатном исчислении естественного вывода тогда и только тогда, когда они равносильны в содержательной логике предикатов.

§22. От математической логики к логическому программированию

Здесь будет кратко рассказано о языке логического программирования ПРОЛОГ, возникновение и развитие которого непосредственно связано с открытием метода резолюций для доказательства теорем в логике, рассмотренного в параграфе 18. Его название происходит от слов PROgramming in LOGic, т.е. ПРОграммирование в ЛОГике, или ПРОграммирование при помощи ЛОГики. В его основу положен математический аппарат логики предикатов 1-го порядка и теории логического вывода.

Возникновение языка ПРОЛОГ и его развитие. После того, как Робинсон в 1965 году открыл правило вывода, названное им правилом резолюции, значительно активизировались работы по созданию автоматизированного метода доказательства теорем через опровержение. Первоначально попытки создания алгоритма решения задач, базирующегося на правиле резолюции, оказывались успешными только для очень небольших задач. Существенно усовершенствовали такие алгоритмы Лавленд, Ковальски и Куэнер, разработав метод устранения моделей (1968) и метод селектирующей функции (1971). В 1974 году Ковальски первым предложил метод, в соответствии с которым логический язык (именно, язык логики предикатов) можно было бы использовать как язык программирования. Кольмерор и Руссель воспользовались результатами этих работ и к 1975 году создали язык программирования, основывающийся на логике предикатов и правиле резолюции, названный ими ПРОЛОГ.

В течение 70-х годов ПРОЛОГ прошёл путь развития от интересующего лишь узких специалистов экспериментального языка, созданного европейскими учеными, до одного из ведущих языков программирования, широко используемого во всём мире. В 1977 году Уоррен и Перейра из Эдинбургского университета (Великобритания) создали интерпретатор/компилятор языка ПРОЛОГ для компьютера DEC-10, а в 1980 году в Империэл Колледже разработан интерпретатор языка микро-ПРОЛОГ для персональных компьютеров.

В 1981 году в Японии было объявлено о начале работ по созданию компьютеров пятого поколения. Они должны отличаться от компьютеров предыдущих поколений тем, что в них встроены функции программиста. По словесному заданию задачи, сформулированному на ограниченном профессиональном языке, эти компьютеры способны сами построить необходимую рабочую программу (синтезировать её из отдельных модулей, хранящихся в памяти компьютера) и выполнить её. В качестве основной методологии разработки программных средств для компьютеров пятого поколения было избрано логическое программирование. В состав такого компьютера должна входить так называемая база знаний, в которой хранится информация о закономерностях, присущих данной проблемной области, и методах решения характерных для неё задач. Кроме того, в его состав должен входить специальный блок – решатель, который осуществляет процедуры логического вывода. С помощью решателя на основании сведений из базы знаний автоматически синтезируются нужные для пользователя программы. Полезный эффект от таких систем будет заключаться в том, что в распоряжение широких слоев общества будут предоставлены мощные вычислительные ресурсы и что возрастёт производительность труда в ряде отраслей промышленности, в которых сейчас она традиционно низка.

Общая характеристика языка ПРОЛОГ. Язык ПРОЛОГ существенно отличается от традиционных алгоритмических языков программирования таких как Бейсик, Паскаль и т.п. При использовании последних для решения задач на компьютере пользователь сначала должен разработать алгоритм решения задачи, затем записать (закодировать) его на алгоритмическом языке программирования и, наконец, "прогнать" программу на компьютере и получить результат.

В ПРОЛОГе дело обстоит иначе. Пользователь лишь формулирует задачу, осуществляет её постановку, т.е. сообщает компьютеру необходимые факты и правила, по которым эти факты соотносятся друг с другом. Затем формулируется вопрос, на который компьютер отвечает самостоятельно, исходя из той "базы знаний", т.е. набора фактов и правил, которые пользователь сообщил компьютеру. Запись фактов происходит на языке логики предикатов. Правило построения выводов из имеющихся фактов – правило резолюции. Таким образом, ПРОЛОГ – это язык описания фактов, правил вывода заключений и постановки вопросов к базам данных, записываемых на языке математической логики. Фактически вопрос представляет собой теорему логики предикатов, а работа программы состоит в том, чтобы доказать эту теорему на основе фактов и правил из базы данных.

Компьютерная система языка ПРОЛОГ представляет собой интерпретатор, состоящий из следующих независимых подпрограмм: сканер, унификатор, управление, печать.

Подпрограмма *сканер* осуществляет синтаксический контроль исходного текста программы и его перевод во внутреннюю форму хранения программы – в дерево. Дерево хранится в памяти машины в виде упорядоченной совокупности массивов.

Подпрограмма *унификатор* выполняет в процессе поиска доказательства по методу резолюций действия для унификации двух термов, т.е. проводит поиск такой совокупности значений переменных, входящих в данные термы, при подстановке которых в эти термы они станут равными, а соответствующие формулы резольвируемыми.

Подпрограмма *управления* осуществляет процесс поиска доказательства. Алгоритм её действия основан на правиле резолюции. Чтобы этот процесс произошёл, программист должен чётко описать задачу при помощи так называемых фраз (или клауз, или формул, или дизъюнктов) Хорна, выраженных на языке ПРОЛОГ. В каждой фразе формулируется некоторое отношение между термами. Терм – это обозначение, представляющее некоторую сущность из исследуемой области. Для того, чтобы привести в действие данный алгоритм решения задачи, программист должен написать вопрос, согласно которому будет необходимо выяснить, является ли конкретная формула следствием заданного множества формул, представленных в программе.

Наконец, подпрограмма *печать* выводит на экран все значения переменных, указанных в вопросе и удовлетворяющих совокупности фактов и правил.

Краткое описание языка ПРОЛОГ и примеры. Язык ПРОЛОГ начинается со следующих основных синтаксических конструкций. *Атом* – последовательность букв, цифр и знаков минус, начинающаяся с буквы или знака минус, длиной не более 256 символов. *Переменная* – либо буква, либо атом, заканчивающийся символом апострофа, либо символом подчёркивания. *Целое* – значение целого находится в пределах от 0 до 32767. *Терм* – выражение вида $F(x, y, ..., z)$, где F - атом, называемый именем терма, $x, y, ..., z$ – аргументы, в качестве которых могут выступать любые синтаксические конструкции входного языка. *Список* – упорядоченная совокупность объектов (элементов списка), в качестве которых могут выступать любые синтаксические конструкции языка, включая сами списки.

Перечисленные грамматические конструкции могут образовывать *предложения* (или фразы, клаузы, формулы, дизъюнкты), на вид которых наложено следующее ограничение. Все они должны быть *дизъюнктами Хорна*. Это – такие совершенные дизъюнктивные одночлены, которые имеют не более одного вхождения положительной переменной (т.е. переменной без знака отрицания). Их общий вид: $B \lor \neg A_1 \lor \neg A_2 \lor \ldots \lor \neg A_n$. Ясно, что этот вид равносилен следующему: $\neg(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_n) \lor B$, т.е. $(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_n) \to B$.

Выделяют следующие три типа таких предложений: факт, правило и вопрос.

Факт (или допущение без условий) имеет вид: B. Факт означает, что B истинно, или что цель B определена. Факты записываются в форме предикатов от одной или нескольких переменных. Например, высказывания "Водород - элемент 1-ой группы", "Хлор - элемент 7-ой группы" записываются на ПРОЛОГе в следующей форме:

ЭЛЕМЕНТ (H,1);
ЭЛЕМЕНТ (Cl,7).

Правило (или условное допущение) имеет вид: $B \lor \neg A_1 \lor \ldots \lor \neg A_n$, или в эквивалентной форме $B \leftarrow (A_1 \land \ldots \land A_n)$. При этом, B называется заключением, A_1 – условием 1 и т.д., A_n – условием n. Читается: заключение B будет истинным, если условие A_1 и ... условие A_n будут истинными. Правило – это формальная запись вывода умозаключения. Правило определяет зависимость одних объектов или действий от других.

Например, правило "Элемент x вступает в реакцию с элементом y, если x – элемент 7 группы" на ПРОЛОГе запишется так:

РЕАКЦИЯ(x,y) $\leftarrow$ ЭЛЕМЕНТ$(x,1)$, ЭЛЕМЕНТ$(y,7)$.

Совокупность фактов и правил образуют *базу данных*. К базе данных можно задавать вопросы, обеспечивая тем самым запуск программы на исполнение.

Вопрос имеет вид: $\neg A_1 \lor \ldots \lor \neg A_n$ или $\neg(A_1 \land \ldots \land A_n)$.

Работа программы направлена на поиск такого факта B в базе данных, которое выводится из условий $A_1, \ldots, A_n$. Таким образом, вопрос представляет собой теорему, а работа программы состоит в том, чтобы доказать эту теорему на основе фактов и правил из базы данных.

Пример 22.1. В качестве примера рассмотрим задачу из курса химии 7 класса: какие химические элементы могут вступать в реакцию друг с другом.

Прежде всего создадим "базу знаний" для данной задачи. (Обратим внимание на то, что в конце каждого терма необходимо ставить знак ";", а в правилах вместо союза "и" ставить запятую.) База знаний данной задачи имеет вид:

ЭЛЕМЕНТ(H,1) ;
ЭЛЕМЕНТ(Cl,7) ;
ЭЛЕМЕНТ(Na,1) ;
ЭЛЕМЕНТ(I,7) ;
ЭЛЕМЕНТ(C,4) ;
РЕАКЦИЯ(x, y) ← ЭЛЕМЕНТ(x,1), ЭЛЕМЕНТ(y,7);

Вопросы к базе знаний в ПРОЛОГе выражаются в форме предикатов, перед которыми ставится знак "?" При этом искомые значения обозначаются переменными.

? РЕАКЦИЯ(x, y) ;

Ответ на этот вопрос компьютер ищет, руководствуясь правилом: "Элемент x вступает в реакцию с элементом y, если x есть элемент 1-ой группы и y есть элемент 7 группы." В базе знаний отыскиваются факты, удовлетворяющие этим условиям. Ответ будет следующий: x = H, y = Cl, x = Na, y = I.

Задачу можно усложнить, добавив в базу знаний в качестве фактов все элементы таблицы Менделеева, а в качестве правил – все возможные реакции взаимодействия между ними.

Пример 22.2. Рассмотрим ещё один пример ПРОЛОГ-программы. Составим программу классификации животных. Это – одна из ведущих тем в курсе биологии 7 класса. Прежде всего, необходимо установить существенные определяющие признаки для такой системы классификации животных. Введём предикат фиксирующий эти признаки животного:

ПРИЗНАК(<животное>, <строение>, <дыхание>, <кровообращение>, <размножение>).

Введём в базу знаний следующие факты:

ПРИЗНАК (волк, хордовое, лёгочное, теплокровное, живородящее);

ПРИЗНАК (крокодил, хордовое, лёгочное, холоднокровное, яйцекладущее);

ПРИЗНАК (окунь, хордовое, жаберное, холоднокровное, икрокладущее);

ПРИЗНАК (голубь, хордовое, лёгочное, теплокровное, яйцекладущее);

Теперь введём в базу знаний следующие правила:

МЛЕКОПИТАЮЩЕЕ(x) $\leftarrow$ ПРИЗНАК (x, хордовое, лёгочное, теплокровное, живородящее);

ПТИЦА(x) $\leftarrow$ ПРИЗНАК (x, хордовое, лёгочное, теплокровное, яйцекладущее);

ПРЕСМЫКАЮЩЕЕСЯ(x) $\leftarrow$ ПРИЗНАК(x, хордовое, легочное, холоднокровное, яйцекладущее);

РЫБА(x) $\leftarrow$ ПРИЗНАК(x, хордовое, жаберное, холоднокровное, икрокладущее);

Теперь можем задавать вопросы. На вопрос ? РЫБА(x); получим ответ x=окунь, на вопрос ? МЛЕКОПИТАЮЩЕЕ(x); получим ответ x=волк и т.д.

Имеющуюся базу знаний можно расширять, вводя в неё новые факты и новые правила. Например предикат поведения:

ПОВЕДЕНИЕ(<животное>, <питание>, <среда обитания>);

Соответственно новые правила: хищное млекопитающее, водоплавающее млекопитающее и т.д.

ХИЩМЛЕКОПИТАЮЩЕЕ(x) $\leftarrow$ МЛЕКОПИТАЮЩЕЕ(x), ПОВЕДЕНИЕ (x, плотоядное, –);

ВОДМЛЕКОПИТАЮЩЕЕ(x) $\leftarrow$ МЛЕКОПИТАЮЩЕЕ(x), ПОВЕДЕНИЕ(x, – , вода);

(В случае, если какой-либо признак не имеет значения, в правилах и вопросах ставится знак "–").

Таким образом, используя минимальные средства логического программирования и создавая простейшие информационно-логические системы, можно строить интересные и полезные обучающие компьютерные системы по различным предметам. При этом, обучающие возможности таких систем реализуются не только (а, может и не столько) в процессе задания вопросов и получения ответов, сколько в процессе построения самой "базы знаний". Примеры таких систем по некоторым школьным предметам (географии, истории, иностранному языку) описаны в статье[2].

Сферы применения языка ПРОЛОГ. Во-первых, на ПРОЛОГе прекрасно реализуется модель реляционной базы данных, представляющая собой хорошо разработанный формализм.

---

[2] *Григорьев С., Морозов М.* Давайте попробуем ПРОЛОГ // "Информатика и образование", 1987, № 4.

Во-вторых, исследователи, специализирующиеся в области программной инженерии, показали, что логическую спецификацию системы можно непосредственно преобразовать в логическую программу на языке ПРОЛОГ.

В-третьих, Кольмеррор, создавший язык ПРОЛОГ, первоначально предназначал его для обработки естественного языка. Он разработал на ПРОЛОГе систему грамматического разбора естественного языка нисходящим методом. Этот формализм был доработан учёными, которые продемонстрировали его успешное применение к системам, которые обрабатывают запросы, сформулированные на естественном языке.

В-четвёртых, все основные концепции, используемые в формализмах представления знаний для задач искусственного интеллекта, включая семантические сети, фреймы, правила продукций и объектно-ориентированное программирование, можно выразить при помощи логики и реализовать средствами логического программирования.

В-пятых, при представлении знаний одной из главных задач является выбор такой формы представления, которая может быть использована в экспертных системах. При помощи ПРОЛОГа были построены экспертные системы для ряда сфер, включая решение уравнений, медицину, законодательство, юриспруденцию, архитектуру, автоматизацию заводского производства, проектирование электронных схем, синтез микропрограмм, анализ финансового положения и помощь в принятии решений. Простейшие примеры экспертных систем были рассмотрены в предыдущем пункте. В следующей главе мы остановимся на общих идеях, связанных с логическими проблемами искусственного интеллекта.

Язык ПРОЛОГ в системах искусственного интеллекта. При помощи ПРОЛОГа построены экспертные системы для многочисленных областей науки и практики: решение уравнений, медицина, законодательство, юриспруденция, архитектура, автоматизация заводского производства, проектирование электронных схем, синтез микропрограмм, анализ финансового положения, помощь в принятии решений. В ПРОЛОГе применяется стратегия решения задач с обратным ходом решения: он начинает работу с цели и продвигается назад до тех пор, пока не встретит факты.

Глава IV.

НЕФОРМАЛЬНЫЕ АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

Мы подошли к тому разделу курса математической логики, который должен убедительно продемонстрировать всю мощь воздействия методов этой науки на прочие математические науки, показать особую, цементирующую, роль математической логики в системе математических наук. Этот раздел должен стать своего рода апофеозом при изучении курса математической логики. Здесь необходимо увидеть отчётливую связь изученных понятий и методов со школьной математикой, с педагогической деятельностью учителя математики. Должна быть осознана всеобъемлющая, универсальная роль математической логики в вопросах обоснования математики вообще и школьного курса математики в особенности.

Можно сказать, что математическая наука достигает совершенства лишь тогда, когда ей удаётся пользоваться аксиоматическим методом, т.е. когда наука принимает характер аксиоматической теории. Более того, развитие наук в двадцатом столетии показало, что математика выделяется в системе наук тем, что она, по существу, единственная, использующая аксиоматический метод чрезвычайно широко, и что этот метод в значительной мере обусловливает поразительную эффективность математики в процессе познания окружающего мира и преобразующего воздействия на него.

Ещё более методологическая роль аксиоматического метода и оснований математики проявилась в процессе применения математических дисциплин, лежащих в основаниях математики, к компьютерам, информатике, системам искусственного интеллекта. Именно основаниям математики придавал особую роль в процессе подготовки будущих специалистов в области информатики один из зачинателей внедрения информатики и информационных технологий в Советском Союзе академик А.П.Ершов. "Этот курс должен быть методологическим, раскрывать сущность математического метода,

– призывал он. – Такой курс представляется мне очень важным. Сейчас, вообще говоря, сущности математического метода не учат. Профессиональные математики до этого не доходят, а прикладные специалисты получают огромный багаж сведений по математике, зачастую не зная, как им пользоваться. Нам нужно довести систему законов обработки информации до той же степени стройности и заразительности, какой сейчас обладает курс математического анализа, читаемый в лучших университетах."[1] Раздел курса математической логики, посвящённый аксиоматическому методу, аксиоматическим теориям и основаниям математики, призван сыграть именно такую – методологическую – роль как в подготовке будущего учителя математики, так и в подготовке будущего учителя информатики или другого специалиста в области информатики.

В настоящей главе рассматривается аксиоматический или дедуктивный метод построения математических теорий. Это рассмотрение проводится на неформальном (содержательном) уровне. В §23 приводятся основные сведения об аксиоматическом методе и аксиоматических теориях, рассматриваются примеры таких теорий, возникающих в различных областях математики. В §24 характеризуются свойства аксиоматических теорий – непротиворечивость, категоричность, полнота, независимость системы аксиом.

§23. Аксиоматический метод в математике и аксиоматические теории

Понятие аксиоматической теории. Аксиоматический метод не является достижением только двадцатого столетия. В начале XX века, благодаря, главным образом, работам немецкого математика Д.Гильберта (1862–1943), окончательно сформировались принципиальные положения данного метода и было осознано его значение для математики. Первые идеи, связанные с этим методом, восходят к титанам античной мысли Платону и Аристотелю (IV в. до н.э.). Первый практический шаг на этом пути был сделан более двух тысяч лет назад древнегреческим математиком Евклидом (около 300 г. до н.э.). Его труд "Начала" явился энциклопедией геометрических знаний и образцом написания математических работ на протяжении

---

[1] *Ершов А.П.* Избранные труды. – Новосибирск: "Наука", 1994. – 416 с. (Стр. 293 – 294).

более двадцати веков. Именно благодаря этому авторитетнейшему произведению сформировалось общечеловеческое представление об аксиоме как об утверждении, не требующем доказательства, обоснования, являющем собой некую абсолютную истину. Тем не менее, внутри математической науки этот взгляд на аксиомы претерпел самые решительные изменения. Такой процесс шёл постепенно, но качественный скачок в нём произошёл после того, как в 20-30-е годы XIX века великим русским математиком Н.И.Лобачевским (1792–1856), независимо от него молодым венгром Яношем Бояи (1802–1860), а также великим немецким учёным К.-Ф.Гауссом (1777–1855) было сделано открытие неевклидовой геометрии. Суть открытия состояла в том, что вместо пятого постулата Евклида в систему аксиом было включено утверждение, являющееся его отрицанием, и затем на базе полученной системы аксиом была построена непротиворечивая геометрическая теория, названная Н.И.Лобачевским "воображаемой геометрией". Важным этапом в процессе эволюции взглядов на аксиомы явилось построение во второй половине XIX века различных моделей геометрии Лобачевского. Оказалось, что терминам, входящим в аксиомы, и самим аксиомам можно придавать различный смысл, а не только тот наглядный, который имел в виду Евклид.

Такое развитие взглядов на природу аксиом и аксиоматический метод привело к следующей концепции *аксиоматической теории*. Выбирается ряд *первоначальных понятий*, которые не определяются и используются без объяснения их смысла. Вместе с тем, все другие понятия, которые будут использоваться, должны быть строго определены через первоначальные неопределяемые понятия и через понятия, смысл которых был определён раньше. Высказывание, определяющее таким способом значение понятия, называется *определением*, а само понятие, смысл которого определён, носит название *определяемого понятия*. Евклид сделал попытку строго определить все первоначальные понятия геометрии: точки, прямой, плоскости и т.д. Но совершенно ясно, что эти понятия должны определяться через какие-то другие, те, в свою очередь, должны опираться на следующие понятия, и так далее, так что процесс бесконечен. Таким образом, первоначальные понятия аксиоматической теории не определяются.

Далее, совершенно аналогична ситуация и с утверждениями о первоначальных и об определяемых понятиях. Невозможно доказать все истинные утверждения об этих понятиях, потому что при доказательстве нужно опираться на какие-то предыдущие утверждения, при их доказательстве, в свою очередь, – на следующие, и так без конца. Поэтому и здесь необходимо выделить некоторые утверждения и объявить их истинными. Такие утверждения, принимаемые без доказательства, называются *аксиомами* аксиоматической теории. Совокупность аксиом обозначим буквой Σ. Вопрос о том, какие утверждения о первоначальных понятиях выбираются в качестве аксиом, заслуживает специального рассмотрения. Отметим только, что Евклид в качестве пяти своих аксиом (постулатов) выбрал наиболее, на его взгляд, очевидные утверждения о точках и прямых, т.е. такие утверждения, которые многократно подтверждались практическим опытом человечества.

Итак, после того, как система аксиом аксиоматической теории выбрана, приступают к развитию самой аксиоматической теории. Для этого, исходя из выбранной системы аксиом, пользуясь правилами логического умозаключения, выводят новые утверждения о первоначальных понятиях, а также об определяемых понятиях. Получаемые утверждения называются теоремами данной аксиоматической теории.

Можно более точно сформулировать понятие теоремы аксиоматической теории и её доказательства. *Доказательством* утверждения C, сформулированного в терминах данной теории, называется конечная последовательность $B_1, B_2, ..., B_s$ высказываний теории, в которой каждое высказывание есть либо аксиома, либо оно получено из одного или более предыдущих высказываний данной последовательности по логическим правилам вывода, а последнее высказывание B_s есть утверждение C. При этом, C называется *теоремой* или *доказуемым утверждением* аксиоматической теории. Обозначение: $\vdash C$. Отметим, что каждая аксиома аксиоматической теории является её теоремой: доказательство аксиомы есть одноэлементная последовательность, состоящая из неё самой.

Важным является следующее обобщение понятия теоремы. Пусть Γ – конечное множество высказываний некоторой аксиоматической теории. Утверждение C теории называется *выводимым* из Γ (обозначается: $\Gamma \vdash C$), если существует конечная последовательность высказываний $B_1, B_2, ..., B_s$, называемая *выводом* C из Γ, каждое высказывание которой является либо аксиомой, либо высказыванием из Γ, либо получено из одного или более предыдущих высказываний этой последовательности по какому-либо из правил вывода рассматриваемой теории, а последнее высказывание B_s есть утверждение C. Утверждения из множества Γ называются *гипотезами* (или посылками или допущениями). В частном случае, когда $\Gamma = \emptyset$, вывод C

из Г превращается в доказательство утверждения C (опирающееся только на аксиомы теории), а утверждение C становится теоремой аксиоматической теории.

Итак, под *аксиоматической теорией*, построенной на основе системы аксиом Σ, понимается совокупность всех теорем, доказываемых, исходя из этой системы аксиом. Такую совокупность теорем обозначают $Th(\Sigma)$.

Изложенный метод построения математической теории носит название *аксиоматического* или *дедуктивного метода*. Выбор системы аксиом есть дело условия: одно и то же утверждение теории может быть аксиомой, если оно так выбрано, а может выступать в качестве теоремы, если выбор аксиом осуществлён по-иному. Итак, если в обыденной жизни за термином "аксиома" утвердился его изначальный смысл (в переводе с греческого "аксиома" означает "достойный признания"), именно смысл самоочевидной, безусловной истины, то в математике, при построении аксиоматических теорий, аксиомы условны. Они "достойны признания" не сами по себе, не ввиду их самоочевидной истинности, а потому что на их основе строится та или иная аксиоматическая теория. При новом выборе системы аксиом прежние аксиомы становятся теоремами. Коротко говоря, аксиомы – это то, из чего выводятся теоремы, а теоремы – то, что выводится из аксиом.

Как возникают аксиоматические теории. Можно указать два пути, по которым происходило становление тех или иных аксиоматических теорий, известных в математике.

Первый путь состоит в том, что та или иная математическая теория, достигнув достаточно высокого уровня развития, принимает характер аксиоматической теории. Именно таким путём были аксиоматизированы следующие математические теории: арифметика (на основе системы аксиом Дж.Пеано), геометрия (на основе разнообразных систем аксиом, в частности, Д.Гильберта, Г.Вейля, М.Пиери и т.д.), теория вероятностей (аксиоматика А.Н.Колмогорова) и другие.

Второй путь возникновения аксиоматических теорий состоит в том, что обнаруживалось глубокое внутреннее сходство между основными чертами, казалось бы, совершенно различных математических теорий. Данное обстоятельство наводило на мысль выделить общие черты и, руководствуясь ими, построить аксиоматическую теорию. (Может быть, именно поэтому Д. Гильберт назвал математику искусством называть разные вещи одним и тем же именем.) На этом пути возникли, по-видимому, все алгебраические (аксиоматические) теории и, прежде всего, теории групп, колец, полей и других алгебраических систем, общая или универсальная алгебра и т.д. Здесь появляется прекрасная возможность взаимопроникновения методов одних математических наук в другие, а также возможность свободно интерпретировать первоначальные понятия и аксиомы аксиоматической теории, что раскрывает широкие перспективы приложений таких теорий и является одним из мощных источников действенной силы математики как науки вообще.

Примеры аксиоматических теорий. Приведём примеры аксиоматических теорий, возникших различными путями.

Пример 23.1. Теория групп – одна из теорий, возникших на втором пути. Было известно немало объектов, обладающих многочисленными общими чертами. Среди них, в частности, множество $F_{1-1}(M)$ всех взаимно однозначных отображений множества M на себя, рассматриваемое вместе с операцией суперпозиции отображений, множество Z всех целых чисел, рассматриваемое вместе с операцией сложения целых чисел, множество V_2 всех векторов плоскости, рассматриваемое вместе с операцией сложения векторов по правилу треугольника или параллелограмма. Обозначив каждое из этих множеств через G, а каждую из операций через $*$ (и называя её композицией элементов из G), обнаруживаем, что все три указанных объекта обладают следующими свойствами:

G_0. *Для любых a и b из G композиция $a * b$ есть однозначно определённый элемент из G.*

G_1. *Для любых a, b и c из G $(a * b) * c = a * (b * c)$.*

G_2. *В G имеется такой элемент e, что для любого a из G $a * e = e * a = a$.*

G_3. *Для любого a из G имеется такой a' из G, что $a * a' = a' * a = e$.*

Например, элемент e, существование которого утверждается в свойстве G_2, в случае $F_{1-1}(M)$ есть тождественное отображение M на M, в случае Z – целое число 0, в случае V_2 – нуль-вектор $\overrightarrow{0}$. В свойстве G_3 элемент a' есть обратное преобразование f^{-1}, противоположное число $-m$, противоположный вектор $\overrightarrow{BA}$ для преобразования f, целого числа m и вектора $\overrightarrow{AB}$ соответственно. Утверждения $G_0 - G_3$ и составляют систему аксиом теории групп. Из этих аксиом можно выводить разнообразные теоремы и тем самым строить аксиоматическую теорию групп. Докажем несколько теорем этой теории.

G_4. *В группе имеется точно один единичный элемент.*

Доказательство. Ввиду G_2 нужно доказать лишь единственность. Допустим, что в G имеется два единичных элемента – e_1 и e_2, т.е. на основании G_2 для любого a $e_1 * a = a$ и $a * e_2 = a$. Тогда, в частности, $e_1 * e_2 = e_2$ и $e_1 * e_2 = e_1$. Следовательно, в силу G_0 и свойств равенства, $e_1 = e_2$. □

G_5. *Для каждого элемента группы имеется точно один обратный.*

Доказательство. Ввиду G_3 остаётся доказать лишь его единственность. Допустим, что в G для элемента a имеется два обратных a' и a'', т.е. таких элементов, что $a'' * a = e$ и $a * a' = e$. Тогда, в силу G_1 $(a'' * a) * a' = a''$ и, следовательно, $e * a' = a'' * e$. Отсюда следует, согласно G_2, что $a' = a''$. □

В мультипликативной терминологии обратный элемент для a обозначается через a^{-1}, так что $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$, где e – единственный единичный элемент из G.

G_6. *Для любых элементов* a, b, c *группы* G *из* $a * b = a * c$ *следует* $b = c$, *и из* $b * a = c * a$ *следует* $b = c$.

Доказательство. Пусть $a * b = a * c$. Тогда $a^{-1} * (a * b) = (a^{-1} * a) * b = e * b = b$. С другой стороны, $a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c) = (a^{-1} * a) * c = e * c = c$. Следовательно, $b = c$. Второе утверждение доказывается аналогично. □

Следующие две теоремы докажите самостоятельно.

G_7. *Для любых элементов* a *и* b *из* G *каждое из уравнений* $a * x = b$ *и* $y * a = b$ *имеет в* G *единственное решение.*

G_8. *Для любых элементов* a *и* b *из* G $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

О теории групп см. книги[2].

Пример 23.2. Как отмечалось в предыдущем пункте, примером аксиоматической теории, возникшей на первом пути, является геометрия. Здесь рассматривается её маленький фрагмент – теория конгруэнтности (равенства) отрезков. Условимся, что первичными

---

[2] *Курош А.Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.; *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1972. – 240 с.

терминами являются S – множество всех отрезков и $\cong$ – отношение, называемое отношением конгруэнтности, так что выражение $x \cong y$ читается так: отрезок x конгруэнтен отрезку y. Выберем в качестве аксиом следующие утверждения:

K_1. *Для всякого x из S $\cong x$ (другими словами, каждый отрезок конгруэнтен самому себе).*

K_2. *Для любых элементов x, y, z из S, если $x \cong z$ и $y \cong z$, то $x \cong y$ (другими словами, два отрезка, порознь конгруэнтные третьему, конгруэнтны между собой).*

Докажем некоторые теоремы.

K_3. *Для любых элементов y и z из S, если $y \cong z$, то $z \cong y$.*

Доказательство. По аксиоме K_2, подставив z вместо x, получим, что если $z \cong z$ и $y \cong z$, то $z \cong y$. Поскольку член конъюнкции $z \cong z$ истинен на основании аксиомы K_1, то из конъюнкции его можно убрать. Получим, что если $y \cong z$, то $z \cong y$. *Box*

K_4. *Для любых элементов x, y, z из S, если $\cong y$ и $y \cong z$, то $x \cong z$.*

Докажите самостоятельно.

Пример 23.3. Аксиоматическая теория натуральных чисел построена итальянским математиком Дж. Пеано (1858–1932) на рубеже XIX и XX веков. Её *первоначальными понятиями* являются: непустое множество N, бинарное отношение $'$ (называемое отношением следования) и выделенный элемент 1. *Аксиомы* выбираются следующие:

(P_1) $(\forall x)(x' \neq 1)$,

(P_2) $(\forall x, y)(x = y \rightarrow x' = y')$,

(P_3) $(\forall x, y)(x' = y' \rightarrow x = y)$,

(P_4) (*Аксиома индукции*)
$$(1 \in M \wedge (\forall x)(x \in M \rightarrow x' \in M)) \rightarrow M = N .$$

Правилами вывода служат обычные логические правила *Modus Ponens* и правило подстановки.

Приведём доказательства двух теорем, непосредственно вытекающих из этих аксиом.

(P_5) $(\forall x)(x' \neq x)$.

Доказательство. Рассмотрим множество: $M = \{x \in N : x' \neq x\}$. Покажем, используя аксиому индукции (P_4), что $M = N$.

А) $1 \in M$, так как $1' \neq 1$ по аксиоме P_1.

Б) Пусть $x \in M$, т.е. $x' \neq x$. Тогда по аксиоме P_3, $(x')' \neq x'$. Следовательно, по определению , $x' \in M$.

Условия аксиомы P_4 выполнены. Тогда, по аксиоме P_4, $M = N$. Это и означает, что $(\forall x)(x' \neq x)$. □

$$(P_6) \quad (\forall x)(x = 1 \ \lor \ (\exists y)(x = y')) .$$

Доказательство. Рассмотрим множество: $M = \{1\} \cup \{x \in N : (\exists y)(x = y')\}$ и покажем, используя аксиому индукции P_4, что $M = N$.

А) $1 \in M$ по определению множества .

Б) Пусть $x \in M$ и $x \neq 1$. Тогда $x \in \{x \in N : (\exists y)(x = y')\}$, т.е. $x = y'$ для некоторого $y \in N$. Отсюда, ввиду аксиомы P_2, $x' = (y')'$, т.е. x' следует за элементом y'. Тогда, по определению M, $x' \in M$.

Условия аксиомы P_4 выполнены. Тогда, по аксиоме P_4, $M = N$. □

Аксиоматической теории натуральных чисел, построенной на основе приведённой системы аксиом, много времени уделяется в курсе "Числовые системы", изучаемом после курса математической логики.[3]

Пример 23.4. *Построение евклидовой геометрии на основе системы аксиом Гильберта.* Эта система аксиом представлена Давидом Гильбертом в его книге "Основания геометрии", вышедшей в 1899 году, и ставшей с того момента вечным фундаментом этой науки. Гильберт так начинает своё сочинение: "Геометрия, – так же, как и арифметика, – требует для своего построения только немногих простых основных положений. Эти основные положения называются аксиомами геометрии. Установление аксиом геометрии и исследование их взаимоотношений – это задача, которая со времён Евклида являлась темой многочисленных прекрасных произведений математической литературы. Задача эта сводится к логическому анализу нашего пространственного представления."[4]

В системе Гильберта первоначальными (неопределяемыми) понятиями являются понятия трёх объектов – "точки", "прямые" и

---

[3] *Игошин В.И.* Курс числовых систем для педагогического вуза // Математика в высшем образовании, 2010, № 8, с. 19 – 36.

[4] *Гильберт Д.* Основания геометрии / Пер. с нем. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 492 с. (стр. 55)

"плоскости" и трёх сортов отношений между ними, выражаемых словами "принадлежит" (точка принадлежит прямой или плоскости), "между" (точка лежит между двумя другими точками) и "конгруэнтен" (конгруэнтны два отрезка или два угла). При этом, точки обозначаются $A, B, C,...$, прямые – $a, b, c,...$, плоскости – α, β, γ, ... Эти объекты и эти отношения между ними удовлетворяют двадцати аксиомам, разделённым на пять групп: I. *Аксиомы принадлежности* (или *инцидентности*); II. *Аксиомы порядка*; III. *Аксиомы конгруэнтности*; IV. *Аксиомы непрерывности*; V. *Аксиома параллельности Евклида.*

ПРИМЕР 23.5. *Построение евклидовой геометрии на основе системы аксиом Вейля.* Эта система предложена немецким математиком Германом Вейлем в 1916 г., и путь построения геометрии, основанный на этой системе аксиом, возможно, является самым коротким и динамичным путём аксиоматизации геометрии. К тому же, на этом пути в элементарную геометрию входит одно из фундаментальнейших понятий современной математики – понятие векторного пространства, чрезвычайно важное и для многочисленных её приложений (к физике, химии, экономике и т.д.). Идея Вейля состоит в том, чтобы принять в качестве первоначальных, неопределяемых понятий понятия "точка", "вектор" (в частности, понятия "прямая" и "плоскость" определяется) "сумма векторов", "произведение вектора на число", "скалярное произведение векторов", "откладывание вектора от точки", а в качестве аксиом – свойства этих операций над векторами и некоторые свойства, связывающие точки и векторы.

С логической точки зрения вейлевский путь аксиоматизации эквивалентен гильбертовскому: он позволяет доказать все те же самые теоремы. Но с методологической точки зрения вейлевский путь имеет ряд преимуществ. Вместо скрупулезных и утомительных рассуждений по гильбертовской схеме путь Вейля даёт ясное и краткое изложение, насыщенное современными идеями и мощными методами решения геометрических задач.

Система аксиом Вейля состоит из 16 аксиом, которые отчётливо делятся на две части: аксиомы (евклидова) векторного пространства и аксиомы точечного пространства в его связи с векторным пространством. Здесь важно отметить, понятие векторного пространства размерности n играет фундаментальную роль, без преувеличения, во всех областях современной математики и сопредельных с ней наук. Оно изучалось также в курсе алгебры и в курсе математического анализа. Исключительно важна его роль и в геометрии. Геометрия изучает точки и фигуры – множества точек (но не векторы, с которыми имеет дело *векторное* пространство). Понятие точки – следующее неопределяемое понятие. Точки и векторы – объекты разной природы, но они очень тесно связаны между собой. Эта связь выражена во второй части аксиом – *аксиомах Вейля точечного пространства*. Имеется отображение, сопоставляющее любым двум точкам A и B (в указанном порядке) вектор из векторного пространства V, обозначаемый $\overline{AB}$. Это отображение должно удовлетворять следующим аксиомам:

$$(V_1) \quad (\forall A)\,(\forall \overline{a})\,(\exists B)\,(\overline{AB} = \overline{a})\,;$$

$$(V_2) \quad (\forall A, M, N)\,(\overline{AM} = \overline{AN} \rightarrow M = N)\,;$$

$$(V_3) \quad (\forall A, B, C)\,(\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC})\,.$$

Первая из этих аксиом называется аксиомой откладывания векторов: от каждой точки любой вектор можно отложить. Вторая аксиома утверждает, что это отложение осуществляется единственным образом: заданные начальная точка и вектор однозначно определяют концевую точку. Наконец, третья аксиома называется аксиомой треугольника.

Итак, пространство векторов (векторное пространство) и пространство точек (точечное пространство) – разные объекты, но очень тесно связанные между собой. Говорят, что точечное пространство рассматривается (или задано) над векторным пространством и что векторное пространство является пространством переносов соответствующего точечного пространства. Если векторное пространство V_n не является евклидовым (т.е. в нём не задано скалярное произведение), то соответствующее точечное пространство обозначается A_n и называется ***аффинным***. Если векторное пространство V_n является евклидовым (в нём задано скалярное произведение векторов), то соответствующее точечное пространство обозначается E_n и называется ***евклидовым точечным пространством***.

Таким образом, система аксиом векторного пространства вместе с аксиомами $(V_1), (V_2), (V_3)$ и есть ***система аксиом евклидовой геометрии по Герману Вейлю***. Все дальнейшие понятия (как то прямая, плоскость и т.д.) вводятся при помощи определений на основе уже введённых первоначальных понятий, т.е. являются определяемыми, вторичными. Все теоремы о первоначальных и вторичных понятиях доказываются на основе сформулированных аксиом (с использованием, конечно, уже доказанных теорем). При этом фундаментальным с точки зрения логики является тот факт, что всякая аксиома системы аксиом Гильберта оказывается теоремой при вейлевском подходе к обоснованию геометрии. Отсюда следует, что всякая теорема евклидовой геометрии, выводимая из системы аксиом Гильберта, может быть выведена и из системы аксиом Вейля (к выводу теоремы из системы аксиом Гильберта нужно добавить вначале выводы необходимых аксиом Гильберта из системы аксиом Вейля). Верно и обратное утверждение. Тот факт, что из системы аксиом Гильберта выводится каждое утверждение о векторах, которое Вейлем принято за аксиому, фактически и доказывается в различных курсах элементарной математики, в которых понятие вектора сделано вторичным. Отсюда и следует, что всякая теорема евклидовой геометрии, выводимая из системы аксиом Вейля, может быть выведена и из системы аксиом Гильберта. Таким образом, системы аксиом Гильберта и Вейля оказываются эквивалентными: на основе каждой из них могут быть доказаны одни и те же теоремы евклидовой геометрии.

Пример 23.6. *Геометрия Лобачевского* может быть построена, например, на базе системы аксиом Гильберта евклидовой геометрии, о которой говорилось в примере 23.4, если в этой системе аксиому параллельности Евклида заменить на аксиому параллельности Лобачевкого, представляющую собой отрицание аксиомы параллельности Евклида.

Вопросам аксиоматического построения евклидовой геометрии на основе систем аксиом Д.Гильберта и Г.Вейля, началу аксиоматического построения геометрии Н.И.Лобачевского, а также логическим проблемам возникающих аксиоматических теорий посвящена книга[5].

Пример 23.7. *Аксиоматическое построение канторовской ("наивной") теории множеств на основе нескольких систем аксиом.* Читатель, знакомый с основами современной алгебры, узнает в приводимых системах аксиом аксиоматики так называемой булевой алгебры, ибо совокупность всех подмножеств данного множества образует алгебраическую систему, называемую булевой алгеброй.[6]

Всего рассмотрим три системы аксиом.

Первоначальными понятиями теории T_1 являются бинарные операции $\cap$, $\cup$ (называемые соответственно пересечением и объединением), унарная операция $'$ (называемая дополнением) о нульарные операции 0 и 1, фиксирующие два различных элемента – ну-

---

[5] *Игошин В.И.*. Основания геометрии. – Саратов: Издательство "Научная книга", 2004. – 84 с. (Серия "*Лекции по геометрии*")

[6] *Сикорский Р.* Булева алгебра / Пер. с англ. – М.: Мир, 1969. – 376 с.

левой и единичный. Система аксиом Σ_1 этой теории симметрична относительно операций $\cap$, $\cup$, 0, 1 (или, как говорят, самодвойственна):

(A1)	$x \cap y = y \cap x,$	(A5)	$x \cap 1 = x,$
(A2)	$x \cup y = y \cup x,$	(A6)	$x \cup 0 = x,$
(A3)	$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z),$	(A7)	$x \cap x' = 0,$
(A4)	$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z),$	(A8)	$x \cup x' = 1.$

Первоначальными понятиями второй теории T_2 являются бинарная операция $\cap$ и унарная операция $'$. Система аксиом Σ_2 этой теории, наоборот, асимметрична, "смещена" в сторону операции $\cap$:

(B1) $x \cap y = y \cap x,$	(B3) $x \cap y' = z \cap z' \implies x \cap y = x,$
(B2) $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z),$	(B4) $x \cap y = x \implies x \cap y' = z \cap z'.$

Наконец, в третьей теории T_3, в которой первоначальными понятиями являются бинарное отношение $\subset$, бинарные операции $\cap$ и $\cup$, унарная операция $'$ и нульарные операции 0 и 1, система аксиом Σ_3 следующая:

(C1)	$x \subset x,$	(C6)	$x \subset 1,$
(C2)	$x \subset y \wedge y \subset z \implies x \subset z,$	(C7)	$0 \subset x,$
(C3)	$x \cup y \subset z \implies x \subset z \wedge y \subset z,$	(C8)	$1 \subset x \cup x',$
(C4)	$z \subset x \cap y \implies z \subset x \wedge z \subset y,$	(C9)	$x \cap x' \subset 0.$
(C5)	$x \cap (y \cup z) \subset (x \cap y) \cup (x \cap z)$,		

Можно доказать равносильность всех этих трёх систем аксиом.

Интерпретации и модели аксиоматической теории. Формулируя аксиомы в примерах предыдущего пункта, мы не обращали никакого внимания на природу элементов тех множеств, которые там встречаются, а также на природу других первоначальных понятий этих аксиоматических теорий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23.8. Приписывание значений (смысла) первоначальным понятиям аксиоматической теории называется *интерпретацией* теории. Если некоторая совокупность предметов и отношений между ними, выбранных в качестве значений первоначальных понятий аксиоматической теории, т.е. в качестве её интерпретации, удовлетворяет всем аксиомам теории, то она называется *моделью* данной аксиоматической теории (или моделью системы аксиом теории).

Другими словами, интерпретация теории – просто функция f, областью определения которой является множество T первоначальных понятий этой теории. Если же образ $f[T]$ удовлетворяет всем аксиомам теории, то это есть модель данной теории.

Так, в примере 23.1 каждое из множеств $F_{1-1}(M)$, Z и V_2, рассматриваемое вместе с соответствующей операцией, является моделью аксиоматической теории групп или, проще, группой. Существуют многочисленные другие модели данной теории. Вот в этой-то свободе интерпретаций аксиоматических теорий заключена одна из причин их обширных приложений в других науках и в практике. Но искусство интерпретации поистине одно из высочайших искусств математика-прикладника. Например, теория групп была с успехом применена в 1890 г. русским кристаллографом Е.С.Фёдоровым (1853–1919) для классификации и описания всевозможных форм кристаллов, существующих в природе, а в самое последнее время эта теория плодотворно работает в теории элементарных частиц.

Дадим аксиоматической теории, основанной на аксиомах K_1 и K_2 (пример 23.2), ещё одну интерпретацию. В качестве первоначальных понятий возьмем множество R всех действительных чисел и отношение $\equiv$, определяемое так: $x \equiv y$ тогда и только тогда, когда разность $x - y$ есть целое число. Нетрудно убедиться в том, что при такой интерпретации аксиомы K_1 и K_2 превращаются в истинные утверждения (в теоремы теории действительных чисел). Следовательно, получаем модель аксиоматической теории $Th(K_1, K_2)$.

Наконец, укажем две модели теории $Th(P_1 - P_4)$ натуральных чисел. Если интерпретировать N как множество $\{1, 2, 3, ...\}$ натуральных чисел, а отношение $'$ интерпретировать как функцию следования (т.е. $x' = x + 1$), то аксиомы $P_1 - P_4$ будут выражать общеизвестные свойства натуральных чисел, т.е. получим модель рассматриваемой аксиоматической теории. Другую модель этой теории получим, взяв в качестве N множество $\{a, ar, ar^2, ..., ar^n, ...\}$, где a и r – произвольные не равные нулю действительные числа, а в качестве $'$ – такую функцию, что $(ar^n)' = ar^{n+1}$.

Уже отмечалась выше возможность взаимопроникновения методов одних математических наук в другие в процессе создания аксиоматической теории. Проиллюстрируем это на примерах. Так, доказав в аксиоматической теории групп теорему G_8, можно интерпретировать её для конкретных моделей данной теории. В частности, на модели $F_{1-1}(M)$ она превращается в утверждение $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, а на модели V_2 – в утверждение $-(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = (-\overrightarrow{a}) + (-\overrightarrow{b})$. Таким образом, природа этих, казалось бы, разнородных свойств одна – теоретико-групповая. Аналогично, без какого бы то ни было специального рассуждения мы уверены в том, что теоремы K_3 и K_4 станут истинными утверждениями о действительных числах при интерпретации, рассмотренной в настоящем пункте.

Но не только аксиоматическая теория привносит что-то в свои модели. Имеется и обратная связь: порой модели аксиоматической теории могут сослужить ей определённую службу при решении некоторых внутренних проблем теории. Пусть, например, требуется выяснить, является или нет теоремой теории $Th(K_1, K_2)$ следующее высказывание:

A: *Существуют два элемента x и y множества S, для которых неверно, что $x \cong y$ (другими словами, существуют два неконгруэнтных отрезка).*

То обстоятельство, что не удается получить вывод данного утверждения из аксиом K_1, K_2, приводит к догадке (гипотезе), что это сделать невозможно. Для её подтверждения рассуждаем следующим образом. Если бы утверждение A было выводимо из аксиом K_1, K_2, т.е. принадлежало бы аксиоматической теории $Th(K_1, K_2)$, то ему удовлетворяла бы каждая модель этой теории. Поэтому если удастся построить такую модель системы аксиом $\{K_1, K_2\}$, в которой не выполняется утверждение A, то догадка (гипотеза) будет подтверждена, т.е. A невозможно вывести из K_1 и K_2. В самом деле, рассмотрим, например, множество всех целых чисел и введённое выше отношение $\equiv$ между его элементами: $x \equiv y$ тогда и только тогда, когда $x - y \in Z$. На этой структуре, как мы уже отмечали, аксиомы K_1 и K_2. выполняются. Но совершенно ясно, что утверждение A на данной модели не выполняется, потому что $x \equiv y$ для любых элементов x и y из Z.

§24. Свойства аксиоматических теорий

В настоящем параграфе мы будем говорить об изучении аксиоматической теории как таковой, в целом, т.е. хотим посмотреть на построенную аксиоматическую теорию как бы со стороны, из вне. Математическую теорию, изучающую данную аксиоматическую теорию как единое целое, устанавливающую свойства данной аксиоматической теории, называют ***метатеорией*** по отношению к изучаемой теории и методы математической логики являются основными методами этой науки. Факты, устанавливаемые в ней относительно изучаемой аксиоматической теории, называют ***метатеоремами***, чтобы отличить их от собственно теорем рассматриваемой теории. Вопросы, связанные с моделями данной аксиоматической теории, с её непротиворечивостью, категоричностью, полнотой, со свойством независимости её системы аксиом – это и есть важнейшие вопросы, на которые должна дать ответ метатеория изучаемой аксиоматической теории. С этими понятиями мы уже вкратце познакомились в главе II при построении формализованного исчисления высказываний. Теперь же рассмотрим их более обстоятельно и применительно к произвольной аксиоматической теории.

Непротиворечивость. Это важнейшее свойство аксиоматических теорий и важнейшее требование, предъявляемое к ним, поскольку, как увидим ниже, противоречивые теории никакой ценности не представляют.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.1. Аксиоматическая теория называется ***непротиворечивой***, если ни для какого утверждения A, сформулированного в терминах этой теории, само утверждение A и его отрицание $\neg A$ не могут быть одновременно теоремами этой теории. Если для некоторого утверждения A теории оба утверждения A и $\neg A$ являются её теоремами, то аксиоматическая теория называется ***противоречивой***.

Покажем, что ***если аксиоматическая теория противоречива, а используемая в ней логическая система включает исчисление высказываний с правилом вывода modus ponens (MP), то любое предложение C этой теории является её теоремой.***

Доказательство. В самом деле, ввиду противоречивости теории, существует предложение A теории такое, что A и $\neg A$ – её теоремы. Рассмотрим следующую последовательность высказываний данной теории:

$$\ldots\ ,\ A,\ \ldots\ ,\ \neg A,\ B_1,\ B_2,\ \ldots\ ,B_s,\ A \to (\neg A \to C),\ \neg A \to C,\ C\ .$$

Многоточия перед A и $\neg A$ обозначают их выводы (доказательства в данной теории). Следующие $s+1$ высказываний – вывод истинного высказывания $A \to (\neg A \to C)$ (эта формула есть тавтология, как легко проверить, и потому доказуема). Наконец, предпоследняя формула получена из A и $A \to (\neg A \to C)$ по правилу MP, а последняя – по тому же правилу из $\neg A$ и $\neg A \to C$. Таким образом, данная последовательность есть доказательство утверждения C в рассматриваемой аксиоматической теории. □

Ясно, что обратное утверждение также справедливо: *если любое предложение аксиоматической теории является ее теоремой, то теория противоречива.* Следовательно, определения противоречивой и непротиворечивой аксиоматической теории можно сформулировать и следующим равносильным образом. Аксиоматическая теория называется *противоречивой*, если любое утверждение, сформулированное в терминах этой теории, является её теоремой, и называется *непротиворечивой*, если существует утверждение, не являющееся её теоремой. Значит, противоречивая теория никакой ценности не имеет, потому что в ней можно доказать что угодно.

В связи со сказанным приобретает первостепенную важность проблема установления непротиворечивости аксиоматической теории. Ясно, что эта проблема имеет две стороны: отсутствие заложенного как бы внутрь системы аксиом противоречия (которое проявится при развитии теории) и истинность логических умозаключений, которые мы используем при построении доказательств. Таким образом, желая установить непротиворечивость той или иной аксиоматической теории мы должны подвергнуть исследованию как её математическое содержание (т.е. систему аксиом, лежащую в её основе), так и саму логику. Ко второму моменту мы ещё вернемся в главе VI. Посмотрим, как же решается вопрос о непротиворечивости системы аксиом, положенной в основу аксиоматической теории, об отсутствии противоречия внутри неё.

Во многих случаях этот вопрос удаётся решить с помощью понятия модели. Развивая аксиоматическую теорию на базе той или иной системы аксиом Σ, мы не вкладываем в её основные понятия и отношения между ними никакого содержания сверх того, что сказано о них в аксиомах; в них содержатся все сведения об этих понятиях, необходимые для построения теории путём чисто логических умозаключений. Изменим теперь нашу точку зрения на первоначальные понятия: будем понимать под ними некоторые вполне определённые объекты и соотношения между ними из какой-нибудь области математики (другой аксиоматической теории), которую мы считаем уже установленной и обоснованной (непротиворечивой). Это придание каждому первоначальному понятию и отношениям между ними конкретного содержания посредством каких-то конкретных предметов и конкретных отношений между ними, как мы говорили в предыдущем параграфе, называется *интерпретированием* данной системы аксиом Σ. Совокупность этих конкретных предметов и отношений между ними называется *интерпретацией* данной системы аксиом. В результате каждая аксиома из Σ превращается во вполне определённое предложение из той уже обоснованной области математики (непротиворечивой аксиоматической теории), которая используется для интерпретации. Каждое из этих предложений может быть как истинным (теоремой), так и ложным в непротиворечивой аксиоматической теории, использованной для интерпретации. Если все аксиомы из Σ превращаются в истинные утверждения, то построенная интерпретация называется *моделью* данной системы аксиом Σ. (Если же хотя бы одна аксиома превратилась в ложное утверждение, то можно считать, что интерпретирование не удалось: ведь цель интерпретирования – построить модель системы аксиом!).

Если модель системы аксиом Σ построена, то отсюда следует чрезвычайно важный вывод о непротиворечивости этой системы аксиом. В самом деле, все теоремы аксиоматической теории $Th(\Sigma)$, построенной на базе системы аксиом Σ, суть чисто логические следствия аксиом из Σ. В результате интерпретирования все аксиомы из Σ превратились в истинные предложения; значит, логически следующие из них теоремы также превратятся в истинные предложения (в смысле той аксиоматической теории, которая использована для построения модели). Поэтому, если предположить, что в исследуемой аксиоматической теории (построенной на базе системы аксиом Σ) могут быть выведены две теоремы A и $\neg A$, противоречащие друг другу, то в модели им соответствовали бы два истинных утверждения A^* и $\neg A^*$, также друг другу противоречащих (утверждение и его отрицание не могут быть одновременно истинными). Но это невозможно, так как аксиоматическая теория, в которой мы рассматриваем модель нашей системы аксиом Σ, считается свободной от противоречий, непротиворечивой.

Итак, предъявляемая модель системы аксиом служит обоснованием непротиворечивости соответствующей аксиоматической теории. Но поскольку модель исходной системы аксиом Σ построена в некоторой другой аксиоматической теории, то такое обоснование имеет *относительный характер*: исходная теория непротиворечива, если непротиворечива аксиоматическая теория, в терминах которой построена её модель. Таким образом, вопрос о непротиворечивости одной аксиоматической теории сводится к вопросу о непротиворечивости другой аксиоматической теории.

Именно такова ситуация с геометрией Н.И.Лобачевского. Хорошо известны различные модели геометрии Лобачевского, построенные в геометрии Евклида. Наличие такой модели доказывает относительную непротиворечивость геометрии Лобачевского: она непротиворечива, если непротиворечива геометрия Евклида. В свою очередь, непротиворечивость геометрии Евклида также требует обоснования. Далее в курсе геометрии строится модель евклидовой геометрии в теории действительных чисел, чем устанавливается непротиворечивость первой относительно второй. Наконец, вопрос о непротиворечивости теории действительных чисел может быть сведён путём построения соответствующих моделей к вопросу о непротиворечивости теории натуральных чисел, построенной на основе системы аксиом Пеано. См. об этом[7].

К непротиворечивости арифметики аналогичным образом сводится непротиворечивость обширных областей классической математики. Тем не менее, "абсолютная" непротиворечивость ни геометрии Лобачевского, ни евклидовой геометрии, ни арифметики натуральных чисел не установлена. Уверенность в непротиворечивости этих теорий, в их истинности находится в сфере интуиции и представляет собой своего рода акт веры.

В заключение отметим, что если удаётся построить конечную модель аксиоматической теории, то этим устанавливается "абсолютная" непротиворечивость теории. Например, двухэлементное множество $\{e, a\}$ вместе с определённой на нём по следующим правилам операцией: $e \cdot e = a \cdot a = e$, $e \cdot a = a \cdot e = a$ – является, как нетрудно убедиться, моделью теории групп. Поэтому с полной уверенностью можно утверждать, что аксиоматическая теория групп непротиворечива.

Категоричность. Это свойство в значительной мере характеризует происхождение аксиоматической теории (см. §23, п. "Как возникают аксиоматические теории"). В большинстве категоричные теории возникали на первом пути. По второму пути происходит формирование, в основном, некатегоричных теорий.

Проанализируем первый путь. Аксиоматика строится для одной конкретной содержательной теории, которая развита уже достаточно хорошо. Эта конкретная теория выступает в качестве модели аксиоматической теории. Никаких других моделей построенная аксиоматическая теория и не имеет, поскольку она строилась применительно к данной конкретной теории. Точнее, другие модели теории могут существовать, но они должны быть неотличимы (с точностью до терминологии и обозначений) от исходной модели. В этом случае

---

[7] *Игошин В.И.*. Основания геометрии. – Саратов: Издательство "Научная книга", 2004. – 84 с. (Серия "*Лекции по геометрии*"); *Игошин В.И.* Курс числовых систем для педагогического вуза // Математика в высшем образовании, 2010, № 8, с. 19 – 36.

можно сказать, что первоначальные понятия и аксиомы дают исчерпывающую совокупность главных принципов конкретной содержательной теории. Такая неотличимость двух моделей называется их *изоморфизмом*. (Из курса алгебры известны понятия изоморфизма групп, колец, полей. Поэтому имеется представление о точном определении изоморфизма для конкретных моделей.) Аксиоматическая теория в этом случае и называется категоричной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.2. Аксиоматическая теория называется *категоричной*, если любые две её модели изоморфны.

Примерами категоричных теорий служат аксиоматические теории евклидовой геометрии, различных систем чисел: натуральных, целых, рациональных, действительных, комплексных. Категоричность евклидовой геометрии доказывается в курсе геометрии. Категоричность теорий систем чисел устанавливается в курсе "Числовые системы".

Некатегоричная аксиоматическая теория имеет существенно различные (т.е. неизоморфные) модели. Такие теории возникают на втором пути, в процессе обобщения общих свойств нескольких различных конкретных теорий. Примером такой теории является теория групп. Многообразие моделей этой теории обусловливает многообразие её приложений. Некатегоричны также теория колец, теория полей и теории некоторых других алгебраических систем.

Независимость системы аксиом. Мы уже имели дело с понятием независимости системы аксиом, где устанавливалась независимость системы аксиом аксиоматической теории высказываний. Здесь обсудим его более подробно. Сформулируем сначала определения понятия независимости аксиомы от остальных аксиом данной системы в двух формах и докажем их равносильность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.3. Аксиома A из системы аксиом Σ называется *независящей* от остальных аксиом этой системы, если её нельзя вывести (доказать) из множества $\Sigma \setminus \{A\}$ всех остальных аксиом системы Σ, кроме аксиомы A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.4. Аксиома A из системы аксиом Σ называется *независящей* от остальных аксиом этой системы, если её исключение из системы Σ уменьшает запас теорем аксиоматической теории, т.е. $Th(\Sigma \setminus \{A\}) \subset Th(\Sigma)$ и $Th(\Sigma \setminus \{A\}) \neq Th(\Sigma)$ (где $Th(\Sigma)$ – совокупность всех теорем, выводимых из системы аксиом Σ, т.е. аксиоматическая теория, построенная на базе системы аксиом Σ).

Докажем равносильность этих двух определений.

Доказательство. В самом деле, из первого определения вытекает второе, так как если утверждение A нельзя вывести из множества $\Sigma \setminus \{A\}$, то его не будет среди теорем теории $Th(\Sigma \setminus \{A\})$ и оно будет среди теорем теории $Th(\Sigma)$, т.е. $Th(\Sigma \setminus \{A\}) \subset Th(\Sigma)$. Обратно, если $Th(\Sigma \setminus \{A\}) \subset Th(\Sigma)$, то A нельзя вывести из $\Sigma \setminus \{A\}$, ибо в противном случае, каждая теорема, выводимая из Σ, могла бы быть выведена и из $\Sigma \setminus \{A\}$, т.е. каждая теорема из $Th(\Sigma)$ принадлежала бы теории $Th(\Sigma \setminus \{A\})$, т.е. $Th(\Sigma) \subset Th(\Sigma \setminus \{A\})$, что противоречило бы условию. Равносильность двух определений установлена. □

Таким образом, требование независимости непротиворечивой системы аксиом состоит в том, чтобы в эту систему не включалось такое утверждение, которое может быть доказано на основе остальных аксиом системы и, следовательно, являясь излишним в этой системе, должно быть отнесено к разряду теорем. Другими словами, система аксиом должна содержать минимальное число утверждений, необходимых для логического вывода всех остальных утверждений данной теории. Это важное требование, которому должна удовлетворять система аксиом, но вовсе не обязательное, в отличие, например, от рассмотренного выше требования непротиворечивости. Свойство независимости системы аксиом характеризует некое изящество и лаконичность этой системы. Но не всегда для той или иной аксиоматической теории целесообразно выбирать независимую систему аксиом: изящество системы аксиом может привести к громоздкости доказательств теорем данной теории. Поэтому отступление от выполнения требования независимости вполне допустимо из методических или иных практических соображений. Именно так и делается в большинстве школьных курсов геометрии, где приходится учитывать психологические и возрастные особенности учащихся. Без доказательства допускается большое количество утверждений. Их истинность считается само собой разумеющейся, а некоторые из них даже не формулируются явно. Такой подход сильно упрощает изложение геометрии и облегчает её усвоение учащимися, ибо доказательство самых простых и очевидных утверждений геометрии требует очень тонких и кропотливых рассмотрений, цель которых будет непонятна, а усвоение недоступно для детей школьного возраста.

Интересно отметить, что проблема независимости систем аксиом является, по существу, самой первой проблемой в основаниях математики. Уже ближайшим последователям Евклида было известно, что если воспользоваться понятием движения, то его IV постулат, утверждающий, что все прямые углы равны между собой, может быть доказан как логическое следствие остальных аксиом и постулатов. Также было известно, что аксиомы V ("*Если удвоим равные, то получим равные*") и VI ("*Половины равных равны между собой*") являются логическими следствиями остальных. С размышления над проблемой независимости V постулата Евклида собственно и началась наука об обосновании геометрии. (Проблема непротиворечивости тогда не возникала, да и не могла возникнуть вплоть до XIX века). Но лишь в XIX веке Лобачевский указал метод доказательства независимости аксиом – метод построения моделей.

В чём же состоит метод доказательства независимости аксиомы A от остальных аксиом непротиворечивой системы аксиом Σ? Рассмотрим систему аксиом $(\Sigma \setminus \{A\}) \cup \{\neg A\}$, получающуюся из Σ заменой аксиомы A на её отрицание $\neg A$. Если окажется, что полученная система аксиом также (как и Σ) непротиворечива, то отсюда будет следовать независимость аксиомы A от аксиом из $\Sigma \setminus \{A\}$. В самом деле, если бы A можно было доказать, исходя из системы $\Sigma \setminus \{A\}$, то A можно было бы доказать, и исходя из системы $(\Sigma \setminus \{A\}) \cup \{\neg A\}$. Но это означало бы противоречивость системы аксиом $(\Sigma \setminus \{A\}) \cup \{\neg A\}$ (из неё выводимы противоречащие друг другу утверждения A и $\neg A$), что не так.

С другой стороны, мы знаем, что непротиворечивость системы аксиом устанавливается путём построения модели этой системы аксиом в некоторой заведомо непротиворечивой теории. Таким образом, мы приходим к следующему *методу доказательства независимости аксиом.* Для доказательства независимости аксиомы A от остальных аксиом системы Σ нужно сконструировать (построить) модель, в которой выполнялись бы все аксиомы данной системы Σ, кроме аксиомы A, т.е. сконструировать такую интерпретацию которая была бы моделью системы аксиом $\Sigma \setminus \{A\}$, но не была бы моделью системы аксиом Σ.

Именно на этой идее, принадлежащей Лобачевскому, и основывается доказательство независимости аксиомы (V.1) о параллельных Евклида от аксиом I–IV групп абсолютной геометрии – строится модель системы аксиом $\{\text{I–IV}, \neg(\text{V}.1)\}$, полученной из системы аксиом евклидовой геометрии заменой в ней аксиомы о параллельных Евклида её отрицанием, и которая определяет геометрию Лобачевского. Наличие такой модели служит доказательством независимости аксиомы о параллельных от остальных аксиом евклидовой геометрии. Эту же идею мы использовали в §11 при доказательстве независимости аксиом ($A1$), ($A2$), ($A3$) формализованного исчисления высказываний. (Проанализируйте эти доказательства ещё раз).

Система аксиом Σ называется *независимой*, если каждая её аксиома не зависит от остальных. Отсюда ясно, насколько кропотливо исследование системы аксиом на независимость. Если для доказательства непротиворечивости данной системы аксиом достаточно построить одну её модель, то для доказательства её независимости придётся построить столько моделей, сколько аксиом содержит система, причём, каждая модель должна реализовывать все аксиомы, кроме одной – исследуемой на независимость.

Полнота. Обобщённо можно сказать, что аксиоматическая теория называется *полной*, если она содержит достаточное для какой-нибудь цели количество теорем. В зависимости от целей выделяют различные виды полноты. Так, в теореме 10.6 была установлена полнота аксиоматической теории высказываний относительно алгебры высказываний: теория охватывала все тавтологии этой алгебры. Доказательство соответствующей теоремы для аксиоматической теории предикатов будет дано в §29. Это понятие полноты – относительное, или внешнее понятие полноты (полнота относительно внешнего фактора).

Выделяют понятие внутренней полноты. Здесь различают две его модификации: абсолютная полнота и полнота в узком смысле.

Определение 24.5. Аксиоматическая теория называется *абсолютно полной*, если для любого утверждения A, сформулированного в терминах этой теории, точно одно из утверждений A и $\neg A$ является её теоремой (или, как говорят, средств аксиоматической теории достаточно для того, чтобы доказать или опровергнуть любое утверждение, сформулированное в терминах данной теории).

Определение 24.6. Аксиоматическая теория называется *полной в узком смысле* (или *в смысле Поста*), если добавление к её аксиомам любого недоказуемого в ней утверждения с сохранением всех правил вывода приводит к противоречивой теории.

Всякая абсолютно полная аксиоматическая теория будет полна и в узком смысле.

Доказательство. В самом деле, допустим, что некоторая абсолютно полная теория не полна в узком смысле. Значит, найдётся такое утверждение A этой теории, не доказуемое в ней, что новая теория, построенная на основе прежних аксиом и утверждения A в качестве новой аксиомы, непротиворечива. Ясно, что A принадлежит новой теории. Кроме того, ввиду абсолютной полноты исходной теории и недоказуемости в ней утверждения A, заключаем, что в ней доказуемо $\neg A$. Но все аксиомы, из которых выведено $\neg A$, вошли в состав системы аксиом новой теории. Поэтому $\neg A$ принадлежит и новой теории. Получаем противоречие с тем, что новая теория непротиворечива. □

Смысл требования (абсолютной) полноты непротиворечивой системы аксиом заключается в том, чтобы она давала возможность без всяких добавочных предпосылок, без какого бы то ни было обращения к наглядным представлениям и опыту исключительно логическим путём доказать всякое предложение, сформулированное в терминах данной теории, либо его опровергнуть.

Классическим примером неполной системы аксиом является система аксиом и постулатов "Начал" Евклида. Уже при доказательстве первых теорем Евклид вынужден молчаливо прибегать к наглядности и очевидности. Так, для обоснования наличия точки пересечения у двух прямых, у двух окружностей, у прямой и окружности требуется аксиома непрерывности, что было обнаружено лишь в XIX веке. Понятие равенства фигур Евклид определяет через движение: "И совмещающиеся равны между собой." Но свойства движения, которые Евклид несомненно почерпнул из эмпирических представлений о механическом движении твёрдых тел и которыми он широко пользуется при доказательстве теорем, никак не выражены в его аксиомах. Нет среди евклидовых аксиом и аксиом порядка или расположения (поэтому тот факт, что прямая делит плоскость на две части, очевиден для Евклида), и аксиом связанных с измерением длин, площадей и объёмов. (Последнюю задачу блестяще решил великий геометр механик и инженер древности Архимед (287–212 гг. до н.э.), живший непосредственно после Евклида, который в своём сочинении "О сфере и цилиндре" развил теорию измерения площадей и объёмов, получив, в частности, формулы поверхности и объёма шара, ввёл аксиому, носящую и поныне его имя).

Другим примером неполной системы аксиом может служить система аксиом абсолютной геометрии (аксиомы I-IV групп системы аксиом Гильберта). В этой системе не может быть ни доказано, ни опровергнуто ни одно предложение, опирающееся на аксиому параллельности Евклида (V.1) или аксиому параллельности Лобачевского (V.1)* (а также, конечно, и сами эти аксиомы).

Вернёмся к анализу понятия полноты. Сопоставим его с понятием непротиворечивости. Если непротиворечивость гарантирует, что из данной системы аксиом Σ не могут быть выведены два противоречащих друг другу утверждения A и $\neg A$, то полнота гарантирует доказуемость одного из них. Так что оба требования вместе дают гарантию разрешимости всякого вопроса теории и притом только в одном смысле.

Обсуждая выше проблему независимости системы аксиом, мы доказали, что утверждение A (не входящее в Σ) не зависит от системы аксиом Σ, если существует модель системы аксиом $\Sigma \cup \{\neg A\}$ (в некоторой непротиворечивой аксиоматической теории). С другой стороны, как нам известно, утверждение A не противоречит системе аксиом Σ, т.е. система аксиом $\Sigma \cup \{A\}$ непротиворечива, если существует модель этой системы аксиом в непротиворечивой аксиоматической теории. Нетрудно понять, что как модель системы аксиом $\Sigma \cup \{\neg A\}$, так и модель системы аксиом $\Sigma \cup \{A\}$ являются моделями системы аксиом Σ. Причём, эти модели, конечно же, не изоморфны, так как в одной из них выполняется утверждение A, а в другой выполняется его отрицание $\neg A$ (т.е. A не выполняется). Итак, соединим вместе эти два направления настоящего абзаца. (Мы имели два утверждения $P \to R$ и $Q \to R$; их конъюнкция равносильна утверждению $(P \wedge Q) \to R$). Непротиворечащее системе аксиом Σ утверждение A будет не зависеть от этой системы аксиом, если существуют две такие неизоморфные модели системы аксиом Σ, в одной из которых A выполняется, а в другой – нет.

Снова вернёмся к анализу понятия полноты системы аксиом и попытаемся связать его с понятием модели данной системы аксиом. Снова, как и в случае с требованием непротиворечивости, мы пытаемся уйти от выражения этого понятия на языке выводимости к выражению его на языке моделей, т.е. пытаемся уйти от синтаксиса к семантике, от формализма к содержанию. Но здесь эта попытка не окажется столь успешной, как в случае с непротиворечивостью. (Хотя и там её успех был относителен). Всё это говорит о том, что к этим проблемам предстоит вернуться и именно на языке синтаксиса, на языке формализма. И это мы проделаем в главе VI. Но результаты, которые там откроются перед нами, будут ещё более поразительны.

Нетрудно уяснить тот факт, что чем меньшее количество аксиом содержит система аксиом Σ, т.е. чем меньше требований предъявляет система аксиом к первоначальным понятиям, тем большее количество объектов ей удовлетворяет, т.е. тем большее количество моделей имеет эта система аксиом. И наоборот, чем больше аксиом содержит система Σ, т.е. чем больше требований предъявляет она к первоначальным понятиям, тем меньше объектов ей удовлетворяют, т.е. тем меньше моделей имеет эта система аксиом. (Чем больше аксиом содержит система, тем богаче содержанием основанная на ней теория, но и тем уже область её применения, т.е. тем меньшей общностью отличаются её теоремы). Но что же требует от системы аксиом Σ условие её полноты? Относительно каждого утверждения A можно решить выводимо A из Σ или нет, т.е. нет утверждений, сформулированных в терминах данной теории, которые не зависели бы от системы аксиом Σ. Но независимость некоторого утверждения от системы аксиом Σ, как мы установили один абзац назад, вытекает из наличия у Σ двух не изоморфных моделей. Поэтому, если у системы Σ нет не зависящих от неё предложений, т.е. если Σ полна, у неё не существует двух не изоморфных моделей. Учитывая, что Σ, конечно же, непротиворечива, т.е. имеет хотя бы одну модель, в итоге заключаем, что все модели системы Σ изоморфны т.е. Σ имеет единственную с точностью до изоморфизма модель. Такая система аксиом (и построенная на её базе аксиоматическая теория) называется категоричной. Таким образом, мы установили, что *всякая полная и непротиворечивая аксиоматическая теория категорична*.

Руководствуясь этим соображением, в ряде учебников по основаниям геометрии понятие полноты аксиоматической теории отождествлено с её категоричностью. Тем не менее, это не так, не всякая категоричная аксиоматическая теория полна. Таковой является, например, аксиоматическая теория натуральных чисел, построенная на базе системы аксиом Пеано (см. §30 главы VI).

Тем не менее, всестороннее решение проблем, связанных с полнотой аксиоматических теорий удаётся получить только в рамках формальных аксиоматических теорий, когда будут уточнены понятия выводимости, доказуемости, правил вывода, когда сама аксиоматическая теория станет точно определяемым математическим понятием (до сих пор мы говорили о ней в описательном плане), подвергаемым изучению методами математической логики. Это сделаем в §30 главы VI и там же продолжим начатое обсуждение. Пока же ограничимся замечанием, что для многих важных математических теорий задача сочетания обоих рассмотренных качеств – непротиворечивости и полноты – оказывается невыполнимой.

Глава V.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ПРОБЛЕМЫ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Логика и математика на протяжении многих веков развиваются в теснейшем взаимодействии друг с другом. Более того, это их взаимодействие собственно и обуславливает эффективное и поступательное развитие каждой из этих областей знаний, поочерёдно периодически вызывая кризис в каждой из них и затем способствуя его преодолению.

В этой главе мы постараемся охарактеризовать исторический путь взаимодействия математики и логики в процессе их развития, кризисы, случившиеся на этом пути, важнейшим из которых был кризис на рубеже XIX и XX веков. Этот кризис вывел логику на качественно новую ступень развития, и об этих новых её чертах будет рассказано в заключительной главе VI настоящей книги.

§25. Взаимодействие математики и логики в процессе их развития

Математика – древнейшая наука и древнейший учебный предмет, плод неустанных многовековых усилий всего человечества, направленных на использование способности человека мыслить. Само название этой науки пришло из Древней Греции, от греческого глагола "знать, изучать". Первоначально слово "mathema" означало "то, чему обучают", т.е. все виды знаний, и только в последующий период приобрело более узкое значение, которое имеет и по сей день.

В истории развития математики условно выделяют четыре основных периода. В конце каждого из этих периодов математика достигала не только определённого уровня развития, но и определённого состояния кризисности. Кризисы были связаны с тем, что накопленные к этому моменту математические результаты не укладывались в традиционно сложившиеся допустимые рамки способов рассуждений и представлений о порядке вещей. Для преодоления возникших трудностей приходилось коренным образом перерабатывать общие основы и методологию практически всех математических теорий. Это – трудности развития математики, трудности её обоснования.

Первый период – период накопления первичных фактов, или период зарождения математики длился с древнейших времён до VI - V вв. до н.э. В конце 4-го тысячелетия до н.э. в Египте зародилась и начала быстро развиваться независимая цивилизация, а к 3-му тысячелетию относят возникновение там первого математического понятия – абстрактного понятия числа. Параллельно это понятие зародилось в Месопотамии, в Вавилоне. Счёт использовался для расчётов, связанных с вычислением длин, площадей, объёмов тел, объёмов работ и т.п. Рецептурные (или алгоритмические) тексты египтян и вавилонян, содержащие чёткие указания относительно того, что и в какой последовательности следует делать, дошли до наших дней.

Второй период – период элементарной математики, или математики постоянных величин, длился с VI в.до н.э. до XVII века. Начало этого периода ознаменовалось возникновением и преодолением первого крупного кризиса в основаниях математики - в математике Древней Греции. Древнегреческая цивилизация была первой и единственной из древних цивилизаций, которая на научной основе стала искать ответы на насущные вопросы: что есть окружающая нас природа, каковы её законы, как на Земле появился человек, в чём его предназначение и смысл жизни. Раньше ответы на эти вопросы давались религиозными лидерами и принимались всеми. Греки первые поняли, что человек наделён способностью мыслить, открывать истины. Они открыли могущество разума. Греки взялись активно изучать мир природы и своё общество в этом мире. В первых рядах исследователей были те, кто значительное внимание уделял математическим проблемам.

Первой крупной научной школой древнегреческой науки была школа Пифагора, существовавшая на рубеже VI - V веков до н.э. в городе Кротоне на юге Италии. Пифагорейцы по существу превратили математику в науку, развили её как по содержанию (открыли множество новых математических фактов), так и по форме (построили геометрию и арифметику как теоретические, доказательные науки, изучающие свойства отвлечённых понятий о геометрических фигурах и числах). Вершиной достижений пифагорейцев в планиметрии является *доказательство* теоремы Пифагора, формулировка которой была известна ещё вавилонским, китайским и индийским учёным. Величайшим открытием школы Пифагора является открытие несоизмеримых величин. (Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной). До этого математики считали, что любые два отрезка имеют общую меру, хотя, может быть, и очень малую. Это открытие явилось источником первого кризиса основ математики. Для его преодоления математика могла пойти по двум путям. Можно было расширить понятие числа, добавив к рациональным числам числа иррациональные (тем более, что в школе Пифагора число играло главенствующую роль не только в математике, но и в мироздании: "всё есть число"), но греческая математика не готова была ещё идти этим путём. Она пошла по второму пути – геометрическому. Было признано, что геометрические объекты являются величинами более общей природы, чем целые и дробные числа. После этого математика стала строиться не на арифметической, а на геометрической основе. Именно этот путь избрали пифагорейцы, а вслед за ними и большинство древнегреческих математиков, включая Евклида, вплоть до Архимеда и Аполлония. Они развили математические теории исключительной стройности и изящества, сущность и значение которых были оценены по достоинству лишь во второй половине XIX века. Пифагорейцы заложили основы геометрической алгебры. Теэтет и Евклид установили классификацию квадратичных иррациональностей. Евдокс развил геометрическую теорию пропорций и разработал метод исчерпывания – зачаточную форму теории пределов, основанную на геометрической базе. Попытки решить три знаменитые задачи древности (о трисекции угла, о квадратуре круга, об удвоении куба) привели древнегреческих учёных к выработке критериев строгости решения геометрических задач – использоваться могут лишь (идеальные) циркуль и линейка.

В этот же период расцвета древнегреческой цивилизации были заложены основы науки логики. Её основоположником явился гениальный ученик Платона древнегреческий философ и учёный Аристотель (384 - 322 гг. до н.э.). Во-первых, он выделил основные категории логики как науки: это – понятия, суждения и умозаключения. Затем он впервые разработал теорию дедукции, т.е. теорию логического вывода. Именно он первым обратил внимание на то, что в рассуждениях мы из одних утверждений выводим другие, исходя не из конкретного содержания утверждений, а из определённой взаимосвязи между их формами, структурами. Сочинения Аристотеля, посвящённые логике, более 200 лет пролежавшие в подвалах Малой Азии (сейчас – это территория Турции), в середине I в.до н.э. были возвращены Европе и изданы Андроником Родосским под общим названием "Органон". В его состав вошли пять сочинений: "Категории", "Об истолковании", "Первая аналитика", "Вторая аналитика", "Топика". В первом сочинении "Категории" Аристотель устанавливает десять категорий, в которые, по его мнению, укладывается всё сущее, всё нами мыслимое – как материальное, так и абстрактное. "Из слов, высказываемых без какой-либо связи, каждое означает или сущность, или качество, или количество, или отношение, или место, или время, или положение, или обладание, или действие, или страдание." ("Категории", глава 4). Наиболее существенным для логики в сочинении "Об истолковании" является классификация суждений по количеству (общее, частное, единичное), по качеству (положительные и отрицательные), по модальности (категорические (т.е. безоговорочные, безусловные) и гипотетические (т.е. условные)). Основное содержание "Первой аналитики" составляет теория вывода, или доказательства, основой которой служит блестяще решенная Аристотелем задача описания всех правильных силлогизмов (их оказалось шестнадцать), т.е. общезначимых (универсальных для человеческого мышления) способов рассуждений. Эта теория оказалась столь совершенной, что последующие 2000 лет, по существу, ничего нового в неё не внесли и она на весь этот период стала надёжным фундаментом для развития дедуктивных наук, и в первую очередь – математики. "Вторая аналитика" и некоторые главы "Топики" посвящены теории познания, теории строения науки. Наука, по Аристотелю, представляет собой последовательность предложений, относящихся к некоторой области. Среди этих предложений имеются основные или исходные, которые настолько очевидны, что не требуют доказательств. Это – аксиомы. Остальные предложения должны быть выведены (доказаны) из них. Это – теоремы. "Из первичных же недоказуемых положений доказательство должно вестись потому, что нет знания доказуемого, и не случайным образом – это и значит иметь доказательство." ("Вторая аналитика", глава 2). Понятия, входящие в эти предложения, в свою очередь, делятся на основные понятия, которые непосредственно очевидны и не допускают определений, и определяемые понятия. Точка зрения Аристотеля на определение понятий особенно чётко выражена в "Топике": определение понятия осуществляется путём его включения в ближайшее родовое понятие и указания видовых отличий. Основных понятий при построении науки должно быть достаточно в том смысле, что все вторичные понятия могут быть определены по тому правилу определения, которое только что сформулировано. Наконец, основных предложений должно быть также достаточно в том смысле, что для доказательства остальных предложений (теорем) требуются только правила логики. Эта научная доктрина Аристотеля была принята как руководство к действию, прежде всего, математиками.

Когда примерно полстолетия спустя появился гениальный труд Евклида (330 – 275 гг. до н.э.) "Начала", в котором он впервые предпринял попытку упорядочить накопившиеся к тому времени обширные сведения по геометрии и взглянуть на эту науку с общелогических позиций, то в структуре этого труда явно просматривалась печать схемы Аристотеля. Евклид положил начало обоснованию геометрии как аксиоматической теории, а всей математики – как совокупности аксиоматических теорий. Этот бессмертный труд Евклида по существу преодолел на том этапе первый кризис основ математики, открыв перед математикой широкую дорогу, по которой она прошагала до XIX века.

Интересно отметить, что в средние века восстановление античной науки и признание её христианством, до того относившимся к ней отрицательно, началось именно с того, что была признана значимой в рамках нового мировоззрения логика Аристотеля в объёме первых семи глав его "Аналитик". Подчёркивая строгость логических рассуждений Аристотеля, Лейбниц отметил: "Аристотель был первым, кто писал математически в нематематике". На протяжении многих последующих веков различными философами и целыми философскими школами дополнялась, усовершенствовалась и изменялась логика Аристотеля. Это был первый, доматематический, этап развития формальной логики.

Таким образом, в конце второго периода развития математики в математику вошла логика, и математика стала логической, доказательной наукой.

Третий период в истории развития математики – период классической высшей математики, начался в XVII веке с открытия независимо Ньютоном и Лейбницем анализа бесконечно малых (дифференциального и интегрального исчислений). В этот период математика приступила к изучению переменных величин и движения. В это время в математику активно вторгаются понятия отрицательного, иррационального и комплексного числа, предела, производной и интеграла, бесконечно малой и бесконечно большой величины, логарифмы отрицательных и комплексных чисел, сходящиеся и расходящиеся бесконечные интегралы и ряды, разрывные функции. Все эти понятия создаваемые математиками, были достаточно далеки от реального мира, представляли собой абстракции значительно более высокого ранга, нежели те, которыми оперировали древние математики. Для этих понятий устанавливались многочисленные результаты, которые прекрасно согласовывались с практикой и давали реальную отдачу, были подкреплены опытом и наблюдением. Математика XVII-XVIII веков получила колоссальное количество прикладных результатов, которые используются до настоящего времени. Это связано в первую очередь с открытием дифференциального и интегрального исчислений. Но, увлекшись прикладной стороной своей науки, математики забыли о её фундаменте – о её логическом обосновании. К началу XIX века ни арифметика вещественных чисел, ни алгебра, ни анализ, ни геометрия не имели полноценного и сколько-нибудь надёжного логического обоснования. Такой отрыв привёл ко второму серьёзному кризису оснований математики.

Преодоление этого кризиса потребовало от математиков значительных усилий и создания новой методологии. Здесь, в отличие от первого кризиса, происшедшего в древнегреческой математике, решающую роль сыграло понятие числа. Выдающиеся математики XIX века О.Коши (1789 – 1857), К.Вейерштрасс (1815 – 1897), Г.Кантор (1845 – 1918), Р.Дедекинд (1831 – 1916) отчётливо осознали, что без логически строгой теории вещественных чисел не может быть строго обоснован математический анализ, а вслед за ним и геометрия. И такая аксиоматическая теория вещественных чисел была ими построена в 1870 году. Затем итальянским математиком Дж.Пеано (1858 – 1932) было дано логическое обоснование теории рациональных чисел. Попутно была решена проблема обоснования привычной нам сейчас алгебры. Почему, свободно манипулируя символами так, как если бы они были натуральными числами, мы получаем верные результаты и в том случае, когда вместо символов подставляем вещественные или комплексные числа? Это происходит потому, что вещественные и комплексные числа обладают такими же формальными свойствами, что и натуральные числа. В конце XIX в. Пеано создал аксиоматическую теорию натуральных чисел.

В это же время начинается второй этап в развитии логики, характеризующийся тем, что в логике начинают применяться математические методы. Начало ему положил немецкий философ и математик Г.-В.Лейбниц (1646 – 1716). Он пытался построить универсальный язык, с помощью которого разрешались бы споры между людьми, а затем и вовсе все "идеи заменить вычислениями". Основоположником применения математики для изучения логики явился английскй математик и логик Джордж Буль (1815 – 1864). В середине XIX века появляются его работы "Математический анализ логики" (1847) и "Исследование законов мышления" (1854), в которых он применил к логике методы современной ему алгебры – язык символов и формул, составление и решение уравнений. Им была создана своеобразная алгебра – алгебра логики. В этот период она оформилась как алгебра высказываний и была значительно развита в работах шотландского логика А.де Моргана (1806 – 1871), английского – У.Джевонса (1835 – 1882), американского Ч.Пирса (1839 – 1914), немецкого алгебраиста и логика Э.Шрёдера (1841 – 1902), русского математика, астронома и логика П.С.Порецкого (1846 – 1907). В 1884 г. появляется первая формализованная система логики, построенная Готлобом Фреге. Создание алгебры логики явилось заключительным звеном в развитии формальной логики: алгебра логики поставила и решила в самом общем виде те задачи, которые рассматривались в аристотелевской логике. Формальная логика в результате использования в ней развитого символического языка окончательно оформилась как логика символическая. По существу в логику вошла математика, и логик а стала математической наукой – математической логикой.

Значительный толчок к новому периоду развития математической логики дало открытие в первой половине XIX века великим русским математиком Н.И.Лобачевским (1792 – 1856) и независимо от него венгерским математиком Я.Бояи (1802 – 1860) неевклидовой геометрии. Это открытие послужило толчком к глубоким исследованиям в области оснований математики. Предметом этих исследований стал главным образом аксиоматический метод построения математических теорий. Возникла новая область математики, занимающаяся изучением построения математических теорий. Д.Гильберт назвал её *метаматематикой* или *теорией доказательства*. Исследование проблем оснований математики стимулировало дальнейшее могучее развитие математической логики. Стимулировал в значительной степени эти исследования третий кризис в основаниях математики – кризис её логических оснований. Он был связан с обнаружением парадоксов (антиномий) в созданной Кантором теории множеств. Последствия этого кризиса продолжают преодолеваться по настоящее время.

Таким образом, к началу XX века перед математической логикой встали задачи, которые перед логикой Аристотеля не возникали: она должна была исследовать основания математической науки, исследовать математику как совокупность аксиоматических теорий, исследовать аксиоматический метод построения математических теорий.

В параграфах 26 и 27 мы более подробно рассмотрим существо кризиса, разразившегося в основаниях математики на рубеже XIX и XX веков, а также те пути, которые были предложены математиками различных школ для преодоления возникшего кризиса и выхода из него. В заключительной главе VI будут рассматрены некоторые результаты, полученные математической логикой на одном из путей выхода из этого кризиса.

Четвёртый период в развитиии математики – это период современной математики, математики XX века. В конце XIX столетия сформировались и в настоящее время получили развитие новые разделы математики, в которых в качестве предмета изучения на первое место выдвинулось ещё одно важное абстрактное понятие – понятие структуры. Оно основано на идеях теории множеств, созданной Г.Кантором, а широкое его внедрение в математическую практику произошло благодаря многотомному труду "Элементы математики" французских математиков XX века, печатавшихся под коллективным псевдонимом Никола Бурбаки. Они поставили своей целью провести классификацию математических наук, основанную на понятии математической структуры. Они установили, что фундамент всей современной математики во всём её многообразии составляют математические структуры трёх типов: алгебраические, порядковые и топологические. Различные математические науки изучают эти структуры. Так что математика является единой наукой, а различные и развивающиеся весьма изолированно друг от друга её разделы являются звеньями единого организма.

§26. Кризис оснований математики на рубеже XIX и XX веков

Остановимся более подробно на существе кризисных явлений в основаниях математики на рубеже XIX и XX веков. Первым серьёзным толчком к осознанию кризисности ситуации в основаниях математики явилось открытие в 90-ых годах XIX века ряда парадоксов в канторовской теории множеств. Попытки выявления причин обнаруженных парадоксов, а также попытки их преодоления высветили существенные расхождения во взглядах различных математиков на основные понятия и принципы математики, а также на методы логики, используемые при доказательстве математических теорем.

Парадоксы канторовской теории множеств. С момента создания Георгом Кантором в начале 70-х годов и до конца XIX века математики считали теорию множеств незыблемой основой всего математического здания. Но в конце XIX столетия в самой теории множеств были обнаружены противоречия, получившие название *антиномий* (парадоксов) теории множеств. Антиномия буквально означает противоречие в законе, а парадокс – ситуация, когда в теории доказаны два взаимно исключающих друг друга суждения (одно является отрицанием другого), причём, каждое из этих суждений выведено убедительными с точки зрения данной теории средствами, и рассуждения, приводящие к противоречию, не содержат никаких логических ошибок. Это обстоятельство поколебало веру в безусловную надёжность математических доказательств.

Первый такой парадокс обнаружил сам Кантор в 1895 г. и сообщил об этом Гильберту. В 1897 г. его переоткрыл и впервые опубликовал Бурали-Форти. В 1899 г. Г.Кантор обнаружил ещё один парадокс, связанный с активно разрабатываемой им тогда теорией мощностей множеств (или кардинальных чисел).

Суть *парадокса (антиномии) Кантора* состоит в следующем. Пусть M – множество всех множеств и $B(M)$ – множество всех его подмножеств. Поскольку $B(M)$ состоит из множеств, поэтому $B(M) \subseteq M$. Тогда в силу теоремы Кантора (мощность подмножества не превосходит мощности самого множества) имеем: $|B(M)| \leq |M|$. По другой теореме Кантора, мощность множества $B(M)$ всех подмножеств множества M строго больше мощности множества M: $|B(M)| > |M|$. Получаем противоречие.

Хотя ни Кантор, ни Бурали-Форти не были способны в то время предложить разрешение антиномии, ситуация не казалась слишком серьёзной: эти парадоксы возникли в довольно специальных разделах теории множеств (связанных с так называемыми ординальными и кардинальными числами), и, вероятно, казалось, что лёгкий пересмотр доказательств теорем, входящих в эти разделы, мог бы спасти положение, и всё здание теории множеств затронуто не будет.

Но в 1902 г. английский философ, логик и математик Бертран Рассел обнаруживает антиномию, относящуюся к самым началам теории множеств и показывающую, что в основаниях этой дисциплины что-то неблагополучно. Антиномия Рассела потрясла основы не только теории множеств, но и логики: требовалось лишь лёгкое изменение в формулировке, чтобы перевести антиномию Рассела в противоречие, которое можно сформулировать в терминах самых основных понятий логики. Антиномия Рассела сильнейшим образом затронула самые фундаментальные понятия двух самых "точных" наук – логики и математики.

Суть *парадокса (антиномии) Рассела* состоит в следующем. Распределим все множества по двум классам: в первый класс включим все те множества, которые содержат себя в качестве своего элемента, во второй класс – все те множества, которые не содержат себя в качестве своего элемента. (Например, множество всех планет не является планетой и поэтому не есть собственный элемент. Напротив, множество всех множеств является своим собственным элементом). Рассмотрим множество M, элементами которого являются все множества второго класса. Спрашивается, к какому из двух выше названных классов принадлежит множество M ? Допустим, что оно принадлежит к первому классу. Тогда множество M содержит себя как элемент. Но элементами множества M являются множества второго класса; значит, множество M принадлежит ко второму классу. Мы пришли к противоречию. Допустим теперь, что множество M принадлежит ко второму классу. Так как все множества второго класса являются элементами множества M, то M содержит себя как элемент и поэтому принадлежит первому классу. Мы вновь пришли к противоречию.

Таким образом, множество M не принадлежит ни к первому, ни ко второму классу, что противоречит тому, что все множества распределены по этим двум классам.

Противоречию относительно M можно придать и следующий, логический, вид, если задаться вопросом: какое утверждение для M имеет место: $M \in M$ или $M \notin M$? Ответ будет обескураживающим. В самом деле, если $M \in M$, то M принадлежит второму классу и, значит, $M \notin M$. Если же предположить, что $M \notin M$, то, по определению второго класса, M принадлежит ему. Но все элементы второго класса являются элементами множества M. Следовательно, $M \in M$. Итак, мы доказали, что $M \in M \iff M \notin M$ – явное противоречие.

Парадоксу Рассела были приданы различные словесные формулировки. Одна из них выглядит так. Житель некоей деревни, называемый брадобреем, должен брить тех и только тех жителей деревни, которые не умеют бриться сами. Задавшись вопросом, как брадобрей должен поступить по отношению себя, мы аналогичными рассуждениями придём к парадоксальному выводу: брадобрей должен брить себя в том и только в том случае, когда он не должен брить себя.

Парадоксы теории множеств показали, что наивная концепция множества, фигурирующая в канторовском "определении" множества и в получающихся из него общеизвестных следствиях, не может служить удовлетворительной основой теории множеств, не говоря уже о математике в целом. Роль антиномий как фактора, контролирующего и ставящего ограничения на дедуктивные системы логики и математики, можно сравнить с ролью эксперимента, проверяющего правильность полудедуктивных систем таких наук, как физика и астрономия, и вносящего в них видоизменения. И хотя в 1899 году в своей книги "Основания геометрии" Д.Гильберт сказал, что, "никто не может изгнать нас из рая, который создал нам Кантор", открытие парадоксов предрешило уход математиков из этого канторовского "рая".

Критика некоторых теоретико-множественных принципов. С античных времён философов и математиков интересовала проблема бесконечности. Ещё древнегреческий философ Зенон Элейский (V в. до н.э.), ученик Парменида, привёл несколько примеров апорий (логических затруднений, парадоксов), касающихся бесконечности и указывающих на непростую её природу (см., например[8]). Две из них, например, формулируются так. 1) *Дихотомия:* движущееся тело никогда не достигнет конца пути, потому что сначала оно должно дойти до середины пути, потом до середины остатка пути и т.д. 2) *Ахиллес и черепаха*: быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепаху, если та в начале движения находилась на некотором расстоянии впереди него.

Блез Паскаль в XVII в. отмечал: "Мы знаем, что бесконечность существует, но не ведаем, какова её природа." Существенный вклад в понимание природы бесконечности был внесён И.Ньютоном и Г.-В.Лейбницем в ходе разработки ими методов анализа бесконечно малых величин (дифференциального и интегрального исчислений). Наконец, канторовская теория мощностей множеств (кардинальных чисел) не только значительно углубила математическое понимание природы бесконечности, но и привела к обнаружению ряда парадоксов, связанных с ней.

В связи с выявленными парадоксами было обращено внимание на две концепции в понимании бесконечных множеств, существующие с древнейших времён. Это – концепции (или абстракции) *актуальной бесконечности* и *потенциальной бесконечности*.

Актуальная бесконечность есть понятие о бесконечности, состо-

[8]История математики, т. 1. С древнейших времён до начала нового времени. – М.: Наука, 1970. С. 87 - 93.

ящее в рассмотрении бесконечной совокупности предметов как завершённого объекта, независимо от процесса построения этих предметов. Считается, что все акты построения бесконечного множества предметов уже состоялись, и бесконечное множество представлено сразу всеми своими элементами. Поскольку такое построение в действительности принципиально не может быть завершено, поэтому понятие актуальной бесконечности имеет идеализированный характер. Актуальная бесконечность возникает в результате мысленного отвлечения (абстрагирования) от этой незавершённости, т.е. в результате применения абстракции актуальной бесконечности.

Принятие абстракции актуальной бесконечности означает, что такие бесконечные множества, по существу, уподобляются конечным множествам, и при доказательствах утверждений о бесконечных множествах применяются те же логические приёмы и методы, что и для конечных множеств, но здесь они как раз и являются одним из источников парадоксов. Критическое отношение к абстракции актуальной бесконечности началось задолго до открытия парадоксов. Ещё Аристотель в своей книге "Физика" писал: "Остаётся альтернатива, согласно которой бесконечное имеет потенциальное существование... Актуально бесконечное не существует." Много лет спустя, в 1831 г. К.-Ф.Гаусс отмечал: "Я возражаю... против употребления бесконечной величины как чего-либо завершённого, что никогда не позволительно в математике." Эту позицию разделяли также О.Коши, Л.Кронекер, Э.Борель, А.Лебег, А.Пуанкаре. Наиболее непримиримыми критиками абстракции актуальной бесконечности выступили Л.Э.Я.Брауэр и Г.Вейль.

Другим важным теоретико-множественным принципом, подвергшимся критике и вызвавшим многочисленные споры в связи с обнаруженными парадоксами, явилась знаменитая ***аксиома выбора***. Впервые она была явно сформулирована немецким математиком Э.Цермело в 1904 г. Она формулируется так: каково бы ни было непустое семейство попарно непересекающихся непустых множеств, существует множество M, содержащее точно по одному элементу из каждого множества из этого семейства. Другими словами, из каждого множества этого семейства можно выбрать точно по одному элементу и составить из этих элементов множество M.

Споры вокруг этой аксиомы и её критика были вызваны следующими обстоятельствами. С одной стороны, её формулировка на удивление прозрачна и интуитивно ясна. С другой стороны, аксиома никак не поясняет, как строится множество M и как оно устроено, т.е. в этом смысле аксиома не конструктивна и не эффективна. Кроме того, несмотря на интуитивную ясность аксиомы выбора, из неё были получены такие следствия, которые абсолютно противоречили интуиции "здравого смысла". Один из наиболее известных результатов такого рода (теорема Банаха - Тарского) – доказательство того, что всякий шар можно разбить на конечное число частей, из которых только движениями в пространстве можно составить два точно таких же шара.

Ситуация с аксиомой выбора осложнялась тем, что она использовалась при доказательстве многих известных и важных теорем теории множеств и анализа. Сначала была надежда на то, что эти теоремы могут быть доказаны без использования аксиомы выбора, но впоследствии было доказано, что это невозможно.

Чтобы исключить влияние аксиомы выбора на выявленные парадоксы, одни математики пытались вывести её из каких-то других аксиом, другие предлагали вовсе отказаться от неё. Оказалось, что ни то, ни другое невозможно. Это было впоследствии доказано методами математической логики.

Критика некоторых логических законов аристотелевой логики. Мы уже отмечали, что концепция актуальной бесконечности уподобляет бесконечные множества конечным и к бесконечным множествам применяются те же логические методы и законы рассуждений, что и к конечным, выработанные традиционной (аристотелевой) логикой. Это, прежде всего, следующие два закона: закон исключённого третьего $P \vee \neg P$ (его латинское название – *tertium non datur* – третьего не дано) и закон (снятия) двойного отрицания $\neg\neg P \to P$. Эти два логических закона служат основой метода доказательства от противного, впервые изобретённого Евклидом и широко использовавшегося им в его "Началах". Применяемый к бесконечным множествам этот метод служит обоснованием так называемых теорем чистого существования, когда существование того или иного (математического) объекта устанавливается не путём его конструктивного построения, а путём получения логического противоречия из предположения о том, что такого объекта не существует.

Неправомерность переноса закона исключённого третьего на рассуждения о бесконечных множествах наглядно демонстрируют следующие соображения. Закон утверждает, что для всякого утверждения A верно A или не-A. Возьмём в качестве A утверждение: "Существует элемент множества M, обладающий свойством P", или символически "$(\exists x)(P(x))$". Закон исключённого третьего в этом случае утверждает: $(\exists x)(P(x)) \vee \neg(\exists x)(P(x))$. Предположим, что предикат $P(x)$ таков, что для любого $x \in M$ можно эффективно определить, обладает x свойством P или нет. Если множество M конечно, то можно последовательно перебрать все его элементы и для каждого $x \in M$ выяснить, верно для него утверждение $P(x)$ или нет. Если же множество M бесконечно, то процесс перебора элементов M с целью нахождения элемента с заданным свойством P может никогда не закончиться.

Все эти кризисные явления в основаниях математики, усилия по выявлению их причин и истоков, попытки преодоления создавшейся ситуации привели к тому, что в результате было сформировано несколько направлений, по которым различные группы математиков предлагали различные пути выхода из кризиса.

§27. Пути выхода из кризиса и его последствия

Без преувеличения можно сказать, что попытки выйти из разразившегосы в основаниях математики привели к результатам надматематического, поистине философского характера. По существу, указанные направления выхода основывались на двух основополагающих ипостасях человеческого мышления – его логической и интуитивной составляющих. Те математики, которые отдавали приоритет логической составляющей мышления, сформировали сразу два направления, получившие названия *логицизм* и *формализм*. Те же математики, которые в мыслительных процессах отдавали предпочтение интуиции и интуитивному озарению, сформировали направление, получившее название *интуиционизм*. В этом параграфе рассмотрим эти направления подробнее.

Логицизм. Это философско-математическое направление в основаниях математики возникло на базе бурного развития математической логики. Его основоположниками стали немецкий математик и логик Готлоб Фреге (1848 – 1925) и английский – Бертран Рассел (1872 – 1970). Первым из них и независимо англичанином Ч.Пирсом были введены в язык алгебры логики предикаты, предметные переменные и кванторы, что дало возможность применить этот язык к вопросам оснований математики.

Главный тезис логицистов состоял в том, математика является отраслью логики; математические понятия следует определять в терминах логических понятий; теоремы математики следует доказывать как теоремы логики. Математика выводится из логики – этот факт, утверждал Б.Рассел, является величайшим открытием XX века. Первым, кто рассматривал логику как науку, идеи и принципы которой лежат в основе всех других наук, был Г.-В.Лейбниц (1646 – 1716). Р.Дедекинд (1831 – 1916) и Г.Фреге занимались определением математических понятий в терминах логических, а Дж.Пеано (1858 – 1932) – выражением математических теорем в логическом символизме. Окончательный выриант позиции логистической школы, где подробно излагается конструкция математики с точки зрения логики, содержится в трёхтомном труде А.Уайтхеда и Б.Рассела "Основания математики" (Principia Mathematica, 1910 – 1913 гг.).

Б.Рассел пришёл к выводу, что причиной появления парадоксов являются не логические ошибки при доказательствах (выводах), а те посылки, на которых эти доказательства основываются. Это, прежде всего, – правила, допускающие рассмотрение объекта, заданного с помощью любой правильной в грамматическом отношении фразы. Например, такие, в которых объект определяется через самого себя, или через класс объектов, содержащих определяемый объект. Получается своего рода "порочный круг" – определяемый объект не может быть действительно новым. Именно таким объектом оказывается "множество всех множеств", фигурирующее в парадоксе Рассела. Такие определения были названы непредикативными. С точки зрения математической логики это означает, что не всякий предикат (т.е. не всякое свойство) определяет множество объектов, удовлетворяющих этому предикату (обладающих этим свойством).

Для исключения непредикативных определений и преодоления обнаруженных парадоксов Б.Рассел разработал так называемую разветвлённую теорию типов. Начало её состоит в следующем. Первичные объекты или индивидуумы (т.е. данные вещи, которые не подвергаются логическому анализу) приписываются одному типу (скажем, типу 0), свойства индивидуумов – типу 1, свойства свойств индивидуумов – типу 2 и т.д.; не допускается никаких свойств, которые не попали бы в один из этих логических типов. Согласно такой иерархии типов, само утверждение принадлежит более высокому типу, чем те, о которых в нём что-то утверждается. Так, в применении к теории множеств все множества образуют класс, который множеством уже не является. Это есть объект другого (более высокого, нежели множества) типа. Аналогично, в парадоксах лжеца, или Эвбулида ("*Я лгу*", или "*Фраза, которую я произношу, ложна*"), или Ф.И.Тютчева ("*Мысль изречённая есть ложь*") истинность, о которой говорится в утверждении, и истинность самого этого утверждения – свойства, относящиеся к разным типам, и они не могут быть сравнены. Как показали в своём труде Б.Рассел и А.Уайтхед, теория типов позволяет избежать всех известных в то время парадоксов.

Логическая строгость, возведённая логицистами в абсолют, превратила математику в игру и манипуляцию знаками и символами, не имеющими никакого отношения к реальной действительности. В итоге на вопросы о том, каким образом входят в математику новые идеи и как она может описывать реальный мир, если её содержание целиком выводимо из логики, логицисты ответить не смогли. Тем не менее, книга А.Уайтхеда и Б.Рассела "Principia Mathematica" оказала огромное влияние на развитие математики и математической логики в XX веке – как на сторонников школы логицизма, так и на её противников. Г.Вейль отметил, что в этой книге "*математика основывается уже не на логике, а на логическом рае ...*"

Интуиционизм. Кризис в основаниях математики на рубеже XIX и XX веков резко обострил вопрос о соотношении логического и интуитивногов в математическом мышлении. В этот критический момент математика, на протяжении двадцати пяти веков стремившаяся к логическом совершенству, не могла не довести логическую идею до определённого "логического" конца. Возникло философско-математическое направление, получившее название логицизм, о котором говорилось в предыдущем пункте. Но и сторонники приоритета интуитивного начала в математическом мышлении с большой остротой восприняли разразившийся кризис и предложили свой путь для его преодоления. Созданное ими философско-математическое течение получило название *интуционизм.*

Многие творческие личности превозносили интуицию, считая её божественным даром, откровением, высшей функцией интеллекта, а логику – чем-то более приземлённым, прозаичным, занудным. Р.Декарт произнёс крылатую фразу: "*Постигаю, следовательно, я существую*" ("*Cogito ergo sum*"), имея в виду, что окружающий мир допускает проникновение в его тайны человеческой интуиции. Глубоко верил в интуицию знаменитый французский математик, физик и философ Б.Паскаль (1623 – 1662) Именно на неё опирался он в основном в своих математических работах. Он предвидел важные результаты, высказывал великолепные догадки, находил изящные и неожиданные решения. Более того, с годами Паскаль стал отдавать интуиции предпочтение перед логикой, что привело его к мысли: "Логика – медленный и мучительный метод, позволяющий тем, кто не знает истины, открывать её."

Способность мышления к интуитивным суждениям является важнейшим фактором, позволяющим мышлению открывать новые факты, новое знание. Это обстоятельство неоднократно отмечалось многочисленными мыслителями в разные времена. Вот что заметил по этому поводу великий естествоиспытатель итальянец Галилео Галилей (1564 – 1643), исследовавший с помощью наклонной пизанской башни законы движения и изучавший аристотелеву логику [9]: "*Мне кажется, что логика учит познавать, правильно ли сделаны выводы из готовых рассуждений и доказательств, но чтобы она могла научить нас находить и строить такие рассуждения и доказательства – этому я не верю.*" "*Доказывают при помощи логики, изобретают при помощи интуиции,*" – категорически утверждает французский математик XX века А.Пуанкаре[10]. Его мнение разделяет русский математик В.А.Стеклов (1863 – 1925): "*Метод открытия и изобретения один и тот же, та же интуиция, ибо при помощи логики никто ничего не открывает.*" (Цит. по [11])

Признание за интуицией высшего начала, преувеличение её роли в процессе познания, а также умаление значения логики в этом процессе, обвинения логики в порождении антиномий (парадоксов) привели к тому, что в начале XX века с целью обоснования математики и ликвидации возникших в ней парадоксов сформировалось крупное философское направление – *интуиционизм.* Его главным творцом и идеологом явился голландский математик и философ Лёйтцен Эгберт Ян Брауэр (1881 – 1966), который в 1907 г. в своей докторской диссертации "Об основаниях математики" сформулировал концепцию и философию интуиционизма. Математика, считает Брауэр, вне человеческого разума не существует. Разум непосредственно постигает основные, явные и понятные, интуитивные представления. Фундаментальные математические понятия изначально даны и интуитивно ясны. Это – понятия целого числа, сложение целых чисел, умножение, математическая индукция. Эту мысль сформулировал ещё Л.Кронекер (1823 – 1891) в своём знаменитом тезисе "*Натуральные числа создал Господь Бог; всё остальное – дело рук человеческих*".

В основе математического мышления лежит фундаментальная

---

[9] *Галилей Г.* Избр. труды, т.1. – М.: Наука, 1964.

[10] *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука, 1983. – 560 с. (стр. 360).

[11] *Эрдниев П.М.* О взаимосвязи логики и психологии в решении вопросов методики математики // Математика в школе, 1977, № 6, с. 68 – 70 (с. 68).

математическая интуиция. Интуитивно ясные понятия и представления, которые должны быть положены в основание математики, по мнению интуиционистов, не являются ни эмпирическими, ни чувственными, а непосредственно данными, интуитивно ясными для всех. Математика по своей природе синтетична. Она занимается составлением истин, а не выводит их из логики. Интуиция, а не опыт или логика, определяет, согласно Брауэру, правильность и приемлемость идей. Логика же не является надёжным инструментом для открытия истин и не может открыть истины, не полученные каким-то другим путём. Логика строится на математике, а не математика на логике. Математика отнюдь не обязана почтительно относиться к правилам логики. Парадоксы являются дефектом логики, а не собственно математики. Интуиционисты, в частности, подвергли критике логический закон исключённого третьего.

Один из продолжателей интуиционистского направления Аренд Гейтинг так излагал в 1934 г. эти идеи Брауэра: "Согласно Брауэру, математика тождественна с точной частью нашего мышления... Никакая наука – в частности, ни философия, ни логика – не может служить предпосылкой для математики. Было бы порочным кругом применять в качестве средств для доказательств какие-либо философские или логические принципы, потому что в формулировке таких принципов уже предполагаются математические понятия". Для математики не остаётся "никакого другого источника, кроме интуиции, которая с непосредственной ясностью помещает перд нашими глазами математические понятия и выводы". Эта интуиция "является не чем иным, как способностью рассматривать в отдельности различные понятия и выводы, регулярно встречающиеся в обычном мышлении". "В интуиционистской математике выводы не извлекаются по фиксированным правилам, которые можно объединить в логику, а каждый вывод в отдельности непосредственно подтверждается своей очевидностью". С этих позиций интуиционисты рассмотрели имеющиеся в математике доказательства и многие из них признали неприемлемыми, прежде всего, именно из-за той логики, на которой они основывались.

Л.Э.Я.Брауэр первым бросил вызов многовековой вере в абсолютную правильность законов классической логики, дошедших до нас от Аристотеля, независимо от содержания того, к чему они применяются. Другой видный представитель интуиционизма Г.Вейль сказал об этом так: "Согласно его взглядам и пониманию истории, классическая логика была абстрагирована от математики конечных множеств и их подмножеств... Забывая об этом ограниченном происходжении, впоследствии эту логику приняли ошибочно за нечто высшее и первичное по отношению ко всей математике и в конце концов стали применять её без какого-либо оправдания к математике бесконечных множеств". Ярким примером принципа, не переносимого с рассуждений о конечных множествах на рассуждения о бесконечных множествах, является прнцип, заключающийся в том, что целое больше любой своей собственной части (вспомните канторовскую теорию мощностей множеств).

Вслед за этим интуиционисты резко поставили вопрос о концепции бесконечности в математике. Если в классической математике бесконечность рассматривается как актуальная, или завершённая, или экзистенциальная, бесконечное множество рассматривается как существующее в виде завершённой совокупности, то Брауэр предложил рассматривать бесконечность исключительно как потенциальную, или становящуюся, или конструктивную. Г.Вейль писал в 1946 г. по поводу этой позиции Брауэра: "*Брауэр выяснил и, как мне кажется, не оставил никакого сомнения в том, что не существует доводов, защищающих веру в экзистенциальный характер совокупности всех натуральных чисел... Этот ряд чисел, который растёт , не останавливаясь ни на какой стадии, за счёт перехода к следующему числу, представляет собой многообразие возможностей, открытых для бесконечности; он вечно остаётся в состоянии становления, а не является замкнутым царством вещей, существующих в себе. То, что мы слепо превращаем одно в другое, является истинным источником наших трудностей, в том числе антиномий, – источником более глубокой природы, чем указанный Расселом принцип порочного круга.*"

Таким образом, принятие концепции потенциальной бесконечности – это по существу начало, первооснова конструктивистского подхода к решению математических задач. Этот подход естественным образом приводит далее к критике классической логики с целью перевода и её на конструктивистские рельсы. Так, дизъюнкция $A \vee B$ для интуициониста является сообщением о том, что имеется метод, посредством которого из A и B можно выбрать одно, которое имеет место. При таком подходе закон исключённого третьего $A \vee \neg B$, основывающийся на дизъюнкции, утрачивает свою универсальность. (С точки зрения классической математики, для доказательства $A \vee B$ достаточно установить $\neg(\neg A \wedge \neg B)$, т.е. опровергнуть утверждение о неверности обоих членов дизъюнкции). Конъюнкция $A \wedge B$ означает, что имеется метод, позволяющий установить, что оба высказывания A и B имеют место. Импликация $A \to B$ выражает тот факт, что имеется метод, который по каждому доказательству A позволяет получить некоторое доказательство B. Наконец, отрицание $\neg A$, что имеется метод, который по каждому доказательству A позволяет получить доказательство противоречия B и $\neg B$.

Далее, следуют интуиционистские (конструктивистские) интерпретации математических утверждений, содержащих кванторы. Универсальное высказывание "*Все натуральные числа n обладают свойством P*" или, короче, "*Для всех n имеет место $P(n)$*" интуиционисты понимают как гипотетическое утверждение, согласно которому, если дано какое-нибудь натуральное число n, то можно быть уверенным, что оно обладает свойством P. Метод полной математической индукции служит примером интуиционистского метода доказательства универсальных утверждений о натуральных числах. Экзистенциальное высказывание "*Существует число n такое, что $P(n)$*" интуиционистами рассматривается как частичное сообщение о высказывании, которое даёт конкретный пример натурального числа n со свойством P, или, по крайней мере, указывает метод, позволяющий в принципе найти такой пример. Неконструктивные, ил косвенные доказательства теорем существования, встречающиеся в классической математике, интуиционисты отвергают. В частности, метод доказательства от противного, широко применяемый в классической математике и опирающийся на законы классической логики – исключённого третьего и двойного отрицания, – является одним из источников неконструктивных, неэффективных доказательств теорем существования и потому не признаётся интуиционистами.

С развитием интуиционистского направления в математике возникла проблема разработки особой, интуиционистской логики, отличающейся от классической логики Аристотеля. Задачу формализации этой логики блестяще решил в 20-ых годах XX века ученик и последователь Брауэра голландский математик Аренд Гейтинг (1898 – 1980), сыгравший большую роль в распространении его идей. Он создал интуиционистское исчисление, которое стало известно как исчисление Гейтинга. Это исчисление основывается на логических операциях $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ и (в рамках логики высказываний) на следующих схемах аксиом:

(I_1) $P \rightarrow (P \wedge P)$;

(I_2) $(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$;

(I_3) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R))$;

(I_4) $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$;

(I_5) $Q \to (P \to Q)$;

(I_6) $(P \wedge (P \to Q)) \to Q$;

(I_7) $P \to (P \vee Q)$;

(I_8) $(P \vee Q) \to (Q \vee P)$;

(I_9) $((P \to R) \wedge (Q \to R)) \to ((P \vee Q) \to R)$;

(I_{10}) $\neg P \to (P \to Q)$;

(I_{11}) $((P \to Q) \wedge (P \to \neg Q)) \to \neg P$.

Правилом вывода в данном исчислении является обычное правило вывода Modus Ponens классического исчисления высказываний.

Интуиционистская логика явилась по существу первой логической системой отличной от классической логической системы Аристотеля.

Анализ всех разделов математики с интуиционистских позиций оказался делом весьма трудоёмким. Тем не менее, интуиционисты построили целую новую математику, включая теорию континуума и теорию множеств. Часть результатов классической математики была признана негодной, часть результатов удалось доказать, исходя из новой методологии, но эти новые конструктивные долказательства оказались чрезвычайно сложными и громоздкими. В общем в качестве замены для классической математики интуиционистская математика оказалась менее мощной и во многих случаях более сложной. Тем не менее, столь глубокий анализ оснований математики, который проделали интуиционисты с конструктивистских позиций, имел громадное значение для её последующего развития.

Интуиционизм не решил всех тех проблем, которые поставил кризис перед основаниями математики. Но он сумел убедить многих, что неограниченное использование логического закона исключённого третьего и основанные на нём доказательства теорем так называемого чистого существования, когда существование того или иного (математического) объекта обосновывается тем, что предположение о его несуществовании приводит к противоречию, нуждаются в пересмотре.

Интуиционствкое направление обоснования математики, оттолкнувшись от интуитивного начала в мыслительных процессах, пришло к необходимости конструктивистского понимания рассуждений в математике. Интуитивное озарение, интуитивное понимание и разложение мысли в конструктивную (дискретную) последовательность шагов – вещи, казалось бы, несовместимые. Тем не менее, сошлись. Интуиционистский конструктивизм дал точкок развитию **конструктивистского** (или **конструктивного) направления в математике**, которое впоследствии привело к пониманию алгоритмов, компьютерного программирования, искусственного интеллекта.

Это направление началось с математической интерпретации интуиционистской логики как логики решения задач или проблем, данной в 1932 г. выдающимся советским математиком А.Н.Колмогоровым (1903 – 1987). Каждая формула алгебры высказываний рассматривается не просто как формула, но как требование решить задачу, т.е. построить объект, удовлетворяющий некоторым условиям. Это – так называемая конструктивная интерпретация логики высказываний. Логические связки понимаются как средства построения формулировок более сложных задач из более простых, аксиомы – как задачи, решения которых даны, правила вывода – как способы преобразования решений одних задач в решения других. Отметим, что решение задачи – это не только сам искомый объект, но и доказательство того, что он удовлетворяет предъявляемым требованиям.

Например, формула $A \wedge B$ понимается в колмогоровской интерпретации как задача, состоящая в том, чтобы построить и решение задачи A, и решение задачи B, правило вывода $A, B / A \wedge B$ – как преобразование, строящее из объекта a, решающего задачу A, и объекта b, решающего задачу B, пару (a, b), решающую задачу $A \wedge B$. Объект a, решающий задачу, сопоставленную формуле A, называется реализацией A. Этот факт обозначается aRA. Центральным моментом конструктивного понимания логических формул является интерпретация импликации. Конструктивная импликация $A \Longrightarrow B$ понимается как требование построить эффективное преобразование f, применимое ко всем реализациям формулы A и переводящее их в реализации формулы B.

Нечёткая колмогоровская формулировка логики как исчисления задач породила многочисленные различные конкретизации, дав целую систему точных математических определений. Эта формулировка нашла применение не только в интуиционистской логике, для которой она была создана, но и в других логических системах.

Лидером конструктивного направления стал один из крупнейших советских математиков А.А.Марков (1903 – 1979). Это направление в математике в качестве объектов изучения рассматривает только так называемые конструктивные объекты и конструктивные процессы. При оьращении с ними допускается только абстракция потенциальной осуществимости, используется конструктивное понимание математических суждений, интуитивные понятия "эффективности", "вычислимости" и т.п. связываются в нём с точным понятием *алгорифма* (*алгоритма*). В рамках конструктивного направления получили развитие различные области математики, составившие так называемую ***конструктивную математику***.

Обстоятельное изложение конструктивной математической логики дано академиком П.С.Новиковым в книге [1.11]. Там, в частности, подробно излагается конструктивная (интуиционистская) логика высказываний, базирующаяся на системе аксиом, несколько отличающейся от приведённой выше системы аксиом А.Гейтинга.

Формализм. Немецкий математик Давид Гильберт (1862 – 1943) предложил другой путь преодоления трудностей в основаниях математики, путь, имеющий в своей основе применение аксиоматического метода. Созданное им направление получило название *формализм*. Общие контуры этого нового направления в обосновании математики были сформулированы Д.Гильбертом в 1904 г. на III Международном математическом конгрессе в Гейдельберге. В уточнении и реализации этой программы участвовали В.Аккерман (1896 – 1962), П.Бернайс (1888 – 1978), Дж. фон Нейман (1903 – 1957).

По мнению Д.Гильберта, математика должна иметь надёжные основания, не вызывающие сомнений способы доказательств, позволяющие получать новые результаты и исключающие ошибки, противоречия и парадоксы. С этой точки зрения интуиция и интуитивная очевидность, на которые уповали интуициолнисты, носят субъективный характер и не могут служить надёжным фундаментом математики. Не состоятельна в этом смысле и позиция логицистов, поскольку основания математики содержат кроме логических также и внелогические конструкции и понятия и, кроме того, сама логика должна при этом чем-то оперировать и это "что-то" состоит из внелогических конкретных понятий (таких, как понятие числа), воспринимаемых интуитивно ещё до того, как мы начинаем рассуждать логически. Таки образом, по мнению формалистов, логика является частью математики, а никак не наоборот.

В связи с этим Д.Гильберт высказал тезис о том, что правильный подход к обоснованию математики должен включать понятия и аксиомы не только логики, но и математики. Он предложил все логические и математические аксиомы и теоремы записать на символическом логико-математическом языке в виде так называемых символических формул. В результате ему удалось строго логически определить, что же такое строгое (объективное) логическое доказательство. Это – последовательность таких формул, построенная по вполне определённым правилам. А именно, каждая формула этой последовательности является либо аксиомой данной теории, либо ранее доказанной теоремой, либо получена из предыдущих формул этой последовательности по каким-либо правилам логики. При этом соответствие умозаключения правилам логики определяется исключительно формой этого умозаключения, а не его содержанием. Возникает так называемая формальная аксиоматическая система, отражающая (формализующая) ту или иную область математики, а вся математика превращается в набор формальных систем, каждая из которых имеет свою логику, обладает своими собственными первоначальными понятиями, своими аксиомами, своими правилами дедуктивного вывода и своими теоремами. Развитие каждой из этих формальных систем и составляет задачу математики.

Этот подход Д.Гильберта получил название *метода формализации*. Точнее, суть его состоит в следующем.

Во-первых, для той или иной неформальной математической теории строится достаточно богатый по своим выразительным возможностям формальный язык, на котором в виде формулы этого языка может быть записано любое предложение рассматриваемой неформальной теории (в частности, аксиомы этой теории).

Во-вторых, логический аппарат, логические средства, используемые в математических доказательствах, точно описываются с помощью формальных логических систем (исчислений), для которых перечисляются их логические аксиомы, представляющие собой формулы на формальном логическом языке, и логические правила вывода.

Совокупность всех формальных логических теорем, доказываемых на основе формальной системы аксиом, называется формальной аксиоматической теорией, построенной на основе данной системы аксиом и соответствующей данной неформальной математической теории, или формализацией данной математической теории. Выработанные требования к способам доказательства утверждений, т.е. фактически правила формального последовательного преобразования формул формальной теории не должны были позволить появиться в теории ошибкам, парадоксам и противоречиям. Все спорные приёмы в доказательствах должны быть исключены. В таком своём формальном виде математическая теория сама становится объектом изучения математики. Эту создаваемую Д.Гильбертом область математики, которая призвана изучать формальные аксиоматические теории, сам Д.Гильберт назвал *метаматематикой*, или *теорией доказательств*.

Таким образом, согласно концепции формализма, математика состоит из формальных истем (теорий), каждая из которых представляет собой строгую формализацию конкретной математической дисциплины (арифметики, геометрии, алгебры, математической логики т.д.) со своими собственными первоначальными понятиями, списком аксиом, правилами логического вывода (доказательства теорем). Важнейшим требованием, предъявляемым к формальной теории, является требование её непротиворечивости, т.е. невозможности доказательства в ней одновременно некоторого утверждения и его отрицания. Фактически противоречивость или непротиворечивость формальной теории зависит исключительно от синтаксического строения аксиом этой теории, а вовсе не от их математического содержания.

Кратко говоря, формалистская программа Д.Гильберта по преодолению кризиса в основаниях математики состояла в том, чтобы представить математику в виде формальной математьической теории, а затем доказать непротиворечивость этой теории.

Метод доказательства непротиворечивости состоял в построении модели. *Модель* для некоторой аксиоматической теории – это просто система объектов, взятая из некоторой другой теории и удовлетворяющая аксиомам данной теории. Если эта вторая теория непротиворечива, то должна быть непротиворечива и данная аксиоматическая теория. Действительно, допустим, что в данной аксиоматической теории из аксиом можно вывести противоречие. Тогда и в другой теории из соответствующих теорем можно было бы вывести противоречие, пользуясь соответствующими выводами по отношению к объектам, образующим модель.

Так, например, модель Ф.Клейна (1871 г.) неевклидовой геометрии Лобачевского сводит вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского к непротиворечивости евклидовой геометрии. Аналитическая геометрия Р.Декарта (1619 г.), т.е. использование координат для представления геометрических объектов позволяет свести доказательство непротиворечивости евклидовой геометрии к непротиворечивости теории действительных чисел, которая, далее, сводится к непротиворечивости теории натуральных чисел.

Итак, метаматематика изучает свойства формальных аксиоматических теорий, важнейшим из которых является их непротиворечивость. Возникающая при этом математическая теория называется *метатеорией* по отношению к изучаемой формальной теории, называемой в этом случае *предметной теорией*. Существенную роль в гильбертовской программе играли требования к тем средствам, которые допускались для использования при доказательстве непротиворечивости теорий и вообще в метаматематике. Требовалось, чтобы использовались только интуитивно представляемые предметы и осуществимые процессы, никогда не рассматривался бесконечный класс как завершённое целое (т.е. не использовалась абстракция актуальной бесконечности), каждое доказательство существования давало, хотя бы и неявно, метод для построения предмета, существование которого доказывается (т.е. исключается использование логических законов исключённого третьего, снятия двойного отрицания, метода доказательства от противного, аксиомы выбора). Эти требования называют *финитизмом* или *финитистской установкой* Гильберта, а допускаемые ими методы – *финитными*. Как видим, в требованиях к доказательствам у школ формализма и интуиционизма было много общего. В окончательном варианте теория доказательств школы формализма была изложена Д.Гильбертом в его книге "Теория доказательств", вышедшей в 1934 г. (См. книги [3.2] и [3.3]).

Доказательство непротиворечивости математики, благодаря усилиям формалистов, фактически свелось к доказательству непротиворечивости арифметики. В 1928 г., выступая на очередном Международном математическом конгрессе в Болонье, Д.Гильберт выразил уверенность в том, что предлагаемый школой формализма подход вскоре позволит доказать непротиворечивость арифметики и вместе с эти покончить со всеми проблемами обоснования математики. Доказанный в 1930 г. австрийским математиком Куртом Гёделем фундаментальный результат, казалось, укрепил эту уверенность. Он доказал полноту формализованного исчисления предикатов первого порядка: всякая общезначимая формула логики предикатов доказуема в формализованном исчислении предикатов. Но уже в 1931 г. формалистов и всю математику в целом ждал поразительный сюрприз – К.Гёдель доказывает две своих выдающихся теоремы о неполноте формальной арифметики натуральных чисел.

Программа Д.Гильберта сыграла беспрецедентную роль в вопросах обоснования математики и в истории развития математики вообще. По существу, она позволила переосмыслить весь пройденный математической наукой путь, систематизировать огромный опыт исследований в решении трудных проблем, осмыслить достигнутое, окончательно осознать роль и значение аксиоматического метода в математике, помогла строго математически поставить такие вопросы в основаниях математики, которые раньше лишь интуитивно угадывались.

Программа Гильберта потрясает фундаментальностью своего замысла и постановки, размахом работ и грандиозностью полученных результатов. Поистине это – вершина и торжество строгой логики. И даже то, что произошло потом на пути, указанном Гильбертом, нисколько не умалило величия сделанного и гениальности творца. Работы Гильберта и его последователей привели к глубокой разработке аксиоматического метода и окончательному осознанию его фундаментальной роли в математике.

Впоследствии же произошло то, что математика (в частности, математическая логика) своими собственными строго логическими методами доказала невозможность осуществления гильбертовской программы в полном объёме. Главная задача программы состояла в том, чтобы доказать на пути формализации непротиворечивость всей математической науки. В 1931 году австрийский математик К.Гёдель доказал две знаменитых теоремы о неполноте формальной арифметики. Первая из них утверждает, что какую бы формальную аксиоматическую теорию, содержащую арифметику, мы ни построили, если она будет непротиворечива, то непременно найдётся такое предложение (формула) F, относительно которой невозможно будет решить, доказуема она в этой теории или нет, т.е. ни сама эта формула, ни её отрицание $\neg F$ не выводимы в этой формальной теории. Это означает, что для того, чтобы двинуться дальше по пути формализации, нужно эту формулу (или её отрицание) включить в число аксиом. Но согласно теореме Гёделя и для этой аксиоматической теории найдётся аналогичная, как говорят, неразрешимая формула. И этот процесс бесконечен. Вторая теорема утверждает, что при выполнении некоторых естественных условий в качестве F можно взять утверждение о непротиворечивости данной формальной аксиоматической теории, то есть в непротиворечивой формальной аксиоматической теории, включающей формальную арифметику, содержится формула, выражающая её непротиворечивость, и что эта формула недоказуема в этой теории.

Эти теоремы, по существу, означают, что никакая непротиворечивая формальная аксиоматическая теория (система) не может охватить *всю математику*. Другими словами, строгая (математическая) логика не может быть доведена до такого совершенства, при котором она сумела бы охватить всю математику единой формальной системой. Всю математику нельзя превратить в единую дедуктивную (аксиоматическую) теорию, базирующейся на единой раз и навсегда заданной системе аксиом. "*Однако,* – замечает Е.Л.Фейнберг[12], – *математика строится так, что в ней существуют огромные логические куски, не прерываемые интуитивным элементом. Здесь она полностью сохраняет дедуктивную структуру, и это едва ли не важнейшая её черта. Можно сказать, что математика в целом – "кусочно-дедуктивная", "кусочно-формализуемая" теория. Часто бывает, что математик всю жизнь успешно занимается своей наукой, исходя из набора аксиом и определений, установленного для него, и нигде не встречается с необходимостью выйти за пределы чистой логики. Это иногда создаёт иллюзию возможности чисто логического построения науки.*" Как мы видели, в действительности это не так, и это есть глубоко логический итог гипертрофии строгой логики в процессе познания.

Доказательство теорем Гёделя о неполноте формальной арифметики ознаменовало собой строгое математическое установление того факта, что гильбертовская программа формализации математики не может быть реализована в том виде и в том объёме, в каких её мыслил Гильберт.

В главе II при изучении формализованного исчисления высказываний мы уже фактически рассмотрели существо метаматематического метода применительно к конкретной формальной теории. В заключительной главе VI настоящей книги наша цель будет состоять в том, чтобы продолжить рассмотрение этого метода и изучить ещё ряд результатов, полученных на пути следования этому методу.

---

[12] *Фейнберг Е.Л.* Кибернетика, логика, искусство. - М.: Радио и связь, 1981. – 144 с. (с. 40).

Глава VI.

ФОРМАЛЬНЫЕ АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

Вспоминая рассмотренные выше аксиоматические теории (натуральных чисел, геометрии, множеств) и ещё раз анализируя их, мы должны отметить, что при всей их строгости они всё же не являются вполне абстрактными, или, как говорят, формальными. Все они абстрактны в том смысле, что предметами их изучения (числами, точками, прямыми, множествами) могут быть объекты абсолютно произвольной природы. И это несомненно значительный шаг на пути формализации математической теории. Но возможен и следующий шаг на пути абстрагирования от привычного нам неформального или, как говорят, содержательного понимания компонентов математической теории. Имея дело с формальными (произвольной природы) объектами, мы применяли к ним не формальную, а содержательную логику, рассуждали не формальным, а неким общечеловеческим образом, считая всем известным и понятным смысл слов: "*из утверждения A следует утверждение B*" или "*утверждение A противоречит (несовместимо, исключает) утверждению B.*" Так вот, следующий шаг на пути формализации математических теорий состоит в формализации мыслительных процессов, процессов построения умозаключений при построении математической теории, т.е. в слиянии математической теории и математической логики.

Этот шаг впервые был сделан в работах Д.Гильберта и его школы, когда был разработан так называемый метод формализма в основаниях математики, о чём говорилось в предыдущей главе. В рамках этого направления была достигнута следующая стадия уточнения понятия аксиоматической теории, а именно выработано понятие формальной аксиоматической теории или формальной системы. В результате этого уточнения оказалось возможным представлять сами математические теории как точные математические объекты и строить общую теорию, или метатеорию, таких теорий.

Программа формализации была выдвинута Д.Гильбертом с целью доказательства непротиворечивости математики точными математическими методами. Она предусматривала уточнение понятия доказательства, чтобы эти доказательства могли стать объектами точной математической теории – теории доказательств. Чтобы сделать такое возможным, доказательствам придаётся единая, точная и вполне определённая форма в рамках формальной аксиоматической теории, или формальной системы. Процесс формализации доказательства состоит в том, что утверждения теории заменяются конечными последовательностями определённых знаков, а логические способы заключения – формальными правилами образования новых формально представленных высказываний из уже доказанных.

В параграфах 28 – 30 настоящей главы мы рассмотрим вопросы, связанные с формальными аксиоматическими теориями, или формальными системами. Эта глава будет центральной для понимания роли математической логики в математических теориях. Фундаментальная теорема Гёделя о существовании модели у всякого синтаксически непротиворечивого множества формул узкого исчисления предикатов, доказываемая в §29, устанавливает исключительно важную взаимосвязь между свойствами формальной выводимости и содержательной истинности: непротиворечивый формальный вывод не может противоречить содержанию неформальной теории. Следствия из этой теоремы (теоремы полноты, компактности, Лёвенгейма-Сколема) углубляют понимание взаимосвязей между формальным и содержательным. В §30 с разной степенью подробности рассматриваются подходы к формализации тех математических теорий, которые лежат в основаниях школьного курса математики – теории равенства, теории множеств, числовых систем, математического анализа, геометрии.

Многие математики, а также представители других наук высказывают серьёзные сомнения в том, стоит ли формализовать (даже если это в принципе и возможно) математические (и иные) теории, считая, что плоды формализации не оправдывают усилий, ценой которых она достигается. С помощью материала настоящей главы мы хотели бы показать будущему учителю математики такие подходы к математическим теориям, истоки которых лежат в школьном курсе математики, которые осуществляет современная математическая наука с помощью математической логики. В настоящее время только формализованный подход к математическим теориям позволяет так формулировать многие важные проблемы о них, что попытки решения этих проблем можно рассматривать всерьёз.

§28. О формальных аксиоматических теориях

Аксиоматический метод, рассмотренный в главе IV, является как бы формой организации математической науки, способом исследования тех или иных математических объектов. Неформальные аксиоматические теории наполнены теоретико-множественным содержанием, понятие выводимости в них довольно расплывчато и в значительной мере опирается на здравый смысл. Дальнейший шаг на пути изучения аксиоматических теорий состоит в отходе этих теорий от содержательности, в строгой формализации понятия правила вывода и тем самым – в превращении самих теорий в объекты математического исследования.

В этом параграфе подробно описывается само понятие формальной системы, а также рассматриваются понятия, тесно с ним связанные. Это – теоремы и метатеоремы формальной теории, интерпретации и модели формальной теории, семантическая выводимость.

Об истории идеи формальной аксиоматической теории. Нет сомнения в том, что истоки понятия формальной аксиоматической теории восходят к грандиозной мечте величайшего математика XVII – начала XVIII века Готфрида Вильгельма Лейбница "*идеи заменить вычислениями*". Лейбниц жил во времена, когда обычные для нас обозначения современной математики ещё только вступали на свой победный путь. Свой вклад в этот процесс внёс и Лейбниц, изобретя значки для дифференциалов, интеграла и т.п. Лейбниц глубоко осознавал, что беспримерный взлёт новой математики существенно основывался на освобождении от размышлений о содержательном значении математических знаков и на возможности производить вычисления с этими содержательными значениями в самом подлинном смысле этого слова. Время Лейбница было эпохой, когда аксиоматическая геометрия древних греков, идущая от Аристотеля и Евклида, переживала новый расцвет. Её методологическая схема *аксиома – доказательство – теорема – определение – доказательство – теорема –* . . . выходила за рамки геометрии и математики и оказывала влияние на новые области философии и естествознания.

Лейбниц высказал предположение, нельзя ли так сформулировать правила математического доказательства, чтобы при их применении вообще уже не приходилось больше думать о содержательном смысле математических выражений? Нужно было бы создать calculus ratiocinator, т.е. исчисление, в котором естественные, содержательные доказательства были бы заменены формальными вычислениями и тем самым стали бы предметом математики. Такое исчисление, разумеется, предполагает символику, в которой были бы представлены аксиомы, теоремы и определения математики. Такая символика и была целью лейбницевского языка формул, знаменитой characteristica universalis. Но, увы даже для такого гения, как Лейбниц, ещё не пришло время создавать современную математическую логику и современные аксиоматические теории. Формальный язык, в котором все вопросы можно было бы решать вычислением, согласно лейбницевскому лозунгу calculemus, остался мечтой.

Важнейший шаг в направлении, указанном Лейбницем, был сделан в XX веке. Гильберт, работавший над аксиоматическим построением евклидовой геометрии, развил идею формализации математики. Она заключалась в следующем. Предложения математики, равно как и законы логики, записываются при помощи особой символики в виде формул, без всякого участия словесных выражений. Процессы логического мышления заменяются манипуляциями с такого рода формулами по строго очерченным правилам. А именно, из формул, уже построенных, разрешается чисто механически, по точно указанным рецептам, составлять новые формулы, и это заменяет сознательные умозаключения, выводящие из одного предложения другое. Таким образом, и математическое, и логическое содержание исследуемого отдела математики предстаёт пред нами в виде цепи формул. Эта цепь начинается с формул, изображающих математические и логические аксиомы, и может быть неограниченно продолжаема путём механического составления новых формул. При этом нам нет надобности помнить, какое математическое содержание записано под видом той или иной формулы; нас интересует лишь формула сама по себе, как вполне конкретная и обозримая конечная комбинация знаков. Тогда, в частности, проблема непротиворечивости будет состоять в том, чтобы доказать, что в этой цепи формул не может появиться формула, изображающая противоречие.

Появились работы Дедекинда и Кантора, которые сводили всю математику к теории множеств, работы Буля, Пеано, Пирса, Шрёдера, которые вводили начало математической символики для законов мышления, работа Фреге, пытавшегося свести всю математику к логике. Эти работы внушили безграничную веру в мощь формализации. Наконец в работах первоклассных математиков XX века Рассела, Уайтхеда, Гильберта, Барнайса, Гёделя, Чёрча, А.А.Маркова, А.И.Мальцева и других формализация математического языка в рамках современных логических исчислений достигла высокой степени точности. Поэтому сегодня уже можно говорить о математическом языке как о части математики, о языке как об одном из предметов, исследуемых математикой, и спорить о реализуемости мечты Лейбница.

Мощное развитие логики и логического языка привело к созданию новой области математики – оснований математики, предметом изучения которой стало строение математических утверждении и математических теорий и которая поставила своей целью ответить на вопросы типа: *"как должна быть построена теория, чтобы в ней не возникло противоречий?"*, *"какими качествами должны обладать методы доказательства, чтобы считаться достаточно строгими?"* и т.д. Одной из фундаментальных идей, на которые опираются исследования по основаниям математики, является идея формализации математических теорий, т.е. последовательного проведения аксиоматического метода построения теорий.

Понятие формальной аксиоматической теории. Формализация аксиоматической теории состоит в том, что аксиомы рассматриваются как формальные последовательности символов (выражения) некоторого алфавита, а методы доказательств – как методы получения одних выражений из других с помощью операций над символами. При этом не допускается пользоваться какими-либо предположениями об объектах теории, кроме тех, которые сформулированы явно в аксиомах. Такой подход гарантирует чёткость исходных утверждений и однозначность выводов. Но может создаться впечатление, что осмысленность и истинность в формализованной теории не играют никакой роли. Внешне это так. Тем не менее, в действительности и аксиомы, и правила вывода стремятся выбирать таким образом, чтобы построенной с их помощью формальной теории можно было придать содержательный смысл.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28.1. *Формальная аксиоматическая теория* T считается определённой, если выполнены следующие условия:

1) Задан *алфавит* теории T, представляющий собой некоторое счётное множество символов. Конечные последовательности символов алфавита теории T называются словами или выражениями теории T;

2) Имеется подмножество выражений теории T, называемых *формулами* теории T (обычно имеется эффективная процедура, поз-

воляющая по данному выражению определить, является ли оно формулой);

3) Выделено некоторое множество формул, называемых *аксиомами* теории T (обычно имеется эффективная процедура, позволяющая по данной формуле определить, является ли она аксиомой);

4) Имеется конечное множество $R_1,...,R_n$ отношений между формулами, называемых *правилами вывода*. При этом, для каждого R_i $(1 \leq i \leq n)$ существует целое положительное j такое, что для каждого множества, состоящего из j формул, и для каждой формулы F эффективно решается вопрос о том, находятся ли данные j формул в отношении R_i с формулой F, и если да, то F называется непосредственным следствием данных j формул по правилу R_i.

Построенное в §9 формализованное исчисление высказываний может служить примером формальной аксиоматической теории. Алфавит этой теории состоит из символов: $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots, \neg, \to,$ (,). Определено понятие формулы (см. определение 2.1). Из множества всех формул выделено множество всех аксиом (они определяются схемами аксиом (A1) – (A3)). Наконец, единственным отношением R, называемым правилом вывода, является тернарное отношение, в которое входят такие тройки формул F, G, H, что средняя формула G имеет вид $F \to H$. Таким образом, формула H называется непосредственным следствием формул F и $F \to H$. Это правило вывода было названо правилом заключения или модус поненс (MP).

Определение 28.2. *Выводом* в формальной аксиоматической теории T называется всякая последовательность $B_1, ..., B_n$ формул этой теории такая, что для любого i $(1 \leq i \leq n)$ формула B_i есть либо аксиома теории T, либо непосредственное следствие каких-либо предыдущих формул по одному из правил вывода. Формула F теории T называется *теоремой* этой теории, если существует вывод в T, последней формулой которого является F; такой вывод называется *выводом* (или *доказательством*) формулы F.

В примере 9.2 был приведён вывод формулы $F \to F$ в формализованном исчислении высказываний, т.е. доказательство того, что эта формула есть теорема данной формальной теории.

Далее, аналогично соответствующему понятию в формализованном исчислении высказываний (см. определение 9.1) определяется понятие вывода формулы F из множества формул Γ в формальной аксиоматической теории T и устанавливаются простейшие свойства этого понятия (см. теорему 9.3).

Вторым примером формальной аксиоматической теории может служить формализованное исчисление предикатов, рассмотренное в §21.

Итак, формальная аксиоматическая теория отличается от неформальной (содержательной), во-первых, тем, что она имеет дело с выражениями, составленными из символов некоторого алфавита, лишенных какого бы то ни было содержательного смысла, а во-вторых, расплывчатое понятие логического умозаключения, на основании которого мы выводили из одних содержательных утверждений другие, теперь заменено чётким понятием отношения между выражениями из символов. Таким образом, развитие формальной аксиоматической теории есть процесс оперирования с формальными символами на основе чётких формальных правил. Раз так, то такой процесс может быть поручен электронно-вычислительной машине, что сделано в отношении, например, формализованного исчисления высказываний и некоторых других формальных аксиоматических теорий.

Язык и метаязык, теоремы и метатеоремы формальной теории. Описание формальных аксиоматических теорий ведётся на некотором общепонятном языке, например, на русском. Такой язык по отношению к языку формальной теории называется *метаязыком.* Он используется для формулировок утверждений о формальной теории. Язык же формальной теории – символы алфавита, слова – используется для формулировок высказываний внутри самой формальной теории и называется *предметным языком* (или *языком-объектом*). Используя метаязык, можем изучать формальную аксиоматическую теорию как бы извне, можем формулировать и доказывать те или иные свойства формальной теории – свойства её теорем, доказательств, её самой. Причём при доказательстве этих свойств должны использоваться общепонятные и бесспорные средства обычной логики. В результате получаем набор теорем о формальной теории, устанавливающих те или иные её свойства. Такие теоремы называются *метатеоремами.* Различие между теоремами и метатеоремами в рассмотренных формальных теориях не всегда проводилось явно, но его непременно нужно иметь в виду. Например, если удалось построить вывод формулы G из формул $F_1,...,F_m$, то высказывание "$F_1, ..., Fm \vdash G$" является метатеоремой. В частности, теорема о дедукции, производные правила вывода в ФИВ и ФИП, а также теоремы о непротиворечивости, полноте (или неполноте), разрешимости тех или иных формальных теорий являются метатеоремами по отношению к этим теориям. В частности, утверждение "*Теория групп непротиворечива*" есть утверждение на метаязыке о формальной теории групп, т.е. – метатеорема. Напротив, утверждение "$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x * y = x * z \;\to\; y = z)$" есть высказывание самой теории групп, записанное на предметном языке, т.е. теорема.

Интерпретации и модели формальной теории. Обычно, теории (и не только формальные) создаются для того, чтобы описать те или иные явления окружающего мира. Поэтому ценность всякой теории в конечном счёте определяется тем, насколько хорошо справляется теория с этой задачей, т.е. насколько предоставляемое ею описание адекватно описываемому явлению, участвующим в нём объектам и связям между ними. Теория (и, в особенности, математическая теория), созданная для описания одних объектов, нередко оказывается применимой для описания и других. Поэтому один из первых для любой теории вопросов – это вопрос о том, для описания каких объектов пригодна данная теория.

Применительно к формальным аксиоматическим теориям проблема адекватности такой теории сигнатуры σ и описываемых ею объектов представляет собой чисто математическую задачу о соответствии между множеством теорем этой теории, построенном как формальное исчисление, и содержательно построенной теорией, рассматриваемой как множество объектов с операциями и отношениями на нём (т.е. как алгебраическая система), или, как говорят, моделью формальной аксиоматической теории.

Придадим точный математический смысл интуитивно осознаваемым понятиям интерпретации и модели формальной теории. Пусть задана сигнатура $\sigma = \{c_0, c_1, ..., f_0^{n_0}, f_1^{n_1}, ..., P_0^{m_0}, P_1^{m_1}, ...\}$, т.е. c_0, c_1, ... – символы предметных или индивидных констант (символы выделенных элементов), $f_0^{n_0}, f_1^{n_1}$, ... – функциональные буквы, $P_0^{m_0}, P_1^{m_1}$, ... – предикатные буквы. При этом, верхние индексы предикатных и функциональных букв указывают число аргументов соответственно предиката или функции, которые могут быть подставлены вместо этих букв. Дадим интерпретацию каждому символу этой сигнатуры. Для этого выберем некоторое множество M и однозначно сопоставим каждой m-местной предикатной букве P_i m-арное отношение P_i^M на M (т.е. интерпретируем букву P_i как конкретное отношение P_i^M на конкретном множестве), каждой n-местной функциональной букве f_j сопоставим n-арную операцию (n-местную функцию) f_j^M на M, каждой предметной константе c_k – элемент c_k^M из M. Постоянные термы (не содержащие предметных переменных) при таком определении также отобразятся на элементы из M. Таким образом, мы приходим к алгебраической системе

$$M = < M \ ; \ c_0^M, \ c_1^M, \ \dots ; \ f_0^M, \ f_1^M, \ \dots ; \ P_0^M, \ P_1^M, \ \dots > ,$$

которая и представляет собой *интерпретацию* формальной теории данной сигнатуры σ.

Всякая замкнутая (т.е. не содержащая свободных предметных переменных) формула формальной теории (узкого исчисления предикатов) сигнатуры σ при этой интерпретации превращается в высказывание об элементах из M, отношениях и функциях на M, которое может быть истинным или ложным. Открытая формула превращается в некоторое отношение (предикат) на M. Открытая формула F называется *выполнимой* в данной интерпретации M, если существует такая подстановка α предметных констант, при которой она превращается в истинное высказывание. Запись: $M \models_\alpha F$. Открытая формула F называется *истинной в данной интерпретации* M или говорят, что F *выполняется* в M, если она превращается в истинное высказывание при любой подстановке констант. Этот факт записывают так: $M \models F$ и говорят, что интерпретация (алгебраическая система) M является *моделью* формулы F. Формула, истинная во всех интерпретациях, называется *общезначимой*, или *тавтологией*. Запись: $\models F$. Интерпретация (алгебраическая система) M называется *моделью (для) множества формул* Φ, если любая формула из Φ истинна в данной интерпретации. Запись: $M \models \Phi$. Интерпретация M называется *моделью теории* T, если она является моделью множества всех теорем теории T, т.е. если всякая формула, доказуемая (выводимая) в T, истинна в данной интерпретации. Для множества Φ формул обозначим через $M(\Phi)$ – совокупность (класс) всех моделей этого множества формул.

Существо формального подхода состоит в том, что в символы теории (даже самые привычные) не вкладывается никакого смысла, пока не введена интерпретация этих символов. В то же время, никакая интерпретация не относится к числу средств самого исчисления: она позволяет осмыслить формулы исчисления, но не участвует в формальном выводе теорем. О формальных свойствах самого исчисления, его формул и их формальных преобразований принято говорить как о *синтаксисе исчисления*; свойства исчисления, выражаемые в терминах его интерпретаций, – это *семантика исчисления*. В частности, если формула F выводима в формальной теории из множества формул Φ: $\Phi \vdash F$, то говорят, что F *синтаксически выводима* из Φ. Имеется также понятие и семантической выводимости F из Φ, связанное с интерпретациями.

Семантическая выводимость. Вообще под *семантикой* в математической логике понимается исследование интерпретаций формальных аксиоматических теорий, изучение смысла и значения конструкций формализованного языка теории, способов понимания его логических связок и формул. Семантика рассматривает возможности точного описания и формального определения таких содержательных понятий как "истина", "определимость", "обозначение". В несколько более узком смысле под семантикой формализованного языка понимают систему соглашений, определяющих понимание формул языка, задающих условия истинности этих формул. Построение чёткой семантики достаточно сложных формализованных языков (например, типа языков аксиоматической теории множеств) является трудной проблемой. Это связано с тем, что процесс абстрагирования в математике является весьма сложным и многоступенчатым. Построение формальных языков и теорий – абстрагирование весьма высокого уровня. В его ходе используются глубокие и неочевидные абстракции, в результате чего объём объектов исследования, способы обращения с этими объектами и способы доказательства утверждений относительно таких объектов становятся весьма неопределёнными. Часто семантические понятия для некоторого языка могут быть точно сформулированы в рамках более богатого языка, играющего для первого роль метаязыка. Именно такую ситуацию мы имеем для формул языка 1-го порядка, определяя для них семантические понятия истинности, выводимости и т.п.: мы привлекаем для этого алгебраические системы, описываемые на языке теории множеств. Этот последний и играет в данном случае роль метаязыка для формальной теории 1-го порядка.

Будем говорить, что формула F *семантически выводима* из множества формул Φ и писать $\Phi \models F$, если в каждой интерпретации, в которой истинны все формулы из Φ, истинна и формула F, т.е. если каждая модель множества формул Φ будет также и моделью формулы F. Ясно, что понятие семантической выводимости формулы является обобщением понятия общезначимости формулы, и первое превращается во второе при $\Phi = \emptyset$ (пустое множество). В терминах классов моделей множеств формул Φ и $\{F\}$ семантическая выводимость F из Φ означает, что $M(\Phi) \subseteq M(\{F\})$.

Метаматематика (свойства формальных аксиоматических теорий). Исследование формальных теорий общепонятными логическими средствами и методами называется *метаматематикой*. В круг метаматематических вопросов входят вопросы, связанные прежде всего с непротиворечивостью, полнотой, разрешимостью формальных аксиоматических теорий.

Непротиворечивость – важнейшее свойство формальных аксиоматических теорий. В §§10 и 24 говорилось о непротиворечивости содержательных аксиоматических теорий и формализованного исчисления высказываний. Сформулированное там определение (10.8 и 24.1) применимо также и для любой формальной аксиоматической теории. Это понятие можно было бы назвать *внутренней непротиворечивостью* формальной теории. В §24 отмечалось, что внутренняя непротиворечивость теории следует из наличия у теории (непротиворечивой) модели. Последнее свойство теории (наличие непротиворечивой модели) можно назвать *содержательной непротиворечивостью* теории. Таким образом, если теория содержательно непротиворечива, то она внутренне непротиворечива. Значительно труднее получить ответ на вопрос о справедливости обратного утверждения: всякая внутренне непротиворечивая формальная теория имеет модель, т.е. содержательно непротиворечива. Это ещё одна теорема Гёделя. Доказательство этой сложной и важной теоремы математической логики будет проведено в следующем параграфе, посвящённом свойствам формализованного исчисления предикатов.

Ещё одним важным метаматематическим понятием является понятие разрешимости формальной аксиоматической теории.

Определение 28.3. Формальная аксиоматическая теория T называется *разрешимой*, если имеется эффективная процедура (алгоритм), позволяющая для каждой данной формулы этой теории узнавать, существует ли её вывод в T, т.е. является ли она теоремой теории T. Если такого алгоритма не существует, то теория называется *неразрешимой*.

Образно говоря, разрешимая теория – такая теория, для которой можно изобрести машину, испытывающую формулы на свойство быть теоремой этой теории. Для выполнения той же задачи в неразрешимой теории такой машины построить нельзя, и для каждой конкретной формулы приходится изобретать свои методы определения того, будет ли она теоремой данной теории. Для разрешимости теории вовсе не требуется алгоритм, позволяющий доказывать (находить доказательство) каждую теорему теории. Именно таков характер теоремы 10.11 о разрешимости формализованного исчисления высказываний: на основании её можно для каждой формулы ответить на вопрос, будет ли она доказуема, но построить доказательство нельзя. Что же касается разрешимости формализованного исчисления предикатов, то в начале §19 отмечалось, что проблема разрешения общезначимости формулы в логике предикатов неразрешима. Этим, в частности, обуславливается и неразрешимость формализованного исчисления предикатов.

Дальнейшее рассмотрение свойств формальных аксиоматических теорий приводит нас к необходимости более подробно изучить свойства формализованного (или узкого) исчисления предикатов, являющегося логическим основанием конкретных формальных математических теорий (или формальных теорий первого порядка, или элементарных теорий). Этому и посвящается следующий §29. Но прежде чем перейти к нему, обратимся ещё раз к формализованному исчислению высказываний и установим ещё два его свойства как формальной аксиоматической теории.

Формализованное исчисление высказываний как формальная аксиоматическая теория. Итак, формализованное исчисление высказываний представляет собой пример формальной аксиоматической теории. Более того, в §10 установлена полнота данной теории относительно алгебры высказываний, её непротиворечивость и разрешимость. Рассмотрим вопросы внутренней полноты исчисления высказываний, т.е. выясним, будет ли эта теория абсолютно полной и полной в узком смысле (см. определения 24.5 и 24.6).

Если бы формализованное исчисление высказываний было абсолютно полно, т.е.для любой формулы F этой теории сама F или её отрицание $\neg F$ были теоремами, то, на основании теоремы 10.1, для каждой формулы F алгебры высказываний либо F, либо $\neg F$ была бы тавтологией. Но многочисленные примеры формул F таких, что ни F, ни $\neg F$ не есть тавтология, опровергает подобное заключение. (Приведите примеры таких формул.) Итак, *формализованное исчисление высказываний не является абсолютно полным.* Иначе обстоит дело с его полнотой в узком смысле.

ТЕОРЕМА 28.4. *Формализованное исчисление высказываний полно в узком смысле.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – некоторая формула формализованного исчисления высказываний, не являющаяся его теоремой. Докажем, что если F присоединить в качестве схемы (A4) к трём схемам аксиом (Al) – (A3) формализованного исчисления высказываний (см. §9), то получаемая на основе системы аксиом (A1) – (A4) формальная аксиоматическая теория будет противоречивой. Действительно, поскольку F не теорема, то она, на основании теоремы 10.5, не является тавтологией. Поэтому в её таблице истинности найдётся такая строка, в которой стоит значение 0. Фиксируем какую-либо одну такую строку. По схеме F построим новую формулу следующим образом: все простые формулы, входящие в F и принимающие в фиксированной строке значение 1, заменим на формулу $P \vee \neg P$, а все простые формулы, входящие в F и принимающие в фиксированной строке значение 0, заменим на формулу $P \wedge \neg P$, где P – пропозициональная переменная. В результате получим некоторую формулу $G(P)$, зависящую от одной пропозициональной переменной P. Формула получена на основе схемы аксиом (A4) и потому является аксиомой новой формальной теории. Но, с другой стороны, нетрудно понять, что при любых значениях P формула $G(P)$ принимает значение 0, т.е. является тождественно ложной. Следовательно, её отрицание $\neg G(P)$ есть тождественно истинная формула и потому, на основании той же теоремы 10.5, есть теорема формализованного исчисления высказываний, т.е. $\neg G(P)$ выводима из аксиом (Al) – (A3). Но тогда эта формула выводима и из аксиом (Al) – (A4). Итак, обе формулы $G(P)$ и её отрицание $\neg G(P)$ являются теоремами новой формальной аксиоматической теории, построенной на основе системы аксиом (Al) – (A4). Следовательно, данная теория противоречива. Теорема доказана. □

Формализация теории аристотелевых силлогизмов. Это – ещё один пример формальной аксиоматической теории. Рассматриваемый здесь способ формализации силлогистики был предложен в 1950-ые годы известным польским логиком Я.Лукасевичем [1].

Пусть строчные латинские буквы a, b, c,... обозначают переменные термины силлогистики, две прописные латинские буквы A и I – два силлогических бинарных отношения: Aab: *"Всякое a есть b"*, Iab: *"Некоторое a есть b"*.

Понятие формулы или правильно построенного силлогического предложения даётся посредством следующего индуктивного определения:

1) Aab и Iab – простые (или атомарные) формулы силлогистики;

2) если α и β – формулы силлогистики, то формулами силлогистики будут также $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$, $\neg\alpha$;

3) никаких других формул, кроме получающихся по правилам пунктов 1 и 2, нет.

Перейдём теперь к формулировке аксиом. Во-первых, мы считаем, что у нас имеется некоторое формализованное исчисление высказываний, построенное, например, на базе системы из трёх аксиом, рассмотренное в §15. Так что эти аксиомы открывают список

[1] *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики / Пер. с англ. – М., 1959.

аксиом формальной силлогистики. В качестве специальных аксиом принимаются следующие четыре силлогические предложения:

(FS 1) Aaa ;

(FS 2) Iaa ;

(FS 3) $(Abc \wedge Aab) \to Aac$ (силлогизм *Barbara*) ;

(FS 4) $(Abc \wedge Iba) \to Iac$ (силлогизм *Datisi*) .

С помощью следующих определений введём ещё два силлогических бинарных отношения E и O: Eab означает $\neg Iab$, Oab означает $\neg Aab$. Для удобства построения выводов на основе этих определений формулируются правила о возможности замены всюду в формулах $\neg I$ на E и наоборот, и $\neg A$ на O и наоборот. Таким образом, в нашей формальной системе, которую будем обозначать FS, оказываются выраженными все четыре основных отношения силлогистики. Напомним, что в аристотелевой силлогистике отношение Eab означает "*Никакое a не есть b*", а Oab – "*Некоторые a не есть b*".

В качестве правил вывода в системе формализованной силлогистики FS принимаются два правила подстановки и правило заключения MP:

а) Подстановка в выводимую формулу исчисления высказываний на место пропозициональной переменной (всюду, где она входит в формулу) одной и той же силлогической формулы даёт выводимую формулу системы FS.

б) Подстановка в выводимую формулу системы FS на место переменного термина (всюду, где он входит в формулу) другого переменного термина даёт выводимую формулу системы FS.

в) Правило MP: если формулы $\alpha \to \beta$, α выводимы в FS, то в FS выводима и формула β .

Обратим внимание на то, что в качестве третьей и четвёртой аксиом выбраны правильные аристотелевы силлогизмы *Barbara* и *Datisi*. Остальные семнадцать правильных силлогизмов нам предстоит доказать на основе данной системы аксиом.

Приступим теперь к доказательству теорем формальной силлогистики.

(FS 5) (*Силлогические законы противоречия*).

а) $\neg(Aab \wedge Oab)$; б) $\neg(Iab \wedge Eab)$.

Доказательство. Первый закон получается из закона отрицания противоречия исчисления высказываний $\neg(X \wedge \neg X)$ в результате подстановки $X|Aab$ (вместо X подставляется силлогическая формула Aab) и замены по определению $\neg Aab$ на Oab. Подстановкой $X|Iab$ в тот же закон и заменой по определению $\neg Iab$ на Eab доказывается второй закон. □

(FS 6) (*Силлогические законы исключённого третьего*).

а) $Aab \vee Oab$;   б) $Iab \vee Eab$.

Доказательство обоих законов вытекает из логического закона исключённого третьего $X \vee \neg X$ в результате очевидных подстановок и замен.

(FS 7) (*Закон обращения*). $Iab \to Iba$.

Доказательство. В закон разделения посылок исчисления высказываний $((X \wedge Y) \to Z) \to (X \to (Y \to Z))$ делаем подстановку $X|Abc$, $Y|Iba$, $Z|Iac$ и из полученной формулы и аксиомы (FS4) по правилу MP выводим: $Abc \to (Iba \to Iac)$. Подстановка $b \mid a$, $c \mid a$, $a \mid b$ приводит к формуле $Aaa \to (Iab \to Iba)$, из которой и из аксиомы (FS1) по правилу MP следует требуемая формула: $Iab \to Iba$. □

(FS 8) (*Законы подчинения*).

а) $Aab \to Iab$;   б) $Eab \to Oab$.

Доказательство. а) В закон перестановки посылок исчисления высказываний $(X \to (Y \to Z)) \to (Y \to (X \to Z))$ делаем подстановку $X \mid Abc$, $Y \mid Iba$, $Z \mid Iac$. Посылка полученной формулы представляет собой следующую формулу $Abc \to (Iba \to Iac)$, выводимую в FS, что установлено в ходе доказательства предыдущей теоремы. Тогда из этих двух формул по правилу MP выводим формулу: $Iba \to (Abc \to Iac)$. Подстановка $b \mid a, c \mid b$ в последнюю формулу даёт формулу: $Iaa \to (Aab \to Iab)$. Из неё и аксиомы (FS2) по правилу MP выводим требуемый закон.

б) В закон контрапозиции исчисления высказываний $(X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X)$ делаем подстановку $X \mid Aab$, $Y \mid Iab$ из полученной формулы и предыдущего закона подчинения $Aab \to Iab$ по правилу MP выводим: $\neg Iab \to \neg Aab$. Применяя правила о замене $\neg I$ на E и $\neg A$ на O, получаем: $Eab \to Oab$. □

В следующей теореме формулируются и доказываются в формальной силлогистике FS все оставшиеся 17 правильных аристотелевых силлогизмов.

Теорема 28.5. (*Аристотелевы силлогизмы*). *Следующие формулы являются теоремами формальной системы* FS :

I фигура

1) $(Abc \wedge Iab) \to Iac$ (*Darii*);

2) $(Ebc \wedge Aab) \to Eac$ (*Celarent*);

3) $(Ebc \wedge Iab) \to Oac$ (*Ferio*);

II фигура

4) $(Acb \wedge Oab) \to Oac$ (*Baroco*);

5) $(Acb \wedge Eab) \to Eac$ (*Camestres*);

6) $(Ecb \wedge Aab) \to Eac$ (*Cesare*);

7) $(Ecb \wedge Iab) \to Oac$ (*Festino*);

III фигура

8) $(Abc \wedge Aba) \to Iac$ (*Darapti*);

9) $(Ibc \wedge Aba) \to Iac$ (*Disamis*);

10) $(Obc \wedge Aba) \to Oac$ (*Bocardo*);

11) $(Ebc \wedge Aba) \to Oac$ (*Felapton*);

12) $(Ebc \wedge Iba) \to Oac$ (*Ferison*);

IV фигура

13) $(Icb \wedge Aba) \to Iac$ (*Dimaris*);

14) $(Acb \wedge Aba) \to Iac$ (*Bramantip*);

15) $(Acb \wedge Eba) \to Eac$ (*Camenes*);

16) $(Ecb \wedge Aba) \to Oac$ (*Fesapo*);

17) $(Ecb \wedge Iba) \to Oac$ (*Fresison*).

Доказательство. Приведём доказательства некоторых из этих силлогизмов.

1) Используя теорему о дедукции, нетрудно убедиться в том, что следующая формула $((X \wedge Y) \to Z) \to ((V \to Y) \to ((X \wedge V) \to Z))$ является теоремой формализованного исчисления высказываний. Делаем в неё подстановку: $X \mid Abc$, $Y \mid Iba$, $Z \mid Iac$. Получаем формулу: $((Abc \wedge Iba) \to Iac) \to ((V \to Iba) \to ((Abc \wedge V) \to Iac))$. Вместе с аксиомой (FS4) она по правилу MP даёт формулу: $(V \to Iba) \to ((Abc \wedge V) \to Iac)$. Делаем сюда подстановку $V \mid Iab$. Получаем: $(Iab \to Iba) \to ((Abc \wedge Iab) \to Iac)$. Из этой формулы и формулы теоремы (FS7) по правилу MP выводим требуемую формулу.

4) Начинаем со следующей теоремы формализованного исчисления высказываний: $((X \wedge Y) \to Z) \to ((X \wedge \neg Z) \to \neg Y)$. Подстановка $X \mid Abc$, $Y \mid Aab$, $Z \mid Aac$ в неё даёт: $((Abc \wedge Aab) \to Aac) \to ((Abc \wedge \neg Aac) \to \neg Aab)$. Из этой формулы и аксиомы (FS3)

по правилу MP выводим формулу: $(Abc \wedge \neg Aac) \to \neg Aab$. Используя правило о замене $\neg A$ на O, получаем: $(Abc \wedge Oac) \to Oab$. Наконец подстановка $b \mid c$, $c \mid b$ приводит нас к требуемой формуле.

8) В ходе доказательства формулы 1 была выведена формула: $(V \to Iba) \to ((Abc \wedge V) \to Iac)$. Сделаем в неё подстановку $V \mid Aba$. Получим: $(Aba \to Iba) \to ((Abc \wedge Aba) \to Iac)$. Используя теорему (FS8a) (в которой сделать подстановку $a \mid b$, $b \mid a$), отсюда по правилу MP получаем требуемую формулу.

9) Подстановка $a \mid c$, $c \mid a$ в аксиому (FS4) даёт: $Aba \wedge Ibc \to Ica$, а подстановка $a \mid c$, $b \mid a$ в теорему (FS7) даёт: $Ica \to Iac$. Наконец подстановка $X \mid Aba \wedge Ibc$, $Y \mid Ica$, $Z \mid Iac$ в выводимую формулу исчисления высказываний (закон силлогизма) $(X \to Y) \to ((Y \to Z) \to (X \to Z))$ даёт формулу: $((Aba \wedge Ibc) \to Iac) \to ((Ica \to Iac) \to ((Aba \wedge Ibc) \to Iac))$. Используя полученные выше формулы для двукратного применения правила MP, исходя из последней формулы, получаем: $(Aba \wedge Ibc) \to Iac$.

Далее, сделав подстановку $X \mid Ibc$, $Y \mid Aba$ в выводимую формулу $(X \wedge Y) \to (Y \wedge X)$, получаем формулу: $(Ibc \wedge Aba) \to (Aba \wedge Ibc)$. В использованный выше закон силлогизма сделаем другую подстановку: $X \mid Ibc \wedge Aba$, $Y \mid Aba \wedge Ibc$, $Z \mid Iac$. Получим формулу: $((Ibc \wedge Aba) \to (Aba \wedge Ibc)) \to (((Aba \wedge Ibc) \to Iac) \to ((Ibc \wedge Aba) \to Iac))$. Теперь применяя дважды правило вывода MP: сначала к этой формуле и предыдущей, а затем к полученному результату и последней формуле предыдущего абзаца. В результате получим требуемую формулу.

13) Сделав в доказанную формулу 1 подстановку $c \mid a$, $a \mid c$, получаем: $(Aba \wedge Icb) \to Ica$. Сделав подстановку $X \mid Aba \wedge Icb$, $Y \mid Ica$, $Z \mid Iac$ в закон силлогизма $(X \to Y) \to ((Y \to Z) \to (X \to Z))$, получим формулу: $((Aba \wedge Icb) \to Ica) \to ((Ica \to Iac) \to ((Aba \wedge Icb) \to Iac))$. Применяя дважды правило MP (учитывая при этом теорему (FS 7)), получаем: $(Aba \wedge Icb) \to Iac$.

Сделав в закон силлогизма другую подстановку $X \mid Icb \wedge Aba$, $Y \mid Aba \wedge Icb$, $Z \mid Iac$, придём к формуле: $((Icb \wedge Aba) \to (Aba \wedge Icb)) \to (((Aba \wedge Icb) \to Iac) \to ((Icb \wedge Aba) \to Iac))$. Учитывая выводимость посылки этой формулы (см. второй абзац в доказательстве формулы 9) и только что установленную выводимость посылки остающейся формулы, после двукратного применения правила MP придём к требуемой формуле.

14) Из $Aab \to Iab$ (теорема (FS 8a)) с помощью подстановки $a \mid c$ получаем: $Acb \to Icb$. В выводимую формулу исчисления

высказываний $((X \wedge Y) \to Z) \to ((V \to X) \to ((V \wedge Y) \to Z))$ делаем подстановку $X \mid Icb$, $Y \mid Aba$, $Z \mid Iac$, $V \mid Acb$. Получаем формулу:

$$((Icb \wedge Aba) \to Iac) \to ((Acb \to Icb) \to ((Acb \wedge Aba) \to Iac)).$$

Учитывая формулу 13 и выведенную вначале формулу, после двукратного применения правила MP приходим к требуемой формуле.

Докажите самостоятельно выводимость остальных аристотелевых силлогизмов. □

§29. Свойства формализованного исчисления предикатов

Формализованное исчисление предикатов (ФИП) развито достаточно глубоко (см. §21 выше и Задачник, §11) и теперь, как и в случае формализованного исчисления высказываний, надлежит рассмотреть свойства (или метатеорию) этого исчисления. Но теперь, в области предикатов, логика достигает такой выразительной силы, что становится логическим основанием конкретных математических теорий, и теоремы (по сути, метатеоремы) о логике рассуждений достигают поистине философской глубины.

Оправданность аксиоматизации. Теорема оправданности аксиоматизации утверждает, что если $\Phi \vdash F$, то $\Phi \models F$, т.е. из синтаксической выводимости следует семантическая выводимость. Её очевидным следствием будет утверждение о том, что всякая теорема ФИП является общезначимой формулой (тавтологией) логики предикатов. Смысл этой теоремы состоит в утверждении фактически того, что мы не были излишне щедры в выборе аксиом и правил вывода для нашего формального исчисления и не включили в их число ничего лишнего, ибо доказуемыми в этом исчислении оказываются лишь общезначимые формулы логики предикатов. Доказательство этой теоремы не очень сложное, и мы получим её в качестве следствия несколько более общей теоремы. Обратное же утверждение (если $\Phi \models F$, то $\Phi \vdash F$) – о том, что при выборе аксиом и правил вывода мы не проявили и излишней скромности и для всякой общезначимой формулы логики предикатов в нашем ФИП вполне достаточно формальных средств, чтобы доказать её – уже не столь очевидно, и доказательство его, приводимое дальше, потребует от нас значительно больших усилий.

Теорема оправданности имеет глубокий смысл: она оправдывает наши занятия математикой, убеждая нас в том, что наши логические рассуждения и умопостроения не уводят нас от смысла и от практики.

ТЕОРЕМА 29.1. *Если в алгебраической системе* $\mathbf{M}$ *выполняются все формулы из множества* Φ *и из* Φ *синтаксически выводима формула* F, *то* F *также выполняется в* $\mathbf{M}$:

$$\boxed{\mathbf{M} \models \Phi \text{ и } \Phi \vdash F \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{M} \models F}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разделим на три этапа.

1) Сначала отметим, что каждая аксиома ФИП есть тождественно истинная формула. Что касается аксиом (A1), (A2), (A3) исчисления высказываний, то их тождественная истинность установлена нами в алгебре высказываний (см. теоремы 3.1з, 3.3а,л). Общезначимость аксиом (PA1) и (PA2) установлена в теореме 17.13.

2) Теперь покажем, что все три правила вывода, используемые в ФИП, обладают следующим семантическим свойством. Если алгебраическая система $\mathbf{M}$ служит моделью для всех посылок правила вывода, то $\mathbf{M}$ будет моделью и для формулы, получаемой из данных формул с помощью данного правила вывода. Докажем это утверждение для трёх правил вывода.

Правило MP. Допустим, что $\mathbf{M} \models F \to G$ и $\mathbf{M} \models F$. Докажем, что тогда $\mathbf{M} \models G$. Возьмём любую подстановку α констант из $\mathbf{M}$. Тогда по условию, каждое из высказываний $F(\alpha) \to G(\alpha)$ и $F(\alpha)$, получаемых соответственно из формул $F \to G$ и F в результате подстановки α предметных констант, будет истинным. Тогда истинным будет и высказывание $G(\alpha)$, т.е. $\mathbf{M} \models_\alpha G$. Это и означает, что $\mathbf{M} \models G$.

$\forall$-*правило.* Допустим, что $\mathbf{M} \models G(y) \to F(x, y)$, где x не входит свободно в формулу G, а y обозначает все свободные предметные переменные в формулах F и G (в F – кроме x). Тогда сделанное допущение означает, что для любых элементов $a, b \in M$ (где M – носитель алгебраической системы $\mathbf{M}$) высказывание $G(b) \to F(a, b)$ истинно в $\mathbf{M}$. Рассмотрим теперь высказывание $G(b) \to (\forall x)(F(x, b))$ и покажем, что оно истинно в $\mathbf{M}$ при любом $b \in M$. В самом деле, если $G(b)$ ложно, то рассматриваемое высказывание истинно. Если же $G(b)$ истинно, то, по отмеченному выше, истинным будет и высказывание $F(a, b)$. Поскольку оно будет истинным при любом $a \in M$, то отсюда вытекает истинность для таких $b \in M$ высказывания $(\forall x)(F(x, b))$. Это, в свою очередь, влечёт истинность высказывания

$G(b) \to (\forall x)(F(x,b))$ для тех $b \in M$, для которых $G(b)$ истинно. Итак, высказывание $G(b) \to (\forall x)(F(x,b))$ истинно для любых $b \in M$. Это и означает, что $\mathbf{M} \models G(y) \to (\forall x)(F(x,y))$.

$\exists$-*правило.* Подобно предыдущему правилу доказывается, что если $\mathbf{M} \models F(x) \to G$, то $\mathbf{M} \models (\exists x)(F(x)) \to G$.

3) Наконец, докажем утверждение самой теоремы. Пусть $\mathbf{M} \models \Phi$ и $\Phi \vdash F$. Последнее означает, что имеется вывод $B_1, B_2, \ldots, B_m$ формулы F из множества формул Φ (в частности $B_m \equiv F$). Покажем, что каждый элемент этой последовательности является формулой, выполняющейся в $\mathbf{M}$. Доказательство поведём индукцией по номеру k формулы в рассматриваемом выводе. При $k = 1$, если $B_1 \in \Phi$, то, по условию, $\mathbf{M} \models B_1$. Если B_1 – аксиома, то по п.1 она общезначима и, в частности, $\mathbf{M} \models B_1$. Предположим теперь, что при всех $k < n$ все формулы B_k выполняются в $\mathbf{M}$, т.е. $\mathbf{M} \models B_k$. Рассмотрим формулу B_n. Если $n \in \Phi$ или B_n – аксиома, то, как отмечено выше, $\mathbf{M} \models B_n$. Если же B_n получена из предыдущих формул последовательности по одному из трёх правил вывода, то на основании выполнимости всех предыдущих формул в $\mathbf{M}$ в силу утверждений из п.2 заключаем, что и B_n выполняется в $\mathbf{M}$, т.е. $\mathbf{M} \models B_n$. Окончательно заключаем, что все формулы последовательности $B_1, B_2, \ldots, B_m$ истинны в $\mathbf{M}$, в частности, $\mathbf{M} \models F$.

Теорема полностью доказана. □

Следствие 29.2. (*Теорема оправданности*). *Из синтаксической выводимости следует семантическая выводимость*, т.е.

$$\boxed{\Phi \vdash F \quad \Longrightarrow \quad \Phi \models F}\,.$$

Доказательство. Пусть $\Phi \vdash F$ и пусть $\mathbf{M}$ – любая алгебраическая система, в которой выполняются все формулы из Φ, т.е. $\mathbf{M} \models \Phi$, тогда по теореме, $\mathbf{M} \models F$. По определению семантического следствия это и означает, что $\Phi \models F$. □

Следствие 29.3. *Всякая доказуемая формула является общезначимой (т.е. любая теорема истинна)*:

$$\boxed{\vdash F \quad \Longrightarrow \quad \models F}\,.$$

Доказательство получается из предыдущего следствия при $\Phi = \emptyset$. □

Непротиворечивость формализованного исчисления предикатов. Важнейшим компонентом критерия оправданности всякой математической теории является её непротиворечивость, т.е. невозможность доказательства в ней некоторого утверждения и его отрицания одновременно. Трудности, связанные с доказательством этого свойства математических теорий (а одной из причин этих трудностей несомненно было отсутствие в содержательных математических теориях точного понятия доказательства), привели к тому, что в математике более естественным стал другой признак непротиворечивости теории, основанный на возможностях реализации этой теории, её моделируемости. Но в то же время, этот подход и привёл к возникновению парадоксов в математике, которые, в свою очередь, привели к возникновению науки об основаниях математики и к концепциям формального подхода к понятиям доказательства и математической (аксиоматической) теории. Одной из задач этого подхода была выработка такого формального понятия доказательства, при котором для конкретной математической теории понятие её формальной непротиворечивости совпало бы с понятием её содержательной непротиворечивости. Факт такого совпадения, в силу точности определения доказательства, становится математической теоремой (точнее, метатеоремой). Отметим, что привыкание в математике к эквивалентности этих двух понятий непротиворечивости было непростым. В частности, неприятие современниками неевклидовых геометрий Лобачевского-Бояи объясняется также и тем, что законность этих теорий обосновывалась отсутствием в них противоречий – аргументом, по существу, совпадающим с современным понятием формальной непротиворечивости. Геометрические модели для этих теорий, доказывающие их содержательную непротиворечивость, были найдены позднее.

Наша задача состоит в том, чтобы в рамках формализованного (узкого) исчисления предикатов дать точные определения двух понятий непротиворечивости и установить их эквивалентность.

Напомним, что формула логики предикатов называется *общезначимой*, если она истинна в любой интерпретации, и *противоречивой*, если она ложна в любой интерпретации, т.е. если её отрицание общезначимо. Эти семантические понятия, связывающие непротиворечивость с истинностью, позволяют сформулировать понятие семантически непротиворечивой теории.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29.4. Формальная теория называется *семантически непротиворечивой*, если ни одна из её теорем (формул) не является противоречивой, т.е. ложной в любой интерпретации. Аналогично, множество Ф формул называется *семантически непротиворечивым*, если ни одна формула, выводимая из Ф, не является противоречивой.

В теореме 10.1 доказано, что всякая теорема формализованного исчисления высказываний общезначима (тождественно истинна) и потому не является противоречивой. Это означает, что формализованное исчисление высказываний семантически непротиворечиво. Аналогичная теорема доказана и для формализованного исчисления предикатов (см. следствие 29.3 из теоремы 29.1 выше). Значит, и ФИП семантически непротиворечиво. Семантическая непротиворечивость ФИВ и ФИП означает: что эти формальные теории пригодны для описания любых классов алгебраических систем, т.е. они войдут в теории этих классов составными частями, что вполне соответствует общенаучному принципу универсальности законов логики (Г.-В.Лейбниц формулировал его как выполнимость логических законов "во всех мыслимых мирах").

Произвольная формальная теория T есть теория множества $\mathbf{M}(T)$ всех своих моделей и, значит, теория T семантически непротиворечива, если и только если $\mathbf{M}(T) \neq \emptyset$, т.е. для теории T существует модель. Если отождествить пригодность математической теории, её целесообразность с её семантической непротиворечивостью, то, можно сказать, что сформулированный критерий пригодности теории известен уже давно. Отыскание модели для теории до возникновения оснований математики было единственным общепризнанным методом доказательства "законности" теории. Математическая логика выработала аналог этого критерия, не опирающийся на наличие модели теории – внешний фактор по отношению к теории, а опирающийся на внутренние свойства самой теории. Это – понятие синтаксической непротиворечивости теории.

Определение 29.5. Формальная теория T называется *синтаксически* (или *дедуктивно*, или *формально*) *непротиворечивой*, если не существует такой формулы F, что F и $\neg F$ являются теоремами теории T, т.е. в T не выводимы одновременно формула и её отрицание. Аналогичное определение можно сформулировать и для произвольного множества Φ формул: Φ называется *синтаксически непротиворечивым*, если из Φ не выводимы одновременно формула и её отрицание.

В теореме 10.9 доказана синтаксическая непротиворечивость формализованного исчисления высказываний. Аналогично доказывается

Теорема 29.6. *Формализованное исчисление предикатов синтаксически непротиворечиво.*

Доказательство. Допустим противное, т.е. ФИП синтаксически противоречиво. Значит, найдётся такая формула F, что F и $\neg F$ будут теоремами ФИП. Тогда по следствию 29.3 из теоремы 29.1 формулы F и $\neg F$ будут общезначимыми, что невозможно на основании определения общезначимости. □

Теперь мы перейдём к установлению взаимосвязей между понятиями семантической и синтаксической непротиворечивости. Наша задача состоит в том, чтобы доказать их эквивалентность. Начнём с достаточно простой, но важной леммы.

Лемма 29.7. *Если множество формул имеет модель, то это множество семантически непротиворечиво.*

Доказательство. Если множество Φ формул имеет модель $\mathbf{M}$, то ни одна формула, выводимая из Φ, не является противоречивой, т.е. ложной во всякой интерпретации, ибо в противном случае, она была бы ложна и в $\mathbf{M}$ (что невозможно в силу теоремы 29.1). Это и означает, что Φ семантически непротиворечиво. □

Теорема 29.8. *Если множество формул семантически непротиворечиво, то оно синтаксически непротиворечиво.*

Доказательство. Допустим, что некоторое множество Φ формул узкого исчисления предикатов семантически непротиворечиво, но противоречиво синтаксически. Следовательно, из него выводима некоторая формула F и её отрицание $\neg F$. Но тогда из Φ выводима и их конъюнкция (по правилу введения конъюнкции) $F \wedge \neg F$. Но эта формула ложна в любой интерпретации, что означает, что множество Φ семантически противоречиво. Получаем противоречие, доказывающее, что Φ синтаксически непротиворечиво. □

Непосредственно из предыдущих леммы и теоремы вытекает такое следствие.

Следствие 29.9. *Если множество формул имеет модель, то оно синтаксически непротиворечиво.* □

Теорема Гёделя о существовании модели. Утверждение, обратное следствию, также оказывается справедливым. Но с конструктивной точки зрения оно оказывается более глубоким. Смысл его состоит в том, что всякое множество формул не только имеет модель, но эту модель можно конструктивно построить. Доказательство этого факта как раз и заключается в изложении метода такого построения. Это – ещё одна из замечательных теорем Гёделя – теорема о существовании модели – одна из важнейших теорем математической логики. Она доказана К.Гёделем в 1930 г.

Теорема 29.10. (*Гёделя о существовании модели*). *Любое синтаксически непротиворечивое множество Σ замкнутых формул узкого исчисления предикатов сигнатуры σ имеет модель.*

Доказательство. Пусть сигнатура $\sigma = \{a_0, a_1, \ldots ;$ $f_0, f_1, \ldots ;\ P_0, P_1, \ldots\}$. Требуется построить модель (алгебраическую систему) $\mathbf{M} = < M ;\ a_0, a_1, \ldots ;\ f_0, f_1, \ldots ;\ P_0, P_1, \ldots >$ такую, что $\mathbf{M} \models \Sigma$ (т.е. в алгебраической системе $\mathbf{M}$ выполняются все формулы из Σ). Эта модель будет строиться из слов некоторого алфавита. Под непротиворечивостью всюду в этом доказательстве будем понимать синтаксическую непротиворечивость.

Прежде всего, расширим данную сигнатуру σ до σ' введением новых индивидных констант: $\sigma' = \sigma \cup \{c_0, c_1, ..., c_n, ...\}$, где все c_i отличны от всех символов из σ. Далее, будем работать с формулами расширенной сигнатуры σ'. Поскольку все такие (замкнутые) формулы являются конечными словами некоторого счётного алфавита, то множество всех таких формул имеет счётную мощность[2], и мы можем все их расположить в последовательность (т.е. занумеровать натуральными числами). Итак, пусть $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ – множество всех предложений (замкнутых формул) сигнатуры σ'.

Построим, далее, последовательность (цепочку)

$$\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \dots \subseteq \Sigma_n \subseteq \dots \tag{1}$$

множеств замкнутых формул следующим образом:

а) $\Sigma_0 = \Sigma$.

б) Если $\Sigma_n \cup \{A_n\}$ противоречиво, то $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\neg A_n\}$.

в) Если $\Sigma_n \cup \{A_n\}$ непротиворечиво и A_n не начинается с квантора существования, то $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{A_n\}$.

г) Если $\Sigma_n \cup \{A_n\}$ непротиворечиво и $A_n \equiv (\exists x)(B(x))$, то $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{A_n, B(c_k)\}$, где $c_k \in \sigma' \setminus \sigma$ – новая константа с наименьшим номером k, не встречающаяся в формуле A_n и во всех формулах множества Σ_n.

1) Докажем сначала, что каждое множество Σ_n построенной последовательности будет непротиворечивым множеством формул исчисления предикатов сигнатуры σ'. Доказательство будем вести индукцией по n.

а) *База индукции*: $n = 0$. Так как $\Sigma_0 = \Sigma$, то по условию Σ_0 непротиворечиво в исчислении предикатов сигнатуры σ. Докажем, что оно непротиворечиво и в исчислении сигнатуры σ'. Допустим противное, т.е. $\Sigma_0 \vdash F$ и $\Sigma_0 \vdash \neg F$, где F – формула сигнатуры σ'. Следовательно, $\Sigma \vdash F$ и $\Sigma \vdash \neg F$. Это означает, что в Σ имеется такое конечное подмножество формул $G_1,...,G_m$, что $G_1, ..., G_m \vdash F, \neg F$. Пусть $B_1, B_2, ..., B_s \equiv F$

[2]См., например, теорему 7 на стр. 300 в книге *Игошин В.И.* Математическая логика как педагогика математики. – Саратов: Издательский центр "Наука", 2009. – 360 с.

– вывод формулы F из гипотез $G_1,\ldots,G_m$ в исчислении предикатов сигнатуры σ'. Допустим, что c_{i_1}, $c_{i_2},\ldots$, c_{i_p} – все те новые константы, которые входят в формулы этого вывода.

Поскольку $\forall-$ и $\exists-$правила вывода к константам не применяются, поэтому, заменив все новые константы c_{i_1}, $c_{i_2},\ldots$, c_{i_p} предметными переменными, не входящими в формулы B_1, $B_2,\ldots,B_s$, мы получим новую последовательность формул $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2,\ldots,\tilde{B}_s$ исчисления предикатов уже сигнатуры σ, представляющую собой вывод в этом исчислении её последней формулы $\tilde{B}_s \equiv \tilde{F}$. Аналогично доказывается, что в исчислении сигнатуры σ из множества Σ выводима формула $\neg\tilde{F}$. Получается противоречие с условием, согласно которому Σ – непротиворечиво в исчислении сигнатуры σ.

Таким образом, Σ_0 непротиворечиво в исчислении сигнатуры σ'.

Шаг индукции. Предположим, что Σ_n непротиворечиво в исчислении предикатов сигнатуры σ'. Покажем, что тогда таким же свойством обладает и множество Σ_{n+1}. Согласно определения, для него возможны следующие случаи.

б) $\Sigma_n \cup \{A_n\}$ противоречиво. В этом случае $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\neg A_n\}$. Допустим, что последнее множество противоречиво. Тогда $\Sigma_n, \neg A_n \vdash F$ и $\Sigma_n, \neg A_n \vdash \neg F$ для некоторой формулы F. Тогда для некоторого конечного подмножества $\Gamma \subset \Sigma_n$: Γ, $\neg A_n \vdash F$ и Γ, $\neg A_n \vdash \neg F$. Отсюда по производному правилу вывода $\neg$-вв получим $\Gamma \vdash \neg\neg A_n$, т.е. $\Gamma \vdash A_n$, и, значит, $\Sigma_n \vdash A_n$.

В то же время из условия противоречивости множества $\Sigma_n \cup \{A_n\}$ аналогичные рассуждения приведут к заключению: $\Sigma_n \vdash \neg A_n$.

Эти два заключения говорят о противоречивости множества Σ_n, что противоречит предположению индукции.

в) $\Sigma_n \cup \{A_n\}$ непротиворечиво и A_n не начинаются с квантора существования. В этом случае по определению $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{A_n\}$ и, значит, Σ_{n+1} – непротиворечиво.

г) $\Sigma_n \cup \{A_n\}$ непротиворечиво и A_n начинается с квантора существования: $A_n \equiv (\exists x)(B(x))$. В этом случае Σ_{n+1}

получается добавлением к Σ_n двух формул A_n и (c_k), где (c_k) получена из $B(x)$ подстановкой константы c_k (первой из c_0, c_1,..., не входящей в A_n и все формулы из Σ_n) вместо предметной переменной x: $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{A_n, B(c_k)\}$. Допустим, что Σ_{n+1} противоречиво, т.е. $\Sigma_{n+1} \vdash F, \neg F$. Тогда найдётся такое конечное подмножество $\Gamma \subset \Sigma_n$, что

$$\Gamma,\ (\exists x)(B(x)),\ B(c_k)\ \vdash\ F \quad \text{и} \quad \Gamma,\ (\exists x)(B(x)),\ B(c_k)\ \vdash\ \neg F.$$

Поскольку в выводах этих формул $\forall$-правило и $\exists$-правило вывода не применяются к константе c_k, поэтому, заменив в них эту константу новой переменной y, не участвующей в выводах этих формул, мы получим выводы, доказывающие, что

$$\Gamma,\ (\exists x)(B(y)),\ B(c_k)\ \vdash\ \tilde{F}, \quad \text{и} \quad \Gamma,\ (\exists x)(B(y)),\ B(c_k)\ \vdash\ \neg\tilde{F},$$

где $\tilde{F}$ получена из F заменой константы c_k на предметную переменную y (y – фиксированная переменная в этих выводах). Из двух последних выводимостей по производному правилу вывода – введения отрицания $\neg$-вв получаем: $\Gamma,\ (\exists x)(B(x))\ \vdash \neg B(y)$. Отсюда по правилу введения квантора общности (ВКО, см. Задачник, № 11.7, а) получаем:

$$\Gamma,\ (\exists x)(B(x))\ \vdash\ (\forall y)(\neg B(y))\,. \tag{2}$$

Кроме того, из теоремы из задачи 11.6,б Задачника легко получается выводимость:

$$(\forall y)(\neg B(y))\ \vdash\ \neg(\exists y)(B(y))\ .$$

Наконец, в силу выбора переменной y, которая свободна для x в формуле $B(x)$, на основании правила переименования связанных переменных, (см. Задачник, № 11.4,б) из последней выводимости заключаем, что

$$(\forall y)(\neg B(y))\ \vdash\ \neg(\exists x)(B(x))\,. \tag{3}$$

Из выводимостей (2) и (3) в силу транзитивности отношения выводимости (см. теорему 9.3, в) получаем:

$$\Gamma,\ (\exists x)(B(x))\ \vdash\ \neg(\exists x)(B(x))\ .$$

Вспоминая, что $(\exists x)(B(x)) \equiv A_n$, мы видим отсюда, что множество $\Gamma \cup \{A_n\}$ противоречиво. Поскольку $\Gamma \subset \Sigma_n$, то

$\Gamma \cup \{A_n\} \subset \Sigma_n \cup \{A_n\}$ и, значит, множество $\Sigma_n \cup \{A_n\}$ также противоречиво, что противоречит исходному условию.

Следовательно, и в этом случае множество Σ_{n+1} непротиворечиво.

2) Рассмотрим теперь множество $\Sigma^* = \bigcup \Sigma_n$ (объединение берётся по n от 0 до ∞). Отметим два свойства этого множества формул. Во-первых, множество Σ^* непротиворечиво. В самом деле, если бы из Σ^* выводились формулы F и $\neg F$, то они выводились бы из конечного подмножества множества Σ^*, которое включалось бы в некоторое Σ_n, которое следовательно, было бы противоречивым. Но это не так в силу предыдущего пункта 1 доказательства.

Во-вторых, для любой формулы A исчисления предикатов сигнатуры σ' $A \in \Sigma^*$ или $\neg A \in \Sigma^*$ (свойство полноты множества Σ^*). Это вытекает непосредственно из построения Σ^*, так как $A = A_n$ для некоторого натурального n.

Последнее свойство можно сформулировать несколько в ином виде. Сначала отметим, что $A \in \Sigma^* \iff \Sigma^* \vdash A$. В самом деле, импликация слева направо очевидна. Предположив, что $\Sigma^* \vdash A$ и $A \notin \Sigma^*$, в силу отмеченного свойства, получим $\neg A \in \Sigma^*$. В итоге мы получаем, что Σ^* противоречиво в противоречие с первым отмеченным выше свойством.

Следовательно, второе отмечаемое утверждение принимает вид: $\Sigma^* \vdash A$ или $\Sigma^* \vdash \neg A$ для любой формулы A.

3) Построим теперь саму модель (алгебраическую систему) **M**. Напомним, что её сигнатура $\sigma = \{a_0, a_1, \ldots ;\ f_0, f_1, \ldots ;\ P_0, P_1, \ldots\}$. Рассмотрим всевозможные термы расширенной сигнатуры σ', не содержащие предметных переменных, а содержащие лишь предметные константы a_0, a_1, ..., c_0, c_1, ... Напомним, что эти термы представляют собой либо сами эти константы, либо выражения вида $f_i(t_1, \ldots t_{n_i})$, где f_i – функциональный символ из σ, а $t_1,\ldots,t_{n_i}$ – термы. Множество всех этих термов и есть базисное множество модели **M**.

Сигнатурные операции на этом множестве зададим следующим образом: $a_i^M = a_i$, $f_i^M(t_1, \ldots, t_{n_i}) = f_i(t_1, \ldots, t_{n_i})$, ($i$=0,1,..).

Наконец, выполнимость на **M** соответствующего сигнатурного отношения определим следующим образом:

$$\mathbf{M} \models P_j^M(t_1, ..., t_{m_j}) \iff \Sigma^* \vdash P_j(t_1, ..., t_{m_j}) . \qquad (4)$$

4) Проверим, что алгебраическая система **M** сигнатуры σ действительно является моделью исходного множества Σ формул исчисления предикатов сигнатуры σ, т.е. $\mathbf{M} \models \Sigma$. Для этого докажем сначала, что для всякой формулы $F(x_1, ..., x_n)$ сигнатуры σ' и любых термов $t_1, ..., t_n \in M$ имеет место следующее утверждение:

$$\mathbf{M} \models F(t_1, ..., t_n) \iff \Sigma^* \vdash F(t_1, ..., t_n) . \qquad (5)$$

Доказательство будем вести индукцией по числу k логических связок (символов), используемых при построении формулы F.

База индукции: $k = 0$. Тогда F – атомарная формула, имеющая вид $P_j(t_1, ..., t_{m_j})$, а для неё утверждение (5) верно по определению (4).

Шаг индукции. Предположим, что для всех формул, в записи которых число логических символов $\leq k$, утверждение (5) верно. Пусть F – произвольная формула, в записи которой участвует $k + 1$ логический символ. Покажем, что тогда утверждение (5) будет справедливо и для неё. На основании определения формулы, формула F имеет один из следующих видов: $\neg A$, $A \to B$, $(\forall x)(B(x))$, $(\exists x)(B(x))$.

Рассмотрим последовательно каждый из этих случаев.

а) $\underline{F \equiv \neg A}$. Предположим, что $\mathbf{M} \models \neg A(t_1, ..., t_n)$. Тогда по определению отрицания, это означает, что $A(t_1, ..., t_n)$ не выполняется на **M**: $\mathbf{M} \not\models A(t_1, ..., t_n)$. Отсюда по предположению индукции (5) заключаем, что $\Sigma^* \nvdash A(t_1, ..., t_n)$. Следовательно, по свойству полноты множества Σ^*, отмеченному в п.2 настоящего доказательства, $\Sigma^* \vdash \neg A(t_1, ..., t_n)$. Легко видеть, что каждое утверждение настоящего рассуждения допускает обращение, так что

$$\mathbf{M} \models \neg A(t_1, ..., t_n) \iff \Sigma^* \vdash \neg A(t_1, ..., t_n) .$$

б) $\underline{F \equiv A \to B}$. Предположим, что $\mathbf{M} \models A(t_1, ..., t_n) \to B(t_1, ..., t_n)$. Используя определения импликации, конъюнкции и отрицания, определение (2) полноту Σ^* и предположение индукции для формул A и B, проводим следующее рассуждение:

$$\mathbf{M} \models A \to B \iff \mathbf{M} \models \neg(A \wedge \neg B) \iff \mathbf{M} \not\models A \wedge \neg B \iff$$

$$\iff \mathbf{M} \not\models A \text{ или } \mathbf{M} \not\models \neg B \iff \mathbf{M} \not\models A \text{ или } \mathbf{M} \models B \iff$$

$$\iff \Sigma^* \nvdash A \text{ или } \Sigma^* \vdash B \iff \Sigma^* \vdash \neg A \text{ или } \Sigma^* \vdash B .$$

Теперь мы находимся в области формализованного исчисления высказываний. Дальнейшие рассуждения таковы. Из каждого из утверждений $\Sigma^* \vdash \neg A$ и $\Sigma^* \vdash B$ по правилу $\vee$-вв следует $\Sigma^* \vdash \neg A \vee B$, т.е. $\Sigma^* \vdash A \to B$. Теперь нужно проделать обратное рассуждение. Предположим, что $\Sigma^* \vdash A \to B$ и $\Sigma^* \vdash \neg A$. Следовательно, по второму свойству множества Σ^* из п.2 настоящего доказательства, $\Sigma^* \vdash A$. Тогда из выводимостей $\Sigma^* \vdash A \to B$ и $\Sigma^* \vdash A$ и правила МР: $A \to B, A \vdash B$ следует, что $\Sigma^* \vdash B$.

Итак, мы доказали, что $\mathbf{M} \models A \to B \iff \Sigma^* \vdash A \to B$.

в) $\underline{F \equiv (\forall x)(B(x, t_1, ..., t_n))}$. Предположим, что $\mathbf{M} \models (\forall x)(B(x, t_1, ..., t_n))$. По определению квантора общности, это означает, что $\mathbf{M} \models B(t, t_1, ..., t_n)$ для каждого элемента $t \in M$. Отсюда по предположению индукции (5) следует, что $\Sigma^* \vdash B(t, t_1, ..., t_n)$. Отсюда в силу правила введения квантора общности, заключаем, что $\Sigma^* \vdash (\forall x)(B(x, t_1, ..., t_n))$.

Обратно, пусть $\Sigma^* \vdash (\forall x)(B(x, t_1, ..., t_n))$. Вместе с аксиомой (PA1): $(\forall x)(B(x, t_1, ..., t_n)) \to B(t, t_1, ..., t_n)$ в силу правила МР, это даёт: $\Sigma^* \vdash B(t, t_1, ..., t_n)$. На основании предположения индукции (5), отсюда следует, что $\mathbf{M} \models B(t, t_1, ..., t_n)$. Поскольку данная выполнимость на модели $\mathbf{M}$ имеет место для любого элемента $t \in M$, поэтому на основании определения квантора общности, отсюда следует, что $\mathbf{M} \models (\forall x)(B(x, t_1, ..., t_n))$.

г) $\underline{F \equiv (\exists x)(B(x, t_1, ..., t_n))}$. Предположим, что $\mathbf{M} \models (\exists x)(B(x, t_1, ..., t_n))$. Тогда по определению квантора существования, $\mathbf{M} \models B(a_0, t_1, ..., t_n)$ для некоторого элемента $a_0 \in M$. В силу предположения индукции (5), отсюда получаем $\Sigma^* \vdash B(a_0, t_1, ..., t_n)$. Вместе с аксиомой (PA2): $B(a_0, t_1, ..., t_n) \to (\exists x)(B(x, t_1, ..., t_n))$, в силу правила MP, это даёт: $\Sigma^* \vdash (\exists x)(B(x, t_1, ..., t_n))$.

Обратно, пусть $\Sigma^* \vdash (\exists x)(B(x, t_1, ..., t_n))$. Поскольку $(\exists x)(B(x, t_1, ..., t_n))$ – замкнутая формула сигнатуры σ', то она содержится в последовательности $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ всех таких формул. Предположим, что это формула A_m. Тогда множество $\Sigma_m \cup \{A_m\}$ непротиворечиво. (Если бы оно было противоречиво, то Σ_{m+1} равнялось бы $\Sigma_m \cup \{\neg A_m\}$, то есть формула $\neg A_m$ входила бы в множество Σ^* и последнее было бы противоречивым, что не так в силу п.2 настоящего доказательства). Поскольку, кроме того, A_m начинается с квантора существования, то в этом случае $\Sigma_{m+1} = \Sigma_m \cup \{A_m, B(c_k, t_1, ..., t_n)\}$ и, значит, $B(c_k, t_1, ..., t_n) \in \Sigma^*$. Следовательно, для формулы $B(c_k, t_1, ..., t_n)$ по предположению индукции имеем $\mathbf{M} \models B(c_k, t_1, ..., t_n)$ для некоторой константы $c_k \in M$. Тогда, по определению квантора существования $\mathbf{M} \models (\exists x)(B(x, t_1, ..., t_n))$.

Итак, мы доказали, что всякая формула, выводимая из Σ^* (и, в частности, принадлежащая Σ^*), истинна (выполнима) на модели $\mathbf{M}$. В частности, на $\mathbf{M}$ выполняются и все формулы исходной совокупности $\Sigma = \Sigma_0 \subset \Sigma^*$, то есть $\mathbf{M}$ – действительно модель непротиворечивого множества формул Σ.

Теорема полностью доказана. □

Теорема Гёделя о существовании модели позволяет доказать теорему, обратную к теореме 29.8, и они вместе образуют следующую важную метатеорему.

Теорема 29.11. (*о непротиворечивости*). *Множество формул узкого исчисления предикатов семантически непротиворечиво тогда и только тогда, когда оно синтаксически непротиворечиво.*

Доказательство. Необходимость есть теорема 29.8. Обратно, если множество формул синтаксически непротиворечиво, то по теореме 29.10 оно имеет модель, а тогда по лемме 29.7 настоящего параграфа, оно семантически непротиворечиво. □

Наконец объединим в одну метатеорему следствие из теоремы 29.8 и теорему 29.10. Получим:

Теорема 29.12. (*о непротиворечивости*). *Множество формул узкого исчисления предикатов синтаксически (дедуктивно) непротиворечиво тогда и только тогда, когда оно имеет модель.* □

Приведём интересный комментарий, который даёт теореме о непротиворечивости известный логик Р.Линдон ([3.16], стр. 79 – 80):

"Доказательства (дедуктивной) непротиворечивости какой-либо теории посредством указания её модели широко распространены в абстрактной математике. Менее очевидное из утверждений теоремы о непротиворечивости – о существовании модели у каждой дедуктивно непротиворечивой теории – используется далеко не так часто. Возможно, это объясняется тем, что математики не слишком-то большое значение придают понятию существования; теорему о непротиворечивости можно как раз и рассматривать как скромное, но зато точное выражение довольно-таки расплывчатого мнения, что существование в математике – это не что иное, как непротиворечивость.

Возможности применения теоремы о непротиворечивости к проблемам установления непротиворечивости конкретных теорий весьма ограничены: дело в том, что построение модели обычно требует принятия в метаязыке допущений, значительно более сильных, нежели те, которые выражаются предметной теорией. Другой путь установления непротиворечивости какой-нибудь аксиоматической теории состоит в том, чтобы с помощью чисто синтаксических рассмотрений показать, что в данной теории нельзя доказать тождественно ложную формулу. Область применения этого метода, однако, также невелика. ... Теорема Гёделя не позволяет надеяться на получение доказательства непротиворечивости теории, если не допускать в теории, предназначенной для такого доказательства на метаязыке, по меньшей мере столь же сильных средств, что и в рассматриваемой предметной теории. Убеждение в непротиворечивости сколько-либо сложных математических теорий базируется в конечном счёте на интуиции и опыте."

Полнота и адекватность формализованного исчисления предикатов. Доказав теорему Гёделя о существовании модели (теорема 29.10), мы сможем доказать теорему, обратную теореме оправданности (следствие 29.2 из теоремы 29.1 выше), т.е. утверждение о том, что из семантической выводимости следует синтаксическая выводимость. В самом деле, пусть $\Phi \models F$. Покажем, что тогда множество формул $\Phi \cup \{\neg F\}$ противоречиво. Допустим на время, что это не так. Тогда по теореме 29.10, это множество имеет модель $\mathbf{M}$, т.е. на $\mathbf{M}$ выполняется формула $\neg F$ и все формулы из Φ. Последнее, ввиду условия $\Phi \models F$, влечёт, что на $\mathbf{M}$ выполняется и формула F. Получаем противоречие. Итак, множество $\Phi \cup\{\neg F\}$ противоречиво. Значит, из него выводима любая формула, в частности, $\Phi \cup \{\neg F\} \vdash F$. Тогда по теореме о дедукции, $\Phi \vdash \neg F \to F$. Учитывая, что, кроме того, формула $(\neg F \to F) \to F$ является теоремой ФИВ (она является тавтологией алгебры высказываний), по правилу MP заключаем, что $\Phi \vdash F$.

Итак, мы доказали, что если $\Phi \models F$, то $\Phi \vdash F$. Объединив это утверждение со следствием 29.1 из теоремы 29.2, приходим к следующей важной метатеореме.

Теорема 29.13. (*адекватности*). *Формула F синтаксически выводима из множества формул Φ тогда и только тогда, когда она семантически выводима из Φ*:

$$\boxed{\Phi \vdash F \iff \Phi \models F}\ . \ \square$$

Если теорема оправданности означала, что при выборе аксиом и правил вывода мы не были слишком щедры (так что сможем доказать лишь общезначимые формулы), то обратная теорема – теорема адекватности – означает, что при этом выборе мы не были и излишне скупы (так что всякую общезначимую формулу сможем доказать).

Заметим, что нетрудно показать, что теорема о существовании модели вытекает из теоремы адекватности. В самом деле, предположим, что Φ – непротиворечивое множество формул и оно не имеет модели. Тогда ясно, что для любой формулы F справедливо семантическое следование $\Phi \models F$. В силу теоремы адекватности отсюда следует, что $\Phi \vdash F$ для любой F, что означает противоречивость множества Φ, в противоречие с условием.

Теорема 29.14. (*К.Гёделя о полноте ФИП*). *Класс доказуемых замкнутых формул совпадает с классом общезначимых (или тождественно истинных) формул*:

$$\boxed{\vdash F \quad \Longleftrightarrow \quad \models F}\ .$$

Эта теорема непосредственно вытекает из предыдущей при $\Phi = \emptyset$. □

Справедлива она и для открытых формул. В самом деле, если $\models F(x_1, ..., x_n)$, где x_1, ... , x_n – свободные предметные переменные в формуле F, то, в силу определения квантора общности, это будет равносильно тому, что $\models (\forall x_1)...(\forall x_n)(F(x_1, ..., x_n))$. По теореме 29.14, это равносильно тому, что $\vdash (\forall x_1)...(\forall x_n)(F(x_1, ..., x_n))$. В силу свойств выводимости, последнее утверждение равносильно тому, что $\vdash F(x_1, ..., x_n)$ (Слева направо утверждение справедливо на основании правила УКО – удаления квантора общности (см. Задачник, № 11.7 б), а справа налево – на основании правила ВКО – введения квантора общности (см. Задачник, № 11.7 а)).

Неполнота формализованного исчисления предикатов в абсолютном и узком смыслах. Мы обсудили два понятия полноты аксиоматической теории – абсолютная полнота (см. определение 24.5) и полнота в узком смысле (определение 24.6). Доказанная теорема 29.14 может быть истолкована как некая внешняя полнота формализованного исчисления предикатов, его полнота относительно логики предикатов: в этой теории могут быть формально доказаны все общезначимые формулы логики предикатов. Рассмотрим вопросы внутренней полноты формализованного исчисления предикатов, т.е. выясним, будет ли эта теория абсолютно полной и полной в узком смысле (см. определения 24.5 и 24.6). Поскольку, на основании теоремы 29.14 множество теорем формализованного исчисления предикатов совпадает с множеством тавтологий (общезначимых формул) логики предикатов, а в логике предикатов существуют выполнимые, но не общезначимые формулы, то формализованное исчисление предикатов не является абсолютно полной теорией. Здесь ситуация аналогична соответствующей ситуации в формализованном исчислении высказываний. Что же касается полноты формализованного исчисления предикатов в узком смысле, то исчисление предикатов (в отличие от исчисления высказываний, см. теорему 28.4) таким свойством не обладает. Для доказательства приведём пример формулы, не являющейся теоремой формализованного исчисления предикатов, добавление которой к аксиомам исчисления предикатов (с сохранением правил вывода) приводит к непротиворечивой формальной аксиоматической теории.

Пример 29.15. Рассмотрим формулу $(\exists x)(F(x)) \to (\forall x)(F(x))$. Нетрудно убедиться в том, что она не является общезначимой (приведите пример конкретного одноместного предиката, превращающего эту формулу в ложное высказывание). Поэтому, на основании теоремы К. Гёделя о полноте, она не доказуема в формализованном исчислении предикатов. С другой стороны, добавив к аксиомам формализованного исчисления предикатов рассматриваемую формулу, получим непротиворечивую формальную теорию T. Её непротиворечивость можно доказать следующим образом.

Рассмотрим модель этой теории на одноэлементном множестве $M = \{a\}$. Ясно, что данная формула тождественно истинна на M. Далее, учитывая, что на M можно определить для каждого натурального n лишь два na-местных предиката P_1^n и P_2^n, причём $\lambda(P_1^n(a, ..., a)) = 0$ и $\lambda(P_2^n(a, ..., a)) = 1$, нетрудно доказать, что все аксиомы новой теории T тождественно истинны на этой модели и правила вывода от тождественно истинных на M формул приводят к тождественно истинным на M формулам. Таким образом, доказывается утверждение: всякая теорема теории T тождественно истинна на одноэлементном множестве M.

Следовательно, если бы для некоторой формулы F обе формулы F и $\neg F$ были теоремами теории T, то они были бы тождественно истинны на одноэлементном множестве M, что невозможно. Поэтому расширенная теория T непротиворечива, что и доказывает неполноту в узком смысле формализованного исчисления предикатов.

Теорема компактности. Мы уже отмечали (см. теорему 15.3,б) и неоднократно использовали тот простой факт, непосредственно вытекающий из определения понятия вывода, что $\Phi \vdash F$ тогда и только тогда, когда $\Phi_0 \vdash F$, где Φ_0 – некоторое *конечное* подмножество множества Φ формул. Теорема адекватности, установленная на основании в ыдающейся теоремы Гёделя о существовании модели, позволяет получить из этого тривиального соображения аналогичную теорему семантического содержания, уже отнюдь не столь очевидную.

Теорема 29.16. (*теорема компактности К.Гёделя – А.И.Мальцева*). *Если* $\Phi \models F$, *то для некоторого конечного подмножества* $\Phi_0 \subset \Phi$ *имеет место* $\Phi_0 \models F$.

Доказательство. Если $\Phi \models F$, то по теореме 29.13 (теорема адекватности), $\Phi \vdash F$. В силу сделанного перед настоящей теоремой замечания, найдётся такое конечное подмножество $\Phi_0 \subset \Phi$, что $\Phi_0 \vdash F$. Отсюда по теореме оправданности (следствие 29.2 из теоремы 29.1) заключаем, что $\Phi_0 \models F$. □

Следствие 29.17 (*локальная теорема К.Гёделя – А.И.Мальцева*). *Множество* Σ *замкнутых формул узкого исчисления предикатов сигнатуры* σ *имеет модель тогда и только тогда, когда каждое его конечное подмножество имеет модель.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Обратно.

Пусть каждое конечное подмножество множества Σ имеет модель. Тогда Σ – синтаксически непротиворечиво. (Если бы это было не так, то для некоторой формулы F имелись бы выводимости $\Sigma \vdash F$ и $\Sigma \vdash \neg F$, и, значит, нашлось бы такое конечное подмножество $\Sigma_0 \subset \Sigma$, что $\Sigma_0 \vdash F$ и $\Sigma_0 \vdash \neg F$, т.е. Σ_0 было бы синтаксически противоречиво и, значит, по теореме 29.12, не имело бы модели, что противоречило бы условию.) Следовательно, по теореме 29.10 о существовании модели, множество Σ имеет модель. Следствие доказано. □

В заключение приведём ещё одну теорему о формулах узкого исчисления предикатов и их моделях.

Теорема 29.18. (*Л.Лёвенгейм – Т.Сколем*). *Пусть σ – счётная сигнатура и Σ – множество замкнутых формул узкого исчисления предикатов сигнатуры σ. Если Σ имеет модель, то Σ имеет счётную модель.*

Доказательство. Пусть $\sigma = \{a_0, a_1, ...; f_0, f_1, ...; P_0, P_1, ...\}$ и множество Σ формул имеет модель. Тогда (по теореме 29.12) Σ синтаксически непротиворечиво. Тогда модель этого множества формул может быть построена как в доказательстве теоремы 29.10. Но строимая там модель тогда будет счётной: она состоит из элементов $a_0,\ a_1,\ \dots;\ c_0,\ c_1 \dots$ и всех термов (не содержащих переменных), построенных из констант a_i, a_j. Эти термы можно занумеровать, например, по следующему правилу: $\nu(a_i) = 4i+1, \quad \nu(c_i) = 4i+3$,

$$\nu(f_i(t_1, ..., t_{n_i})) = 2^{n_i+1} 3^{\nu(t_1)} \cdot 5^{\nu(t_2)} \cdot \ \dots \ \cdot p_{n_i}^{\nu(t_{n_i})},$$

где $p_0 = 2,\ p_1 = 3,\ p_2 = 5,\ \dots,\ p_{n_i},\ \dots$ – последовательность простых чисел. □

Эта теорема может быть доказана и в более общей мощностной формулировке: *Если множество Σ формул имеет бесконечную модель и мощность множества всех букв, из которых составлены формулы из Σ, равна n, то для любой бесконечной мощности $m \geq n$ существует модель множества Σ мощности m.*

Укажем два следствия этой теоремы. 1) *Если* Σ *– множество формул мощности* n, *имеющее бесконечную модель, то* Σ *имеет бесконечные модели любых мощностей, превышающих* n. 2) *Всякое конечное множество или счётное непротиворечивое множество формул либо имеет только конечные модели, либо имеет бесконечные модели любых мощностей.*

Теорема Лёвенгейма–Сколема даёт ряд поразительных следствий двух типов: одни из них гласят, что некоторая теория имеет неожиданно обширные модели, другие – что теория имеет неожиданно узкие модели. Дальнейшее развитие эта мысль получит в следующем параграфе.

§30. Формальные теории первого порядка

В §21 (и в §14 Задачника) построено чистое (или, как говорят, узкое) формализованное исчисление предикатов первого порядка, а затем в §29 рассмотрены его свойства (метатеория). В этом исчислении не участвуют функциональные буквы и предметные константы основного алфавита, хотя язык исчисления, т.е. его формулы, определён в начале §29 с учётом того, что такие символы в нём будут использоваться. Если в аксиомах и других формулах исчисления предикатов участвуют функциональные буквы и предметные константы, то говорят о прикладном исчислении предикатов или о формальной аксиоматической теории, или об элементарной теории, или о теории первого порядка. Здесь можно отметить, что термин "теория первого порядка" означает, что в теории кванторы применяются лишь по предметным переменным и не применяются по переменным предикатным. Таким образом, каждая из теорий первого порядка является расширением формализованного исчисления предикатов. Система аксиом теории первого порядка получается в результате добавления к аксиомам формализованного исчисления предикатов, называемых в данной ситуации логическими аксиомами, собственных или нелогических аксиом теории. В записи нелогических аксиом используются символы отношений, символы операций и нелогические константы, присущие данной формальной теории. Другой важной особенностью прикладных исчислений является то, что в схемах аксиом (PA1) и (PA2) участвуют уже не предметные переменные, а произвольные термы. Более точно, эти схемы аксиом принимают следующий вид:

$$\text{(PA 1')} \qquad (\forall x)(F(x)) \ \rightarrow \ F(t) \ ,$$

$$\text{(PA 2')} \qquad F(t) \ \rightarrow \ (\exists x)(F(x)) \ ,$$

где терм t не содержит предметной переменной и $F(t)$ – результат подстановки терма t в $F(x)$ вместо всех свободных вхождений x, причём, все переменные t должны быть свободными в $F(t)$.

Формальные теории возникают как некие формальные конструкции для соответствующих содержательных теорий. Если для семантической (содержательной) теории удаётся построить непротиворечивую и полную формальную теорию, то исходную содержательную теорию называют *аксиоматизируемой* или *формализуемой* теорией. Ранее мы установили, что логика высказываний и логика предикатов формализуемы с помощью соответствующих исчислений.

В настоящем параграфе будут рассмотрены формальные подходы к тем аксиоматическим теориям, которые лежат в основаниях математики и о которых речь шла в главе IV (см. примеры в §23). Сначала кратко коснёмся формальных теорий с равенством, а затем достаточно обстоятельно поговорим о формальных теориях множеств, в частности о формальной теории Цермело-Френкеля. Затем будет рассмотрена формальная арифметика и дана характеристика теоремы Гёделя о её неполноте. Далее, будут рассмотрены пути формализации математического анализа.

Теории первого порядка с равенством. Во многих теориях, которые могут быть формализованы как теории первого порядка, участвует понятие равенства. Формализация этого понятия осуществляется следующим образом. В число предикатных символов теории вводится символ "=" двухместного предиката равенства. В определение формулы добавляется пункт: "если x, y – предметные переменные, то $(x = y)$ – формула". (Следует отметить, что если в нашей формальной теории, кроме предиката равенства, имеются ещё какие-то и функциональные символы, то данный пункт определения будет звучать так: "если t_1, t_2 – термы, то $(t_1 = t_2)$ – формула"). Наконец, в список аксиом вводятся две нелогические аксиомы, описывающие свойства равенства:

(PA 3) $(\forall x)(x = x)$ (конкретная аксиома) ;

(PA 4) $(\forall x, y)(x = y \rightarrow (F(x,x) \rightarrow F(x,y))$ (схема аксиом),

где формула $F(x,y)$ получается из формулы $F(x,x)$ заменой некоторых (не обязательно всех) вхождений x на y при условии, что y в этих вхождениях также остаётся свободным. Последняя аксиома выражает свойство равенства, часто называемое правилом замены равного равным: два равных объекта (x и y) обладают одинаковыми (равносильными) свойствами. Всякая формальная теория, в которой (PA3) и (PA4) являются аксиомами или теоремами, называются теорией (или исчислением) с равенством. Дело в том, что из (PA3) и (PA4) выводимы основные свойства равенства: рефлексивность, симметричность, транзитивность. (Так что такое равенство при интерпретации формальной теории интерпретируется не как совпадение элементов модели, а как их эквивалентность, т.е. принадлежность одному классу отношения эквивалентности).

Теорема 30.1. *В любой формальной теории с равенством:*

1) $\vdash t = t$ *для любого терма* t (*рефлексивность равенства*);

2) $\vdash x = y \rightarrow y = x$ (*симметричность равенства*) ;

3) $\vdash x = y \rightarrow (y = z \rightarrow x = z)$ (*транзитивность равенства*) .

Доказательство. 1) Непосредственно следует из аксиом (PA3) и (PA1') (где $F(x)$ имеет вид $x = x$) по правилу заключения MP.

2) Запишем аксиому (PA4) для случая, когда $F(x, y)$ есть $y = x$: $(x = y) \to (x = x \to y = x)$. Используя эту аксиому и дважды применяя правило MP, нетрудно показать, что $x = y, x = x \vdash y = x$. Поскольку формула $x = x$ является аксиомой теории, поэтому из числа гипотез её можно исключить, так что $x = y \vdash y = x$. Наконец, из этой выводимости по теореме о дедукции для ФИП заключаем, что $\vdash x = y \to y = x$.

3) Заменим в (PA4) x на y, а y на x, в качестве $F(y, y)$ возьмём $y = z$, в качестве $F(y, z)$ возьмём $x = z$. Получим: $y = x \to (y = z \to x = z)$. В силу правила MP отсюда заключаем, что $y = x \vdash y = z \to x = z$. На основании предыдущего свойства равенства, $x = y \vdash y = x$. Из этих двух выводимостей заключаем, что $x = y \vdash y = z \to x = z$. Отсюда по теореме о дедукции следует, что $\vdash x = y \to (y = z \to x = z)$. □

О формальных теориях множеств. В §23 (пример 23.7) были рассмотрены различные аксиоматики содержательной ("наивной", канторовской) теории множеств. Одной из важнейших ролей теории множеств является та, которую она играет в вопросах доказательства непротиворечивости тех или иных математических теорий, т.е. фактически в самых основах математики. Мы говорили, что одним из основных методов доказательства непротиворечивости математической теории является метод моделей (или интерпретаций). Интерпретации для многих математических теорий строятся с использованием теории множеств, поэтому непротиворечивость всей математики в значительной мере упирается в непротиворечивость теории множеств.

С начала XX века был намечен ряд путей обеспечения более надёжного фундамента теории множеств с целью, прежде всего, преодоления тех парадоксов, которые были выявлены в ней в конце XIX – начале XX века и о которых говорилось в главе V. Главный метод борьбы с парадоксами – формализация теории множеств. Большую часть попыток формализовать теорию множеств можно разбить на три группы, характеризующиеся соответственно как логистическая, аксиоматическая (или формалистическая) и интуиционистская (или конструктивная) позиции.

Чтобы кратко охарактеризовать первую позицию (к числу её сторонников относятся Б.Рассел и А.Уайтхед), вернёмся к парадоксу Рассела, рассмотренному в §26. Попытаемся понять, в чём заключается дефект в рассуждениях, который привёл к этому парадоксу. По мнению некоторых математиков недопустимо определять объект (множество M) с помощью некоторой совокупности (множество M определено с помощью совокупности всех множеств и множеств второго класса), а затем причислять его к этой совокупности (множество M причислялось к первому, а затем ко второму классам), так как при этом оказывается, что он в известной степени участвует в своём собственном определении. Чтобы ликвидировать этот дефект, Расселом и Уайтхедом была построена так называемая теория типов, исключающая рассмотрение множеств, приводящих к антиномии. В силу этой теории множество М, которое рассматривается в антиномии Рассела, следует рассматривать как новое образование, которое не имеет смысла причислять ни к первому, ни ко второму классам. Множества можно образовывать только на основании точной процедуры, надстраивая их классы один над другим в порядке некоторой иерархии (иерархия типов). Иерархия типов, построенная Расселом и Уайтхедом, приводит к чрезмерным ограничениям, в силу которых математика становится чрезвычайно сложной.

Другая попытка устранения антиномий теории множеств была предпринята немецким математиком Э.Цермело (1908), который построил теорию множеств в виде формальной аксиоматической теории. Им была предложена наиболее удачная система аксиом формальной теории множеств.

СИСТЕМА АКСИОМ ЦЕРМЕЛО-ФРЕНКЕЛЯ И НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕЁ. Прежде чем сформулировать систему аксиом данной аксиоматической теории, отметим два обстоятельства. Во-первых, формальная теория множеств создавалась как аксиоматическая теория для уже существовавшей содержательной (или "наивной") канторовской теории множеств. Задача состояла в том, чтобы аксиоматизировать эту теорию, т.е. зафиксировать первоначальные (неопределяемые) понятия и выбрать совокупность известных утверждений о них, которую объявить системой аксиом. Во-вторых, формальная теория множеств должна стать элементарной теорией первого порядка, базирующейся на формализованном исчислении предикатов, т.е. прикладным исчислением первого порядка. В 1908 году, когда Цермело сформулировал свои аксиомы, аксиоматизация теории предикатов в математической логике ещё не была достигнута и точная форма языка формальной теории ещё не была известна. (Важнейшие шаги в этом направлении были сделаны Б.Расселом и А.Уайтхедом в их монографии Principia Mathematica (1913), польским математиком К.Куратовским, который в 1921 г. свёл понятие упорядоченной пары к понятию неупорядоченной пары и тем самым – к отношению принадлежности, математиками школы Гильберта и завершена она была в первом томе книги Д.Гильберта и П.Бернайса "Основания математики", вышедшей в 1934 г.). Но когда формализация языка теории множеств была закончена, оказалось, что система аксиом Цермело прекрасно выражается на нём и почти полностью удовлетворяет потребностям математики. В 1922 году немецкий математик А.Френкель добавил к этой системе лишь аксиому подстановки. Полученная система аксиом стала называться *системой аксиом Цермело-Френкеля* и обозначаться ZF.

Приступим к описанию системы аксиом Цермело – Френкеля (ZF) и некоторых следствий из неё. Прежде – о первоначальных (неопределяемых) понятиях. Первым двухместный предикатный символ отношения принадлежности "$\in$", так что атомарные формулы имеют вид "$x \in y$" (читается: "x принадлежит y"), "x есть член (элемент) y", "x содержится в y", "y содержит x в качестве члена (элемента)". Вместо "$\neg(x \in y)$" условимся писать "$x \notin y$". Вторым предикатным символом является двухместный предикатный символ отношения равенства "$=$", так что второй вид атомарных формул такой: "$x = y$". Первая аксиома характеризует отношение равенства:

(ZF1) *Аксиома объёмности или экстенсиональности* (восходит к Г-В.Лейбницу, введена Г.Фреге в 1893 году):

$$(\forall x, y)[(\forall z)(z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longleftrightarrow x = y] .$$

Она утверждает, что множества совпадают в том и только в том случае, если они состоят из одних и тех же элементов. Множества x и y называются *различными*, если существует такой z, что $z \in x$ и $z \notin y$ или же существует z, что $z \notin x$ и $z \in y$. Запись: $x \neq y$.

С помощью следующих определений вводится отношение включение: $x \subseteq y \iff (\forall z)(z \in x \to z \in y)$ (запись "$x \subseteq y$" читается: "x включается в y", или "y включает x") и отношение строгого включения:

$$x \subset y \iff x \subseteq y \wedge x \neq y.$$

Между отношениями $\in$ и $\subseteq$ имеется весьма глубокое различие, которое необходимо понимать. Первое в нашем изложении является первоначальным, а второе вводится по определению. Но самое главное, что каждое множество включает себя само и свои подмножества, но, вообще говоря, не содержит (в качестве элементов) ни себя, ни своих подмножеств.

(ZF2) *Аксиома пустого множества*: $(\exists x)(\forall y)(\neg(y \in x))$.

В этой аксиоме утверждается существование множества, не имеющего ни одного элемента. Такое множество называется *пустым* или *нулевым* и обозначается $\emptyset$.

(ZF3) *Аксиома неупорядоченных пар*:

$$(\forall x, y)(\exists z)(\forall t)(t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y)).$$

Множество z, существование которого для x, y утверждается этой аксиомой, будем обозначать $\{x, y\}$. Кроме того, через $\{x\}$ будем обозначать $\{x, x\}$. Множество $\{x\}$ называется единичным или одноэлементным.

С помощью понятия неупорядоченной пары можно ввести понятие упорядоченной пары (это сделал К.Куратовский в 1921 году). Двухэлементное множество $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ называется *упорядоченной парой*, составленной из x, y, и обозначаются

(x, y). Докажем следующее важнейшее свойство упорядоченной пары: если $(x, y) = (u, v)$, то $x = u$ и $y = v$. В самом деле, рассмотрим следующие два случая: $x = y$ и $x \neq y$. При $x = y$ каждый элемент множества (u, v), т.е. $\{u\}$ и $\{u, v\}$ совпадает с $\{x\}$, откуда следует, что $x = u = v$. При $x \neq y$ множество $\{x\}$ является элементом множества $(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\}$, т.е. одним из множеств $\{u\}$, $\{u, v\}$. Случай $\{x\} = \{u, v\}$ исключается, так как это равенство влечёт $x = u = v$, откуда $\{u\} = \{u, v\}$ и $\{x, y\} = \{u\} = \{u, v\}$, $x = y = u$, что противоречит допущению $x \neq y$. Следовательно, $\{x\} = \{u\}$. Отсюда: $x = u$. Кроме того, в этом случае второй элемент $\{x, y\}$ множества (x, y) должен совпадать с $\{u\}$ или с $\{u, v\}$. Совпадение $\{x, y\} = \{u\}$ влечёт $x = y = u$, что противоречит допущению $x \neq y$. Поэтому $\{x, y\} = \{u, v\}$, откуда $y = u$ или $y = v$. Поскольку $x \neq y$ и $x = u$, поэтому случай $y = u$ невозможен. Остаётся $y = v$.

После того, как определено понятие упорядоченной пары, представляется возможным определить понятие функции. ***Функция*** (или отображение) – это такое множество f упорядоченных пар (x, y), что если $(x, y) \in f$ и $(x, z) \in f$, то $y = z$. При этом, множество всех таких x, что $(x, y) \in f$ (для некоторого y), называется *областью определения* f. Множество всех таких y, что $(x, y) \in f$ (для некоторого x), называется *областью значений* f.

(ZF4) *Аксиома суммы или объединения* (введена Г.Кантором в 1899 году и Э.Цермело в 1908 году):

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)[z \in y \quad \leftrightarrow \quad (\exists t)(z \in t \ \wedge \ t \in x)] .$$

Эта аксиома утверждает, что существует множество y, являющееся объединением всех множеств из x. Оно обозначается $\cup x$. В частности, если мы имеем два множества u и v, то на основании аксиомы (ZF3) образуем двухэлементное множество $w = \{u, v\}$, а по аксиоме (ZF4) получаем существование такого множества y, что $z \in y \leftrightarrow (z \in u \vee z \in v)$. Такое множество z называется *объединением* множеств u и v и обозначается $z = u \cup v$.

(ZF5) *Аксиома множества подмножеств или степени* (сформулирована Э.Цермело в 1908 году):

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \quad \leftrightarrow \quad z \subseteq x).$$

Эта аксиома утверждает, что для каждого x существует множество y всех подмножеств этого x. Оно обозначается $P(x)$ и называется *множеством всех подмножеств* x, или *множеством-степенью* x.

(ZF6) *Аксиома подстановки* (сформулирована А.Френкелем в 1922 году и Т.Сколемом в 1923 году):

$$(\forall x)(\exists! y)(F(x,y)) \to (\forall u)(\exists v)[(\forall t)(t \in v \leftrightarrow (\exists s)(s \in u \wedge F(s,t)))],$$

где F – формула, не содержащая свободных вхождений u. Таким образом, эта аксиома есть схема аксиом. Она утверждает, что образ при произвольном взаимно однозначном отображении произвольного множества есть множество. В самом деле, условие данной аксиомы фактически означает, что формула $F(x,y)$ определяет y однозначно как функцию от x, т.е. $y = f(x)$. Тогда заключение утверждает, что совокупность всех таких элементов t, которые являются образами при f элементов из множества u, т.е. $t = f(s)$ для некоторого $s \in u$, образует множество v.

Эта аксиома является исключительно сильной. Из неё может быть выведено следующее, более слабое утверждение:

(ZF6') *Аксиома выделения*:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \quad \leftrightarrow \quad (z \in x \ \wedge \ S(z))) \ ,$$

где $S(z)$ – формула, содержащая свободную переменную z и не содержащая свободно переменной y. Она утверждает, что для каждого x существует некоторое множество y, состоящее из всех тех z из x, которые обладают свойством S.

В связи с аксиомой выделения имеет смысл ещё раз вернуться к парадоксу Рассела и проанализировать причину появления этого парадокса и ему подобных в "наивной" теории множеств. Это в значительной мере обусловлено тем, что в "наивной" теории множеств мы наивно полагаем будто *каждое* свойство определяет некоторое множество. Парадокс Рассела как раз и демонстрирует нам, что это не так. Рассматривая свойство "$x \notin x$" и множество R объектов, обладающих им: $R = \{x : x \notin x\}$, мы приходим к следующему противоречию. По определению R, $(\forall x)(x \in R \leftrightarrow x \notin x)$. Отсюда подстановкой R вместо x сразу получаем: $R \in R \leftrightarrow R \notin R$ – противоречие. Таким образом, строя формальную теорию множеств, мы должны постараться избегнуть таких свойств, которые могут привести к "абсурдным" множествам типа только что рассмотренного множества R Рассела. Это и достигается с помощью аксиомы выделения: она допускает рассматривать не безграничные совокупности объектов, удовлетворяющие тому или иному свойству, а лишь те объекты, удовлетворяющие данному свойству, которые находятся внутри наперёд заданного множества. Аксиома выделения является, пожалуй, самой характерной особенностью системы Цермело, отличая её как от доаксиоматического подхода к теории множеств, так и от других аксиоматических систем.

Аксиома выделения позволяет доказать следующие две теоремы, предоставляющие две важные теоретико-множественные конструкции.

Теорема 30.2 (*о пересечении множеств*). *Для любых двух множеств a и b существует вполне определённое множество членов, содержащихся как в a, так и в b.*

$$(\forall a, b)(\exists c)(\forall x)(x \in c \ \leftrightarrow \ (x \in a \ \wedge \ x \in b)).$$

Более общее утверждение: *для каждого непустого множества u существует вполне определённое множество v членов, содержащихся во всех членах из u.*

$$(\forall u)[u \neq \emptyset \ \rightarrow \ (\exists v)(\forall x)(x \in v \ \leftrightarrow \ (\forall t)(t \in u \ \rightarrow x \ \in t))].$$

Множество c называется *пересечением* множеств a и b и обозначается $a \cap b$. Множество v называется *пересечением* множеств из u и обозначается $\cap\ u$.

Доказательство. Множество $a \cap b$ может быть определено как подмножество множества aa, соответствующее условию $x \in b$ в аксиоме (ZF6'). Что касается $\cap u$, то по аксиоме (ZF4) существует множество $s = \cup u$: каждый элемент из s содержится по крайней мере в одном члене из u. Возьмём в качестве $S(z)$ условие: "z содержится в каждом члене из u". Тогда по аксиоме (ZF6') существует подмножество v множества s, членами которого будут в точности те, что содержатся во всех членах u, т.е. $v = \cap u$. (Если ни одного z, общего для всех членов u, нет, то имеем $\cap u = \emptyset$). $\square$

Множество t называется *дизъюнктным* (или *расчленённым*), если никакие два члена из t не пересекаются, т.е.

$$(\forall x, y)(x \in t \ \wedge \ y \in t \ \wedge \ x \neq y \ \rightarrow \ x \cap y = \emptyset).$$

Теорема 30.3 (*о декартовом произведении множеств*). *Для каждого дизъюнктного множества t существует вполне определённое множество, членами которого являются в точности все те множества, которые содержат по единственному члену из каждого члена t.*

(Это множество называется *декартовым* или *прямым произведением* членов t и обозначается $\times t$; пишут также $\times t = t' \times t'' \times ...$, где t', t'',... – суть члены t.)

Если t содержит член $\emptyset$, то $\times t = \emptyset$.

Доказательство. Поскольку члены искомого множества суть некоторые подмножества $\cup t$, мы будем исходить из множества-степени множества $\cup t$, т.е. из $P(\cup t) = U$, существующего согласно аксиомам (ZF4) и (ZF5). В качестве условия $S(z)$ выберем следующее: "$z \in U$ и для каждого $\tau \in t$ пересечение $\tau \cap z$ есть одноэлементное множество". Тогда по аксиоме (ZF6') существует множество $U_S \subset U$, членами которого являются те подмножества множества $\cup t$, которые содержат в точности по одному члену из каждого члена t.

Утверждение теоремы в случае $\emptyset \in t$ очевидно: поскольку $\emptyset$ не содержит членов, никакое множество не имеет с $\emptyset$ общих членов.

Теорема доказана. $\square$

Таким образом, из трёх операций над множествами, известными из "наивной" теории множеств, – объединения, пересечения и прямого произведения, – выполнимость первой в системе ZF постулирована аксиомой (ZF4), а выполнимость двух других доказана при помощи аксиом (ZF4,5,6').

(ZF7) *Аксиома бесконечности* (введена Э.Цермело в 1908 году):

$$(\exists x)[\emptyset \in x \ \wedge \ (\forall y)(y \in x \ \rightarrow \ y \cup \ \{y\} \in x)].$$

Эта аксиома постулирует существование бесконечного множества. Ясно, что "первые" члены любого множества, удовлетворяющего этой аксиоме, суть следующие: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ и т.д.

Если опустить эту аксиому, то в качестве модели для оставшейся системы аксиом можно взять совокупность всех конечных множеств, которые можно построить, отправляясь от пустого множества $\emptyset$. Ясно, что эта совокупность действительно будет моделью для всех остальных аксиом системы ZF, так как ни одна из них не выводит за пределы класса конечных множеств, т.е. будучи применена к конечному множеству, утверждает существование такого множества, которые также должно быть конечным. Ясно, что никакое конечное множество не удовлетворяет аксиоме (ZF7) и, значит, на рассматриваемой модели из конечных множеств эта аксиома не выполняется. Это означает, что аксиома бесконечности (ZF7) не зависит от остальных аксиом системы ZF.

(ZF8) *Аксиома фундирования, или регулярности* (предложена Дж.фон Нейманом в 1925 году):

$$(\forall x)[x \neq \emptyset \ \rightarrow \ (\exists y)(y \in x \wedge (\forall z)(z \notin x \vee z \notin y))].$$

Аксиома утверждает, что всякое непустое множество x содержит такой элемент y, что x и y не имеют общих элементов. Из неё следует, что каждое непустое множество x содержит элемент, минимальный по отношению к $\in$ (но не к $\subseteq$). Следовательно, не может существовать такого множества s, что $s \in s$. В противном случае мы могли бы рассмотреть одноэлементное (и, значит, непустое) множество $\{s\}$, для которого аксиома фундирования не выполнялась бы: $s \in \{s\}$ и множества s и $\{s\}$ имеют общий элемент s. Исключается существование таких множеств s, t, u, для которых $s \in t$ и $t \in s$, или $s \in t$, $t \in u$, $u \in s$ и т.д. Наконец исключается существование бесконечных цепей, убывающих по отношению к $\in$, т.е. таких множеств s, которые имеют бесконечную убывающую последовательность своих членов: $\ldots \in s_{k+1} \in s_k \in \ldots \in s_2 \in s_1 \in s$. Правда, при нарушении аксиомы фундирования такие убывающие цепи строятся лишь с помощью аксиомы выбора.

(ZF9) *Аксиома выбора* (введена Цермело в 1908 году): Если x – дизъюнктное множество непустых множеств, то существует такое множество y, которое из каждого множества из x содержит точно по одному элементу (или: прямое произведение $\times x$ непусто). Иначе говоря, среди подмножеств множества $\cup x$ имеется по крайней мере одно, пересечение которого с каждым членом из x есть одноэлементное множество. Каждое такое подмножество u множества $\cup x$ называется множеством представителей множества x; множество представителей, вообще говоря, не единственно.

Эту аксиому формулируют также в терминах понятия функции: для любого дизъюнктного множества S непустых множеств существует хотя бы одна такая функция $f(s)$, областью определения которой служит S, что $f(s) \in s$. Каждая такая функция определяет множество представителей множества S и называется *функцией выбора*.

Аксиома выбора предоставляет наряду с аксиомой выделения ещё один способ для получения подмножеств каких-либо множеств. Эта аксиома, пожалуй, одна из самых интересных и наиболее активно обсуждавшихся (несмотря на своё сравнительно позднее происхождение) аксиом математики. В этом отношении она уступает только евклидовой аксиоме о параллельных, имеющей более чем двухтысячелетнюю историю. Основные и важнейшие теоремы и методы теории множеств, алгебры, анализа, геометрии, топологии опираются на аксиому выбора. Поразительно большое количество теорем оказывается в точности эквивалентными аксиоме выбора. Фундаментальнейшая теорема Цермело о том, что всякое непустое множество можно вполне упорядочить, т.е. задать на нём такое линейное отношение порядка, что всякое непустое подмножество будет иметь наименьший элемент – из числа важнейших эквивалентов аксиомы выбора. Хотя эта аксиома была осознана и явно сформулирована лишь в начале XX века, анализ показал, что применялась она в неявном виде задолго до этого времени. К аксиоме выбора математики пришли точно так же как и к другим математическим принципам – путём последующей проверки и логического анализа понятий, методов и доказательств, уже содержавшихся фактически в математике. Так, греческие математики догадались включить в число основных геометрических принципов аксиому о параллельных – утверждение, бытовавшее в математике задолго до Евклида. Гениальность этого достижения была полностью оценена лишь более двух тысячелетий спустя.

Итак, мы завершили перечисление аксиом теории множеств системы ZF Цермело-Френкеля. В настоящее время – это наиболее употребительная в основаниях математики система аксиом, которой охватывается вся традиционная математика.

Кроме рассмотренной системы аксиом Цермело-Френкеля ZF, имеются и другие аксиоматические системы теории множеств, позволяющие формализовать обычные математические доказательства, но в то же время избежать известных парадоксов наивной теории множеств. Их можно разделить на следующие три группы.

О ДРУГИХ АКСИОМАТИКАХ ФОРМАЛЬНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. Кроме рассмотренной системы аксиом Цермело-Френкеля ZF, имеются и другие аксиоматические системы теории множеств, позволяющие формализовать обычные математические доказательства, но в то же время избежать известных парадоксов наивной теории множеств. Их можно разделить на следующие три группы.

Первую группу составляют системы, аксиомы которых выбраны в связи с каким-либо объяснением парадоксов. Согласно одному из взглядов на парадоксы, возникающее противоречие обусловлено так называемым непредикативным определением объекта, т.е. таким определением его, в котором участвует он сам. Для устранения этой причины парадоксов Б.Расселом разработана так называемая теория типов, в которой множество и его элементы разнесены по различным слоям (уровням). Имеются и другие теории типов, в которых производится дальнейшее расчленение предметных областей вплоть до доведения их до бесконечного числа. Так возникают: разветвленная теория типов Рассела, простая теория типов, теория типов с трансфинитными индексами.

Вторая группа аксиоматических систем включает модификации систем первой группы и системы ZF, преследующие определённые логические или математические цели. Сюда относятся, прежде всего, система аксиом NBG фон Неймана-Бернайса-Гёделя и система аксиом Куайна. Построение системы аксиом NBG вызвано желанием исключить из системы ZF схемы аксиом, т.е. иметь не бесконечный список аксиом, а конечный. В системе Куайна реализуется стремление преодолеть расслоение понятий, имеющее место в теории типов.

Сторонники перечисленных направлений стремятся устранить антиномии путём ограничения понятия множества, или ограничения употребления этого понятия в математике – ограничения до такого объёма, который соответствует этой цели. При этом, структура математической теории не подвергается коренным изменениям.

Третья группа систем образует так называемое логическое направление в преодолении антиномий. С точки зрения логицизма антиномии – это симптомы, свидетельствующие об определённом неблагополучии не только в самой теории множеств, но и в существе применяемых в математике методов. Исходя из этого логицисты считают, что порочна не столько сама математика, сколько логика и её использование для математических нужд, и предлагают предпринять глубокую реформу логики, которая заодно уже привела бы и к преодолению антиномий. Это направление характеризуется использованием средств нетрадиционных логик: не классических (в частности многозначных, интуционистских и прочих) логик, нестандартных средств логического вывода, дополнительных условий на доказательства, бесконечных правил вывода. Системы, относящиеся к этому направлению, менее развиты.

ЗНАМЕНИТЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. Методы аксиоматической теории множеств позволили отчётливо сформулировать и решить ряд трудных проблем, имевших своё происхождение в классических разделах математики.

Важнейшей из таких проблем является *проблема континуума.* Именно её поставил на первое место Д.Гильберт в своей знаменитой речи на II Международном математическом конгрессе, проходившем в Париже с 6 по 12 августа 1900 г., в которой им были сформулированы 23 актуальные математические проблемы. Ещё Г.Кантор в 1878 г. сформулировал гипотезу, получившую название континуум-гипотезы: всякое бесконечное подмножество континуума R равномощно либо множеству натуральных чисел N, либо R, т.е. не существует множества промежуточной мощности между счётной мощностью и мощностью континуума. Кантору не удалось ни доказать, ни опровергнуть эту гипотезу. Среди математиков росло убеждение в принципиальной неразрешимости проблемы континуума. Но только после того, как вся проблемная среда, связанная с континуум-гипотезой, была формализована, то есть приобрела характер формальной аксиоматической теории, стало возможным математически точно поставить, а затем и решить вопрос о формальной неразрешимости континуум-гипотезы.

В 1939 году К.Гёдель показал, что если система Цермело-Френкеля ZF непротиворечива, то она остаётся непротиворечивой и после добавления к ней континуум-гипотезы. Это означает, что в системе ZF в предположении её непротиворечивости невозможно доказать (вывести) отрицание континуум-гипотезы, то есть отрицание континуум-гипотезы не зависит от остальных аксиом теории множеств, то есть континуум-гипотеза не может быть опровергнута. В 1963 году американский математик П.Коэн доказал аналогичное утверждение относительно континуум-гипотезы, то есть континуум-гипотеза не может быть доказана, тем самым полностью закрыв проблему континуума. Таким образом, ни континуум-гипотеза ни её отрицание не зависят от остальных аксиом теории множеств. Это означает, что возможна теория множеств с континуум-гипотезой и возможна теория множеств с отрицанием континуум-гипотезы. Ситуация здесь оказалась сходной с той, которая возникла в начале XIX века с пятым постулатом Евклида, когда была открыта геометрия Лобачевского. За это выдающееся достижение Коэн был удостоен высшей мировой награды для математиков – Филдсовской премии, которая была вручена ему на Международном математическом конгрессе в Москве в 1966 году. Основным методом установления невыводимости формулы A в ZF является построение такой модели ZF, в которой выполняется отрицание $\neg A$. Разработанный Коэном, а затем усовершенствованный другими авторами метод вынуждения сильно расширил возможности построения моделей теории множеств и в настоящее время лежит в основе почти всех дальнейших результатов о невыводимости.

Совершенно аналогичной оказалась ситуация и с аксиомой выбора (ZF9). Гёдель в 1939 году доказал, что если система ZF \(ZF9) непротиворечива, то непротиворечива и система ZF, то есть отрицание аксиомы выбора не выводимо из остальных аксиом системы ZF. Невыводимость самой аксиомы выбора (ZF9) из системы ZF \ (ZF9) тоже установил П.Коэн в 1962 году.

С 1920 года начинается история ещё одной знаменитой математической проблемы XX века – *проблемы М.Я.Суслина.* О ней будет рассказано ниже в пункте "О формальных теориях числовых систем".

Установлено, что в системе ZF \ (ZF9) не может быть ни доказано, ни опровергнуто (т.е. не разрешимо) следующее утверждение: всякое подмножество множества действительных чисел измеримо по Лебегу. Выяснено взаимоотношение с системой ZF многих важных проблем так называемой дескриптивной теории множеств, значительный вклад в которую внесли математики Московской математической школы, созданной академиком Н.Н.Лузиным (одним из ярких представителей которой является М.Я.Суслин). Получены многочисленные результаты об отсутствии эффективно определённых объектов в этой теории. Наконец, формализация теории множеств позволила обнаружить неизвестные ранее связи между проблемами "наивной" теории множеств.

Ещё раз подчеркнём, что все эти проблемы удалось чётко поставить и успешно разрешить только после формализации содержательной ("наивной") канторовской теории множеств.

О формальной арифметике. Это – логико-математическое исчисление, или прикладное исчисление первого порядка, формализующее элементарную теорию чисел. Наиболее популярная формализация основана на подходе Пеано, предложенном им в 1889 году и рассмотренном нами в §26 (пример 26.3). Язык этого исчисления, кроме логических связок и равенства, содержит нелогическую константу 0, двухместные функциональные символы $+$, $\cdot$, одноместный функциональный символ $'$. Термы строятся из константы 0 и переменных с помощью функциональных символов; в частности натуральные числа изображаются термами вида $0^{''\cdots'}$. Атомарные формулы – это равенство термов; остальные формулы строятся из атомарных с помощью логических связок. В качестве аксиом выбираются логические аксиомы (это – аксиомы формализованного исчисления предикатов, о чём говорилось в §25 выше) и следующие нелогические (арифметические) формулы:

$$x = y \ \to \ (x = z \ \to \ y = z), \quad \neg(x' = 0) \ ,$$

$$x = y \ \to \ x' = y', \quad x' = y' \ \to \ x = y \ ,$$

$$x + 0 = x, \quad x + y' = (x + y)',$$

$$x \cdot 0 = 0, \quad x \cdot y' = (x \cdot y) + x \ ,$$

$$(F(0) \ \wedge \ (\forall x)(F(x) \ \to \ F(x'))) \ \to \ (\forall x)(F(x)) \ ,$$

где $F(x)$ – произвольная формула теории с одной свободной предметной переменной x. Последняя формула есть схема аксиом, называемая *схемой аксиом индукции*.

Средства формальной арифметики оказываются достаточными для вывода теорем, устанавливаемых в стандартных курсах элементарной теории чисел. Более того, формальная арифметика оказывается эквивалентна аксиоматической теории множеств ZF Цермело-Френкеля без аксиомы бесконечности (ZF7): в каждой из этих систем может быть построена модель другой.

Формальная арифметика играет исключительно важную роль в основаниях математики. Это связано с тем, что именно арифметика лежит в основаниях классической математики, проблема непротиворечивости которой сводится к проблеме непротиворечивости арифметики. Это содержательная сторона нашла своё наивысшее выражение и на формальном уровне.

Одним из путей выхода из кризиса в основаниях математики в начале XX века, обусловленного обнаружением парадоксов (антиномий) в теории множеств, должен был стать гильбертовский путь формализации математики и логики, о котором мы говорили в главе V. Но результаты, полученные Гёделем в начале 30-ых годов XX века, привели к краху основных надежд, связывавшихся с этой программой Гильберта. К.Гёдель доказал следующие две теоремы, получившие общее название "*теорема о неполноте формальной арифметики*".

1) *Всякая естественная непротиворечивая формализация S арифметики или любой другой математической теории, содержащей арифметику (например теории множеств), неполна и непополнима.* (Неполнота означает, что в S имеется содержательно истинная, но не разрешимая формула, то есть такая формула A, что ни A, ни её отрицание $\neg A$ не выводимы в S. Непополнимость S означает, что каким бы конечным множеством дополнительных аксиом (например, неразрешимыми в S формулами) ни расширить систему S, в новой формальной системе неизбежно появятся свои неразрешимые формулы.)

2) *Если формализованная арифметика в действительности непротиворечива, то хотя утверждение о её непротиворечивости выразимо на её собственном языке, но доказа-*

тельство этого утверждения средствами, формализуемыми в ней самой, невозможно. Эта теорема, как и первая, распространяется на всякую непротиворечивую формальную систему, содержащую формальную арифметику.

Доказательство первой теоремы проводится разработанным Гёделем методом арифметизации синтаксиса языка формальной теории, который стал одним из основных методов теории доказательств (метаматематики). Этим методом строится формально неразрешимая формула. Фиксируется нумерация основных формальных объектов (формул, конечных последовательностей формул и т.д.) натуральными числами такая, что основные свойства этих объектов (быть аксиомой, быть выводом по правилам системы и т.д.) оказываются распознаваемыми по их номерам с помощью весьма простых алгоритмов. Столь же просто вычисляются по номерам исходных данных номера результатов комбинаторных преобразований (например, подстановки терма в формулу вместо переменной). При этом оказывается возможным написать арифметическую формулу $B(a, b)$, имеющую вид $f(a, b) = 0$ (где f – примитивно рекурсивная функция) и выражающую условие: b есть номер формулы, которая получается из формулы с номером a путём подстановки натурального числа a вместо переменной x. Если p – номер формулы $(\forall b)(\neg B(x, b))$, то формула $(\forall b)(\neg B(p, b))$ выражает свою собственную невыводимость. Она и оказывается формально неразрешимой. Отсюда и следует, что в любой непротиворечивой системе с минимальными выразительными арифметическими возможностями имеется истинное, но не выводимое суждение указанного вида. Достаточно подробно доказательство этой теоремы будет изложено в курсе (и учебнике) "ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ", после того, как будут изучены основы теории алгоритмов и рекурсивных функций.

Доказательство второй теоремы получается путём формализации доказательства первой и существенно использует особенности арифметизации синтаксиса рассматриваемой системы.

Из первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики видно, что (семантическое) понятие истинности в арифметике, а следовательно, и во всей математике нельзя исчерпывающим образом формализовать посредством (синтаксического) понятия доказуемости в какой-либо *одной* формально-логической системе. Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики показывает, что и основная цель первоначальной программы Гильберта по формализации математики оказывается недостижимой. Эта цель состояла в том, чтобы доказать формальную непротиворечивость арифметики, пользуясь при этом так называемыми "финитными" методами, то есть лишь такими методами доказательств, которые применяются в самой арифметике. Но всякое разумное уточнение понятия финитного доказательства по-видимому, формализуемо в формальной арифметике и потому, согласно второй теореме Гёделя, невозможно.

Гильберту и представителям его школы для выполнения гильбертовской программы удалось доказать строго финитными методами непротиворечивость весьма широкой подсистемы арифметики; подсистема эта имеет лишь тот недостаток, что принцип индукции формулируется в ней в ослабленной форме, что препятствует применению его к квантифицированным предложениям. Вторая теорема Гёделя показывает, что такой частичный неуспех гильбертовской школы объясняется отнюдь не недостатком изобретательности её представителей, а, как выяснилось впоследствии, объективной картиной явления. Напротив, теперь мы знаем, что они продвинулись в этом направлении настолько далеко, насколько это вообще было возможно.

Упомянем также ещё об одной важной теореме метаматематики, доказанной в 1936 году американским логиком А.Чёрчем. В ней утверждается, что *не существует эффективной процедуры, для решения вопроса относительно произвольной формулы формальной теории, содержащей арифметику натуральных чисел, является ли такая формула теоремой теории*, т.е. всякая такая формальная теория неразрешима. Из этой теоремы вытекает, в частности, и теорема Гёделя о неполноте. Впоследствии была доказана неразрешимость большого числа формальных теорий, в частности, элементарной теории групп, элементарной теории полей. Эта теорема А.Чёрча также будет рассмотрена в курсе (и учебнике) "ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ".

После этих результатов Гёделя стало ясно, что для решения одного из основных вопросов математики – проблемы непротиворечивости, – по-видимому, не обойтись без других, отличных от финитистских, средств и идей. Непротиворечивость формальной системы может быть обоснована только средствами более сильными, чем те которые формализованы в данной системе. Здесь оказались возможными разные подходы, не для всех математиков в равной степени приемлемые или убедительные, в частности, ввиду существования различных точек зрения на допустимость тех или иных логических средств. В 1936 году Г.Генцен получил доказательство непротиворечивости формальной арифметики, использующее средство, отсутствующее в арифметике, – так называемую трансфинитную (бесконечную) индукцию до некоторого счётного трансфинитного числа.

Приведём ещё одну теорему – *теорему А.Тарского об истинности*, показывающую, что формальным системам присуща ограниченность ещё одного типа. Содержательное понятие истинности, которым мы постоянно пользуемся, также поддаётся формализации. Понятие истинности в формальной системе T определяется относительно другой формальной системы T'. Эта система T' должна быть в определённым смысле сильнее системы T. В 1956 году Тарский доказал, что *понятие истинности (множество всех истинных предложений, множество истинности предиката) в непротиворечивой формальной теории, включающей формальную арифметику, неопределимо в этой теории.*

Таким образом, если теорема Гёделя о неполноте обнаруживает принципиальную ограниченность *дедуктивных возможностей* любой достаточно богатой системы, то теорема Тарского вскрывает ограниченность *выразительных возможнос-*

тей таких систем. Перефразируя образное изречение Куайна, можно сказать, что формальные системы попытались проглотить больший кусок онтологии, чем они в состоянии переварить.

Некатегоричность формальной арифметики и наличие для неё так называемой нестандартной модели. В §24 мы отмечали, что аксиоматическая теория натуральных чисел, построенная на базе системы аксиом Пеано, категорична, т.е. имеет единственную с точностью до изоморфизма модель. С использованием теоремы Гёделя о неполноте формальной арифметики можно доказать существование неизоморфных моделей формальной арифметики. Таким образом, формальная арифметика, основывающаяся на аксиомах, перечисленных выше, является *некатегоричной* формальной системой. Этот интересный факт можно объяснить разной трактовкой входящей в обе системы аксиомы индукции. В аксиоме индукции из системы Пеано участвует множество M, на которое не накладывается никаких ограничений и которое может рассматриваться как множество истинности произвольного предиката $F(x)$, т.е. множество натуральных чисел, удовлетворяющих любому мыслимому свойству F натуральных чисел. В соответствующей аксиоме формальной арифметики за F может быть принято не любое свойство натуральных чисел, а лишь такое, которое выразимо средствами данного формализма. Меньшее количество свойств, допустимых в "формальной" аксиоме индукции, априори допускает наличие большего количества объектов (моделей), удовлетворяющих ей. Так и происходит в действительности. Таким образом, различие между этими аксиомами незаметно, пока речь идёт о теоремах элементарной теории чисел, и весьма существенно, когда выясняются свойства формальной теории.

Ясно, что моделью формальной арифметики является обычное множество натуральных чисел N, в котором $0' = 1$, $x' = x + 1$ и $+$, $\cdot$ – обычные операции сложения и умножения натуральных чисел.

Пользуясь локальной теоремой Гёделя-А.И.Мальцева (см.

следствие 29.17 из теоремы 29.16 в §29), установим наличие у формальной арифметики одной необычной модели. Она называется *нестандартная модель арифметики.*

Рассмотрим следующую бесконечную совокупность формул формальной арифметики:

$$(\exists y)(x = y + y),\ (\exists y)(x = y + y + y),\ \dots,\ (\exists y)(x = y + \dots + y),\ \dots$$

(в последней формуле в правой части равенства n слагаемых). Первая из этих формул утверждает, что число x делится на 2, вторая – что x делится на 3 и т.д., $(n-1)$-ая – что x делится на n и т.д. Поэтому обозначим эти формулы соответственно: $2|x$, $3|x$, ... , $n|x$, ... Рассмотрим, далее, следующую бесконечную совокупность формул:

$$\Sigma_0 =$$

$$= \{(\exists x)(2|x),\ (\exists x)(2|x \wedge 3|x), \dots, (\exists x)(2|x \wedge 3|x \wedge \dots \wedge n|x),\ \dots\}.$$

Наконец, обозначив через Σ совокупность из девяти аксиом формальной арифметики, рассмотрим следующее множество формул формальной арифметики $\Sigma_1 = \Sigma \cup \Sigma_0$. Применим к Σ_1 локальную теорему Гёделя-Мальцева. Ясно, что каждое конечное подмножество формул из Σ_1 содержит лишь конечное число формул из Σ_0 и потому имеет модель: его моделью будет обычная система натуральных чисел. Тогда по упомянутой теореме всё множество Σ_1 имеет модель. Её особенностью будет то свойство, что в этой модели будет существовать (натуральное) число, делящееся на все натуральные числа.

О формальных теориях числовых систем. Вопрос о природе понятия числа никогда не стоял на обочине магистрального пути математических исследований во все времена. Математика, достигнув того или иного уровня в своём развитии, неизменно обращалась к своим основам, где центральную роль всегда играло понятие числа. Во второй половине XIX века в связи с необходимостью обоснования математического анализа и приведения в систему огромного количества результатов, полученных в этой области математики, числа снова оказались в центре внимания математиков. Математика

XX века и прежде всего значительно развившаяся математическая логика ещё выше подняли уровень требований к строгости обоснования основ математической науки, и в первую очередь понятия числа. Потребовалось создание формальных аксиоматических теорий основных систем чисел. Ведь в конечном итоге математика не интересует природа чисел и вопрос о том, откуда они берутся. Его интересует каковы свойства этих чисел и желательно перечисление всех таких свойств чисел, из которых чисто логически вытекали бы все теоремы соответствующей математической дисциплины и, в первую очередь, математического анализа.

Выше рассказывалось о формальной арифметике, т.е. о формализации теории натуральных чисел. Здесь будут кратко описаны формальные теории других систем чисел – целых, рациональных, действительных.

Систему целых чисел можно охарактеризовать с помощью следующих условий. Кольцо целых чисел – это есть кольцо с единицей e, не содержащее отличного от него подкольца с единицей и обладающее тем свойством, что $ne \neq 0$ для любого натурального числа n. В самом деле, нетрудно показать, что множество всех элементов вида ne изоморфно системе $< N ; + >$ натуральных чисел. Следовательно, данное кольцо содержит подкольцо Z_0, изоморфное кольцу Z целых чисел, поскольку кольцо Z – минимальное из таких колец. Но так как Z_0 содержит единицу e, то, по условию, Z_0 должно совпасть с данным кольцом, которое, следовательно, будет кольцом целых чисел.

Систему рациональных чисел можно охарактеризовать с помощью следующих условий. Поле рациональных чисел – это простое поле характеристики нуль. (Поле называется простым, если оно не имеет подполей, отличных от него самого. Говорят, что поле имеет характеристику нуль, если $na \neq 0$ для любого его элемента $a \neq 0$ и любого целого числа $n \neq 0$.) Можно показать, что любое такое поле совпадает со своим подполем частных и, значит, изоморфно полю рациональных чисел. Другими словами, можно сказать, что поле рациональных чисел в известном смысле является минимальным среди всех полей характеристики нуль, или что любое поле характеристики нуль содержит в качестве подполя поле рациональных чисел.

Для *системы действительных чисел* известно довольно много разнообразных аксиоматических характеризаций, то есть таких систем аксиом, для которых система действительных чисел является единственной с точностью до изоморфизма моделью. Согласно одной из них множество вещественных чисел характеризуется как полное упорядоченное поле, т.е. как поле, в котором любое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.

Гильберт охарактеризовал множество вещественных чисел как максимальное архимедово упорядоченное поле (т.е. любое поле, являющееся его расширением, уже не архимедово).

Наконец, третья характеризация утверждает, что система действительных чисел и только она является плотным в себе полным по Дедекинду линейно упорядоченным множеством без наименьшего и наибольшего элементов, в котором существует счётное всюду плотное подмножество. (Плотность означает, что между любыми двумя элементами множества расположен ещё хотя бы один элемент. Полнота по Дедекинду: всякое непустое ограниченное сверху подмножество имеет точную верхнюю грань. Существование всюду плотного подмножества, называемое свойством сепарабельности (отделимости) означает, что для каждого элемента множества существует как угодно близкий к нему элемент этого подмножества).

С этой характеристикой системы действительных чисел связана одна из знаменитейших проблем XX века – *проблема М.Я.Суслина*. Эта проблема состоит в том, что требуется узнать, сохранится ли указанная характеристика системы действительных чисел, если в ней последнее условие сепарабельности заменить более слабым требованием, называемым условием Суслина: любая система из попарно не пересекающихся непустых интервалов не более чем счётна. Другими словами, будет ли изоморфно системе действительных чисел линейно упорядоченное множество, удовлетворяющее перечисленным выше условиям, кроме сепарабельности, и условию Суслина.

Судьба этой проблемы оказалась поистине исторической и на её решение потребовалось более 40 лет. Предположение о её положительном решении получило название гипотезы Суслина. Контрпример к гипотезе (хотя пока и не существующий), то есть упорядоченное множество, удовлетворяющее всем условиям проблемы М.Я.Суслина, но не изоморфное действительной прямой, получил название континуум Суслина. Эта проблема встала в один ряд с континуум-проблемой Кантора, и полное решение их обеих было получено лишь в начале 60-ых годов, когда американский математик П.Коэн открыл принципиально новый метод доказательства, получивший название метода форсинга (вынуждения). (За это открытие он был удостоен в 1966 году на Международном математическом конгрессе в Москве высшей международной награды, которой удостаиваются учёные-математики, – Филдсовской премии). Выяснилось, что проблему Суслина, как и континуум-проблему Кантора, вообще невозможно решить в обычном смысле слов – решить проблему, то есть дать определённый ответ "да" или "нет" на поставленный вопрос. Гипотеза Суслина, как и континуум-гипотеза Кантора оказалась не зависящей от остальных аксиом теории множеств. Другими словами, возможна теория множеств, в которой гипотеза Суслина справедлива, и возможна теория множеств, в которой эта гипотеза не выполняется. Ситуация здесь оказалась сходной с той, которая возникла в первой половине XIX века с пятым постулатом Евклида, в результате чего была открыта не просто новая, воображаемая, геометрия, получившая название геометрии Лобачевского, а была открыта новая эпоха в развитии всей математической науки. Кроме того, была также установлена взаимная независимость и самих двух гипотез – гипотезы Суслина и континуум-гипотезы Кантора.

Вопросы, связанные с гипотезой Суслина, продолжают исследоваться в многочисленных работах по теории множеств.

Рассматриваются обобщения этой гипотезы, вводятся новые связанные с ней понятия и конструкции, которые называются именем Суслина. Они широко используются не только в теории множеств, но и проникают в смежные с ней области – теорию моделей, теоретико-множественную топологию. В обширном потоке современных публикаций по этим дисциплинам часто встречается имя М.Я.Суслина: суслинские множества, критерий Суслина, гипотеза Суслина, континуум Суслина, свойство Суслина, дерево Суслина, число Суслина, коэффициент Суслина и т.д.

М.Я.Суслин (1894 – 1919) родился и умер от тифа в своём родном селе Красавка Самойловского района Саратовской области. О его жизни и математических открытиях можно прочитать в книге[3].

О формальном математическом анализе. Это формальная аксиоматическая теория, специально предназначенная для формализации (точного описания доказательств) математического анализа. Таких теорий существует несколько: они характеризуются различными подходами к формализации. При этом каждую из них стараются строить по возможности минимальной по своим дедуктивным и выразительным возможностям, но всё же достаточной для формализации всего традиционного материала математического анализа.

Наиболее распространённой из формальных теорий математического анализа является *теория Гильберта-Бернайса.* Она строится следующим образом. К языку формальной арифметики, описанной в предыдущем пункте, добавляется новый вид переменных X,Y,Z, ... , которые рассматриваются как пробегающие множества натуральных чисел. Добавляется новый вид атомарных формул: $(t \in X)$ ("t принадлежит множеству X"). Логические аксиомы формальной арифметики (т.е. аксиомы формализованного исчисления предикатов) и схема аксиом индукции естественно усиливаются таким образом, чтобы включать в себя формулы расширенного языка. Наконец,

[3] *Игошин В.И.* Михаил Яковлевич Суслин (1894 – 1919). – М.: Наука-Физматлит, 1996. – 160 с.

добавляется единственная новая схема аксиом – *схема аксиом свёртывания*:

$$(\exists x)(\forall y)(y \in X \ \leftrightarrow \ A(y)) \ ,$$

где $A(y)$ – формула рассматриваемого языка, не содержащая свободно X, y – переменная для натуральных чисел.

Эта теория Гильберта-Бернайса, хотя в ней речь идёт лишь о натуральных числах и о множествах натуральных чисел, достаточна для естественной формализации математического анализа. Интересна проблема обоснования непротиворечивости этой теории. Согласно теореме Гёделя о неполноте формальной арифметики для этого необходимо использовать средства, выходящие за пределы формального математического анализа. В 1962 году К.Спектор доказал непротиворечивость этой теории с помощью остроумной модификации модели Гёделя для интуиционистской арифметики, которая представляет собой некоторое далеко идущее расширение требований интуиционизма. Трудности в попытках доказательства непротиворечивости теории Гильберта-Бернайса связаны с той особенностью аксиомы свёртывания этой теории, что в формуле $A(y)$ этой аксиомы разрешается свободно использовать кванторы по множествам. Таким образом, при выяснении принадлежности числа y определяемому в аксиоме множеству X необходимо использовать наличие всех множеств натуральных чисел, в том числе и определяемого множества X. Можно сказать, что аксиома свёртывания формального анализа выражает до некоторой степени необходимость актуального существования всех множеств натуральных чисел одновременно (только после этого в формуле могут использоваться кванторы по переменным, пробегающим множество таких множеств). Эта особенность встречается в ряде формальных теоретико-множественных теорий и называется *непредикативностью* теории. Так что формальный анализ Гильберта-Бернайса является непредикативной формальной теорией.

Имеется эквивалентная формулировка анализа Гильберта-Бернайса, в которой вместо множеств натуральных чисел фигурируют функции, перерабатывающие натуральные числа в натуральные. Для такого вида функции к формальной арифметике добавляются переменные α, β, γ, ... и новый вид термов: $\alpha(t)$ ("результат применения α к t"); логические аксиомы и схема аксиом индукции естественно распространяются на формулы нового языка и, наконец, добавляется единственная новая схема аксиом, называемая *аксиомой выбора анализа*:

$$(\forall x)(\exists y)(A(x,y)) \ \rightarrow \ (\exists\alpha)(\forall x)(A(x,\alpha(x))).$$

Эта аксиома утверждает, что если для всякого x найдётся y, удовлетворяющий условию $A(x,y)$, то существует функция α, выдающая по x соответствующий y. Ценность этой формулировки состоит в том, что после исключения из числа логических аксиом теории закона исключённого третьего полученная система удобна для формализации в ней интуиционистского или конструктивного формального математического анализа, который представляет собой переработку традиционного материала математического анализа в соответствии с требованиями программы интуиционизма (или соответственно конструктивной математики).

Для устранения непредикативности были предложены различные формальные аксиоматические теории предикативного (или разветвлённого) анализа.

Общий взгляд на процесс формализации математической теории. Ознакомившись с рядом формальных аксиоматических теорий, так или иначе связанных с основаниями школьного курса математики, подведём итог, дав краткую общую характеристику методу формализации. Суть этого метода состоит в следующем. Допустим, у нас имеется некоторая содержательная математическая теория T_1 и нас интересует является ли она непротиворечивой. Для выяснения этого вопроса данная теория T_1 подвергается формализации. Для этого сначала формализуется точный логико-математический язык Ω такой, что все интересующие нас утверждения теории T_1 записываются в виде формул языка Ω (математика теории T_1 соединяется с логикой). Затем логические принципы, употреблявшиеся в теории для получения новых фактов, формализуются в виде аксиом и чисто формальных правил вывода, позволяющих выводить новые формулы языка Ω из аксиом и уже выведенных формул. Таким образом возникает формальная аксиоматическая теория (или, иначе, формальная система, исчисление T_1^*, точно описывающая некоторый интересующий нас фрагмент содержательной теории T_1. Существенно при этом, что формулировка T_1^* не требует исчерпывающего проникновения в, быть может, весьма сложную семантику теории T_1. Исчисление T_1 строится по простым законам как чисто знаковая система и для понимания устройства этой знаковой системы нет необходимости вникать в смысл выводимых в ней формул.

Такой подход открывает возможность строго математически сформулировать интересующие нас проблемы, относящиеся к выводимости некоторых формул в T_1^*. Кроме того, он дает возможность исследовать формальную теорию T_1^* средствами некоторой содержательной теории T_2. В этой ситуации T_1^* называется предметной теорией, а T_2 – её метатеорией. С точки зрения оснований математики важно, чтобы T_2 была в некотором отношении более надёжной теорией, чем T_1, так что исследование T_1^* средствами теории T_2 можно было бы действительно рассматривать как разъяснение и обоснование неясных деталей семантики T_1 с помощью более убедительной теории T_2. Если же нас интересует не столько вопрос об интуитивной ясности T_1, сколько просто факт о выводимости или невыводимости некоторых формул в T_1^*, то T_1^* может исследоваться средствами любой исторически сложившийся и убедительной для исследователя математической теории T_2.

Один из важнейших вопросов о теории T_1^* есть вопрос о её формальной непротиворечивости, который состоит в выяснении того, существует ли в языке Ω такая формула F, что сама F и её отрицание $\neg F$ являются теоремами теории T_1^* (что равносильно выяснению вопроса о том, всякая ли формула языка Ω является теоремой теории T_1^*). Метаматематический метод доказательства непротиворечивости, предложенный в начале XX в. Гильбертом, состоит в том, что утверждение о непротиворечивости формальной системы T_1^* рассматривается как высказывание о возможных в этой системе доказательствах. Само же это высказывание уже принадлежит метатеории T_2, которая и исследует это утверждение. Такой подход сводит вопрос о непротиворечивости T_1^* к вопросу непротиворечивости другой теории T_2. При этом говорят, что T_1^* непротиворечива относительно T_2. Большое значение имеет вторая теорема Гёделя, которая утверждает, что непротиворечивость формальной теории, содержащей формальную арифметику, невозможно доказать с помощью средств самой рассматриваемой теории (при условии, что эта теория действительно непротиворечива). Примером применения метаматематического метода может служить доказательство Г.Генцена непротиворечивости формальной арифметики, полученное им в 1936г. и использующее трансфинитную индукцию – средство, выходящее за рамки формальной арифметики.

Существует и другой путь доказательства непротиворечивости формальной системы, идущий через понятие интерпретации и модели. Формальная система называется содержательно (или семантически) непротиворечивой, если существует модель, в которой истинны все теоремы этой системы. Без труда устанавливается, что если формальная система содержательно непротиворечива, то она формально непротиворечива. Для формальных систем, основанных на классическом исчислении предикатов 1-го порядка, справедливо и обратное утверждение (теорема Гёделя о модели): всякая непротиворечивая формальная теория имеет модель. Таким образом, другой способ доказательства непротиворечивости формальной теории состоит в построении её модели. Но и этот метод является относительным: он устанавливает непротиворечивость одной формальной системы относительно другой, в терминах которой построена модель первой.

Можно далее исследовать аналогичным образом и метатеории T_2, построив формальную систему T_2^* и изучая уже T_2^* средствами следующей содержательной теории T_3, которая будет метатеорией по отношению к теории T_2 и метаметатеорией по отношению к теории T_1.

Заключение

ВСЕСИЛЬНА ЛИ ЛОГИКА В ПОЗНАНИИ ЗАКОНОВ МЫШЛЕНИЯ ?

Вопрос состоит в том, насколько универсален и насколько всемогущ аксиоматический метод и строгий логический вывод в его рамках – важнейшие инструменты математической логики – в качестве единственно возможного способа доказательства истинности тех или иных утверждений. Прежде всего, границы методу формализации были поставлены двумя выдающимися теоремами К.Гёделя, доказанными им в 1931 году. Первая из них утверждает, что для всякой непротиворечивой формальной системы, содержащей аксиомы формальной арифметики, можно дать явное описание замкнутой формулы F такой, что ни сама эта формула, ни её отрицание $\neg F$ не выводимы в этой формальной системе. Вторая теорема утверждает, что при выполнении некоторых естественных условий в качестве F можно взять утверждение о непротиворечивости данной формальной системы, то есть в непротиворечивой формальной системе, включающей формальную арифметику, содержится формула, выражающая её непротиворечивость, и что эта формула недоказуема в этой системе. Доказательство этих утверждений ознаменовало собой строгое математическое установление того факта, что гильбертовская программа формализации математики не может быть реализована в том виде и в том объёме, в каких её мыслил Гильберт.

Эти теоремы Гёделя фактически означали, что истинное утверждение не всегда может быть доказано. Эти логические теоремы по существу разрушали восходящее к Г.-В.Лейбницу и Р.Декарту мнение, будто всякое истинное утверждение подвластно обоснованию методами математического доказательства. Но оставалась надежда, что выводимость лишь на немного меньше истинности, что недоказуемыми являются лишь экзотические формулы гёделевского типа, в которых зашифрованы утверждения, относящиеся к самим этим формулам. Но в 1936 году польским математиком А.Тарским был получен ещё более сильный результат. Он доказал, что для достаточно богатых формальных теорий понятие истинности в них не может быть выражено на языке самой теории. Это уже означало, что дедуктивный или аксиоматический метод не всесилен в поисках истины и не может быть признан в этом деле единственным возможным, уникальным.

Теорема Тарского, включающая в себя теоремы Гёделя как частное следствия, наталкивает на мысль, что различие между истинностью и выводимостью (доказуемостью) довольно значительно. Но установить, насколько оно велико, удалось только сравнительно недавно, после многолетней совместной работы математиков многих стран, регулярно обменивавшихся промежуточными результатами. Все математические формулы были разбиты вначале на классы сложности так, что эти классы образовали расширяющуюся цепь и каждый класс содержал в себе предыдущий и, в свою очередь, содержался в последующем классе. С увеличением классов сложность формул в них возрастала. Затем было показано, что множество выводимых формул целиком содержится в самом нижнем, нулевом классе. И наконец, доказано, что множество истинных формул не помещается даже в тот предельный класс, который получается при стремлении показателя сложности к бесконечности. Известный математик Ю.И.Манин так прокомментировал эту ситуацию: "Выводимость находится на нижней ступеньке бесконечной лестницы, а истинность располагается где-то над всей лестницей."

Конечно, эти результаты, показывающие, что расстояние от доказуемости (выводимости) до истинности столь велико, могут служить солидным основанием для значительной доли пессимизма в оценке роли логики (и в частности, математической логики) в процессе познания окружающего мира и истины. Некоторые определённые философы истолковывают эти результаты как полное отрицание роли логики в процессе познания, считая, что она нужна лишь для придания уже полученным результатам общепонятной и убедительной формы, а сам механизм получения этих результатов совершенно иной. Не следует истолковывать эти результаты и как полный крах формального подхода к математическим теориям. Эти результаты несомненно означают, что первоначальная, "максималистская" гильбертовская программа финитистского подхода к обоснованию математики не может быть реализовано в полном объёме: нельзя построить математику как некоторую фиксированную совокупность средств, которые можно было бы объявить единственно законными и с их помощью строить метатеории любых теорий. Невозможность полной формализации содержательно определённых математических теорий – это не недостаток подхода или концепции, а объективный факт, неустранимый никакой концепцией, "суровая правда" об устройстве мира, изучаемого этой теорией. Невозможность адекватной формализации теории означает, что надо либо искать формализуемые ею фрагменты, либо строить какую-то более сильную формальную теорию, которая, правда, снова будет неполна, но, быть может, будет содержать всю исходную теорию.

Рассматриваемые выдающиеся результаты Гёделя и Тарского демонстрируют не только слабость математической логики в процессах познания, но и её силу, ещё раз являя уникальность этой науки. Фактически средствами математической логики устанавливаются границы применимости самой математики. Наука с такими уникальными возможностями не может быть бесполезна для дела познания окружающего мира и думается, что её будущие результаты заставят ещё не раз как математиков, так и философов обратиться к их интерпретации.

В этой связи невозможно не вспомнить о следующих соображениях, связанных с рядом натуральных чисел, высказанных известным советским математиком-геометром П.К.Рашевским[4]. Мы уже отмечали крылатую фразу, сказанную Л.Кронекером о том, что натуральные числа создал Господь Бог, а всё остальное – дело рук человеческих (иногда говорят, – математиков). И действительно, натуральный ряд чисел на протяжении многих веков истории человечества является единственной математической идеализацией, идеальной моделью процессов реального счёта. Но, если вдуматься, то такова ситуация лишь с достаточно небольшими натуральными числами. Лишь такие натуральные числа человеческий разум может вместить в свою интуицию и подвергнуть количественной математической обработке. Поскольку математика – основа для построения физических теорий, а натуральный ряд – основа математики, то, ясно, что идеализация натурального ряда оказывает существенное влияние на качество физических теорий, отражающих объективную реальность. Тем не менее, "духу физики более соответствовала бы такая математическая теория целого числа, в которой числа, когда они становятся очень большими, приобретали бы в каком-то смысле "размытый вид", а не являлись строго определёнными членами

[4] *Рашевский П.К.* О догмате натурального ряда // Успехи матем. наук, 1973, т. 28, вып. 4 (172), с. 243 – 246.

натурального ряда, как мы это себе представляем. Существующая теория, так сказать, переуточнена: добавление единицы меняет число, а что меняет для физика добавление одной молекулы в сосуд с газом? Если мы согласимся принять эти соображения хотя бы за отдалённый намёк на возможность математической теории нового типа, то в ней прежде всего пришлось бы отказаться от идеи, что любой член натурального ряда получается последовательным насчитыванием единиц... Вероятно, для "очень больших" чисел присчитывание единицы вообще не должно их менять. Разумеется "числа" этой гипотетической теории были бы объектами другой природы, чем числа натурального ряда. Можно предполагать, что почти совпадение имело бы место лишь для начальных отрезков существующего и гипотетического натуральных рядов, а по мере удаления по ним различие их структуры должно возрастать ..." [5]

П.К.Рашевский проводит здесь интересную параллель между положением с натуральным рядом в настоящее время и положением евклидовой геометрии в XVIII веке, когда она была единственной геометрической теорией, а потому считалась некой абсолютной истиной, одинаково обязательной и для математиков, и для физиков. Считалось само собой понятным, что физическое пространство должно идеально точно подчиняться евклидовой геометрии. В случае геометрии прорыв произошёл в XIX – XX веках, когда были открыты неевклидовы геометрии и на их основе теория относительности. Кроме того, квантовая механика показала, что и геометрия микромира далека от евклидовой. В случае с натуральным рядом вопрос остаётся открытым.

П.К.Рашевский предостерегает, что построение новой теории натурального ряда будет чрезвычайно трудным, если вообще окажется возможным. Эта трудность будет не того характера, как бывают трудны математические проблемы типа: доказать или опровергнуть данное утверждение. Видимо, должна сильно отклониться от общепринятых схем сама логическая структура будущей теории. И здесь П.К.Рашевский высказывает удивительную мысль: новая теория натурального ряда не сможет не затронуть знаменитые отрицательные результаты К.Гёделя 30-ых годов XX века, которые в своём фундаменте исходят из убеждения: сколько бы ни продолжать построение метаматематических формул для данной (полностью формализованной) математической теории, принципы пересчёта и упорядочения формул остаются обычными, т.е. подчинёнными схеме

---

[5] См. пред. сноску, стр. 244.

натурального ряда. Далее, П.К.Рашевский пишет: "Между тем построение математических формул – это реальный физический процесс, производимый человеком или, как стало возможно в последнее время, машиной. Если мы откажемся от догмата, что натуральный ряд идеально приспособлен для описания любых сколь угодно больших материальных совокупностей, то становятся сомнительными и результаты Гёделя; точнее, их придётся рассматривать, возможно, как утверждения, относящиеся не к реальному развитию данной формализованной математической теории, а к условному, идеализированному её развитию, когда при пересчёте формул, сколь много бы их ни было, и при описании их структуры, сколь громоздка ни была бы она, мы считаем законным применять схему натурального ряда. На это дополнительное условие, в сущности, и опирается тонкая игра Гёделя с двойным, математическим и метаматематическим, толкованием некоторых сконструированных им соотношений. Не успокаивает и финитность конструкций Гёделя: при полной расшифровке сокращений (что в данном контексте является принципиальным) его конструкции становятся чрезвычайно сложными, явно не выписываются, и сомнения, высказанные раньше насчёт поведения "очень больших" совокупностей, напрашивается и здесь." [6]

Интересно здесь отметить, что подобная ситуация, когда вдруг обнаруживается ограниченность того или иного научного метода, который доселе представлялся как всеобъемлющий и единственно мыслимый, характерна не только для математики. Так, в биологии мы привыкли думать, что всё ныне живущее образовалось в результате естественного отбора в соответствии с известной теорией Дарвина. Но в самые последние годы учёные, исследовав микроструктуру органической материи, сделали поразительный вывод: если бы возникновение и развитие жизни на нашей планете, считая от появления на Земле первых живых молекул до человека, шло по Дарвину, оно потребовало бы намного больше времени, чем это произошло в действительности. Значит, естественный отбор – не единственный движущий фактор эволюции. (См. [7]).

Из этих фундаментальных результатов математической логики проистекает и ещё один важный в методологическом отношении вывод: то, что мы *интуитивно* понимаем под процессом математического доказательства, не сводится к использованию лишь аксио-

---

[6]См. пред. сноску, стр. 245.

[7]*Карпенков С.* Концепции современного естествознания. - М.: Академ. проект, 2000.

матического метода и законов традиционной и математической логики. Этот вывод сформулирован в [8] : "Математическое мышление не сводится к дедуктивным рассуждениям, оно не состоит только в формальных доказательствах. Мыслительные процессы, подсказывающие нам, что доказывать и как доказывать, также составляют часть математического мышления, как и само доказательство, которым они завершаются. Выделять понятие, приспособленное к конкретной ситуации, обобщать исходя из наблюдаемых частных случаев, рассуждать по индукции, по аналогии и находить интуитивные доводы для выделяемой догадки – всё это математические способы мышления." (С. 91).

Совершенно безнадёжно рассчитывать на то, что понятию убедительного математического доказательства можно придать раз и навсегда очерченные логические формы, связанные с определёнными аксиомами и правилами вывода. Логика традиционная и выросшая на её основе математическая логика отражают лишь часть тех законов, по которым происходит наше мышление, по которым мышление производит истинные утверждения.

В связи с такой ситуацией математическая наука пытается найти новые нетрадиционные подходы к проблеме доказательности истинности, к пониманию того, что есть доказательство, что следует считать доказанным и обоснованным. Один из таких подходов напрямую связан с вероломным вторжением компьютеров во все сферы жизни, в науку, в математику. Эту тенденцию отмечает известный российский математик академик РАН В.А.Садовничий, считая, что математика вынуждена признать права на такую же математическую договорённость и доказательность за другими схемами рассуждений, отличными от классического логического вывода, основанного на аксиомах. "В частности, – говорит он, – за аргументацией с помощью примеров, за рассуждениями по аналогии или путём ассоциаций, за использованием мнений авторитетных специалистов (экспертов). Наконец, за доказательствами, в основе которых лежит простая вера в сходимость бесконечного вычислительного процесса. Ведь никакое вычисление нельзя продолжать бесконечно, и где-то, на каком-то шаге мы его обрываем и полученную таким образом приближённую числовую величину принимаем за решение рассматриваемой задачи – за истину. Но сходимость многих вычислительных алгоритмов, используемых в машинных расчётах, не доказана

---

[8] *Меморандум американских математиков* // Математика в школе, 1964, № 4, с.90–92.

в классическом понимании. Тем не менее, именно на этой вере возведено практически всё здание современных компьютерных вычислений и приложений. Многообразные вычислительные процедуры существуют и используются, но их строгое теоретическое обоснование либо отсутствует, либо остаётся неполным... Таким образом, ясно, что с появлением компьютеров мир математики стал меняться. Изменяются не только математическое мышление, математические подходы, но и научное мировоззрение в целом."[9] Именно такова ситуация с современным решением проблемы четырёх красок: полученное доказательство чрезвычайно длинно, к тому же существенно (до нескольких тысяч часов машинного времени) использует компьютер для проверки большого количества промежуточных утверждений. (См.[10]).

Подобная тенденция подмечается и другими исследователями, считающими, что в будущем "математическая теория, узаконивающая заведомо нестрогие переходы, будет лучше соответствовать реальному процессу."[11]

По-существу, это означает, что математика и в этом своём качестве начинает теснее сближаться с гуманитарными науками, в которых подобные нестрогие (с точки зрения математики) критерии и нормы истинности вырабатывались на протяжении столетий и прочно вошли в их обиход. Выразительная характеристика такого подхода к проблеме доказательности в гуманитарных науках дана известным филологом академиком А.А.Зализняком (опубликовано, кстати, в журнале "Успехи математических наук"): "У гуманитария же вообще нет возможности что-либо доказать в абсолютном смысле этого слова. Если слово "доказать" и применяется иногда в гуманитарных науках, то лишь в несколько ином, более слабом, смысле, чем в математике. Строгого определения для этого "доказательства в слабом смысле", по-видимому, дать невозможно. Практически имеется в виду, что предложенная гипотеза, во-первых, полностью согласуется со всей совокупностью уже известных фактов, имеющих отношение к рассматриваемой проблеме, во-вторых, является

---

[9] *Садовничий В.А.* Математическое образование: настоящее и будущее / Математика, 2000, № 40, с.1-6 (с.3).

[10] *Самохин А.В.* Проблема четырёх красок: неоконченная история доказательства / Соросовский образовательный журнал, 2000, т. 6, № 7, с. 91 – 96.

[11] *Беляев Е.А., Перминов В.Я.* Философские и методологические проблемы математики. - М.: изд. МГУ, 1981. (с.133)

почему-либо безусловно предпочтительной из всех прочих мыслимых гипотез, удовлетворяющих первому требованию. В отличие от математического доказательства, "доказательства в слабом смысле" может и рухнуть, если откроются новые факты, или будет выяснено, что автор не учёл каких-то принципиально мыслимых возможностей. Всё это не значит. однако, что утверждения гуманитарных наук вообще не могут претендовать ни на какую точность и надёжность и что в этой области любая гипотеза не хуже и не лучше, чем любая другая. В гуманитарных науках, так же, как, например, в естествознании, долгим опытом выработаны критерии, позволяющие оценивать степень обоснованности того или иного утверждения даже при условии невозможности доказательства в абсолютном смысле."[12]

Как это ни покажется парадоксальным, но фактически и в математике, как в научной, так и в школьной, реально используются такие доказательства, которые далеки от строгих логических канонов, а представляют собой рассуждения, которые призваны убедить определённый круг людей в справедливости того или иного утверждения. "В математике, – отмечает Г.В.Дорофеев[13], – при оценке доказанности той или иной теоремы фактически пользуются методом "экспертной оценки", а в роли экспертов выступают коллеги – математики, слушатели докладов на семинарах, рецензенты и члены редколлегий математических журналов." Аналогичную мысль высказывает Ю.И.Манин[14]: "Доказательство становится таковым только в результате социального акта "принятия доказательства". Это относится к математике в той же мере, что и к физике, лингвистике или биологии. Эволюция признанных критериев доказательности – почти не исследованная тема в истории науки... Каждое предложенное доказательство апробируется на приемлемость математиками, иногда нескольких поколений."

Эти обстоятельства накладывают на такое понимание доказательства субъективный оттенок: то, что убеждает одного, может быть неубедительным для другого. В этом смысле может показаться, что и в математике понятие доказательства также весьма рас-

---

[12] *Зализняк А.А.* Лингвистика по А.Т.Фоменко / Успехи мат. наук, 2000, 55, № 2, с.162-188 (с.163).

[13] *Дорофеев Г.В.* Математика для каждого. - М.: Аякс, 1999. - 292 с. (с.219).

[14] *Манин Ю.И.* Доказуемое и недоказуемое. - М.: Сов. радио, 1979. - 167 с. (с.53-54).

плывчато и неопределённо и напоминает по своей строгости доказательства в гуманитарных науках. Тем не менее, это не так. "Математика не существовала бы как наука, справедливо считает Г.В.Дорофеев[15], – если бы не существовало более или менее единого мнения относительно того, является ли данное рассуждение доказательством. И в действительности в каждом разделе математики имеется определённый стандарт строгости, хотя формально он нигде не описан, нигде не зафиксирован. Более того, как показывает история математики, этот стандарт изменялся по мере развития математики, и то, что казалось строгим, скажем, в XVII-XVIII вв., подвергалось критике в XIX в., а многие рассуждения математиков XIX в. были сочтены совершенно неубедительными математиками и особенно логиками XX в."

Позволим себе высказать гипотезу: критерии доказательности в математике, строгости математических доказательств развивались и совершенствовались вместе с развитием логики. Неслучайно само понятие доказательства появилось в древнегреческой математике вместе со становлением логики как науки, а современного уровня строгости оно достигло в XX в. вместе со становлением логики как математической науки и превращением её в математическую логику. Поэтому хотя в современной математике и нет строгого определения понятия строгого доказательства математической теоремы, тем не менее, каждый математик осознаёт эту строгость *интуитивно*. За каждым математическим доказательством он ощущает величественную тень незыблемых логических законов и критериев, выработанных математической логикой на протяжении XX века. Хотя рассматриваемое им доказательство и не во всех своих деталях именно таково, интуитивно он осознаёт, что оно может быть преобразовано в такое, пусть даже для этого потребуется приложить очень много усилий и потратить очень много времени. Важно ощущать принципиальную возможность такой трансформации. Такое интуитивное ощущение строгости должно быть воспитано как в будущем учёном-математике, так и в будущем учителе математики. У каждого из них базой для этого воспитания будет служить фундаментальная логическая подготовка, заложенная в юношеском возрасте. Именно она будет служить источником интуиции о логической строгости, будет подпитывать это интуитивное чувство.

[15] *Дорофеев Г.В.* Математика для каждого. - М.: Аякс, 1999. - 292 с. (с.220)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Учебники и пособия по математической логике, рекомендуемые студентам педагогических вузов

1. *Ефремов Г.О.* Алгебра логики и контактные схемы. - М., 1969.

2. *Игошин В.И.* Математическая логика и теория алгоритмов. - М.: Издат. центр "Академия", 2004, 2008 (2-е изд.). – 448 с.

3. *Калбертсон Дж. Т.* Математика и логика цифровых устройств / Пер. с англ. - М., 1965.

4. *Калужнин Л.А.* Что такое математическая логика ? - М., 1964.

5. *Лихтарников Л.М., Сукачёва Т.Г.* Математическая логика (Курс лекций. Задачник-практикум и решения). - СПб.: Лань. 1999. - 288 с.

6. Математическая логика / Под ред. *А.А.Столяра.* - Минск, 1991.

7. *Мендельсон Э.* Введение и математическую логику / Пер. с англ. - М., 1976.

8. *Нагель Э., Ньюмен Д.* Теорема Гёделя / Пер. с англ. - М., 1970.

9. *Никольская И.Л.* Математическая логика. - М.: Высш. шк., 1981. - 127 с.

10. *Новиков П.С.* Элементы математической логики. - М.: Наука 1973.

11. *Новиков П.С.* Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. - М.: Наука, 1977.

12. *Пензов Ю.Е.* Элементы математической логики и теории множеств. – Саратов: изд-во СГУ, 1968.

13. Современные основы школьного курса математики / *Виленкин Н.Я., Дуничев К.И., Калужнин Л.А., Столяр А.А.* - М.: Просвещение, 1980. - 240 с.

14. *Столл Р.Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории / Пер. с. англ. - М., 1968.

15. *Столяр А.А.* Элементарное введение в математическую логику. - М., 1965.

16. *Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Б.* Вводный курс математической логики. - М.: МГУ, 1991. - 136 с.

17. *Фрейденталь Х.* Язык логики / Пер. с англ. - М., 1969.

18. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств / Пер. с англ. - М.: Мир, 1966. - 556 с.

19. *Эдельман С.Л.* Математическая логика. - М., 1975.

20. *Энгелер Э.* Метаматематика элементарной математики / Пер. с нем. - М.: Мир, 1987.

2. Сборники задач по математической логике

1. *Байиф Ж.-К.* Логические задачи / Пер. с франц. - М., 1983.

2. *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Сборник задач по дискретной математике. - М., 1977.

3. *Гиндикин С.Г.* Алгебра логики в задачах. - М., 1972.

4. *Гохман А.В., Спивак М.А., Розен В.В., Салий В.Н., Житомирский Г.И., Рыжков А.Г., Шимельфениг О.В.* Сборник задач по математической логике и алгебре множеств. – Саратов: изд-во СГУ, 1969. - 92 с.

5. *Игошин В.И.* Задачник-практикум по математической логике. – М.: Просвещение, 1986. – 160 с.

6. *Игошин В.И.* Тетрадь по математической логике с печатной основой. – Саратов, 1996, – 64 с.; 1999, – 56 с.; 2010 (3-е изд., дополненное), – 64 с.

7. *Игошин В.И.* Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. – М.: Издат. центр "Академия", 2005, 2006 (2-е изд.), 2007 (3-е изд.). – 304 с.

8. *Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. - М.: Наука, 1975.

9. *Смаллиан Р.М.* Принцесса или тигр? / Пер. с англ. - М., 1985.

10. *Шапиро С.И.* Решение логических и игровых задач. - М., 1984.

3. Фундаментальные пособия по математической логике

1. *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики / Пер. с нем. - М., 1947.

2. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики / Пер. с англ. – М., 1979. – 560 с.

3. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Теория доказательств / Пер. с англ. – М., 1980.

4. *Гладкий А.В.* Математическая логика. – М., 1998.

5. *Гудстейн Р.Л.* Математическая логика / Пер. с англ. - М., 1961.

6. *Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.* Математическая логика. - М., 1979.

7. *Ершов Ю.Л., Лавров И.А., Тайманов А.Д., Тайцлин М.А.* Элементарные теории / Успехи матем. наук, 1965, 20, № 4, с.37-108.

8. *Карри Х.* Основания математической логики / Пер.с англ. - М.: Мир, 1969. - 568 с.

9. *Кейслер Г., Чэн Ч.Ч.* Теория моделей / Пер. с англ. - М.: Мир, 1977. - 616 с.

10. *Клаус Г.* Введение в формальную логику. - М., 1960.

11. *Клини С.* Введение в метаматематику / Пер. с англ. - М., 1957.

12. *Клини С.* Математическая логика / Пер. с англ. - М., 1973.

13. *Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г.* Введение в математическую логику. - М., 1982.

14. *Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г.* Математическая логика. Доп. главы. - М., 1984.

15. *Лавров И.А.* Математическая логика: учеб пособие для студ. высш. учеб. заведений / И.А.Лавров; под ред. Л.Л.Максимовой. - М.: Издат. центр "Академия", 2006. – 240 с. – (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).

16. *Линдон Р.* Заметки по логике / Пер. с англ. - М., 1968.

17. *Манин Ю.И.* Доказуемое и недоказуемое. - М., 1979. - 167 с.

18. *Марков А.А.* Элементы математической логики. - М., 1984.

19. *Маслов С.Ю.* Теория дедуктивных систем и её применение. - М.: Радио и связь. 1986.

20. *Слупецкий Е., Борковский Л.* Элементы математической логики и теории множеств / Пер. с польск. - М., 1965.

21. *Смальян Р.* Теория формальных систем / Пер. с англ. - М.: Наука, 1981. - 208 с.

22. Справочная книга по математической логике. В 4-ёх частях. Под ред. *Дж.Барвайса* / Пер. с англ. - М.: Наука, 1982-1983.

23. *Чёрч А.* Введение в математическую логику / Пер. с англ. - М., 1960.

24. *Шенфилд Дж.* Математическая логика / Пер. с англ. - М., 1975.

25. *Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. - М., 1966.

4. Книги, рекомендуемые школьникам

1. *Бизам Д., Герцег Я.* Игра и логика (85 логических задач) / Пер. с венг. - М., 1975.

2. *Бизам Д., Герцег Я.* Многоцветная логика (175 задач) / Пер. с венг. - М., 1978.

3. *Гжегорчик А.* Популярная логика / Пер. с польск. - М., 1972.

4. *Депман И.Я.* Первое знакомство с математической логикой. - Л., 1965.

5. *Жоль К.К.* Логика в лицах и символах. - М.: Педагогика-пресс, 1993. - 256 с.

6. *Касаткин В.Н., Верлань А.Ф., Переход И.А.* Элементы кибернетики – школьнику: Сборник упражнений и задач. - Киев, 1974.

7. *Кольман Э., Зих О.* Занимательная логика / Пер. с чешск. - М., 1966.

8. *Кутасов А.Д.* Элементы математической логики. - М., 1977.

9. *Кэррол Л.* История с узелками / Пер. с англ. - М., 1973.

10. *Либер А.Е.* Двоичная булева алгебра и её приложения. - Саратов: изд-во СГУ, 1966.

11. *Мадер В.В.* Школьнику об алгебре логики. - М.: Просвещение, 1993.

12. *Мадер В.В.* Тайны ряда *N*. - М.: Просвещение, 1995, - 191 с.

13. *Хаваш К.* Так – логично! / Пер. с венг. - М., 1985.

14. *Шевченко В.Е.* Некоторые способы решения логических задач. - Киев, 1979.

15. *Яглом И.М.* Необыкновенная алгебра. - М.: Наука, 1968.

Оглавление

По вопросам приобретения книг обращайтесь:
Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в, стр. 1
Тел. (495) 380-4260; факс (495) 363-9212
E-mail: books@infra-m.ru

•

Отдел «Книга–почтой»:
тел. (495) 363-4260 (доб. 232, 246)

Учебное издание

Владимир Иванович Игошин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Подписано в печать 25.08.2011.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Newton.
Усл. печ. л. 25,0. Уч.-изд. л. 23,8 + 4,2 *CD-R*.
Тираж 1000 экз. Заказ № 7065.
ТК 163900-10109-250811

Издательский Дом «ИНФРА-М»
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в
Тел.: (495) 380-05-40, 380-05-43. Факс: (495) 363-92-12.
E-mail: books@infra-m.ru
http://www.infra-m.ru

Отпечатано с электронных носителей издательства.
ОАО "Тверской полиграфический комбинат". 170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5.
Телефон: (4822) 44-52-03, 44-50-34, Телефон/факс: (4822)44-42-15
Home page - www.tverpk.ru Электронная почта (E-mail) - sales@tverpk.ru

ISBN 978-5-16-005204-5
9 785160 052045

В.И. Игошин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Настоящая тетрадь-задачник-практикум призвана служить поддержкой при изучении курса математической логики в педагогическом вузе по учебнику:

Игошин В.И. Математическая логика. – Издательство ИНФРА-М, 2012. – 400 с.

И учебник, и тетрадь могут быть использованы при изучении математической логики также и в других высших учебных заведениях. Кроме того, включение элементов математической логики в курс информатики средней школы, а также в единый государственный экзамен (ЕГЭ) по информатике и по математике сделало этот предмет широко известным в школе, но не сделало его родным для школы. Но этот предмет важен прежде всего не для информатики, а для математики. В информатике заключена прикладная сторона математической логики. В математике – её сущность: логика анализирует процессы и формы мышления. Именно поэтому данный предмет выбирают не только школы и классы с углубленным изучением предметов естественнонаучного цикла, но и школы и классы гуманитарного профиля. Поэтому данная тетрадь с печатной основой может быть использована учителями лицеев, гимназий, колледжей, а также других общеобразовательных школ в преподавании, а учениками в изучении этого трудного и интересного предмета. Она содержит около 500 задач и вопросов различной сложности. В ней отражены темы:

Основное внимание уделено алгебре высказываний. Содержащиеся в тетради задачи позволят по новому взглянуть на процессы мышления, на материалы школьных учебников математики и информатики, на взаимосвязи между ними, помогут найти подходы к решениям нестандартных задач единого государственного экзамена (ЕГЭ). Настоящая тетрадь-задачник-практикум. предназначена для учащихся 8-11 классов и их учителей, а также для студентов вузов – будущих учителей математики и информатики, специалистов в области прикладной математики и прикладной информатики. Будет полезна она также и студентам гуманитарных специальностей вузов – философам, юристам, филологам, психологам, культурологам, социологам. Специально студентам-гуманитариям предназначено учебное пособие:

В.И.Игошин. ***Логика с элементами математической логики*: учебное пособие для студентов высш. учеб. заведений гуманитарных специальностей / В.И.Игошин. – Саратов: Издательство «Научная книга», 2004. – 144 с.**

1. Высказывания

ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Высказывание ***- это предложение, которое что-либо утверждает, то есть предложение, о котором имеет смысл говорить, истинно оно или ложно.***

1.1. Определите, какие из следующих предложений являются *высказываниями* и объясните, почему. Среди высказываний выделите *истинные* и *ложные*.

Москва — столица России.	
Саратов находится на берегу Невы	
Ученик 9-го класса.	
Треугольник ABC подобен треугольнику A'B'C'.	
$2 + \frac{2}{3} - 0{,}71$	
Луна есть спутник Марса.	
Кислород — газ.	
Снег белый	
Математика -- интересный предмет.	
Железо тяжелее свинца.	
Треугольник называется равносторонним, если все его стороны равны.	
Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний.	
Сегодня плохая погода.	
Река Ангара впадает в озеро Байкал.	

1.2. Вспомните определения *операций над высказываниями* (логических связок) и их названия и заполните определяющие их таблицы истинности.

		Название операции				
P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1				
0	1					
1	0	0				
1	1					

1.3. Определите *значения истинности* следующих высказываний:

Санкт-Петербург расположен на берегу Невы и 2 + 3 = 5.	$A \wedge B = 1 \wedge 1 = 1$
7 – простое число или 9 – простое число.	
$2 \cdot 2 \leq 5$ и $2 \cdot 2 \geq 4$.	
Фобос и Луна – спутники Марса.	
Если Саратов расположен на берегу Невы, то в Африке обитают белые медведи.	
Если 12 делится на 3, то 5 > 6 .	
– 8 < – 11 тогда и только тогда, когда 2 > 6 .	
Если 7 делится на 5 и 8 делится на 5 , то 7 + 8 делится на 5 .	

1.4. Определите *значения истинности* высказываний *A, B, C, D, E, F, G, H* в следующих случаях:

Истинные высказывания	
$A \wedge (2 \cdot 2 = 4)$	**Тогда** A
$B \vee (2 \cdot 2 = 5)$	**Тогда** B
$C \vee (2 \cdot 2 = 4)$	**Тогда** C
$\neg D \wedge (2 \cdot 2 = 4)$	**Тогда** D
$\neg E \vee (2 \cdot 2 = 5)$	**Тогда** E
$(2 \cdot 2 = 4) \to F$	**Тогда** F
$G \to (2 \cdot 2 = 5)$	**Тогда** G
$H \leftrightarrow (2 \cdot 2 = 4)$	**Тогда** H

Ложные высказывания	
$A \wedge (2 \cdot 2 = 4)$	**Тогда** A
$B \vee (2 \cdot 2 = 5)$	**Тогда** B
$\neg C \vee (2 > 3)$	**Тогда** C
$(2 < 3) \to D$	**Тогда** D
$E \to (2 > 3)$	**Тогда** E
$F \leftrightarrow (2 > 3)$	**Тогда** F
$G \leftrightarrow (2 < 3)$	**Тогда** G

1.5. Пусть a и b – действительные числа. Тогда отрицанием высказывания $a \geq b$ является высказывание: **а)** $a \neq b$; **б)** $a \leq b$; **в)** $a > b$; **г)** $a < b$; **д)** $a = b$.

1.6. Запишите в виде *конъюнкции* или *дизъюнкции* условие истинности каждого предложения (a и b - действительные числа):

$a \cdot b \neq 0$	
$a \cdot b = 0$	
$a^2 + b^2 = 0$	
$a \cdot b > 0$	
$\lvert a \rvert = 3$	
$\lvert a \rvert < 3$	
$\lvert a \rvert > 3$	
$a^2 + b^2 \neq 0$	
$\frac{a}{b} \neq 0$	
$a \cdot b \leq 0$	
$\frac{a}{b} = 0$	$a = 0 \wedge b \neq 0$

1.7. Докажите, что каждое из следующих высказываний принимает только одно *значение истинности*, вне зависимости от логического значения высказывания A. Определите это значение.

$A \wedge 0$	
$A \rightarrow 1$	
$A \rightarrow A$	
$A \vee \neg A$	
$A \wedge \neg A$	
$0 \rightarrow A$	
$A \leftrightarrow \neg A$	
$A \leftrightarrow A$	
$A \vee 1$	Дизъюнкция истинна тогда и только тогда, когда по меньшей мере одно из высказываний истинно. Следовательно, $A \vee 1 = 1$

1.8. Определите *значения истинности* каждого из следующих высказываний в зависимости от значения истинности высказывания *A:*

$A \wedge 1$	равно значению истинности высказывания A, т.е. $A \wedge 1 = A$
$A \vee 0$	
$1 \rightarrow A$	
$A \rightarrow 0$	
$A \rightarrow \neg A$	
$\neg A \rightarrow A$	
$A \leftrightarrow 1$	
$A \leftrightarrow 0$	

1.9. Определите *значения истинности* последнего высказывания, исходя из значений истинности всех предыдущих высказываний:

а) $A \rightarrow B = 1$, $A \leftrightarrow B = 0$. **Тогда** $B \rightarrow A =$
б) $A \leftrightarrow B = 0$. **Тогда** $\neg A \rightarrow B =$
в) $A \wedge B = 0$, $A \rightarrow B = 1$. **Тогда** $B \rightarrow \neg A =$

г) $A \vee B = 1$, $A \to B = 1$. **Тогда** $\neg B \to A =$	
д) $A \wedge B = 0$, $A \vee B = 1$, $A \to B = 1$. **Тогда** $B \to A =$	
е) $A \to B = 1$, $(A \vee B) \to A = 1$. **Тогда** $\neg A \leftrightarrow B =$	

1.10. Существуют ли три таких высказывания *A, B, C,* чтобы *одновременно* выполнялись для них следующие условия:

а) $A \vee \neg B = 0$, $B \to (A \vee C) = 0$, $\neg C \to \neg B = 1$.

Решение. Из 1-го условия следует, что $A = 0$ и $\neg B = 0$, т.е. $B = 1$. Тогда из 2-го условия следует, что $A \vee C = 0$. Отсюда $C = 0$. Следовательно, $\neg C \to \neg B = \neg 0 \to \neg 1 = 1 \to 0 = 0$, что противоречит 3-му условию. Значит, трёх высказываний, удовлетворяющих всем данным условиям, не существует.

б) $A \wedge B = 1$, $A \wedge C = 0$, $A \wedge B \wedge \neg C = 0$.

____

____

____

в) $B \to A = 1$, $A \vee C = 0$, $A \leftrightarrow (B \wedge \neg C) = 0$.

____

____

____

г) $B \vee C = 0$, $\neg C \to A = 0$, $A \to B = 0$.

____

____

____

1.11. Предположим, что высказывание $A \wedge \neg B$ истинно. Выделите тогда среди следующих высказываний все те, которые также будут *истинными.*

$A \to B$	
$\neg A \leftrightarrow \neg B$	
$\neg A \vee B$	
$A \wedge B$	*ложно,* так как $A = 1$, $B = 0$

$A \to \neg B$	

1.12. Предположим, что высказывание $A \to B$ ложно. Тогда среди следующих высказываний только одно будет *ложно*. Найдите его и объясните, почему это будет так.

$B \to A$	*истинно*, так как $B = 0$, $A = 1$
$A \wedge \neg B$	
$A \vee B$	
$\neg B \to \neg A$	
$\neg A \leftrightarrow B$	

1.13. Предположим, что высказывание $B \to A$ истинно. Определите тогда, какие из следующих высказываний *не могут быть ложными*, и объясните, почему.

$A \wedge B$	
$A \leftrightarrow B$	*может*, например, при $A = 1$, $B = 0$
$\neg A \vee B$	
$A \wedge \neg B$	
$A \vee \neg B$	

1.14. Предположим, что высказывание $A \to \neg B$ истинно. Определите тогда, какие из следующих высказываний *не могут быть истинными*, и объясните, почему.

$A \vee B$	
$A \wedge B$	*не может*, так как. $A \wedge B = 1$ при $A = 1, B = 1$, но при этих значениях $A \to \neg B = 1 \to \neg 1 = 1 \to 0 = 0$
$B \to A$	
$\neg A \vee B$	
$A \leftrightarrow B$	

1.15. Для какого символьного выражения (слова) неверно утверждение:

¬ (Первая буква гласная) → ¬ (Третья буква гласная) ?

а) орёл ; б) алгоритм ; в) логика ; г) баобаб ; д) уравнение .

ФОРМУЛЫ И ТАВТОЛОГИИ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.16. В следующей последовательности символов всевозможными способами расставить скобки так, чтобы получилась *формула*:

а) $P \to \neg Q \land R$ **б)** $\neg P \lor \neg Q \leftrightarrow R$

1.17. Составьте таблицы истинности для следующих формул и укажите среди них *выполнимые, опровержимые, тождественно истинные* (*тавтологии*) и *тождественно ложные* (*противоречия*):

а) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$;

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$P \to \neg Q$	$\neg P$	$(P \to \neg Q) \to \neg P$	F
0	0						
0	1						
1	0						
1	1						

б) $(P \land (Q \lor \neg P)) \land ((\neg Q \to P) \lor Q)$;

P	Q	
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

в) $P \land (Q \land (\neg P \lor \neg Q))$;

P	Q	
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

г) $((P \vee \neg Q) \leftrightarrow R) \wedge (\neg R \vee Q)$;

P	Q	R	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

д) $(X_1 \vee X_2 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_2) \wedge (X_2 \vee \neg X_3) \wedge (X_3 \vee \neg X_1) \wedge$
$\wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3)$.

X_1	X_2	X_3	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

1.18. Докажите, что следующая формула выполнима; причём, значение 1 она принимает только на одном наборе значений переменных. Найдите этот набор, не составляя всей таблицы значений формулы:

а) $(P \to (Q \wedge R)) \leftrightarrow \neg(\mathrm{P} \to Q)$;

б) $(X \vee Y \vee Z) \wedge \neg (X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \to X) \wedge (X \to Z)$;

в) $\neg Q \wedge S \wedge ((\neg P \wedge \neg R) \vee (P \wedge R)) \wedge (P \vee Q \vee R \vee S)$.

1.19. Докажите, что следующая формула опровержима, не составляя всей таблицы значений формулы, а лишь указав соответствующий набор значений переменных.

а) $(\neg(R \vee Q) \wedge P)) \rightarrow ((\neg P \wedge \neg R) \vee \neg S)$;

б) $((P \vee Q) \vee R)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$;

в) $[(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge \neg Q \wedge S \wedge P] \rightarrow \neg R$.

1.20. Дан фрагмент таблицы значений для некоторой формулу $F(X, Y, Z)$. Для какой из следующих формул этот фрагмент мог бы служить частью её таблицы значений?

а) $X \vee Y \vee Z$;
б) $X \wedge \neg Y \wedge Z$;
в) $X \wedge Y \wedge \neg Z$;
г) $\neg X \vee Y \vee Z$;
д) $X \wedge Y \wedge Z$.

X	Y	Z	$F(X, Y, Z)$
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	1	0

1.21. Докажите, что следующие формулы являются *тавтологиями*, составив их таблицы истинности (основные логические законы):

а) $P \vee \neg P$ (*закон исключенного третьего*)

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
0		
1		

б) $\neg(P \wedge \neg P)$ (*закон отрицания противоречия*)

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$	$\neg(P \wedge \neg P)$
0			
1			

в) $\neg\neg P \leftrightarrow P$ (*закон двойного отрицания*)

P	$\neg P$	$\neg\neg P$	$\neg\neg P \leftrightarrow P$
0			
1			

г) $P \to P$ (*закон тождества*)

P	$P \to P$
0	
1	

1.22. Докажите, что следующие формулы являются *тавтологиями*, составив их таблицы истинности (свойства логических операций):

а) $(P \wedge P) \leftrightarrow P$ (***идемпотентность конъюнкции***)

P	$P \wedge P$	$(P \wedge P) \leftrightarrow P$
0		
1		

б) $(P \vee P) \leftrightarrow P$ (***идемпотентность дизъюнкции***)

P	$P \vee P$	$(P \vee P) \leftrightarrow P$
0		
1		

в) $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$ (***коммутативность конъюнкции***)

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$	$(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

г) $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$ (***коммутативность дизъюнкции***)

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$	$(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

д) $((P \wedge Q) \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$ (*ассоциативность конъюнкции*)

P	Q	R	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

е) $((P \vee Q) \vee R) \leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$ (*ассоциативность дизъюнкции*)

P	Q	R	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

ж) $(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$ (*дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции*)

P	Q	R	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

з) $(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ (*дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции*)

P	*Q*	*R*	
0	**0**	**0**	
0	**0**	**1**	
0	**1**	**0**	
0	**1**	**1**	
1	**0**	**0**	
1	**0**	**1**	
1	**1**	**0**	
1	**1**	**1**	

и) $(P \wedge (Q \vee P)) \leftrightarrow P$ (*1-ый закон поглощения*)

P	*Q*	
0	**0**	
0	**1**	
1	**0**	
1	**1**	

к) $(P \vee (Q \wedge P)) \leftrightarrow P$ (*2-ой закон поглощения*)

P	*Q*	
0	**0**	
0	**1**	
1	**0**	
1	**1**	

л) $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ (*1-ый закон де Моргана*)

P	*Q*	
0	**0**	
0	**1**	
1	**0**	
1	**1**	

м) $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ (***2-ой закон де Моргана***)

P	Q	
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

1.23. Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями (тождественно истинны), не составляя их таблиц истинности:

а) $(P \wedge Q \wedge R) \rightarrow (\neg P \vee Q \vee \neg R)$;

б) $(X_1 \wedge \neg Y_1) \vee (X_2 \wedge \neg Y_2) \vee (Y_1 \wedge Y_2) \vee (X_1 \wedge X_2)$;

в) $[(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (Q \rightarrow S) \wedge (R \rightarrow T) \wedge (\neg P \rightarrow Y)] \rightarrow ((S \wedge T) \vee Y)$.

1.24. Докажите, что следующие формулы являются противоречиями (тождественно ложны), не составляя их таблиц истинности:

а) $P \wedge \neg (Q \rightarrow (P \wedge Q))$;

б) $P \wedge Q \wedge \neg R \wedge (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$;

в) $(X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee X_4) \wedge (X_1 \vee \neg X_2) \wedge (X_2 \vee \neg X_3) \wedge (X_3 \vee \neg X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_1) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3 \vee \neg X_4)$.

1.25. **а)** Отметьте здесь единственную формулу, *являющуюся тавтологией*:

$\neg P \wedge P$
$\neg\neg P \to \neg P$
$P \to P$
$P \to \neg P$
$P \vee P$

б) Отметьте здесь единственную формулу, *не являющуюся тавтологией*:

$P \vee \neg P$
$P \to P$
$\neg(P \wedge \neg P)$
$(P \wedge P) \to P$
$P \wedge P$

1.26. Выясните, справедливо ли следующее утверждение:

а) $\models F \vee G$ тогда и только тогда, когда $\models F$ или $\models G$.

Решение. Ясно, что если F – тавтология или G – тавтология, то $F \vee G$ также является тавтологией. Обратное утверждение не верно, например, для формул $F \equiv P$, $G \equiv \neg P$.

б) $\models F \vee G$ тогда и только тогда, когда $\models F$ и $\models G$;

____

____

____

в) $\models F \wedge G$ тогда и только тогда, когда $\models F$ и $\models G$;

____

____

г) $\models F \wedge G$ тогда и только тогда, когда $\models F$ или $\models G$;

____

____

____

д) $\models F \to G$ тогда и только тогда, когда $\models G$.

____

____

____

1.27. Привести примеры формул F и G таких, чтобы следующая формула была тавтологией:

а) $F \wedge G$ ______

б) $F \wedge (G \to F)$ ______

в) $F \to \neg F$ ______

1.28. Существует ли такая формула F, чтобы следующая формула была тавтологией:?

а) $F \wedge \neg F$ ______

б) $F \vee \neg F$ ______

1.29. Если формула $F \wedge G$ является тавтологией, то какие из следующих формул также будут тавтологиями:?

а) F ______

б) G ______

в) $F \vee \mathbf{G}$ ______

г) $F \wedge \neg \mathbf{G}$ ______

д) $\neg F \vee \mathbf{G}$ ______

е) $\neg \mathbf{G} \to F$ ______

ж) $F \leftrightarrow \mathbf{G}$ ______

з) $F \to \neg \mathbf{G}$ ______

РАВНОСИЛЬНОСТЬ ФОРМУЛ

1.30. Выпишите *равносильности*, получающиеся на основе тавтологий задачи 1.22:

______

______

______

______

______

______

1.31. Докажите, что справедливы следующие *равносильности*, составив таблицы истинности левой и правой формул:

а) $P \to Q \;\cong\; \neg P \vee Q$ выражение импликации через дизъюнкцию и отрицание

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

б) $P \leftrightarrow Q \;\cong\; (P \to Q) \wedge (Q \to P)$ выражение эквивалентности через импликацию и конъюнкцию

P	Q	
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

1.32. Какой из формул правого столбца *равносильна* записанная слева формула ?

$(P \to Q) \vee (Q \to P)$

- $P \leftrightarrow Q$
- $\neg P \vee Q$
- $(P \vee Q) \to P$
- $P \vee Q$
- $P \to (Q \vee P)$

1.33. Из следующих пар формул только в одной содержатся *равносильные* формулы. Отметьте эту пару.

- $P \leftrightarrow Q$ и $\neg P \vee Q$
- $\neg P \to Q$ и $P \vee \neg Q$
- $\neg (P \vee Q)$ и $\neg Q \wedge P$
- $Q \to P$ и $\neg P \wedge Q$
- $Q \vee \neg P$ и $P \to Q$
- $P \to \neg Q$ и $P \wedge Q$

1.34. Какой из формул правого столбца *равносильна* записанная слева формула ?

$\neg(\neg P \wedge Q) \wedge \neg R$	$(P \wedge \neg Q) \vee R$
	$(\neg P \rightarrow \neg Q) \vee R$
	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
	$\neg(\neg R \rightarrow (\neg P \wedge Q))$
	$\neg P \vee \neg Q \vee R$

1.35. Применяя *равносильные преобразования*, приведите следующие формулы к наиболее простой форме:

а) $\neg((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg P)) \cong$
$\cong \neg(P \rightarrow Q) \vee \neg(Q \rightarrow \neg P) \cong \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee \neg P) \cong$
$\cong (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg\neg Q \wedge \neg\neg P) \cong (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) \cong$
$\cong (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \cong P \wedge (\neg Q \vee Q) \cong P \wedge 1 \cong P.$

б) $\neg(\neg P \wedge \neg Q) \vee ((P \rightarrow Q) \wedge P) \cong$ ____________________

____

____

в) $(P \leftrightarrow Q) \wedge (P \vee Q) \cong$ ____________________

____

____

г) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg P) \wedge (R \rightarrow P) \cong$ ____________________

____

____

д) $(\mathrm{P} \wedge \neg\mathrm{Q}) \leftrightarrow (P \rightarrow (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R})) \cong$ ____________________

____

____

____

____

1.36. Составьте правильное утверждение:

Два высказывания

истинно высказывание A
ложно высказывание A
ложно высказывание B
истинно высказывание B
истинно высказывание $A \wedge B$

1.37. Составьте правильное утверждение:

Три высказывания $\neg A$, $A \to B$ и $\neg B$ ***одновременно истинны*** **тогда и только тогда, когда …**

истинно высказывание $A \to B$
ложно высказывание $A \vee B$
истинно высказывание $\neg A \vee \neg B$
истинно высказывание $\neg A \to \neg B$
ложно высказывание $\neg A \wedge \neg B$

1.38. Составьте правильное утверждение:

Из двух высказываний $A \wedge B$ и $A \to B$ ***по меньшей мере одно истинно*** **Тогда и только тогда, когда** **истинно высказывание …**

$A \wedge B$
A
$A \to B$
B
$A \vee B$

1.39. Составьте правильное утверждение:

Из трех высказываний $A \to B$, $A \to (B \wedge C)$, $C \to B$ ***по меньшей мере одно истинно*** **тогда и только тогда, когда** **истинно высказывание ...**

$(A \wedge C) \to B$
$(A \to B) \wedge (A \to C)$
$A \to \mathrm{C}$
$B \wedge C$
$(A \wedge C) \to (B \wedge C)$

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДЛЯ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.40. Укажите, в какой *форме* представлена каждая из следующих формул от трех переменных *P, Q, R* : СДН-форме; ДН-форме, но не СДН-форме; СКН-форме; КН-форме, но не СКН-форме; ни в одной из перечисленных четырех форм.

а) $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$ ____________________

____

б) $(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg Q \wedge R)$ ____________________

____

в) $(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$ ____________________

г) $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$ ____________

д) $((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge \neg R)) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$ ____________________

1.41. Укажите единственную формулу из перечисленных, являющуюся *совершенным конъюнктивным одночленом* от переменных *P, Q, R, S:*

$\neg P \vee Q \vee \neg S \vee R$	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$
$P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg P$	$P \wedge \neg R \wedge \neg Q \wedge S$
$\neg P \wedge Q \wedge (R \vee \neg S)$	$\neg P \wedge \neg Q \wedge S \wedge \neg P \wedge R$

1.42. Укажите единственную формулу из перечисленных, являющуюся *совершенным дизъюнктивным одночленом* от переменных *P, Q, R, S:*

$\neg P \wedge \neg Q \wedge S \wedge \neg R$	$P \vee \neg Q \vee \neg S$
$\neg P \vee Q \vee R \vee \neg P \vee S$	$\neg P \vee Q \vee (R \wedge S)$
$\neg P \vee Q \vee \neg R \vee \neg S$	$\neg P \vee \neg Q \vee R$

1.43. Используя равносильные преобразования, приведите следующие формулы к *СДН-форме:*

а) $X \to Y \cong \neg X \vee Y \cong (\neg X \wedge 1) \vee (1 \wedge Y) \cong$
$\cong (\neg X \wedge (Y \vee \neg Y)) \vee ((X \vee \neg X) \wedge Y) \cong$
$\cong (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \cong$
$\cong (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y)$.

б) $X \vee Y \cong$ ______________________________

____

в) $(X \to Y) \to Z \cong$ ______________________________

____

____

____

г) $\neg(X \vee \mathbf{Z}) \wedge (X \to Y) \cong$ ______________________________

____

____

____

1.44. Используя равносильные преобразования, приведите следующие формулы к *СКН-форме*:

а) $\neg(X \to Y) \cong \neg(\neg X \vee Y) \cong \neg\neg X \wedge \neg Y \cong X \wedge \neg Y \cong$

$\cong (X \vee 0) \wedge (0 \vee \neg Y) \cong (X \vee (Y \wedge \neg Y)) \wedge ((X \wedge \neg X) \vee \neg Y) \cong$

____

____

б) $\neg X \wedge \neg Y \cong$ ______________________________

____

____

в) $(X \to Y) \to Z \cong$ ______________________________

____

____

____

____

г) $((X \to Y) \vee \neg Z) \to (X \vee (X \leftrightarrow Z)) \cong$ ______________________________

____

____

____

____

1.45. Укажите тот единственный набор значений переменных P, Q, R, S, на котором данный *совершенный конъюнктивный одночлен* принимает значение 1:

а) $P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg S$: $P=$ _____ $Q=$ _____ $R=$ _____ $S=$ _____

б) $\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge\neg S$: $P=$ _____ $Q=$ _____ $R=$ _____ $S=$ _____

в) $P\wedge Q\wedge R\wedge S$: $P=$ _____ $Q=$ _____ $R=$ _____ $S=$ _____

г) $P\wedge Q\wedge\neg R\wedge S$: $P=$ _____ $Q=$ _____ $R=$ _____ $S=$ _____

1.46. Укажите тот единственный набор значений переменных P, Q, R, S, на котором данный *совершенный дизъюнктивный одночлен* принимает значение 0:

а) $P\vee Q\vee\neg R\vee\neg S$: $P=$ _____, $Q=$ _____, $R=$ _____, $S=$ _____;

б) $P\vee Q\vee R\vee S$: $P=$ _____, $Q=$ _____, $R=$ _____, $S=$ _____;

в) $\neg P\vee\neg Q\vee R\vee\neg S$: $P=$ _____, $Q=$ _____, $R=$ _____, $S=$ _____;

г) $\neg P\vee Q\vee\neg R\vee\neg S$: $P=$ _____, $Q=$ _____, $R=$ _____, $S=$ _____;

1.47. Укажите тот единственный *совершенный конъюнктивный одночлен*, который принимает значение 1 на следующем наборе значений переменных P, Q, R, S:

а) $P=1,\ Q=1,\ R=1,\ S=1$: ____________________;

б) $P=0,\ Q=1,\ R=0,\ S=1$: ____________________;

в) $P=1,\ Q=1,\ R=1,\ S=0$: ____________________;

г) $P=0,\ Q=0,\ R=0,\ S=0$: ____________________;

д) $P=0,\ Q=0,\ R=1,\ S=0$: ____________________.

1. 48. Укажите тот единственный *совершенный дизъюнктивный одночлен*, который принимает значение 0 на следующем наборе значений *переменных* P, Q, R, S:

а) $P=1,\ Q=0,\ R=0,\ S=0$: ____________________;

б) $P=0,\ Q=0,\ R=0,\ S=0$: ____________________;

в) $P=0,\ Q=1,\ R=1,\ S=0$: ____________________;

г) $P=1,\ Q=1,\ R=1,\ S=1$: ____________________;

д) $P=0,\ Q=0,\ R=0,\ S=1$: ____________________.

1.49. Найдите *СДН-формы* для формул F, G, H, K, L, заданных следующими таблицами своих значений:

P	***Q***	***R***	***F***	***G***	***H***	***K***	***L***
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**

а) $F(P, Q, R) \cong$ ____________________ ;

б) $G(P, Q, R) \cong$ ____________________ ;

в) $H(P, Q, R) \cong$ ____________________ ;

г) $K(P, Q, R) \cong$ ____________________

____

д) $L(P, Q, R) \cong$ ____________________

____

1.50. Найдите *СКН-формы* для формул ***F, G, H, K, L,*** заданных таблицами значений, приведенными в предыдущей задаче:

а) $F(P, Q, R) \cong$ ____________________ ;

____

б) $G(P, Q, R) \cong$ ____________________ ;

____

в) $H(P, Q, R) \cong$ ____________________ ;

____

г) $K(P, Q, R) \cong$ ____________________

____

д) $L(P, Q, R) \cong$ ____________________ .

1.51. Определите, для какой из формул, записанных справа, формула, записанная слева, является *СДН-формой*.

$(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$

$X \leftrightarrow Y$
$X \rightarrow Y$
$X \wedge Y$
$\neg X \vee \neg Y$
$X \vee Y$

1.52. Определите, для какой из формул, записанных справа, формула, записанная слева, является *СКН*-формой.

$(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y)$

$X \rightarrow Y$
$\neg X \wedge \neg Y$
$X \leftrightarrow Y$
$X \wedge Y$
$\neg X \vee \neg Y$

1.53. Определите, для какой из формул, записанных справа, формула, записанная слева, является *СДН*-формой.

$(X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$

$Z \rightarrow (X \wedge Y)$
$(X \wedge Z) \rightarrow Y$
$(X \wedge Y) \rightarrow Z$
$\neg((X \vee Y) \rightarrow Z)$
$\neg(X \wedge Y) \rightarrow Z$

1.54. Определите, для какой из формул, записанных справа, формула, записанная слева, является *СКН-формой.*

$(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z)$

$(X \wedge Z) \rightarrow (Y \leftrightarrow Z)$
$(X \leftrightarrow Y) \rightarrow (X \wedge Z)$
$(X \vee Y) \rightarrow (X \wedge Z)$
$(Y \leftrightarrow Z) \rightarrow (X \vee Y)$

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ ФОРМУЛ

1.55. Формулы $F_i\ (P, Q, R)$ и $G_j\ (P, Q, R)$ (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, ... , 11) от трёх переменных заданы своими таблицами истинностных значений:

P	Q	R	F_1	F_2	F_3	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}	G_{11}
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
										нет						

Выясните, какие из формул G_j (j = 1, ... , 11) являются *логическими следствиями* трех формул F_1, F_2, F_3 ?

Решение. Например, формула G_5 не является логическим следствием формул F_1, F_2, F_3, так как при $P = 1$, $Q = 0$, $R = 1$ все формулы F_1, F_2, F_3 принимают значение 1, а формула G_5 принимает значение 0.

1.56. Докажите, что имеет место следующее *логическое следование*, руководствуясь определением этого понятия (т.е. составив таблицы истинности обеих формул). Выясните, будут ли верны обратные следования.

а) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R \models P \rightarrow (Q \rightarrow R)$;

P	Q	R	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

б) $(P \wedge Q) \vee R \models P \vee (Q \to R)$;

P	Q	R	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

в) $(P \to Q) \wedge R \models (P \vee \neg R) \to Q$;

P	Q	R	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

г) $(P \to Q) \to R \models (P \wedge Q) \to R$;

P	Q	R	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

1.57. Расположите формулы так, чтобы из каждой *логически следовали* все, стоящие после нее:

а) $P \vee Q$, $\neg(P \to (Q \to P))$, $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$, $\neg P \leftrightarrow Q$, $\neg P \wedge Q$;

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \to (Q \to P))$	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$	$\neg P \leftrightarrow Q$	$\neg P \wedge Q$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Ответ : $\neg(P \to (Q \to P)) \models \neg P \wedge Q \models \neg P \leftrightarrow Q \models \neg(\neg P \wedge \neg Q)$ $\models P \vee Q$.

б) $P \to Q$, $\neg P \wedge \neg Q$, $P \to (Q \to (P \wedge Q))$, $Q \vee \neg P$, $P \leftrightarrow Q$;

P	Q	
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Ответ :

в) $(P \to Q) \vee P$, $\neg(P \to Q) \wedge \neg(Q \to P)$, $\neg(P \leftrightarrow Q)$, $\neg(P \wedge Q)$, $\neg P \wedge Q$.

P	Q	
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Ответ :

1.58. *Методом от противного* выясните, верны ли следующие логические следования:

а) $F \to G$, $K \to \neg H$, $H \vee \neg G$ $\models$ $F \to \neg K$;

Решение . Предположим, что следование не верно, т.е. $F \to G = 1$, $K \to \neg H = 1$, $H \vee \neg G = 1$, а $F \to \neg K = 0$. Из последнего равенства получаем: $F = 1$, $K = 1$. Тогда из $F = 1$ и $F \to G = 1$ следует $G = 1$; из $K \to \neg H = 1$ и $K = 1$ следует $H = 0$. Тогда $H \vee \neg G = 0 \vee \neg 1 = 0 \vee 0 = 0$, что противоречит предположению. Значит, предположение не верно, т.е. *следование выполняется*.

б) $\boldsymbol{F \vee G,\ F \to \neg K,\ K \vee H \ \models\ H \vee G}$;

Решение . ____

____

____

____

в) $\boldsymbol{F \to (\neg K \to M),\ (\neg H \wedge L) \to \neg Q,\ Q \to F \ \models\ (F \wedge L) \to \neg M}$;

Решение . ____

____

____

____

г) $\boldsymbol{F \to G,\ \neg K \to \neg L,\ S \to H,\ \neg F \to \neg K,\ H \to L \ \models\ S \to G}$.

Решение . ____

____

____

____

1.59. Докажите, что:

а) если $\boldsymbol{F, G \models H}$ и $\boldsymbol{\models F}$, то $\boldsymbol{G \models H}$;

Решение . ____

____

____

б) если $\boldsymbol{\models G}$, то для любой формулы $\boldsymbol{F}$ справедливо $\boldsymbol{F \models G}$;

Решение . ____

____

в) если $\boldsymbol{F}$ – тождественно ложная формула, то для любой формулы $\boldsymbol{G}$ справедливо $\boldsymbol{F \models G}$.

Решение . ____

1.60. Докажите, что:

а) $F_1, F_2, \ldots, F_m \models G$ тогда и только тогда, когда формула $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m \wedge \neg G$ тождественно ложна;

б) формула F тождественно ложна тогда и только тогда, когда $F \models K$ и $F \models \neg K$ для некоторой формулы K или, если $F \models K$ и $F \models \neg K$, то $\models \neg F$;

в) справедливо логическое следование: $G \vee F,\ \ H \vee \neg F \models G \vee H,$ называемое *правилом резолюции*; при этом пишут:

$$G \vee H = Res_F(G \vee F,\ H \vee \neg F)$$

и формулу $G \vee H$ называют *резольвентой* формул $G \vee F$ и $H \vee \neg F$ по F.

1.61. Методом резолюций выясните, верны ли следующие логические следования:

а) $K \vee L,\ \ K \rightarrow M,\ \ L \rightarrow N \models M \vee N$.

Решение. Составим конъюнкцию посылок и отрицания следствия и приведём полученную формулу к конъюнктивной нормальной форме?

$$(K \vee L) \wedge (K \rightarrow M) \wedge (L \rightarrow N) \wedge \neg (M \vee N) \cong$$
$$\cong (K \vee L) \wedge (\neg K \vee M) \wedge (\neg L \vee N) \wedge \neg M \wedge \neg N.$$

Рассмотрим множество полученных дизъюнктов (дизъюнктивных одночленов): $\{K \vee L,\ \neg K \vee M,\ \neg L \vee N,\ \neg M,\ \neg N\} = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$.

Применяя правило резолюции (задача 1.60 в), получим из этого множества формул противоречие (пустую формулу):

$\Phi_1 = Res_M(D_2, D_4) = Res_M(\neg K \vee M,\ \neg M) = \neg K,$

$\Phi_2 = Res_N(D_3, D_5) = Res_N(\neg L \vee N,\ \neg N) = \neg L,$

$\Phi_3 = Res_K(\Phi_1, D_1) = Res_K(\neg K,\ K \vee L) = L,$

$\Phi_4 = Res_L(\Phi_2, \Phi_3) = Res_L(\neg L,\ L) = \varnothing$.

Следовательно, данное логическое следование выполняется.

б) $Y \rightarrow Z,\ \ X \rightarrow V,\ \ X \vee \neg Z \models V \vee \neg Y;$

Решение .

в) $\neg S \to C,\quad \neg C \vee \neg D,\quad D \vee L,\quad \neg L \models S$;

Решение

.

г) $P \to R,\quad Q \to S,\quad \neg R \vee \neg S \models \neg P \vee \neg Q$;

Решение

.

д) $(F \wedge G) \to \neg R,\ (F \wedge H) \to K,\ F \to \neg K, (F \wedge \neg G) \to H \models F \to \neg R.$

Решение

ПРИМЕНЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

1.62. Найдите все такие *неравносильные* между собой формулы $F(X, Y)$ от двух переменных X и Y, чтобы следующая формула была тавтологией:

а) $((\neg X \vee \neg Y) \wedge F) \to (F \to (X \wedge Y))$;

б) $((X \to Y) \vee F) \to (F \wedge (Y \vee \neg X))$;

в) $((F \wedge Y) \to \neg X) \to ((X \to \neg Y) \to F)$.

Решение. а) Составьте сначала таблицу значений данной формулы, которые будут зависеть от соответствующих значений искомой формулы $F(X, Y)$:

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg X \vee \neg Y$	$(\neg X \vee \neg Y) \wedge F$	$X \wedge Y$	$F \to (X \wedge Y)$	Данная формула
0	0	1	1	1	$F(0, 0)$			
0	1	1	0	1	$F(0, 1)$			

1	**0**	**0**	**1**	**1**	$F(1,0)$			
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**			

Затем, исходя из условия задачи, согласно которому в последнем столбце должны стоять только единицы, определите, какие значения должна принимать искомая формула $F(X, Y)$ на каждом наборе значений переменных, и запишите их в таблицу:

X	Y	$F(X, Y)$	F_1	F_2
0	**0**			
0	**1**			
1	**0**			
1	**1**			

Оказывается, условию задачи удовлетворяют две (с точностью до равносильности) формулы. Найдите их вид, исходя из полученных таблиц их значений и используя совершенные нормальные формы:

F_1 (X, Y) $\cong$ ______________________________ ;

F_2 (X, Y) $\cong$ ______________________________ .

б) , в) Вложите в тетрадь листки с решениями этих задач.

1.63. Найдите все такие неравносильные между собой формулы $F(X, Y, Z)$ от трёх переменных X, Y, Z, чтобы выполнялась равносильность:

а) $(X \to Z) \leftrightarrow F \;\cong\; (X \wedge \neg Y) \to Z$;

б) $X \leftrightarrow \neg F \;\cong\; (X \wedge Y) \to Z$;

в) $(F \leftrightarrow Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \;\cong\; (X \wedge \neg Y) \vee Z$.

Решение. а) При $Z = 1$ данная равносильность превращается в следующую $F(X, Y, 1) \cong 1$, откуда вытекает, что:

F(,   , 1) = F(,   , 1) =   **Заполните**

F(,   , 1) = F(,   , 1) = 1 .   **пробелы !**

При $Z = 0$ данная равносильность принимает вид:

____

____

____

Продолжите означивание переменных. В итоге составьте таблицу значений для формулы $F(X, Y, Z)$:

X	Y	Z	$F(X, Y, Z)$
0	**0**	**0**	
0	**0**	**1**	
0	**1**	**0**	

0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Используя совершенную ____________

____

нормальную форму, находим саму формулу:

F **(*X*, *Y*, *Z*)** $\cong$ ______________________

Проверка: ______________________

____

____

1.64. Найдите все, *не являющиеся тавтологиями* и *неравносильные* между собой формулы ***F*** **(*X*, *Y*)** , зависящие от переменных X и Y, являющиеся логическими следствиями следующих формул:

а) $\neg X \to Z$ и $\neg Y \to \neg Z$;

б) $X \to Y$, $Y \to Z$ и $X \vee Z$;

в) $\neg Y \leftrightarrow \neg Z$, $X \vee (Y \wedge Z)$ и $\neg X \to Z$.

Р е ш е н и е. а) Составим таблицы значений данных формул:

X	Y	Z	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg Z$	$\neg X \to Z$	$\neg Y \to \neg Z$	
0	0	0						
0	0	1						
0	1	0						
0	1	1						
1	0	0						
1	0	1						
1	1	0						
1	1	1						

Выделите те строки (и те значения переменных X и Y в них), в которых обе формулы $\neg X \to Z$ и $\neg Y \to \neg Z$ принимают значение 1 . Чтобы быть их логическим следствием, искомая формула ***F*****(*X*, *Y*)** при этих значениях X и Y также должна принимать значение 1. Учитывая это, составьте таблицу значений для формулы **F (*X*, *Y*)** :

X	Y	$F(X, Y)$	F_1	F_2
0	0			1
0	1			1
1	0			1

Условию задачи будут удовлетворять две (с точностью до равносильности) формулы, но одна из них является тавтологией. Вторую найдите с помощью со-

1	**1**			**1**

вершенной ____________________ нормальной формы:

$F_1(X, Y) \cong$ ____

1.65. Найдите все, *неравносильные между собой* и *не тождественно ложные* формулы F, зависящие лишь от указанных пропозициональных переменных, так, чтобы выполнялось следующее логическое следование:

а) $X \to \neg Y$, $F(X, Z) \models (X \wedge Z) \vee Y$;

б) $X \vee \neg Z$, $Y \to (X \wedge Z)$, $F(X, Y) \models \neg Y \vee \neg Z$;

в) $X \to Y$, $F(X, Y, Z) \models X \wedge \neg Z$.

Решение. а) Составим таблицы значений данных формул:

X	Y	Z	$\neg Y$	$X \wedge Z$	$X \to \neg Y$	$(X \wedge Z) \vee Y$	
0	**0**	**0**					
0	**0**	**1**					
0	**1**	**0**					
0	**1**	**1**					
1	**0**	**0**					
1	**0**	**1**					
1	**1**	**0**					
1	**1**	**1**					

Выделите те строки (и те значения переменных X и Z в них), в которых первая формула-посылка $X \to \neg Y$ принимают значение 1 , а формула-следствие $(X \wedge Z) \vee Y$ принимает значение 0. Тогда при этих значениях X и Z искомая формула-посылка **F**(X, Z) должна принимать значение 0, чтобы логическое следование имело место. Учитывая это, составьте таблицу значений для формулы $F(X, Z)$:

X	Y	$F(X, Z)$	F_1	F_2
0	**0**		**0**	
0	**1**		**0**	
1	**0**		**0**	
1	**1**		**0**	

Условию задачи будут удовлетворять две (с точностью до равносильности) формулы, но одна из них тождественно ложна. Вторую найдите с помощью совершенной____________________ нормальной формы:

$F_2(X, Z) \cong$ ____

2. Применения алгебры высказываний

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

$\boxed{A \to B}$	A достаточно для B B необходимо для A

2.1. Вставьте слова "*необходимо, но не достаточно*", "*достаточно, но не необходимо*", "*необходимо и достаточно*", "*не необходимо и не достаточно*", чтобы полученные высказывания стали истинными:

а)	**Для делимости числа на 15**		**чтобы оно делилось на 3.**
б)	**Для чётности натурального числа n**		**чтобы число $3n$ было чётным.**
в)	**Для делимости числа ab на c**		**чтобы a и b делились на c.**
г)	**Для делимости числа $a + b$ на c**		**чтобы a и b делились на c.**
д)	**Для $x^2 + y^2 = 0$**		**чтобы $x = 0$ и $y = 0$.**
е)	**Для $x^2 - y^2 = 0$**		**чтобы $x = 0$ и $y = 0$.**
ж	**Для того, чтобы выпуклый четырёхугольник был прямоугольником,**		**чтобы его диагонали были равны.**
з)	**Для того, чтобы выпуклый четырёхугольник был параллелограммом,**		**чтобы его диагонали в точке пересечения делились пополам.**
и)	**Для того, чтобы треугольник был прямоугольным,**		**чтобы две его стороны были равны.**

к)	**Чтобы прямая была перпендикулярна к плоскости,**		**чтобы она была перпендикулярна какой-либо прямой этой плоскости.**
л)	**Для** $x^2 = y^2$		**чтобы** $x = y$ **.**
м)	**Для** $x < y$		**чтобы** $\|x\| < \|y\|$

2.2. Из следующих условий выберите то, которое является *достаточным, но не необходимым* условием того, что треугольник равнобедренный:

Два внешних угла тругольника равны между собой.	**Две высоты треугольника равны между собой.**
Две медианы треугольника равны между собой.	**Три внутренних угла треугольника равны между собой.**

Два внутренних угла треугольника равны между собой.

2.3. Определите *строение* каждой из следующих теорем, выделив в них элементарные утверждения и записав их в виде формул алгебры высказываний:

1.	**Необходимым условием делимости числа на 2 и 3 является его делимость на 6.**	
2.	**Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам.**	
3.	**Если параллелограмм не является ромбом, то его диагонали либо не перпендикулярны, либо не делятся пополам точкой пересечения.**	
4.	**Достаточным условием равенства нулю произведения двух чисел является равенство нулю одного из них.**	
5.	**Для того, чтобы у треугольника два внешних угла были равны, необходимо, чтобы он был равнобедренным.**	

Необходимым условием отличия от нуля произведения двух чисел является неравенство нулю каждого из них.	

Определите, какая из пяти первых теорем имеет одинаковое строение с последней.

ПРАВИЛЬНЫЕ И НЕПРАВИЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

Два типа правильных (и весьма распространенных) умозаключений:

$$\frac{X \to Y,\quad X}{Y}$$

Modus ponens
Утверждающий модус

$$\frac{X \to Y,\ \neg Y}{\neg X}$$

Modus tollens
Отрицающий модус

2.4. По одному из приведенных правил сделайте соответствующее *умозаключение* и укажите правило, по которому оно сделано:

а) **Если будет засуха, посевы погибнут.**
Посевы не погибли.

Следовательно, ________________________________

б) **Если бухта замерзает, то корабли не могут войти в нее.**
Бухта замерзла.

Следовательно, ________________________________

в) **Если будет идти дождь, то экскурсия в парк не состоится.**
Экскурсия состоялась.

Следовательно, ________________________________

2.5. Докажите, что умозаключения по правилам:

а) $X \to Y,\ Y \models X$,

б) $X \to Y, \neg X \models \neg Y$ **не верны !**

Решение. а) ________________________________

____

Решение. б) ________________________________

____

2.6. Выявите *схему* каждого умозаключения и определите, верно оно или нет.

	Умозаключение	Его схема
1.	**Если растение лекарственно, то его следует охранять. Растение не лекарственно. Следовательно, его не следует охранять.**	
2.	**Если курок ружья сломан, то ружьё даст осечку. Ружьё дало осечку. Следовательно, его курок сломан.**	
3.	**Если к воскресенью снег не растает, то мы не пойдём на прогулку в лес. Мы идём на прогулку в лес. Следовательно, снег растаял.**	
4.	**Если наступает осень, то птицы улетают на юг. Птицы не улетели на юг. Следовательно, осень ещё не наступила.**	

2.7. Из двух утверждений $\neg A \to B$ и B:

следует утверждение A	нет, *не следует*, т.к. при $\neg A \to B = 1$ и $B = 1$ вполне может быть $A = 0$.
следует утверждение ¬A	____________________
не следует утверждение ¬B → A	____________________
не следует утверждение ¬A	____________________
следует утверждение B → ¬A	____________________

Отметьте *истинное* утверждение.

2.8. Имеется два утверждения:

Если туман не рассеется, то вылет самолета будет задержан.	**¬A → B**
Туман рассеялся.	**A**

Тогда отсюда:

(1) следует, что вылет не будет задержан. ☐

____

(2) следует, что вылет будет задержан. ☐

____

(3) следует, что если вылет будет задержан, то туман не рассеялся.

(4) не следует, что если вылет не будет задержан, то туман рассеялся.

Отметьте *истинное* утверждение.

2.9. Докажите, что справедливы следующие логические следования, называемые **правилами логических умозаключений**:

а) $F \to G, \quad G \to H \models \quad F \to H$ (правило цепного заключения)

б) $F \to G \models \quad \neg G \to \neg F$ (правило контрапозиции)

в) $(F \wedge H) \to G \models \quad (\neg G \wedge H) \to \neg F$
(правило расширенной контрапозиции)

г) $F_1 \to G, \quad F_2 \to G, \quad F_1 \vee F_2 \models \quad G$
(простая конструктивная дилемма)

д) $F_1 \to G_1, \quad F_2 \to G_2, \quad F_1 \vee F_2 \models \quad G_1 \vee G_2$
(сложная конструктивная дилемма)

е) $F \to G_1, \quad F \to G_2, \quad \neg G_1 \vee \neg G_2 \models \quad \neg F$
(простая деструктивная дилемма)

ж) $F_1 \to G_1, \quad F_2 \to G_2, \quad \neg G_1 \vee \neg G_2 \models \quad \neg F_1 \vee \neg F_2$
(сложная деструктивная дилемма)

з) $F \to (G \to H) \models (F \wedge G) \to H$,

$(F \wedge G) \to H \models F \to (G \to H)$

(правила объединения и разъединения посылок)

и) $F \to (G \to H) \models G \to (F \to H)$

(правило перестановки посылок)

к) $F \to H,\quad G \to H \models (F \vee G) \to H$ **(правило разбора случаев)**

2.10. Для следующих умозаключений определите, по какому из приведённых в предыдущей задаче 2.10 правил оно осуществлено:

а) Если прямая *l* перпендикулярна двум прямым a и b, лежащим в плоскости П, и прямые *a* и *b* не параллельны, то прямая l перпендикулярна всякой прямой c, лежащей в плоскости П.

Если прямая *l* перпендикулярна двум прямым *a* и *b*, лежащим в плоскости П, и прямая *l* не перпендикулярна некоторой прямой c, лежащей в этой плоскости, то прямые *a* и *b* параллельны.

б) Если четырёхугольник является квадратом, то его диагонали перпендикулярны.

Если четырёхугольник является квадратом, то его диагонали равны.

Диагонали четырёхугольника ***ABCD*** либо не перпендикулярны, либо не равны.

Четырёхугольник ***ABCD*** – не квадрат.

в) Если четырёхугольник – параллелограмм, то точка пересечения его диагоналей делит их пополам.

Если точка пересечения диагоналей четырёхугольника делит их пополам, то четырёхугольник обладает центральной симметрией.

Если четырёхугольник – параллелограмм, то он обладает центральной симметрией.

г) Если четырёхугольник является параллелограммом, то
его диагонали точкой пересечения делятся пополам.
Если четырёхугольник является равнобочной трапецией, то
его диагонали равны.
Четырёхугольник ***ABCD*** – либо параллелограммом, либо равнобочная трапеция.

Диагонали четырёхугольника ***ABCD*** либо точкой пересечения делятся пополам,
либо равны.

д) Если радиус окружности проведён в точку касания окружности и прямой, то
он перпендикулярен этой прямой.

Если радиус окружности не перпендикулярен прямой, то он проведён
не в точку касания окружности и прямой.

е) Если две окружности равны, то, если хорда одной окружности больше
хорды другой окружности, то первая хорда расположена ближе к центру
своей окружности, чем вторая – к центру своей окружности.

Если две окружности равны и хорда одной окружности больше
хорды другой окружности, то первая хорда расположена ближе к центру
своей окружности, чем вторая – к центру своей окружности.

ж) Если четырёхугольник является ромбом, то его диагонали перпендикулярны.
Если четырёхугольник является квадратом, то его диагонали перпендикулярны.
Четырёхугольник ***ABCD*** – ромб или квадрат.

Диагонали четырёхугольника ***ABCD*** перпендикулярны.

з) Если четырёхугольник является параллелограммом, то
его диагонали точкой пересечения делятся пополам.
Если четырёхугольник является равнобочной трапецией, то
его диагонали равны.
Диагонали четырёхугольника ***ABCD*** либо не делятся пополам точкой пересечения,
либо не равны.

Четырёхугольник ***ABCD*** – либо не параллелограммом, либо
не равнобочная трапеция.

и) Если треугольник равнобедренный, то в нём есть два равных угла.

Если в треугольнике нет двух равных углов, то он не равнобедренный.

к) Если четырёхугольник – квадрат, то он – ромб.

Если четырёхугольник – ромб, то он – параллелограмм.

Если четырёхугольник – квадрат, то он – параллелограмм.

2.11. Имеется утверждение:

Если решётка дистрибутивна, то она модулярна. ☐

Из следующих утверждений выберите то, которое *следует* из данного.

Достаточным условием дистрибутивности решётки является её модулярность.	
Необходимым условием немодулярности решётки является ее недистибутивность.	
Решётка модулярна, если она не дистрибутивна.	
Достаточным условием немодулярности решётки является её дистибутивность.	
Необходимым условием недистрибутивности решётки является её немодулярность.	

2.12. Выясните, справедливо ли следующее рассуждение.

Я пойду или в кино на новую кинокомедию (A), или на занятие по математической логике (B). Если я пойду в кино на новую кинокомедию, то я от всей души посмеюсь (C). Если я пойду на занятие по математической логике, то испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений (D). Следовательно, либо я от всей души посмеюсь, либо испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений.

Решение. Учитывая буквенные обозначения высказываний, приведенные в условии, требуется выяснить, справедливо ли следующее логическое следование: $A \vee B$, $A \to C$, $B \to D$ $\models C \vee D$. Предположим, что следование не верно, т. е. найдутся такие высказывания $K, L, M, N,$ что $K \vee L = 1$, $K \to M = 1$, $L \to N = 1$, но $M \vee N = 0$. Получите отсюда противоречие: ____________________

____

____

Следовательно, данное логическое следование ____________________

и приведённое рассуждение ______________________________

2.13. Имеются три утверждения:

1.Все колибри имеют яркое оперение.	
2. Ни одна крупная птица не питается нектаром.	
3. Птицы, которые не питаются нектаром, имеют неяркое оперение.	

Из следующих утверждений выберите то, которое *следует* из трех данных (в пустые места впишите формулы, выражающие структуру данного высказывания):

Колибри не питается нектаром.	
Маленькие птицы имеют яркое оперение	
Колибри — маленькая птица	
Питающаяся нектаром птица — колибри.	
Все маленькие птицы - колибри.	

Обоснуйте свой выбор: ____

____

____

2.14. Имеются три утверждения:

1. Яркие цветы всегда благоухают.	
2. Я не люблю цветы, выросшие не на открытом воздухе.	
3. Ни один цветок, выросший на открытом воздухе, не имеет бледной окраски.	

Из следующих утверждений выберите то, которое *следует* из трех данных (в пустые места впишите формулы, выражающие структуру данного высказывания):

Благоухающие цветы выросли на открытом воздухе.	
Я люблю только неяркие цветы.	
Всякий благоухающий цветок ярок.	
Всякий яркий цветок вырос на открытом воздухе.	
Я люблю только благоухающие цветы.	

Обоснуйте свой выбор: ____

"ЛОГИЧЕСКИЕ" ЗАДАЧИ

2.15. При составлении расписания уроков на один день учителя математики, истории и литературы высказали следующие пожелания: математик просил поставить ему или первый, или второй урок; историк — или первый, или третий; учитель литературы — или второй, или третий. Как составить расписание, чтобы учесть все пожелания?

Решение. Запишем требование задачи в символическом виде и преобразуем полученное выражение равносильным образом, используя равносильности (законы) алгебры высказываний:

$(М_1 \vee М_2) \wedge (И_1 \vee И_3) \wedge (Л_2 \vee Л_3) \cong$

$\cong ((М_1 \wedge И_1) \vee (М_2 \wedge И_1) \vee (М_1 \wedge И_3) \vee (М_2 \wedge И_3)) \wedge (Л_2 \vee Л_3) \cong$

$\cong (И_1 \wedge М_2 \wedge (Л_2 \vee Л_3)) \vee (М_1 \wedge И_3 \wedge (Л_2 \vee Л_3)) \vee (М_2 \wedge И_3 \wedge (Л_2 \vee Л_3)) \cong$

$\cong (И_1 \wedge М_2 \wedge Л_2) \vee (И_1 \wedge М_2 \wedge Л_3) \vee (М_1 \wedge И_3 \wedge Л_2) \vee (М_1 \wedge И_3 \wedge Л_3) \vee$

$\vee (М_2 \wedge И_3 \wedge Л_2) \vee (М_2 \wedge И_3 \wedge Л_3) \cong (И_1 \wedge М_2 \wedge Л_3) \vee (М_1 \wedge Л_2 \wedge И_3)$.

Таким образом, возможны два варианта составления расписания: история, математика, литература или математика, литература, история.

2.16. Эта задача аналогична предыдущей. Но здесь четыре предмета — математика, физика, химия, география и следующие пожелания. Если 1-ый урок математика, то 3-ий урок не физика, а химия 2-ой, либо 4-ый урок. Если физика не 1-ый урок, то математика 1-ый урок, а химия - 2-ой. На 2-ом уроке физик занят в другом классе. Химик не согласен на 2-ой урок, если физика — на 1-ом, и, кроме того, химик отказывается от 4-го урока.

[**Ответ:** *возможны три варианта*: МХГФ, ФМХГ, ФГХМ.]

Решение.

2.17. Для полярной экспедиции из восьми претендентов A, B, C, D, E, F, G и H надо отобрать шесть специалистов: биолога, гидролога, синоптика, радиста, механика и врача. Обязанности биолога могут выполнять E и G, гидролога — B и F, синоптика — F и G, радиста — C и D, механика — C и H, врача — A и D. Хотя некоторые претенденты владеют двумя специальностями, в экспедиции каждый сможет выполнять только одну. Кого и кем следует взять в экспедицию, если F не может ехать без B, D — без H и без C, C не может ехать одновременно с G, а A не может ехать вместе с B?

[**Указание.** *Запишите символически условия того, кто с кем и без кого не может ехать. Образуйте их конъюнкцию и приведите ее равносильными преобразованиями к конъюнктивному одночлену. Вложите в тетрадь листок с решением этой задачи.*]

2.18. Шесть спортсменов — Адамов, Белов, Ветров, Глебов, Дронов, Ершов - в проходившем соревновании заняли шесть первых мест, причем ни одно место не было разделено между ними. О том, кто какое место занял, были получены такие высказывания: 1) "Кажется, первым был Адамов, а вторым — Дронов"; 2) "Нет, на первом месте был Ершов, а на втором — Глебов"; 3) "Вот так болельщики! Ведь Глебов был на третьем месте, а Белов — на четвертом"; 4) "И вовсе не так: Белов был пятым, а Адамов — вторым"; 5) "Все вы перепутали: пятым был Дронов, перед ним — Ветров". Известно, что в высказывании каждого болельщика одно утверждение истинное, а другое ложное. Определите, какое место занял каждый из спортсменов.

[**Указание.** *Рассмотрите высказывания*: A_i: "Адамов занял i-е место" (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6). *Аналогичные значения имеют символы:* B_i, V_i, G_i, D_i, E_i. *Высказывания болельщиков представьте в виде дизъюнкций. Все они будут истинны. Рассмотрите конъюнкцию этих истинных дизъюнкций. Преобразуйте эту конъюнкцию и, учитывая ее истинность, выведите распределение мест между спортсменами*.]

Решение. ____

____

____

____

____

____

____

2.19. Перед началом забегов зрители обсуждали скаковые возможности трех лучших лошадей с кличками "Абрек", "Ветер", "Стрелок".

— Победит или "Ветер", или "Стрелок", — сказал один зритель.

— Если "Ветер" будет вторым, то победа достанется "Абреку", — сказал другой болельщик.

— Много вы понимаете в лошадях, — возмутился третий болельщик. — Вторым придет "Ветер" или "Абрек".

— А я вам скажу, — вмешался четвертый болельщик, — что если "Ветер" придет третьим, то "Стрелок" не победит.

После забега оказалось, что три лошади "Абрек", "Ветер" и "Стрелок" заняли три первых места, не деля между собой ни одного из мест, и что все четыре предсказания болельщиков были правильными. Как закончился забег?

[**Ответ:** В, А, С]

Решение. ____

____

____

____

____

____

2.20. В санатории на берегу моря отдыхает семья: отец, мать, их сын Сергей и их дочери Даша и Катя. До завтрака члены семьи часто купаются в море, причем, известно, что если отец утром отправляется купаться, то с ним обязательно идут мать и сын; если Сергей идет купаться, то Даша отправляется с ним; Катя купается тогда и только тогда, когда купается мать. Каждое утро по меньшей мере один из родителей непременно купается. Известно, что в то утро купалась в море только одна из дочерей. Спрашивается, кто из членов семьи купался в море в то утро?

[**Указание.** *Рассмотрите высказывания* О, М, С, Д *и* К. *Запишите все условия задачи в символической форме. Все полученные высказывания истинны. Следовательно, истинна и конъюнкция этих высказываний. Составьте эту конъюнкцию и упростите ее с помощью равносильных преобразований. В результате получится совершенный конъюнктивный одночлен, истинность которого укажет на то, какие из введенных высказываний истинны, а какие ложны.*

Ответ: *в то утро купались мать и Катя.*]

Решение. ____

____

____

____

____

____

____

3. Булевы функции

<u>Булева функция</u> - это функция, заданная на двухэлементном множестве {0, 1} и принимающая значения в том же двухэлементном множестве {0, 1}.

3.1. Перечислите все булевы функции от *одного аргумента*, записав их значения и названия в таблицу:

	Ф у н к ц и и			
	0	**x**	**x'**	**1**
Аргумент	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0				
1				

3.2. Вспомните названия всех булевых функций от *двух аргументов* и впишите их в пустые клетки таблицы:

		Ф		*у*		*н*		*к*		*ц*		*и*		*и*			
		0	•	→'	x	←'	y	+	∨	↓	↔	y'	←	x'	→	|	1
x	y	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

3.3. От каждой булевой функции из левого столбца проведите стрелку к той булевой функции из правого столбца, которой она *равна*:

$x \mid y$	$(x \leftrightarrow y)'$
$x \downarrow y$	$(x \to y)'$
$x + y$	$(x \vee y)'$
	$(x + y)'$
	$(x \bullet y)'$

3.4. От каждой булевой функции из левого столбца проведите стрелку к той булевой функции из правого столбца, которой она *равна*:

$x \bullet y$	$(x' \vee y)(x \vee y')$
$x \to y$	$x' \vee y'$
$x \leftrightarrow y$	$(x' \vee y)' \vee (x \vee y')'$
$x + y$	$(x' \vee y')'$
$x \downarrow y$	$x' \vee y$
$x \mid y$	$(x \vee y)'$

3.5. Выразите основные булевы функции $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $+$, $\mid$, $\downarrow$ через функции $\bullet$ и $'$.

Решение. а) $x \vee y =$ ______________________________ ;

б) $x \to y =$ ______________________________ ;

в) $x \leftrightarrow y =$ ______________________________ ;

г) $x + y =$ ______________________________

д) $x \mid y =$ ______________________________ ;

е) $x \downarrow y =$ ______________________________

3.6. Выразите основные булевы функции $\vee$, $\bullet$, $\leftrightarrow$, $+$, $\mid$, $\downarrow$ через функции $\to$ и $'$.

Решение. а) $x \vee y =$ ______________________________ ;

б) $x \bullet y =$ ______________________________ ;

в) $x \leftrightarrow y =$ ______________________________ ;

г) $x + y$ = ______________________________

д) $x \mid y$ = ______________________________ ;

е) $x \downarrow y$ = ______________________________

3.7. Покажите, что основные булевы функции выражаются через функцию *штрих Шеффера* $\mid$ следующим образом:

а) $x' = x \mid x$;
б) $x \vee y = (x \mid x) \mid (y \mid y)$;
в) $x\,y = (x \mid y) \mid (x \mid y)$;
г) $x \to y = x \mid (y \mid y)$;
д) $x \leftrightarrow y = ((x \mid (y \mid y)) \mid (y \mid (x \mid x))) \mid ((x \mid (y \mid y)) \mid (y \mid (x \mid x)))$;
е) $x \downarrow y = ((x \mid x) \mid (y \mid y)) \mid ((x \mid x) \mid (y \mid y))$;
ж) $x + y = (x \mid (y \mid y)) \mid (y \mid (x \mid x))$.

Р е ш е н и е . **а)** Докажите это равенство, составив таблицу значений булевых функций в левой и правой частях равенства.

x	x'	$x \mid x$
0		
1		

б) Обоснуйте каждый шаг приводимых тождественных преобразований:

$x \vee y$ =	
$= (x' y')'$ =	
$= x' \mid y'$ =	
$= (x \mid x) \mid (y \mid y)$.	

в) $x \bullet y$ = ______________________________

г) $x \to y$ = ______________________________

д) $x \leftrightarrow y$ = ______________________________

____

е) $x \downarrow y$ = ______________________________

____

ж) $x + y$ = ______________________________

____

3.8. Выразите основные булевы функции ’ , $\bullet$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, | , + через функцию *стрелка Пирса* $\downarrow$.

Решение. **а)** $x' =$ ______________________________;

б) $x \bullet y =$ ______________________________;

в) $x \vee y =$ ______________________________;

г) $x \to y =$ ______________________________;

______________________________;

д) $x \leftrightarrow y =$ ______________________________;

____

____

____

______________________________;

е) $x \mid y =$ ______________________________;

____

____

______________________________;

ж) $x + y =$ ______________________________;

____

____

____

____

3.9. Докажите, что функция *сложение по модулю два* (*сумма Жегалкина*) обладает следующими свойствами:

а) $x + 0 = x$ ______________________________;

б) $x + x = 0$ ______________________________;

в) $x + y = y + x$ ______________________________;

г) $(x + y)z = xz + yz$ ______________________________

____

____

____

____

____

д) $(x + y) + z = x + (y + z)$ ______________________________

____

____

____;

____;

____

е) если $x + z = y + z$, то $x = y$ ______________________________

____

____;

ж) если $x = y + z$, то $y = x + z$ ______________________________

____

____

____;

з) $xy + xz + yz = xy \vee xz \vee yz$ ______________________________

____

____

____

____;

3.10. Выразите основные булевы функции $'$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $|$, $\downarrow$ через функцию *сумма Жегалкина* $+$, *конъюнкцию* $\bullet$ *и константу* 1 .

Решение. **а)** $x' =$ ______________________________;

б) $x \vee y =$ ______________________________;

в) $x \rightarrow y =$ ______________________________;

Г) $x \leftrightarrow y =$ ______________________________;

д) $x \mid y =$ ______________________________;

е) $x \downarrow y =$ ______________________________

____

3.11. Приведите примеры двух таких булевых функций от двух аргументов $f(x, y)$ и $g(x, y)$, для которых выполняются следующие два равенства:

$$f(x, y) \vee g(x, y) = f(x, y) \quad \text{и} \quad f(x, y) \bullet g(x, y) = g(x, y) .$$

____;

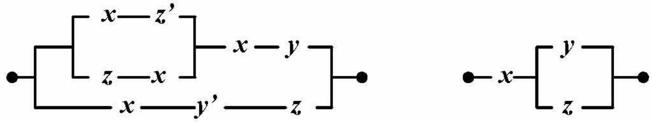
4. Применение булевых функций к релейно-контактным схемам

Анализ релейно-контактных схем

Задача анализа ***состоит в изучении характера работы данной схемы и ее упрощении.***

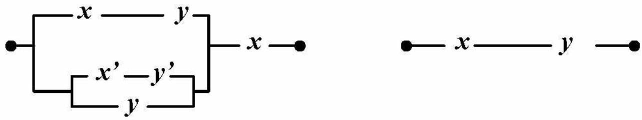
4.1. Проверьте *равносильность* следующих релейно-контактных схем:

а)



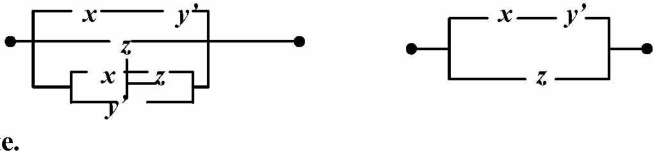
Решение. $\pi_1(x, y, z) = (xz' \vee xz)\, xy \vee xy'z = x(z' \vee z)xy \vee xy'z =$
$= xy \vee xy'z = x(y \vee y'z) = x(y \vee y')(y \vee z) = x(y \vee z) = \pi_2(x, y, z)$.
Следовательно, релейно-контактные схемы равносильны.

б)



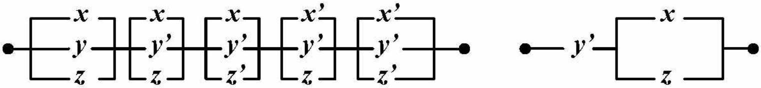
Решение.

в)



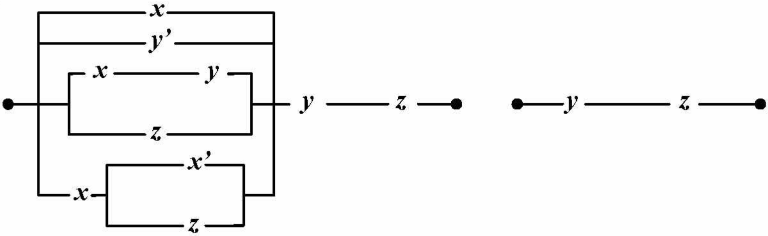
Решение.

г)



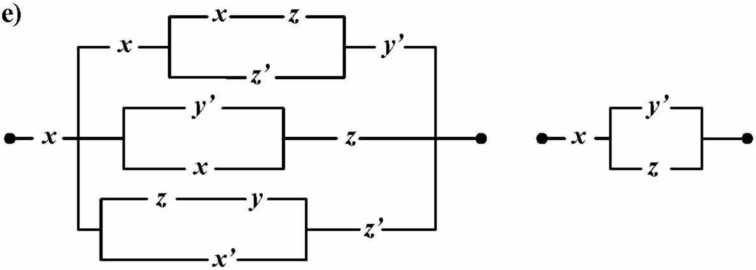
Решение.

д)



Решение.

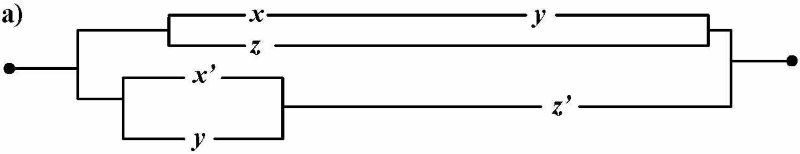
е)



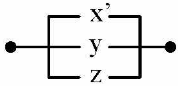
Решение.

4.2. Упростите следующие релейно-контактные схемы, составив их функции проводимости и преобразовав их к наиболее простому виду:

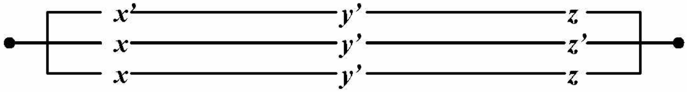
а)



Решение. $\pi(x, y, z) = (xy \vee z) \vee (x' \vee y)z' = xy \vee z \vee (x' \vee y)z' =$
$= xy \vee (z \vee x' \vee y)(z \vee z') = xy \vee z \vee x' \vee y = (xy \vee y) \vee z \vee x' = y \vee z \vee x'$.
Упрощенная релейно-контактная
схема имеет вид:

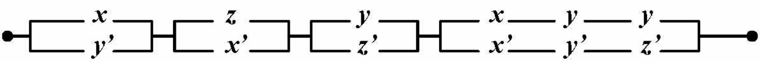


б)



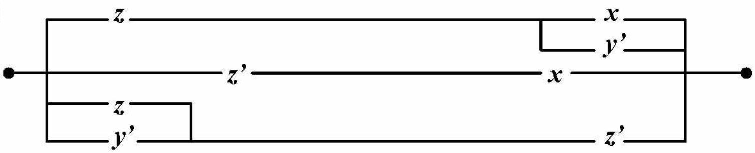
Решение.

в)



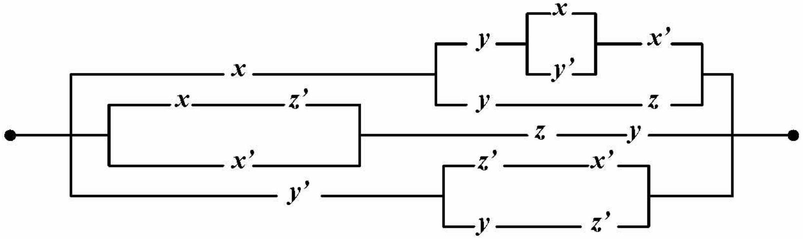
Решение.

г)



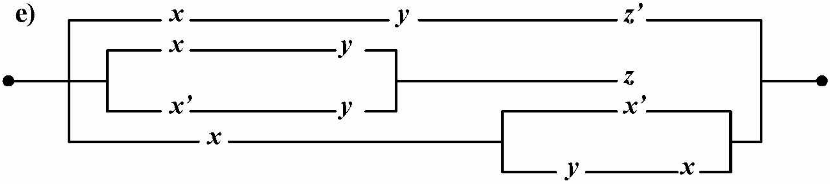
Решение.

д)



Решение.

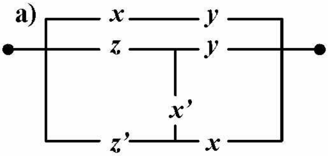
е)



Решение. ______________________________

4.3. Упростите следующие релейно-контактные схемы (называемые мостиковыми):

а)



Решение. $\pi(x, y, z) =$

$= xy \vee zy \vee zx'x \vee z'x'y \vee z'x =$

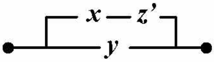
$= xy \vee zy \vee z'x'y \vee z'x =$

$= (x \vee z \vee z'x')y \vee z'x =$

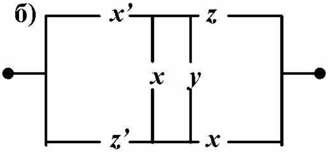
$= (x \vee (z \vee z')(z \vee x'))y \vee z'x =$

$= (x \vee z \vee x')y \vee xz' = y \vee xz'.$

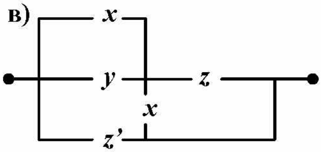
Упрощенная релейно-контактная схема имеет вид:



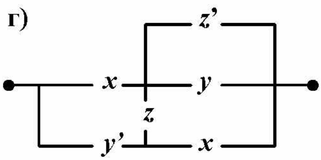
б)



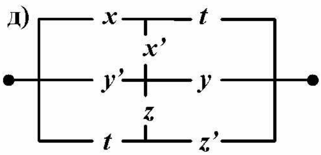
в)

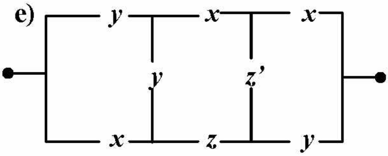


г)



д)



е) 

СИНТЕЗ РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫХ СХЕМ

***Задача синтеза** состоит в построении релейно-контактной схемы с наперед заданными условиями работы.*

4.4. Постройте наиболее простые релейно-контактные схемы по заданным условиям работы:

а) $\pi(1, 1, 0) = \pi(0, 0, 0) = \pi(1, 0, 0) = 1$;

б) $\pi(0, 0, 0) = \pi(0, 1, 0) = \pi(1, 0, 0) = \pi(0, 1, 1) = 1$;

в) $\pi(0, 1, 1) = \pi(0, 1, 0) = \pi(0, 0, 1) = 1$;

г) $\pi(1, 1, 0) = \pi(1, 0, 0) = \pi(0, 1, 0) = 1$;

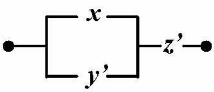
д) $\pi(0, 0, 0, 1) = \pi(1, 0, 0, 1) = \pi(0, 0, 1, 1) = \pi(1, 0, 1, 1) = 1$;

е) $\pi(1, 0, 0, 0) = \pi(1, 1, 0, 0) = \pi(1, 0, 0, 1) = \pi(1, 1, 0, 1) = \pi(0, 1, 0, 1) = 1$.

[**Указание.** *Используя СДН-форму (или СКН-форму), найдите сначала аналитическое выражение для функции* π *проводимости искомой схемы. Максимально упростите полученное выражение. После этого начертите релейно-контактную схему, для которой полученное выражение представляет собой функцию проводимости.*]

Решение. а) $\pi(x, y, z) = xyz' \vee x'y'z' \vee xy'z' = xyz' \vee (x' \vee x)y'z' =$
$= xyz' \vee y'z' = (xy \vee y')z' = (x \vee y')(y \vee y')z' = (x \vee y')z'$.

Искомая релейно-контактная схема имеет вид:



б)

в)

г)

д)

е)

Вложите в тетрадь листки с решениями задач 4.5 – 4.8, 4.10

4.5. Каждый из трех членов комитета, голосуя "за" , нажимает на кнопку. Построить по возможности более простую схему, через которую ток проходил бы и зажигал бы электрическую лампочку тогда и только тогда, когда не менее двух членов комитета голосуют "за".

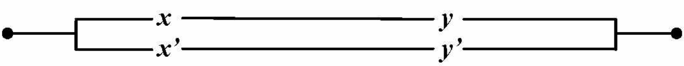
4.6. Комитет состоит из пяти человек. Решение выносится большинством голосов. Если председатель “против”, то решение не принимается. Построить такую схему, чтобы, голосуя "за", каждый из пяти человек нажимал бы на кнопку и в случае принятия решения зажигалась бы сигнальная лампочка.

4.7. Постройте релейно-контактную схему с четырьмя переключателями, которая проводит ток тогда и только тогда, когда замыкаются некоторые, но не все переключатели.

4.8. Начертите схему с пятью переключателями, которая проводит ток в том и только в том случае, когда замыкаются ровно два или ровно три из этих переключателей.

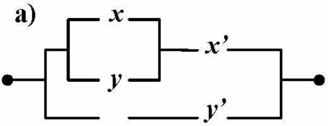
4.9. Имеется одна лампочка в лестничном пролете двухэтажного дома. Постройте схему так, чтобы на каждом этаже своим выключателем можно было бы гасить и зажигать лампу, независимо от положения другого выключателя.

Решение. Функция проводимости $\pi(x,y)$ такой схемы должна обладать тем свойством, что ее значение меняется всякий раз, когда меняется значение одного ее аргумента. Следовательно, например: $\pi(1,1) = \pi(0,0) = 1$; $\pi(0,1) = \pi(1,0) = 0$. Используя СДН- форму, отсюда легко получаем: $\pi(x,y) = xy \vee x'y'$, а соответствующая схема имеет вид:



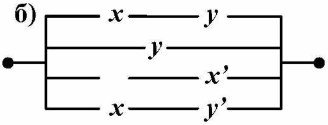
4.10. Спроектируйте релейно-контактную схему, позволяющую зажигать и тушить электрическую лампочку с помощью трех независимых переключателей. Сколькими способами можно сконструировать такую схему?

4.11. Какой контакт, x, y, x' или y', необходимо вставить в вакантное место релейно-контактной схемы, чтобы функция проводимости полученной схемы стала бы равна данной булевой функции:

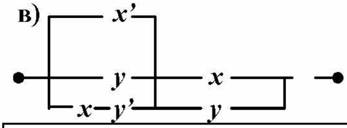
а) 

$\pi(x, y) = x'$.

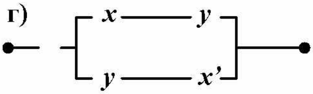
Решение. $\pi(x, y) = (x \vee y)x' \vee @y' =$
$= xx' \vee yx' \vee @y' = yx' \vee @y'$.
По условию должно быть:
$x'y \vee @y' = x'$.
Тогда: $@ = x'$.

б) 

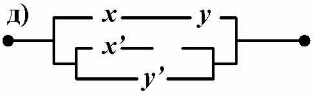
$\pi(x, y) = x \vee y$.

в) 

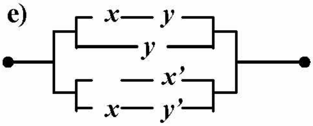
$\pi(x, y) = xy'$.

г) 

$\pi(x, y) = xy$.

д) 

$\pi(x, y) = x \vee y'$.

е) 

$\pi(x, y) = x \vee y$.

5. Предикаты и множества

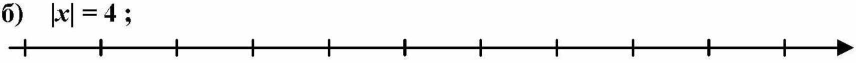
<u>Предикат</u> (или <u>высказывательная форма</u>) - это предложение, содержащее предметные переменные и превращающееся в высказывание при замене всех предметных переменных конкретными предметами.

5.1. Среди следующих предложений отметьте *предикаты* и укажите их область определения и множество истинности, а также отметьте *высказывания* и найдите их значения истинности:

1.	$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	
2.	**Река x впадает в озеро Байкал.**	
3.	$x^2 + x - 6 = 0$	
4.	**Для всех чисел x выполняется равенство $x^2 + x - 6 = 0$.**	
5.	**Для числа $x = 2$ выполняется равенство $x^2 + x - 6 = 0$.**	
6.	**Существует такое отрицательное число x, что $x^2 + x - 6 = 0$.**	
7.	**Число 9 делится на 3 .**	
8.	**Если число x делится на 3 , то x делится и на 9 .**	
9.	**Все числа, делящиеся на 9 , делятся на 3 .**	
10.	**Существуют числа, делящиеся на 9, но не делящиеся на 3 .**	

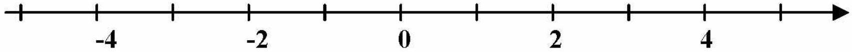
5.2. Изобразите на координатной прямой *множества истинности* следующих заданных на $\boldsymbol{R}$ одноместных предикатов.

а) $x < 3$;

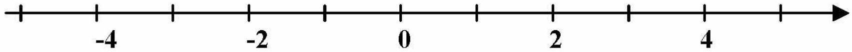


б) $|x| = 4$;

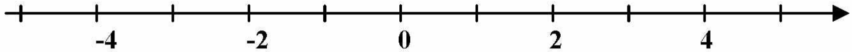
в) $|x| < 2$;



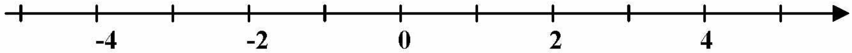
г) $|x| > 2$;



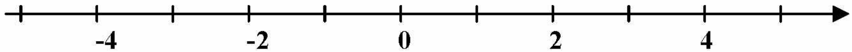
д) $|x - 4| \geq 1$;



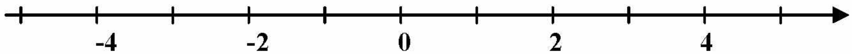
е) $|x + 3| < 2$;



ж) $x^2 \geq 0$;

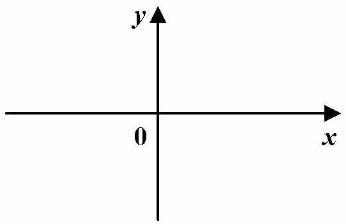


з) $|x - 1| \leq |2x + 4|$;

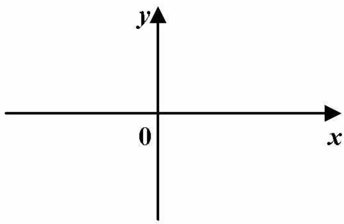


5.3. Изобразите на координатной плоскости *множества истинности* следующих заданных на $\boldsymbol{R \times R}$ предиката:

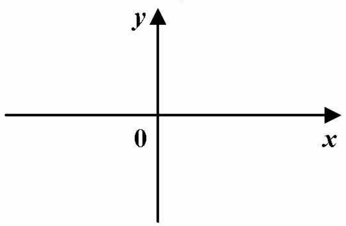
а) $(x \geq 0) \wedge (y \leq 0)$;



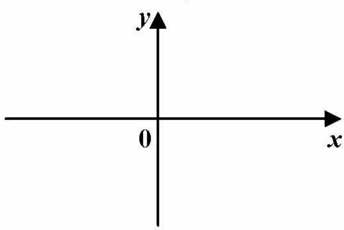
б) $(x \geq 0) \vee (y \leq 0)$;



в) $(x \geq 0) \rightarrow (y \leq 0)$;



г) $(x \geq 0) \leftrightarrow (y \leq 0)$;



5.4. Найдите *множество истинности* каждого из следующих одноместных предикатов, заданных над множеством $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

а) $(x < 3) \to (x \leq 7)$;
Его множество истинности:

____

б) $(x \leq 7) \to (x < 3)$.
Его множество истинности:

____

5.5. Следующие предикаты заданы над множеством всех целых чисел. Укажите их множества истинности:

а) $(x > 1) \wedge (x \geq 3 \to x \geq 7) \wedge (x < 8)$;

____

б) $[(x < 10) \vee (x > 20)] \wedge [(x \geq 5) \wedge (x \leq 25)]$.

____

5.6. Пусть P^+ и Q^+ - *множества истинности* предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ соответственно, заданных над множеством M. Установите взаимно однозначное соответствие (с помощью стрелок) между записанными слева предикатами и записанными справа их множествами истинности:

$P(x) \wedge Q(x)$	$\overline{P^+} \cup \overline{Q^+}$
$P(x) \vee Q(x)$	$P^+ \cap Q^+$
$P(x) \to Q(x)$	P^+
$P(x) \to \neg Q(x)$	$\overline{P^+} \cup Q^+$
$(\neg P(x) \to Q(x)) \wedge P(x)$	$P^+ \cup Q^+$

5.7. Имеются следующие утверждения о предикатах $P(x)$ и $Q(x)$:

(1) $P(x)$ является следствием $Q(x)$, но не обратно;
(2) Q(x) является следствием $P(x)$, но не обратно;
(3) предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны (эквивалентны);
(4) ни одно из сформулированных утверждений не верно.

Выясните, какое из этих утверждений справедливо для следующих предикатов, заданных над множеством действительных чисел $\boldsymbol{R}$:

а) $P(x)$: $|x + 1| < 3$; $\quad$ Q(x) : $x^2 + 2x - 3 = 0$;
б) $P(x)$: $x^2 = 9$; $\quad$ Q(x) : $x^4 = 81$;
в) $P(x)$: $x^2 + 3x - 10 \leq 0$; $\quad$ Q(x) : $|x| > 2$;
г) $P(x)$: $|x - 2| = 1$; $\quad$ Q(x) : $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

Решение. а) $P^+ = (-4, 2)$, $Q^+ = \{-3, 1\}$, т. е. $Q^+ \subset P^+$. Следовательно, $P(x)$ является следствием предиката $Q(x)$, но не обратно.

б) ____ в) ____

____

____

г) ____

____

____

5.8. Выясните, *равносильны* ли следующие предикаты, если их последовательно рассматривать над множествами ***R, Q, Z, N*** **:**

Над множеством / **Предикаты**	***R***	***Q***	***Z***	***N***
$P(x)$: $x^2 = 1$; $Q(x)$: $(x - 1)(x + \sqrt{2}) \bullet (x-1,5)(x+1)=0$				
$P(x)$: $x^2 = 0$; $Q(x)$: $\lvert x\rvert \le 0$				
$P(x)$: $\sqrt{x} \bullet \sqrt{y} = 15$ $Q(x)$: $\sqrt{xy} = 15$				
$P(x)$: $5x^2 - 11x+2 = 0$ $Q(x)$: $(x^2 -3) \bullet (3x^2 -7x+2)=0$				

5.9. Что можно сказать о множестве P^+ истинности предиката $P(x)$, заданного на множестве ***M*** , если высказывание, полученное из него применением одного из кванторов, истинно или ложно:

Высказывание $(\forall x)$ $(P(x))$ — и с т и н н о	$P^+ \neq M$
Высказывание $(\forall x)$ $(P(x))$ — л о ж н о	$P^+ = \varnothing$
Высказывание $(\exists x)$ $(P(x))$ — и с т и н н о	$P^+ = M$
Высказывание $(\exists x)$ $(P(x))$ — л о ж н о	$P^+ \neq \varnothing$

6. Применения логики предикатов

6.1. Прочитайте следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая, что все переменные пробегают множество действительных чисел:

1.	$(\forall x)\ (x > 7)$	
2.	$(\exists x)\ (x > 7)$	
3.	$(\forall x)\ (\exists y)\ (x < y)$	
4.	$(\exists y)\ (\forall x)\ (x < y)$	
5.	$(\forall y)\ (\exists x)\ (x < y)$	
6.	$(\exists x)\ (\forall y)\ (x < y)$	
7.	$(\forall y)\ (\exists x)\ (2x^2 = 6x + 5\ >\ y)$	
8.	$(\exists y)\ (\forall x)\ (2x^2 = 6x + 5\ >\ y)$	
9.	$(\forall b)(\exists a)(\forall x)(x^2 + ax + b > 0)$	
10.	$(\exists b)(\forall a)(\exists x)(x^2 + ax + b = 0)$	

6.2. Для каждого высказывания, записанного на языке кванторов, найдите соответствующую словесную формулировку (где $Q(x)$ означает "x - рациональное число", $R(x)$ - "x - действительное число"). Отметьте *истинные* утверждения.

$(\exists x)\ (R(x)\ \wedge \neg Q(x))$	**Некоторые действительные числа — рациональные.**
$(\exists x)\ (R(x)\ \wedge Q(x))$	**Ни одно действительное число не является рациональным.**
$(\forall x)\ (Q(x)\ \rightarrow R(x))$	**Некоторые действительные числа не являются рациональными.**
$(\forall x)\ (R(x) \rightarrow \neg Q(x))$	**Все рациональные числа — действительные.**

6.3. Запишите на языке логики предикатов следующие утверждения, введя предикаты: **Р(x) : "*x* - ромб" , П(x) : "*x* - параллелограмм".** Отметьте среди них *истинные.*

Все ромбы являются параллелограммами.	
Некоторые параллелограммы являются ромбами.	

Ни один параллелограмм не является ромбом.	
Некоторые ромбы не являются параллелограммами.	
Ни один ромб не является параллелограммом.	
Все параллелограммы являются ромбами.	

6.4. Запишите на *языке логики предикатов* следующие утверждения:

а) определение параллелограмма**: любые две противоположные (непересекающиеся) стороны параллельны;**

$(\forall x)\ (\forall y)\ (x \cap y = \varnothing \ \to\ x \parallel y)$

(где x, y - стороны четырехугольника)

б) признак параллелограмма: **существуют две равные и параллельные стороны;**

в) определение трапеции: **имеются две параллельные стороны и две не параллельные стороны;**

г) аксиому геометрии: **через любые две точки проходит прямая**;

д) её усиление: **через любые две различные точки проходит единственная прямая;**

е) аксиому о параллельных: **через любую точку, не лежащую на прямой, проходит не более одной прямой, не пересекающей данной;**

ж) определение параллельных прямых**: не имеют общей точки;**

з) определение простого числа: **натуральное число *p* называется простым, если оно не равно 1 и при всяком разложении его в произведение двух чисел одно из них оказывается равным 1 или *p* .**

Запомните правила построения отрицания выражений с кванторами:

$$\neg(\forall x)\ (P(x))\ \cong\ (\exists x)\ (\neg P(x))\ ,$$
$$\neg(\exists x)\ (P(x))\ \cong\ (\forall x)\ (\neg \mathrm{P}(x))\ .$$

(Сравните их с законами де Моргана из задачи 1.22 л, м)

6.5. Отнесите отрицания к внутренним предикатам:

а) $\neg(\forall x)\ (P(x) \wedge \neg Q(x))\ \cong\ (\exists x)\ \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))\ \cong$

Применяем закон де Моргана из алгебры высказываний:

$\cong\ (\exists x)\ (\neg P(x) \vee \neg\neg Q(x))\ \cong$ [закон двойного отрицания]

$\cong\ (\exists x)\ (\neg P(x) \vee Q(x))\ \cong$

$\cong\ (\exists x)\ (P(x) \rightarrow Q(x))$.

б) $\neg(\exists x)\ (\neg P(x) \vee Q(x))\ \cong$ ______________________________

____

____

в) $\neg(\forall x)\ (P(x)\ \rightarrow \neg Q(x))\ \cong$ ______________________________

____

____

г) $\neg(\forall x)\ (\ (\exists y)(P(x, y))\ \rightarrow (\forall y)(Q(x, y))\ )\ \cong$ ____________________

____

____

____

____

д) $\neg(\exists y)(\ \forall x)(P(x, y)\ \wedge Q(x, y)) \cong$ ______________________________

____

____

____

6.6. Запишите на *языке логики предикатов* отрицания соответствующих утверждений из задачи 6.4 :

а) определение не параллелограмма:

$\neg(\forall x)\ (\forall y)\ (\ x \cap y = \varnothing\ \rightarrow\ x \parallel y\ )\ \cong\ (\exists x)(\ \exists y)\ \neg\ (\neg(x \cap y = \varnothing) \vee (x \parallel y)\ )\ \cong$

$\cong\ (\exists x)(\ \exists y)\ ((x \cap y = \varnothing) \wedge (x$ не $\parallel\ y)\ )$ -

существуют две такие непересекающиеся (противоположные) стороны x и y, которые не параллельны.

б) ____

____

____

в)

г)

д)

е)

ж)

з)

6.7. Запишите на *языке логики предикатов* следующие высказывания:

а) **Существует не более одного x такого, что $P(x)$.**

б) **Существует точно один x такой, что $P(x)$.**

в) **Существует по меньшей мере два различных x таких, что $P(x)$.**

г) **Существует не более двух x таких, что $P(x)$.**

д) **Существует точно два различных x таких, что $P(x)$.**

В тетради используются следующие обозначения:	
$\neg$ – отрицание **$\wedge$ – конъюнкция** **$\vee$ – дизъюнкция** **$\rightarrow$ – импликация** **$\leftrightarrow$ – эквивалентность**	**$\forall$ – квантор общности** **$\exists$ – квантор существования** **$\cong$ – равносильность формул** **$\models$ – знак тавтологии и логического следования**

$x \in M$ – x является элементом (принадлежит) множества M;
$A \subset B$ – A является собственным подмножеством множества B (A строго включается в B);
$A \subseteq B$ – A является подмножеством множества B (A включается в B);
$A \cap B = \{x\colon x \in A \wedge x \in B\}$ – пересечение множеств;
$A \cup B = \{x\colon x \in A \vee x \in B\}$ – объединение множеств;
$\bar{A} = \{x\colon x \notin A\}$ – дополнение множества A;
P^{+} – множество истинности предиката $P(x)$;
$\varnothing$ – пустое множество.