СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

С контрольными работами

Ряды и интегралы

Векторный и комплексный анализ

Дифференциальные уравнения

Теория вероятностей

Операционное исчисление

К.Н. Лунгу, В.П. Норин, Д.Т. Письменный, Ю.А. Шевченко

Под редакцией С. Н. Федина

Сборник задач по высшей математике

С контрольными работами

Ряды и интегралы

Векторный и комплексный анализ

Дифференциальные уравнения

Теория вероятностей

Операционное исчисление

2 курс

Издание третье, исправленное

МОСКВА

АЙРИС ПРЕСС

2005

УДК 510.2(076)
ББК 74.262
Л82

Серийное оформление *А. М. Драгового*

Лунгу, К. Н.

Л82 Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К. Н. Лунгу, В. П. Норин, Д. Т. Письменный, Ю. А. Шевченко; под ред. С. Н. Федина. — 3-е изд., испр. — М.: Айрис-пресс, 2005. — 592 с.: ил. — (Высшее образование).

ISBN 5-8112-1496-0

Книга является второй частью вышедшего ранее и выдержавшего несколько изданий «Сборника задач по высшей математике». Сборник содержит три с лишним тысячи задач по высшей математике, охватывая материал, обычно изучаемый во II–IV семестрах технических вузов.

По сути, эта книга — удобный самоучитель, который позволит студенту быстро и эффективно подготовиться к экзаменационной сессии. Этому способствуют необходимые теоретические пояснения ко всем разделам сборника, детально разобранные типовые задачи, изрядное количество разнообразных заданий различных уровней сложности для самостоятельного решения, а также наличие контрольных работ, устных задач и «качественных» вопросов.

Книга будет полезна студентам младших курсов и преподавателям вузов для проведения семинарских занятий.

ББК 74.262
УДК 510.2(076)

ISBN 5-8112-1496-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предисловие для студента

Привет! Тебе здорово повезло. Эта книга как раз то, что тебе нужно. Посуди сам:

- **это не просто задачник, а еще и самоучитель** — по нему можно научиться решать задачи даже без преподавателя;
- **эта книга поможет тебе подготовиться не только к зачету, но и к экзамену** — ты найдешь в ней не только необходимые определения и теоремы по каждой теме (и все это кратко, без утомительных комментариев), но и типичные задачки и вопросы, которые даются на экзамене;
- **ты найдешь здесь задачи любого уровня сложности** — от простых до таких, которые удовлетворят даже самых продвинутых в твоей группе;
- **прочитав подробно разобранные примеры, ты без проблем разберешься с любым типом задач.**

В общем, с этой книгой не пропадешь! Имей в виду, что у этого задачника есть еще и первый том. Удачи тебе на сессии!

Предисловие для преподавателя

Первая часть этой книги («Сборник задач по высшей математике. 1 курс») была очень хорошо принята читателями и к настоящему времени выдержала несколько переизданий. В данном сборнике задач, охватывающем традиционный курс высшей математики в объеме второго курса технического вуза, сохранены все принципиальные особенности первого тома.

Каждая новая тема предваряется необходимыми теоретическими пояснениями, включающими важнейшие определения и теоремы. Затем идет блок задач на эту тему, по объему и структуре соответствующий стандартному семинару по высшей математике: сначала подробно разбираются 1–2 типовые задачи на тот или иной прием, после чего предлагается 3–6 аналогичных задач на его закрепление. Затем точно так же осваивается другой стандартный навык при решении задач на данную тему и так далее. В конце каждого раздела помещен существенно бóльший по объему блок задач для самостоятельной работы студентов дома (именно отсюда преподаватель может брать задачи для домашних заданий). Кроме того, в особый пункт, завершающий любую изучаемую тему, включены задачи повышенной сложности и «качественные» вопросы, обычно предлагаемые на экзаменах по высшей математике. Дополнительное удобство для преподавателей представляют контрольные работы в каждой главе книги.

Таким образом, данный сборник задач будет несомненно полезен преподавателям для проведения практических занятий (есть теория, есть разобранные примеры, есть задания для семинара и на дом) и студентам для самостоятельной работы, в качестве самоучителя.

В сборнике свыше трех тысяч задач, и практически ко всем из них даны ответы или подробные решения и указания.

Книга написана преподавателями нескольких различных московских вузов, имеющими многолетний опыт лекционной и семинарской работы со студентами. При этом главы 3, 4 и §§ 6–8 главы 2 написаны Лунгу К. Н.; главы 5 и 8 — Нориным В. П.; глава 6 и §§ 1–5 главы 2 — Письменным Д. Т.; главы 1 и 7 — Шевченко Ю. А.; Куланин Е. Д. написал § 4 главы 1.

Авторы будут признательны за любые отзывы, пожелания и критические замечания, которые можно присылать по адресу: 141103, Моск. обл., г. Щелково-3, а/я 140; или по адресам электронной почты: chislovo@yandex.ru или editor@airis.ru (обязательно указать тему: «Задачник»).

Авторы

Авторы и издательство благодарят преподавателя математики Пайкову Л. И. из Днепропетровска (Украина) за ценные замечания, которые были учтены в данном издании.

Принятые обозначения

$\Rrightarrow$	определение
◔	начало решения задачи
●	конец решения задачи
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел
$\mathbb{Z}$	множество целых чисел
$\mathbb{R}$	множество действительных чисел
$\mathbb{R}^2$	действительная плоскость
$\mathbb{R}^3$	действительное трехмерное пространство
$\mathbb{C}$	множество комплексных чисел
$\cup$	объединение множеств
$\cap$	пересечение множеств
$A \subset B$	A — подмножество множества B $(A \neq B)$
$A \subseteq B$	A — подмножество множества B
$\forall$	любой, для любого
$\equiv$	тождественно равен
$\operatorname{sign}(x)$	знак числа x

Глава 1. РЯДЫ

§ 1. ПОНЯТИЕ РЯДА. РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Ряд. Сходимость ряда. Сумма ряда

⇛ Пусть задана бесконечная последовательность чисел (действительных или комплексных)

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Сокращенно ряд обозначают следующим образом: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. При этом числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами* ряда, а число a_n — *общим членом* ряда. Суммы вида

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \ldots$$

называются *частичными суммами* ряда. Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности $\{S_n\}$ его частичных сумм:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

В этом случае указанный предел называется *суммой ряда*.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности, то числовой ряд называется *расходящимся* и суммы не имеет. ⇚

Простейшие свойства рядов. Необходимый признак сходимости

Теорема 1.1. Если у сходящегося ряда отбросить конечное число его членов, то полученный ряд также будет сходиться. Верно и обратное: если сходится ряд, полученный отбрасыванием конечного числа членов у данного ряда, то и данный ряд также сходится.

Таким образом, сходимость ряда не меняется при отбрасывании любого конечного числа его членов.

Теорема 1.2. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и его сумма равна S. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha a_1 + \alpha a_2 + \ldots + \alpha a_n + \ldots$, где α — произвольное число, также сходится, причем его сумма равна αS.

Теорема 1.3. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, и их суммы, соответственно, равны S_1 и S_2. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots$ также сходится, причем его сумма равна $S_1 + S_2$.

Необходимый признак сходимости

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то общий член ряда a_n стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е.:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Таким образом, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Ряд $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q и первым членом $a \neq 0$, называется *геометрическим рядом*. Если $|q| \geqslant 1$, то геометрический ряд расходится, если $|q| < 1$ — сходится (при этом его сумма S находится по формуле $S = \dfrac{a}{1-q}$).

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$, или, что то же самое, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, называется *гармоническим*. Гармонический ряд расходится. Ряд $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$, где $p > 0$, называется *рядом Дирихле*. Этот ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leqslant 1$. Частным случаем ряда Дирихле (при $p = 1$) является гармонический ряд.

Признаки сходимости рядов с положительными членами

1-й признак сравнения

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды с положительными членами, причем $a_n \leqslant b_n$ для всех номеров n, начиная с некоторого. Тогда:

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

2-й признак сравнения

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды с положительными членами, причем существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

При использовании 1-го или 2-го признака сравнения, как правило, сравнивают исходный ряд с соответствующим рядом Дирихле. При этом часто используют эквивалентность следующих бесконечно малых последовательностей (при $n \to \infty$):

$$\sin\frac{1}{n} \sim \operatorname{tg}\frac{1}{n} \sim \arcsin\frac{1}{n} \sim \operatorname{arctg}\frac{1}{n} \sim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

Признак Даламбера

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с положительными членами, и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Тогда, если $l < 1$, то данный ряд сходится; если же $l > 1$, то — расходится.

Если $l = 1$, то ряд может сходиться или расходиться; в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.

Признак Коши

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с положительными членами, и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

Тогда, если $l < 1$, то данный ряд сходится; если же $l > 1$, то — расходится.

Если $l = 1$, то ряд может сходиться или расходиться; в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.

Интегральный признак сходимости

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с положительными членами, для которого существует положительная, непрерывная и монотонно убывающая на промежутке $[1, +\infty)$ функция $f(x)$ такая, что $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

1.1.1. Для каждого ряда написать формулу частичной суммы S_n; найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует; сделать вывод о сходимости или расходимости ряда:

а) $1+2+3+\ldots+n+\ldots$;

б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$.

а) Так как члены ряда $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ представляют собой арифметическую прогрессию с первым членом, равным 1, и разностью, равной 1, то по формуле для суммы первых n членов арифметической прогрессии получим:

$$S_n = \frac{1+n}{2}\cdot n.$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n}{2}\cdot n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(n+n^2) = +\infty$. Следовательно, ряд расходится. Таким образом $S_n = \frac{1+n}{2}\cdot n$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$; ряд расходится.

б) Так как $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, то

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} =$$
$$= 1+0+0+\ldots+0-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$. Значит, ряд сходится, и его сумма равна 1.

Окончательно: $S_n = 1-\frac{1}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$; ряд сходится.

Для каждого ряда в задачах 1.1.2–1.1.8:

1) написать формулу частичной суммы S_n;

2) найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует;

3) сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.

1.1.2. $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$

1.1.3. $1+3+5+\ldots+(2n-1)+\ldots$

1.1.4. $2-4+6-8+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot 2n+\ldots$

1.1.5. $1+2+4+\ldots+2^{n-1}+\ldots$

1.1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$

1.1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

1.1.8. $\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots$.

1.1.9. Найти предел при $n \to \infty$ общего члена ряда a_n. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то, применяя необходимый признак сходимости, установить, что ряд расходится.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2n+1}$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{\ln(n+1)}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^3+2}$.

○ а) Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \Big[\text{Разделим числитель и знаменатель дроби на } n\Big] = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

значит, ряд расходится.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$; ряд расходится.

б) Так как при $n \to \infty$ имеем $(n+2) \to \infty$ и $\ln(n+1) \to \infty$, то для нахождения предела $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)'}{(\ln(x+1))'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{(x+1)}} = \lim_{x\to\infty} (x+1) = \infty.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{\ln(n+1)} = \infty \neq 0$, и ряд расходится.

в) Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+2} = \Big[\text{Разделим числитель и знаменатель на } n^3.\Big] = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 : n^3}{(n^3+2) : n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то данный ряд может сходиться, а может и расходиться.

На самом деле, данный ряд, как будет показано ниже, расходится, однако, используя только необходимый признак сходимости, доказать этого нельзя.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; ряд может сходиться или расходиться. ●

В задачах 1.1.10–1.1.17 найти предел при $n \to \infty$ общего члена ряда a_n. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то, применяя необходимый признак сходимости, установить, что ряд расходится.

1.1.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{2n-3}$.

1.1.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{(n+2)^3}$.

1.1.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{n+1}$.

1.1.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{n^2+1}{n+3}$.

1.1.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{1}{n}$.

1.1.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\cdot n}{\ln(n+1)}$.

1.1.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2+(-1)^n)^n}$.

1.1.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$.

1.1.18. Применяя 1-й признак сравнения, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+\sin n}{n}$.

❍ Так как $\sin n \geqslant -1$, то $2+\sin n \geqslant 1$, откуда $\dfrac{2+\sin n}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, значит, расходится и больший ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+\sin n}{n}$. ●

Исследовать ряд на сходимость, применяя 1-й признак сравнения. Указать общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд.

1.1.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n+1}{n^2}$.

1.1.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n+1}{2^n}$.

1.1.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

1.1.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)!}$.

1.1.23. Исследовать ряд на сходимость, применяя 2-й признак сравнения. Указать общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{n^2+n+1}$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^6+2n-2}}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln \dfrac{n+1}{n}$.

❍ а) Числитель и знаменатель дроби $\dfrac{n+2}{n^2+n+1}$ неограниченно растут при $n \to \infty$. Скорость роста числителя $(n+2)$ определяется слагаемым n, т. е. числитель «растет как n» при $n \to \infty$. Более строго: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n} = 1$, что также можно записать в следующем виде: $n+2 \sim n$, $n \to \infty$ (т. е. последовательности $n+2$ и n эквивалентны при $n \to \infty$). Аналогично, скорость роста знаменателя (n^2+n+1) определяется слагаемым n^2, т. е. знаменатель «растет как n^2» при $n \to \infty$. Более строго: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+1}{n^2} = 1$, что также можно записать в виде: $n^2+n+1 \sim n^2$, $n \to \infty$ (последовательности n^2+n+1 и n^2 эквивалентны при $n \to \infty$).

Таким образом, $\dfrac{(n+2) \sim n}{(n^2+n+1) \sim n^2} \sim \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$. В других обозначениях:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n^2+n+1} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^2+n+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n):n^2}{(n^2+n+1):n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то расходится и исходный ряд.

б) Учитывая, что и числитель и знаменатель дроби $\dfrac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^6+2n-2}}$ неограниченно растут при $n \to \infty$, запишем дробь, составленную из эквивалентных им выражений:

$$\frac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^6+2n-2}} \sim \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n^6}} = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (n \to \infty).$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то сходится и исходный ряд.

в) Так как $\ln\dfrac{n+1}{n} = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ $(n \to \infty)$, то $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\ln\dfrac{n+1}{n} \sim$ $\sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ $(n \to \infty)$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ сходится, значит, сходится и исходный ряд. ●

Исследовать ряд на сходимость, применяя 2-й признак сравнения. Указать общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд.

1.1.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+5}{n^2-2}$.

1.1.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2-n}{n^3+n-1}$.

1.1.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+2}{3n+1}$.

1.1.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}$.

1.1.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-1}{\sqrt{n^3+3n-1}}$.

1.1.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{n+\sqrt[3]{n^5}}$.

1.1.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)$.

1.1.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^2\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

1.1.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\sin\dfrac{\pi}{n^2}$.

1.1.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^5\cdot\mathrm{tg}^3\,\dfrac{2}{n^2}$.

1.1.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+3}{5^n+2}$.

1.1.35. Исследовать ряды на сходимость, применяя признак Даламбера:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{3^{n+1}}$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$.

❍ а) Преобразуем выражение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^5}{3^{(n+1)+1}} : \frac{n^5}{3^{n+1}} = \frac{(n+1)^5}{n^5} \cdot \frac{3^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5.$$

Так как $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 0$ и $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \to 0$ при $n \to \infty$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = \frac{1}{3} < 1,$$

и исходный ряд сходится по признаку Даламбера.

б) Поскольку

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n^n} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1 \quad \text{(2-й замечательный предел)},$$

и, значит, исходный ряд расходится. ●

Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера. Указать $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

1.1.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2}$.

1.1.37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{3^n}$.

1.1.38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n!}$.

1.1.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

1.1.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!2^n}$.

1.1.41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{n!2^n}$.

1.1.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot (5n-3)}$.

1.1.43. Исследовать ряды на сходимость, применяя признак Коши:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+2}{2n+1}\right)^{3n+1}$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

❍ а) Учитывая, что

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n+1}} = \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{\frac{3n+1}{n}} = \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3+\frac{1}{n}},$$

а $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right) = 3$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3+\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} < 1.$$

Исходный ряд сходится по признаку Коши.

б) Так как $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = n^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}} = n^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$, то остается найти пределы $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

1) Поскольку $n^{\frac{1}{n}} = e^{\ln(n^{\frac{1}{n}})}$, где $\ln(n^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\ln n$, то по правилу Лопиталя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{(n)'} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1} = 0,$$

откуда $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^0 = 1$.

2) Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$ (следствие из 2-го замечательного предела), то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1,$$

и, значит, исходный ряд сходится. ●

Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Коши. Указать $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

1.1.44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.1.45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{n}$.

1.1.46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

1.1.47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

1.1.48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^{n}$.

1.1.49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^{n}$.

1.1.50. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$, применяя интегральный признак. Указать первообразную для функции $f(x)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

◐ Так как $a_n = \dfrac{1}{n\ln n}$, то $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$. Проверим применимость интегрального признака Коши. Очевидно, что функция $f(x)$ непрерывна и принимает только положительные значения на промежутке $(2, +\infty)$. Убедимся, что $f(x)$ монотонно убывает на этом промежутке.

Пусть $2 < x_1 < x_2$. Тогда $\ln x_1 < \ln x_2$ и $x_1 \ln x_1 < x_2 \ln x_2$, откуда

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1 \ln x_1} > \frac{1}{x_2 \ln x_2} = f(x_2).$$

Итак, функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на промежутке $(2, +\infty)$, значит, для использования данного ряда на сходимость можно применять интегральный признак сходимости.

Найдем неопределенный интеграл $\int f(x)\, dx$:

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \int d(\ln \ln x) = \ln \ln x + C.$$

Первообразной для функции $f(x)$ является, например, функция $\ln \ln x$.

Вычисляя несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty}$, получим

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{M \to +\infty} \int\limits_2^{M} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{M \to +\infty} \left(\ln \ln x \Big|_2^M \right) =$$

$$= \lim_{M \to +\infty} (\ln \ln M - \ln \ln 2) = +\infty.$$

Так как несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. ●

Исследовать ряд на сходимость, применяя интегральный признак. Указать первообразную для функции $f(x)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

1.1.51. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

1.1.52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

1.1.53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

1.1.54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$.

Исследовать ряд на сходимость. Указать применяемые признаки. Дополнительно указать:

1) для необходимого признака — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

2) для 1-го и 2-го признаков сравнения — общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд;

3) для признака Даламбера — $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$;

4) для признака Коши — $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$;

5) для интегрального признака — первообразную для $f(x)$ и $\int\limits_a^{\infty} f(x)\, dx$.

1.1.55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n-2}$.

1.1.56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.

1.1.57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{2^n-1}$.

1.1.58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}+2}$.

1.1.59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.1.60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)$.

1.1.61. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{n+1}$.

1.1.62. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$.

1.1.63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{5n+2}\right)^{3n-2}$.

1.1.64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+n}$.

1.1.65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

1.1.66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+3}{n+2}\right)$.

1.1.67. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^3}{5^{\frac{n}{2}}}$.

1.1.68. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

1.1.69. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

1.1.70. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{n!}$.

Дополнительные задачи

Для каждого ряда:
а) написать формулу n-й частичной суммы S_n;
б) найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует;
в) сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.

1.1.71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\ldots+1+\ldots$

1.1.72. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-n) = -1-2-3-\ldots-n-\ldots$

1.1.73. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot(2n-1) = -1+3-5+7-\ldots+(-1)^n\cdot(2n-1)+\ldots$

1.1.74. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}} = 1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^{n-1}}+\ldots$

1.1.75. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}+(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\right) = 2+3+2+3+\ldots+2+3+\ldots$

1.1.76. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots$

Найти предел общего члена ряда a_n. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то, применяя необходимый признак сходимости, установить, что ряд расходится.

1.1.77. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$.

1.1.78. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{3n-1}{2n+3}$.

1.1.79. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n^2}$.

1.1.80. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}\frac{n+1}{n^2-3}$.

1.1.81. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}$.

1.1.82. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$.

1.1.83. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

1.1.84. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^2-1}$.

Исследовать ряд на сходимость, применяя 1-й признак сравнения. Указать общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд.

1.1.85. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$.

1.1.86. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$.

1.1.87. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$.

1.1.88. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n+1}$.

Исследовать ряд на сходимость, применяя 2-й признак сравнения. Указать общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд.

1.1.89. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{n^2-3}$.

1.1.90. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n-2}$.

1.1.91. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+3n^2-2}{2n+5-n^5}$.

1.1.92. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n^2-1}}$.

1.1.93. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+3\sqrt{n}}{2n-5}$.

1.1.94. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^4+\sqrt{n^3}}}$.

1.1.95. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$.

1.1.96. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^3 \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

1.1.97. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{n^2+4}{n^2+3}$.

1.1.98. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{n^3}$.

1.1.99. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n+n}$.

Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера. Указать $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1.1.100. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{5^{\frac{n}{2}}}$.

1.1.101. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n \cdot n^4}$.

1.1.102. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$.

1.1.103. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^n}$.

1.1.104. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$.

1.1.105. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n^2 \cdot 3^n}$.

1.1.106. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}$.

Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Коши. Указать $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

1.1.107. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.1.108. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^{n-1}$.

Исследовать ряд на сходимость, применяя интегральный признак. Указать первообразную для функции $f(x)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

1.1.113. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

1.1.114. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}$.

1.1.115. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n \ln\ln n}$.

1.1.116. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$.

В задачах 1.1.117–1.1.131 исследовать ряд на сходимость и указать применяемые признаки. Дополнительно указать:

1) для необходимого признака — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$*;*

2) для 1-го и 2-го признаков сравнения — общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд;

3) для признака Даламбера — $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$*;*

4) для признака Коши — $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$*;*

5) для интегрального признака — первообразную для $f(x)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

1.1.117. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+2)}$.

1.1.118. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!2^{n+1}}$.

1.1.119. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.1.120. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$.

1.1.121. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right)$.

1.1.122. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n}$.

1.1.123. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2n+1}{3n+2}$.

1.1.124. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

1.1.125. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 2^{3n}}$.

1.1.126. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3n-1)}\cdot 2^n$.

1.1.127. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}$.

1.1.128. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{3}}$.

1.1.129. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\cdot\left(\frac{5n-3}{3n+2}\right)^{n+1}$.

1.1.130. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-\sqrt{n}}$.

1.1.131. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2n+1}{n^3}$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

1.1.132. Можно ли утверждать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

1.1.133. Является ли необходимым для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ условие:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 2$;

б) не все члены ряда — числа a_n — равны 2;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$;

г) не все члены ряда — числа a_n — равны 0?

1.1.134. Верно ли, что

а) если ряд сходится, то его частичные суммы ограничены;

б) если частичные суммы ряда ограничены, то ряд сходится?

1.1.135. Существует ли ряд, который

а) по признаку Даламбера сходится, а по признаку Коши — расходится;

б) по признаку Коши сходится, а по признаку Даламбера — расходится;

в) по признаку Даламбера расходится, а по интегральному признаку — сходится?

1.1.136. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, если

а) ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся;

б) ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся;

в) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится?

1.1.137. Из того, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ сходится, следует ли, что

а) оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся;

б) оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся;

в) один из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, а другой — расходится?

1.1.138. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n-1}}{n}$.

1.1.139. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n n!}{n^n}$.

1.1.140. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{3^{k-1}}{4^{k-1}}, & n = 2k-1; \\ \dfrac{3^{k-1}}{4^k}, & n = 2k, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \dots$$

а) по признаку Даламбера;

б) по признаку Коши.

1.1.141. Привести пример двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ расходится.

1.1.142. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$, исследовав на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2}$.

1.1.143. Вычислите предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n!)^n}{n^{n^2}}$.

§ 2. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Знакочередующиеся ряды

⇛ *Знакочередующимся* называется ряд, в котором любые два соседних члена имеют разные знаки. Таким образом, знакочередующийся ряд — это ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \tag{2.1}$$

или

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_n + \ldots + (-1)^n a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \tag{2.2}$$

где все a_n — положительные действительные числа ($a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$). ⇚

Признак Лейбница

Пусть дан знакочередующийся ряд (вида (2.1) или (2.2)). Если выполнены два условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \ldots$ (абсолютные величины членов ряда монотонно убывают);

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$),

то ряд сходится.

⇛ Ряд, содержащий и положительные и отрицательные члены, называется *знакопеременным*. В частности, всякий знакочередующийся ряд является знакопеременным. ⇚

Теорема 1.4. Пусть дан знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n — произвольные числа (действительные или комплексные). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, сходится, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

В этом случае знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся.*

⇛ Если же знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся.* ⇚

Для ответа на вопрос об абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ можно применять все признаки, используемые при исследовании рядов с положительными членами.

Из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, вообще говоря, не следует. Однако, если, применяя к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ признак Даламбера (или признак Коши), получаем предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l > 1$ (или $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l > 1$), то в этом случае оба ряда — $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходятся.

Пусть $\{a_n\}$ — последовательность комплексных чисел $a_n = b_n + ic_n$, где b_n и c_n — действительные числа для любого $n = 1, 2, \ldots$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (т. е. ряд $\sum(b_n + ic_n)$) сходится тогда и только тогда, когда сходятся два ряда — $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, причем в этом случае $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$.

1.2.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

◔ 1. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}.$$

Сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Так как $2\sqrt{n}-1 < 2\sqrt{n}$, то $\frac{1}{2\sqrt{n}-1} >$ $> \frac{1}{2\sqrt{n}}$ для всех n. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ расходится, так как расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (как ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при $p = \frac{1}{2} < 1$). Значит, по 1-му признаку сравнения расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

Итак, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

2. Выясним, сходится ли данный знакочередующийся ряд, применяя признак Лейбница.

а) Проверим, выполняется ли неравенство $a_n > a_{n+1}$ для абсолютных величин членов данного ряда:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{n}-1} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}-1} = a_{n+1}.$$

Данное неравенство эквивалентно неравенству $2\sqrt{n}-1 < 2\sqrt{n+1}-1$, которое верно для любого $n = 1, 2, \ldots$ Значит, $a_n > a_{n+1}$ для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$

б) Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+1} = 0.$$

Таким образом, для данного знакочередующегося ряда выполнены оба условия, содержащиеся в признаке Лейбница, откуда следует, что исходный ряд сходится. Однако он не является абсолютно сходящимся, поэтому данный ряд сходится условно. ●

1.2.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-\ln n}$.

○ 1. Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-\ln n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4-\ln 2} + \frac{1}{6-\ln 3} + \ldots$$

Применяя 2-й признак сравнения, сравним этот ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n-\ln n} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{\ln n}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Следовательно, знакопостоянный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а значит, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ не является абсолютно сходящимся.

2. Теперь выясним, является ли данный знакопеременный ряд сходящимся, используя признак Лейбница.

а) Проверим, выполняется ли неравенство $a_n > a_{n+1}$ для всех номеров n, начиная с некоторого:

$$a_n = \frac{1}{2n-\ln n} > \frac{1}{2(n+1)-\ln(n+1)} = a_{n+1}.$$

Запишем последовательность неравенств, эквивалентных данному:

$$2n - \ln n < 2(n+1) - \ln(n+1);$$
$$\ln(n+1) - \ln n < 2(n+1) - 2n;$$
$$\ln\frac{n+1}{n} < 2;$$
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 2.$$

Так как $1+\frac{1}{n} \leqslant 2 < e$, то $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \ln e = 1 < 2$ для любого $n = 1, 2, \ldots$ Значит, неравенство $a_n > a_{n+1}$ выполняется для всех $n = 1, 2, \ldots$

б) Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n - \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2n-\ln n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{2 - \frac{\ln n}{n}} = \frac{0}{2} = 0.$$

Итак, для данного знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n - \ln n}$ выполнены оба условия, содержащиеся в признаке Лейбница, значит, этот ряд сходится. Из этого и из того, что ряд не является абсолютно сходящимся, окончательно следует, что ряд сходится условно. ●

1.2.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^n}$.

○ Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ из абсолютных величин членов данного ряда, т. е. ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n},$$

используя признак Даламбера. Для этого сначала преобразуем выражение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{3}.$$

Найдем предел этого выражения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

По признаку Даламбера отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ сходится, а значит, исходный ряд сходится абсолютно. ●

1.2.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n^2}$.

○ Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\sin\frac{1}{n^2}\right|$ из модулей членов данного ряда, т. е. (так как $0 < \frac{1}{n^2} < 1$, и следовательно, $\sin\frac{1}{n^2} > 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}.$$

Воспользуемся 2-м признаком сравнения, для чего сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Обозначив $t=\frac{1}{n^2}$ и учитывая, что $t\to 0$ при $n\to\infty$, имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ (1-й замечательный предел). Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится как ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p=2>1$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$. Отсюда следует, что исходный ряд сходится абсолютно. ●

1.2.5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}.$$

○ Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ из абсолютных величин членов данного ряда, т. е. ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}.$$

Для ответа на вопрос о сходимости полученного ряда применим признак Даламбера:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)(3(n+1)-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2(n+1)+1)}:\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}=\frac{3n+1}{2n+3}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{3}{2}>1.$$

Но это значит, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ не является абсолютно сходящимся. Однако полученный результат $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{2}>1\right)$ позволяет сделать более сильное утверждение. Так как $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ для всех номеров n, начиная с некоторого, то $a_n\not\to 0$ $(n\to\infty)$, и стало быть (так как не выполняется необходимый признак сходимости), исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ расходится. ●

1.2.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{5n^2-2}$.

○ Нетрудно показать, что для данного ряда не выполнен необходимый признак сходимости. В самом деле:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{5n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{5-\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{5}\neq 0.$$

Следовательно, ряд расходится. ●

Доказать, что ряд сходится условно:

1.2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.

1.2.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+2)}$.

1.2.9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln n \sqrt{\ln\ln n}}$.

1.2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{2n - \sqrt{n}}$.

Доказать, что ряд сходится абсолютно:

1.2.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n^2}$.

1.2.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(3n-2)!}$.

1.2.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{n \ln^2 n}$.

1.2.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$.

Доказать, что ряд расходится:

1.2.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$.

1.2.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{3 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (4n-1)}{5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}$.

1.2.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3n^2-1}{5+2n^2}$.

1.2.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{2^n} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Исследовать ряды на сходимость. Указать применяемые признаки. Дополнительно указать:

1) для необходимого признака — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

2) для 1-го и 2-го признаков сравнения — общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд;

3) для признака Даламбера — $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$;

4) для признака Коши — $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

1.2.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{e^{n+1}}$.

1.2.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3n+1}{3n-1}$.

1.2.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{(2n)!}{4^n n!}$.

1.2.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{3n-1}$.

1.2.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln^n \left(\dfrac{2n}{n+2}\right)$.

1.2.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin n}{n^2}$.

1.2.25. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

1.2.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln 2$.

1.2.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n^2}{2^n}$.

1.2.28. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3+i)^n}{n \cdot 2^n}$.

○ Применим к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ из абсолютных величин членов данного ряда признак Даламбера:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|(3+i)^{n+1}|}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} : \frac{|(3+i)^n|}{n \cdot 2^n} =$$

$$= \left| \frac{(3+i)^{n+1}}{(3+i)^n} \right| \cdot \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{|3+i|}{2} \cdot \frac{n}{n+1},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{|3+i|}{2} \cdot \frac{n}{n+1} \right) = \frac{|3+i|}{2} = \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} > 1.$$

Следовательно, $\left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ для всех номеров n, начиная с некоторого, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, и значит, исходный ряд расходится. ●

1.2.29. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+3i}{(2+i)n+1} \right)^n$.

○ Применим к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ из абсолютных величин членов данного ряда признак Коши. Сначала преобразуем выражение $\sqrt[n]{|a_n|}$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left| \left(\frac{n+3i}{(2+i)n+1} \right)^n \right|} = \left| \frac{n+3i}{(2+i)n+1} \right| = \frac{|n+3i|}{|(2n+1)+in|} =$$

$$= \frac{\sqrt{n^2+3^2}}{\sqrt{(2n+1)^2+n^2}} = \sqrt{\frac{n^2+9}{5n^2+4n+1}} = \sqrt{\frac{1+\frac{9}{n^2}}{5+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+\frac{9}{n^2}}{5+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, т. е. исходный ряд сходится абсолютно. ●

1.2.30. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^n}{\sqrt{n}}$.

○ 1. Поскольку $\left| \dfrac{i^n}{\sqrt{n}} \right| = \dfrac{|i|^n}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, то ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Полученный ряд расходится как ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при $p = \frac{1}{2} < 1$. Значит, исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

2. Запишем члены данного ряда в алгебраической форме, т.е. в виде $b_n + ic_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n}} = \frac{i}{1} + \frac{i^2}{\sqrt{2}} + \frac{i^3}{\sqrt{3}} + \frac{i^4}{\sqrt{4}} + \frac{i^5}{\sqrt{5}} + \frac{i^6}{\sqrt{6}} + \frac{i^7}{\sqrt{7}} + \frac{i^8}{\sqrt{8}} + \dots =$$

$$= \frac{i}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{i}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{i}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots =$$

$$= (0+i) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 0i\right) + \left(0 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + 0i\right) + \left(0 + \frac{i}{\sqrt{5}}\right) +$$
$$+ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} + 0i\right) + \left(0 - \frac{i}{\sqrt{7}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{8}} + 0i\right) + \dots$$

Составим два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ic_n$ соответственно из действительных и мнимых частей членов последнего ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{4}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ic_n = i + 0 - \frac{i}{\sqrt{3}} + 0 + \frac{i}{\sqrt{5}} + 0 - \frac{i}{\sqrt{7}} + 0 + \dots$$

Так как добавление (и удаление) произвольного числа членов ряда, равных нулю, не влияет на его сходимость, получим два ряда:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2n}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b'_n,$$

$$i - \frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{i}{\sqrt{5}} - \frac{i}{\sqrt{7}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{i}{\sqrt{2n-1}} + \dots = i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c'_n.$$

Для знакочередующихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b'_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c'_n$ выполняются оба условия признака Лейбница, так как при всех $n = 1, 2, 3, \dots$ справедливы соотношения

$$b'_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} < \frac{1}{\sqrt{2n}} = b'_n \text{ и } \lim_{n\to\infty} b'_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} = 0,$$

$$c'_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)-1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = c'_n \text{ и } \lim_{n\to\infty} c'_n = 0.$$

Значит, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b'_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c'_n$ сходятся, т.е. сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$. Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Поскольку в пункте 1 задачи установлено, что исходный ряд не является абсолютно сходящимся, значит, он сходится условно. ●

Исследовать ряды на сходимость. Указать применяемые признаки. Дополнительно указать:

1) для необходимого признака — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

2) для 1-го и 2-го признаков сравнения — общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд;

3) для признака Даламбера — $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$;

4) для признака Коши — $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

1.2.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+i\sqrt{n}}$.

1.2.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+i}{3}\right)^n$.

1.2.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2+i)^n}$.

1.2.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n}}{\sqrt{n}}$.

1.2.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+i}{3ni-2}\right)^n$.

1.2.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-i}{2}\right)^n$.

1.2.37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i\sin n}{n^2}$.

Дополнительные задачи

Доказать, что ряд сходится условно:

1.2.38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}$.

1.2.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n+2}}$.

1.2.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

1.2.41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+3}{n^2+4}$.

Доказать, что ряд сходится абсолютно:

1.2.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$.

1.2.43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

1.2.44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

1.2.45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 3n}{2^n}$.

Доказать, что ряд расходится:

1.2.46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(n+1)$.

1.2.47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{2n^2}$.

1.2.48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n(n-1)}$.

1.2.49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+3}{2n+1}$.

Исследовать ряд на сходимость:

1.2.50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n+2}{2n+5}$.

1.2.51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{(2n+1)\cdot 3^n}$.

1.2.52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+2}{3n^2\sqrt{n}+1}$.

1.2.53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^{n^2}}{n^n}$.

1.2.54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3n}{n(n+1)}$.

1.2.55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos(n+2)}{3^n}$.

1.2.56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2+\ln n)^3}$.

1.2.57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{n\sqrt{n}+3n}$.

1.2.58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln(n+1)}{n}$.

1.2.59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{i(n+2i)}{3n}\right)^n$.

1.2.60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(2+i)^n}{3^n}$.

1.2.61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i+(-1)^n\cdot n}{n^2}$.

1.2.62. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(1+i)^n}{3^n}$.

1.2.63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$.

1.2.64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$.

1.2.65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos in}{3^n}$.

1.2.66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n}+in}$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

1.2.67. Верно ли, что

а) если ряд абсолютно сходится, то он сходится и условно;

б) если ряд сходится условно, то он не сходится абсолютно?

1.2.68. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\cdot\dfrac{n}{2^n}$.

1.2.69. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\operatorname{sh} n}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 n+1}}$.

1.2.70. Верно ли, что если знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится, то $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$ монотонно?

1.2.71. Верно ли для знакопеременного ряда, что

а) если последовательность a_n монотонна, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot(-1)^n$ сходится;

б) если $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится;

в) если $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$ монотонно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится условно;

г) если $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$ монотонно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится.

1.2.72. Доказать для знакопеременных рядов следующие утверждения:

а) ряд сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся два ряда — ряд из положительных членов и ряд из отрицательных членов;

б) если ряд сходится условно, то расходятся два ряда — ряд из положительных членов и ряд из отрицательных членов;

в) если один из двух рядов (с положительными членами и отрицательными членами) сходится, а другой — расходится, то исходный ряд расходится.

1.2.73. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, что можно сказать о сходимости ряда из его положительных членов?

1.2.74. Исследовать ряд на сходимость:

а) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} - \ldots\ a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & n \text{ — четное;} \\ -\frac{1}{n^2}, & n \text{ — нечетное.} \end{cases}$

б) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^5} + \ldots\ a_n = \begin{cases} -\frac{1}{2^{k-1}}, & n = 2k-1; \\ -\frac{1}{3^{2k-1}}, & n = 2k. \end{cases}$

в) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3^3} + \ldots,\ a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1},\ a_{2k} = -\frac{1}{3^k}.$

г) $\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{9} + \ldots,\ a_{2k-1^2} = \frac{1}{4k-1},\ a_{2k} = -\frac{1}{4^k-3}.$

д) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots,\ a_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}-1},$ $a_{2k} = -\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}.$

1.2.75. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ сходится абсолютно.

1.2.76. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится абсолютно.

1.2.77. Доказать, что если ряд сходится абсолютно, то и ряд, полученный из исходного с помощью произвольной перестановки его членов, также сходится абсолютно, причем к той же сумме, что и исходный ряд.

1.2.78. *Теорема Римана.* Доказать, что если ряд сходится условно, то существует такая перестановка его членов, что полученный ряд сходится к любому наперед заданному числу или расходится заданным образом (к $+\infty$, к $-\infty$ или к ∞).

§ 3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

⇛ Выражение вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \tag{3.1}$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — постоянные числа (действительные или комплексные), а x — переменная величина (также действительная или комплексная), называется *степенным рядом*. Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *коэффициентами степенного ряда*. Сокращенно степенной ряд обозначают так: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. ⇚

⇛ Будем называть степенной ряд *действительным* (соответственно, *комплексным*) *степенным рядом*, если его коэффициенты — действительные (соответственно, комплексные) числа, а переменная x принимает действительные (соответственно, комплексные) значения. ⇚

Часто рассматривают степенные ряды более общего вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots, \tag{3.2}$$

частным случаем которых при $a = 0$ являются обычные степенные ряды (3.1). С другой стороны, каждый степенной ряд вида (3.2) с помощью замены переменной $y = x - a$ сводится к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ вида (3.1).

⇛ Придавая переменной x в степенном ряде конкретное числовое значение $x = x_0$, получим числовой ряд, который сходится или расходится. Множество всех тех значений переменной, при которых данный степенной ряд сходится, называется *областью сходимости* этого ряда. ⇚

При $x = 0$ (соответственно, при $x = a$) всякий степенной ряд вида (3.1) (соответственно, вида (3.2)) сходится, поэтому область сходимости степенного ряда содержит по крайней мере одну точку.

Теорема 1.5 (Абеля). Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ сходится в точке x_0, то он абсолютно сходится в каждой точке x, для которой $|x| < |x_0|$.

Следствие 1.1. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ расходится при некотором значении $x = x_1$, то он расходится и при всех значениях x, для которых $|x| > |x_1|$.

⇛ *Интервалом сходимости* действительного степенного ряда вида (3.1) (соответственно, вида (3.2)) называется такой интервал $(-R, R)$ (соответственно, $(a_0 - R, a_0 + R)$), что в каждой его точке ряд сходится абсолютно, а в каждой точке, лежащей вне отрезка $[-R, R]$ (соответственно, $[x_0-R, x_0+R]$), ряд расходится. На границах интервала сходимости, т. е. в точках $x = \pm R$ (соответственно, в точках $x = x_0 \pm R$), ряд может как сходиться, так и расходиться. Число R называется *радиусом сходимости* действительного степенного ряда. $\Leftarrow$

В частности, R может равняться нулю — в этом случае область сходимости ряда состоит из одной точки 0 (соответственно, x_0), или $+\infty$ — в этом случае областью сходимости является вся числовая прямая (такой ряд называется еще *всюду сходящимся*).

$\Rightarrow$ *Кругом сходимости* комплексного степенного ряда вида (3.1) (соответственно, вида (3.2)) называется такой открытый круг $|x| < R$ (соответственно, $|x-a| < R$), что в каждой его точке ряд сходится абсолютно, а в каждой точке, лежащей вне замкнутого круга $|x| \leqslant R$ (соответственно, вне замкнутого круга $|x-a| \leqslant R$), ряд расходится. $\Leftarrow$

В граничных точках круга сходимости — т. е. на окружности $|x| = R$ (соответственно, $|x-a| = R$) — ряд может как сходиться, так и расходиться. Число R называется *радиусом сходимости* комплексного степенного ряда. В частности, R может быть равно 0 — в этом случае вся область сходимости ряда состоит из одной точки 0 (соответственно, a), или $+\infty$ — в этом случае областью сходимости является вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$.

Интервал и круг сходимости ряда, как правило, определяют с помощью признака Даламбера или признака Коши, примененных к знакоположительному ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \quad \text{(соответственно, } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-a)^n|\text{)},$$

составленному из абсолютных величин членов исходного степенного ряда.

Для вычисления радиуса сходимости R степенного ряда применяются также формулы:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{и} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

в тех случаях, когда указанные пределы существуют.

1.3.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!(x-3)^{n-1}}{2^{n+1}}$.

◐ Применим признак Даламбера. Поскольку

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!(x-3)^{(n+1)-1}}{2^{(n+1)+1}} : \frac{n!(x-3)^{n-1}}{2^{n+1}}\right| =$$

$$\left|\frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(x-3)^n}{(x-3)^{n-1}} \cdot \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}}\right| = \left|(n+1)\cdot(x-3)\cdot\frac{1}{2}\right| = \frac{|x-3|}{2}\cdot(n+1),$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|}{2}\cdot(n+1) = \begin{cases} +\infty \text{ при } x-3 \neq 0,\ x \neq 3,\\ 0 \text{ при } x-3 = 0,\ x = 3.\end{cases}$$

Таким образом, ряд сходится (абсолютно) только при $x = 3$, в остальных точках числовой прямой ряд расходится. ●

1.3.2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n-1}(x+1)^n}{n^n}$.

❍ Воспользуемся признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3^{n-1}(x+1)^n}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+1|}{n} \cdot 3^{\frac{n-1}{n}} =$$

$$= |x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{3^{1-\frac{1}{n}}}{n} = |x+1| \cdot 0 = 0 < 1 \quad \text{при всех } x \in (-\infty, +\infty).$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно в каждой точке числовой прямой $(-\infty, +\infty)$. ●

1.3.3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$.

❍ Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x| = |x|.$$

(Этот же результат можно получить, применяя признак Коши: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} |x| = |x|$.) Отсюда следует, что при $|x| < 1$ (т. е. при $x \in (-1, 1)$) ряд сходится абсолютно, при $|x| > 1$ расходится. Таким образом, интервал $(-1, 1)$ — интервал сходимости данного ряда. Исследуем ряд на сходимость в граничных точках этого интервала, т. е. в точках $x = -1$ и $x = 1$.

При $x = -1$ получим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^n + \ldots$$

Этот ряд расходится, т.к. не выполнен необходимый признак сходимости ($a_n \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$).

При $x = 1$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

Этот ряд расходится по той же причине, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Итак, область сходимости данного ряда — интервал $(-1, 1)$. ●

1.3.4. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^{n+1}}{3^n(n+2)}$.

1. Применим признак Даламбера. Учитывая, что

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-2)^{(n+1)+1}}{3^{n+1}(n+1+2)} : \frac{(x-2)^{n+1}}{3^n(n+2)}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x-2)^{n+2}}{(x-2)^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{n+2}{n+3}\right| = \frac{|x-2|}{3} \cdot \frac{n+2}{n+3},$$

получим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|}{3}\cdot\frac{n+2}{n+3} = \frac{|x-2|}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3} = \frac{|x-2|}{3}.$$

Отсюда

$$\frac{|x-2|}{3} < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x-2}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5.$$

Итак, при $x \in (-1, 5)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \notin [-1, 5]$ — расходится. Значит, $(-1, 5)$ — интервал сходимости данного ряда. Исследуем сходимость ряда на концах этого интервала, т. е. в точках $x = -1$ и $x = 5$.

2. При $x = 5$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5-2)^{n+1}}{3^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{3^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n+2}.$$

Применяя 2-й признак сравнения, сравниваем этот ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n+2} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{1+\frac{2}{n}} = 3 \neq 0.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, а полученный предел не равен нулю, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3}{n+2}$ расходится.

3. При $x = -1$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1-2)^{n+1}}{3^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{3^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^{n+1}}{3^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{n+2}.$$

Этот ряд не является абсолютно сходящимся, так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3}{n+2}$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится (см. пункт 2).

Выясним, сходится ли данный знакочередующийся ряд, используя признак Лейбница.

а) Очевидно, неравенство

$$a_n = \frac{3}{n+2} > \frac{3}{(n+1)+2} = a_{n+1}$$

выполнено для всех $n = 1, 2, \ldots$

б) Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+2} = 0.$$

Итак, для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{n+2}$ выполнены оба условия, содержащиеся в признаке Лейбница, значит, данный ряд сходится. Так как он не является абсолютно сходящимся, то ряд сходится условно. Окончательно получим, область сходимости исходного ряда — промежуток $[-1, 5)$. ●

1.3.5. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^{n+1} n \ln^3 n}$.

○ 1. Применим признак Даламбера. Так как

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x+5)^{n+1}}{3^{(n+1)+1}(n+1)\ln^3(n+1)} : \frac{(x+5)^n}{3^{n+1} n \ln^3 n}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x+5)^{n+1}}{(x+5)^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln^3 n}{\ln^3(n+1)}\right| = \frac{|x+5|}{3} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln^3 n}{\ln^3(n+1)},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(|x+5|)}{3} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln^3}{\ln^3(n+1)}\right) =$$

$$= \frac{|x+5|}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^3 n}{\ln^3(n+1)} = \frac{|x+5|}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{|x+5|}{3}.$$

(При вычислении последнего предела воспользовались равенствами

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^3 n}{\ln^3(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^3 = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^3$$

и, далее, правилом Лопиталя.) Найдем интервал сходимости

$$\frac{|x+5|}{3} < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x+5}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 < x+5 < 3 \Leftrightarrow -8 < x < -2.$$

Итак, при $x \in (-8, -2)$ ряд сходится абсолютно. Исследуем сходимость ряда в точках $x = -8$ и $x = -2$.

2. При $x = -8$ получим ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-8+5)^n}{3^{n+1} n \ln^3 n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^{n+1} n \ln^3 n} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{3^{n+1} n \ln^3 n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n \ln^3 n}.$$

Исследуем этот ряд на сходимость. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n \ln^3 n}.$$

Применим интегральный признак. Так как $a_n = \dfrac{1}{3n\ln^3 n}$, то

$$f(x) = \frac{1}{3x\ln^3 x}.$$

Очевидно, что $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[2, +\infty)$, т.е.

$$\forall x_1 > x_2 > 2 \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{3x_1 \ln^3 x_1} < \frac{1}{3x_2 \ln^3 x_2} = f(x_2).$$

Так как функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на промежутке $[2, +\infty)$, то для исследования данного ряда на сходимость можно применить интегральный признак.

Сначала найдем неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{3x\ln^3 x} = \frac{1}{3}\int \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \frac{1}{3}\int (\ln x)^{-3} d(\ln x) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)(\ln x)^{-2} + C = -\frac{1}{6\ln^2 x} + C.$$

Отсюда

$$\int\limits_2^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{3x\ln^3 x} = \lim_{M\to+\infty} \int\limits_2^{M} \frac{dx}{3x\ln^3 x} =$$
$$= \lim_{M\to+\infty}\left(-\frac{1}{6\ln^2 x}\bigg|_2^M\right) = \lim_{M\to+\infty}\left(-\frac{1}{6\ln^2 M} + \frac{1}{6\ln^2 2}\right) = \frac{1}{6\ln^2 2}.$$

Так как несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{3x\ln^3 x}$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{3n\ln^3 n}$, а значит, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n\ln^3 n}$ сходится абсолютно.

3. При $x = -2$ получим ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2+5)^n}{3^{n+1} n\ln^3 n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{3^{n+1} n\ln^3 n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n\ln^3 n}.$$

Этот ряд сходится абсолютно (см. пункт 2).

Таким образом, область сходимости исходного ряда — промежуток $[-8, -2]$. ●

1.3.6. Найти круг сходимости комплексного степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^{n+1}(z+3i)^n}{(\sqrt{7}-3i)^n}.$$

❍ Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(2i)^{n+1}(z+3i)^n}{(\sqrt{7}-3i)^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}|z+3i|\cdot\frac{|(2i)^{\frac{n+1}{n}}|}{|\sqrt{7}-3i|}=$$

$$=|z+3i|\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}|2i|^{1+\frac{1}{n}}}{|\sqrt{7}-3i|}=|z+3i|\cdot\frac{|2i|}{|\sqrt{7}-3i|}=\frac{|z+3i|\cdot 2}{\sqrt{(\sqrt{7})^2+(-3)^2}}=$$

$$=\frac{|z+3i|\cdot 2}{4}=\frac{|z+3i|}{2}.$$

Найдем круг сходимости ряда:

$$\frac{|z+3i|}{2}<1\Leftrightarrow|z+3i|<2.$$

Итак, в круге $|z+3i|<2$ степенной ряд сходится абсолютно. ●

Найти область сходимости ряда. Указать применяемые признаки. Дополнительно указать:

1) для необходимого признака — $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$*;*

2) для 1-го и 2-го признаков сравнения — общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд;

3) для признака Даламбера — $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$*;*

4) для признака Коши — $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$*;*

5) для интегрального признака — первообразную для $f(x)$ *и* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$.

В задачах 1.3.7–1.3.14 для определения ***интервала*** *сходимости использовать признак Даламбера. В задачах 1.3.15–1.3.20 для определения* ***интервала*** *сходимости использовать признак Коши.*

1.3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

1.3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n-1}}{(n+1)!}$.

1.3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$.

1.3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)!(x+1)^n$.

1.3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$.

1.3.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-x)^{2n}}{\sqrt{n}}$.

1.3.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

1.3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+1}$.

1.3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^nx^n$.

1.3.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{n+1}(x-3)^n$.

1.3.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

1.3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)^n}$.

1.3.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^{2n}$.

1.3.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n(x-2)^{2n+1}$.

1.3.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}$.

1.3.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

1.3.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n^2}}{n^n}$.

1.3.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{n}$.

1.3.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^{4n}$.

1.3.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2-x)^{2n-2}}{n}$.

1.3.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \ln n}$.

1.3.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+2}$.

1.3.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n-1} \cdot n^2}$.

1.3.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n(n-1)}}{n! 2^n}$.

1.3.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{4^n n \ln^2 n}$.

1.3.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n-1}}{3^n}$.

1.3.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n (x+1)^n$.

1.3.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(x+7)^{n+1}}{3^{n-1}}$.

1.3.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2-x)^n}{2^{n+1}(n+2)^{n-1}}$.

1.3.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)!}$.

1.3.37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)^n (6-x)^{n+1} \cdot 2^{n-1}$.

Найти круг сходимости ряда. Указать применяемые признаки.

1.3.38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(z-i)^n$.

1.3.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2i)^{2n}}{n^2}$.

1.3.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n^n}$.

1.3.41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+i}\right)^n (z-i)^n$.

1.3.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n i^n}$.

Дополнительные задания

Найти область сходимости ряда. Указать применяемые признаки. Дополнительно указать:

1) для необходимого признака — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

2) для 1-го и 2-го признаков сравнения — общий член ряда, с которым сравнивается данный ряд;

3) для признака Даламбера — $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$;

4) для признака Коши — $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$;

5) для интегрального признака — первообразную для $f(x)$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

В задачах 1.3.43–1.3.46 для определения интервала сходимости использовать признак Даламбера.

В задачах 1.3.47–1.3.49 для определения интервала сходимости использовать признак Коши.

1.3.43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$.

1.3.44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{5n}}{2n-1}$.

1.3.45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^{n+1}}{2^{n-1}}$.

1.3.46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}x^{n+2}}{n!}$.

1.3.47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(2x+3)^{n-1}}{n^n}$.

1.3.48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n(x+1)^{n+1}}{3^{n-1}}$.

1.3.49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n^n}$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

1.3.50. Может ли интервал сходимости ряда $\sum a_n x^n$ быть таким:
а) $(-2;0)$; **б)** $(0;2)$;
в) $(-3;1)$; **г)** $(-\infty;\infty)$;
д) $(-3;3)$.

1.3.51. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-3)^n$ в точке $x=2$ расходится. Что можно сказать о сходимости ряда в точке:
а) $x=5$; **б)** $x=3{,}5$;
в) $x=4$.

1.3.52. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-3)^n$ в точке $x=2$ сходится абсолютно. Что можно сказать о сходимости ряда в точке:
а) $x=5$; **б)** $x=3{,}5$;
в) $x=4$.

1.3.53. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-(1+i))^n$ в точке $z=i$ сходится условно. Что можно сказать о сходимости ряда в точке:
а) $z=1$; **б)** $z=0$;
в) $z=\frac{1+i}{2}$.

1.3.54. Существует ли степенной ряд, для которого верно следующее утверждение:

а) на обоих концах интервала сходимости ряд расходится;

б) на одном конце интервала сходимости ряд сходится условно, а на другом — сходится абсолютно;

в) на обоих концах интервала сходимости ряд сходится абсолютно;

г) на одном конце интервала сходимости ряд сходится условно, а на другом — расходится;

д) на одном конце интервала сходимости ряд сходиться абсолютно, а на другом — расходится.

1.3.55. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$.

1.3.56. Степенный ряд сходится условно в точках $z_1 = 3+2i$ и $z_2 = -1-i$. Что можно сказать о сходимости ряда в других точках комплексной плоскости?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{n^2}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{n+2}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)$;

г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2i+(-1)^n n}{n^2}$.

2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2-x)^n}{n+1}$.

3. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{3n}$.

Вариант 2

1. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arcctg}(n+3)}{2-n^3}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n+2}$.

2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x+1)^n \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n$.

3. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{2^{n+1}}$.

Вариант 3

1. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{n^2+2}{n^2}\right)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n+1}}{n^2 \cdot 5^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{3n+2}\right)^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(3+i)^n}$.

2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n+2}$.

3. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-i)^{2n}}{n+1}$.

Вариант 4

1. Исследовать ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+3}{n+2}\right)^{2n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)\sqrt{\ln(2n+1)}}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^2+3n}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(i+1)^n}{3+i}$.

2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+2}{n}\right) x^{3n}$.

3. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+2i)^{n+1}}{n^2}$.

§ 4. РЯДЫ ФУРЬЕ

Ряды Фурье

⇛ Пусть функция $f(x)$ — интегрируемая и периодическая с периодом 2π. *Коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ называются числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, которые находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{4.1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \ (n = 1, 2, \ldots), \tag{4.2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.3}$$

Рядом Фурье функции $f(x)$ называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad \Leftarrow$$

Условия сходимости ряда Фурье

Ряд Фурье интегрируемой функции $f(x)$ может либо расходиться, либо сходиться, причем как к функции $f(x)$, так и к функции, отличной от нее. Условия сходимости ряда Фурье были установлены немецким математиком Дирихле.

Теорема 1.6 (Дирихле). Если функция $f(x)$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва на отрезке $[-\pi, \pi]$ и при этом монотонна или имеет конечное число экстремумов на $[-\pi, \pi]$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится для любых x из $[-\pi, \pi]$ и его сумма равна:

1) $f(x)$ для всех точек непрерывности x из интервала $(-\pi, \pi)$;
2) $\frac{1}{2}\big(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\big)$ для всех точек разрыва x_0;
3) $\frac{1}{2}\big(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)\big)$ при $x = -\pi$ и $x = \pi$.

Ряд Фурье для четных и нечетных функций

Пусть $f(x)$ — четная функция ($f(-x) = f(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$). Тогда $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$), и, следовательно, четная функция разлагается в ряд Фурье по косинусам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$\text{где } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.4}$$

Аналогично нечетная функция $f(x)$ (т. е. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$) разлагается в ряд Фурье по синусам:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

$$\text{где } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.5}$$

Ряд Фурье функции, заданной на произвольном промежутке

Пусть $f(x)$ — периодическая с периодом $2l$ функция, удовлетворяющая условиям теоремы Дирихле на интервале $(-l, l)$. Тогда ее разложение в ряд Фурье имеет следующий вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ряд Фурье четной функции $f(x)$ содержит только свободный член и косинусы

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{T},$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Нечетная функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье по синусам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{4.6}$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.7}$$

1.4.1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) \equiv 1$, заданную на интервале $(-\pi, \pi)$.

❍ Функция четная, поэтому она разлагается в ряд Фурье по косинусам, а коэффициенты a_n можно найти по формулам (4.4):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dx = \frac{2}{\pi}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\pi = 2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\sin nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n}(\sin\pi n - \sin 0) = \frac{2}{\pi n}(0 - 0) = 0.$$

Итак, $a_0 = 2$, $a_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, в данном случае ряд Фурье состоит из единственного ненулевого слагаемого, равного $\frac{a_0}{2} = \frac{2}{2} = 1$, и разложение имеет тривиальный вид: $1 = 1$. ●

Разложить в ряд Фурье данные функции, заданные на интервале $(-\pi, \pi)$:

1.4.2. $f(x) = \cos^2 x$. **1.4.3.** $f(x) = \sin^2 x$.

1.4.4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

○ Функция нечетная, поэтому она разлагается в ряд Фурье по синусам. Находим коэффициенты b_n по формулам (4.5):

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx = -\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^\pi =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}(\cos\pi n - \cos 0) = -\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right) = \frac{2}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{4}{\pi(2k-1)}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Окончательно получаем

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right).$$

Положим в этом равенстве $x = \frac{\pi}{4}$. Тогда

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1} + \frac{\sin 3\pi 2}{3} + \frac{\sin 5\pi 2}{5} + \ldots\right) = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right),$$

откуда $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1} + \ldots$, т. е. мы получили разложение в бесконечный ряд числа $\frac{\pi}{4}$. Впервые это разложение было открыто знаменитым немецким математиком и философом Лейбницем (1646–1716). ●

1.4.5. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 3, & -\pi < x < 0, \\ -3, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

1.4.6. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$.

○ Функция нечетная, поэтому $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Осталось определить коэффициенты b_n по формуле (4.5), т. е.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx.$$

Для вычисления последнего интеграла применим метод интегрирования по частям. Положим $u = x$, $dv = \sin nx\,dx$. Тогда $du = dx$, $v = \int \sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\cos nx$, откуда

$$\int\limits_0^\pi x\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int\limits_0^\pi \cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n}(\pi\cos\pi n - 0) + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^\pi = -\frac{\pi}{n}(-1)^n = \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}.$$

Окончательно получаем $b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$, стало быть,

$$f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n} = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right).$$

Подставив значение $x = \frac{\pi}{2}$ в это равенство, придем к уже встречавшемуся нам в задаче 1.4.4 ряду Лейбница

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1} - \frac{\sin\pi}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3} - \frac{\sin 2\pi}{4} + \ldots\right), \text{ или}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1} + \ldots$$ ●

Разложить в ряд Фурье функции, заданные на интервале $(-\pi, \pi)$:

1.4.7. $f(x) = 1 - 2x$. **1.4.8.** $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$.

1.4.9. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0, \\ -4, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

❍ Функция общего вида, поэтому коэффициенты Фурье находим по формулам (4.1)–(4.3):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} 2\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (-4)\,dx = \frac{2}{\pi}x\Big|_{-\pi}^0 - \frac{4}{\pi}x\Big|_0^\pi = 2 - 4 = -2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} 2\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (-4)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^0 - \frac{4}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} 2\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (-4)\sin nx\,dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_{-\pi}^0 + \frac{4}{\pi n}\cos nx\Big|_0^\pi = -\frac{2}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right) + \frac{4}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\dfrac{12}{\pi n}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

В итоге имеем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = -1 - \frac{12}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}. \qquad \bullet$$

Разложить в ряд Фурье функции, заданные на интервале $(-\pi, \pi)$:

1.4.10. $f(x) = \begin{cases} 5, & -\pi < x < 0, \\ -3, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

1.4.11. $f(x) = \begin{cases} -7, & -\pi < x < 0, \\ 2, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

Разложить в ряд Фурье функции, заданные на интервале $[-\pi; \pi]$:

1.4.12. $f(x) = x^2$. **1.4.13.** $f(x) = |x|$.

1.4.14. Используя разложение из задачи 1.4.12, вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

1.4.15. При помощи разложения из задачи 1.4.13, найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2k-1)^2}$.

На интервале $(-\pi, \pi)$ разложить в ряд Фурье следующие функции:

1.4.16. $f(x) = 1 - \frac{1}{4}|x|$.

1.4.17. $f(x) = \sin ax$ (a — не целое число).

1.4.18. $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x \leqslant 0, \\ 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

1.4.19. С помощью разложения из задачи 1.4.18, найти сумму ряда $1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \ldots + \dfrac{1}{(2k-1)^2} + \ldots$.

1.4.20. Разложить в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0, \pi]$ функцию
$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

○ Продолжим функцию на отрезок $[-\pi, 0]$ нечетным образом (рис. 1). Тогда полученная функция нечетная и ее ряд Фурье содержит только

Рис. 1

синусы. Найдем коэффициенты b_n $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx\right) + \frac{2}{\pi}\cdot\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos\frac{\pi}{2}n}{2n} + \frac{\sin nx}{n^2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) + 2\left(-\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) -$$

$$- \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx\,dx\right) = -\frac{\cos\frac{\pi}{2}n}{n} + \frac{2\sin\frac{\pi}{2}n}{\pi n^2} -$$

$$- \frac{2\cos\pi n}{n} + \frac{2\cos\frac{\pi}{2}n}{n} + \frac{2\cos\pi n}{n} - \frac{\cos\frac{\pi}{2}n}{n} - \frac{2}{\pi n^2}\sin nx\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{2}n}{\pi n^2} + \frac{2\sin\frac{\pi}{2}n}{\pi n^2} = \frac{4\sin\frac{\pi}{2}n}{\pi n^2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^2}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Таким образом, $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}\sin(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

При $x = \frac{\pi}{2}$ имеем $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \ldots\right)$, откуда еще раз находим, что сумма ряда $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \ldots$ равна $\frac{\pi^2}{8}$. ●

1.4.21. Разложить в ряд Фурье по синусам на интервале $(0, \pi)$ следующие функции

а) $f(x) = x$; б) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$.

1.4.22. Разложить в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0, \pi]$ функцию $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$.

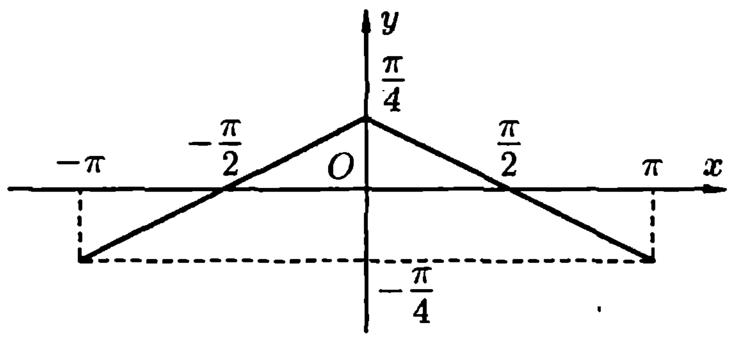


Рис. 2

❍ Продолжим данную функцию на отрезок $[-\pi, 0]$ четным образом (рис. 2). В результате получится четная функция, ряд Фурье которой состоит только из косинусов. Вычислим коэффициенты a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ по формулам (4.4):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4}\right) = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{2n}\Big|_0^\pi - \frac{x\sin nx}{\pi n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi n}\int_0^\pi \sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2n}(\sin\pi n - \sin 0) - \frac{1}{\pi n}(\pi\sin\pi n - 0\cdot\sin 0) - \frac{\cos nx}{\pi n^2}\Big|_0^\pi =$$

$$= -\frac{1}{\pi n^2}(\cos\pi n - \cos 0) = \frac{1}{\pi n^2}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{2}{\pi n^2}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Итак, $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$. Положим в этой формуле $x = 0$. Тогда $\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}$, откуда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \ldots = \dfrac{\pi^2}{8}$, что совпадает с найденным ранее значением для суммы этого ряда. ●

1.4.23. Разложить в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0, \pi]$ следующие функции

а) $f(x) = -x$; б) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$;

в) $f(x) = -x^2$; г) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

1.4.24. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на интервале $(-3, 3)$.

◆ Функция нечетная и поэтому разлагается в ряд Фурье по синусам (формулы (4.6)–(4.7)). В нашем случае $f(x) = x$, $l = 3$, следовательно,

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 x\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx =$$

$$\left[u = x,\ dv = \sin\frac{n\pi x}{3},\ du = dx,\ v = \int\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx = -\frac{3}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{3}\right]$$

$$= -\frac{2}{\pi n}x\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 + \frac{2}{\pi n}\int_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx = -\frac{6}{\pi n}\cos\pi n + \frac{2\cdot 3}{(\pi n)^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 =$$

$$= -\frac{6}{\pi n}(-1)^n + \frac{6}{\pi^2 n^2}(\sin\pi n - \sin 0) = \frac{6}{\pi n}(-1)^{n+1}.$$

Итак,

$$f(x) = x = \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{3}}{n} = \frac{6}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{3}}{1} - \frac{\sin\frac{2\pi x}{3}}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{3}}{3} - \ldots\right).$$ ●

Разложить в ряд Фурье данные функции на указанных промежутках:

1.4.25. $f(x) = x$, $(-2, 2)$.

1.4.26. $f(x) = x$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

1.4.27. $f(x) = |x|$, $(-2, 2)$.

1.4.28. $f(x) = |x|$, $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

1.4.29. $f(x) = x^2$, $(-3, 3)$.

1.4.30. $f(x) = x^2$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Дополнительные задания

Разложить в ряд Фурье данные функции на интервале $(-\pi, \pi)$:

1.4.31. $f(x) = \begin{cases} 9, & -\pi < x < 0, \\ 5, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

1.4.32. $f(x) = \begin{cases} a, & -\pi < x < 0, \\ b, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

1.4.33. $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$.

1.4.34. $f(x) = \cos ax$ (a — не целое число).

1.4.35. $f(x) = \begin{cases} \frac{2a}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + x\right), & -\pi < x < 0, \\ \frac{2a}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$

1.4.36. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$

1.4.37. При помощи разложения из задачи 1.4.35 вычислите сумму ряда $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \ldots$

1.4.38. Используя разложение задачи 1.4.36, найдите сумму ряда

а) $1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \ldots + \dfrac{1}{(2k-1)^2} + \ldots$;

б) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ (ряд Лейбница).

1.4.39. Разложите в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

Разложить в ряд Фурье на интервале $(-l, l)$ следующие функции:

1.4.40. $f(x) = x$.

1.4.41. $f(x) = |x|$.

1.4.42. $f(x) = x^2$.

Более сложные задания

1.4.43. Разложить в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$ функцию $f(x) = e^x$.

1.4.44. Разложить в ряд Фурье по синусам на интервале $(0, \pi)$ функцию

а) $f(x) = x^2$;

б) $f(x) = \cos ax$, где a — целое число.

1.4.45. Разложить в ряд Фурье по косинусам на интервале $(0, \pi)$ функцию $f(x) = \sin ax$, где a — целое число.

1.4.46. Разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

1.4.47. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[0, 3]$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & 1 < x < 2; \\ 3 - x, & 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

1.4.48. Разложить функцию $f(x) = e^x$ в ряд Фурье на интервале $[-l, l]$.

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

$\Rrightarrow$ Уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

связывающее между собой независимую переменную, искомую (неизвестную) функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$ называется *дифференциальным уравнением первого порядка.* $\Lleftarrow$

Если уравнение (1.1) можно записать в виде $y' = f(x, y)$, то говорят, что оно разрешимо относительно производной. Это уравнение иногда записывают в виде $dy = f(x, y)\,dx$ или, более общо,

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

(дифференциальная форма).

$\Rrightarrow$ *Решением* (или *интегралом*) дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. График функции $y = \varphi(x)$ в этом случае называется *интегральной кривой.* Процесс нахождения решений данного дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка (1.1), удовлетворяющего заданному *начальному условию* $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши.* $\Lleftarrow$

Геометрически это равносильно следующему: требуется найти интегральную кривую уравнения (1.1), проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$.

$\Rrightarrow$ *Общим решением* уравнения (1.1) называется такая функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{1.2}$$

где C — произвольная постоянная, что:

1) при любом конкретном значении C она является решением этого уравнения;

2) для любого допустимого начального условия $y(x_0) = y_0$ найдется такое значение постоянной $C = C_0$, что $\varphi(x_0, C_0) = y_0$. $\Lleftarrow$

В некоторых случаях общее решение дифференциального уравнения приходится записывать в неявном виде: $\Phi(x, y, C) = 0$. Тогда соотношение $\Phi(x, y, C) = 0$ называется *общим интегралом* этого уравнения.

Геометрически общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Oxy.

⇛ *Частным решением* дифференциального уравнения первого порядка называется функция

$$y = \varphi(x, C_0),$$

получаемая из общего решения (1.2) при конкретном значении постоянной $C = C_0$.

Частным интегралом уравнения (1.1) называется равенство $\Phi(x, y, C_0) = 0$, полученное из общего интеграла при фиксированном значении C. ⇚

Теорема 2.1[1]. Пусть в дифференциальном уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy. Тогда для любой точки $M(x_0, y_0) \in D$ существует и притом единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

В каждой точке $(x_0, y_0) \in D$ число $f(x_0, y_0)$ выражает угловой коэффициент касательной к кривой $y = y(x)$. Поэтому каждой точке области D уравнение $y' = f(x, y)$ ставит в соответствие некоторое направление — геометрически его можно изобразить черточкой (стрелкой), проходящей через эту точку. Тем самым уравнение $y' = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ определяет *поле направлений* на плоскости.

Множество точек $(x, y) \in D$, в которых $y' = k$, где k — постоянная, или, что то же самое, $f(x, y) = k$ (линия уровня функции $f(x, y)$), называется *изоклиной* дифференциального уравнения. В точках изоклины направление поля одинаково, т. е. направления касательных в точках изоклины (или соответствующие черточки) параллельны.

Придавая k близкие числовые значения, можно построить достаточную густую сеть изоклин, а с их помощью — приближенно нарисовать вид интегральных кривых, т. е. решений дифференциального уравнения. Этот метод, *метод изоклин*, или графический (геометрический) метод решения дифференциальных уравнений, особенно ценен в том случае, когда решение, общее или частное, уравнения не выражается в элементарных функциях — интеграл не берется.

Некоторые дифференциальные уравнения могут иметь такие решения, которые не получаются из общего ни при каких значениях произвольной постоянной. Эти решения не являются частными и поэтому называются *особыми*. Особые решения могут иметь только те уравнения, для которых нарушаются условия теоремы существования и единственности решения.

⇛ Уравнение вида

$$P_1(x) \cdot Q_1(y)\,dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)\,dy = 0 \tag{1.3}$$

называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*. ⇚

[1]Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.

Уравнение (1.3) путем деления на произведение $Q_1(y)\cdot P_2(x)$ приводится к уравнению с *разделенными переменными*

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,dy=0 \tag{1.4}$$

(коэффициент при dx зависит только от x, а при dy — только от y).

Общий интеграл полученного уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx+\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,dy=C.$$

Заметим, что уравнению (1.3) могут удовлетворять решения, потерянные при делении на $Q_1(y)\cdot P_2(x)$, т.е. получаемые из уравнения $Q_1(y)\cdot P_2(x)=0$. Если эти решения не входят в найденный общий интеграл, то они являются особыми решениями уравнения (1.3).

Уравнение $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$ сводится к уравнению (1.4). Для этого достаточно положить $y'=\dfrac{dy}{dx}$ и разделить переменные.

2.1.1. Показать, что данная функция является решением данного дифференциального уравнения.

а) $y=(x+C)e^x$, $y'-y=e^x$;

б) $y=-\dfrac{2}{x^2}$, $xy^2\,dx-dy=0$;

в) $x^2-xy+y^2=C$, $(x-2y)y'-2x+y=0$.

а) Находим производную данной функции: $y'=e^x+(x+C)e^x$. Теперь подставим значения y и y' в заданное уравнение: $e^x+(x+C)e^x-(x+C)e^x=$ $=e^x$. Получили тождество $e^x=e^x$. Следовательно, функция $y=(x+C)e^x$ является решением уравнения $y'-y=e^x$.

б) Сначала находим dy: $dy=\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)'_x dx=\dfrac{4}{x^3}\,dx$. Подставив значения y и dy в данное уравнение, получим тождество: $x\cdot\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)^2dx-\dfrac{4}{x^3}\,dx=0$, т.е. $0=0$. Значит, функция $y=-\dfrac{2}{x^2}$ — действительно решение исходного уравнения.

в) Найдем производную неявной функции, для чего продифференцируем обе части уравнения $x^2-xy+y^2=C$ по x: $2x-y-xy'+2yy'=0$, откуда $y'=\dfrac{y-2x}{2y-x}$, $x\neq 2y$. Подставим полученное выражение для y' в данное дифференциальное уравнение: $(x-2y)\cdot\dfrac{y-2x}{2y-x}-2x+y=0$. Уравнение обращается в тождество, т.е. функция $x^2-xy+y^2=C$ является интегралом исходного уравнения. ●

2.1.2. Показать, что заданные функции являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

а) $y=\ln\cos x$, $y'=-\operatorname{tg}x$;

б) $x^2 + 2xy = C$, $(x + y)\,dx + x\,dy = 0$;

в) $y = C \cdot \sin x$, $y' \operatorname{tg} x - y = 0$;

г) $y = Ce^{-3x}$, $y' + 3y = 0$;

д) $y - x = Ce^{y}$, $(x - y + 1)y' = 1$;

е) $y = Ce^{x^3}$, $dy - 3x^2 y\,dx = 0$.

2.1.3. Проверить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений указанные функции:

а) $y = \dfrac{1}{3(x+1)}$, $y' = 3y^2$;

б) $v = \dfrac{c}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{a}}\right)$, $a\dfrac{dv}{dt} + bv - c = 0$;

в) $y = 3 - e^{-x^2}$, $xy' + 2y = e^{-x^2}$;

г) $x^2 + t^2 - 2t = C$, $x\dfrac{dx}{dt} + t = 1$.

2.1.4. Решить задачу Коши:

а) $y' = \sin 5x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$; б) $\dfrac{dx}{dt} = 3$, $x = 1$ при $t = -1$.

○ а) Проинтегрируем обе части уравнения:

$$y = \int \sin 5x\,dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

Теперь найдем частное решение уравнения. Подставив $x = \dfrac{\pi}{2}$ и $y = 1$ в найденное решение, получим искомое значение C: $1 = -\dfrac{1}{5}\cos\dfrac{5\pi}{2} + C$, откуда $C = 1$. Таким образом решением задачи Коши является функция $y = -\dfrac{1}{5}\cos 5x + 1$.

б) Интегрируя, находим: $x = 3t + C$, откуда, с учетом начального условия, имеем: $1 = 3 \cdot (-1) + C$, $C = 4$. Искомое частное решение есть функция $x = 3t + 4$. ●

2.1.5. Решить задачу Коши:

а) $y' = 2x + 1$, $y(2) = 5$; б) $y' = e^{-3x}$, $y(0) = \dfrac{2}{3}$.

2.1.6. Составить дифференциальное уравнение по заданному семейству интегральных кривых:

а) $y = Cx^3$;

б) семейство парабол, с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью абсцисс.

○ а) Продифференцировав по x равенство $y = Cx^3$, получим: $y' = 3Cx^2$. Кроме того, очевидно, $C = \dfrac{y}{x^3}$. Подставляя это выражение для C в равенство $y' = 3Cx^2$, получаем искомое дифференциальное уравнение: $y' = 3 \cdot \dfrac{y}{x^3} \cdot x^2$, т.е. $xy' = 3y$.

б) Заданное в условии семейство парабол определяется уравнением $y^2 = Cx$. Отсюда $2y \cdot y' = C$. Исключив из равенств $y^2 = Cx$ и $2y \cdot y' = C$ параметр C, получим дифференциальное уравнение $2xy' - y = 0$. ●

2.1.7. Изобразить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения:

а) $y' = 3$; б) $y' = \frac{2}{x}$.

2.1.8. Составить дифференциальные уравнения заданных семейств интегральных кривых:

а) $y = \frac{C}{x}$; б) $x^3 = C(x^2 - y^2)$.

2.1.9. Составить дифференциальное уравнение:

а) процесса изменения температуры тела в среде с температурой t_0, если скорость изменения температуры пропорциональна разности температур тела и среды;

б) процесса изменения численности населения страны, считая, что скорость прироста населения пропорциональна его численности.

а) Обозначим через $T(t)$ температуру тела в момент времени t. Скорость изменения температуры тела равна $\frac{dT}{dt}$. Разность температур тела и среды равна $T - t_0$. Тогда дифференциальное уравнение процесса согласно условию задачи будет таким: $\frac{dT}{dt} = -k(T - t_0)$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. Если $T - t_0 > 0$, то скорость изменения температуры отрицательна, т. е. что температура тела понижается; если $T - t_0 < 0$, то скорость положительна — тело нагревается.

б) Обозначим численность населения страны в момент времени t через $N(t)$. Тогда дифференциальное уравнение процесса изменения численности населения будет таким $\frac{dN}{dt} = kN$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. ●

2.1.10. Составить дифференциальное уравнение изменения скорости при замедленном прямолинейном движении тела массы m_0 под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости (k — коэффициент пропорциональности). Использовать второй закон Ньютона.

2.1.11. Составить дифференциальное уравнение изменения массы радия в зависимости от времени («радиоактивный распад»), считая, что скорость распада радия прямо пропорциональна (коэффициент $k > 0$) его количеству в каждый момент времени.

2.1.12. Дано дифференциальное уравнение $y' = x^2$. Построить поле направлений. Методом изоклин построить приближенно графики интегральных кривых. Сравнить их с точными интегральными кривыми.

Имеем $f(x, y) = x^2$, $f'_y(x, y) = 0$. Условия теоремы существования и единственности выполняются во всех точках плоскости Oxy. Через каждую точку проходит единственная интегральная кривая и различные интегральные кривые не пересекаются.

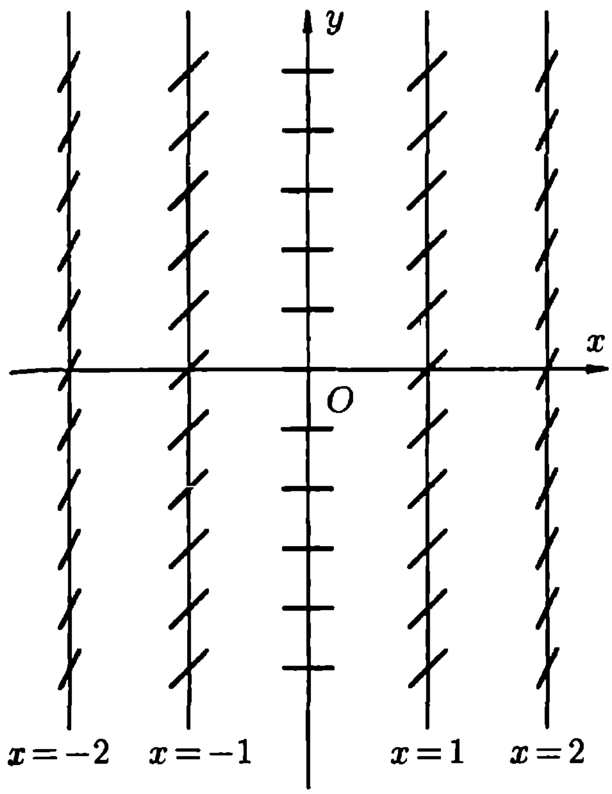


Рис. 3

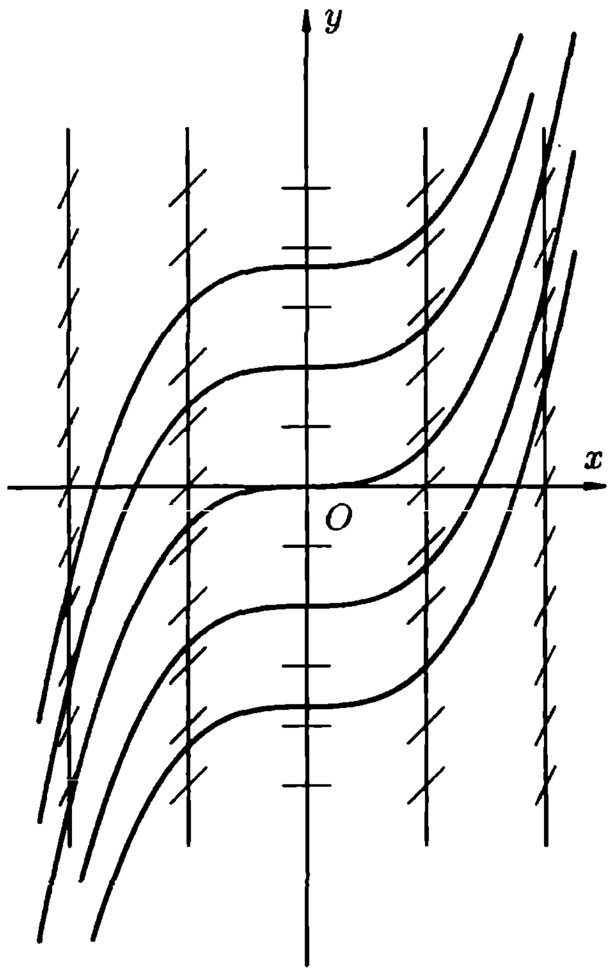


Рис. 4

При $x = 0$ и любом $y \in (-\infty, +\infty)$ имеем $y' = 0$, т. е. во всех точках оси Oy поле горизонтально (рис. 3). При $x = 1$ и любом $y \in (-\infty, +\infty)$ имеем $y' = 1$ (поле образует угол 45° с осью Ox), при $x = 1$ поле также образует с осью Ox угол 45°. Поле симметрично относительно оси Ox. Построим теперь интегральные кривые, которые в каждой точке касаются «поля». Полученные кривые напоминают кубические параболы (рис. 4). Точные интегральные кривые имеют вид $y = \frac{x^3}{3} + C$. ●

Для следующих дифференциальных уравнений построить поле направлений и приближенным образом построить некоторые интегральные кривые

2.1.13. $y' = -x + y$. **2.1.14.** $y' = x - 1$.

2.1.15. Решить уравнение $(x - xy^2)dx + (y - yx^2)dy = 0$. Имеет ли оно особые решения?

○ Преобразовывая, запишем данное уравнение в виде (1.3):

$$x(1 - y^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на $(1 - y^2)(1 - x^2)$. Получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{x}{1-x^2}\,dx + \frac{y}{1-y^2}\,dy = 0.$$

Интегрируя обе части уравнения, имеем:

$$-\frac{1}{2}\ln|1-x^2| - \frac{1}{2}\ln|1-y^2| = -\frac{1}{2}\ln|C|, \quad C \neq 0$$

(произвольную постоянную здесь удобно записать именно так: $-\frac{1}{2}\ln|C|$), т. е. $(1-x^2)(1-y^2) = C$, где $C \neq 0$; это возможно, так $\ln|C|$ может принимать любые действительные значения. Получили общий интеграл исходного уравнения. При делении на $(1-y^2)(1-x^2)$ мы могли потерять решения $y = 1$, $y = -1$, $x = 1$, $x = -1$, но они содержатся в общем интеграле, если подставить дополнительное значение $C = 0$. Таким образом, особых решений данное уравнение не имеет. ●

Решить дифференциальные уравнения:

2.1.16. $(1+y)\,dx - (1-x)\,dy = 0$.

2.1.17. $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

2.1.18. $xyy' = 1 - x^2$.

2.1.19. $y'(1+y) = xy\sin x$.

2.1.20. $e^y(1+y') = 1$.

2.1.21. $y' - xy^2 = 0$.

2.1.22. Найти частное решение уравнения

$$y\,dx + \operatorname{ctg} x\,dy = 0, \qquad y\big|_{x=\frac{\pi}{3}} = -1.$$

❍ Это уравнение имеет вид (1.3). Разделяя переменные и интегрируя, находим общее решение заданного уравнения:

$$\operatorname{tg} x\,dx + \frac{1}{y}\,dy = 0, \qquad \int \operatorname{tg} x\,dx + \int \frac{dy}{y} = \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0, \qquad \text{откуда}$$

$$\ln|y| - \ln|\cos x| = \ln|C_1|, \qquad |y| = |C_1\cos x|, \quad \text{т. е.}$$

$$y = \pm C_1\cos x, \quad \text{или} \quad y = C\cos x \qquad (\text{положили } C = \pm C_1).$$

Подставляя в найденное общее решение $y = -1$ и $x = \frac{\pi}{3}$ (используем начальное условие), находим постоянную C. А именно:

$$-1 = C\cos\frac{\pi}{3}, \qquad C = -2.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид: $y = -2\cos x$. ●

Найти частные решения дифференциальных уравнений:

2.1.23. $2\sqrt{y}\,dx - dy = 0$, $y(0) = 1$.

2.1.24. $y' = 8\sqrt{y}$, $y(0) = 4$.

2.1.25. $y'\sin x - y\ln y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

2.1.26. $(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$, $y(1) = 2$.

2.1.27. Определить численность населения России через 20 лет, считая, что скорость прироста населения пропорциональна его наличному количеству, и зная, что население России в 2000 году составляло 145 млн человек, а прирост населения за 2000 год был равен $\alpha\%$. (Вычислить при $\alpha = 2\%$, $\alpha = -1\%$.)

○ Обозначим численность населения России в момент времени t через $N = N(t)$. Дифференциальное уравнение исследуемого процесса (скорость «прироста» численности населения) имеет вид $\frac{dN}{dt} = kN$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности (см. задачу 2.1.9). Отсюда находим, что $\frac{dN}{N} = k\,dt$, откуда $\ln|N| - \ln|C| = kt$, т.е. $\left|\ln\frac{N}{C}\right| = kt$, т.е., учитывая, что $N > 0$, имеем $N = Ce^{kt}$ — общее решение уравнения. Согласно условию задачи $N = 145$ при $t = 0$. Находим частное решение: $145 = Ce^0$, т.е. $C = 145$, $N = 145e^{kt}$. Найдем значение коэффициента k, зная, что в конце 2000 года, т.е. при $t = 1$, население России равно $N = 145 + \frac{\alpha}{100} \cdot 145$ млн человек: $145 + \frac{\alpha}{100} \cdot 145 = 145e^k$. Отсюда $e^k = 1 + \frac{\alpha}{100}$, т.е. $k = \ln\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)$. Равенство $N = 145e^{kt}$ теперь можно переписать так: $N = 145\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^t$. Таким образом через 20 лет численность населения составит:

при $\alpha = 2\%$: $N = 145 \cdot (1{,}02)^{20} \approx 215$ (млн человек);

при $\alpha = -1\%$: $N = 145 \cdot (0{,}99)^{20} \approx 119$ (млн человек). ●

2.1.28. Тело движется со скоростью, пропорциональной пройденному пути. Какой путь пройдет тело за 5 секунд от начала движения, если известно, что за 1 секунду оно проходит путь 8 м, а за 3 секунды — 40 м?

2.1.29. Известно, что тело охлаждается в течение 15 мин от 100° до 80°. Через сколько минут температура тела понизится до 40°, если температура окружающей среды составляет 10°? (Скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, см. задачу 2.1.9.)

Дополнительные задачи

2.1.30. В заданном семействе кривых найти линию, удовлетворяющую начальному условию:

а) $y(1 - Cx) = 1$, $y(2) = \frac{1}{3}$; б) $y^2 - x^2 = C$, $y(0) = 1$.

2.1.31. Убедиться, что заданная функция является решением соответствующего дифференциального уравнения:

а) $y = x + x\int \frac{e^x}{x}\,dx$, $xy' - y = xe^x$;

б) $\ln(4x+8y+5)+8y-4x = C$, $(x+2y+1)dx-(2x+4y+3)dy = 0$.

2.1.32. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых, для которых отрезок любой касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания. (Использовать геометрический смысл производной).

2.1.33. Решить дифференциальное уравнение:

а) $\dfrac{dy}{dx} = 2\cos x$; б) $\sin y' = 1$.

2.1.34. При каком значении C заданная функция является решением данного уравнения:

а) $s = Ct + 4$, $s' = -1$; б) $y = x^3$, $y' = Cx^2$.

2.1.35. Написать уравнение геометрического места точек (x, y), являющихся точками максимума или минимума решений уравнения $y' = f(x, y)$.

2.1.36. Как доказать, что $xy + \ln\dfrac{y}{x} = C$ есть общий интеграл уравнения $x(1 + xy)y' = y(1 - xy)$?

2.1.37. Зная, что $y = C\ln x$ является общим решением уравнения

$$xy'\ln x = y,$$

найти интегральную кривую, проходящую через точку $M(e, 1)$.

2.1.38. Какая из функций:

$$y = e^x, \quad y = 2, \quad y = \frac{1}{x+1}, \quad y = \sqrt{\ln(x+1)}$$

является решением дифференциального уравнения

$$y\,dy = \frac{dx}{2(x+1)}?$$

2.1.39. Решить уравнения:

а) $2y' = 0$; б) $y' = x$;

в) $y' = y$.

2.1.40. Какие из приведенных уравнений являются уравнениями с разделяющимися переменными?

а) $y' = 3y - 1$; б) $x\,dy + y\,dx = y^2\,dx$;

в) $(1 - x^2)y' + xy = 1$; г) $xy' + y = \cos y$;

д) $y' = (x + y)^2$; е) $y' + x^2y = e^x$;

ж) $y' - xy^2 = 2xy$; з) $e^{-y}\left(1 + \dfrac{dy}{dx}\right) = 1$;

и) $x^2y' - 1 = \cos 2y$; к) $y = xe^{y'}$.

Решить дифференциальные уравнения:

2.1.41. $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0$.

2.1.42. $y' = 3^{x-y}$.

2.1.43. $y' = \dfrac{y+1}{x+1}$.

2.1.44. $ds + s\,\mathrm{tg}\,t\,dt = 0$.

2.1.45. $\dfrac{yy'}{x} + e^y = 0$.

2.1.46. $x + xy + y'(y + xy) = 0$.

2.1.47. $y' + y = 5$.

2.1.48. $v' - 4tv = 0$.

2.1.49. $dy - y\cos^2 x\,dx = 0$.

2.1.50. $y' = \sin\dfrac{x-y}{2} - \sin\dfrac{x+y}{2}$.

2.1.51. $(e^x + 1)e^y y' + e^x(1 + e^y) = 0$.

2.1.52. $y' + \dfrac{x\sin x}{y\cos y} = 0$.

2.1.53. $y' = \cos(y - x)$. (Положить $y - x = t$.)

2.1.54. $(xy + x)\dfrac{dx}{dy} = 1$.

2.1.55. $6x\,dx - 6y\,dy - 2x^2y\,dy + 3xy^2\,dx = 0$.

2.1.56. $x^2\,dy + (y - a)\,dx = 0$. **2.1.57.** $y'\operatorname{tg} x - y = a$.

2.1.58. $y'\cos x - (y + 1)\sin x = 0$. **2.1.59.** $y' - 2y\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x$.

2.1.60. $y - xy' = 1 + x^2y'$. **2.1.61.** $\dfrac{dx}{x(y - 1)} = \dfrac{dy}{y(x + 2)}$.

2.1.62. $y' = \dfrac{y\ln^3 y}{\sqrt{x + 1}}$. **2.1.63.** $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}y' = 0$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений:

2.1.64. $x^2\,dy - y^2\,dx = 0$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$.

2.1.65. $1 + y^2 = xyy'$, $y(2) = 1$.

2.1.66. $(x + xy^2)\,dx + (x^2y - y)\,dy = 0$, $y(0) = 1$.

2.1.67. $y'(x^2 - 2) = 2xy$, $y(2) = 2$.

2.1.68. $\cos x \sin y\,dy = \cos y \sin x\,dx$, $y(\pi) = \pi$.

2.1.69. $y' = 1{,}5\sqrt[3]{y}$, $y(-2) = 1$.

2.1.70. $y' = 2^{x+y} + 2^{x-y}$, $y(0) = 0$.

2.1.71. $xy' - \dfrac{y}{\ln x} = 0$, $y(e) = 1$.

2.1.72. $y'\sin x - (2y + 1)\cos x = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1$.

2.1.73. $(e^x + 8)\,dy - ye^x\,dx = 0$, $y(0) = 1$.

2.1.74. Найти кривую, проходящую через точку $A(2, 16)$, зная, что угловой коэффициент касательной в любой точке кривой:

а) в три раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей эту же точку с началом координат;

б) равен квадрату ординаты этой точки.

2.1.75. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(4, 1)$, для которой:

а) отрезок любой касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам;

б) отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат.

2.1.76. *Подкасательной* кривой $y = f(x)$ в точке M называется проекция AP на ось Ox отрезка AM касательной к этой кривой, где A точка пересечения касательной с осью Ox (рис. 5) Найти семейство кривых, у которых подкасательная имеет длину, равную 2.

2.1.77. Найти кривую, проходящую через точку $A(1, 1)$, для которой площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, равна 1.

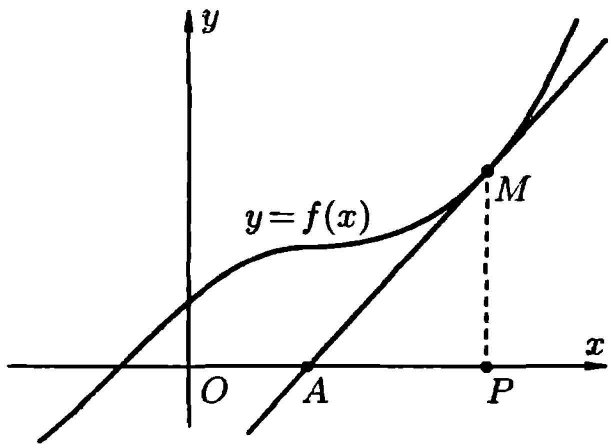


Рис. 5

2.1.78. Найти кривую, у которой сумма длин касательной (точнее, длины ее отрезка от точки касания до точки пересечения с осью абсцисс) и подкасательной в любой ее точке равна произведению координат точки касания.

2.1.79. Скорость распада радия пропорциональна наличной его массе. Определить, через сколько лет от 1 кг радия останется 0,7 кг, если известно, что период полураспада радия (время, за которое масса радия уменьшается вдвое) равен 1590 лет.

2.1.80. Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий, имеющихся в наличии в рассматриваемый момент времени t. Количество бактерий за 4 часа утроилось. Найти зависимость количества бактерий от времени, если при $t = 0$ их было a.

2.1.81. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 20 км/час. Через одну минуту после выключения двигателя ее скорость уменьшилась до 2 км/час. Определить скорость лодки через две минуты после остановки двигателя, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

2.1.82. Металлическая болванка, нагретая до 420°С, охлаждается в воздухе, температура которого 20°С. Через 15 минут после начала охлаждения температура детали понизилась до 120°С. Определить температуру болванки через 30 минут охлаждения, считая, что скорость охлаждения пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха.

2.1.83. При брожении скорость прироста действующего фермента пропорциональна его количеству. Через t_1 часов после начала брожения масса фермента составила m_1 г, а через t_2 часов ($t_2 > t_1$) — m_2 г ($m_2 > m_1$). Какова была первоначальная масса фермента?

2.1.84. Вращающийся в жидкости диск замедляет свое движение под действием силы трения, пропорциональной угловой скорости вращения w. Известно, что диск, начавший вращаться со скоростью 18 об/с, по истечении 45 с вращается со скоростью 6 об/с. С какой угловой скоростью будет вращаться диск по истечении 90 с после начала замедления? В какой момент времени w будет равняться 1 об/с?

Контрольные вопросы и более сложные задачи

2.1.85. Могут ли интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = f(x)$ пересекаться?

2.1.86. Можно ли множество всех решений уравнения $y' = y$ представить в виде:

а) $y = Ce^x$; б) $y = C_1e^x + C_2$;
в) $y = \sqrt{C}e^x$; г) $y = \sin C \cdot e^x$;
д) $y = e^{x+C}$; е) $y = \frac{1}{C}e^x$?

2.1.87. В резервуаре находится 80 л раствора, содержащего 8 кг соли. Каждую минуту в него вливается 4 л воды и вытекает 4 л раствора, при этом концентрация соли поддерживается равномерной (путем перемешивания). Сколько соли останется в резервуаре через 40 минут?

2.1.88. Скорость истечения воды из сосуда через малое отверстие определяется формулой $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, где h — высота столба жидкости над отверстием, g — ускорение свободного падения ($g \approx \approx 10$ м/с^2). За какое время вытечет вся вода из

а) заполненного полусферического котла диаметра 2 м через круглое отверстие на дне 0,1 м;

б) цилиндрического бака радиуса $R = 0{,}5$ м и высотой $H = 2$ м через круглое отверстие в дне радиуса $r = 0{,}02$ м.

2.1.89. Тело движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент тело имело скорость $v_0 = 15$ м/с и находилось на расстоянии 4 м от начала отсчета пути. Определить скорость тела через 8 с после начала движения.

2.1.90. Судно водоизмещением 10 000 тонн движется прямолинейно со скоростью 10 м/с. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости судна и равно 20 000 Н при скорости 1 м/с. Какое расстояние пройдет судно после выключения двигателя, прежде чем его скорость уменьшится до 2 м/с?

2.1.91. Решить уравнение $2\operatorname{ch} y\,dx = (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})\,dy$.

2.1.92. Решить уравнения:

а) $y' = y\sin x^2$;

б) $(2x - y)\,dx + (4x - 2y + 3)\,dy = 0$ (положить $2x - y = t$);

в) $y' = \dfrac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$;

г) $\sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$, $y(0) = 1$;

д) $y' = 3x - 2y + 1$ (положить $3x - y + 1 = t$);

е) $y' = \cos(y - x)$.

§ 2. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$\Rrightarrow$ Функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией степени n*, где n-целое, если при любом α имеет место тождество $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x,y)$. $\Lleftarrow$

В частности, функция $f(x,y)$ — однородная нулевой степени, если

$$f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y).$$

$\Rrightarrow$ Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{2.1}$$

называется *однородным*, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — однородные функции одинаковой степени. $\Lleftarrow$

Уравнение (2.1) может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.2}$$

Однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{т. е.} \quad y = ux,$$

где $u = u(x)$ — новая неизвестная функция (можно также применять подстановку $\frac{x}{y} = u$).

Замечание. Уравнение вида $y' = \dfrac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$ приводится к однородному с помощью замен $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, где α и β — числа, которые подбирают соответствующим образом (см. задачу 2.2.5). Этот же прием используется при решении уравнений вида $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$.

2.2.1. Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

а) $(y^2 + xy)\,dx - x^2\,dy = 0$; б) $y' = \dfrac{xy^2 - yx^2}{x^3}$, $y(-1) = 1$;

в) $xy' - y + xe^{\frac{y}{x}} = 0$.

○ а) Заданное уравнение имеет вид (2.1). Коэффициенты при dx и dy, т. е. $P(x,y) = y^2 + xy$ и $Q(x,y) = -x^2$, являются однородными функциями одной и той же степени (второй). Действительно,

$$P(\alpha x, \alpha y) = (\alpha y)^2 + (\alpha x \cdot \alpha y) = \alpha^2(y^2 + xy) = \alpha^2 P(x,y),$$

$Q(\alpha x, \alpha y) = -(\alpha x)^2 = \alpha^2(-x^2) = \alpha^2 Q(x,y)$, $n = 2$. Следовательно, данное уравнение однородное. Положим $y = ux$. Тогда $dy = x\,du + u\,dx$, и данное уравнение принимает вид

$$(u^2x^2 + x^2u)\,dx - x^2(x\,du + u\,dx) = 0.$$

После упрощений получим:

$$u^2\,dx - x\,du = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dx}{x} - \frac{du}{u^2} = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим $\ln|x| + \frac{1}{u} = C$. Вспоминая, что $u = \frac{y}{x}$, находим общий интеграл исходного уравнения: $\ln|x| + \frac{x}{y} = C$.

Отметим, что заданное уравнение можно было сначала привести к виду (2.2):

$$y^2 + xy - x^2\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy}{x^2}, \quad \text{или} \quad y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}.$$

Полагая $y = ux$, находим далее $y' = u'x + u$ и т. д. (см. б)).

б) Преобразуем уравнение к виду (2.2): $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$. Полагая $y = ux$, находим: $y' = u'x + u$. Подставим значения y и y' в данное уравнение: $u'x + u = u^2 - u$. Преобразовывая, получим уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{du}{dx} \cdot x = u^2 - 2u$. Разделяя переменные и интегрируя, имеем: $\int \frac{du}{u^2 - 2u} = \int \frac{dx}{x}$, откуда $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right| = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C_1|$, т. е. $\left|\frac{u-2}{u}\right| = |C_1|x^2$. Подставляя $u = \frac{y}{x}$, получаем $\left|\frac{y-2x}{y}\right| = |C_1|x^2$, т. е. $\frac{y-2x}{y} = \pm C_1x^2$, или $\frac{y-2x}{y} = Cx^2$, где $C = \pm C_1$. Теперь найдем значение постоянной C, используя начальное условие: $\frac{1+2}{1} = C \cdot 1$, т. е. $C = 3$. Отсюда: $\frac{y-2x}{y} = 3x^2$, т. е. $y(3x^2 - 1) = -2x$, откуда окончательно: $y = \frac{2x}{1-3x^2}$ — частное решение заданного уравнения.

в) Преобразуем уравнение к виду (2.2): $y' - \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} = 0$. Сделав подстановку $\frac{y}{x} = u$, т. е. $y = ux$, получим $u'x + u - u + e^u = 0$, или $\frac{du}{e^u} + \frac{dx}{x} = 0$. Интегрируя, имеем: $\int e^{-u}\,du = -\int \frac{dx}{x}$, т. е. $-e^u = -\ln|x| - \ln|C|$, $C \neq 0$. Отсюда $\ln|Cx| = e^{-u}$, т. е. $-u = \ln\ln|Cx|$, $C \neq 0$. Учитывая, что $u = \frac{y}{x}$, получаем общее решение заданного уравнения $y = -x\ln\ln|Cx|$, $C \neq 0$. ●

Решить уравнения:

2.2.2. $y\,dx + (x + y)\,dy = 0$. **2.2.3.** $y' = \frac{xy + y^2}{2x^2 + xy}$.

2.2.4. $xy' = y + x\sin\frac{y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

2.2.5. Привести дифференциальное уравнение

$$(y+2)\,dx-(2x+y+6)\,dy=0$$

к однородному.

○ Положив $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$, получаем

$$(v+\beta+2)\,du-(2u+2\alpha+v+\beta+6)\,dv=0,$$

т. е. $(v+(\beta+2))\,du-(2u+v+(2\alpha+\beta+6))\,dv=0$. Подберем α и β так, чтобы

$$\begin{cases}\beta+2=0,\\ 2\alpha+\beta+6=0.\end{cases}$$

Решая систему, находим, $\alpha=-2$, $\beta=-2$. Тогда исходное уравнение принимает вид (2.1): $v\,dv-(2u+v)\,dv=0$, т. е. является однородным, что и требовалось. ●

2.2.6. Решить уравнение, сведя его к однородному:

$$(2x-2)\,dy=(x+2y-3)\,dx.$$

2.2.7. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(1,1)$, у которой подкасательная (см. задачу 2.1.76) равна сумме координат точки касания.

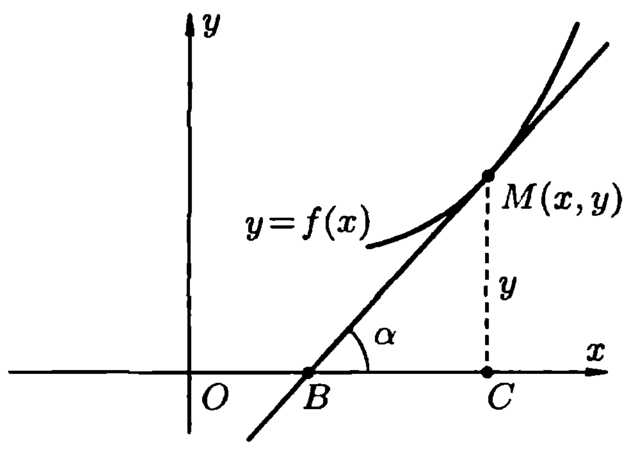


Рис. 6

○ На рис. 6 отрезок BC является подкасательной. Касательная к искомой кривой $y=f(x)$ проведена в точке $M(x,y)$. Так как по условию $BC=x+y$, то из прямоугольного треугольника MCB находим: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x+y}$, т. е. $y'=\dfrac{y}{x+y}$. Решим полученное однородное дифференциальное уравнение. Полагая $y=ux$, откуда $y'=u'x+u$, имеем $u'x+u=\dfrac{ux}{x+ux}$, т. е. $u'x=\dfrac{u}{1+u}-u$. Отсюда $\dfrac{du}{dx}x=\dfrac{-u^2}{1+u}$, или $\dfrac{1+u}{u^2}=-\dfrac{dx}{x}$. Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$\ln|u|-\frac{1}{u}=-\ln|x|-\ln|C|,$$

$C\neq 0$, т. е. $\frac{1}{u}=\ln|Cxu|$ или $\frac{x}{y}=\ln|Cy|$, $C\neq 0$. Подставляя $x=1$, $y=1$ (по условию кривая проходит через точку $A(1,1)$), находим конкретное значение C: $1 = \ln|C|$, $C = \pm e$. Таким образом, искомой кривой является линия, определяемая уравнением $x = y\ln|ey|$. ●

2.2.8. Найти семейство линий, касательные к которым отсекают от оси абсцисс отрезки, равные ординате точки касания.

2.2.9. Найти кривую, проходящую через точку $A(1,1)$, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

Дополнительные задачи

Решить дифференциальные уравнения:

2.2.10. $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$.

2.2.11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$.

2.2.12. $y = xy' - xe^{\frac{y}{x}}$.

2.2.13. $xy' - y(\ln y - \ln x) = 0$.

2.2.14. $y' = \dfrac{y + 2\sqrt{xy}}{x}$.

2.2.15. $ss' - 2s + t = 0$.

2.2.16. $x^2 + y^2 = 2xyy'$.

2.2.17. $\sqrt{y}(2\sqrt{x} - \sqrt{y})\,dx + x\,dy = 0$.

2.2.18. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

2.2.19. $y'\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x} + 1 = 0$.

2.2.20. $xy' + x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = y$.

2.2.21. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x) = 0$.

2.2.22. $(3x^2 - y^2)y' = 2xy$.

2.2.23. $y' - 1 = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 0$.

2.2.24. $(2x^3y - y^4)\,dx + (2xy^3 - x^4)\,dy = 0$.

2.2.25. $x\,dy = (x+y)\,dx$, $y(1) = 0$.

2.2.26. $y^2 + x^2y' = xyy'$, $y(1) = 1$.

2.2.27. $\left(y' - \dfrac{y}{x}\right)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = 1$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

2.2.28. $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$.

2.2.29. $y(x^2+y^2)\,dx - x^3\,dy = 0$.

2.2.30. $(x^2 + y^2 + xy)\,dx - x^2\,dy = 0$.

2.2.31. $x^2y' + xy - x^2 - y^2 = 0$, $y(1) = 0$.

2.2.32. $x^2 - 3y^2 + 2xyy' = 0$, $y(-2) = 2$.

2.2.33. $y - xy' = 2(x + yy')$, $y(1) = 0$.

2.2.34. $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$, $y(1) = e$.

2.2.35. Найти кривую, проходящую через точку $A(1,0)$, если известно, что треугольник, образованный осью ординат, касательной к кривой в произвольной ее точке и радиус-вектором точки касания, равнобедренный; основанием его является отрезок касательной от точки касания до оси ординат.

2.2.36. Найти кривую, проходящую через точку $A(1,2)$, для которой отрезок на оси ординат, отсекаемый любой касательной к кривой, равен абсциссе точки касания.

2.2.37. Найти кривую, проходящую через точку $A(3,0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной равен $\dfrac{x+y}{x}$.

2.2.38. Найти семейство кривых, подкасательная в любой точке которых равна среднему арифметическому координат точки касания.

Более сложные задачи

2.2.39. Решить уравнение, сведя его к однородному:

а) $y' = \dfrac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$; б) $y' = \dfrac{x+y-2}{3x-y-2}$.

2.2.40. Решить уравнение $x^3(y'-x) = y^2$. (Сделать замену $y = u^m$. Число m подобрать так, чтобы привести уравнение к однородному.) .

2.2.41. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

а) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}$; б) $xy' = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y$;

в) $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 10$.

2.2.42. *Задача о прожекторе.* Найти форму зеркала, отражающего все лучи, исходящие из одной точки, параллельно заданному направлению. (Рассмотреть сечение зеркала плоскостью Oxy; источник лучей (света) поместить в начале координат, ось Ox направить параллельно отраженным лучам.)

2.2.43. При каких α и β уравнение $y' = 2x^\alpha + 3y^\beta$ приводится к однородному с помощью замены $y = u^m$? (См. указание к задаче 2.2.40.)

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

⇛ Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = g(x), \tag{3.1}$$

где $p(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции (в частности — постоянные), называется *линейным уравнением первого порядка.* ⇚

Уравнение

$$x' + p(y)x = g(y) \tag{3.2}$$

является *линейным относительно x и x'.*

Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение (3.1) принимает вид $y' + p(x)y = 0$ и называется *линейным однородным.* Оно является уравнением с разделяющимися переменными. В случае $g(x) \not\equiv 0$ уравнение (3.1) называется *линейным неоднородным уравнением.*

Решение уравнения (3.1) ищется в виде $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — неизвестные функции от x (*метод Бернулли*). При этом одну из этих функций (например, $v(x)$) можно выбрать произвольно (из соображений удобства), тогда вторая определится из уравнения (3.1). В обоих случаях они находятся из уравнений с разделяющимися переменными (см. задачу 2.3.1 а)).

Кроме того, уравнение (3.1) можно решить методом вариации произвольной постоянной (*метод Лагранжа*); в этом случае его общее решение ищется в виде $C(x)e^{-\int p(x)\,dx}$ (см. задачу 2.3.1 а)).

⇛ Уравнение вида

$$y' + p(x)y = g(x)y^n, \qquad \text{где} \qquad n \in \mathbb{R}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1,$$

а $p(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции, называется *уравнением Бернулли*. ⇚

Оно приводится к линейному уравнению с помощью подстановки $z = y^{-n+1}$. Уравнение Бернулли можно, не сводя к линейному, проинтегрировать с помощью подстановки $y = uv$ (т. е. методом Бернулли) или применив метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

2.3.1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \dfrac{1}{\cos x}$; б) $y' = \dfrac{y}{x + y^2}$;

в) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

○ а) Данное уравнение имеет вид (3.1) и, стало быть, является линейным. Здесь $p(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$. Решим уравнение двумя способами.

Метод Бернулли

Полагаем $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — некоторые функции от x, тогда $y' = u'v + uv'$. Данное уравнение принимает вид:

$$u'v + uv' + \operatorname{tg} x uv = \frac{1}{\cos x},$$

или

$$u'v + u(v' + v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}. \tag{3.3}$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т. е. решим первое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $v' + v\operatorname{tg} x = 0$. Отсюда $\dfrac{dv}{dx} + v \operatorname{tg} x = 0$, т. е. $\dfrac{dv}{v} + \operatorname{tg} x\,dx = 0$, $\ln|v| - \ln|\cos x| = \ln|C|$, $C \neq 0$, откуда $v = C\cos x$, $C \neq 0$. Поскольку нам достаточно какого-нибудь одного ненулевого решения уравнения, то возьмем $v = \cos x$ (положили $C = 1$). Подставляя $v = \cos x$ в уравнение (3.3), получим второе дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, из которого найдем функцию $u(x)$: $u' \cos x = \dfrac{1}{\cos x}$, т. е. $du = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$, и, следовательно $u = \operatorname{tg} x + C$. Таким образом, $y = uv = (\operatorname{tg} x + C)\cos x$ или $y = C\cos x + \sin x$ — общее решение исходного уравнения.

Метод Лагранжа

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y' + \operatorname{tg} x \cdot y = 0$, т. е. $\dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} x \cdot y$. Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x\, dx, \quad \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C|, \quad C \neq 0,$$

т. е. $y = C\cos x$. Общее решение заданного уравнения ищем в виде $y = C(x)\cos x$ (букву C заменили неизвестной функцией $C(x)$). Подставляя y и $y' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x$ в данное уравнение, получим

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + \operatorname{tg} x C(x)\cos x = \frac{1}{\cos x},$$

т. е.

$$C'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}$$

(второе и третье слагаемые взаимно уничтожились). Отсюда

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad dC(x) = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad C(x) = \operatorname{tg} x + C.$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения есть

$$y = (\operatorname{tg} x + C)\cos x,$$

т. е. $y = C\cos x + \sin x$, как и в первом случае.

б) Данное уравнение не является линейным относительно y и y', но является таковым относительно x и x'. Учитывая, что $y' = \dfrac{1}{x'}$, приведем уравнение к виду (3.2):

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{y}{x + y^2}, \quad \text{т. е.} \quad x' = \frac{x + y^2}{y}, \quad \text{или} \quad x' - \frac{1}{y}x = y.$$

Решая методом Бернулли, полагаем $x = uv$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$ — функции от y. Тогда $x' = u'v + uv'$ и

$$u'v + uv' - \frac{1}{y}uv = y,$$

или

$$u'v + u(v' - \frac{1}{y}v) = y. \tag{3.4}$$

Решаем уравнение с разделяющимися переменными $v' - \dfrac{1}{y}v = 0$:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}, \quad \text{откуда} \quad \ln|v| = \ln|Cy|, \quad C \neq 0.$$

Выбирая одно из возможных решений (самое простое), имеем: $v = y$. Подставляя $v = y$ в уравнение (3.4), получим $u'y = y$, т. е. $y' = 1$, и, значит, $u = y + C$. Следовательно, $x = uv = (y + C)y = y^2 + Cy$, т. е. $x = y^2 + Cy$ — общее решение заданного уравнения; $y = 0$ — особое решение.

в) Уравнение приводится к виду (3.2), т. е. это уравнение Бернулли: $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$. Снова полагаем $y = uv$. Получаем уравнение

$$u'v + uv' - \frac{4}{x}uv = x\sqrt{uv}$$

или $u'v + u(v' - \frac{4}{x}v) = x\sqrt{uv}$. Решаем первое уравнение $v' - \frac{4}{x}v = 0$, разделяя переменные: $\frac{dv}{v} = \frac{4}{x}dx$, т. е. $\ln|v| = 4\ln|x| + C$. Выбирая простейшее решение (при $C = 0$), находим $v = x^4$. Решаем второе уравнение с разделяющимися переменными: $u'x^4 = x\sqrt{u}\cdot x^2$, т. е. $\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$, откуда $2\sqrt{u} = \ln|x| + \ln|C|$, $C \neq 0$. Таким образом, $u = \frac{1}{4}\ln^2|xC|$, $C \neq 0$, и, следовательно, $y = uv = \frac{1}{4}x^4\ln^2|xC|$, где $C \neq 0$, — общее решение заданного уравнения, $y = 0$ — особое решение. ●

Решить уравнения:

2.3.2. $y' - 2xy = e^{x^2}$.

2.3.3. $xy' + y - 3x^2 = 0$.

2.3.4. $y^2\,dx + (x+2)\,dy = 0$.

2.3.5. $(x+1)y' - 2y = y^2(x+1)^5$.

2.3.6. Найти кривую, проходящую через точку $P(1, 0)$ и такую, что отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен абсциссе точки касания.

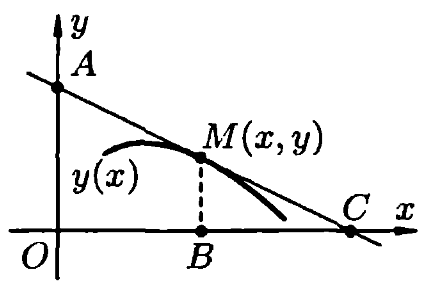


Рис. 7

◐ Пусть AC — касательная к искомой кривой в точке $M(x, y)$ (рис. 7). Согласно условию $OB = x = OA$. Найдем ординату точки A, положив $X = 0$ в уравнении касательной $Y - y = y'(X - x)$, где $Y = OA$. Имеем: $Y - y = -y'x$, т. е. $Y = y - y'x$. Таким образом, получили линейное уравнение $x = y - y'x$, или $y' - \frac{1}{x}y = -1$. Положив $y = uv$, решим его методом Бернулли: $u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -1$, т. е. $uv' + v\left(u' - \frac{u}{x}\right) = -1$. Находим u: $\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0$, $\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$, $u = x$. Находим v, подставляя u: $xv' = -1$, или $v' = -\frac{1}{x}$, откуда $v = -\ln|x| + \ln|C|$, т. е. $v = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$, где $C \neq 0$. Итак, $y = x\ln\left|\frac{C}{x}\right|$, где $C \neq 0$ — уравнение семейства интегральных кривых. Выделим среди них одну кривую, проходящую через точку

$P(1,0)$: $0 = 1 \cdot \ln|C|$, а значит, $C = \pm 1$. Следовательно, $y = x \ln \frac{1}{|x|}$, т. е. $y = -x \ln|x|$ — уравнение искомой кривой. ●

2.3.7. Найти кривую, проходящую через точку $O(0,0)$, зная, что угловой коэффициент в любой ее точке равен сумме координат этой точки.

Дополнительные задачи

Решить дифференциальные уравнения:

2.3.8. $y' + 2y = 3e^x$.

2.3.9. $(1+x^2)y' + 2xy = 3x^2$.

2.3.10. $2(x+y^4)y' - y = 0$.

2.3.11. $y^2\,dx + (xy-1)\,dy = 0$.

2.3.12. $xy' + y = \frac{y^2}{2} \ln x$.

2.3.13. $y' + 2xy = 2xy^3$.

2.3.14. $y' + y\cos x = \sin 2x$.

2.3.15. $x\frac{dy}{dx} + y = 4x^3$.

2.3.16. $y'e^{x^2} - (xe^{x^2} - y^2)y = 0$.

2.3.17. $x^3y^2y' + x^2y^3 = 1$.

2.3.18. $y'x^3 \sin y - xy' + 2y = 0$.

2.3.19. $y' - y = \left(x + \frac{1}{x}\right) e^x$.

2.3.20. $y' + \frac{x}{1-x^2}\, y = 2$.

2.3.21. $y' - \frac{y}{\sin x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

2.3.22. $xy' - y - x^3 = 0$, $y(2) = 4$.

2.3.23. $y' \sin x - y\cos x = 1$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.3.24. $2y^2\,dx + (x + e^{\frac{1}{y}})\,dy = 0$, $y(e) = 1$.

2.3.25. $y' - \frac{1}{x}\,y = -y^2$, $y(1) = -1$.

2.3.26. $x\cos^2 x\, y' + 2y\cos^2 x = 2x\sqrt{y}$.

2.3.27. $y\,dx + (4\ln y - 2x - y)\,dy = 0$.

2.3.28. $(y' + y)(x^2 + 1) = e^{-x}$, $y(0) = 1$.

2.3.29. $s' - s\sin t = 2\sin 2t$, $s(0) = 1$.

2.3.30. $\varphi r' + r - e^{\varphi} = 0$, $r(\alpha) = 2\alpha$.

2.3.31. $dx + (xy - y^3)\,dy = 0$, $y(-1) = 0$.

2.3.32. $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2 \sqrt[4]{y^3}$, $y(1) = 1$.

2.3.33. Пусть y_1 и y_2 — два различных решения уравнения $y' + p(x)y = g(x)$. При каком соотношении между постоянными C_1 и C_2 функция $y = C_1y_1 + C_2y_2$ будет решением данного уравнения?

2.3.34. Материальная точка массой m погружается с нулевой начальной скоростью в жидкость. На нее действует сила тяжести и сила сопротивления жидкости, пропорциональная скорости погружения (коэффициент пропорциональности k). Найти зависимость скорости движения точки от времени.

2.3.35. Найти кривую, проходящую через точку $A(1,2)$, касательная к которой в произвольной ее точке отсекает на оси ординат отрезок, равный квадрату ординаты точки касания.

2.3.36. Сила тока I в электрической цепи с сопротивлением R, коэффициентом индуктивности L и электродвижущей силой E удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E.$$

Найти зависимость силы тока $I=I(t)$ от времени, если:

а) E изменяется по закону $E=kt$ и $I(0)=0$ (L, R, k — постоянные), k — коэффициент пропорциональности;

б) E изменяется по закону $E=A\sin\omega t$ и $I(0)=0$ (L, R, A, ω — постоянные).

Контрольные вопросы и более сложные задачи

2.3.37. Найти общее решение уравнения $y'+y\varphi'(x)-\varphi(x)\varphi'(x)=0$, где $\varphi(x)$ — заданная функция.

2.3.38. Решить уравнения:

а) $xy'-xe^y+2=0$; б) $y(x)=\int\limits_0^x y(t)\,dt+x+1$.

Решить дифференциальные уравнения:

2.3.39. $y'-2xy=1-2x^2$, $y(0)=2$.

2.3.40. $yx'+2x=\dfrac{2y\sqrt{x}}{\cos^2 y}$, $y(0)=\pi$.

2.3.41. $y'\cos y+\sin y=x$.

2.3.42. $dx+(2x+\sin 2y-2\cos^2 y)\,dy=0$, $y(-1)=0$.

2.3.43. $(64y^3-x)y'-2y=0$.

2.3.44. $y'+xy=\dfrac{x-1}{2}e^x y^2$, $y(0)=2$.

2.3.45. Найти кривые, у которых площадь треугольника, образованного осью абсцисс, касательной и радиусом-вектором точки касания, постоянна и равна 4.

2.3.46. Кривая $y=f(x)$ проходит через точку $O(0,0)$. Найти ее уравнение, зная, что середина отрезка ее нормали от любой точки кривой до оси абсцисс лежит на параболе $y^2=x$.

Указание. Середина C отрезка нормали имеет координаты

$$\left(x+\frac{1}{2}yy',\frac{y}{2}\right).$$

2.3.47. Найти такие функции $p(x)$ и $g(x)$, чтобы решениями уравнения $y'+p(x)y=g(x)$ являлись функции $y=1$ и $y=x^3+1$.

2.3.48. Можно ли решать уравнение $y'=y$ с помощью подстановки $y=uv$?

2.3.49. Может ли решение уравнения $y'=y$ ($y\neq 0$) иметь точки минимума?

2.3.50. Для какой кривой касательная в каждой ее точке перпендикулярна радиус-вектору точки касания?

§ 4. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

⇛ Дифференциальное уравнение

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{4.1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, т. е.

$$dU(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \tag{4.2}$$

⇚

Уравнение (4.1) с учетом (4.2) можно записать в виде $dU(x,y) = 0$, поэтому его общий интеграл имеет вид

$$U(x,y) = C.$$

Для того, чтобы уравнение (4.1) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{4.3}$$

Функция $U(x,y)$ может быть найдена из системы уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$$

либо по формуле

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy, \tag{4.4}$$

где (x_0, y_0) — некоторая фиксированная точка из области непрерывности функций $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и их частных производных.

Замечание. Если условие (4.3) не выполняется для уравнения (4.1), то в ряде случаев его можно свести к уравнению в полных дифференциалах умножением на некоторую функцию $t(x,y) = t$, называемую *«интегрирующим множителем»*. Интегрирующий множитель легко находится в двух случаях: если $t = t(x)$ или $t = t(y)$; в первом случае

$$t(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,dx},$$

причем выражение $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ должно зависеть только от x; во втором случае

$$t(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}\,dy},$$

причем подынтегральное выражение должно зависеть только от y.

2.4.1. Решить уравнение $e^x+y+\sin y+y'(e^y+x+x\cos y)=0, y(\ln 2)=0$.

○ Запишем уравнение в дифференциальной форме

$$(e^x+y+\sin y)\,dx+(e^y+x+x\cos y)\,dy=0.$$

Здесь $P(x,y)=e^x+y+\sin y$, $Q(x,y)=e^y+x+x\cos y$. Проверим выполнение условия (4.3):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos y,\quad \text{т. е.}\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

и, значит, условие (4.3) выполняется. Следовательно, данное дифференциальное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Найдем функцию U, используя равенства

$$\frac{\partial U}{\partial x}=e^x+y+\sin y\quad \text{и}\quad \frac{\partial U}{\partial y}=e^y+x+x\cos y.$$

Интегрируя первое равенство по x (считаем y постоянным), находим

$$U(x,y)=\int(e^x+y+\sin y)\,dx=e^x+yx+x\sin y+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — произвольная дифференцируемая (по y) функция. Найдем $\varphi(y)$. Продифференцировав полученное равенство по y и учитывая второе равенство $\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}=e^y+x+x\cos y\right)$, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x+x\cos y+\varphi'(y)=e^y+x+x\cos y,$$

откуда $\varphi'(y)=e^y$, т. е. $\varphi(y)=e^y+C_1$. Следовательно,

$$U(x,y)=e^x+xy+x\sin y+e^y+C_1.$$

Общим интегралом является соотношение $e^x+xy+x\sin y+e^y+C_1=C_2$ или $e^x+xy+x\sin y+e^y=C$, где $C=C_2-C_1$. Найдем частный интеграл уравнения, для чего подставим начальное условие $y=0$, $x=\ln 2$ в общий интеграл: $2+0+0+1=C$, откуда $C=3$. Таким образом, $e^x+xy+x\sin y+e^y=3$ — искомый частный интеграл. ●

2.4.2. Решить уравнение $\frac{y}{x}\,dx+(3y^2+\ln x)\,dy=0$.

○ В данном случае $P(x,y)=\frac{y}{x}$, $Q(x,y)=3y^2+\ln x$, а $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{1}{x}$, т. е. $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Следовательно, это уравнение в полных дифференциалах и, значит, имеет вид $dU(x,y)=0$, где $\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}=3y^2+\ln x$. Отсюда

$$U(x,y)=\int\frac{y}{x}\,dx,\quad \text{т. е.}\quad U(x,y)=y\ln x+\varphi(y).$$

(Функцию $U(x,y)$ можно находить и из второго равенства, интегрируя его по y: $U(x,y)=\int(3y^2+\ln x)\,dy+\varphi(x)$.) Тогда $\dfrac{\partial U}{\partial y}=(y\ln x+\varphi(y))'_y=$ $=\ln x+\varphi'(y)$. Отсюда $3y^2+\ln x=\ln x+\varphi'(y)$, $\varphi'(y)=3y^2$ и, стало быть,

$\varphi(y) = y^3 + C_1$. Следовательно, $U(x,y) = y\ln x + y^3 + C_1$, а $y\ln x + y^3 = C$ — общий интеграл исходного уравнения.

Замечание. Найдем функцию $U(x,y)$, используя формулу (4.4). Положим $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, тогда точка $(1,0)$ принадлежит области непрерывности $D = \{(x,y)\colon\ x > 0\}$. Имеем:

$$U(x,y) = \int_1^x \frac{y}{x}\,dx + \int_0^y (3y^2 + \ln 1)\,dy,$$

откуда $U(x,y) = y\ln x + y^3$. Следовательно, $y\ln x + y^3 = C$ — общий интеграл уравнения. ●

Решить уравнения:

2.4.3. $(2x - y)\,dx - x\,dy = 0$. **2.4.4.** $e^{-y}\,dx + (2 - xe^{-y})\,dy = 0$.

2.4.5. Найти интегрирующий множитель и решить уравнение

$$(e^y + \sin x)\,dx + \cos x\,dy = 0.$$

○ Здесь $\dfrac{\partial P}{\partial y} = e^y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\sin x$, т. е. $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, и, значит, уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Так как отношение

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{-\sin x - e^y}{e^y + \sin x} = -1$$

не зависит от x, то интегрирующий множитель может быть найден по формуле

$$t(y) = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P}\,dy}$$

(см. замечание на с. 74):

$$t(y) = e^{\int(-1)\,dy} = e^{-y}.$$

Умножая исходное уравнение на $t = e^{-y}$, получаем уравнение в полных дифференциалах:

$$(1 + e^{-y}\sin x)\,dx + e^{-y}\cos x\,dy = 0$$

(так как $P'_y = -e^{-y}\sin x = e^{-y}(-\sin x) = Q'_x$). Решаем его (без пояснений):

а) $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 1 + e^{-y}\sin x$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = e^{-y}\cos x$;

б) $U(x,y) = \int (1 + e^{-y}\sin x)\,dx = x - e^{-y}\cos x + \varphi(y)$;

в) $\dfrac{\partial U}{\partial y} = e^{-y}\cos x + \varphi'(y)$, откуда $e^{-y}\cos x + \varphi'(y) = e^{-y}\cos x$, т. е. $\varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = C_1$;

г) $U(x,y) = x - e^{-y}\cos x + C_1$. Таким образом $x - e^{-y}\cos x = C$ — общий интеграл уравнения. ●

2.4.6. Найти интегрирующий множитель и решить уравнение

$$(x^2 - \sin^2 y)\,dx + x\sin 2y\,dy = 0.$$

Дополнительные задания

Решить уравнения:

2.4.7. $(3x - 5x^2y^2)\,dx + (3y^2 - \frac{10}{3}x^3y)\,dy = 0.$

2.4.8. $(x\cos 2y - 3)\,dx - x^2 \sin 2y\,dy = 0.$

2.4.9. $(2x + ye^{xy})\,dx + (1 + xe^{xy})\,dy = 0$, $y(0) = 1.$

2.4.10. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0$, $y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$

2.4.11. $(x^2 + 2xy + 1)\,dx + (x^2 + y^2 - 1)\,dy = 0.$

2.4.12. $\sin(x+y)\,dx + x\cos(x+y)\,(dx + dy) = 0.$

2.4.13. $(3x^2 + 3x^2 \ln y)\,dx - \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy = 0.$

2.4.14. $3x^2y + \sin x = (\cos y - x^3)y'.$

2.4.15. $(3x^2 + y^2 + y)\,dx + (2xy + x + e^y)\,dy = 0$, $y(0) = 0.$

2.4.16. $(x^2 + 2xy)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$, $y(1) = -1.$

2.4.17. $\frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{x^2+y^2} = 0.$

2.4.18. $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0.$

2.4.19. $\left(2x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\,dy = 0.$

2.4.20. $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0.$

Контрольные вопросы и более сложные задачи

Решить уравнения:

2.4.21. $\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$

2.4.22. $xe^{y^2}\,dx + (x^2ye^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y)\,dy = 0.$

2.4.23. $(x\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x)\,dy + (y\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y)\,dx = 0.$

Решить уравнения, допускающие интегрирующий множитель вида $t = t(x)$ или $t = t(y)$:

2.4.24. $y^2\,dx + xy\,dy - dy = 0.$

2.4.25. $(1 + 3x^2 \sin y)\,dx - x\operatorname{ctg} y\,dy = 0.$

2.4.26. Найти условия, при которых уравнение

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

допускает интегрирующий множитель вида $t = f(x+y)$.

2.4.27. Найти общие интегралы дифференциальных уравнений:

а) $x\,dx + y\,dy = 0$; б) $x\,dy + y\,dx = 0.$

2.4.28. Определить тип дифференциальных уравнений:

а) $(1-x^2)y'+xy-3=0$; б) $(y+xy^2)\,dx-x\,dy=0$;

в) $(x+y-1)\,dx+(x+e^y)\,dy$; г) $3y'-2y=\dfrac{x^3}{y^2}$;

д) $y=xy'+y'\ln y$; е) $2x^2\,dx-(x^2+y^2)\,dy=0$;

ж) $y'(x^2-4)=3$; з) $2x+3x^2y+(x^3-3y^2)y'=0$;

и) $x\,dx+(x+y)\,dy=0$; к) $y(x-y)\,dx=x^2\,dy$;

л) $y^2\,dx-(2xy+3)\,dy=0$; м) $\sqrt{17-4x-2x^2}\,dy-dx=0$;

н) $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$; о) $(x^3+y)x'+x-y=0$;

п) $y'-2\sqrt{y}\ln x=0$; р) $x(y'-y)=e^x$;

с) $xy'-3y+x^4y^2=0$; т) $xy'=2(y-\sqrt{xy})$;

у) $y'=7^{x-y}$; ф) $(y^2+2y+x^2)y'+2x=0$;

х) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+x$; ц) $y'=\dfrac{y}{x}-1$;

ч) $y'\operatorname{tg} y=y$; ш) $\dfrac{2x}{y^3}\,dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy=0$;

э) $(x+y-2)\,dx+(x-y+4)\,dy=0$;

ю) $x\,dy-y\,dx-\sqrt{x^2+y^2}\,dx=0$;

я) $dx=(\sin y+3\cos y+3x)\,dy$.

§ 5. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И КЛЕРО

Некоторые дифференциальные уравнения первого порядка приходится решать методом введения вспомогательного параметра. К числу таких уравнений относятся *уравнение Лагранжа*

$$y=x\varphi(y')+\psi(y') \tag{5.1}$$

и *уравнение Клеро*

$$y=xy'+\psi(y'), \tag{5.2}$$

где φ и ψ — известные функции от y'.

Уравнение (5.1) интегрируется следующим образом: обозначая $p=y'$, запишем уравнение в виде $y=x\varphi(p)+\psi(p)$. Дифференцируя полученное уравнение по x, имеем

$$p=\varphi(p)+(x\varphi'(p)+\psi'(p))\frac{dp}{dx},$$

откуда получим $(p-\varphi(p))\dfrac{dx}{dp}=x\varphi'(p)+\psi'(p)$ — линейное уравнение относительно x и $\dfrac{dx}{dp}$. Если его решение будет $x=f(p,C)$, то общее решение уравнения (5.1) записывается в виде

$$\begin{cases} x=f(p,C), \\ y=x\varphi(p)+\psi(p)=f(p,C)\varphi(p)+\psi(p). \end{cases}$$

Уравнение (5.1) может иметь особое решение, вида $y=\varphi(p_0)x+\psi(p_0)$, где p_0 — корень уравнения $p=\varphi(p)$.

Уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа при $\varphi(y') = y'$. Его общее решение имеет вид $y = Cx + \psi(C)$, особое решение получается путем исключения параметра p из уравнений $y = px + \psi(p)$ и $x = -\psi'(p)$.

2.5.1. Решить уравнение: $y = xy' - y'^2$.

○ Уравнение имеет вид (5.2), т. е. это уравнение Клеро. Положим $y' = p$. Тогда заданное уравнение принимает вид

$$y = px - p^2. \tag{5.3}$$

Продифференцировав его по x, имеем: $y' = p'x + p - 2pp'$, т. е. $p'(x - 2p) + p = p$, или $p'(x - 2p) = 0$. Если $p' = 0$, то $p = C$ и, значит, общее решение данного уравнения есть $y = Cx - C^2$ (см. уравнение 5.3). Если $x - 2p = 0$, т. е. $x = 2p$, то получаем $y = 2pp - p^2$, т. е. $y = p^2$. Особое решение заданного уравнения есть $\begin{cases} x = 2p, \\ y = p^2. \end{cases}$ Исключая параметр p $\left(p = \frac{x}{2}\right)$, находим особое решение уравнения в явном виде $y = \frac{x^2}{4}$. ●

Решить уравнения:

2.5.2. $y = xy' + y' - (y')^2$. **2.5.3.** $y = xy' - 3(y')^3$.

2.5.4. Решить уравнение Лагранжа: $y = x(1 + y') + (y')^2$.

○ Положим $y' = p$. Тогда имеем $y = x(1 + p) + p^2$. Дифференцируя по x, приходим к уравнению $y' = (1 + p) + xp' + 2pp'$, откуда $(x + 2p)p' + 1 = 0$, т. е. $(x + 2p)\frac{dp}{dx} = -1$. Отсюда $x + 2p = -\frac{dx}{dp}$, т. е. $x' + x = -2p$ — линейное относительно x и x' уравнение. Решим его методом Бернулли. Полагая $x = uv$, получаем $u'v + uv' + uv = -2p$, т. е. $u'v + u(v' + v) = -2p$. Находим v, приравнивая скобку к нулю и разделяя переменные: $v' + v = 0$, $\frac{dv}{dp} = -v$, $\frac{dv}{v} = -dp$, $\ln|v| = -p + C$. Выбираем простейшее решение: $v = e^{-p}$. Тогда: $u'e^{-p} = -2p$, т. е. $u' = -2pe^p$. Отсюда $u = -2\int pe^p\,dp = -2(pe^p - e^p) + C$, и, значит, $u = -2pe^p + 2e^p + C$. Следовательно, $x = uv = e^{-p}(-2pe^p + 2e^p + C) = 2 - 2p + Ce^{-p}$. Учитывая, что $y = x(1 + p) + p^2$, получим $y = (2 - 2p + Ce^{-p})(1 + p) + p^2$. Таким образом, общее решение уравнения имеет вид (в параметрической форме)

$$\begin{cases} x = 2 - 2p + Ce^{-p}, \\ y = (2 - 2p + Ce^{-p})(1 + p) + p^2; \end{cases}$$

особого решения нет. ●

Решить уравнения:

2.5.5. $y = x(y')^2 + (y')^2$. **2.5.6.** $y = \frac{xy'}{2} - \frac{x}{2y'}$.

2.5.7. Решить уравнение: $y\sqrt{y'-1} = 2 - y'$.

◐ Разрешим заданное уравнение относительно y, а затем положим $y' = p$, тогда получим

$$y = \frac{2-p}{\sqrt{p-1}}. \tag{5.4}$$

Далее, так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{d\left(\frac{2-p}{\sqrt{p-1}}\right)}{p} = \frac{-\sqrt{p-1} - \frac{2-p}{2\sqrt{p-1}}}{(p-1)p}\,dp = -\frac{dp}{2(p-1)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда, после интегрирования, получим

$$x = \frac{1}{\sqrt{p-1}} + C. \tag{5.5}$$

Исключив параметр p из уравнения (5.5), находим $\dfrac{1}{\sqrt{p-1}} = x - C$, т. е. $p = 1 + \dfrac{1}{(x-C)^2}$. Найденное выражение для p подставим в равенство (5.4):

$$y = \frac{2 - 1 - \frac{1}{(x-C)^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{(x-C)^2} - 1}} = x - C - \frac{1}{x-C}$$

— общее решение исходного уравнения. ●

Дополнительные задачи

Решить уравнения:

2.5.8. $y = \sqrt{1 - y'^2} + y'$.

2.5.9. $y' = \ln(xy' - y)$.

2.5.10. $2yy' - x(y'^2 + 4) = 0$.

2.5.11. $y = y'^2 e^{y'}$.

2.5.12. $y' + y - xy'^2 = 0$.

2.5.13. $y = xy' + y' + \sqrt{y'}$.

2.5.14. $xy' - y = \ln y'$.

2.5.15. Построить интегральные кривые уравнения $y = y'x + \dfrac{1}{y'}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
Вариант 1

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $x^2\,dy + y\,dx = 0$, $y(1) = e$; б) $y' = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$.

2. Решить уравнение: $y'(2x - y) = x + 2y$.

3. Решить уравнение: $(x + y)y' - 1 = 0$.

4. Решить уравнение: $(y^3 + \cos x)\,dx + (e^y + 3xy^2)\,dy = 0$.

5. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радия. Через сколько времени останется 1% от его первоначального количества, если скорость распада радия пропорциональна его количеству в рассматриваемый момент?

Вариант 2

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y^2y' + 2x - 1 = 0$; б) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$.

2. Решить уравнение: $xy' - y = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Решить уравнение: $3y' - 2y = x^3y^{-2}$.

4. Решить уравнение: $\dfrac{dx}{y} - \dfrac{x + y^2}{y^2}\,dy = 0$.

5. Автомобиль движется прямолинейно со скоростью 30 м/с. За какое время и на каком расстоянии он будет остановлен тормозами, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,3 его веса ($g = 10$ м/с^2)?

Вариант 3

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y\,dx + \operatorname{ctg} x\,dy = 0$, $y\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -2$; б) $y'2^{x-y} + 3^{2x-y} = 0$.

2. Решить уравнение: $y\,dx = (x - \sqrt{xy})\,dy$.

3. Решить уравнение: $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1)$.

4. Решить уравнение: $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right) dx = \dfrac{2y}{x^3}\,dy$.

5. Тело массы m падает вертикально вниз под действием силы тяжести и тормозящей силы сопротивления воздуха, пропорциональной скорости (коэффициент пропорциональности k). Найти закон изменения скорости v падения тела, если в момент времени $t = t_0$ $v = v_0 = 0$.

Вариант 4

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(1 + y^2)\,dx - \sqrt{x}\,dy = 0$; б) $y' + y\cos x = \cos x$, $y(0) = 2$.

2. Решить уравнение: $3x^2y' = y^2 + 8xy + 4x^2$.

3. Решить уравнение: $xy' + y = xy^2$.

4. Решить уравнение: $(\sin 2x - 2\cos(x+y))\,dx - 2\cos(x+y)\,dy = 0$.

5. Тело движется прямолинейно с ускорением, пропорциональным произведению скорости движения v на время t. Установить зависимость между скоростью и временем, если при $t = 0$ $v = v_0$.

Вариант 5

1. Решить дифференциальные уравнения:
а) $y' + y + 7 = 0$; б) $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})\,dy = y\,dx$, $y(0) = 1$.

2. Решить уравнение: $\dfrac{xy' - y}{x} = \operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}$.

3. Решить уравнение: $xy' - x^2 \sin x = y$.

4. Решить уравнение: $(5xy^2 - x^3)\,dx + (5x^2y - y)\,dy = 0$.

5. Температура вынутого из печи хлеба в течение 20 минут понижается от 100° до 60°. Температура воздуха 20°. Через сколько времени от начала охлаждения температура хлеба будет 30°? (Указание: скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и среды.)

§ 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Дифференциальные уравнения второго порядка. Основные понятия. Теорема существования и единственности

⇛ Уравнение

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{6.1}$$

связывающее между собой независимую переменную, неизвестную функцию $y(x)$, а также ее первые две производные $y'(x)$ и $y''(x)$, называется *дифференциальным уравнением второго порядка.* ⇚

Если уравнение (6.1) можно записать в виде

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{6.2}$$

то говорят, что оно разрешено относительно второй производной. Мы будем иметь дело только с такими уравнениями.

⇛ Задача отыскания решения уравнения (6.2), удовлетворяющего заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, где x_0, y_0, y'_0 — некоторые числа, называется *задачей Коши.* ⇚

⇛ *Решением* уравнения (6.2) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке вместе с y' и y'' в это уравнение обращает его в тождество. График функции $y = \varphi(x)$ в этом случае называется *интегральной кривой*. ⇚

⇛ *Общим решением* уравнения (6.2) называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, зависящая от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 и такая, что:

1) она является решением этого уравнения при любых конкретных значениях C_1 и C_2;

2) при любых допустимых начальных условиях

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \tag{6.3}$$

можно подобрать такие значения C_1^0 и C_2^0 постоянных, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ будет удовлетворять этим начальным условиям. ⇚

⇛ Любая функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, получающаяся из общего решения уравнения (6.2) при конкретных значениях постоянных C_1 и C_2, называется *частным решением* этого уравнения. ⇚

Для дифференциального уравнения второго порядка (6.2) имеет место теорема существования и единственности решения, аналогичная соответствующей теореме для уравнений первого порядка.

Теорема 2.2. Если функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные $f'_y(x, y, y')$ и $f'_{y'}(x, y, y')$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку с координатами (x_0, y_0, y'_0), то существует и притом единственное решение $y = y(x)$ уравнения (6.2), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Общий интеграл $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ или общее решение $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ уравнения (6.2) представляет собой семейство кривых, зависящих от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. Задача Коши в таком случае состоит в определении интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через данную точку (x_0, y_0) и имеющей данный угловой коэффициент y'_0 касательной t (данное направление в данной точке (рис. 8)), т. е. $y'(x_0) = y'_0 = \operatorname{tg}\alpha$.

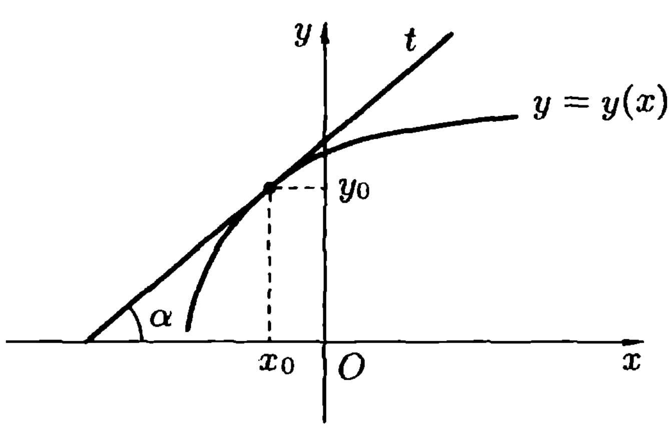


Рис. 8

Понижение порядка дифференциальных уравнений

В некоторых частных случаях удается понизить порядок дифференциального уравнения второго порядка.

Зачастую оно в итоге приводится к дифференциальному уравнению первого порядка одного из изученных ранее типов.

Рассмотрим наиболее типичные случаи.

Уравнения вида $y'' = f(x)$

Интегрированием обеих частей уравнения $y'' = f(x)$ оно приводится к уравнению первого порядка

$$y' = \int f(x)\,dx = F(x) + C_1.$$

Повторно интегрируя полученное равенство, находим общее решение исходного уравнения:

$$y = \int (F(x) + C_1)\,dx + C_2.$$

Дифференциальные уравнения $F(x, y', y'') = 0$, явно не содержащие искомой функции y

Такие уравнения допускают понижение порядка подстановкой $y' = p$, $y'' = p'$. Другими словами, данное уравнение равносильно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y' = p, \\ F(x, p, p') = 0. \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения $F(y, y', y'') = 0$, явно не содержащие независимой переменной x

Уравнения такого вида допускают понижение порядка подстановкой $y' = p = p(y)$ (формальное отсутствие аргумента x позволяет считать неизвестную функцию p функцией аргумента y), откуда: $y'' = (p(y))' = p'(y) \cdot y'(x) = p' \cdot p$.

Таким образом, уравнение $F(y, y', y'') = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} y' = p, \\ F(y, p, p \cdot p') = 0. \end{cases}$$

Если функция F является однородной функцией степени k относительно переменных y, y' и y'', т.е. $F(x, ty, ty', ty'') = t^k \cdot F(x, y, y', y'')$, то дифференциальное уравнение $F(x, y, y', y'') = 0$ допускает понижение порядка подстановкой

$$y = e^{\int p(x)\,dx},$$

где $p(x)$ — новая неизвестная функция.

Интегрирование дифференциальных уравнений порядка выше второго

Приемы, описанные в предыдущем пункте, можно распространить на уравнения более высоких порядков.

Общее решение простейшего дифференциального уравнения n-го порядка $y^{(n)} = f(x)$ находится n-кратным интегрированием функции $f(x)$ и содержит n произвольных постоянных.

Дифференциальное уравнение вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, не содержащее в явном виде искомой функции y, допускает понижение порядка подстановкой $y^{(k)} = p$. Другими словами, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} y^{(k)} = p, \\ F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0. \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение вида $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, не содержащее явно аргумент x, допускает понижение порядка на единицу подстановкой $y' = p = p(y)$. При этом (по правилу дифференцирования сложной функции):

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p, \quad y'' = \frac{d}{dy}(p' \cdot p) \cdot \frac{dy}{dx} = (p''p + (p')^2)p$$

и т. д.

2.6.1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \dfrac{1}{1+x^2} + x - \sin x$.

○ Интегрируя, получим

$$y' = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + x - \sin x \right) dx = \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{2} + \cos x + C_1.$$

Повторное интегрирование ($\int \operatorname{arctg} x\, dx$ надо брать по частям: $\operatorname{arctg} x = u$, $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = x$, $dx = dv$) приводит к ответу:

$$y = \int \left(\operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{2} + \cos x + C_1 \right) dx =$$
$$= x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{x^3}{6} + \sin x + C_1 x + C_2. \qquad ●$$

Найти общие решения данных дифференциальных уравнений:

2.6.2. $y'' = \sin 4x + 2x - 3$.

2.6.3. $y'' = e^{5x} + \cos x - 2x^3$.

2.6.4. $y'' = xe^{x^2} + 3^{-x}$.

2.6.5. $y'' = 4\cos^4 x + 2\sin^2 \dfrac{x}{2} + \sqrt{x+2}$.

2.6.6. Найти частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' = (e^{2x} + \sin 3x)x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

○ Сначала находим общее решение. Интегрируя по частям, находим

$$y' = \int (e^{2x} + \sin 3x)x\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{cc} x = u, & du = dx \\ (e^{2x} + \sin 3x)\,dx = dv, & v = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right]$$

$$= x\left(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}\cos 3x\right) - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{9}\sin 3x + C_1. \quad (6.4)$$

Повторное интегрирование по частям (проделайте нужные вычисления) приводит к общему решению:

$$y = x\left(\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{9}\sin 3x\right) - \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{2}{27}\cos 3x + C_1 x + C_2. \quad (6.5)$$

В равенствах (6.4) и (6.5) подставим $x = 0$, $y' = 1$, $y = 1$, откуда получаем систему уравнений относительно неизвестных констант C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 1 = -\frac{1}{4} + C_1, \\ 1 = -\frac{1}{4} - \frac{2}{27} + C_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{4}, \\ C_2 = \frac{143}{108}. \end{cases}$$

Найденные значения постоянных подставляем в общее решение (6.5). Получаем искомое частное решение

$$y_{ч} = x\left(\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{9}\sin 3x\right) - \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{2}{27}\cos 3x + \frac{5}{4}x + \frac{143}{108}. \qquad ●$$

Найти частные решения данных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

2.6.7. $y'' = (x^2 + 7x + 9)e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

2.6.8. $y'' - 2(2x^2 + 2x - 5)\cos 2x - 4(2x + 1)\sin 2x$, $y = 0$, $y'(0) = 0$.

2.6.9. $y'' = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 2\cos x - x\sin x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

2.6.10. $y'' = (4x^3 + 10x^2 + 2x + 2)e^{2x} + 6\sin 3x + 9x\cos 3x$, $y(0) = 1$, $y(0)' = 1$.

2.6.11. Решить дифференциальное уравнение $y'' - y'\operatorname{ctg} x = 2x\sin x$. Найти также частное решение, если $y = 1$, $y' = 0$ при $x = \frac{\pi}{4}$.

○ Данное дифференциальное уравнение второго порядка не содержит явно искомую функцию y, т. е. имеет вид $F(x, y', y'') = 0$. Положим $y' = p$, тогда $y'' = p'$. Получаем дифференциальное уравнение первого порядка $p' - p\operatorname{ctg} x = 2x\sin x$ — линейное относительно неизвестной функции $p = p(x)$. Общее решение этого уравнения найдем подстановкой $p = u \cdot v$, $p' = u'v + uv'$. Получаем:

$$u'v + uv' - uv\operatorname{ctg} x = 2x\sin x \Leftrightarrow \begin{cases} v' - v\operatorname{ctg} x = 0, \\ u'v = 2x\sin x. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $\ln|v| = \ln|\sin x|$, т. е. $v = \sin x$. Подставляя во второе уравнение, получим $u' = 2x$, откуда $u = x^2 + C_1$. Следовательно, $p = uv = (x^2 + C_1)\sin x$, т. е. $y' = (x^2 + C_1)\sin x$. Интегрируя это равенство, найдем общее решение исходного уравнения

$$y = -(x^2 + C_1)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C_2.$$

Подставляя в два последних равенства начальные условия $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 1$, $y' = 0$, получаем

$$0 = \left(\frac{\pi^2}{16} + C_1\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad 1 = -\left(\frac{\pi^2}{16} + C_1\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + C_2.$$

Найденные значения $C_1 = -\frac{\pi^2}{16}$ и $C_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)$ подставляем в общее решение. Отсюда искомое частное решение

$$y_ч = 2x\sin x + 1 - \frac{\pi + 4}{4}\sqrt{2} - \left(x^2 - \frac{\pi^2}{16} - 2\right)\cos x. \qquad ●$$

Следующие дифференциальные уравнения решить подстановкой $y' = p$:

2.6.12. $y'' - \frac{2}{x}y' = 2x^3$.

2.6.13. $(x+1)y'' = y' - 1$.

2.6.14. $x^3y'' + x^2y' - 1 = 0$.

2.6.15. $y'' + y'\operatorname{tg} x - \sin 2x = 0$.

2.6.16. $xy'' - y' = x^2e^x$.

2.6.17. $xy''\ln x = y'$.

2.6.18. $y''\operatorname{tg} x - y' - 1 = 0$.

2.6.19. $xy'' + y' + x = 0$.

2.6.20. $(1 + x^2)y'' + 2xy' - x^3 = 0$.

2.6.21. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''\operatorname{tg} y = 2(y')^2$. Найти также частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = \frac{\pi}{4}$, $y'(1) = -2$.

○ Данное дифференциальное уравнение не содержит в явном виде аргумента x, т. е. имеет вид $F(y, y', y'') = 0$. Примем в качестве независимой переменной y и выполним замену $y' = p = p(y)$. Тогда $y'' = p\cdot p'$, а исходное уравнение принимает вид: $p\cdot p'\operatorname{tg} y = 2p^2$. Если $p = 0$, то $y' = 0$, т.е. $y = C$. После сокращения на $p \neq 0$ решим дифференциальное уравнение первого порядка $p'\operatorname{tg} y = 2p$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его стандартным образом:

$$\frac{dp}{p} = 2\frac{\cos y}{\sin y}\,dy,$$

т.е. $\ln|p| = 2\ln|\sin y| + \ln|C_1|$, $C_1 \neq 0$, откуда $p = C_1\sin^2 y$ (заметим, что найденное ранее решение $p = 0$ содержится в полученном выражении — достаточно положить $C_1 = 0$). Заменим p на y' и решим уравнение $y' = C_1\sin^2 y$, которое также является уравнением с разделяющимися переменными: $\frac{dy}{\sin^2 y} = C_1\,dx$, или $-\operatorname{ctg} y = C_1x + C_2$. Получили общее решение исходного уравнения в неявном виде. Подставим в него и в выражение для y' значения $x = 1$, $y = \frac{\pi}{4}$ и $y' = -2$. Из равенства $-2 = C_1 \sin^2 \frac{\pi}{4}$ находим $C_1 = -4$, а из равенства $-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = C_1 + C_2$, учитывая, что $C_1 = -4$, находим $C_2 = 3$. Подставляя полученные значения констант в общее решение, которое запишем в виде $y = \operatorname{arcctg}(-C_1x - C_2)$, находим требуемое частное решение $y_ч = \operatorname{arcctg}(4x - 3)$. ●

2.6.22. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$(1 + yy')y'' = (1 + (y')^2)y',$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 1$.

○ Подстановка $y' = p = p(y)$ и $y'' = p \cdot p'$ приводит данное уравнение к виду $(1 + py)p \cdot p' = (1 + p^2)p$, откуда $p = 0$, т.е. $y = C$, или $p' = \frac{1 + p^2}{1 + py}$. Полученное дифференциальное уравнение не относится к уравнениям первого порядка известного нам типа. Перепишем его в виде $y' = \frac{1 + py}{1 + p^2}$, учитывая, что $p' = \frac{1}{y'}$. Получим линейное (относительно y и y') дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно решить подстановкой $y = uv$. Его общее решение имеет вид (найдите его самостоятельно)

$$y = \sqrt{1 + p^2}\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} + C_1\right).$$

Теперь остается решить дифференциальное уравнение первого порядка

$$y = \sqrt{1 + (y')^2}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} + C_1\right),$$

не разрешенное относительно производной y'. Но в общем виде решить его достаточно хлопотно. Однако, так как нам нужно найти частное решение исходного уравнения, то воспользуемся начальными условиями для определения постоянной C_1, полагая в последнем равенстве $y = 1$ и $y' = 1$. Приходим к равенству

$$1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + C_1\right),$$

из которого $C_1 = 0$. Тем самым, нам достаточно решить уравнение $y = y'$, откуда $y = Ce^x$. Полагая здесь $x = 0$, $y = 1$, находим $C = 1$. Таким образом $y_ч = e^x$ — искомое частное решение. ●

Найти общие решения следующих дифференциальных уравнений, а там, где указаны начальные условия, найти соответствующее частное решение:

2.6.23. $y''y^3 = 1$.

2.6.24. $yy'' - (y')^2 - 1 = 0$.

2.6.25. $1 + (y')^2 - 2yy'' = 0$.

2.6.26. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.

2.6.27. $y'' = y'(1 + (y')^2)$.

2.6.28. $y'' = y' \ln y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2.6.29. $y'' + y'\sqrt{(y')^2 - 1} = 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = -1$.

2.6.30. $3y'y'' = 2y$, $y(0) = y'(0) = 1$.

2.6.31. $y'' = 2y^3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2.6.32. Проинтегрировать дифференциальное уравнение второго порядка $xy'(yy'' - (y')^2) = y(y')^2 + x^4y^3$.

○ Перепишем уравнение в виде

$$xy'(yy'' - (y')^2) - y(y')^2 - x^4y^3 = 0,$$

после чего обозначим через $F(x, y, y', y'')$ левую часть полученного равенства. Если заменить y, y', y'' на ty, ty', ty'', соответственно, то приходим к равенству

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^3\left[xy'(yy'' - (y')^2) - y(y')^2 - x^4y^3\right] = t^3F(x, y, y', y'').$$

Это означает, что функция F — однородная (третьей степени, $k = 3$) и в таком случае соответствующее уравнение допускает понижение порядка подстановкой $y = e^{\int p\,dx}$, где $p = p(x)$ — неизвестная функция от x. Отсюда $y' = pe^{\int p\,dx}$, $y'' = (p' + p^2)e^{\int p\,dx}$. После соответствующих замен и сокращения на $e^{3\int p\,dx} \neq 0$ приходим к дифференциальному уравнению первого порядка относительно p

$$xp(p' + p^2 - p^2) = p^2 + x^4, \quad \text{или} \quad p' = \frac{p}{x} + \frac{x^3}{p}$$

(при этом мы теряем решение $y \equiv 0$, которое потом надо добавить к ответу). Получили уравнение Бернулли, которое можно решить (предлагаем сделать это самостоятельно) подстановкой $p = uv$. Его общее решение имеет вид

$$p = x\sqrt{x^2 + C_1}.$$

Поскольку $y = e^{\int p\,dx}$, то находим сначала

$$\int p\,dx = \int x\sqrt{x^2 + C_1}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + C_1)^3} + C_2,$$

а затем и общее решение исходного дифференциального уравнения (за вычетом частного решения $y = 0$)имеет вид

$$y = e^{\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+C_1)^3}+C_2}, \quad \text{или} \quad y = C_3 \cdot e^{\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+C_1)^3}}, \quad C_3 > 0.$$

Учитывая, что при $C_3 = 0$ как раз получается потерянное частное решение $y = 0$, приходим к окончательному ответу: $y = C_3 \cdot e^{\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+C_2)^3}}$, $C_3 \geqslant 0$. ●

Решить дифференциальные уравнения:

2.6.33. $x^2yy'' = (y - xy')^2$. **2.6.34.** $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.

2.6.35. Найти частное решение дифференциального уравнения третьего порядка $y''' = 16\cos^3 2x + e^x - 1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1$, $y'(0) = -\frac{1}{9}$, $y''(0) = 3$.

❍ Это простейшее дифференциальное уравнение решается трехкратным интегрированием правой части. Сначала понизим степень косинуса:

$$16\cos^3 2x = 8(1+\cos 4x)\cos 2x = 8\cos 2x + 4\cdot(2\cos 4x\cos 2x) =$$
$$= 8\cos 2x + 4\cdot(\cos 2x + \cos 6x) = 12\cos 2x + 4\cos 6x.$$

После первого интегрирования получаем

$$y'' = 6\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 6x + e^x - x + C_1, \tag{6.6}$$

после второго

$$y' = -3\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 6x + e^x - \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2, \tag{6.7}$$

а после третьего — общее решение

$$y = -\frac{3}{2}\sin 2x - \frac{1}{54}\sin 6x + e^x - \frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3. \tag{6.8}$$

Подставляя в (6.6)–(6.8) значения $x = 0$, $y = -1$, $y' = -\frac{1}{9}$, $y'' = 3$, получим соответственно: $3 = 1 + C_1$, $-\frac{1}{9} = -3 - \frac{1}{9} + 1 + C_2$, $-1 = 1 + C_3$, откуда $C_1 = 2$, $C_2 = 2$, $C_3 = -2$. Подставляя эти значения в выражение для y, получаем требуемое частное решение

$$y_ч = -\frac{3}{2}\sin 2x - \frac{1}{54}\sin 6x + e^x - \frac{x^3}{6} + x^2 + 2x - 2.$$ ●

Замечание. Произведения произвольных постоянных на конкретные числа также можно считать произвольными постоянными. Например, в (6.8) можно писать $\overline{C}_1x^2$ вместо $\frac{C_1x^2}{2}$.

Решить следующие дифференциальные уравнения высших порядков, а там, где имеются начальные условия, найти соответствующие частные решения:

2.6.36. $y^{IV} = \cos 2x$.

2.6.37. $y^{(9)} = e^{bx}$.

2.6.38. $y''' = 6x^2$.

2.6.39. $y''' = 4\cos^3 x - x$.

2.6.40. $y''' = \cos x\cos 2x\cos 5x$.

2.6.41. $y''' = x^2 + 3x - 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.

2.6.42. $y^V = \sin\frac{x}{2}$, $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = 8$, $y'''(0) = 6$, $y^{IV}(0) = -2$.

2.6.43. $y''' = \frac{24}{(x+2)^5}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -\frac{5}{8}$.

2.6.44. Решить дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$2y^{IV} = 3\sqrt[3]{y'''}.$$

❍ Это уравнение имеет вид $F(x, y''', y^{IV}) = 0$, поэтому его порядок можно снизить на три единицы при помощи замены $y''' = p$, $y^{IV} = p'$. Приходим к уравнению $2p' = 3\sqrt[3]{p}$. Рассмотрим два случая: 1) если $p = 0$, т. е. $y''' = 0$ то $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$ — не общее решение; 2) если $p \neq 0$, то $\frac{2}{3}\frac{dp}{\sqrt[3]{p}} = dx$. Отсюда получаем $p^{\frac{2}{3}} = x + C_1$, или $y''' = \pm(x + c_1)^{3/2}$. Последовательные интегрирования дают

$$y'' = \pm\frac{2}{5}(x + C_1)^{\frac{5}{2}} + C_2,$$

$$y' = \pm\frac{4}{35}(x + C_1)^{\frac{7}{2}} + C_2x + C_3,$$

$$y = \pm\frac{8}{315}(x + C_1)^{\frac{9}{2}} + \overline{C}_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = \pm\frac{8}{315}\sqrt{(x + C_1)^9} + C_2x^2 + C_3x + C_4,$$

к которому присоединим полученное ранее не общее решение $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$. ●

Решить данные дифференциальные уравнения высших порядков:

2.6.45. $(1 + x^2)y''' + 2xy'' = x^3$. **2.6.46.** $x^4y''' + 2x^3y'' = 1$.

2.6.47. $x^4y^{IV} + 2x^3y''' = 1$. **2.6.48.** $y''' + y''\operatorname{tg} x = \sin 2x$.

2.6.49. $xy''' - y'' = x^2e^x$. **2.6.50.** $y^{IV} - 2(y''' - 1)\operatorname{ctg} x = 0$.

2.6.51. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$xy''' - y'' + x^2 - 2 = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 2$, $y'(1) = -\frac{1}{3}$, $y''(1) = -3$.

◯ Данное уравнение имеет вид $F(x, y'', y''') = 0$, т. е. не содержит явно y и y'. Поэтому положим $y'' = p$, $y''' = p'$. Получаем линейное относительно неизвестной функции $p = p(x)$ уравнение

$$p' - \frac{p}{x} = \frac{2}{x} - x.$$

Его общее решение имеет вид (проверьте!) $p = x\left(C_1 - x - \frac{2}{x}\right)$. Нам остается решить простейшее дифференциальное уравнение $y'' = C_1x - x^2 - 2$. Подставив из начальных условий $x = 1$, $y'' = -3$, находим $C_1 = 0$. Интегрируя получающееся равенство $y'' = -x^2 - 2$, имеем $y' = -\frac{x^3}{3} - 2x + C_2$. Снова подставляя начальные условия $x = 1$, $y' = -\frac{1}{3}$, находим $C_2 = 2$. Значит, $y' = -\frac{x^3}{3} - 2x + 2$. Отсюда $y = -\frac{x^4}{12} - x^2 + 2x + C_3$. Наконец, учитывая, что $y(1) = 2$, т. е. $2 = -\frac{1}{12} - 1 + 2 + C_3$, получим $C_3 = \frac{13}{12}$, и, следовательно, $y_ч = -\frac{x^4}{12} - x^2 + 2x + \frac{13}{12}$. ●

2.6.52. Решить дифференциальное уравнение $y''(1 + 2\ln y') = 1$.

❍ В этом уравнении явно отсутствуют и аргумент x, и искомая функция. Поэтому его можно отнести и к типу $F(y, y', y'') = 0$, а, значит, можно положить $y' = p = p(y)$, $y'' = p \cdot p'$, и к типу $F(x, y', y'') = 0$, а, значит, можно положить $y' = p = p(x)$, $y'' = p'$.

1) В первом случае приходим к уравнению $pp'(1 + 2\ln p) = 1$. Здесь $p' = \dfrac{dp}{dy}$, а уравнение после разделения переменных может быть записано в виде $p(1 + 2\ln p)\,dp = dy$. Отсюда $\int p(1 + 2\ln p)\,dp = \int dy$, т. е. (после интегрирования по частям) $p^2 \ln p = y + C_1$, или $(y')^2 \ln y' = y + C_1$. Получили уравнение, не разрешенное относительно y' (и не разрешенное относительно y'). Его проинтегрировать нельзя.

2) Во втором случае приходим к уравнению $p'(1 + 2\ln p) = 1$. Здесь $p' = \dfrac{dp}{dx}$, а уравнение может быть записано в виде $dp(1+2\ln p) = dx$. Отсюда $\int (1+2\ln p)\,dp = \int dx$, т. е. $2p\ln p - p = x + C_2$, или $2y' \ln y' - y' = x + C_2$. Это уравнение также нельзя проинтегрировать.

3) Результаты предыдущих действий можно объединить и получить параметрическую форму общего решения исходного уравнения. Положим $y' = t$. Тогда

$$\begin{cases} y + C_1 = t^2 \ln t, \\ x + C_2 = 2t\ln t - t \end{cases}$$

— общее решение данного уравнения в параметрической форме. ●

Решить дифференциальные уравнения:

2.6.53. $(y'')^2 + (y''')^2 = 1$.

2.6.54. $y'y''' = 3(y'')^2$.

2.6.55. $xy''' + y'' = x + 1$.

2.6.56. $(y'')^2 - 2y'y'' + 3 = 0$.

2.6.57. $(y'')^2 - y'y''' = \left(\dfrac{y'}{x}\right)^2$.

2.6.58. $y''' = 3yy'$, $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = \dfrac{3}{2}$.

2.6.59. $y'' + 2y'' \ln y' = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

2.6.60. $y'''y^2 - 3yy'y'' + 2(y')^3 + \dfrac{y}{x}(yy'' - (y')^2) = \dfrac{y^3}{x^2}$.

Дополнительные задания

Решить дифференциальные уравнения:

2.6.61. $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

2.6.62. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

2.6.63. $xy''' + y'' = 1 + x$.

2.6.64. $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

2.6.65. $y''(1+\ln x) + \dfrac{y'}{x} = 2 + \ln x$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = 1$.

2.6.66. $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln \dfrac{y'}{x}\right)$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = 1$.

2.6.67. $yy'' + (y')^2 - (y')^3 \ln y = 0$.

2.6.68. $y''' = (y'')^3$.

2.6.69. $(x+1)y'' - (x+2)y' + x + 2 = 0$.

2.6.70. $3y'y'' = y + (y')^3 + 1$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

2.6.71. $y^2 + (y')^2 - 2yy'' = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$.

2.6.72. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

2.6.73. $y' = x(y'')^2 + (y'')^2$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

2.6.74. Почему общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит ровно две постоянные? Какую роль играют они в структуре общего решения?

2.6.75. Могут ли через точку (x_0, y_0) плоскости Oxy проходить пять различных частных решений дифференциального уравнения третьего порядка? второго порядка?

Решить дифференциальные уравнения:

2.6.76. $y'''(1 + (y')^2) - 3y'(y'')^2 = 0$.

2.6.77. $2yy'' + (y'')^2 + (y')^4 = 0$.

2.6.78. $yy'' + (y')^2 = y^2 \ln y$.

2.6.79. $yy'' = (y')^2 + y'\sqrt{y^2 + (y')^2}$.

2.6.80. $1 + (y')^2 = 2yy''$, $y(1) = y'(1) = 1$.

2.6.81. $y' = xy'' + y'' - (y'')^2$.

2.6.82. $(x-1)y''' + 2y' = \dfrac{x+1}{2x^2}$.

2.6.83. $x(y')^2y'' = (y')^2 + \dfrac{1}{3}x^4$.

2.6.84. $\sqrt{1-x^2}\,y'' + \sqrt{1-(y')^2} = 0$.

§ 7. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Предварительные сведения

$\Rrightarrow$ *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка* называется уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{7.1}$$

где функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a, b]$. $\Lleftarrow$

При этих условиях существует единственное решение уравнения (7.1), удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ при $x_0 \in [a, b]$.

Функция $f(x)$ называется *правой частью уравнения (7.1)*, а соответствующее уравнение называется также линейным дифференциальным уравнением второго порядка с правой частью. При $f(x) \equiv 0$ приходим к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка (или уравнению без правой части)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{7.2}$$

Линейно независимые функции

$\Rrightarrow$ Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на отрезке $[a, b]$, если тождество

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \equiv 0, \quad x \in [a, b], \tag{7.3}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $C_1 = C_2 = 0$.

Если же существуют такие числа C_1 и C_2, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место тождество (7.3), то функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно зависимыми* на отрезке $[a, b]$. $\Lleftarrow$

Данные определения равносильны следующим:
функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми (зависимыми) на отрезке $[a, b]$, если

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv \text{const} \quad \left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv \text{const}\right), \quad x \in [a, b].$$

О линейной зависимости или независимости функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ можно судить по определителю

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

который называется *определителем Вронского* (или просто *вронскианом*).

Теорема 2.3. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то $W[y_1, y_2] = 0$ для всех x из $[a, b]$.

Теорема 2.4. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимые на отрезке $[a,b]$ решения дифференциального уравнения (7.2), то определитель Вронского этих функций отличен от нуля во всех точках отрезка $[a,b]$.

Структура общего решения линейного дифференциального уравнения

Теорема 2.5. Общее решение $y_{\text{оо}}$ линейного однородного дифференциального уравнения (7.2) имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — линейно независимые решения этого уравнения.

Таким образом, для того, чтобы получить общее решение однородного уравнения (7.2), достаточно найти любые два линейно независимых частных решения этого уравнения (в этом случае говорят, что они образуют *фундаментальную систему решений* уравнения (7.2)).

В некоторых случаях удается тем или иным способом найти только одно частное решение $y_1(x)$. Тогда другое частное решение $y_2(x)$ можно найти по формуле

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{1}{y_1^2(x)} \cdot \exp\left[-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx\right] dx,$$

где $x_0 \in [a,b]$. Оба решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ при этом линейно независимы.

Теорема 2.6. Общее решение $y_{\text{он}}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения (7.1) представляется в виде суммы

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{ч}},$$

где $y_{\text{оо}}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения (7.2), а $y_{\text{ч}}$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (7.1).

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$\Rrightarrow$ Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{7.4}$$

Квадратное уравнение

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{7.5}$$

называется *характеристическим уравнением* для уравнения (7.4). $\Lleftarrow$

Для составления общего решения y_{oo} дифференциального уравнения (7.4) необходимо найти корни k_1 и k_2 соответствующего характеристического уравнения (7.5) и применить следующую теорему:

Теорема 2.7. Пусть k_1 и k_2 — корни характеристического уравнения для уравнения (7.4). Тогда общее решение уравнения (7.4) находится по одной из следующих трех формул:

1) Если k_1 и k_2 — действительные и $k_1 \neq k_2$, то

$$y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

2) если $k_1 = k_2$, то

$$y_{oo} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x);$$

3) если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ — комплексно-сопряженные корни, то

$$y_{oo} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

Поскольку общее решение y_{oo} линейного однородного уравнения (7.4) легко находится по теореме 2.7, то в силу теоремы 2.6 для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{7.6}$$

остается найти какое-нибудь одно его частное решение $y_ч$. В тех случаях, когда правая часть $f(x)$ имеет специальный вид, частное решение $y_ч$ неоднородного уравнения находится *методом неопределенных коэффициентов*. Этот метод называется также методом подбора частного решения неоднородного уравнения и сводится к следующим двум случаям.

Случай 1. $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n.

а) Если α не является корнем уравнения (7.5), то частное решение $y_ч$ можно искать в виде

$$y_ч = e^{\alpha x} Q_n(x),$$

где $Q_n(x)$ — многочлен степени n с неизвестными коэффициентами.

б) Если α — корень уравнения (7.5) кратности k, то частное решение $y_ч$ можно искать в виде

$$y_ч = x^k e^{\alpha x} Q_n(x).$$

В частности, если $f(x) = P_n(x)$, т. е. $\alpha = 0$, то $y_ч$ имеется в виде $y_ч = Q_n(x)$ (если $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения) или в виде $y_ч = x^k \cdot Q_n(x)$ (если $\alpha = 0$ — корень кратности k характеристического уравнения).

Случай 2. $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m, соответственно. Положим $N = \max(n, m)$.

а) Если $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями уравнения (7.5), то

$$y_{ч} = e^{\alpha x}[P_N(x)\cos\beta x + Q_N(x)\sin\beta x].$$

б) Если $\alpha \pm \beta i$ — корни уравнения (7.5) кратности k, то

$$y_{ч} = x^k e^{\alpha x}[P_N(x)\cos\beta x + Q_N(x)\sin\beta x].$$

В частности, если $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$, т. е. $\alpha = m = n = 0$, то частное решение ищется в виде $y_{ч} = A\cos\beta x + B\sin\beta x$ (если числа $\pm\beta i$ не являются корнями характеристического уравнения) или в виде $y_{ч} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\cdot x$ (если числа $\pm\beta i$ — корни характеристического уравнения).

Теорема 2.8. Если $y_{ч1}$ и $y_{ч2}$ — частные решения соответственно уравнений

$$y'' + py' + qy = f_1(x)$$

и

$$y'' + py' + qy = f_2(x),$$

то функция $y_{ч} = y_{ч1} + y_{ч2}$ — частное решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$

Метод вариации произвольных постоянных для определения частного решения неоднородного уравнения

В общем случае, в том числе тогда, когда правая часть ЛНДУ имеет вид, не предусмотренный предыдущим пунктом, для отыскания частного решения используют *метод вариации* (т. е. изменения) *произвольных постоянных* (или *метод Лагранжа*). Суть его в следующем. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (7.4). Тогда частное решение можно представить в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

где функции $C_1(x)$ и C_2 находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases}$$

Разумеется, метод вариации произвольных постоянных можно применять и в случае, когда правая часть ЛНДУ имеет вид, рассмотренный в предыдущем пункте.

Уравнение Эйлера

⇛ Дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$x^2y'' + pxy' + qy = 0$$

называется *уравнением Эйлера.* ⇚

Подстановкой $y = e^t$ оно сводится к ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

Обобщенное дифференциальное уравнение Эйлера второго порядка

$$(ax+b)^2y + p(ax+b)y' + qy = 0$$

приводится к ЛОДУ с постоянными коэффициентами подстановкой $ax+b = e^t$.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами порядка выше второго

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами порядка $n \geqslant 2$

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$$

решаются аналогично уравнениям второго порядка, опираясь на соответствующие определения и теоремы. В частности:

⇛ 1. Система функций $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, …, $y_n = y_n(x)$ называется *линейно зависимой* на отрезке $[a, b]$, если существуют постоянные C_1, C_2, …, C_n, не все равные нулю такие, что имеет место тождество

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \equiv 0, \quad x \in [a, b].$$

Если же это тождество имеет место только при $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, то данные функции *линейно независимы* на отрезке $[a, b]$. ⇚

⇛ *Вронскиан* системы функций y_1, y_2, …, y_n имеет вид

$$W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$ ⇚

⇛ 2. *Характеристическое уравнение*, соответствующее однородному дифференциальному уравнению n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{7.7}$$

имеет вид

$$k^n + a_1k^{n-1} \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0. \tag{7.8}$$

Теоремы 2.3–2.6, сформулированные для уравнений второго порядка, также имеют место и при любом $n > 2$. $\Leftarrow$

3. Метод вариации произвольных постоянных для неоднородного линейного дифференциального уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$y''' + py'' + qy' + ry = f(x) \tag{7.9}$$

состоит в следующем: общее решение уравнения (7.9) имеет вид

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + C_3(x)y_3,$$

где y_1, y_2, y_3 — фундаментальная система решений однородного уравнения

$$y''' + py'' + qy' + ry = 0,$$

а функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ — находятся из системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_3'y_3' = 0, \\ C_1'y_1'' + C_2'y_2'' + C_3'y_3'' = f(x). \end{cases}$$

2.7.1. Установить линейную зависимость или независимость данных пар функций на областях их определения.

а) x, $\cos x$; б) x, $2x$;

в) $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

а) Функции $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = \cos x$ определены на всей прямой, т. е. при $x \in (-\infty, +\infty)$. Тождество $C_1x + C_2\cos x \equiv 0$ имеет место только при $C_1 = C_2 = 0$. В самом деле, если предположить противное, т. е. что это тождество имеет место, например, при $C_2 \neq 0$, то после его дифференцирования получим новое тождество $C_1 - C_2\sin x \equiv 0$, откуда $\sin x \equiv \dfrac{C_1}{C_2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, что неверно. Если же предположить, что $C_2 = 0$, то получим $C_1x \equiv 0$, что также невозможно при $C_1 \neq 0$. Таким образом, тождество $C_1x + C_2\cos x \equiv 0$ имеет место только при $C_1 = C_2 = 0$, и, стало быть, функции x и $\cos x$ линейно независимы на действительной прямой.

Заметим, что $\dfrac{\cos x}{x} \neq \text{const}$ и $\dfrac{x}{\cos x} \neq \text{const}$, т. е. функции x и $\cos x$ удовлетворяют и другому определению линейной независимости.

б) Имеем $\dfrac{2x}{x} \equiv 2$ при $x \neq 0$ (тождество можно доопределить по непрерывности и при $x = 0$), поэтому функции $y_1 = 2x$ и $y_2 = x$ — линейно зависимы.

в) Ввиду периодичности функций $y_1 = \operatorname{tg} x$ и $y_2 = \operatorname{ctg} x$ с периодом $T = \pi$ достаточно установить их линейную независимость в интервале $x \in (0, \pi)$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2}\right)$. Имеем $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \neq \text{const}$ $x \in (0, \pi)$,

$x \neq \frac{\pi}{2}$. Таким образом, функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ линейно независимы в области их определения $\left(x \neq n \cdot \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right)$. ●

Установить, какие из следующих пар функций линейно независимы, а какие — линейно зависимы:

2.7.2. $\arcsin x$ и $\arccos x$.

2.7.3. $\sin x$, $\sin 2x$.

2.7.4. e^x, e^{x^2}.

2.7.5. 1, x.

2.7.6. $\sin x$, $\sin^2 x$.

2.7.7. $\sin x \cos x$, $\sin 2x$.

2.7.8. $1 - \cos 2x$, $\sin^2 x$.

2.7.9. $1 + \cos 2x$, $\cos^2 x$.

2.7.10. Даны функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x}$. Составить однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

❍ Заметим сначала, что данные функции линейно независимы на всей прямой, так как $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{-2x}} = e^{3x} \not\equiv \text{const}$. Пусть $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ — общее решение некоторого ЛОДУ второго порядка. Тогда

$$\begin{cases} y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}, \\ y'' = C_1 e^x + 4C_2 e^{-2x}. \end{cases}$$

Разрешим эту систему относительно постоянных C_1 и C_2. Вычитая первое уравнение из второго, получаем $6C_2 e^{-2x} = y'' - y'$. Отсюда

$$C_2 = \frac{1}{6}(y'' - y')e^{2x}.$$

Теперь первое уравнение, домноженное на 2, прибавим ко второму:

$$2y' + y'' = 3C_1 e^x.$$

Отсюда $C_1 = \frac{1}{3}(2y' + y'')e^{-x}$. Полученные выражения для C_1 и C_2 подставим в выражение для y:

$$y = \frac{1}{3}(2y' + y'') + \frac{1}{6}(y'' - y'),$$

т. е. $y'' + y' - 2y = 0$. В итоге мы получили дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x}$.

Поскольку решения $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-2x}$ этого уравнения линейно независимы, то в силу теоремы 2.5 функция $y_{\text{оо}} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ — действительно его общее решение. Отсюда следует, что это и есть искомое дифференциальное уравнение. ●

Составить линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, для которого данные функции составляют фундаментальную систему решений, предварительно проверив, что данные функции линейно независимы:

2.7.11. $\sin x$, $\cos x$. **2.7.12.** e^{-x}, e^{x}.

2.7.13. 1, x. **2.7.14.** xe^{x}, e^{x}.

2.7.15. e^{2x}, e^{x}. **2.7.16.** e^{2x}, xe^{2x}.

2.7.17. $\sin 2x$, $\cos 2x$.

2.7.18. Найти общее решение уравнения $2y'' - 3y' + y = 0$.

◯ Составим характеристическое уравнение: $2k^2 - 3k + 1 = 0$. По его корням $k_1 = 1$ и $k_2 = \frac{1}{2}$ составим общее решение данного однородного уравнения, согласно теореме 2.8:

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}.$$ ●

Найти общие решения уравнений:

2.7.19. $y'' - 5y' + 6y = 0$. **2.7.20.** $2y'' + 5y' - 7y = 0$.

2.7.21. $y'' + 4y' - 3y = 0$. **2.7.22.** $3y'' + y' - 2y = 0$.

2.7.23. $y'' + 25y' = 0$. **2.7.24.** $4y'' - 9y' = 0$.

2.7.25. Найти общее решение уравнения $4y'' + 4y' + y = 0$.

◯ Характеристическое уравнение $4k^2 + 4k + 1 = 0$ имеет два одинаковых корня $k_1 = k_2 = -\frac{1}{2}$. В таком случае (см. теорему 2.8)

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}, \quad \text{или} \quad y_{\text{оо}} = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{1}{2}x}.$$ ●

Найти общие решения уравнений:

2.7.26. $y'' - 6y' + 9y = 0$. **2.7.27.** $y'' - 4y' + 4y = 0$.

2.7.28. $4y'' - 12y' + 9y = 0$. **2.7.29.** $9y'' + 12y' + 4y = 0$.

2.7.30. Найти общее решение уравнения $2y'' + y' + 3y = 0$.

◯ Характеристическое уравнение $2k^2 + k + 3 = 0$ имеет комплексные (комплексно-сопряженные) корни:

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{23}\, i}{4}.$$

В этом случае общее решение уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{23}}{4} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{23}}{4} x \right) e^{-\frac{1}{4}x}.$$ ●

Найти общие решения уравнений:

2.7.31. $y'' + 4y = 0$. **2.7.32.** $4y'' + 9y = 0$.

2.7.33. $y'' + y' + y = 0$. **2.7.34.** $y'' - y' + 6y = 0$.

2.7.35. $2y'' - 3y' + 5y = 0$. **2.7.36.** $5y'' - 3y' + 2y = 0$.

2.7.37. Найти частное решение уравнения $3y''+7y'+4y = 0$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{2}{3}$.

◐ Характеристическое уравнение $3k^2+7k+4 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$ и $k_2 = -\frac{4}{3}$. Следовательно, общее решение имеет вид $y_{oo} = C_1e^{-x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$. Находим $y'_{oo} = -C_1e^{-x} - \frac{4}{3}C_2e^{-\frac{4}{3}x}$. Подставляя в последних двух равенствах $x = 0$, $y = 1$, $y' = -\frac{2}{3}$, получаем систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -C_1 - \frac{4}{3}C_2 = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Найденные константы подставляем в выражение для общего решения. Получаем искомое частное решение

$$y_{ч} = 2e^{-x} - e^{-\frac{4}{3}x}.$$ ●

Найти частные решения данных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

2.7.38. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.

2.7.39. $y'' + 4y' = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 8$.

2.7.40. $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

2.7.41. $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

2.7.42. $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.

2.7.43. Найти общее решение уравнения $y''-7y' = 5xe^x$, подбирая частное решение методом неопределенных коэффициентов.

◐ Характеристическое уравнение $k^2-7k = 0$ имеет два действительных корня $k_1 = 0$ и $k_2 = 7$, поэтому общее решение однородного уравнения $y'' - 7y' = 0$ имеет вид $y_{oo} = C_1 + C_2e^{7x}$. Правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = P_1(x)e^{kx}$, где $P_1(x) = 5x$ — многочлен первой степени, а $k = 1$ — не является корнем характеристического уравнения. Значит, частное решение ищем в таком же виде: $y_{ч} = (Ax + B)e^x$ ($Ax + B = Q_1(x)$ — многочлен первой степени с неизвестными коэффициентами). Для определения коэффициентов A и B находим

$$y'_{ч} = Ae^x + (Ax + B)e^x = (A + Ax + B)e^x, \quad y''_{ч} = (2A + Ax + B)e^x,$$

после чего подставляем выражения для $y_{ч}$, $y'_{ч}$ и $y''_{ч}$ в исходное дифференциальное уравнение:

$$(2A + Ax + B)e^x - 7(A + Ax + B)e^x = 5xe^x.$$

После сокращения обеих частей на e^x и приравнивания коэффициентов при соответствующих степенях x в левой и правой части полученного равенства приходим к системе уравнений относительно неизвестных A и B:

$$\begin{aligned} x:&\quad A-7A=5,\\ x^0:&\quad 2A+B-7A-7B=0,\end{aligned}\quad \text{т. е.}\quad \begin{cases}-6A=5,\\ -5A-6B=0.\end{cases}$$

Отсюда $A=-\frac{5}{6}$, $B=\frac{25}{36}$, а $y_{\text{ч}}=\left(-\frac{5}{6}x+\frac{25}{36}\right)e^x$. Теперь в силу теоремы 2.6 общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}}=C_1+C_2e^{7x}+\left(-\frac{5}{6}x+\frac{25}{36}\right)e^x. \qquad \bullet$$

Найти общие решения уравнений, находя их частные решения методом неопределенных коэффициентов:

2.7.44. $y''-3y'+2y=10e^{-x}$. **2.7.45.** $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$.
2.7.46. $y''-3y'+2y=2x^3-30$. **2.7.47.** $y''-2y'+2y=2x$.
2.7.48. $y''+4y'-5y=1$. **2.7.49.** $2y''-y'-y=4xe^{2x}$.

2.7.50. Найти общее решение уравнения $y''+6y'+9y=(x-2)e^{-3x}$.

○ Характеристическое уравнение $k^2+6k+9=0$ имеет корень $k=-3$ кратности 2, откуда $y_{\text{оо}}=(C_1+C_2x)e^{-3x}$. Правая часть исходного уравнения имеет вид $P_1(x)e^{\alpha x}$, где $P_1(x)=x-2$— многочлен первой степени, а $\alpha=-3$ — корень кратности 2 характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_{\text{ч}}=x^2Q_1(x)e^{-3x}$, т. е. $y_{\text{ч}}=(Ax+B)x^2e^{-3x}$. Дальнейшие вычисления оформим следующим образом. Расположим $y_{\text{ч}}$, $y'_{\text{ч}}$, $y''_{\text{ч}}$, в столбик, слева от них запишем соответствующие коэффициенты исходного дифференциального уравнения, после чего составим систему уравнений относительно A и B, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x левой и правой частей полученного равенства (при этом e^{-3x} можно сократить)

$$\begin{array}{r|l} 9 & y=(\underline{Ax^3}+\underline{\underline{Bx^2}})e^{-3x}\\ 6 & y'_{\text{ч}}=(\underline{\underline{3Ax^2}}+\underline{\underline{\underline{2Bx}}}-\underline{3Ax^3}-\underline{\underline{3Bx^2}})e^{-3x}\\ 1 & y''_{\text{ч}}=(\underline{9Ax^3}-\underline{\underline{18Ax^2}}+\underline{\underline{9Bx^2}}+\underline{\underline{\underline{6Ax}}}-\underline{\underline{\underline{12Bx}}}+2B)e^{-3x}.\end{array}$$

В приведенных выражениях одинаковыми линиями подчеркнуты подобные члены.

$$\left.\begin{aligned} x^3:&\quad 9A-18A+9A=0,\\ x^2:&\quad 9B+18A-18B-18A+9B=0,\\ x^1:&\quad 12B+6A-12B=1,\\ x^0:&\quad 2B=-2.\end{aligned}\right|\Longrightarrow\left|\begin{aligned}&0=0,\\ &0=0,\\ &A=\frac{1}{6},\\ &B=-1.\end{aligned}\right.$$

Заметим, что получили систему из четырех уравнений с двумя неизвестными, при этом два уравнения тривиальны. Это признак правильности составления системы.

Таким образом, $y_{\text{ч}}=\left(\frac{1}{6}x-1\right)x^2e^{-3x}$, откуда общее решение

$$y_{\text{он}}=(C_1+C_2x)e^{-3x}+\left(\frac{1}{6}x-1\right)x^2e^{-3x}. \qquad \bullet$$

Найти общие решения уравнений:

2.7.51. $y'' + 3y' - 4y = (x+1)e^x$.
2.7.52. $y'' - 2y' + y = (x+1)e^x$.
2.7.53. $y'' + 2y' + y = (x+3)e^{-x}$.
2.7.54. $2y'' + 3y' + y = (1-2x)e^{-x}$.
2.7.55. $y'' + 3y' + 2y = (1-4x)e^{-2x}$.
2.7.56. $y'' + 4y' + 4y = (1-4x)e^{-2x}$.

2.7.57. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = (2x+3)\sin x + \cos x$.

◯ Решая характеристическое уравнение $k^2+3k+2=0$, находим $k_1 = -1$, $k_2 = -2$, откуда $y_{\text{оо}} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_{\text{ч}} = (Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x.$$

Так как неизвестные многочлены $P_N(x) = Ax+B$ и $Q_N(x) = Cx+D$ должны иметь степень $N = \max(m,n)$, где $m=1$ — степень многочлена $P_1(x) = 2x+3$, $n=0$ — степень многочлена $Q_0(x) = 1$ (см. случай 2 а на с. 97 при $\gamma = 0$; мы специально поменяли местами $P(x)$ и $Q(x)$, чтобы показать, что это не влияет на структуру $y_{\text{ч}}$). Далее

$$\begin{array}{r|l}
2 & y_{\text{ч}} = (Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x, \\
3 & y'_{\text{ч}} = A\sin x + (Ax+B)\cos x + C\cos x - (Cx+D)\sin x, \\
1 & y''_{\text{ч}} = 2A\cos x - (Ax+B)\sin x - 2C\sin x - (Cx+D)\cos x.
\end{array}$$

Теперь приравниваем коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях соответствующего уравнения:

$$\begin{array}{rl}
x\sin x: & 2A - 3C - A = 2, \\
\sin x: & 2B + 3A - 3D - B - 2C = 3, \\
x\cos x: & 2C + 3A - C = 0, \\
\cos x: & 2D + 3B + 3C + 2A - D = 1,
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{cases}
A - 3C = 2, \\
3A + B - 2C - 3D = 3, \\
3A + C = 0, \\
2A + 3B + 3C + D = 1.
\end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений находим: $A = \frac{1}{5}$, $C = -\frac{3}{5}$. Из второго и четвертого, с учетом полученных коэффициентов, имеем: $B = \frac{21}{25}$, $D = -\frac{3}{25}$. Таким образом,

$$y_{\text{он}} = \left(\frac{1}{5}x + \frac{21}{25}\right)\sin x - \left(\frac{3}{5}x + \frac{3}{25}\right)\cos x + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}. \qquad \bullet$$

Решить уравнения:

2.7.58. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.
2.7.59. $2y'' + 5y' = 29\cos x$.
2.7.60. $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x$.
2.7.61. $y'' - 2y' - 8y = -8\cos 2x$.
2.7.62. $y'' + 4y' + 4y = (2x+3)\sin x + \cos x$.
2.7.63. $y'' - 2y = 2x(\cos x - \sin x)e^x$.

2.7.64. Решить уравнение $y'' + 16y = 3x\sin 4x + \cos 4x$.

○ Корни характеристического уравнения $k^2+16=0$ мнимые: $k_{1,2}=\pm 4i$. С другой стороны, правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x)=e^{0x}(P_0(x)\cos 4x+Q_1(x)\sin 4x)$. Значит, $\alpha\pm\beta i=\pm 4i$ — корни характеристического уравнения, поэтому (см. случай 2б, с. 97).

$$y_{ч}=x\big[(Ax+B)\cos 4x+(Cx+D)\sin 4x\big].$$

Имеем:

$$\begin{array}{r|ll} 16 & y_{ч}= & (Ax^2+Bx)\cos 4x+(Cx^2+Dx)\sin 4x,\\ 0 & y'_{ч}= & (2Ax+B)\cos 4x-4(Ax^2+Bx)\sin 4x+(2Cx+D)\sin 4x+\\ & & +4(Cx^2+Dx)\cos 4x,\\ 1 & y''_{ч}= & 2A\cos 4x-8(2Ax+B)\sin 4x-16(Ax^2+Bx)\cos 4x+\\ & & +2C\sin 4x+8(2Cx+D)\cos 4x-16(Cx^2+Dx)\sin 4x. \end{array}$$

Отсюда

$$\begin{array}{rl} x^2\cos 4x: & 16A-16A=0,\\ x\cos 4x: & 16B-16B+16C=0,\\ \cos 4x: & 2A+8D=1,\\ x^2\sin 4x: & 16C-16C=0,\\ x\sin 4x: & 16D-16A-16D=3,\\ \sin 4x: & -8B+2C=0. \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} C=0,\\ 2A+8D=1,\\ -16A=3,\\ -8B+2C=0, \end{cases}$$

откуда $A=-\frac{3}{16}$, $B=C=0$, $D=\frac{11}{64}$.

Таким образом,

$$y_{он}=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x-\frac{3}{16}x^2\cos 4x+\frac{11}{64}\sin 4x.$$ ●

Решить уравнения:

2.7.65. $y''+25y=\cos 5x$.

2.7.66. $y''+y=2x\cos x+\sin x$.

2.7.67. $y''+y=x\sin x$.

2.7.68. $y''+9y=\frac{11}{12}\sin 3x-x\cos 3x$.

2.7.69. $y''-2y'+5y=e^x\cos 2x$.

2.7.70. $5y''-6y'+5y=e^{\frac{3}{5}x}\sin\frac{4}{5}x$.

2.7.71. Решить уравнение $y''-2y'+5y=xe^x\cos 2x+x^2-x+2$.

○ Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y''-2y'+5y=0$$

имеет вид (проверьте!) $y_{оо}=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^x$. Данное дифференциальное уравнение представим в виде совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} y''-2y'+5y=xe^x\cos 2x,\\ y''-2y'+5y=x^2-x+2. \end{array}\right.$$

Частное решение первого уравнения находим в виде

$$y_{ч1}=x[(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x]e^x,$$

так как $\alpha\pm\beta i=1\pm 2i$ — корень характеристического уравнения

$$k^2-2k+5=0,\quad k=1\pm 2i.$$

Соответствующие вычисления, которые предлагаем выполнить самостоятельно, дают

$$y_{\text{ч}1} = x\left[\frac{1}{16}\cos 2x + \frac{1}{8}x\sin 2x\right]e^x.$$

Частное решение второго уравнения находим в виде

$$y_{\text{ч}2} = Ax^2 + Bx + C.$$

Аналогично находим $y_{\text{ч},2} = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{25}x + \frac{38}{125}$. Общее решение исходного уравнения имеет вид $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{ч}1} + y_{\text{ч}2}$, т. е.

$$y_{\text{он}} = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^x + \\ + x\left(\frac{1}{16}\cos 2x + \frac{1}{8}x\sin 2x\right)e^x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{25}x + \frac{38}{125}. \quad \bullet$$

Решить уравнения (данные уравнения, согласно правым частям, предлагаем целесообразным образом представить в виде совокупности более простых):

2.7.72. $y'' - 2y' + y = x^2 - x + 3 + x\cos x.$

2.7.73. $y'' + 5y' + 6y = (x-2)e^{-3x} + x^2 + 2x - 3.$

2.7.74. $y'' + 6y' + 10y = (x+6)\cos 3x - (18x+6)\sin 3x + 2xe^{-3x}\cos x.$

2.7.75. $y'' + 9y = e^{-3x}(x-2) + 14 + 63x^2.$

2.7.76. $y'' - 2y' + y = \sin x + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}.$

2.7.77. Решить уравнение $y'' - y' = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

❍ Общее решение однородного уравнения $y'' - y' = 0$ имеет вид $y_{\text{оо}} = C_1 + C_2e^x$. Правая часть $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ неоднородного уравнения не позволяет найти частное решение $y_{\text{ч}}$ методом подбора (или неопределенных коэффициентов), поэтому воспользуемся методом вариации произвольных постоянных:

$$y_{\text{ч}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

где $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$ — фундаментальная система решений однородного уравнения, а $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x), \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} C_1'\cdot 1 + C_2'\cdot e^x = 0, \\ C_1'\cdot 0 + C_2'\cdot e^x = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $C_2' = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, откуда после интегрирования $C_2(x) = \displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \arcsin e^x$ (константу интегрирования полагаем равной нулю). Из первого уравнения системы получим $C_1' = -C_2'e^x = -\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, т. е., интегрируя,

$$C_1(x) = -\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \sqrt{1-e^{2x}}.$$

Тем самым, частное решение имеет вид

$$y_ч = C_1(x)\cdot 1 + C_2(x)e^x = \sqrt{1-e^{2x}} + e^x \arcsin e^x,$$

а общее решение

$$y_{он} = C_1 + C_2 x + \sqrt{1-e^{2x}} + e^x \arcsin e^x.$$

●

Решить уравнения, используя метод вариации постоянных:

2.7.78. $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

2.7.79. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

2.7.80. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x}$.

2.7.81. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

2.7.82. $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.

2.7.83. $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$.

2.7.84. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

2.7.85. Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' - y = 6xe^x$, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y(0) = 2$, $y'(0) = -5$.

❍ Запишем уравнение без правой части $y'' - 2y' - y = 0$. Его характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 2k - 1 = 0$, откуда $k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, т. е. $y_{оо} = C_1 e^{(1-\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1+\sqrt{2})x}$. Частное решение неоднородного уравнения найдем методом подбора:

$$\begin{array}{r|l|}
-1 & y_ч = (Ax+B)e^x \\
-2 & y_ч' = (Ax+B+A)e^x \\
1 & y_ч'' = (Ax+2A+B)e^x
\end{array}
\implies
\left|\begin{array}{ll}
x: & -A - 2A + A = 6, \\
x^0: & -B - 2B - 2A + 2A + B = 0.
\end{array}\right.$$

Следовательно, $A = -3$, $B = 0$ и $y_ч = -3xe^x$. Отсюда

$$y_{он} = C_1 e^{(1-\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1+\sqrt{2})x} - 3xe^x.$$

Полученное выражение продифференцируем, а затем в $y_{он}$ и $y_{он}'$ подставим $x = 0$, $y = 1$, $y' = 1$ из начальных условий и из получающейся системы определим значения констант C_1 и C_2. Имеем:

$$y_{он}' = (1-\sqrt{2})C_1 e^{(1-\sqrt{2})x} + (1+\sqrt{2})C_2 e^{(1+\sqrt{2})x} - 3e^x - 3xe^x,$$

а соответствующая система, о которой говорили выше, имеет вид:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 & (\text{заменили } x = 0,\ y_{он} = 2), \\ (1-\sqrt{2})C_1 + (1+\sqrt{2})C_2 - 3 = -5 & (\text{заменили } x = 0,\ y_{он}' = -5). \end{cases}$$

Первое уравнение, домноженное на $-(1+\sqrt{2})$, прибавим ко второму:

$$-2\sqrt{2}C_1 = -4 - 2\sqrt{2}, \quad C_1 = \frac{2\sqrt{2}+4}{2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Далее $C_2 = 1 - C_1 = 1 - \sqrt{2}$. Искомое частное решение имеет вид

$$y = (1 + \sqrt{2})e^{(1-\sqrt{2})x} + (1 - \sqrt{2})e^{(1+\sqrt{2})x} - 3xe^x. \qquad \bullet$$

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

2.7.86. $y'' + y = 4xe^x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

2.7.87. $y'' + y = 4\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

2.7.88. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$, $y(0) = \frac{26}{5}$, $y'(0) = \frac{39}{5}$.

2.7.89. $y'' + 2y' - 3y = 48x^2e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{3}{2}$.

2.7.90. $y'' + 4y' + 4y = 32xe^{2x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

2.7.91. $y'' - y = 2e^x - x^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

2.7.92. $y'' + 3y' + 2y = 2\sin 3x + 6\cos 3x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

2.7.93. $y'' + 9y = 6\cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

2.7.94. $y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

2.7.95. $4y'' + y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, $y(\pi) = 3$, $y'(\pi) = \frac{1}{2}$.

2.7.96. Найти общее решение уравнения Эйлера $x^2y'' + 2xy' + y = 0$.

○ Положим $x = e^t$, откуда $t = \ln x$. Тогда неизвестная функция $y = y(x)$ становится сложной функцией аргумента t: $y = y(e^t)$. Следовательно,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)e^{-t} =$$
$$= \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}.$$

Исходное дифференциальное уравнение принимает вид

$$e^{2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t} + 2e^t \cdot \frac{dy}{dt}e^{-t} + y = 0,$$

т. е.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0, \quad \text{или} \quad y'' + y' + y = 0,$$

где $y = y(t)$. Общее решение полученного линейного уравнения с постоянными коэффициентами находим стандартным образом:

$$y_{\text{оо}} = e^{-\frac{t}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Остается вернуться к переменной x, используя замену $t = \ln x$. Получаем

$$y_{\text{оо}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right). \qquad \bullet$$

Решить уравнения:

2.7.97. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$. **2.7.98.** $x^2y'' + 3xy' + y = 0$.
2.7.99. $xy'' + y' = 0$.

2.7.100. Решить обобщенное дифференциальное уравнение Эйлера

$$(3x-2)^2y'' - 2(3x-2)y' + 6y = 0.$$

○ Положим $3x - 2 = e^t$, откуда $t = \ln(3x-2)$. Тогда $x = \frac{1}{3}(e^t + 2)$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}e^t$, $\frac{dt}{dx} = 3e^{-t}$. Далее

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = 3e^{-t} \cdot y'_t,$$

$$y''_{x^2} = \left(3e^{-t}y'_t\right)'_t \cdot t'_x = 3\left(-e^{-t} \cdot y'_t + e^{-t} \cdot y''_{t^2}\right)3e^{-t} = 9e^{-2t}(y''_{t^2} - y'_t).$$

Подставляем полученные выражения в исходное уравнение:

$$9(y''_{t^2} - y'_t) - 6y'_t + 6y = 0, \quad \text{т. е.} \quad 9y'' - 15y' + 6y = 0, \quad y = y(t).$$

Корни соответствующего характеристического уравнения $9k^2 - 15k + 6 = 0$, т. е. $3k^2 - 5k + 2 = 0$ равны $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{2}{3}$, поэтому

$$y_{\text{оо}}(t) = C_1e^t + C_2e^{\frac{2}{3}t}.$$

После замены $t = \ln(3x-2)$ и преобразований получим окончательно

$$y_{\text{оо}}(x) = C_1(3x-2) + C_2\sqrt[3]{(3x-2)^2}.$$ ●

Решить уравнения:

2.7.101. $(2x+1)^2y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$.
2.7.102. $x^2y'' + xy' + y = 0$. **2.7.103.** $x^2y'' - xy' - 3y = 0$.
2.7.104. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$.

Дополнительные задания

Доказать линейную независимость данных функций на их области определения, найти определитель Вронского:

2.7.105. x, e^x, e^{-x}. **2.7.106.** x, xe^x, xe^{-x}.
2.7.107. $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctg} 2x$, $\operatorname{arctg} 3x$. **2.7.108.** $1, x, x^2, \ldots, x^n$.
2.7.109. e^{k_1x}, e^{k_2x}, e^{k_3x} (k_1, k_2, k_3 — различные действительные числа).
2.7.110. $e^x, e^{2x}, e^{3x}, \ldots, e^{nx}$.
2.7.111. $\cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx$, $x \in [0, 2\pi]$.

Доказать линейную зависимость данных функций и найти определитель Вронского:

2.7.112. 1, $\arcsin x$, $\arccos x$, $x \in [-1, 1]$.

2.7.113. π, $\operatorname{arctg} 2x$, $\operatorname{arcctg} 2x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.
2.7.114. $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.
2.7.115. $\sin 3\alpha$, $\sin \alpha$, $\sin^3 \alpha$, 1, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$.
2.7.116. $\cos \alpha$, $\cos^3 \alpha$, $\cos 3\alpha$, 5, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$.
2.7.117. $\ln x$, $\ln x^2$, $\ln^2 x$, $\ln^3 x$, $x \in (0, +\infty)$.
2.7.118. e^x, $e^x \sin^2 x$, $e^x \cos^2 x$, e^{-2x}, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Показать, что не существует линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, для которого данная система функций является фундаментальной:

2.7.119. $\sin x$, $\sin 2x$.
2.7.120. $\cos x$, $\cos 2x$.
2.7.121. x, $\frac{1}{x}$.
2.7.122. x^2, $\frac{1}{x}$.
2.7.123. e^x, $\sin x$.
2.7.124. e^x, $\cos x$.
2.7.125. x, $\sin x$.
2.7.126. x, $\cos x$.
2.7.127. x, x^2, $\sin x$.
2.7.128. e^x, e^{-x}, $\cos x$.
2.7.129. x, x^2, $\cos x$.
2.7.130. x, e^x, $\sin x$.

Составить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, фундаментальная система решений которого имеет вид:

2.7.131. e^{2x}, e^{-3x}, e^x.
2.7.132. 1, e^x, e^{3x}.
2.7.133. $\cos 2x$, $\sin 2x$, e^{-x}.
2.7.134. e^x, xe^x, $\sin x$, $\cos x$.
2.7.135. e^x, xe^x, x^2e^x, e^{3x}.
2.7.136. e^x, xe^x, $\sin 3x$, $\cos 3x$.

Составить линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами по данному общему решению:

2.7.137. $y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x^2}$.
2.7.138. $y = C_1(x+2) + \dfrac{C_2}{(x+2)^3}$.
2.7.139. $y = C_1 x^2 + C_2 x^4 + C_3$.
2.7.140. $y = \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2}{x^2} + 2x$.
2.7.141. $y = C_1 + C_2(x+1)^5 + \dfrac{C_3}{(x+1)^2}$.
2.7.142. $y = (C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x)x + x \ln x$.
2.7.143. $y = x(C_1 + C_2 \ln x + \ln^2 x)$.
2.7.144. $y = C_1 x + C_2 x^2 + 1 + (x^2 + 2x) \ln x$.

Решить уравнения:

2.7.145. $y'' - 4y' + 3y = 0$.
2.7.146. $y'' + 4y' + 29y = 0$.
2.7.147. $9y'' + 6y' = 0$.
2.7.148. $4y'' + 12y' + 9y = 0$.
2.7.149. $5y'' + y = 0$.
2.7.150. $5y'' + y' = 0$.
2.7.151. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.
2.7.152. $y''' + 4y'' + 13y' = 0$.
2.7.153. $y''' + 2y'' + y' = 0$.
2.7.154. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$.
2.7.155. $y^{IV} - 16y = 0$.
2.7.156. $y^{IV} + y = 0$.

2.7.157. $2y''' + 9y'' + 17y' + 14y = 0.$

2.7.158. $y^{IV} + y'' = 0.$

Решить уравнения, а там, где есть начальные условия, найти соответствующее частное решение:

2.7.159. $y'' + y' = \left(x + \dfrac{3}{2}\right) e^x - 2x - 2.$

2.7.160. $y'' + y' = (1 - 4x)e^{-2x}.$ **2.7.161.** $y'' + y' = 3e^{-2x} \sin x.$

2.7.162. $y'' + y' = (2x + 3) \sin x + \cos x.$

2.7.163. $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}.$

2.7.164. $y''' + y'' = 12x^2.$

2.7.165. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}.$

2.7.166. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}.$

2.7.167. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x.$

2.7.168. $y'' + y' = \cos^2 x + e^x + x^2.$

2.7.169. $y'' + 4y = x \sin^2 x.$

2.7.170. $y'' + 4y = x \cos x.$

2.7.171. $y'' - 2y' + 10y = \dfrac{1}{3} \cos 3x + 2 \sin 3x.$

2.7.172. $y'' - 3y' + 2y = \sin x \sin 2x.$

2.7.173. $y'' - 4y' + 5y = (4x + 22) \sin 3x - (28x + 84) \cos 3x.$

2.7.174. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3.$

2.7.175. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$, $y(0) = \dfrac{4}{3}$, $y'(0) = \dfrac{1}{27}.$

2.7.176. $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$, $y(\pi) = \pi$, $y'(\pi) = 2\pi.$

2.7.177. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$, $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}.$

2.7.178. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3{,}2.$

2.7.179. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -5{,}5.$

2.7.180. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2.$

2.7.181. $y'' + y = \operatorname{ctg} x.$ **2.7.182.** $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}.$

2.7.183. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}.$ **2.7.184.** $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}.$

2.7.185. $y'' - 6y = 4x^3 e^{x^2}.$ **2.7.186.** $y'' + y = \dfrac{1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}.$

Контрольные вопросы и более сложные задания

2.7.187. Привести пример функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, которые линейно зависимы на одном отрезке и линейно независимы на другом.

2.7.188. Доказать, что если два частных решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка имеют экстремумы в одной и той же точке, то они линейно зависимы.

2.7.189. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты p и q уравнения $y'' + py' + qy = 0$, чтобы все его частные решения были ограниченными.

2.7.190. Построить две дифференцируемые линейно независимые функции на отрезке $[a, b]$, для которых их определитель Вронского равен нулю тождественно.

2.7.191. На отрезке $[a, b]$ построить три линейно независимые функции, для которых определитель Вронского равен нулю тождественно.

Доказать линейную зависимость функций на их области определения:

2.7.192. $\sin^4 x$, $\cos 4x$, $\cos 2x$, 1. **2.7.193.** $\cos^4 x$, $\cos 4x$, $\cos 2x$, 1.

2.7.194. $\ln x$, $\ln x^2$, $\ln x^3$, $\ln^2 x$, $\ln^3 x$.

2.7.195. $\sin x$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2.7.196. Зная фундаментальную систему решений e^x, $\cos x$, $\sin x$ линейного однородного уравнения, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$ и $y''(0) = -1$.

2.7.197. Функции e^x, e^{2x}, e^{3x} образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 6$, $y'(0) = 14$, $y''(0) = 36$.

2.7.198. Проверив, что $y_1 = e^x$ и $y_2 = x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$, найти общее решение уравнения $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$.

2.7.199. Проверив, что $y_1 = \cos x$ и $y_2 = x\cos x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 2\operatorname{tg} x \cdot y' + (2\operatorname{tg}^2 x + 1)y = 0$, найти общее решение уравнения $\operatorname{ctg} x \cdot y'' + 2y' + (2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)y = \cos^2 x$.

2.7.200. Найти общее решение уравнения $4y^{IV} + 4y'' + y = 0$.

Найти общие решения уравнений:

2.7.201. $y^V + 8y''' + 16y' = 0$. **2.7.202.** $y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.

2.7.203. $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$. **2.7.204.** $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$.

2.7.205. $y^{VI} - 2y^V + 3y^{IV} - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$.

Найти частные решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

2.7.206. $y''' - y' = -2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$.

2.7.207. $y^{IV} - y = 8e^x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

2.7.208. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'' - y = 0$, касающуюся в точке $O(0, 0)$ прямой $y = x$.

2.7.209. Найти интегральную кривую уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$, касающуюся в точке $M_0(0, 2)$ прямой $y = x + 2$.

Решить уравнения Эйлера:

2.7.210. $x^2y'' + xy' - y = 0$. **2.7.211.** $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$.
2.7.212. $(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$.
2.7.213. $x^2y''' = 2y'$.

§ 8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

⇛ *Системой дифференциальных уравнений* называется совокупность дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их переменные. ⇚

Нормальная система дифференциальных уравнений

⇛ Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, т. е. система вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{8.1}$$

где x — независимая переменная, а $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — неизвестные функции от x, называется *нормальной системой.* ⇚

Решить эту систему означает найти функции $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$, удовлетворяющие системе (8.1) и данным начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Нормальную систему можно привести к одному уравнению порядка n (или меньше) относительно одной неизвестной функции, скажем y_1, при помощи следующего алгоритма, называемого *метод исключения.*

Дифференцируем первое уравнение системы по переменной x:

$$y_1'' = (f_1)_x' + (f_1)_{y_1}' \cdot y_1' + (f_1)_{y_2}' \cdot y_2' + \ldots + (f_1)_{y_n}' \cdot y_n'.$$

Производные y_1', $y_2', \ldots, y_n'$ в правой части этого равенства заменим их выражениями из системы (8.1). Получим уравнение

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Это равенство дифференцируем по переменной x:

$$y_1''' = (F_2)_x' + (F_2)_{y_1}' \cdot y_1' + (F_2)_{y_2}' \cdot y_2' + \ldots + (F_2)_{y_n}' \cdot y_n'.$$

Производные y_1', $y_2', \ldots, y_n'$ в правой части этого равенства заменим их выражениями, заданными системой (8.1). Получим еще одно уравнение

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Это уравнение дифференцируем по переменной x и так далее до тех пор, пока не придем к уравнению

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Полученные таким образом дифференциальные уравнения объединим в одну систему, к которой присоединим первое уравнение системы (8.1):

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{8.2}$$

Первые $n-1$ уравнений системы (8.2) разрешим относительно переменных y_2, $y_3, \ldots, y_n$, выражая их через переменные x и y_1, а также производные y_1', $y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$. Полученные выражения подставим в последнее уравнение системы (8.2). В итоге придем к дифференциальному уравнению порядка n относительно одной неизвестной функции y_1.

Из общего решения этого уравнения можно получить общее решение системы (8.1) или требуемое частное решение. Заметим, что порядок последнего уравнения может быть меньше, чем n, если при его получении были использованы не все уравнения системы (8.1).

Поиск интегрируемых комбинаций

Интегрирование системы (8.1) существенно облегчается, если эта система допускает интегрируемые комбинации дифференциальных уравнений. Под интегрируемой комбинацией подразумевается дифференциальное уравнение, получаемое из уравнений системы (8.1) с помощью определенных преобразований, но уже легко интегрирующееся. Примером интегрируемой комбинацией является уравнение вида

$$d\Phi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0.$$

Возможно, что заменой переменных удастся получить дифференциальное уравнение известного типа, решение которого не представляет труда.

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Для решения нормальной системы линейных однородных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases} \tag{8.3}$$

удобно воспользоваться методами линейной алгебры, а конкретнее, методом собственных векторов.

Добавим, что общее решение однородной линейной системы представляет собой линейную комбинацию фундаментальной системы решений, а общее решение неоднородной системы равно сумме общего решения соответствующего решения однородной системы и одного частного решения неоднородной системы.

2.8.1. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ y' = -2x + y - 2z, \\ z' = 5x + 2y + 7z. \end{cases}$$

В данной системе x, y, z — неизвестные функции, а независимая переменная t — *их аргумент.*

Дифференцируем первое уравнение системы по t:

$$x'' = -2x' - 2y' - 4z'.$$

Вместо y' и z' подставим их выражения из второго и третьего уравнений системы. Получаем

$$x'' = -2x' - 2(-2x + y - 2z) - 4(5x + 2y + 7z),$$

откуда

$$x'' = -2x' - 16x - 10y - 24z.$$

Полученное уравнение дифференцируем по t, а вместо y' и z' опять подставим выражения из тех же уравнений системы

$$\begin{aligned} x''' &= -2x'' - 16x' - 10y' - 24z' = \\ &\qquad = -2x'' - 16x' - 10(-2x + y - 2z) - 24(5x + 2y + 7z), \\ x''' &= -2x'' - 16x' - 100x - 58x - 148z. \end{aligned}$$

Составим новую систему:

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ x'' = -2x' - 16x - 10y - 24z, \\ x''' = -2x'' - 16x' - 100x - 58y - 148z. \end{cases} \tag{8.4}$$

Система состоит из первого уравнения исходной системы и двух уравнений, полученных последовательным дифференцированием.

Из этой системы исключим неизвестные y и z. Для этого проще всего использовать первые два уравнения системы (8.4), из которых, после преобразований (рассматривая $-6x' + x''$ и $-5x' + x''$), находим

$$\begin{cases} 2y = x'' - 4x' + 4x, \\ 4z = -x'' + 3x' - 6x \end{cases} \tag{8.5}$$

и эти выражения подставим в третье уравнение системы:

$$x''' = -2x'' - 16x' - 100x - 29(x'' - 4x' + 4x) - 37(-x'' + 3x' - 6x).$$

После приведения подобных слагаемых получаем одно уравнение третьего порядка (однородное с постоянными коэффициентами) относительно неизвестной функции $x = x(t)$:

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0.$$

Корнями его характеристического уравнения $k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0$ являются числа $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$. Следовательно, общее решение последнего уравнения имеет вид

$$x_{\text{оо}} = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}.$$

Теперь надо получить значение для $y_{\text{оо}}$ и $z_{\text{оо}}$. Это легко сделать, имея в виду систему (8.5), содержащую $2y$ и $4z$, выраженные через x, x' и x''.

Поэтому сначала находим

$$x'_{\text{оо}} = C_1e^t + 2C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t},$$
$$x''_{\text{оо}} = C_1e^t + 4C_2e^{2t} + 9C_3e^{3t}.$$

Остается сделать соответствующие подстановки:

$$y = \frac{1}{2}(x'' - 4x' + 4x) = \frac{1}{2}\big(C_1e^t + 4C_2e^{2t} + 9C_3e^{3t} - 4C_1e^t - 8C_2e^{2t} - \\ - 12C_3e^{3t} + 4C_1e^t + 4C_2e^{2t} + 4C_3e^{3t}\big),$$

откуда

$$y_{\text{оо}} = \frac{1}{2}C_1e^t + \frac{1}{2}C_3e^{3t}.$$

Аналогично, $z_{\text{оо}} = \frac{1}{4}(-x''_{\text{оо}} - 3x'_{\text{оо}} - 6x_{\text{оо}}) = -C_1e^t - C_2e^{2t} - \frac{3}{2}C_3e^{3t}$. Окончательно,

$$\begin{cases} x_{\text{оо}} = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}, \\ y_{\text{оо}} = \frac{1}{2}C_1e^t + \frac{1}{2}C_3e^{3t}, \\ z_{\text{оо}} = -C_1e^t - C_2e^{2t} - \frac{3}{2}C_3e^{3t}. \end{cases}$$ ●

2.8.2. Решить систему $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \end{cases}$ при данных начальных условиях $t_0 = 0$, $x_0 = -\frac{3}{17}$, $y_0 = \frac{4}{17}$.

○ Сначала приводим систему к нормальному виду, т. е. к виду, разрешенному относительно производных

$$\begin{cases} x' = -3y + \cos t - e^t, \\ y' = 4y - \cos t + 2e^t. \end{cases}$$

Далее действуем по схеме, примененной при решении предыдущего примера.

Первое уравнение дифференцируем по t, после чего вместо y' подставим выражение из второго уравнения новой системы

$$x'' = -3y' - \sin t - e^t = -3(4y - \cos t + 2e^t) - \sin t - e^t, \text{ т. е.}$$
$$x'' = -12y + 3\cos t - 7e^t - \sin t.$$

Из этого уравнения и первого уравнения исходной системы составим систему

$$\begin{cases} x' = -3y + \cos t - e^t, \\ x'' = -12y + 3\cos t - 7e^t - \sin t, \end{cases} \tag{8.6}$$

из которой исключим y (первое уравнение, умноженное на (-4) прибавим ко второму):

$$x'' - 4x' = -\cos t - 3e^t - \sin t.$$

Полученное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами решается стандартным способом подбора частного решения. А именно (в сокращенном изложении):

$$x'' - 4x' = 0 \implies k^2 - 4k = 0 \implies k_1 = 0,\ k_2 = 4 \implies x_{\text{оо}} = C_1 + C_2e^{4t};$$

$$\begin{array}{r|l} 0 & x_{\text{ч}} = Ae^t + B\cos t + C\sin t \\ -4 & x'_{\text{ч}} = Ae^t - B\sin t + C\cos t \\ 1 & x''_{\text{ч}} = Ae^t - B\cos t - C\sin t \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rl} e^t: & -3A = -3 \\ \cos t: & -4C - B = -1 \\ \sin t: & 4B - C = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1, \\ B = -\dfrac{3}{17}, \\ C = \dfrac{5}{17}. \end{array}$$

Отсюда $x_{\text{ч}} = e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t$. Окончательно,

$$x_{\text{он}} = x_{\text{оо}} + x_{\text{ч}} = C_1 + C_2e^{4t} + e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t.$$

Другую функцию $y_{\text{он}}$ можно найти двумя способами.

а) Из второго уравнения системы (8.6) находим

$$y = -\frac{1}{12}(x'' - 3\cos t + 7e^t + \sin t).$$

Подставляя сюда найденное выражения для $x''_{\text{он}}$, находим $y_{\text{он}}$.

б) Из первого уравнения нормальной системы имеем

$$y = \frac{1}{3}(-x' + \cos t - e^t).$$

Отсюда, учитывая, что

$$x' = \left(C_1 + C_2e^{4t} + e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t\right)' = 4C_2e^{4t} + e^t + \frac{3}{17}\sin t + \frac{5}{17}\cos t,$$

получим

$$y_{\text{он}} = \frac{1}{3}\left(-4C_2e^{4t} - e^t - \frac{3}{17}\sin t - \frac{5}{17}\cos t + \cos t - e^t\right),$$
$$\text{т. е. } y_{\text{он}} = -\frac{4}{3}C_2e^{4t} - \frac{1}{17}\sin t + \frac{4}{17}\cos t - \frac{2}{3}e^t.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_{\text{он}} = C_1 + C_2 e^{4t} + e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t \\ y_{\text{он}} = -\frac{4}{3}C_2 e^{4t} - \frac{2}{3}e^t + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t. \end{cases}$$

Подставляя начальные условия $x = -\frac{3}{17}$, $y = \frac{4}{17}$ и $t = 0$, определим константы C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 - \frac{3}{17} = -\frac{3}{17}, \\ -\frac{4}{3}C_2 - \frac{2}{3} + \frac{4}{17} = \frac{4}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2}, \\ C_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Итак, частные решения, удовлетворяющие начальным условиям, имеют вид

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{4t} + e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t, \\ y = \frac{2}{3}e^{4t} - \frac{2}{3}e^t + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t. \end{cases}$$ ●

Замечание. Далее будем заменять $x_{\text{он}}$ на x; $y_{\text{он}}$ на y и т. д.

Решить данные системы дифференциальных уравнений:

2.8.3. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y. \end{cases}$

2.8.4. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

2.8.5. $\begin{cases} x' + 5x + y = e^t, \\ y' - x - 3y = e^{2t}. \end{cases}$

2.8.6. $\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y - z. \end{cases}$

2.8.7. $\begin{cases} 4x' - y' = \sin t - 3x, \\ x' = \cos t - y. \end{cases}$

2.8.8. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

2.8.9. $\begin{cases} x' = x - 2y - z, \\ y' = -x + y + z, \\ z' = x - z. \end{cases}$

2.8.10. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$

2.8.11. Решить систему уравнений $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$

◐ Почленное сложение этих равенств приводит к интегрируемой комбинации: $x' + y' = x + y$, т. е. $\frac{d(x+y)}{x+y} = dt$.

Отсюда находим $x + y = C_1 e^t$.

Аналогичную комбинацию получаем вычитанием уравнений исходной системы

$$x' - y' = -(x - y), \text{ откуда } \frac{d(x-y)}{x-y} = -dt, \text{ т. е. } x - y = C_2 e^{-t}.$$

Остается почленно сложить и вычесть полученные равенства:

$$\begin{cases} x_{oo} = \frac{C_1}{2}e^t + \frac{C_2}{2}e^{-t}, \\ y_{oo} = \frac{C_1}{2}e^t - \frac{C_2}{2}e^{-t}. \end{cases}$$ ●

2.8.12. Решить систему $\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = z - x, \\ z' = x - y. \end{cases}$

○ Сложив почленно все три уравнения, получим интегральное выражение $d(x + y + z) = 0$, т. е. $x + y + z = C_1$.

Умножим первое уравнение на x, второе на y, третье на z и полученные результаты сложим почленно. Получим другую интегрируемую комбинацию

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0, \text{ т. е. } d(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \text{ откуда } x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Эти два соотношения уже можно использовать для того, чтобы из исходной системы получить одно дифференциальное уравнение относительно одной неизвестной функции. Но мы попробуем использовать только первое соотношение, из которого имеем $z = C_1 - x - y$. Подставим это выражение для z в первые два уравнения:

$$\begin{cases} x' = 2y - C_1 + x, \\ y' = -2x - y + C_1. \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение по t, подставим затем выражение для y' из второго уравнения: $x'' = 2y' + x' = -4x - 2y + 2C_1 + x'$.

А теперь из полученной системы

$$\begin{cases} x' = x + 2y - C_1, \\ x'' = x' - 4x - 2y + 2C_1 \end{cases}$$

исключаем y — получим $x'' + 3x = C_1$, откуда

$$x = C_2 \cos\sqrt{3}t + C_3 \sin\sqrt{3}t + \frac{1}{3}C_1.$$

Из уравнения $x' = 2y - C_1 + x$ находим $y = \frac{1}{2}(x' - x + C_1)$, т. е.

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}C_3 - C_2\right)\cos\sqrt{3}t - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}C_2 + C_3\right)\sin\sqrt{3}t + \frac{1}{3}C_1.$$

Наконец, $z = C_1 - x - y$, т. е.

$$z = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}C_3 + C_2\right)\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}C_2 - C_3\right)\sin\sqrt{3}t + \frac{1}{3}C_1.$$ ●

Решить системы уравнений:

2.8.13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$ **2.8.14.** $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{(z-y)^2}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y}{(z-y)^2}. \end{cases}$

2.8.15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y^2}{x}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x^2}{y}. \end{cases}$

2.8.16. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z-1}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{y-x}, \end{cases}$ $y(0) = -1$, $z(0) = 1$.

2.8.17. Решить систему $\begin{cases} y' = -z, \\ z' = \dfrac{z^2}{y}, \end{cases}$ где $y = y(t)$, $z = z(t)$.

○ Продифференцируем первое уравнение: $y'' = -z'$. Подставив z' из второго уравнения системы, получаем $y'' = -\frac{z^2}{y}$. Поскольку из первого уравнения $(y')^2 = z^2$, приходим к уравнению относительно одной функции: $y'' = \frac{-(y')^2}{y}$, или $yy'' + (y')^2 = 0$. Это уравнение равносильно уравнению $(yy')' = 0$, откуда $yy' = C_1$. Разделяя переменные, получим $y\,dy = C_1\,dt$, откуда $\frac{y^2}{2} = C_1 t + C_2$, т. е. $y = \pm\sqrt{2(C_1 t + C_2)}$. Функцию z находим из первого уравнения исходной системы:

$$z = -y' = \pm\frac{C_1\sqrt{2}}{2\sqrt{2(C_1 t + C_2)}}.$$

И окончательно,

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{2(C_1 t + C_2)}, \\ z = \dfrac{\pm C_1}{2\sqrt{C_1 t + C_2}}. \end{cases}$$ ●

2.8.18. Решить систему $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 6x - y. \end{cases}$

○ Данную систему решим матричным способом, используя собственные числа и собственные векторы матрицы правой части системы. Обозначим через

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

матрицу системы.

Составим характеристическое уравнение $\det(A - kE) = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} 2-k & 3 \\ 6 & -1-k \end{vmatrix} = 0.$$

Приходим к уравнению $k^2 - k - 20 = 0$ с корнями $k_1 = -4$, $k_2 = 5$.

Находим собственные векторы. При $k = -4$ имеем: $6C_1 + 3C_2 = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = -2$ и собственный вектор имеет вид $\begin{pmatrix} C_1 \\ -2C_1 \end{pmatrix}$.

При $k = 5$ имеем: $-3C_1 + 3C_2 = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, собственный вектор имеет вид $\begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

Составляем общее решение системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ -2C_1 \end{pmatrix} e^{k_1 x} + \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{k_2 x} = \begin{pmatrix} C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \\ -2C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{5x}, \\ y = -2C_1 e^{-4x} + C_2 e^{5x}. \end{cases}$$

●

2.8.19. Решить систему $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -x + y - z, \\ z' = 3y + z. \end{cases}$

○ Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 & 0 \\ -1 & 1-k & -1 \\ 0 & 3 & 1-k \end{vmatrix} = 0$$

с характеристическими числами $k_1 = 1$, $k_2 = 1 + 2i$, $k_3 = 1 - 2i$.

Собственный вектор, отвечающий собственному числу $k_1 = 1$, получаем из системы

$$\begin{cases} -C_1 - C_3 = 0, \\ 3C_2 = 0, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot C_1,$$

$C_1 \in \mathbb{R}$, вектор

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

представляет собой нормированный (единичный) вектор отвечающий собственному числу $k_1 = 1$ (хотя переходить к единичным векторам необязательно).

Собственному числу $k_2 = 1 + 2i$ отвечает комплексный собственный вектор, получаемый из системы

$$\begin{cases} -2iC_1 + C_2 = 0, \\ -C_1 - 2iC_2 - C_3 = 0, \\ \quad 3C_2 - 2iC_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 2i, \\ C_3 = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Аналогично для $k_3 = 1 - 2i$: имеем

$$\begin{cases} 2iC_1 + C_2 = 0, \\ -C_1 + 2iC_2 - C_3 = 0, \\ \quad 3C_2 - 2iC_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -2i, \\ C_3 = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}.$$

Общее решение системы можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} C_1 \cdot e^t + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} C_2 e^{(1+2i)t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} C_3 \cdot e^{(1-2i)t}.$$

Осталось покоординатно взять от правой части действительную часть:

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{\sqrt{2}} e^t + \dfrac{C_2}{\sqrt{6}} e^t \cos 2t + \dfrac{1}{\sqrt{6}} C_3 e^t \cos 2t, \\ y = \dfrac{2C_2}{\sqrt{6}} e^t \sin 2t - \dfrac{2C_3}{\sqrt{6}} e^t \sin 2t, \\ z = -\dfrac{1}{\sqrt{6}} C_1 e^t + \dfrac{3}{\sqrt{6}} C_2 e^t \cos 2t + \dfrac{3}{\sqrt{6}} C_3 e^t \cos 2t. \end{cases}$$

Решить системы уравнений (все функции аргумента t):

2.8.20. $\begin{cases} x'' = y, \\ y'' = x. \end{cases}$

2.8.21. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = xy, \\ \dfrac{dz}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = z + xy. \end{cases}$

2.8.22. $\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = -y + 2z. \end{cases}$

Дополнительные задания

Решить системы уравнений:

2.8.23. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{1}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{y - x}. \end{cases}$

2.8.24. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{yz}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x}{yz}. \end{cases}$

2.8.25. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \sin x - 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = \cos x + 4y + 2z. \end{cases}$

2.8.26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x - y}{z - t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x - y}{z - t}, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 1. \end{cases}$

2.8.27. $\dfrac{dz}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \dfrac{dy}{1} = \dfrac{dz}{2}.$

Контрольные вопросы и более сложные задачи

2.8.28. Есть ли разница в записи собственных векторов матрицы в общем виде или в нормированном виде?

Решить системы уравнений:

2.8.29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 3z. \end{cases}$

2.8.30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y^3}{x^2}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x^3}{y^2}. \end{cases}$

2.8.31. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 8y. \end{cases}$ при условии $x(0) = 2$, $y(0) = 5$.

2.8.32. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 4y + 1 + 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + \dfrac{3}{2}t^2. \end{cases}$

2.8.33. $\begin{cases} x' = 3x + 4y + 2z, \\ y' = x + 4y + z, \\ z' = 4x + 6y + 5z. \end{cases}$

2.8.34. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - 2z - t + 2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y - z - t + 1. \end{cases}$

2.8.35. $\dfrac{dt}{t^2 - x^2 - y^2} = \dfrac{dx}{2tx} = \dfrac{dy}{2ty}.$

2.8.36. $\begin{cases} t\cdot dy = (tx + ty + 2x - t)\,dt, \\ t\cdot dx = (t - 2x)\,dt. \end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$(1+x^2)y'' + 2xy' = 7x^3.$$

2. Решить задачу Коши:
$$y''\cdot y^3 = 4y^4 - 0{,}25, \quad y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y'' - 3y' + 2y = (4x+9)e^{2x}.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\sin 2x.$$

5. Найти решение задачи Коши:
$$y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$$

6. Решить систему дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} x' = x + y + 3e^t, \\ y' = 2x - y + \cos 2t. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$x^4y'' + x^3\cdot y' = 10.$$

2. Решить задачу Коши:
$$y''y^3 + 4 = 0, \quad y(1) = 2, \quad y''(1) = 2.$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y'' + 3y' + 2y = (1-2x)e^{-x}.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y'' + 4y' - 5y = 2x^3e^{-2x}\sin 3x.$$

5. Найти решение задачи Коши:
$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3+e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 8\ln 2, \quad y' = 7\ln 4.$$

6. Решить систему дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} x' = 2x + 3y - e^t, \\ y' = x - 3y - \sin 2t. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$(x^2+1)\cdot y''+2xy'=x(x^2+1).$$

2. Решить задачу Коши:
$$y''=8\sin^3 y\cos y,\quad y(1)=\frac{\pi}{2},\quad y'(1)=1.$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y''-2y'-3y=(8x+4)e^{-x}.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y''-8y'-9y=(2x+1)e^{4x}\sin 5x.$$

5. Найти решение задачи Коши:
$$y''-3y'=\frac{e^{-3x}}{3+e^{-3x}},\quad y(0)=\ln 4,\quad y'(0)=3\ln 4-1.$$

6. Решить систему дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} x'=3x-2y+e^{-t},\\ y'=5x+6y-3\sin t.\end{cases}$$

Вариант 4

1. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$x^4y''+x^3y'=5.$$

2. Решить задачу Коши:
$$y''=50\sin^3 y\cos y,\quad y(1)=\frac{\pi}{2},\quad y'(1)=5.$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y''+2y'-3y=(x^2+2x-3)e^{x}.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y''+4y'+8y=(x+2)e^{-2x}\cos 3x.$$

5. Найти решение задачи Коши:
$$y''+3y'+2y=\frac{1}{1+2e^{x}},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$$

6. Найти общее решение линейной системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} y'+2x-3y-3e^{2t}=0,\\ x'+x+4y+\cos t=0.\end{cases}$$

Вариант 5

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3 + x.$$

2. Решить задачу Коши:

$$y'' = 16y^3, \quad y(4) = 1, \quad y'(4) = 4.$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = (2x^2 - 3x + 2)e^{2x}.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 5y = (2x - 3)e^x \cos 2x.$$

5. Найти решение задачи Коши:

$$y'' - y = \frac{1}{1+2e^x}, \quad y(0) = 3\ln 3, \quad y'(0) = 2\ln 3 - 1.$$

6. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' + y' + 2x - 3y - e^t = 0, \\ 2x' - 3y' + x - 2y + \cos t = 0. \end{cases}$$

❑

Глава 3. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ. СВОЙСТВА И МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение и геометрический смысл двойного интеграла

Пусть D — некоторая замкнутая область в плоскости Oxy, на которой определена непрерывная функция двух переменных $z = f(x, y)$. Разобьем область D на n «элементарных областей» D_i ($i = \overline{1, n}$), площади которых обозначим соответственно через ΔS_i. Теперь в каждой области D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$ (рис. 9), после чего составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

которая называется *интегральной суммой* для функции $f(x, y)$ в области D.

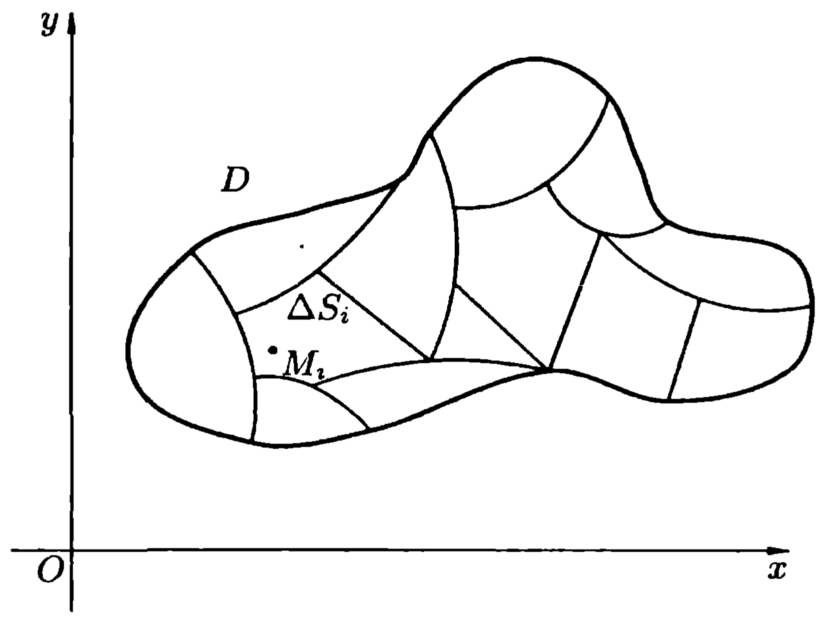


Рис. 9

Обозначим через d наибольший из диаметров областей D_i. Тогда стремление d к нулю будет означать измельчение разбиения области D на «элементарные области» D_i (и, как следствие, стремление n к ∞).

⇛ Если существует конечный предел интегральных сумм σ_n при $d \to 0$, не зависящий от разбиения на области D_i и выбора точек M_i, то этот предел называется *двойным интегралом* функции $f(x, y)$ по области D и обозначается

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS \quad \text{или} \quad \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.$$

В этом случае говорят, что функция $f(x,y)$ *интегрируема* на области D. При этом функция $f(x,y)$ называется *подынтегральной функцией*, а область D — *областью интегрирования*. $\Leftarrow$

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, то она интегрируема.

Теорема 3.1. Если $f(x,y) \geqslant 0$ и непрерывна в области D, то интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS$$

выражает объем тела, ограниченного снизу областью D, сверху — поверхностью $z = f(x,y)$, а с боков — цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит граница области D (рис. 10).

В этом заключается геометрический смысл двойного интеграла.

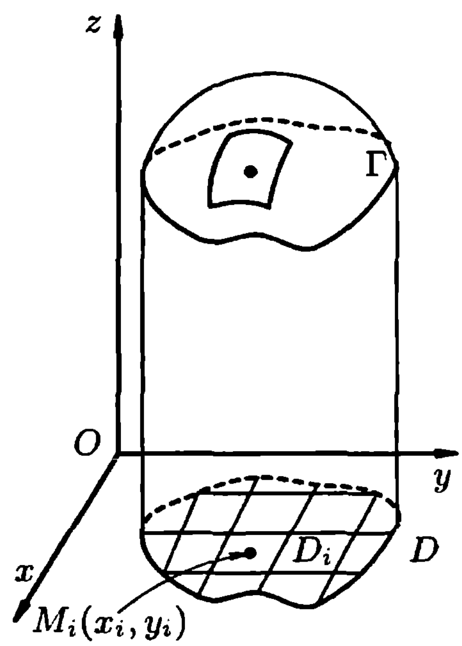


Рис. 10

В частности, если $f(x,y) \equiv 1$, то $\iint\limits_D f(x,y)\,dS$ равен площади области D:

$$S(D) = \iint\limits_D dS = \iint\limits_D dxdy.$$

Свойства

Свойства двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла.

1. *Линейность.* Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны на области D, то

$$\iint\limits_D (\alpha \cdot f(x,y) \pm \beta \cdot g(x,y))\,dxdy = \alpha \cdot \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \beta \cdot \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$$

(α и β — постоянные числа).

В частности,

$$\iint\limits_D \alpha f(x,y)\,dxdy = \alpha \iint f(x,y)\,dxdy,$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла.

2. *Монотонность.* Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны на области D и всюду в этой области $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy.$$

Таким образом, неравенства можно почленно интегрировать.

В частности, если $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$, $\forall (x,y) \in D$, то

$$m \cdot S \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leqslant M \cdot S,$$

где $S = S(D)$ — площадь области D. Данные неравенства называются *оценкой интеграла.* Еще одно следствие: если $f(x,y) \geqslant 0$ на области D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \geqslant 0.$$

3. *Теорема о среднем значении.*

Теорема 3.2. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на области D, то существует точка $M_0(x_0,y_0) \in D$ такая, что

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0) \cdot S, \quad \text{или} \quad \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0).$$

При этом значение $f(x_0,y_0)$, т. е. число

$$\frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$$

называется *интегральным средним* значением функции $f(x,y)$ в области D.

4. *Аддитивность.* Если область D представляется в виде объединения двух областей D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

5. Для любой функции $f(x, y)$, непрерывной на области, D имеет место неравенство

$$\left|\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x, y)|\,dxdy.$$

Вычисление двойного интеграла

Предположим, что область D можно задать в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x). \end{cases}$$

Геометрически это означает, что каждая вертикальная прямая $x = x_0$ ($a < x_0 < b$) пересекает границу области D только в двух точках M_1 и M_2 (рис. 11), которые называются соответственно точкой входа и точкой выхода. Тогда

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

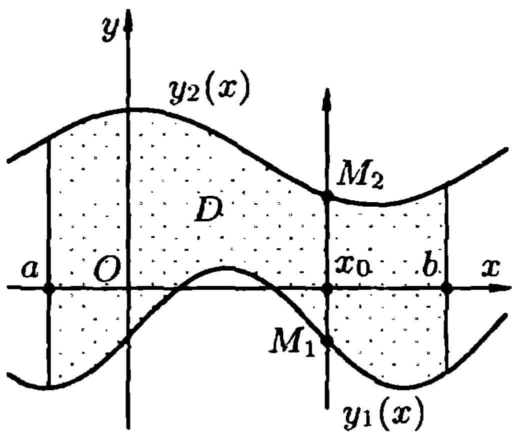


Рис. 11

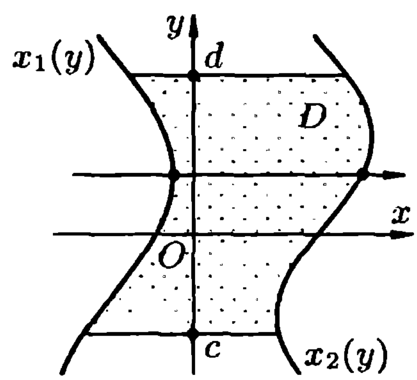


Рис. 12

Если же область D (рис. 12) можно задать в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} c \leqslant y \leqslant d, \\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y), \end{cases}$$

то

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx.$$

Интегралы, стоящие в правых частях приведенных равенств, называются *повторными* (или двукратными). Они отличаются друг от друга порядком интегрирования. Интеграл, содержащий функцию $f(x, y)$, называется *внутренним*, другой — *внешним*. При вычислении повторных интегралов следует брать сначала внутренний интеграл, при этом переменная, не стоящая под знаком дифференциала, принимается постоянной. Затем вычисляется внешний интеграл (таким образом, интегрирование в повторном интеграле идет справа налево). Каждый из них вычисляется при помощи формулы Ньютона–Лейбница, как определенный интеграл.

Области, не представимые в описанном выше виде, следует разбить на конечное число таких областей при помощи прямых, параллельных координатным осям (см. рис. 13). При вычислении двойных интегралов по таким областям следует применить свойство аддитивности (свойство 4).

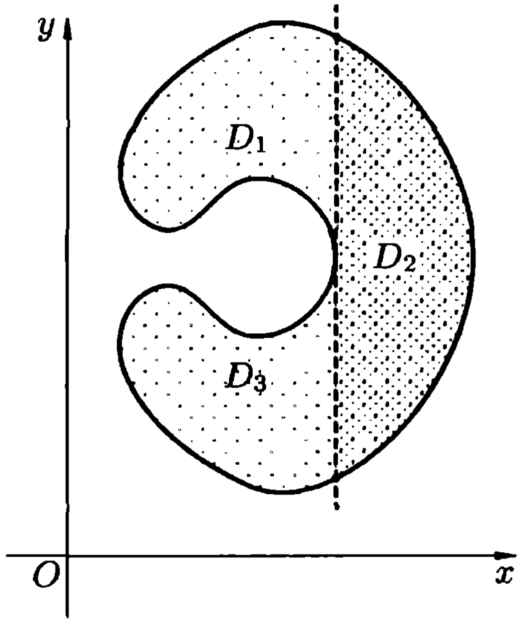


Рис. 13

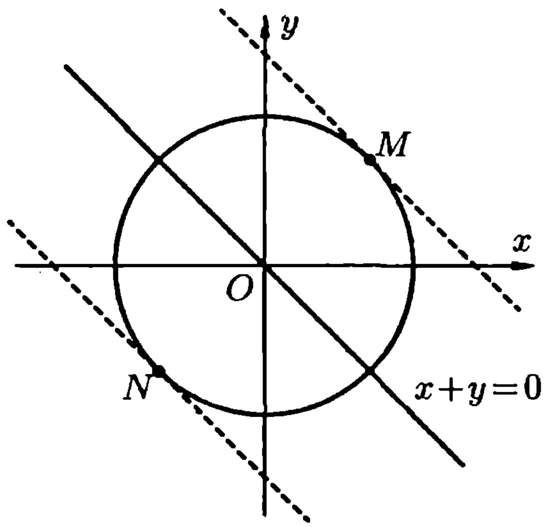


Рис. 14

3.1.1. Оценить интеграл

$$\iint\limits_D (x+y-5)\,dxdy,$$

где область интегрирования D — это круг $x^2+y^2 \leqslant 16$.

❍ Необходимо найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y) = x+y-5$ на круге $x^2+y^2 \leqslant 16$ и применить оценку из свойства 2. Функция $z = x+y$ принимает значение 0 на прямой $x+y=0$. На прямых $x+y=C$, параллельных прямой $x+y=0$, функция z принимает значение C. Следовательно, функция $z = x+y$ (а значит, и функция $f(x,y)$) принимает на круге максимальное значение в точке $M(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ (см. рис. 14) и минимальное значение — в точке $N(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$. При этом имеем $f(M) = 4\sqrt{2}-5$ и $f(N) = -4\sqrt{2}-5$. Поскольку площадь круга равна $\pi R^2 = 16\pi$, то согласно свойству 2 двойного интеграла ($m = -4\sqrt{2}-5$ и $M = 4\sqrt{2}-5$), получаем

$$-16\pi(4\sqrt{2}+5) \leqslant \iint\limits_D (x+y-5)\,dxdy \leqslant 16\pi(4\sqrt{2}-5). \qquad ●$$

3.1.2. Оценить интеграл

$$\iint\limits_D (4x^2 + y^2 - 2)\,dxdy,$$

где область интегрирования D — круг $x^2 + y^2 \leqslant 16$.

❍ Так как $4x^2 + y^2 - 2 \geqslant 0$, то оценка снизу $4x^2 + y^2 - 2 \geqslant -2$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ очевидна. Поэтому можно принять $m = -2 = f(0,0)$, где $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 2$. Чтобы вычислить $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, воспользуемся параметрическими уравнениями окружности: $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда при любом t

$$f(4\cos t, 4\sin t) = 64\cos^2 t + 16\sin^2 t - 2 = \\ = 16(\sin^2 t + \cos^2 t) + 48\cos^2 t - 2 = 48\cos^2 t + 14 \leqslant 62,$$

т. к. $\cos^2 t \leqslant 1$. Вместе с этим $f(x, y)$ принимает значение $M = 62$ при $t = 0$, т. е. $M = f(4, 0) = 62$. Отсюда, учитывая, что площадь S круга $x^2 + y^2 \leqslant 16$ равна 16π, получаем оценку

$$-32\pi \leqslant \iint\limits_D (4x^2 + y^2 - 2)\,dxdy \leqslant 992\pi.$$ ●

Оценить интегралы:

3.1.3. $\iint\limits_D (x + y + 1)\,dxdy$, где D — круг $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

3.1.4. $\iint\limits_D \cos\dfrac{x + 2y - 1}{x^2 + 3y^2 + 2}\,dxdy$, где D — эллипс $\dfrac{x^2}{3} + y^2 \leqslant 1$.

3.1.5. $\iint\limits_D (x + xy - x^2 - y^2)\,dxdy$, где D — прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3.1.6. $\iint\limits_D (x^2 - y^2)\,dxdy$, где D — круг $x^2 + y^2 \leqslant 2x$.

3.1.7. Вычислить повторный интеграл $I = \int\limits_0^7 dx \int\limits_0^{x^2} dy$.

❍ Сначала вычислим внутренний интеграл по формуле Ньютона–Лейбница. Его результат будет подынтегральной функцией для внешнего интеграла.

$$I = \int\limits_0^7 dx \left(y\Big|_0^{x^2} \right) = \int\limits_0^7 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^7 = \frac{343}{3}.$$ ●

3.1.8. Вычислить повторный интеграл $I = \int\limits_1^3 dx \int\limits_x^{3x} \frac{y}{x}\,dy$.

○ Множитель $\frac{1}{x}$ (он не зависит от y, поэтому может считаться постоянным для внутреннего интеграла) можно вынести за знак интеграла, т. е. перенести во внешний интеграл:

$$I = \int_1^3 \frac{dx}{x} \int_x^{3x} y\,dy = \int_1^3 \frac{dx}{x} \left(\frac{y^2}{2} \Big|_x^{3x} \right) = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{dx}{x} \cdot 8x^2 = 4 \int_1^3 x\,dx = 4 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = 16.$$

●

Вычислить повторные интегралы:

3.1.9. $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x}} dy.$ **3.1.10.** $\int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x\,dx.$

3.1.11. $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)\,dx.$ **3.1.12.** $\int_3^4 dx \int_1^2 (x+y)^{-2} dy.$

3.1.13. $\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x + 2y)\,dx.$

3.1.14. Вычислить двойной интеграл $I = \iint_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy$, где D — прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

○ Преобразуем двойной интеграл в повторный. Пределы интегрирования известны, поэтому

$$I = \int_0^2 x^2\,dx \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 \cdot \operatorname{arctg} y \Big|_0^1 = \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\pi.$$

Повторный интеграл свелся к произведению двух независимых друг от друга определенных интегралов, поскольку результат вычисления внутреннего интеграла есть число. ●

3.1.15. Вычислить двойной интеграл $I = \iint_D \frac{y\,dxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, где D — квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

○ Данный двойной интеграл можно представить в виде повторного двумя способами:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \quad \text{или} \quad \int_0^1 y\,dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Визуальное наблюдение показывает, что проще брать первый интеграл, так как его внутренний интеграл легко сводится к табличному. Таким образом, считаем первый интеграл:

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 \frac{1}{2}\frac{d(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}=\int\limits_0^1\left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\bigg|_0^1\right)=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right)dx=\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln(x+\sqrt{2+x^2})\right]\bigg|_0^1=$$

$$=\ln(1+\sqrt{2})-\ln(1+\sqrt{3})+\ln\sqrt{2}=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.\quad\bullet$$

Вычислить двойной интеграл по данной области D:

3.1.16. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, где D: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 2$.

3.1.17. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$, где D: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

3.1.18. $\iint\limits_D \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2}$, где D: $0\leqslant x\leqslant 2$, $x\leqslant y\leqslant x\sqrt{3}$.

3.1.19. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+2y)^2}$, где D: $1\leqslant x\leqslant 3$, $2\leqslant y\leqslant 5$.

3.1.20. Вычислить интеграл $I=\iint\limits_D \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2}$, где область D — параболический сегмент, ограниченный параболой $y=\frac{1}{2}x^2$ и прямой $y=x$.

○ Изобразим область интегрирования D (рис. 15). Так как прямая $y=x$ и парабола $y=\frac{1}{2}x^2$ пересекаются в точках $O(0,0)$ и $A(2,2)$, то область D определяется системой неравенств $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2,\\ \frac{x^2}{2}\leqslant y\leqslant x.\end{cases}$

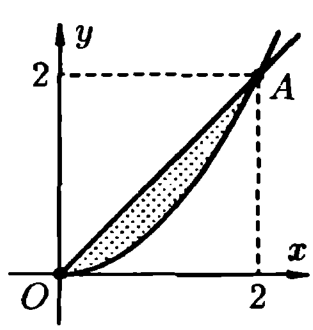


Рис. 15

Теперь вычислим искомый интеграл I:

$$I = \int\limits_0^2 x\,dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{dy}{x^2+y^2} = \int\limits_0^2 x\,dx \left(\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{x}\right) =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)dx = \frac{\pi}{4}\int\limits_0^2 dx - \int\limits_0^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot x\Big|_0^2 -$$

$$-2\left(\frac{x}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\right)\Big|_0^2 = \frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{4} + \ln 2 = \ln 2$$

(интеграл $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\,dx$ был найден интегрированием по частям). ●

Вычислить интегралы:

3.1.21. $\iint\limits_D (4-x^2-y^2)\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1{,}5$.

3.1.22. $\iint\limits_D (3-x-y)\,dxdy$, где D — круг $x^2+y^2 \leqslant 1$.

3.1.23. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, где D — круг $(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 1$.

3.1.24. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где D — круг $x^2+y^2-2ax \leqslant 0$.

3.1.25. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_{-2}^{6} dx \int\limits_{3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

○ Учитывая пределы интегрирования, представим область D в виде системы неравенств

$$\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 6, \\ 3-\sqrt{12+4x-x^2} \leqslant y \leqslant 3+\sqrt{12+4x-x^2}. \end{cases}$$

Графики функций $y_1 = 3-\sqrt{12+4x-x^2}$ и $y_2 = 3+\sqrt{12+4x-x^2}$ представляют собой соответственно нижнюю и верхнюю полуокружности окружности $(y-3)^2 = 12+4x-x^2$, или $(x-2)^2+(y-3)^2 = 16$. Таким образом, область интегрирования D — круг радиуса 4 с центром в точке $(2,3)$ (рис. 16). Зададим этот круг другой системой неравенств. Если спроектировать его на ось Oy, то получим отрезок $[-1,7]$, откуда имеем первое неравенство $-1 \leqslant y \leqslant 7$. Выразив далее x из уравнения окружности, получим соответственно уравнения левой и правой полуокружностей $x_1 = 2-\sqrt{16-(y-3)^2}$ и $x_2 = 2+\sqrt{16-(y-3)^2}$. Теперь область D можно записать так:

$$D: \begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 7, \\ 2 - \sqrt{16-(y-3)^2} \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{16-(y-3)^2}. \end{cases}$$

Таким образом, после замены порядка интегрирования исходный повторный интеграл можно записать в виде

$$\int\limits_{-1}^{7} dy \int\limits_{2-\sqrt{16-(y-3)^2}}^{2+\sqrt{16-(y-3)^2}} f(x,y)\,dx. \qquad \bullet$$

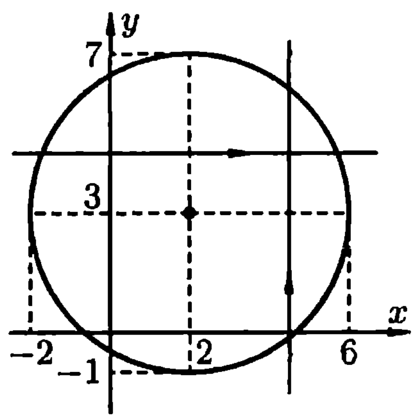


Рис. 16

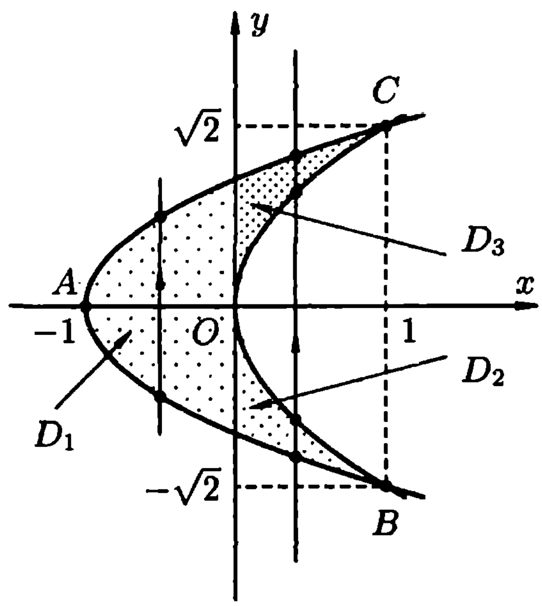


Рис. 17

3.1.26. Изменить порядок интегрирования $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{y^2/2} f(x,y)\,dx.$

❍ При разборе этого примера используем другой подход. Область интегрирования D задается системой неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2}, \\ y^2 - 1 \leqslant x \leqslant \dfrac{y^2}{2}. \end{cases}$$

Геометрически это означает следующее: каждая горизонтальная прямая, проходящая через точки отрезка $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ оси Oy, пересекает сначала (при движении слева направо) параболу $x = y^2 - 1$ (назовем ее линией входа в D), а затем параболу $x = \dfrac{y^2}{2}$ (назовем ее линией выхода из D) — см. рис. 17.

При перемене порядка интегрирования нужно спроектировать область интегрирования D на другую ось (ось Ox) и обнаружить линии входа и выхода при движении снизу вверх вдоль вертикальных прямых.

Параболы $x = \dfrac{y^2}{2}$ и $x = y^2 - 1$ пересекаются в точках $B(1, -\sqrt{2})$ и $C(1, \sqrt{2})$ (действительно, приравнивая уравнения парабол, имеем $\dfrac{y^2}{2} = y^2 - 1 \Leftrightarrow y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$). Таким образом, проекция области D на ось Ox — отрезок $[-1, 1]$. Из рисунка видно, что на участке $x \in [-1, 0]$ точки входа и выхода расположены на ветвях одной параболы, а на участке $x \in [0, 1]$ — на ветвях разных парабол. Сначала определим ветви этих парабол, решая относительно y уравнения $x = y^2 - 1$ и $x = \dfrac{y^2}{2}$ на соответствующих участках. Получаем: $y = \pm\sqrt{x+1}$ и $y = \pm\sqrt{2x}$, $x \geqslant 0$. Первое равенство соответствует дугам AC (знак «плюс») и AB (знак «минус»), второе — дугам OC и OB (рис. 17). Тем самым, область D разбивается на три отдельные области D_1, D_2 и D_3, т. е. $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, где

$$D_1: \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -\sqrt{x+1} \leqslant y \leqslant \sqrt{x+1}; \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\sqrt{x+1} \leqslant y \leqslant -\sqrt{2x}; \end{cases}$$

$$D_3: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \sqrt{2x} \leqslant y \leqslant \sqrt{x+1}. \end{cases}$$

Исходный интеграл напишем в виде двойного

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{y^2/2} f(x,y)\,dx = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$$

и применяя свойство аддитивности двойного интеграла, запишем ответ

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy. \quad \bullet$$

Изменить порядок интегрирования:

3.1.27. $\displaystyle\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{3-y} f(x,y)\,dx.$ **3.1.28.** $\displaystyle\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)\,dx.$

3.1.29. $\displaystyle\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{-x}^{3} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^3 dx \int\limits_x^3 f(x,y)\,dy.$

3.1.30. $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{0} dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^{\sqrt{2}/2} dy \int\limits_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$

3.1.31. Вычислить интегральное среднее значение функции $z = 12 - 2x - 3y$ в области D, ограниченной прямыми $12 - 2x - 3y = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Область D — треугольник OAB, где $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(0,4)$ — рис. 18.

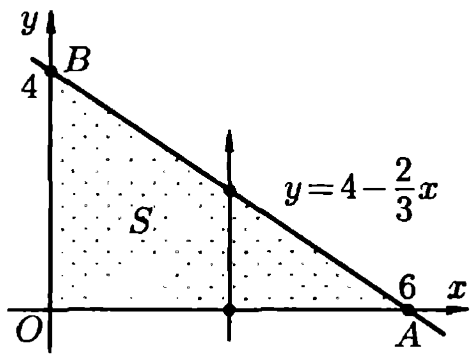


Рис. 18

По определению интегральное среднее значение функции $z(x,y)$ в области D равно $\frac{1}{S}\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy$, где S — площадь области D (свойство 3).

Площадь S вычисляем по формуле площади прямоугольного треугольника: $S = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = 12$. Остается вычислить интеграл по области D, которую можно задать неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 6$, $0 \leqslant y \leqslant 4 - \frac{2}{3}x$. Имеем

$$\iint\limits_D (12 - 2x - 3y)\,dxdy = \int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{4-\frac{2}{3}x} (12 - 2x - 3y)\,dy =$$

$$\int\limits_0^6 dx \left(12y - 2xy - \frac{3}{2}y^2\right)\Big|_0^{4-\frac{2}{3}x} = \int\limits_0^6 \left[(12-2x)y - \frac{3}{2}y^2\right]\Big|_0^{\frac{12-2x}{3}} dx =$$

$$= \int\limits_0^6 \left[\frac{1}{3}(12-2x)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{12-2x}{3}\right)^2\right] dx =$$

$$= \int\limits_0^6 \frac{1}{6}(12-2x)^2 dx = -\frac{1}{6}\,\frac{(12-2x)^3}{3\cdot 2}\Big|_0^6 = 48.$$

Таким образом, искомое интегральное среднее равно $\frac{48}{12}$, т. е. 4. ●

Вычислить интегральные средние значения данных функций в указанных областях:

3.1.32. $f(x,y) = 2x + y$, D — треугольник OAB с вершинами $O(0,0)$, $A(0,3)$, $B(3,0)$.

3.1.33. $f(x,y) = x + 6y$, D — треугольник, ограниченный прямыми $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$.

3.1.34. $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, D — круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

3.1.35. $f(x,y) = x^3y^2$, D — круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$

Дополнительные задания

Оценить интегралы:

3.1.36. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sin\frac{x+y+10}{x^2+y^2+5}\,dxdy.$

3.1.37. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 3\\ 0\leqslant y\leqslant 3}} xy(x+y)\,dxdy.$

3.1.38. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\ 0\leqslant y\leqslant 2}} \left(x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy.$

3.1.39. $\displaystyle\iint\limits_{(x-1)^2+4(y-2)^2\leqslant 4} (x^2+y^2-4x-4y+10)\,dxdy.$

Определить знак данных интегралов:

3.1.40. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \ln(x^2+y^2)\,dxdy.$ **3.1.41.** $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy.$

3.1.42. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\,dxdy.$

Двойной интеграл $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ *по заданной области представить в виде повторного двумя способами. Сделать чертеж области интегрирования:*

3.1.43. D ограничена линиями $y = 0$, $x = 5$, $y = x$.

3.1.44. D — треугольник с вершинами в точках $A(-1,-1)$, $B(1,3)$, $C(2,-4)$.

3.1.45. D — параллелограмм $ABCD$ с вершинами $A(-3,1)$, $B(2,1)$, $C(6,4)$, $D(1,4)$.

3.1.46. D — круг $(x-2)^2 + (y-3)^2 \leqslant 4$.

3.1.47. D ограничена линиями $y = x^2$, $x = y^2$.

3.1.48. D ограничена линиями $y = x^3$, $x + y = 10$, $x - y = 4$, $y = 0$.

Изменить порядок интегрирования:

3.1.49. $\displaystyle\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f\,dy.$ **3.1.50.** $\displaystyle\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f\,dy.$

3.1.51. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f\,dy.$

3.1.52. $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f\,dy.$

3.1.53. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f\,dy.$

3.1.54. $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f\,dy.$

3.1.55. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f\,dy.$

3.1.56. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f\,dy.$

3.1.57. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f\,dy.$

3.1.58. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f\,dx.$

3.1.59. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f\,dy.$

3.1.60. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{3-y^2}}^{y^2/2} f\,dx.$

3.1.61. $\int\limits_{a/2}^a dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f\,dy.$

Вычислить двойные интегралы:

3.1.62. $\iint\limits_D x\sin(x+y)\,dxdy$, если D: $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

3.1.63. $\iint\limits_D x^2 y\cos(xy^2)\,dxdy$, если D: $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3.1.64. $\iint\limits_D (x^3+y^3)\,dxdy$, где D ограничена линиями $x-2y=0$, $x-y=0$, $x=4$.

3.1.65. $\iint\limits_D \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dxdy$, где D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$.

3.1.66. $\iint\limits_D y^2\sin x\,dxdy$, где D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x=\pi$, $y=1+\cos x$.

3.1.67. $\iint\limits_D y^2\sin^2 x\,dxdy$, где D ограничена линиями $x=-\frac{\pi}{2}$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=3\cos x$.

3.1.68. $\iint\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant 2\\ 0\leqslant y\leqslant 2}} (x+y^3)\,dS.$

3.1.69. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, где D ограничена линиями $x=2$, $y=x$, $y=\frac{1}{x}$.

3.1.70. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, где D — треугольник ABC с вершинами; $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$.

3.1.71. $\iint\limits_D y\,dxdy$, где D ограничена линиями $y=0$, $y=\sqrt{x}$, $y+x=2$.

Найти интегральное среднее значение данной функции $f(x,y)$ в указанной области D:

3.1.72. $f(x,y)=e^{x+y}$; D — квадрат $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

3.1.73. $f(x,y)=\sin^2 x\cdot\sin^2 y$; D — квадрат $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\pi$.

3.1.74. $f(x,y)=x^2+2y^2+xy$; область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

3.1.75. $f(x,y)=\cos(x+y)$; область D ограничена линиями $x=0$, $y=\pi$, $y=x$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

3.1.76. Привести примеры функции $f(x,y)$, для которой формула из теоремы о среднем значении верна для любой точки M_0 из области D.

3.1.77. Почему в определении двойного интеграла условие $d\to 0$ нельзя заменить условием $n\to\infty$?

3.1.78. Как можно с помощью двойного интеграла выразить объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, а снизу — поверхностью $z=g(x,y)$, заданных на одной и той же области D? [Функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны и $f(x,y)\geqslant g(x,y)$ $\forall(x,y)\in D$].

Изменить порядок интегрирования:

3.1.79. $\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} f\,dy.$

3.1.80. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt[3]{x^2}} f\,dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f\,dy.$

3.1.81. $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{-x}^{\sqrt{4x-x^2}} f\,dy.$

3.1.82. $\int\limits_{-2}^{0}dy\int\limits_{-1}^{y+1} f\,dx+\int\limits_0^{\pi}dy\int\limits_{-1}^{\cos y} f\,dx.$

Представить в виде повторных двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$$

если область D ограничена линиями:

3.1.83. $y = -x^2 + 3x$, $y = \dfrac{3}{4}x$.

3.1.84. $y = 1 + \sin x$, $y = -1$, $x = 0$, $x = 2\pi$.

3.1.85. $x^2 + y^2 = 2a^2$, $x^2 = ay$ $(a > 0)$.

3.1.86. $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ $(a > 0)$.

Вычислить интегралы:

3.1.87. $\iint\limits_D (x + y)\,dxdy$, D ограничена линиями $x = 0$, $y = x^2 + 2x - 3$, $2y = 3x$.

3.1.88. $\iint\limits_{\substack{(x-2)^2+y^2\leqslant 1\\ y\geqslant 0}} xy\,dxdy$.

3.1.89. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 2\leqslant y\leqslant 3}} (2x^2y - xy^2)\,dxdy$.

3.1.90. $\iint\limits_D \dfrac{y^3}{x^3}\,dxdy$, D ограничена линиями $y = \dfrac{1}{3}x$, $y = \sqrt{x}$, $x = 1$.

3.1.91. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \dfrac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$.

3.1.92. $\iint\limits_D (x^2 + y)\,dxdy$, D ограничена линиями $x - 2y = 0$, $2x - y = 0$, $xy = 2$.

Оценить интегралы:

3.1.93. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 9} (x^2 + 4y^2 + 10)\,dxdy$.

3.1.94. $\iint\limits_{3|x|+4|y|\leqslant 12} (x^2 + y^2)\,dxdy$.

3.1.95. $\iint\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant 2\\ 2\leqslant y\leqslant 3}} (x + y + xy)\,dxdy$.

3.1.96. $\iint\limits_{(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1} (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$.

Почему данные двойные интегралы зависят от порядка интегрирования?

3.1.97. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} \left(\dfrac{x^5}{y^4} - \dfrac{2x^3}{y^3}\right) e^{-\frac{x}{y^2}}\,dxdy$.

3.1.98. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy.$

3.1.99. Оценить сверху интеграл $I = \displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 2}} (x+xy-x^2-y^2)\,dxdy.$

§ 2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

в прямоугольных координатах (x,y). Предположим, что переменные x и y являются функциями двух переменных u и v, т. е. $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, и эти функции непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка по u и v в некоторой замкнутой области G плоскости Ouv. Предположим также, что эти функции взаимно однозначно и непрерывно отображают область G на область D.

Тогда имеет место равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_G f\big[x(u,v),y(u,v)\big]\cdot|J(u,v)|\,dudv, \quad \text{где}$$

$$J = J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} \text{ —}$$

называется *якобианом преобразования* G в D (предполагается, что определитель J, названный в честь немецкого математика Якоби, всюду в G отличен от нуля). Геометрически $|J(u,v)|\,dudv$ выражает элемент площади в области G, а $|J(u,v)|$ — коэффициент изменения элемента площади G при преобразовании в элемент площади D.

Координаты (u,v) называются *криволинейными координатами* точки (x,y), поскольку уравнения $x(u,v) = \text{const}$ и $y(u,v) = \text{const}$ представляют некоторые линии, вообще говоря, кривые, в области G.

Интеграл

$$\iint\limits_G f\big[x(u,v),y(u,v)\big]\cdot|J(u,v)|\,dudv$$

называется двойным интегралом в криволинейных координатах.

Простейшим и важнейшим частным случаем криволинейных координат являются полярные координаты (r,φ). Они связаны с прямоугольными координатами формулами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ($r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$). Якобиан преобразования в этом случае равен

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r,$$

а $dxdy = r\,drd\varphi$ — элемент площади в полярных координатах.

При этом имеет место формула замены переменных в двойном интеграле при переходе к полярным координатам

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi.$$

К полярным координатам особенно удобно переходить в тех случаях, когда область интегрирования круг или часть круга. Расстановка пределов и вычисление двойного интеграла в криволинейных координатах выполняется аналогично случаю прямоугольных координат.

3.2.1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D (2x+y)\,dxdy$$

по области D, ограниченной прямыми $y = 2x - 3$, $y = 2x + 5$, $y = -x + 7$, $y = -x - 1$.

○ Область D — параллелограмм $ABCK$ (рис. 19 *а*). Хотя подынтегральная функция и область интегрирования просты, вычисление данного интеграла в прямоугольных координатах достаточно громоздко (убедитесь самостоятельно). Заметив, что уравнения прямых можно записать в виде $y - 2x = -3$, $y - 2x = 5$, $y + x = 7$ и $y + x = -1$, перейдем к новым координатам, для чего обозначим

$$\begin{cases} u = y - 2x, \\ v = y + x, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{u}{3} + \dfrac{v}{3}, \\ y = \dfrac{u}{3} + \dfrac{2v}{3}. \end{cases}$$

Имеем

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{3},$$

т. е. $|J| = \dfrac{1}{3}$. В новой системе координат (u, v) область G ограничена прямыми $u = -3$, $u = 5$, $v = -1$, $v = 7$, т. е. представляет собой прямоугольник (рис. 19 *б*), а подынтегральная функция равна

$$2x + y = 2\left(-\frac{u}{3} + \frac{v}{3}\right) + \left(\frac{u}{3} + \frac{2v}{3}\right) = -\frac{u}{3} + \frac{4}{3}v.$$

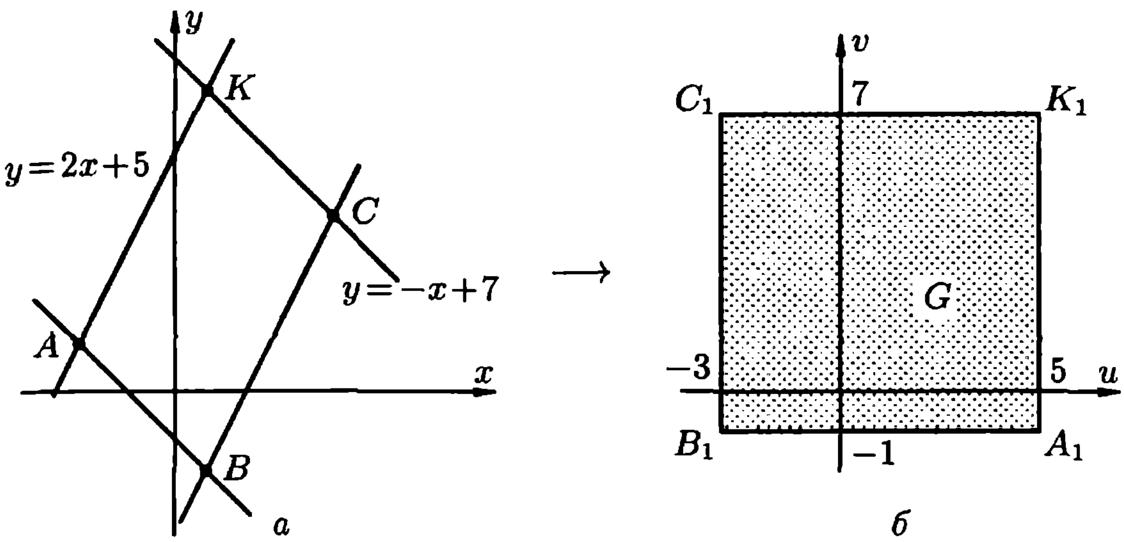


Рис. 19

Отметим, что первая система формул, написанная выше, преобразует параллелограмм $ABCK$ в прямоугольник $A_1B_1C_1K_1$, вторая система — наоборот, преобразует прямоугольник $A_1B_1C_1K_1$ в параллелограмм $ABCK$. При этом видно, что направление обхода вершин одной фигуры соответствует противоположному направлению обхода вершин другой. Именно поэтому $J < 0$. Переходим к вычислениям:

$$\iint\limits_{ABCK}(2x+y)\,dxdy = \iint\limits_{A_1B_1C_1K_1}\left(-\frac{u}{3}+\frac{4}{3}v\right)\cdot\frac{1}{3}\,dudv = \frac{1}{9}\int\limits_{-3}^{5}du\int\limits_{-1}^{7}(-u+4v)\,dv =$$

$$= \frac{1}{9}\int\limits_{-3}^{5}du(-uv+2v^2)\Big|_{-1}^{7} = \frac{1}{9}\int\limits_{-3}^{5}\big[(-7u+98)-(u+2)\big]du =$$

$$= \frac{1}{9}\int\limits_{-3}^{5}(-8u+96)\,du = \frac{1}{9}(-4u^2+96u)\Big|_{-3}^{5} = \frac{704}{9}. \quad \bullet$$

3.2.2. Вычислить

$$I = \iint\limits_{D} xy\,dxdy,$$

где D — область, ограниченная кривыми $y^2 = 4x$, $y^2 = 9x$, $xy = 1$, $xy = 5$.

Область D изображена на рис. 20 *а*. Заметим, что расставить пределы интегрирования в исходном интеграле не просто, однако подходящая замена переменных позволяет свести этот интеграл к интегралу по прямоугольнику.

Введем новые переменные u и v при помощи равенств $y^2 = ux$, $xy = v$. Выразим отсюда переменные x и y через u и v: $x = \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}$, $y = \sqrt[3]{uv}$.

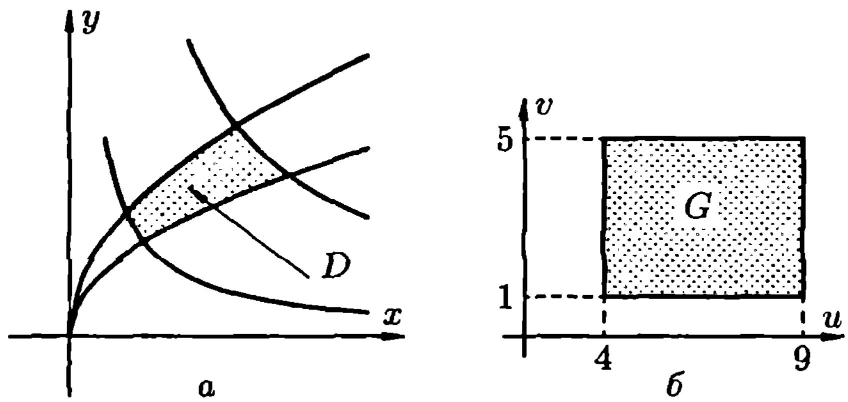


Рис. 20

Находим якобиан полученного преобразования

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}\cdot v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}\cdot v^{-\frac{1}{3}}\\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\cdot v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}\cdot v^{-\frac{2}{3}}\end{vmatrix}=-\frac{1}{3u},$$

откуда, с учетом того, что $x>0$ на области D, а значит, $u=\dfrac{y^2}{x}>0$, имеем $|J(u,v)|=\dfrac{1}{3u}$.

Таким образом, исходный интеграл в плоскости Ouv имеет вид

$$\iint\limits_G\sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}\cdot\sqrt[3]{uv}\cdot\frac{1}{3u}\,dudv=\frac{1}{3}\iint\limits_G\frac{v}{u}\,du\,dv.$$

Граница области G описывается линиями $u=4$ (так как одна из формул преобразования имеет вид $y^2=ux$, то линии $y^2=4x$ в плоскости Oxy соответствует линия $u=4$ в плоскости Ouv), $u=9$, $v=1$, $v=5$ (рис. 20 *б*).

Поэтому область G имеет вид $4\leqslant u\leqslant 9$, $1\leqslant v\leqslant 5$ (т. е. представляет собой прямоугольник), а преобразованный интеграл вычисляется намного проще:

$$I=\frac{1}{3}\iint\limits_G\frac{v}{u}\,dudv=\frac{1}{3}\int\limits_4^9\frac{du}{u}\int\limits_1^5 v\,dv=\frac{1}{3}\ln u\Big|_4^9\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_1^5=8\ln\frac{3}{2}. \qquad \bullet$$

Выбирая подходящие замены переменных, вычислить двойные интегралы, заданные в прямоугольных координатах:

3.2.3. $\iint\limits_D(y-x)\,dxdy$, где D ограничена линиями $y=-\frac{1}{3}x+5$, $y=x+1$, $y=x-3$, $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$.

3.2.4. $\iint\limits_D dxdy$, где D — параллелограмм со сторонами на прямых $y=x$, $y=x+3$, $y=-2x+1$, $y=-2x+5$.

3.2.5. $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dxdy$, где D ограничена кривыми $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = p$, $xy = q$ $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$.

3.2.6. $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, где D ограничена прямыми $x+y = 4$, $x+y = 12$ и параболой $y^2 = 2x$.

3.2.7. Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy,$$

где D — круг $x^2 + y^2 \leqslant 2ax$.

○ Строим круг $x^2+y^2 \leqslant 2ax$ радиуса a с центром в точке $(a,0)$ (рис. 21). Подынтегральная функция четная по переменной y (т.е. $f(x,-y) = f(x,y)$), а область интегрирования симметрична относительно оси Ox. Поэтому можно вычислить интеграл только по верхнему полукругу и результат удвоить:

$$I = 2\iint\limits_{D/2} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy.$$

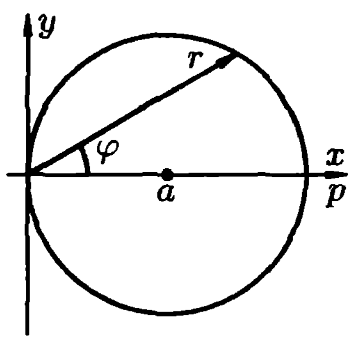


Рис. 21

Переходим к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Для удобства расстановки пределов в полярных координатах совместим полярную систему с прямоугольной так, как это показано на рис. 21. Тогда полукруг $D/2$ в полярных координатах задается системой неравенств $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $r \leqslant 2a\cos\varphi$, подынтегральная функция примет вид $\sqrt{4a^2 - r^2}$; а $dxdy = r\,drd\varphi$. Таким образом,

$$I = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \sqrt{4a^2 - r^2}\cdot r\,dr =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \sqrt{4a^2 - r^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) d(4a^2 - r^2) =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\left(-\frac{1}{3}(4a^2 - r^2)^{3/2}\Big|_0^{2a\cos\varphi}\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\left[(4a^2 - 4a^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}} - (4a^2)^{\frac{3}{2}}\right]d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi/2}[(4a^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}} - 8a^3]\,d\varphi = \frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi/2}(8a^3 - 8a^3\sin^3\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{16}{3}a^3\left[\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos^2\varphi)\,d(\cos\varphi)\right] = \frac{16}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right). \quad \bullet$$

Переходя к полярным координатам, вычислить интегралы:

3.2.8. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$ **3.2.9.** $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy.$

3.2.10. $\displaystyle\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$

3.2.11. Вычислить повторный интеграл $I = \displaystyle\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy.$

◯ Сначала преобразуем повторный интеграл в двойной:

$$I = \iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dxdy, \text{ где } D\colon \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2-x^2}. \end{cases}$$

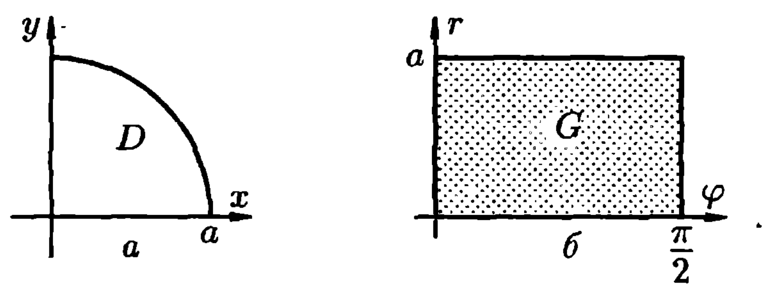


Рис. 22

Область интегрирования представляет собой четверть круга (рис. 22 *а*), поэтому удобно перейти к полярным координатам (r, φ). Полярную систему координат изобразим также в виде прямоугольной (рис. 22 *б*). Тогда область G в системе координат $Or\varphi$ определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leqslant r \leqslant a, \end{cases}$$

т.е. G — прямоугольник. Учтем также, что подынтегральная функция имеет вид $e^{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = e^{r^2}$. Следовательно,

$$I = \iint\limits_G e^{r^2}r\,drd\varphi = \int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^a e^{r^2}r\,dr = \varphi\Big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^a = \frac{\pi}{4}(e^{a^2}-1). \quad \bullet$$

Вычислить интегралы, переходя к полярным координатам:

3.2.12. $\int\limits_0^a dy \int\limits_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2-x^2}\,dx.$

3.2.13. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2-9}\,dxdy$, D — кольцо, ограниченное окружностями $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2=25$.

3.2.14. $\int\limits_0^a dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx.$

3.2.15. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, где область D ограничена окружностями $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$ и осью Ox $(y \geqslant 0)$.

3.2.16. Вычислить

$$I = \iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$$

где D — область, ограниченная лемнискатой

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), \quad x \geqslant 0.$$

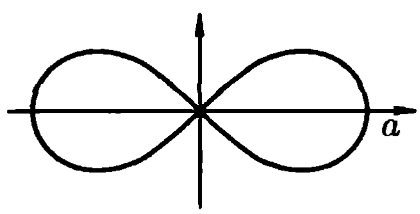


Рис. 23

○ Заменяя x на $r\cos\varphi$, а y $r\sin\varphi$, получим на уравнение лемнискаты (рис. 23) в полярных координатах $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ ($\cos 2\varphi \geqslant 0$ при $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$). Подынтегральная функция равна $r^2\cos\varphi$. В силу симметрии лемнискаты относительно оси Ox и четности подынтегральной функции относительно переменной y можно записать:

$$I = 2\iint\limits_{\frac{D}{2}} r^2\cos\varphi\cdot r\,drd\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3\,dr = \frac{1}{2}a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi\cdot\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-2\sin^2\varphi\right)^2 d(\sin\varphi) = \frac{a^4}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-4\sin^2\varphi+4\sin^4\varphi\right) d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{a^4}{2}\left(\sin\varphi - \frac{4}{3}\sin^3\varphi + \frac{4}{5}\sin^5\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{15}a^4. \quad ●$$

Вычислить интегралы, переходя к полярным координатам:

3.2.17. $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где D — полукруг $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $y \geqslant 0$.

3.2.18. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dy$.

3.2.19. $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где D ограничена лемнискатой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad x \geqslant 0.$$

3.2.20. $\iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, где D — внутренность эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1.$$

В следующих двойных интегралах расставить пределы интегрирования, применяя прямоугольные и полярные системы координат:

3.2.21. $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$, где D ограничена окружностями $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$ и прямыми $y = x$ и $y = 2x$.

3.2.22. $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$, где D ограничена прямыми $y = 0$, $x = 1$, $y = x$.

Дополнительные задания

Вычислить двойные интегралы:

3.2.23. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy$, где D ограничена кривыми $y = x$, $x + y = 2a$, $x = 0$.

3.2.24. $\iint\limits_D \sqrt{xy - y^2}\,dxdy$, где D — трапеция с вершинами $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(10, 2)$, $K(2, 2)$.

3.2.25. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, где D ограничена кривыми $x + y = 2$, $x^2 + y^2 = 2y$ $(x > 0)$.

3.2.26. $\iint\limits_D (x + 2y)\,dxdy$, где D ограничена кривыми $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Данные интегралы вычислить, переходя к полярным координатам:

3.2.27. $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$, где D ограничена кривыми $y=x$, $y=\sqrt{3}x$, $x^2+y^2=9$.

3.2.28. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, где D ограничена окружностью $x^2+y^2=2Rx$.

3.2.29. $\iint\limits_D dxdy$, где D ограничена линией $(x^2+y^2)^2=2ax^3$.

3.2.30. $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$, где D — круг $x^2+y^2\leqslant Rx$.

3.2.31. $\iint\limits_D y\,dxdy$, где D — полукруг $(x-a)^2+y^2\leqslant a^2$, $y\geqslant 0$.

3.2.32. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, где D — круг $x^2+(y+2)^2\leqslant 4$.

3.2.33. $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dxdy$, где D — четверть круга $x^2+y^2\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

3.2.34. $\iint\limits_D dxdy$, где D ограничена лемнискатой $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

3.2.35. Что выражает знак якобиана преобразования координат?

3.2.36. Почему при преобразовании координат в двойном интеграле необходима взаимная однозначность этого преобразования?

3.2.37. Почему функции $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ используемые при замене переменных в двойном интеграле должны быть дифференцируемыми (при $(u,v)\in G$)?

3.2.38. Можно ли выполнить такое преобразование, чтобы соответствующим интегралом вычислить длину кривой?

3.2.39. При составлении повторного интеграла получилась запись

$$\int\limits_a^x dx \int\limits_{2x-y}^{3x^2} f(x,y)\,dy.$$

Какой области D может соответствовать этот интеграл?

В данных двойных интегралах перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования:

3.2.40. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, D — круг $x^2+y^2\leqslant ax$.

3.2.41. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, область D — общая часть кругов $x^2+y^2 \leqslant ax$, $x^2+y^2 \leqslant bx$.

3.2.42. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, область D ограничена прямыми $y=-x$, $y=x$, $y=1$.

В данных интегралах произвести указанную замену переменных и расставить пределы интегрирования:

3.2.43. $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)\,dy$ ($a>0$, $\alpha>0$), если $u=x$, $v=\frac{y}{x}$.

3.2.44. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy$, если $u=x+y$, $v=x-y$.

3.2.45. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, где D — область, ограниченная кривой

$$\left(x^2+\frac{1}{3}y^2\right)^2 = x^2y,$$

если $x=r\cos\varphi$, $y=\sqrt{3}r\sin\varphi$.

3.2.46. $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, где D ограничена параболами $y=ax^2$, $y=by^2$ и гиперболами $xy=p$, $xy=q$, если $y=ux^2$, $xy=v$ ($0<a<b$, $0<p<q$).

3.2.47. Преобразовать с помощью подстановок $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$ интеграл

$$\iint\limits_D f\left(R^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy,$$

где D — лежащая в первой четверти часть эллиптического кольца

$$1 \leqslant \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 4.$$

Перейти к полярным координатам (r,φ) и расставить пределы интегрирования в том и в другом порядке в данных интегралах:

3.2.48. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy$.

3.2.49. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$.

3.2.50. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy$.

3.2.51. В двойном интеграле

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$$

где область D ограничена кривыми $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$, сделать замену переменных $x=u\cos^4 v$, $y=u\sin^4 v$. Интеграл привести к повторному.

3.2.52. Вычислить

$$\iint\limits_D dxdy,$$

где D ограничена кривой $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}$.

3.2.53. Вычислить

$$\iint\limits_D dxdy,$$

где D ограничена кривыми $\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{b}}=1$, $x=0$, $y=0$.

3.2.54. Вычислить

$$\iint\limits_D r^2\left|\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-r\right|drd\varphi,$$

где D — прямоугольник $0\leqslant r\leqslant 1$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

§ 3. ПРИМЕНЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Двойные интегралы используются при решении многих геометрических и физических задач: вычислении площадей плоских фигур и поверхностей, объемов тел, координат центра тяжести, момента инерции и т. д.

Вычисление геометрических величин

1. Если D — ограниченная область плоскости Oxy, то ее площадь S вычисляется по формуле

$$S=S(D)=\iint\limits_D dxdy.$$

2. Пусть $z=f(x,y)$ — неотрицательная, непрерывная функция в замкнутой области D. Если V — тело, ограниченное сверху поверхностью $z=f(x,y)$, снизу — областью D, а сбоку — соответствующей цилиндрической поверхностью с образующей параллельной оси Oz и направляющей, совпадающей с границей области D, то объем этого тела равен

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

3. Пусть V — тело, ограниченное сверху поверхностью $z=f(x,y)$, снизу — поверхностью $z=g(x,y)$, причем проекцией обеих поверхностей на плоскость

Oxy служит область D, в которой функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны (и $f(x,y) \geqslant g(x,y)$), то объем этого тела равен

$$V = \iint\limits_D (f(x,y) - g(x,y))\,dxdy.$$

4. Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, где функция $f(x,y)$, а также ее частные производные первого порядка, непрерывны в области D. Тогда ее площадь S вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)}\,dxdy.$$

Приняты также обозначения: $f_x'(x,y) = p$, $f_y'(x,y) = q$. В таком случае,

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dxdy.$$

Вычисление физических и механических величин

Предположим, что *плоская пластина* D имеет поверхностную плотность *распределения масс* $\rho(x,y)$ непрерывную в D. Тогда масса $m = m(D)$ этой пластины вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dxdy$$

(физический смысл двойного интеграла).

Моменты инерции J_x, J_y и J_0 плоской материальной пластины D с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$ относительно координатных осей Ox, Oy и начала координат $O(0,0)$ соответственно вычисляются по формулам:

$$J_x = \iint\limits_D y^2 \rho(x,y)\,dxdy; \quad J_y = \iint\limits_D x^2 \rho(x,y)\,dxdy;$$
$$J_0 = J_x + J_y = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)\,dxdy.$$

В случае *однородной пластины* ($\rho = 1$) эти формулы принимают более простой вид:

$$J_x = \iint\limits_D y^2\,dxdy, \quad J_y = \iint\limits_D x^2\,dxdy, \quad J_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy.$$

Координаты центра тяжести материальной пластины D с плотностью $\rho(x,y)$ вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m},$$

где

$$M_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)\,dxdy, \quad M_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)\,dxdy \text{ —}$$

статические моменты пластины D относительно осей Ox и Oy соответственно, а m — ее масса.

В случае однородной пластины соответственно имеем:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D y\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}.$$

3.3.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 2x$ и $y = x$.

○ Имеем $S = \iint\limits_D dxdy$. Направление, или порядок, интегрирования выберем так, как указано на чертеже (рис. 24).

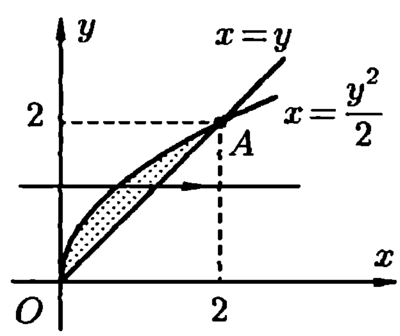


Рис. 24

Сначала определим координаты точки A:

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x, \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x_1 = 0,\ y_1 = 0 \text{ и } x_2 = 2,\ y_2 = 2.$$

Проекция области D на ось Oy есть отрезок $[0,2]$. Таким образом,

$$S = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{y} dx = \int\limits_0^2 dy \cdot x\Big|_{\frac{y^2}{2}}^{y} = \int\limits_0^2 \left(y - \frac{y^2}{2}\right) dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^2 = \frac{2}{3}. \quad ●$$

3.3.2. Вычислить площадь параболического сегмента AOB, ограниченного дугой BOA параболы $y = ax^2$ и отрезком BA, соединяющим точки $B(-1,2)$ и $A(1,2)$.

○ Ясно, что уравнение параболы имеет вид $y = 2x^2$ $(y(-1) = y(1) = 2)$. Фигура D, площадь которой надо вычислить, ограничена снизу параболой $y = 2x^2$, а сверху — прямой $y = 2$. Следовательно,

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{2} dy = 2\int\limits_0^1 (2 - 2x^2)\, dx = 4\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{3}. \quad \bullet$$

3.3.3. Вычислить площадь петли кривой

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{c^2}.$$

○ Под петлей будем подразумевать область, ограниченную данной кривой и расположенную в первой четверти ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$). Воспользуемся обобщенными полярными координатами: $x = a \cdot r\cos\varphi$, $y = b \cdot r\sin\varphi$. В таком случае, якобиан преобразования равен

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot r.$$

Кривая в полярных координатах имеет вид

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 = \frac{2abr^2\sin\varphi\cos\varphi}{c^2},$$

т. е. $(r^2)^2 = \dfrac{abr^2 \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi}{c^2}$, откуда $r = \dfrac{\sqrt{ab}}{c}\sqrt{\sin 2\varphi}$. Внутренность петли, т. е. область интегрирования D в прямоугольных координатах, задается неравенством

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \leqslant \frac{2xy}{c^2}.$$

В полярных координатах соответствующая область интегрирования G определяется неравенством $0 \leqslant r \leqslant \dfrac{\sqrt{ab}}{c}\sqrt{\sin 2\varphi}$, при этом $\sin 2\varphi \geqslant 0$, т. е. $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_G abr\, drd\varphi =$$

$$= ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\sqrt{ab}}{c}\sqrt{\sin 2\varphi}} r\,dr = ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\frac{\sqrt{ab}}{c}\cdot\sqrt{\sin 2\varphi}}\right) =$$

$$= \frac{ab}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ab}{c^2}\sin 2\varphi d\varphi = \frac{a^2b^2}{2c^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\, d\varphi = \left(\frac{ab}{2c}\right)^2. \quad \bullet$$

Вычислить площади фигур, ограниченных кривыми:

3.3.4. $x = 0,\ y = \frac{3}{2}x,\ y = 4 - (x-1)^2.$

3.3.5. $xy = 4,\ x + y - 5 = 0.$

3.3.6. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x + y = a.$

3.3.7. $x^2 + y^2 = ax,\ y^2 = 2ax,\ x = 2a,\ y \geqslant 0.$

3.3.8. $y^2 = 10x + 25,\ y^2 = -6x + 9.$

3.3.9. $x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x,\ y = x,\ y = 0.$

3.3.10. $(x^2 + y^2) = 2ax^3,\ a > 0.$

3.3.11. $x^2 + y^2 + 2y = 0,\ y = -1,\ y = -x.$

3.3.12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой

$$(4x - 7y + 8)^2 + (3x + 8y - 9)^2 = 64.$$

◐ Вычисления по формуле

$$S = \iint\limits_D dxdy$$

неприемлемы ввиду сложности пределов интегрирования. Произведем замену переменных по формулам

$$\begin{cases} 4x - 7y + 8 = u \\ 3x + 8y - 9 = v, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{53}(8u + 7v + 1) \\ y = \frac{1}{53}(-3u + 4v + 60). \end{cases}$$

При этом $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{8}{53},\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{7}{53}, \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{3}{53},\ \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{4}{53}$, т. е.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{8}{53} & \frac{7}{53} \\ -\frac{3}{53} & \frac{4}{53} \end{vmatrix} = \frac{1}{53}.$$

В плоскости координат (u, v) соответствующая линия имеет вид $u^2 + v^2 = 64$, т. е представляет собой окружность, а область G — круг $u^2 + v^2 \leqslant 64$ с площадью $S(G) = 64\pi$. Используя соответствующие формулы, получаем

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_G J\, dudv = \iint\limits_G \frac{1}{53}\, dudv = \frac{1}{53} S(G) = \frac{64\pi}{53}.$$ ●

Вычислить площади фигур, ограниченных кривыми:

3.3.13. $\frac{(x + y - 1)^2}{4} + \frac{(x - y + 3)^2}{9} = 1.$

3.3.14. $\frac{(2x + 3y - 5)^2}{16} + \frac{(3x - 2y + 1)^2}{25} = 1.$

3.3.15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$r = a(1 + \cos\varphi), \quad r = a\cos\varphi, \qquad (a > 0).$$

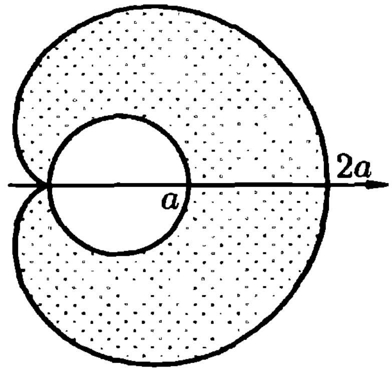


Рис. 25

❍ Линии даны в полярных координатах, поэтому воспользуемся формулой площади в полярных координатах

$$S = \iint\limits_G r\,dr d\varphi.$$

Первая функция $r = a(1 + \cos\varphi)$ определена при $\varphi \in [-\pi, \pi]$, а вторая $r = a\cos\varphi$ — при $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, так как при прочих значениях φ получается $r < 0$. Соответствующая область имеет вид, изображенный на рис. 25. Ввиду симметрии фигуры относительно полярной оси можно ограничиться вычислением половины площади, а результат удвоить. Имеем

$$S = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr + 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos\varphi)\,d\varphi + a^2 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a^2 \left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos\varphi)\,d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + 2\cos\varphi)\,d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi\right] =$$

$$= a^2 \left[\int\limits_0^{\pi} (1 + 2\cos\varphi)\,d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(1 + \cos 2\varphi)}{2}\,d\varphi\right] = \frac{5}{4}\pi a^2. \quad \bullet$$

Вычислить площади фигур, ограниченных кривыми:

3.3.16. $\left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$.

3.3.17. $(y - x)^2 + x^2 = 1$.

3.3.18. $x^3 + y^3 = 2xy$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3.3.19. $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2bx$, $y = 0$, $y = x$, $0 < a < b$.

3.3.20. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

3.3.21. $xy = a^2$, $xy = b^2$, $y = m$, $y = n$ $(a > b;\ m > n)$.

3.3.22. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$.

○ Первые два уравнения изображают параболические цилиндры с вертикальной образующей, третье,т. е. $x + z = 4$ — уравнение наклонной плоскости, а уравнение $z = 0$ — плоскость Oxy. Соответствующее тело изображено на рис. 26; сверху его ограничивает поверхность $z = 4 - x$.

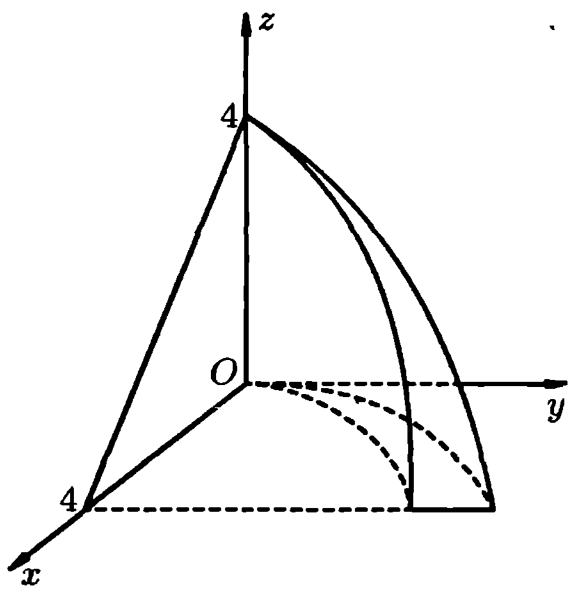


Рис. 26

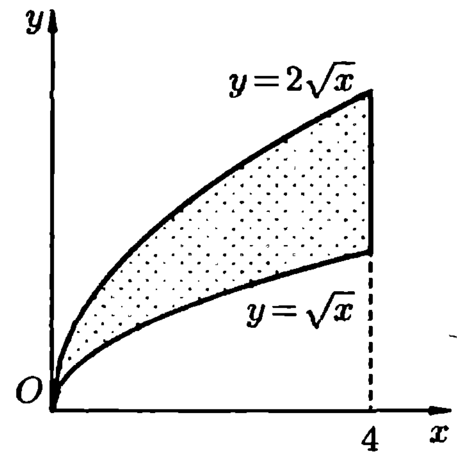


Рис. 27

Объем тела вычислим по формуле

$$V = \iint\limits_D (4 - x)\,dxdy,$$

где область D изображена на рис. 27. Имеем

$$V = \int\limits_0^4 (4 - x)\,dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int\limits_0^4 (4 - x)\,dxy\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} =$$

$$= \int\limits_0^4 (4 - x)\sqrt{x}\,dx = \left(4 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^4 = \frac{128}{15}. \quad ●$$

3.3.23. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $z = 2 - y$, $y = x^2$.

○ Тело, объем которого нужно вычислить, изображено на рис. 28. В силу симметрии тела (клина) относительно плоскости Oyz, вычислим объем половины тела и результат удвоим. Координаты точек A и B удовлетворяют системе уравнений $y = x^2$ и $y = 2$, откуда $A(\sqrt{2}, 2)$, $B(-\sqrt{2}, 2)$.

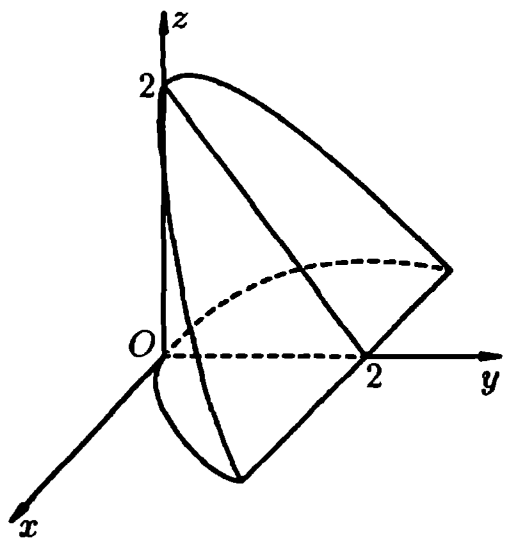


Рис. 28

Следовательно,

$$V = \iint\limits_D (2-y)\,dxdy = 2\int\limits_0^2 (2-y)\,dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} dx = 2\int\limits_0^2 (2-y)\sqrt{y}\,dy =$$

$$= 2\left(2\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^2 = \frac{32\sqrt{2}}{15}. \quad \bullet$$

Вычислить объемы тел, ограниченных данными поверхностями:

3.3.24. $z = 0$, $z = 3 - x^2 - y^2$.

3.3.25. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 4$, $z + x^2 + y^2 = 1$.

3.3.26. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

3.3.27. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = y^2 + z^2$, $y + z = 1$.

3.3.28. $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

3.3.29. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

3.3.30. $x + y + z = a$, $3x + y = a$, $3x + 2y = 2a$, $y = 0$, $z = 0$.

3.3.31. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = \frac{b}{a}x$, $y = 0$, $z = 0$.

3.3.32. Вычислить площадь поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

○ Сфера симметрична относительно координатных плоскостей, поэтому ограничимся вычислением площади поверхности той ее части, что расположена в первом октанте, а результат умножим на 8. Запишем поверхность верхней полусферы явно, т. е. в виде $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, и воспользуемся соответствующей формулой. Имеем:

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, найдем искомую площадь (заметим, что здесь мы имеем дело со сходящимся несобственным интегралом)

$$S = 8\iint\limits_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot r\,drd\varphi = 8R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} =$$

$$= 8R\cdot\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sqrt{R^2 - r^2}\right)\Big|_0^R = 4\pi R^2. \quad \bullet$$

3.3.33. Вычислить площадь S части поверхности параболоида $z = xy$, принадлежащей цилиндру $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

○ Поскольку $z'_x = y$, $z'_y = x$, $\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, то, переходя к полярным координатам, имеем:

$$S = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy = \iint\limits_{r\leqslant R} r\sqrt{1 + r^2}\,drd\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \sqrt{1 + r^2}\cdot\frac{1}{2}d(1 + r^2) = \frac{2\pi}{3}\left[(1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right]. \quad \bullet$$

3.3.34. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = px$, $p > 0$.

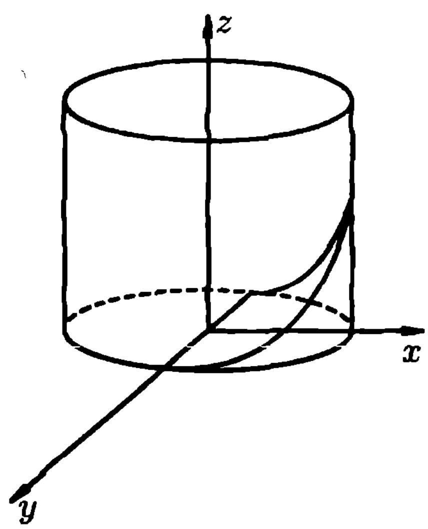


Рис. 29

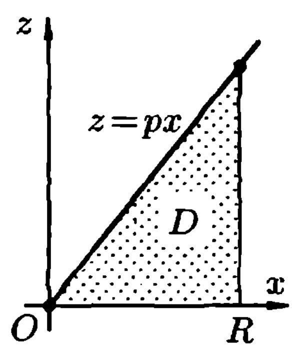


Рис. 30

○ Поверхность цилиндра не может быть записана явной формулой $z = z(x, y)$, поэтому формула

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy$$

неприменима. Выразим в таком случае поверхность цилиндра (рис. 29) явно в виде $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ и воспользуемся формулой

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z}\,dxdz,$$

где D — область, ограниченная прямыми $z = px$, $z = 0$, $x = R$ (рис. 30) в плоскости Oxz. Имея в виду знак $\pm$ перед радикалом, вычислим площадь половины поверхности, т. е. описываемой уравнением $z = \sqrt{R^2 - x^2}$, а результат удвоим. Имеем

$$y'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad y'_z = 0, \quad \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Следовательно,

$$S = 2 \iint\limits_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dxdz = 2R \int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \int\limits_0^{px} dz =$$

$$= 2pR \int\limits_0^R \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = -2pR(-\sqrt{R^2 - x^2})\Big|_0^R = 2pR^2. \quad \bullet$$

3.3.35. Найти площадь части поверхности $z^2 + (x\cos\alpha + y\sin\alpha) = r^2$, содержащейся в первом октанте.

3.3.36. Найти площадь части плоскости $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, заключенной между координатными плоскостями.

3.3.37. Найти площадь части поверхности параболоида $y^2 + z^2 = 4ax$, отсекаемой цилиндром $y^2 = ax$ и плоскостью $x = 3a$.

3.3.38. Найти площадь части поверхности параболоида $2z = x^2 + y^2$, «вырезанного» цилиндром $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

3.3.39. Вычислить площадь той части конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, которая лежит над плоскостью $z = 0$ и отсечена плоскостью $z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

3.3.40. Вычислить площадь части поверхности гиперболического параболоида $2z = x^2 - y^2$, «вырезанной» плоскостями $x - y = \pm 1$, $x + y = \pm 1$.

3.3.41. Определить массу круглой пластины радиуса R с центром в начале координат, если поверхностная плотность материала пластины в точке $M(x, y)$ равна $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, где $k > 0$ — фиксированное число.

○ Переходя от декартовых координат к полярным, имеем

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} k\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy =$$

$$= 4k \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R r^2\, dr = \frac{2\pi k R^3}{3}. \quad \bullet$$

3.3.42. Найти массу круглой пластины D $(x^2 + y^2 \leqslant 1)$ с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = 3 - x - y$.

○ Имеем:

$$m = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} (3 - x - y)\, dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x - y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left[(3-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int\limits_{-1}^{1} 2(3-x)\sqrt{1-x^2}\, dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} 6\sqrt{1-x^2}\, dx - 2 \int\limits_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Последний интеграл равен нулю, как интеграл от нечетной функции по симметричному относительно началу координат отрезку. Поэтому, делая подстановку $x = \sin t$, получим

$$m = \int\limits_{-1}^{1} 6\sqrt{1-x^2}\, dx = 6 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t\, dt = 6 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= 3 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt = 3\pi. \quad \bullet$$

3.3.43. Найти моменты инерции квадратной пластины $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$ относительно осей координат и начала координат, если плотность пластины пропорциональна ординате точки пластины с коэффициентом k.

○ Вычисления производим по соответствующим формулам этого параграфа учитывая, что $\rho(x, y) = xy$:

1) $J_x = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant a}} ky \cdot y^2\, dxdy = k \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a y^3\, dy = \dfrac{ka^5}{4}.$

2) $J_y = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant a}} ky \cdot x^2\, dxdy = k \int\limits_0^a x^2\, dx \int\limits_0^a y\, dy = \dfrac{ka^5}{6}.$

3) $J_0 = J_x + J_y = \dfrac{5ka^5}{12}.$

●

Найти массу пластины D с поверхностной плотностью $\rho(x, y)$:

3.3.44. D: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$; $\rho(x, y) = xy$.

3.3.45. D: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; $\rho(x, y) = \dfrac{x^2}{1+y^2}$.

3.3.46. D: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$; $\rho(x, y) = x^2 y e^{xy}$.

3.3.47. D ограничена кривыми $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ $(y > 0)$; $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.

3.3.48. D ограничена лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $(x \geqslant 0)$; $\rho(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$.

3.3.49. D задана неравенствами $x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1, \rho(x,y) = e^{(x+y)^2}$.

3.3.50. D ограничена кривыми $x^2 = ay$, $x^2 + y^2 = 2a^2$, $y = 0$ ($x > 0$, $a > 0$), $\rho(x,y) = k$.

3.3.51. Найти координаты центра тяжести пластины, ограниченной параболой $ay = x^2$ и прямой $x + y = 2a$, если плотность пластины постоянна и равна ρ_0.

◯ Сделаем чертеж (рис. 31). Находим абсциссы точек A и B пересечения прямой $x + y = 2a$ и параболы $y = \frac{x^2}{a}$. Из системы уравнений $\begin{cases} x + y = 2a \\ y = \frac{x^2}{a} \end{cases}$ находим $x_1 = -2a$ и $x_2 = a$.

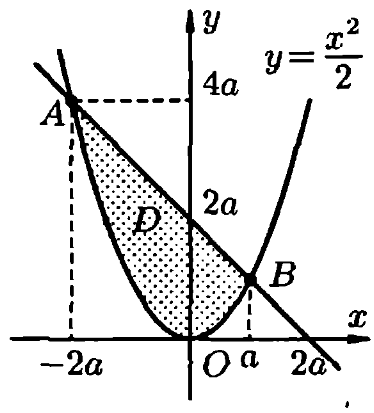


Рис. 31

1) Масса пластины D равна

$$m = m(D) = \iint\limits_D \rho_0 \, dxdy = \rho_0 \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy =$$

$$= \rho_0 \int\limits_{-2a}^{a} \left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right) dx = \frac{9}{2} a^2 \rho_0.$$

2) Вычислим статические моменты пластины относительно координатных осей

$$M_x = \rho_0 \iint\limits_D y \, dxdy = \rho_0 \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y \, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \rho_0 \int\limits_{-2a}^{a} \left[(2a - x)^2 - \frac{x^4}{a^2}\right] dx = \frac{36}{5} \rho_0 a^3.$$

$$M_y = \rho_0 \iint\limits_D x\,dxdy = \rho_0 \int\limits_{-2a}^{a} x\,dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy =$$

$$= \rho_0 \int\limits_{-2a}^{a} \left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right) x\,dx = -\frac{9}{4}a^3\rho_0.$$

3) Координаты центра тяжести найдем теперь по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m} = -\frac{a}{2}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{8}{5}a.$$

Ответ: $M_0\left(-\frac{a}{2}, \frac{8}{5}a\right)$. ●

Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями:

3.3.52. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 4$.

3.3.53. $y^2 = ax$, $y = x$.

3.3.54. $x^2 + y^2 = R^2$, $y = 0$.

3.3.55. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Дополнительные задания

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

3.3.56. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

3.3.57. $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

3.3.58. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 2a$.

3.3.59. $x^2 = 2py$, $y^2 = 2px$.

3.3.60. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{a}$, $-a \leqslant x \leqslant a$.

3.3.61. $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + (y - a)^2 = a^2$.

3.3.62. $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$, $x = 0$.

3.3.63. $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$.

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

3.3.64. $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$, $z = 1$, $x + y = 3$, $x = 0$, $y = 0$.

3.3.65. $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $z = c$.

3.3.66. $3x - 2y = 0$, $8x - y = 0$, $2x + 3y - 13 = 0$, $2x + 3y - 26 = 0$, $17x + 16y - 13z = 0$, $z = 0$.

3.3.67. $6x - 9y + 5z = 0$, $3x - 2y = 0$, $4x - y = 0$, $x + y - 5 = 0$, $z = 0$.

3.3.68. $z = 4 - x^2$, $y = 5$, $y = 0$, $z = 0$.

3.3.69. $z = a^2 - x^2$, $x + y = a$, $y = 2x$, $y = 0$, $z = 0$.

3.3.70. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

3.3.71. Плоская пластина D представляет треугольник ABC с вершинами $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(3,1)$. Плотность распределения масс в каждой точке равна ординате этой точки. Определить

а) массу пластины;

б) статические моменты пластины относительно координатных осей;

в) координаты центра тяжести пластины.

3.3.72. Найти массу пластины, ограниченной кривыми $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, если ее плотность равна $\rho(x, y) = x + 2y$.

3.3.73. Найти моменты инерции треугольника ABC с вершинами $A(0,1)$, $B(1,2)$, $C(2,1)$ относительно координатных осей и начала координат, если плотность треугольника постоянна и равна C.

3.3.74. Найти центр тяжести квадрата $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$ с плотностью $\rho(x, y) = x + y$.

3.3.75. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, заключенной между плоскостями $z = mx$ и $z = nx$ $(m > n > 0)$.

3.3.76. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = ax$, вырезанной из него сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

3.3.77. Вычислить площадь части поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, вырезанной поверхностью $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

3.3.78. Вычислить координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$.

3.3.79. Найти массу круглой пластины радиуса R, если плотность ее пропорциональна квадрату расстояния точки от центра и равна σ на краю пластины.

3.3.80. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy однородной фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$ $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и полярной осью.

3.3.81. Найти координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной кривыми $y = x$ и $y^2 = ax$.

3.3.82. Найти массу прямоугольного треугольника с катетами a и b, если его плотность равна расстоянию точки от катета b.

3.3.83. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy однородной фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ и прямой OA, проходящей через начало координат и вершину $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ синусоиды $(x \geqslant 0)$.

3.3.84. Вычислить моменты инерции относительно координатных осей треугольника с вершинами в точках $A(2,2)$, $B(0,2)$, $C(2,0)$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

Найти площади фигур, ограниченных кривыми:

3.3.85. $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$, $y^2 = \beta x$, $a < b$, $\alpha < \beta$.

3.3.86. $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$ $(0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta)$.

3.3.87. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $r\cos\varphi = 1$ и окружностью $r = 2$ (фигура не содержит полюса).

3.3.88. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r = a(1-\cos\varphi)$ и $r = a$ (вне кардиоиды).

3.3.89. Вычислить площадь параболического сегмента, ограниченного параболой $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$ и осью Ox.

Вычислить объем тел, ограниченных поверхностями:

3.3.90. $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ (внутри параболоида).

3.3.91. $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$.

3.3.92. В каком отношении гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ делит объем шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2$?

3.3.93. $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$.

3.3.94. Найти объем тела, заключенного между конусом

$$2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$$

и гиперболоидом $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

3.3.95. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2+y^2 = 2ax$, содержащейся между плоскостью Oxy и конусом

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

3.3.96. Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, «вырезанной» цилиндром $(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2)$.

3.3.97. Вычислить площадь части поверхности параболоида $x^2 + z^2 = 2ax$, содержащейся между цилиндром $y = ax$ и плоскостью $x = a$.

3.3.98. Найти моменты инерции однородного треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 1$, $x + 2y = 2$, $y = 0$, относительно координатных осей.

3.3.99. Найти моменты инерции однородной фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$, относительно осей Ox, Oy и относительно полюса.

3.3.100. Найти моменты инерции однородной фигуры, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

относительно осей Ox, Oy и относительно начала координат.

3.3.101. Найти момент инерции области, ограниченной лемнискатой

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi,$$

относительно полюса.

3.3.102. Найти статический момент однородного полукруга радиуса R, лежащего в плоскости Oxy, относительно диаметра.

§ 4. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ. СВОЙСТВА, ВЫЧИСЛЕНИЕ, ПРИМЕНЕНИЕ

Определение тройного интеграла

Определение тройного интеграла аналогично определению двойного интеграла. Пусть в пространственной области $V \in \mathbb{R}^3$ определена и непрерывна функция трех переменных $u = f(x, y, z)$. Разбиение области V на n произвольных областей $\Delta \mathrm{v}_1$, $\Delta \mathrm{v}_2$, ..., $\Delta \mathrm{v}_n$ с объемами Δv_1, Δv_2, ..., Δv_n и выбор в каждой области $\Delta \mathrm{v}_i$ произвольной точки M_i позволяют строить интегральную сумму вида

$$m_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i.$$

Тогда существует предел интегральных сумм m_n при условии стремления к нулю наибольшего из диаметров областей ΔV_i. Этот предел, не зависящий от способа разбиения области V на области ΔV_i и выбора точек M_i, называется *тройным интегралом* и обозначается символом

$$\iiint\limits_V f(M)\,dv \quad \text{и} \quad \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz.$$

Тройной интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствам двойного интеграла (линейность, аддитивность, оценка интеграла, свойство среднего).

Вычисление тройного интеграла

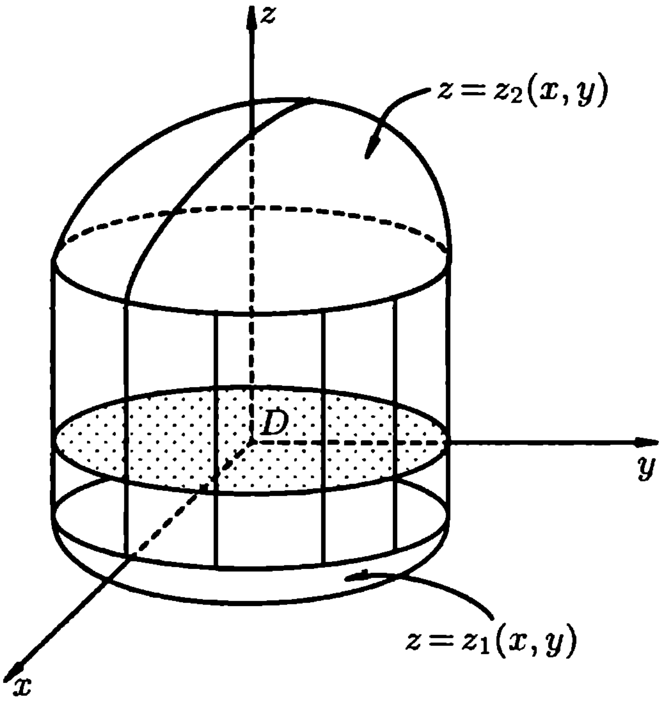
Предположим, что функция трех переменных $f(x, y, z)$ определена и непрерывна в пространственной области V, которая ограничена сверху поверхностью $z = z_2(x, y)$, а снизу — поверхностью $z = z_1(x, y)$, где функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ определены и непрерывны в области $D \in Oxy$ (рис. 32). Тогда вычисление тройного интеграла сводится к последовательному (справа налево) вычислению определенного интеграла по переменной z (переменные x и y считаются при этом константами) и двойного интеграла от того, что получится, по области D.

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz\right).$$

В частности, если область V представляет собой прямоугольный параллелепипед, определяемый неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, $m \leqslant z \leqslant n$, то тройной интеграл сводится к трем определенным интегралам:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_m^n f(x, y, z)\,dz.$$

Естественно, можно выбирать другой порядок интегрирования.



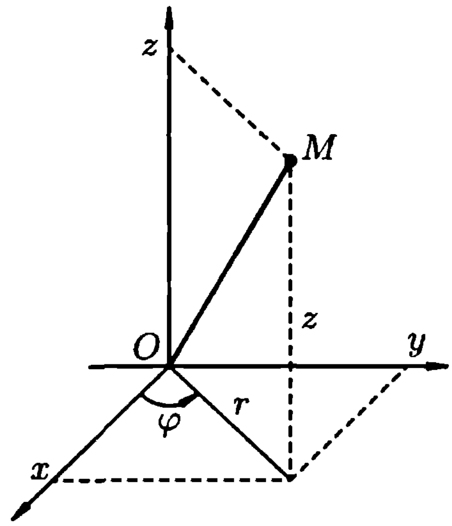


Рис. 32 *Рис. 33*

Замена переменных в тройном интеграле

Цилиндрические координаты

Цилиндрические координаты r, φ, z (рис. 33) представляют собой обобщение полярных координат на плоскости и связаны с прямоугольными координатами x, y, z формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Переход к тройному интегралу в цилиндрических координатах осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)r\,drd\varphi dz.$$

В частности, если положить в этом равенстве $f(x,y,z) \equiv 1$, то получим формулу для объема тела в цилиндрических координатах:

$$V = \iiint\limits_V rdrd\varphi dz.$$

Сферические координаты

Сферические координаты r, θ, φ связаны с прямоугольными координатами x, y, z при помощи формул (рис. 34)

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

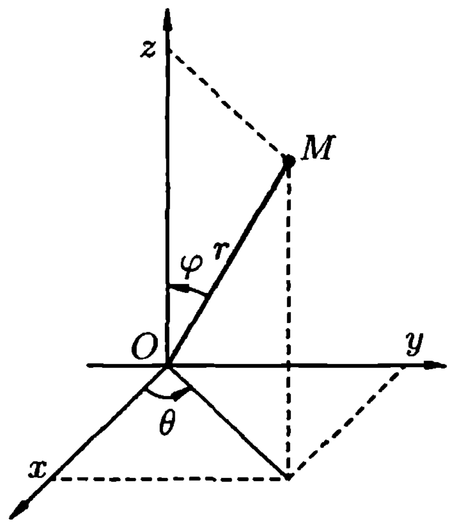


Рис. 34

В общем случае переменные r, θ, φ изменяются в пределах $r \in [0, +\infty)$, $\varphi \in$ $\in [0, \pi]$, $\theta \in [0; 2\pi)$. Формула перехода к сферическим координатам имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_V f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) r^2 \sin\varphi\, drd\theta d\varphi.$$

Положив $f(x, y, z) \equiv 1$, получим формулу для объема тела в сферических координатах:

$$v = \iiint\limits_V r^2 \sin\varphi\, drd\theta d\varphi.$$

Приложения тройного интеграла

1. Объем v тела V находится по формуле:

$$v = \iiint\limits_V dxdydz.$$

2. Масса m тела V с данной плотностью $\rho(x, y, z)$, где функция $\rho(x, y, z)$ непрерывна, вычисляется по формуле

$$m = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

3. Статические моменты M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} тела V относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz соответственно равны

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\rho(x, y, z)\, dxdydz, \quad M_{xz} = \iiint\limits_V y\rho(x, y, z)\, dxdydz,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\rho(x, y, z)\, dxdydz,$$

где $\rho = \rho(x, y, z)$ — плотность тела V.

4. Координаты центра тяжести тела V с массой m определяются по формулам

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m},$$

или, более подробно:

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\,dxdydz, \quad y_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\,dxdydz.$$

В частности, если $\rho \equiv \rho_0$ (тело однородно), эти формулы упрощаются:

$$x_c = \frac{1}{v}\iiint\limits_V x\,dxdydz, \quad y_c = \frac{1}{v}\iiint\limits_V y\,dxdydz, \quad z_c = \frac{1}{v}\iiint\limits_V z\,dxdydz,$$

где v — объем тела V.

5. Моменты инерции тела V с плотностью $\rho(x,y,z)$ относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам

$$J_{xy} = \iiint\limits_V z^2\rho(x,y,z)\,dv, \quad J_{yz} = \iiint\limits_V x^2\rho(x,y,z)\,dv,$$

$$J_{xz} = \iiint\limits_V y^2\rho(x,y,z)\,dv.$$

Моменты инерции J_x, J_y и J_z тела V относительно координатных осей Ox, Oy и Oz соответственно находятся по формулам

$$J_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dv, \quad J_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dv,$$

$$J_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dv.$$

3.4.1. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V x^2yz\,dxdydz,$$

где V — область, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

◐ Область V (рис. 35) достаточно просто устроена, поэтому данный тройной интеграл можно вычислить, используя произвольный порядок интегрирования. Традиционно проектируют область V на плоскость Oxy, принимая полученную проекцию в качестве области D (на рис. D — треугольник AOB). Прямая, параллельная оси Oz, пересекает границу V в двух точках. Аппликата первой точки равна нулю (точка входа лежит

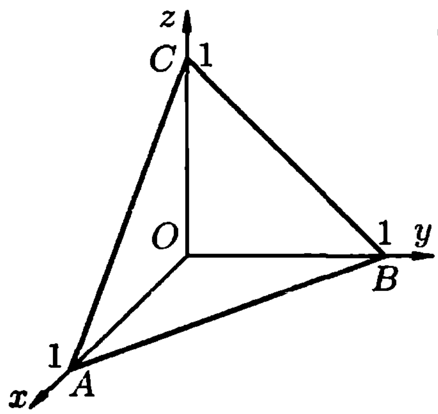


Рис. 35

на плоскости Oxy, т. е. $z = 0$), аппликата второй точки равна $z = 1 - x - y$ (поскольку точка выхода из области V лежит на плоскости $z = 1 - x - y$). Таким образом,

$$J = \iiint\limits_V x^2yz\,dxdydz = \iint\limits_D x^2y\,dxdy \int\limits_0^{1-x-y} z\,dz = \frac{1}{2}\iint\limits_D x^2y(1-x-y)^2\,dxdy.$$

Двойной интеграл приводим к повторному известным уже способом, поэтому детали опускаем.

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2\,dx \int\limits_0^{1-x} y(1-x-y)^2\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2\,dx \int\limits_0^{1-x} y(1+x^2+y^2-2x-2y+2xy)\,dy = \ldots = \frac{1}{2520}. \quad \bullet$$

Вычислить следующие тройные интегралы в прямоугольных координатах:

3.4.2. $\iiint\limits_V (x+y+z)\,dxdydz$, где V — куб, ограниченный плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

3.4.3. $\iiint\limits_V (1-y)xz\,dxdydz$, где V ограничена плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

3.4.4. $\iiint\limits_V x^2y^2z\,dxdydz$, где V — параллелепипед, ограниченный плоскостями $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 2$, $z = 5$.

3.4.5. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, где V ограничена координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = 1$.

3.4.6. $\iiint\limits_V x\,dxdxdz$, где V ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями $z = 0$ и $z = 3$.

3.4.7. $\iiint\limits_V xyz\,dxdxdz$, где V ограничена координатными плоскостями, сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и расположена в первом октанте.

3.4.8. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V (x^2 + y^2)\,dxdydz,$$

если V ограничена плоскостью $z = 2$ и параболоидом $2z = x^2 + y^2$.

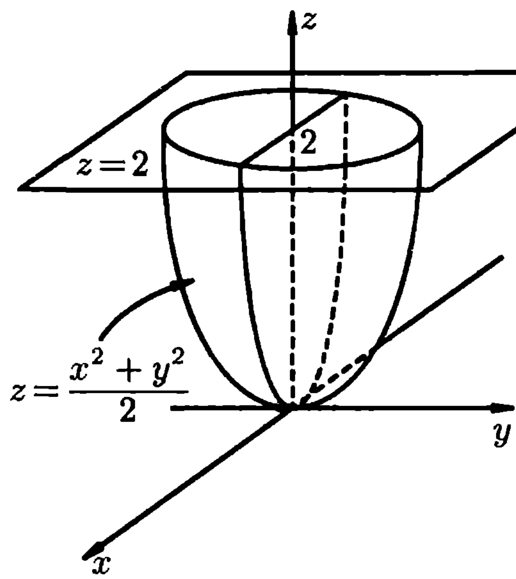


Рис. 36

◐ Область V ограничена сверху плоскостью $z = 2$, а снизу параболоидом $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ (рис. 36). Переходим к цилиндрическим координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. При этом подынтегральная функция преобразуется к виду $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$. Таким образом,

$$J = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\,dxdydz = \iiint\limits_V r^3 dr d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3\,dr \int\limits_{\frac{r^2}{2}}^{2} dz =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \int\limits_0^2 r^3\,dr \left(z\Big|_{\frac{r^2}{2}}^{2} \right) = 2\pi \int\limits_0^2 \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) r^3\,dr = \frac{16}{3}\pi. \quad \bullet$$

Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить данные тройные интегралы:

3.4.9. $\iiint\limits_V dxdydz$, где V — ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, конусом $x^2 + y^2 = z^2$ и содержит точку $(0, 0, R)$.

3.4.10. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$, преобразовав сначала к тройному интегралу.

3.4.11. $\int\limits_0^{2r} dx \int\limits_{\sqrt{-2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz$, приведя сначала к тройному интегралу.

3.4.12. Вычислить повторный интеграл

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\,dz.$$

○ Преобразуем повторный интеграл в тройной

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz,$$

для чего, исследуя пределы интегрирования в повторном интеграле, восстановим область интегрирования V. Она ограничена снизу плоскостью $z=0$, т. е. плоскостью Oxy, а сверху — поверхностью $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, т. е. верхней частью сферы $x^2+y^2+z^2=1$. Область D лежит в плоскости Oxy и ограничена снизу прямой $y=0$ (осью Ox) и сверху линией $y=\sqrt{1-x^2}$, т. е. верхней полуокружностью $x^2+y^2=1$. Наконец, проекция D на ось Ox — это отрезок $[0,1]$. По названным поверхностям построим чертеж области V (рис. 37), а по соответствующим линиям — область D (рис. 38).

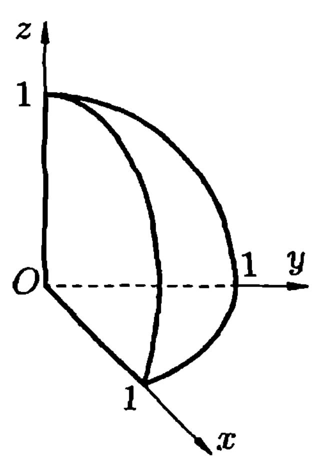


Рис. 37

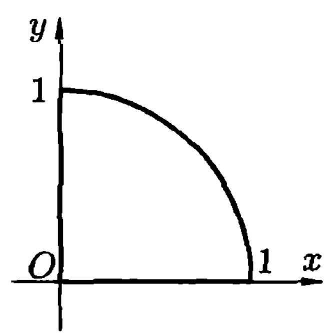


Рис. 38

Исходя из вида подынтегральной функции и вида области интегрирования, делаем вывод о целесообразности перехода к сферическим координатам: $x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$. При этом $dxdydz = r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\theta$, $0\leqslant r\leqslant 1$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Подынтегральная функция равна $x^2 + y^2 + z^2 = r^2(\sin^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi) = r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2$. Таким образом,

$$J = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 r^4\,dr =$$

$$= -\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{5}r^5\Big|_0^1 = \frac{\pi}{10}. \quad \bullet$$

Вычислить повторные интегралы:

3.4.13. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz.$

3.4.14. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_{xy}^{x+y} dz.$

3.4.15. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz.$

3.4.16. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz.$

3.4.17. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a \rho\,d\rho \int\limits_\rho^{a+\sqrt{a^2-\rho^2}} dz.$

3.4.18. Вычислить объем тела ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 22$ и поверхностью параболоида $9z = x^2 + y^2$.

○ Тело V расположено над плоскостью Oxy между полусферой $z_2 = \sqrt{22 - x^2 - y^2}$ и параболоидом $z_1 = \frac{1}{9}(x^2 + y^2)$ (рис. 39).

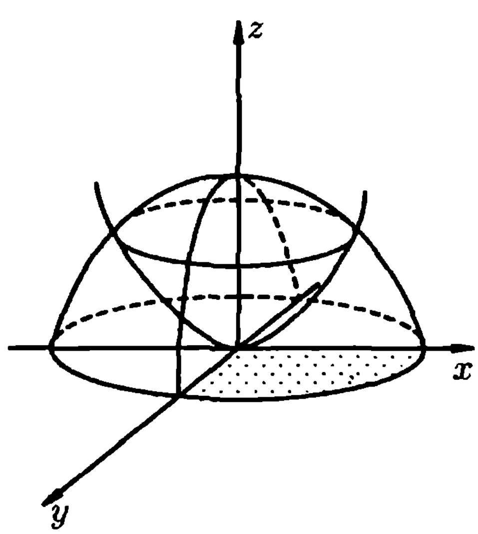


Рис. 39

Объем v тела V вычислим по формуле

$$v = \iiint\limits_V dxdydz.$$

Из симметрии тела V относительно плоскостей Oxy и Oyz заключаем, что удобно перейти к цилиндрическим координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ и вычислить объем четвертой части V, а результат умножить на 4.

$$v = 4\iiint\limits_{\frac{V}{4}} r\,drd\varphi dz = 4\iint\limits_{D} r\,drd\varphi\int\limits_{z_1}^{z_2} dz =$$

$$= 4\iint\limits_{D} r\,drd\varphi\left(\sqrt{22-r^2}-\frac{r^2}{9}\right) = 4\iint\limits_{D}\left(\sqrt{22-r^2}-\frac{r^2}{9}\right) r\,drd\varphi.$$

Для дальнейших вычислений надо найти область D — проекцию на плоскость Oxy пространственной области V. Для этого решим систему

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 22, \\ x^2+y^2 = 9z \end{cases} \Rightarrow z^2+9z = 22 \Rightarrow z = 2, z = -11.$$

Подставляя $z = 2$ ($z = -11$ не подходит, т.к. $z \geqslant 0$) во второе уравнение системы, найдем, что сфера и параболоид пересекаются в плоскости $z = 2$ по окружности $x^2+y^2 = 18$. Следовательно, область D это четверть круга $x^2+y^2 \leqslant 18$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$), или, в полярных координатах: $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{18}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$v = 4\iint\limits_{D}\left(\sqrt{22-r^2}-\frac{r^2}{9}\right) r\,drd\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{18}}\left(r\sqrt{22-r^2}-\frac{r^3}{9}\right) dr =$$

$$= 4\cdot\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{(22-r^2)^3}-\frac{r^4}{36}\right)\Big|_0^{\sqrt{18}} =$$

$$= \left(\frac{22\sqrt{22}-8}{3}-9\right)\cdot 2\pi = \frac{2(22\sqrt{22}-35)}{3}\pi. \quad \bullet$$

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

3.4.19. $z = x^2+y^2$, $z = 2(x^2+y^2)$, $y = x$, $y = x^2$.

3.4.20. $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $3z = x^2+y^2$.

3.4.21. $4az = 16-x^2-y^2$, $z = 4-x-y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3.4.22. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1} = 1$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = z$.

3.4.23. Вычислить координаты центра тяжести верхней половины шара радиуса R с центром в начале координат при условии, что его плотность постоянна и равна ρ_0.

◐ Сделаем сначала рисунок (рис. 40).

Воспользуемся формулами

$$x_c = \frac{1}{v}\iiint\limits_V x\,dxdydz, \quad y_c = \frac{1}{v}\iiint\limits_V y\,dxdydz, \quad z_c = \frac{1}{v}\iiint\limits_V z\,dxdydz,$$

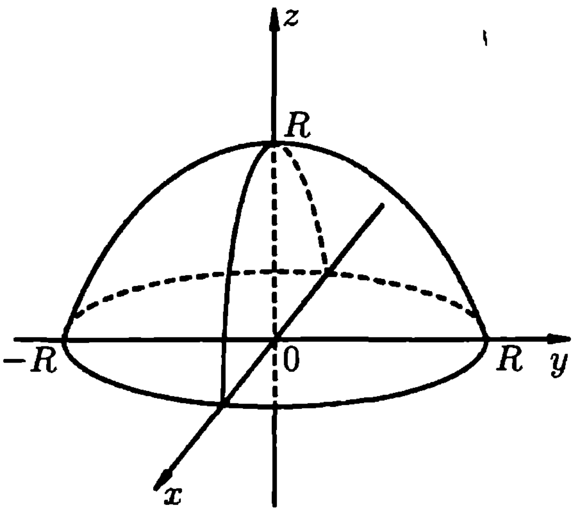


Рис. 40

где $v = \dfrac{2\pi R^3}{3}$ — объем полушара.

Подынтегральные функции x и y в числителях первых двух дробей нечетные, а область интегрирования V симметрична относительно соответствующих плоскостей $y = 0$ и $x = 0$. Поэтому $x_c = y_c = 0$. К этому же выводу приходим, исходя из определения x_c и y_c и симметрии тела относительно координатных плоскостей Oyz и Oxz. Остается вычислить

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz.$$

Для этого переходим к сферическим координатам так же, как в примере 3.4.12. Получаем

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz = \iiint\limits_V r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi\, drd\theta d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\varphi\, d\varphi \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\theta \cdot \int\limits_0^{R} r^3\, dr = \left(-\frac{\cos 2\varphi}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \left(\theta\bigg|_0^{2\pi}\right) \cdot \left(\frac{r^4}{4}\bigg|_0^{R}\right) = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Следовательно, $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = \dfrac{1}{v}\iiint\limits_V z\,dxdydz = \dfrac{\frac{\pi R^4}{4}}{2\frac{\pi R^3}{3}} = \dfrac{3R}{8}$. ●

3.4.24. Вычислить координаты центра тяжести тела, ограниченного параболоидом $4x = y^2 + z^2$ и плоскостью $x = 2$.

3.4.25. Вычислить координаты центра тяжести тела, ограниченного конусом

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25}$$

и плоскостью $z = 5$.

3.4.26. Вычислить координаты центра тяжести тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$, плоскостью $x + y = 5$ и координатными плоскостями.

3.4.27. Вычислить координаты центра тяжести тела, ограниченного эллипсоидом
$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{36}=1$$
и координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ ($x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$).

3.4.28. Вычислить момент инерции прямого кругового цилиндра радиуса 4 и высоты 6 относительно диаметра сечения, проходящего через центр симметрии цилиндра; плотность цилиндра постоянна и равна ρ_0.

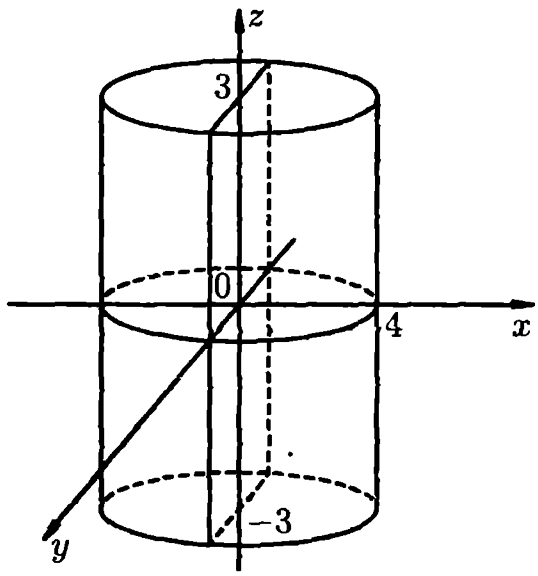


Рис. 41

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, как обозначено на рис. 41: ось цилиндра расположена на оси Oz, среднее сечение цилиндра лежит в плоскости Oxy. Тогда задача сводится к вычислению J_x — момента инерции цилиндра относительно оси Ox. Используем формулу
$$J_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\rho_0\,dv,$$
где V — цилиндр: $x^2+y^2\leqslant 16$, $-3\leqslant z\leqslant 3$. Перейдем к цилиндрическим координатам: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, $dxdydz=r\,drd\varphi dz$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant r\leqslant 4$, $-3\leqslant z\leqslant 3$. Отсюда $y^2+z^2=r^2\sin^2\varphi+z^2$ и, стало быть,
$$J_x=\rho_0\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-3}^{3}dz\int\limits_0^4(r^2\sin^2\varphi+z^2)r\,dr=$$
$$=\rho_0\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-3}^{3}dz\left(\frac{r^4}{4}\sin^2\varphi+\frac{z^2r^2}{2}\right)\Big|_0^4=$$
$$=\rho_0\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-3}^{3}(64\sin^2\varphi+8z^2)\,dz=\rho_0\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left[32(1-\cos2\varphi)z+\frac{8z^3}{3}\right]\Big|_{-3}^{3}=$$

$$= 48\rho_0 \int\limits_0^{2\pi} [4(1 - \cos 2\varphi) + 3]\, d\varphi = 48\rho_0 \left(7\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 672\rho_0\pi.$$

Попробуйте взять интеграл в другом порядке:

$$\rho_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{4} r\, dr \int\limits_{-3}^{3} (r^2 \sin^2\varphi + z^2)\, dz.$$ ●

3.4.29. Вычислить момент инерции прямого цилиндра, высота которого равна H и радиус основания R, относительно оси, содержащей диаметр основания цилиндра.

3.4.30. Найти момент инерции круглого конуса, высота которого равна H, а радиус основания R, относительно диаметра основания.

3.4.31. Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей тела, ограниченного плоскостями $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5}$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3.4.32. Вычислить объем v и массу m тела V, ограниченного конусом $x^2 + y^2 = z^2$ и плоскостью $z = 1$, если его плотность $\rho(x, y, z)$ пропорциональна координате z с коэффициентом пропорциональности k, $k > 0$.

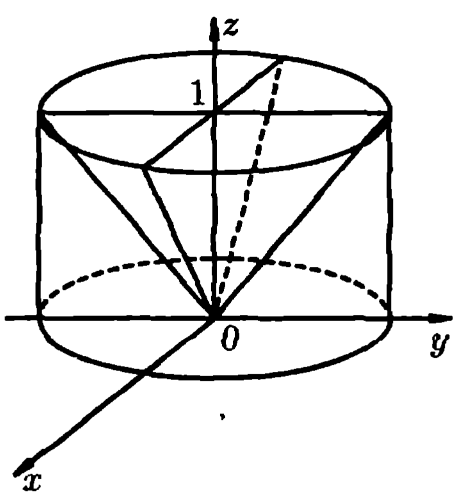


Рис. 42

❍ Требуемые величины вычислим в цилиндрических координатах: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, $dxdydz = r\,drd\varphi dz$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, $0 \leqslant r \leqslant 1$ (рис. 42):

$$v = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} r\, dr \int\limits_r^{1} dz = \varphi\Big|_0^{2\pi} \int\limits_0^{1} (1-r) r\, dr = 2\pi\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3};$$

$$m = k \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} r\, dr \int\limits_r^{1} z\, dz = k \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \int\limits_0^{1} \frac{z^2}{2}\Big|_r^1 r\, dr = \pi k \int\limits_0^{1} (r - r^3)\, dr = \frac{\pi k}{4}.$$ ●

3.4.33. Вычислить массу прямоугольного параллелепипеда $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$, если плотность в точке (x, y, z) пропорциональна сумме координат этой точки.

3.4.34. Определить массу шара радиуса R, плотность которого пропорциональна расстоянию от центра шара, причем на расстоянии единицы от центра плотность равна двум.

3.4.35. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z = h$ и

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

3.4.36. Найти массу сферического слоя между сферами $x^2+y^2+z^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

Дополнительные задания

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

3.4.37. $z = x + y$, $z = xy$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

3.4.38. $x^2 + z^2 = a^2$, $x + y = \pm a$, $x - y = \pm a$.

3.4.39. $az = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $a > 0$.

3.4.40. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2az$, $x^2 + y^2 = z^2$.

3.4.41. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x - 3y - 12 = 0$, $2z = y^2$.

3.4.42. $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \dfrac{x^3}{a^2}$, $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.

3.4.43. $z = 4 - y^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$, $z = 0$.

3.4.44. $z = \dfrac{17}{2} - x^2 - y^2$, $z = \dfrac{15}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$.

3.4.45. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{255}}$.

3.4.46. $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 60$, $z = 1$.

3.4.47. $x^2 + y^2 = y$, $x^2 + y^2 = 4y$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.

3.4.48. $x^2 + y^2 = 18$, $x = \sqrt{3y}$, $z = \dfrac{10y}{11}$, $x = 0$, $z = 0$.

Вычислить повторные интегралы:

3.4.49. $$\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} dy \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz.$$

3.4.50. $$\int\limits_{-2}^{2} dz \int\limits_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} dy \int\limits_{\frac{z^2+y^2}{2}}^{2} (z^2 + y^2)\, dx.$$

3.4.51. $$\int\limits_{-a}^{a} dy \int\limits_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dz \int\limits_{\frac{h}{a^2}(y^2+z^2)}^{h} \sqrt{y^2+z^2}\, dx.$$

3.4.52. $$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \sqrt{z}\, dz.$$

Вычислить тройные интегралы:

3.4.53. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$, где область V задана неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2}$, $0 \leqslant z \leqslant a$.

3.4.54. $\iiint\limits_V xyz^2\, dxdydz$, где V лежит в I-м октанте и ограничена единичной сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$.

3.4.55. $\iiint\limits_V 2y^2e^{xy}\, dxdydz$, где V ограничена плоскостями $x=0$, $y=1$, $y=x$, $z=0$, $z=1$.

3.4.56. $\iiint\limits_V x\, dxdydz$, где V ограничена плоскостями $x=1$, $y=0$, $y=10x$, $z=0$ и параболоидом $z=xy$.

3.4.57. $\iiint\limits_V x^2z\sin(xyz)\, dxdydz$, где V ограничена плоскостями $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=\pi$ $z=0$, $z=1$.

3.4.58. $\iiint\limits_V 8y^2ze^{xyz}\, dxdydz$, где V ограничена плоскостями $x=-1$, $x=0$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=1$.

3.4.59. $\iiint\limits_V (x+y+z)\, dxdydz$, где V задана неравенствами $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$.

3.4.60. $\iiint\limits_V \rho\sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta$, где V задана неравенствами $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

3.4.61. $\int\limits_V x\, dxdydz$, где V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=h$, $x+z=a$.

3.4.62. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4}$, где V ограничена плоскостями $z=0$, $z=8\left(1-\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}\right)$, $x=0$, $y=0$.

Вычислить массы однородных тел, ограниченных поверхностями:

3.4.63. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.

3.4.64. $x + y + z = a$, $x + y + z = 2a$, $x + y = z$, $x + y = 2z$.

3.4.65. $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, $z = \pm h$.

3.4.66. $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 2\dfrac{x}{a}$, $x = a$.

Найти координаты центра тяжести однородных тел, ограниченных поверхностями:

3.4.67. Плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$ и цилиндром $z = \dfrac{y^2}{2}$.

3.4.68. Плоскостями $z = 0$, $x + z = 6$ и цилиндрами $z = \sqrt{x}$ и $z = 2\sqrt{x}$.

3.4.69. Сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ и параболоидом $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2a}$ (над ним).

3.4.70. Сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и конусом $z\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$ (над конусом).

Найти моменты инерции однородных тел с данной массой M:

3.4.71. Прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c относительно каждого из ребер и относительно своего центра тяжести.

3.4.72. Шара радиуса R относительно прямой, касательной к шару.

3.4.73. Эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

относительно каждой из трех своих осей.

3.4.74. Найти статические моменты относительно координатных плоскостей и координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $z = 3 - x^2 - y^2$ и плоскостью $z = 0$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

3.4.75. Плоскостями $x=0$, $x+y=2$, $x-y=2$ и цилиндрами $z=\ln(x+2)$ и $z = \ln(6 - x)$.

3.4.76. Плоскостью $z = x + y$ и параболоидом $z = x^2 + y^2$.

3.4.77. Плоскостью $2x + z = 2$ и параболоидом $(x - 1)^2 + y^2 = z$.

3.4.78. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

3.4.79. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xy$.

3.4.80. Сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 3z$.

3.4.81. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz$.

Вычислить тройные интегралы:

3.4.82. $\iiint\limits_V y^2(e^{xy} - e^{-xy})\,dxdydz$, V ограничена поверхностями $x = 0$, $y = -2$, $y = 4x$, $z = 0$, $z = 2$.

3.4.83. $\iiint\limits_V (y^2 + z^2)\,dxdydz$, V ограничена плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, $z = x + y$.

3.4.84. $\iiint\limits_V xy^2z^3\,dxdydz$, V ограничена

3.4.85. $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2}\right) dxdydz$, V: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

3.4.86. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1 + \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, V: $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

3.4.87. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x$.

3.4.88. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2z^4$.

3.4.89. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)^2$.

3.4.90. $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3z$.

Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей однородных тел, ограниченных поверхностями:

3.4.91. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

3.4.92. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}$ $(a > 0)$.

3.4.93. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $y = \frac{b}{a^2}x^2$, $z = 0$, $z = \frac{h}{b}(b - y)$ $(a > 0,\ b > 0,\ h > 0)$.

3.4.94. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $z = \frac{h}{a^2}(y^2 - x^2)$, $z = 0$, $y = \pm a$.

Найти координаты центра тяжести однородных тел, ограниченных поверхностями:

3.4.95. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

3.4.96. $x^2 + y^2 = z$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3.4.97. Найти момент инерции части параболоида $y^2 + z^2 = 2cx$, отсеченной плоскостью $x = c$, относительно оси Ox (массу принимать, равной единице).

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\,dx.$$

2. Найти массу треугольника OAB, если $O(0,0)$, $A(1,-1)$, $B(1,1)$, а плотность равна $\rho(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.

3. Найти объем тела, ограниченного плоскостью Oxy, цилиндром $x^2 + y^2 = 4x$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ (внутреннего по отношению к цилиндру).

4. Найти площадь поверхности $z = \dfrac{xy}{a}$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

5. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V x\,dv,$$

где V — область, ограниченная поверхностями $x = 1$, $y = 0$, $y = 10x$, $z = 0$, $z = xy$.

Вариант 2

1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy,$$

если область D ограничена линиями $y = 0$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

2. Вычислить интеграл

$$\iint_D r^2 \sin\varphi \cdot r\,drd\varphi,$$

где область D ограничена линиями $r = R$, $r = 2R\sin\varphi$.

3. Вычислить массу плоской фигуры, ограниченной лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, если ее плотность равна $\rho(x,y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Найти моменты инерции однородного треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 2$, $2x + y = 4$, $x = 0$, относительно координатных осей.

5. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V xy^2 e^{xyz}\,dxdydz,$$

где V — тело, ограниченное поверхностями $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 1$, $z = 5$.

Вариант 3

1. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_D r^3\,drd\varphi,$$

если область D ограничена лемнискатой $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ и лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_0^a dy \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^a dy \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^{2a} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,dx.$$

3. Найти массу пластины D: $(x-3)^2 + y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 3$, если ее плотность в точке (x,y) равна $|y|$.

4. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V y^2 x \cos xyz\,dxdydz,$$

если D — тело, ограниченное поверхностями $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 3$, $z = 1$, $z = 4$.

5. Вычислить массу тела, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$, если плотность в точке (x,y,z) равна

$$\rho(x,y,z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^3}.$$

Вариант 4

1. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_D r^3\,drd\varphi,$$

если D имеет вид $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[4]{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi}}$.

2. Вычислить площадь части поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 81$, заключенную между плоскостями $y = -5$ и $y = 5$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$(x+y-3)^2 + (2x-3y+5)^2 = 49.$$

4. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V \frac{dx}{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\right)^4},$$

если тело V ограничено поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$.

5. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V 63(1 + 2\sqrt{y})\, dv,$$

где тело V ограничено поверхностями $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = 0$, $z = xy$.

❏

Глава 4. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА

Определение криволинейного интеграла первого рода

$\Rrightarrow$ Пусть в каждой точке гладкой кривой $L = AB$ в плоскости Oxy задана непрерывная функция двух переменных $f(x, y)$. Произвольно разобьем кривую L на n частей точками $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$. Затем на каждой из полученных частей $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ выберем любую точку $\overline{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ и составим сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i,$$

где $\Delta l_i = M_{i-1}M_i$ — длина дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$. Полученная сумма называется *интегральной суммой первого рода* для функции $f(x, y)$, заданной на кривой L.

Обозначим через d наибольшую из длин дуг $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ (таким образом, $d = \max\limits_i \Delta l_i$). Если при $d \to 0$ существует предел интегральных сумм S_n (не зависящий от способа разбиения кривой L на части и выбора точек $\overline{M}_i$), то этот предел называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(x, y)$ по кривой L и обозначается

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl \quad \text{или} \quad \int\limits_{AB} f(x,y)\,dl. \qquad \Lleftarrow$$

Можно доказать, что если функция $f(x, y)$ непрерывна, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl$$

существует. Криволинейный интеграл первого рода обладает свойствами, аналогичными соответствующим свойствам определенного интеграла (аддитивность, линейность, оценка модуля, теорема о среднем). Однако есть отличие:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x,y)\,dl,$$

т.е. криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления интегрирования.

Вычисление криволинейных интегралов первого рода

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла. А именно:

1. Если кривая L задана непрерывно дифференцируемой функцией $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, то

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx,$$

при этом выражение $dl = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$ называется дифференциалом длины дуги.

2. Если кривая L задана параметрически, т. е. в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t)$, $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Это равенство распространяется на случай пространственной кривой L, заданной параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. В этом случае, если $f(x, y, z)$ — непрерывная функция вдоль кривой L, то

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

3. Если плоская кривая L задана полярным уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, то

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi.$$

Приложения криволинейного интеграла первого рода

1. Если подынтегральная функция равна единице, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_L dl$$

равен длине S кривой L, т. е.

$$\int\limits_L dl = S.$$

2. Пусть в плоскости Oxy задана гладкая кривая L, на которой определена и непрерывна функция двух переменных $z = f(x,y) \geqslant 0$. Тогда можно построить цилиндрическую поверхность с направляющей L и образующей, параллельной оси Oz и заключенной между L и поверхностью $z = f(x,y)$. Площадь этой цилиндрической поверхности можно вычислить по формуле

$$S = \int\limits_L f(x,y)\,dl.$$

3. Если $L = AB$ — материальная кривая с плотностью, равной $\rho = \rho(x, y)$, то масса этой кривой вычисляется по формуле

$$m = \int_{AB} \rho(x, y)\, dl$$

(*физический смысл криволинейного интеграла первого рода*).

4. Статические моменты материальной кривой L относительно координатных осей Ox и Oy соответственно равны

$$M_x = \int_L y\rho(x, y)\, dl, \quad M_y = \int_L x\rho(x, y)\, dl,$$

где $\rho(x, y)$ — плотность распределения кривой L, а $x_c = \dfrac{M_y}{m}$, $y_c = \dfrac{M_x}{m}$ — координаты центра тяжести (центра масс) кривой L.

5. Интегралы

$$J_x = \int_L y^2\rho(x, y)\, dl, \quad J_y = \int_L x^2\rho(x, y)\, dl, \quad J_0 = \int_L (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dl$$

выражают моменты инерции кривой L с линейной плотностью $\rho(x, y)$ относительно осей Ox, Oy и начала координат соответственно.

4.1.1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{x}{y}\, dl,$$

где L — дуга параболы $y^2 = 2x$, заключенная между точками $(2, 2)$ и $(8, 4)$.

○ Найдем дифференциал дуги dl для кривой $y = \sqrt{2x}$. Имеем

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}, \quad dl = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}\, dx.$$

Следовательно, данный интеграл равен

$$\int_L \frac{x}{y}\, dl = \int_2^8 \frac{x}{\sqrt{2x}}\sqrt{1 + \frac{1}{2x}}\, dx = \int \frac{x\sqrt{1 + 2x}}{2x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^8 \sqrt{1 + 2x}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(1 + 2x)^{3/2}\Big|_2^8 = \frac{1}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}). \quad \bullet$$

4.1.2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x^2 + y^3)\, dl,$$

где L — контур треугольника ABO с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $O(0, 0)$ (рис. 43).

○ Поскольку

$$\int\limits_L (x^2+y^3)\,dl = \int\limits_{AB} (x^2+y^3)\,dl + \int\limits_{BO} (x^2+y^3)\,dl + \int\limits_{OA} (x^2+y^3)\,dl,$$

то остается вычислить криволинейный интеграл по каждому из отрезков AB, BO и OA:

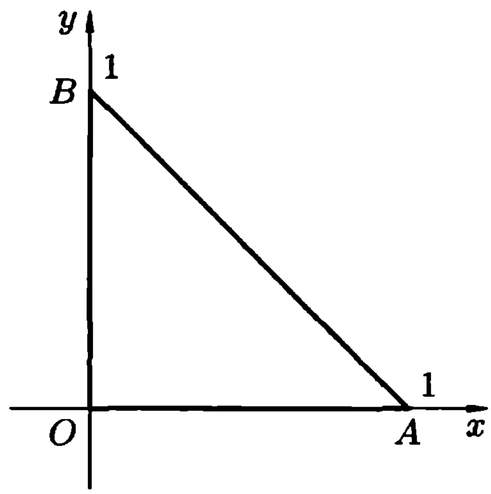


Рис. 43

1) (AB): так как уравнение прямой AB имеет вид $y = 1 - x$, то $dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{2}\,dx$. Отсюда, учитывая, что x меняется от 0 до 1, получим

$$\int\limits_{AB} (x^2+y^3)\,dl = \int\limits_0^1 [x^2+(1-x)^3]\sqrt{2}\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{(1-x)^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{12}.$$

2) (BO): рассуждая аналогично, находим $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $dl = dy$, откуда

$$\int\limits_{BO} (x^2+y^3)\,dl = \int\limits_0^1 y^3\,dy = \frac{1}{4}.$$

3) (OA): $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $dl = dx$.

$$\int\limits_{OA} (x^2+y^3)\,dl = \int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

4) Окончательно

$$\int\limits_L (x^2+y^3)\,dl = \frac{7\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7\sqrt{2}+7}{12} = \frac{7(\sqrt{2}+1)}{12}.$$ ●

4.1.3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl,$$

где L — окружность $x^2+y^2 = ax$ $(a > 0)$.

○ Введем полярные координаты $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда, поскольку $x^2 + y^2 = r^2$, уравнение окружности примет вид $r^2 = ar\cos\varphi$, т. е. $r = a\cos\varphi$, а дифференциал дуги

$$dl = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\,d\varphi.$$

При этом $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно,

$$\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl = a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi\,d\varphi = 2a^2.$$ ●

4.1.4. Вычислить криволинейный интеграл первого рода от функции с тремя переменными

$$\int\limits_L (5z - 2\sqrt{x^2 + y^2})\,dl,$$

где L — дуга кривой, заданной параметрически $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

○ Перейдем в подынтегральном выражении к переменной t. Имеем для подынтегральной функции:

$$5z - 2\sqrt{x^2 + y^2} = 5t - 2\sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = 3t.$$

Теперь выразим через t дифференциал dl:

$$dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,dt =$$
$$= \sqrt{(\cos^2 - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t) + (\sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t) + 1}\,dt =$$
$$= \sqrt{(\cos^2 t + \sin^2 t) + t^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + 1} = \sqrt{2 + t^2}\,dt.$$

Таким образом,

$$\int\limits_L (5z - 2\sqrt{x^2 + y^2})\,dl = \int\limits_0^\pi 3t\sqrt{2 + t^2}\,dt = \int\limits_0^\pi \frac{3}{2}\sqrt{2 + t^2}\,d(2 + t^2) =$$
$$= (2 + t^2)^{3/2}\Big|_0^\pi = \sqrt{(2 + \pi^2)^3} - 2\sqrt{2}.$$ ●

Вычислить следующие криволинейные интегралы первого рода:

4.1.5. $\int\limits_L xy\,dl$, где L — контур квадрата $|x| + |y| = a$.

4.1.6. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где L — отрезок OA и $O(0,0)$, $A(1,2)$.

4.1.7. $\int\limits_L \frac{dl}{x+y}$, где L — отрезок AB, $A(2,4)$, $B(1,3)$.

4.1.8. $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, где L — отрезок MN, $M(0,-2)$, $N(4,0)$.

4.1.9. $\int\limits_L y^2\,dl$, L — дуга циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

4.1.10. $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\,dl$, L — дуга цепной линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

4.1.11. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, L — правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

4.1.12. $\int\limits_L (x^2+y^2)^n\,dl$, L — окружность $x^2+y^2=a^2$.

4.1.13. $\int\limits_L xy\,dl$, L — четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

4.1.14. $\int\limits_L y\,dl$, L — дуга параболы $y^2 = 2px$, отсеченная параболой $x^2 = 2py$.

4.1.15. Вычислить площадь части боковой поверхности кругового цилиндра $x^2+y^2=R^2$, ограниченной снизу плоскостью Oxy, а сверху поверхностью $f(x,y) = R + \frac{x^2}{R}$.

◐ Искомая площадь вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_L \left(R + \frac{x^2}{R}\right) dl,$$

где L — окружность $x^2+y^2=R^2$. Поверхность цилиндра и поверхность $f(x,y) = R + \frac{x^2}{R}$ симметричны относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz, поэтому можно ограничиться вычислением интеграла при условиях $y \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, т.е. вычислить четверть искомой площади и результат умножить на 4. Имеем

$$y = \sqrt{R^2-x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

$$dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx = \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Следовательно,

$$S = 4\int\limits_0^R \left(R+\frac{x^2}{R}\right)\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = 4\int\limits_0^R \frac{R^2+x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx.$$

Получили определенный интеграл, который берем подстановкой $x = R\sin\varphi$, откуда

$$dx = R\cos\varphi\, d\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \sqrt{R^2 - x^2} = R\cos\varphi.$$

$$S = 4\int_0^R \frac{R^2 + (R\sin\varphi)^2}{R\cos\varphi} \cdot R\cos\varphi d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2 + R^2\sin^2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = 3\pi R^2. \quad \bullet$$

4.1.16. Найти массу четверти эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

расположенной в первой четверти, если линейная плотность в каждой точке пропорциональна ординате этой точки с коэффициентом k.

◐ Поскольку $p(x, y) = ky$, имеем

$$m = \int_L ky\, dl,$$

L — четверть эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

Переходим к параметрическим координатам эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Напомним, что $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — фокусное расстояние эллипса, а $\frac{c}{a} = \varepsilon$ — эксцентриситет эллипса. Находим

$$dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\, dt} =$$
$$= \sqrt{a^2(1 - \cos^2 t) + b^2\cos^2 t} = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\, dt =$$
$$= \sqrt{a^2\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \cos^2 t\right)} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\, dt.$$

Переходим к вычислению массы

$$m = kab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\, dt = -\frac{kab}{\varepsilon}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (\varepsilon\cos t)^2}\, d(\varepsilon\cos t).$$

Воспользуемся формулой

$$\int \sqrt{1 - u^2}\, du = \frac{1}{2}(u\sqrt{1 - u^2} + \arcsin u),$$

где $u = \varepsilon \cos t$. Получаем

$$m = -\frac{kab}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{2}\left[\varepsilon \cos t\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t} + \arcsin(\varepsilon \cos t)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ = -\frac{kab}{2\varepsilon}\left[-\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2} - \arcsin\varepsilon\right].$$

Учитывая, что $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{b}{a}$, получим окончательно

$$m = \frac{ka^2b}{2\sqrt{a^2-b^2}}\left(\frac{b}{a^2}\sqrt{a^2-b^2} + \arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right). \quad ●$$

4.1.17. Вычислить массу и координаты центра тяжести однородной дуги циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

◐ Имеем $x_c = \frac{M_y}{m}$, $y_c = \frac{M_x}{m}$, где

$$m = \int\limits_L dl, \quad M_y = \int\limits_L x\, dl, \quad M_x = \int\limits_L y\, dl.$$

Находим x', y' и dl по отдельности: $x' = a(1-\cos t)$, $y' = a\sin t$,

$$dl = \sqrt{a^2(1-2\cos t+\cos^2 t) + a^2\sin^2 t}\, dt = \\ = a\sqrt{1-2\cos t + (\cos^2 t + \sin^2 t)} = a\sqrt{2(1-\cos t)} = \\ = a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

Следовательно,

$$m = \int\limits_L dl = 2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\, dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

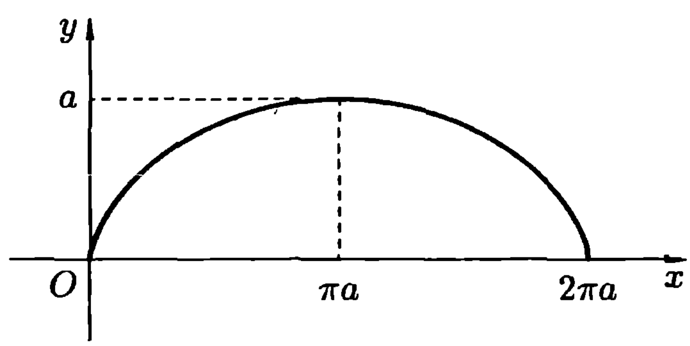


Рис. 44

Из рис. 44 видно, что циклоида симметрична относительно прямой $x = \pi a$, поэтому $x_c = \pi a$. Таким образом, M_y можно не вычислять, хотя, учитывая равенство

$$x_c = \frac{M_y}{m},$$

можно предположить, что $M_y = 8\pi a^2$. Предлагаем самостоятельно получить этот результат. Вычислим теперь M_x:

$$M_x = \int\limits_L y\,dl = \int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a^2\int\limits_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot a\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 4a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt = -8a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right) =$$

$$= -8a^2\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{32}{3}a^2.$$

Окончательно получаем:

$$m = 8a, \quad M_x = \frac{32}{3}a^2, \quad M_y = 8\pi a^2, \quad x_c = \pi a, \quad y_c = \frac{4}{3}a. \qquad \bullet$$

4.1.18. Найти координаты центра тяжести дуги однородной кривой

$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$$

от точки $A(0,a)$ до точки $B(b,h)$.

4.1.19. Найти координаты центра тяжести дуги циклоиды

$$x = a(t-\sin t), \quad y = a(1-\cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

4.1.20. Найти моменты инерции относительно координатных осей и начала координат четверти окружности $x^2+y^2 = a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Плотность распределения масс дуги постоянна и равна k.

○ Данная кривая (четверть окружности) симметрична относительно биссектрисы $y = x$ первого координатного угла. Отсюда заключаем, что J_x и J_y одинаковы, т. е.

$$J_x = J_y = \int\limits_L y^2\,dl = \int\limits_L x^2\,dl.$$

Переходя к параметрическим уравнениям окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, откуда $dl = a\,dt$, получаем

$$\int\limits_L x^2\,dl = a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \frac{a^3}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^3}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3}{4}.$$

Таким образом $J_x = J_y = \frac{\pi a^3}{4}$, $J_0 = J_x + J_y = \frac{\pi a^3}{2}$. ●

4.1.21. Вычислить массу четверти эллипса $x = 5\cos t$, $y = 4\sin t$, расположенную в первой четверти, если ее линейная плотность ρ равна y.

4.1.22. Найти массу контура эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

если его линейная плотность в каждой точке $M(x,y)$ равна $|y|$.

4.1.23. Найти массу первого витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, если плотность в каждой точке равна радиусу-вектору этой точки.

4.1.24. Найти момент инерции относительно оси Oz первого витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

Вычислить площади цилиндрических поверхностей, ограниченных снизу плоскостью Oxy, а сверху поверхностью $z = f(x,y)$, при условии, что известна направляющая L этой цилиндрической поверхности:

4.1.25. $f(x,y) = \sqrt{2x - 4x^2}$, $y^2 = 2x$.

4.1.26. $f(x,y) = \dfrac{xy}{2R}$, $x^2 + y^2 = R^2$.

4.1.27. $f(x,y) = 2 - \sqrt{x}$, $y^2 = \dfrac{4}{9}(x-1)^3$.

4.1.28. $f(x,y) = x$, $y = \dfrac{3}{8}x^2$ $(x \in [0,4])$.

4.1.29. Вычислить массу контура прямоугольника со сторонами, лежащими на прямых $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 2$, если $\rho(x,y) = xy$.

4.1.30. Вычислить массу дуги параболы $y^2 = 2x$, заключенной между точками $O(0,0)$ и $A(1,\sqrt{2})$, если $\rho(x,y) = xy$.

С помощью криволинейного интеграла I рода вычислить длины заданных дуг:

4.1.31. $ay^2 = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 5a$.

4.1.32. $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.

4.1.33. $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

4.1.34. $y = 1 - \ln\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

С помощью криволинейного интеграла I рода найти координаты центра тяжести кривых:

4.1.35. $y^2 = ax^3 - x^4$.

4.1.36. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $y \geqslant 0$.

4.1.37. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$.

4.1.38. $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $-a \leqslant x \leqslant a$.

Дополнительные задания

Вычислить данные интегралы I рода:

4.1.39. $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, где L задана уравнениями $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

4.1.40. $\int\limits_L \dfrac{dl}{x^2 + y^2 + z^2}$, где L — первый виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

4.1.41. $\int\limits_L (x+z)\,dl$, где L — дуга пространственной кривой, заданной параметрически $x = t$, $y = \dfrac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z = t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

4.1.42. Найти длину дуги конической винтовой линии $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$, заключенной между точками $O(0,0,0)$ и $A(a,0,a)$.

4.1.43. Найти декартовы координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1+\cos\varphi)$.

4.1.44. Найти декартовы координаты центра тяжести дуги логарифмической спирали $r = ae^{\varphi}$ от $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$ до $\varphi_2 = \pi$.

4.1.45. Вычислить
$$\int\limits_L |x+y|\,dl,$$
где L — контур треугольника ABC с вершинами $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$.

4.1.46. Вычислить интеграл $\int\limits_L \sqrt{2y^2+z^2}\,dl$, если L — окружность
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2, \\ x = y. \end{cases}$$

4.1.47. Вычислить площадь боковой поверхности параболического цилиндра $y = x^2$, ограниченного плоскостями $z = 0$, $z = 2x$, $x = 0$, $x = 1$.

4.1.48. Вычислить массу кривой $x = \ln(1+t^2)$, $y = 2\operatorname{arctg} t - t$ на участке от $t = 0$ до $t = 1$, если ее линейная плотность равна $\rho(x,y) = e^{-x}y$.

4.1.49. Вычислить массу четвертой части эллипса
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \leqslant 0,$$
если линейная плотность $\rho(x,y) = xy$.

4.1.50. Вычислить массу всей цепной линии $y = \dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, если ее линейная плотность $\rho(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$.

4.1.51. Вычислить
$$\int\limits_L (x-y)\,dl,$$
где L: $x^2+y^2 = ax$.

4.1.52. Вычислить
$$\int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}\,dl,$$
где L — линия, заданная уравнением $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $x \geqslant 0$ (половина лемнискаты).

4.1.53. Вычислить
$$\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dl,$$
где L — часть спирали Архимеда $r = 2\varphi$, заключенная внутри круга радиуса R с центром в начале координат.

Контрольные вопросы и более сложные задания

4.1.54. Вычислить
$$\int\limits_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\,dl,$$
где L — дуга астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, лежащая в первой четверти.

4.1.55. Вычислить
$$\int\limits_L |y|\,dl,$$
где L — дуга лемнискаты $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $x \geqslant 0$.

4.1.56. Вычислить
$$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl,$$
где L — полуокружность $x^2+y^2 = ax$, $y \geqslant 0$.

4.1.57. Найти длину пространственной кривой
$$y = \arcsin\frac{x}{4}, \quad z = \ln\frac{4-x}{4+x}$$
от точки $O(0,0,0)$ до точки $A(2,3,4)$.

4.1.58. Вычислить
$$\int\limits_L z\,dl,$$
где L — коническая винтовая линия $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

4.1.59. Найти массу дуги параболы $y^2 = 2px$, заключенной между точками $O(0,0)$ и $A\left(\frac{p}{2}, p\right)$, если ее линейная плотность равна $\rho(x,y) = y$.

4.1.60. Найти массу дуги кривой $x = at$, $y = \frac{at^2}{2}$, $z = \frac{at^3}{3}$, заключенной между точками $O(0,0,0)$ и $A\left(a, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}\right)$, если ее линейная плотность равна $\rho(x,y) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$.

4.1.61. Вычислить
$$\int\limits_L xyz\,dl,$$
где L — четверть окружности $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $x^2+y^2 = \frac{R^2}{4}$, $z \geqslant 0$, лежащая в первом октанте.

Согласно закону Био-Савара элемент тока действует на магнитную массу m с силой

$$F = \frac{mJ\sin\alpha\, dl}{r^2},$$

где J — ток, dl — элемент длины проводника, r — расстояние от элемента тока до магнитной массы, α — угол между направлением прямой, соединяющей магнитную массу и элемент тока, и направлением самого элемента тока. Эта сила F направлена по нормали к плоскости, содержащей элемент тока и точку, в которую помещена магнитная масса, направление силы определяется по правилу буравчика.

Опираясь на закон Био-Савара, решить следующие задачи:

4.1.62. Найти силу, с которой ток J в бесконечном прямолинейном проводнике действует на точечную магнитную массу m, находящуюся от проводника на расстоянии a.

4.1.63. По контуру, имеющему форму квадрата со стороной a, течет ток J. С какой силой этот ток действует на точечную магнитную массу m, находящуюся в центре квадрата?

4.1.64. С какой силой ток J, текущий по круговому контуру радиуса R, действует на точечную магнитную массу m, помещенную в точку P, лежащую на перпендикуляре, восстановленном в центре круга на расстоянии h от этого круга?

4.1.65. С какой силой ток J, текущий по замкнутому эллиптическому контуру, действует на точечную магнитную массу m, находящуюся в фокусе эллипса?

4.1.66. С какой силой ток J, текущий по бесконечному параболическому контуру, действует на точечную магнитную массу m, помещенную в фокусе параболы? Расстояние от вершины до фокуса равно $\frac{p}{2}$.

Вычислить площадь цилиндрических поверхностей, ограниченных снизу плоскостью Oxy, сверху данной поверхностью $z = f(x, y)$, при условии, что направляющая задана кривой L:

4.1.67. $f(x, y) = xy$, L — четверть эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

лежащая в первой четверти ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$).

4.1.68. $f(x, y) = y$, L — участок параболы

$$y^2 = 2px$$

от начала координат до точки (x_0, y_0).

4.1.69. $f(x, y) = x^2 + y^2$, L — прямолинейный отрезок, соединяющий точки $A(a, a)$ и $B(b, b)$.

4.1.70. $f(x,y) = ye^{-x}$, L — участок кривой

$$x = \ln(1+t^2), \quad y = 2\operatorname{arctg} t - t + 3,$$

заданной параметрически, между точками, соответствующими $t = 0$ и $t = 1$.

4.1.71. $f(x,y) = \frac{x}{y}$, L — дуга параболы $y = 2x$, лежащая между точками $(1, \sqrt{2})$ и $(2, 2)$.

4.1.72. $f(x,y) = y^3$, L — арка циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

§ 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

Определение криволинейного интеграла второго рода

$\Rrightarrow$ Пусть $L = AB$ — гладкая кривая, а $P(x,y)$ — некоторая функция, определенная в точках кривой L. Разобьем кривую L на n произвольных частей точками $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$. Далее на каждой из полученных дуг $\widehat{M_{i-1}M_i}$ выберем произвольную точку $\overline{M}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$, после чего составим произведение $P(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\ \Delta x_i$ значения функции $P(x,y)$ в точке $\overline{M}_i$ на проекцию $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ этой дуги на ось Ox. Складывая все такие произведения, получим сумму

$$S_{n,x} = \sum_{i=0}^{n} P(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\Delta x_i,$$

которая называется *интегральной суммой второго рода* для функции $P(x,y)$ по координате x.

Пусть теперь d — наибольшая из длин дуг $\widehat{M_{i-1}M_i}$. Если функция $P(x,y)$ непрерывна в точках кривой L, то при $d \to 0$ существует предел интегральных сумм $S_{n,x}$, не зависящий от способа разбиения кривой L на части и выбора точек $\overline{M}_i$. Этот предел называется *криволинейным интегралом второго рода* по координате x и обозначается

$$\int_L P(x,y)\,dx.$$

Аналогично определяется *криволинейный интеграл второго рода* по координате y, который обозначается

$$\int_L Q(x,y)\,dy,$$

где $Q(x,y)$ — непрерывная функция. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ Сумма криволинейных интегралов

$$\int_L P(x,y)\,dx \quad \text{и} \quad \int_L Q(x,y)\,dy$$

называется *полным криволинейным интегралом второго рода* и обозначается

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \qquad \Leftarrow$$

Криволинейные интегралы второго рода называются также криволинейными интегралами по координатам.

Криволинейный интеграл второго рода обладает теми же свойствами, что и определенный интеграл. В частности,

$$\int\limits_{BA} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

т. е. криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении направления интегрирования.

Вычисление криволинейных интегралов второго рода

Предположим, что кривая L задана в явном виде непрерывно дифференцируемой функцией $y = y(x)$, $x \in [a,b]$. Тогда

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \big[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\big]\,dx.$$

Если L задается параметрическими функциями $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha,\beta]$, то

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_\alpha^\beta \big[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big]\,dt.$$

Это равенство можно распространить и на пространственный случай (аргументы (x,y,z) функций P, Q, R для краткости опускаем):

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_\alpha^\beta \big(P\cdot x'(t) + Q\cdot y'(t) + R\cdot z'(t)\big)\,dt,$$

где (x,y,z), $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — параметрические уравнения кривой L.

Приложения криволинейного интеграла второго рода

Интеграл

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$$

можно представить в виде скалярного произведения векторов $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ и $\mathbf{ds} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy$:

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy = \int\limits_L \mathbf{F}(x,y)\cdot\mathbf{ds}.$$

В таком случае

$$\int\limits_L \mathbf{F}\cdot \mathbf{ds}$$

выражает работу переменной силы $\mathbf{F} = P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки $M = M(x, y)$ вдоль кривой $L = AB$ от точки A до точки B.

При $A = B$ кривая L замкнута, а соответствующий криволинейный интеграл по замкнутой кривой обозначается так:

$$\oint P\,dx + Q\,dy.$$

В этом случае направление обхода контура иногда поясняется стрелкой на кружке, расположенном на знаке интеграла.

Предположим, что в плоскости Oxy имеется односвязная область D (это значит, что в ней нет «дыр»), ограниченная кривой $L = \partial D$ (∂D — обозначение границы области D), а в области D и на ее границе ∂D функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными.

Теорема 4.1. Пусть A и B — произвольные точки области D, AmB и AnB — два произвольных пути (гладкие кривые), соединяющие эти точки (рис. 45). Тогда следующие условия равносильны:

1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ (условие Грина).
2. $\displaystyle\int\limits_{AmB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AnB} P\,dx + Q\,dy$ (криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования).
3. $\displaystyle\int\limits_{AnBmA} P\,dx+Q\,dy = 0$ (интеграл по любому замкнутому пути равен нулю).
4. $P\,dx + Q\,dy = dU$ (выражение $P\,dx + Q\,dy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U = U(x, y)$).

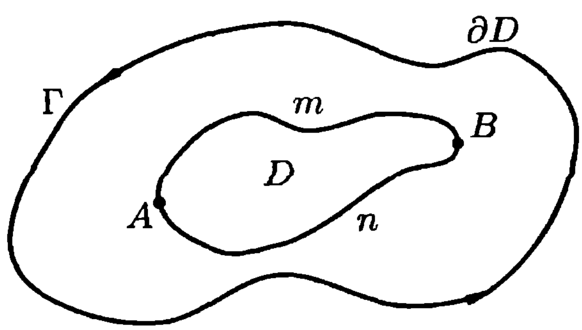


Рис. 45

В случае выполнения любого из равносильных условий предыдущей теоремы криволинейный интеграл по любой кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) из области D, можно вычислить при помощи формулы Ньютона

Лейбница

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\,dx + Q\,dy = U(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} = U(x_1,y_1) - U(x_0,y_0),$$

где $U(x,y)$ — некоторая первообразная для $P\,dx + Q\,dy$.

С другой стороны, первообразная $U(x,y)$ выражения $P\,dx + Q\,dy$ может быть найдена при помощи криволинейного интеграла

$$U(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy.$$

В этих же условиях на функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, а также на область D, имеет место *формула Грина*, позволяющая свести криволинейный интеграл по замкнутому контуру к двойному интегралу

$$\oint\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Здесь предполагается, что обход границы ∂D области D в криволинейном интеграле

$$\oint\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

совершается в положительном направлении, т. е. при таком обходе границы область D остается слева; для односвязной области это направление совпадает с направлением против часовой стрелки.

Заметим, что площадь $S = S(D)$ области D может быть вычислена при помощи криволинейного интеграла второго рода:

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

(эта формула получается из формулы Грина с $P = -\frac{1}{2}y$, $Q = \frac{1}{2}y$).

4.2.1. Даны функции $P(x,y) = 8x + 4y + 2$, $Q(x,y) = 8y + 2$ и точки $A(3,6)$, $B(3,0)$, $C(0,6)$. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{L} (8x + 4y + 2)\,dx + (8y + 2)\,dy,$$

где:

1) L — отрезок OA;

2) L — ломаная OBA;

3) L — ломаная OCA;

4) L — парабола, симметричная относительно оси Oy и проходящая через точки O и A;

5) проверить выполнимость условия Грина.

◐ Пути интегрирования, соответствующие п. п. 1)–4), изображены на рис. 46.

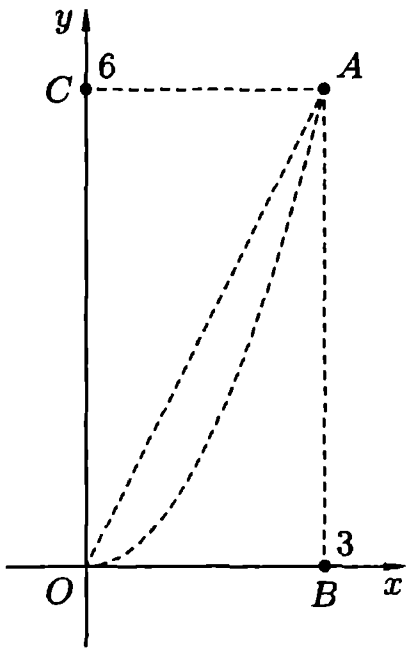


Рис. 46

1) Отрезок OA может быть записан в виде: $y = 2x$, $x \in [0, 3]$. Тогда $dy = 2\,dx$ и

$$\int\limits_{OA} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_0^3 \left[(8x + 4 \cdot 2x + 2)\,dx + (8 \cdot 2x + 2) \cdot 2\,dx\right] =$$

$$= \int\limits_0^3 (48x + 6)\,dx = (24x^2 + 6x)\Big|_0^3 = 234.$$

2) Используем свойство аддитивности, вычисляя отдельно интеграл по отрезкам OB и BA. Тогда:

а) OB: здесь $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, т. е. $dy = 0$, откуда

$$\int\limits_{OB} (8x + 4y + 2)\,dx + (8y + 2)\,dy = \int\limits_0^3 (8x + 2)\,dx = (4x^2 + 2x)\Big|_0^3 = 42.$$

б) BA: $x = 3$, $0 \leqslant y \leqslant 6$, т. е. $dx = 0$, и

$$\int\limits_{BA} (8x + 4y + 2)\,dx + (8y + 2)\,dy = \int\limits_0^6 (8y + 2)\,dy = (4y^2 + 2y)\Big|_0^6 = 156.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{OBA} (8x + 4y + 2)\,dx + (8y + 2)\,dy = 42 + 156 = 198.$$

3) Этот интеграл вычислим аналогично предыдущему.

а) OC: $x = 0$, (т. е. $dx = 0$), $0 \leqslant y \leqslant 6$, откуда

$$\int\limits_{OC} (8x + 4y + 2)\,dx + (8y + 2)\,dy = \int\limits_0^6 (8y + 2)\,dy = 156.$$

б) CA: $0 \leqslant x \leqslant 3$, $y = 6$, $dy = 0$, следовательно,

$$\int\limits_{CA} (8x + 4y + 2)\,dx + (8y + 2)\,dy = \int\limits_0^3 (8x + 26)\,dx = 114.$$

Окончательно

$$\int\limits_{OCA} (8x + 4y + 2)\,dx + (8y + 2)\,dy = 114 + 156 = 270.$$

4) Подставив координаты точки $A(3;6)$ в равенство $y = ax^2$ найдем уравнение данной параболы $y = \dfrac{2x^2}{3}$. При этом $0 \leqslant x \leqslant 3$ и $dy = \frac{4}{3}x\,dx$, откуда (путь OA по параболе обозначим $\overset{\frown}{OA}$)

$$\int\limits_{\overset{\frown}{OA}} (8x + 4y + 2)\,dx + (8y + 2)\,dy = \int\limits_0^3 \left[\left(8x + \frac{8x^2}{3} + 2\right) dx + \left(\frac{16x^2}{3} + 2\right) \frac{4}{3}x\,dx\right] =$$

$$= \int\limits_0^3 \left(\frac{64}{9}x^3 + \frac{8}{3}x^2 + \frac{32}{3}x + 2\right) dx = \left(\frac{16}{9}x^4 + \frac{8}{9}x^3 + \frac{16}{3}x^2 + 2x\right)\Bigg|_0^3 = 222.$$

5) Имеем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(8x + 4y + 2) = 4, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(8y + 2) = 0,$$

т. е. условие Грина не выполняется. Этот факт, а также вычисления в пунктах 1)–4) этой задачи показывают, что данный криволинейный интеграл второго рода зависит от пути интегрирования. ●

4.2.2. Даны функции $P(x, y) = y + 3$, $Q(x, y) = 8x + 7y + 6$ и точки $A(9, 4)$, $B(9, 0)$, $C(0, 4)$. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (y + 3)\,dx + (8x + 7y + 6)\,dy,$$

где:

1) L — отрезок OA;

2) L — ломаная OBA;

3) L — ломаная OCA;

4) L — парабола, соединяющая точки $O(0, 0)$ и $A(9, 4)$ и симметричная относительно оси Oy.

5) Проверить выполнение условия Грина.

4.2.3. Вычислить

$$\int\limits_L (4y+4)\,dx + (3x+3y+4)\,dy$$

по разным путям, соединяющим точки $O(0,0)$, $A(2,6)$, $B(2,0)$, $C(0,6)$:

1) $L = OA$;

2) $L = OCA$;

3) $L = OBA$;

4) L — дуга $\overset{\frown}{OA}$ параболы $y = \frac{3}{2}x^2$.

4.2.4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_L 2xy\,dx - x^2\,dy,$$

взятый вдоль различных путей, соединяющих точки $O(0,0)$, $A(2,1)$, $B(2,0)$, $C(0,1)$:

1) L — отрезок OA;

2) L — парабола с осью симметрии Oy, проходящая через O и A;

3) L — парабола, проходящая через O и A с осью симметрии Ox;

4) L — ломаная OBA;

5) L — ломаная OCA.

4.2.5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_L y^2\,dx + x^2\,dy,$$

где L — верхняя половина эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемая по ходу часовой стрелки.

❍ Воспользуемся параметрическими уравнениями эллипса: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0,\pi]$, т. е. $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = b\cos t\,dt$. Подставляя в интеграл и учитывая направление обхода (откуда следует, что t меняется от π до 0), получаем

$$\int\limits_L y^2\,dx + x^2\,dy = \int\limits_\pi^0 \left(-b^2\sin^2 t\cdot a\sin t + a^2\cos^2 t\cdot b\cos t\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^\pi ab^2\sin^2 t\cdot\sin t\,dt - \int\limits_0^\pi a^2b\cos^2 t\cdot\cos t\,dt =$$

$$= -ab^2\int\limits_0^\pi (1-\cos^2 t)\,d(\cos t) - ab^2\int\limits_0^\pi (1-\sin^2 t)\,d(\sin t) =$$

$$= -ab^2\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_0^\pi - a^2b\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Big|_0^\pi = \frac{4}{3}ab^2. \quad ●$$

4.2.6. Вычислить
$$\int\limits_L \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}},$$
где L — дуга кривой $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$, пробегаемая от точки $A(R, 0)$ к $B(0, R)$.

4.2.7. Вычислить
$$\int\limits_L xy\,dx,$$
где L — дуга синусоиды $y = \sin x$ от точки $(0, 0)$ до точки $(\pi, 0)$.

4.2.8. Вычислить
$$\int\limits_L x\,dy,$$
где L — отрезок прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ от точки $A(a, 0)$ до точки $B(0, b)$.

4.2.9. Вычислить
$$\int\limits_L (x^2 - y^2)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$$
вдоль эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемого в положительном направлении (против часовой стрелки).

4.2.10. Вычислить
$$\int\limits_L yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$
по дуге винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ при изменении t от 0 до 2π.

❍ Сначала найдем дифференциалы переменных: $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = a\cos t\,dt$, $dz = b\,dt$. Выразим подынтегральное выражение через t, сводя исходный интеграл к определенному:
$$\int\limits_L yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} \left(-a^2bt\sin^2 t + a^2bt\cos^2 t + ba^2\sin t\cos t\right) dt =$$
$$= a^2b \int\limits_0^{2\pi} \left(t\cos 2t + \frac{\sin 2t}{2}\right) dt =$$
$$= a^2b\left(t\cdot\frac{\sin 2t}{2}\bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin 2t\,dt - \frac{\cos 2t}{4}\bigg|_0^{2\pi}\right) = 0. \quad ●$$

4.2.11. Вычислить
$$\int\limits_L x\,dy - y\,dx,$$
где линия L — задана уравнениями $x = 2\sqrt{5}\cos^3 t$, $y = 4\sqrt{5}\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

4.2.12. Вычислить
$$\int\limits_L (x^2+y^2)^3\,dx$$
вдоль окружности $x^2+y^2=5$, пробегаемой в положительном направлении.

4.2.13. Вычислить
$$\int\limits_L (x^2-2xy^2+3)\,dx+(y^2-2x^2y+3)\,dy,$$
где L — дуга параболы $y=ax^2$, соединяющей точки $O(0,0)$ и $A(2,8)$.

4.2.14. Вычислить
$$\int\limits_L y\,dx+z\,dy+x\,dz,$$
где L — виток винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, пробегаемый в направлении убывания параметра.

4.2.15. Показать, что интеграл
$$\int\limits_{(0,0)}^{(10,10)} (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$$
не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки $(0,0)$ и $(10,10)$, и вычислить его.

○ Проверим условие Грина. Положим $P=x+y$, $Q=x-y$. Тогда
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=1,$$
и, значит, данный интеграл действительно не зависит от пути интегрирования. Для вычисления данного интеграла в качестве пути интегрирования возьмем простейший, т. е. отрезок, соединяющий точки $O(0,0)$ и $B(10,10)$. Отрезок OB можно задать так: $y=x$, $x\in[0,10]$. При этом $dy=dx$, и интеграл легко сводится к определенному интегралу
$$\int\limits_{(0,0)}^{(10,10)} (x+y)\,dx+(x-y)\,dy=\int\limits_0^{10}(x+x)\,dx=x^2\Big|_0^{10}=100. \quad ●$$

Проверить, что данные криволинейные интегралы не зависят от пути интегрирования и вычислить их:

4.2.16. $\displaystyle\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} (3x^2-3y)\,dx+(3y^2-3x)\,dy.$

4.2.17. $\displaystyle\int\limits_{(1,1)}^{(2,0)} (3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy.$

4.2.18. $\int\limits_{(0,0)}^{2,3} (x^3 - 3xy^2 + 2)\,dx - (3x^2y - y^2)\,dy.$

4.2.19. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L (x+1)\,dx + xyz\,dy + y^2z\,dz,$$

где L — отрезок, соединяющий точку $C(2,3,-1)$ с точкой $D(3,-2,0)$.

○ Составим параметрические уравнения отрезка CD, используя уравнения прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+1}{1}.$$

Отсюда $x = 2+t$, $y = 3-5t$, $z = -1+t$, $t \in [0,1]$. Далее, находим $dx = dt$, $dy = -5\,dt$, $dz = dt$, подставляем все нужные выражения в данный интеграл, обозначенный через J, и вычисляем определенный интеграл:

$$J = \int\limits_0^1 \big[(3+t)\,dt - 5(2+t)(3-5t)(-1+t)\,dt + (3-5t)^2(-1+t)\,dt\big] =$$

$$= \int\limits_0^1 (24 - 25t - 45t^2 + 50t^3)\,dt = 9. \quad \bullet$$

4.2.20. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L xy\,dx - y\,dy$$

вдоль кривой $L = CD$, соединяющей точки $C(4,0)$ и $D(0,2)$, если:

1) CD — отрезок прямой;
2) CD — парабола, симметричная относительно оси Ox;
3) CD — парабола, симметричная относительно оси Oy;
4) CD — дуга эллипса с центром в начале координат.

Вычислить простейшим образом данные интегралы от полных дифференциалов:

4.2.21. $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,dy + y\,dx.$

4.2.22. $\int\limits_{(0,1)}^{(3,4)} x\,dx + y\,dy.$

4.2.23. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)(dx+dy).$

4.2.24. $\int\limits_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},\ y \neq 0.$

4.2.25. Проверить, является ли выражение

$$\left(3x^2y + \frac{1}{y}\right)\,dx + \left(x^3 - \frac{x}{y^2}\right)\,dy$$

полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$ и если да, то найти эту функцию.

○ Обозначим $P = 3x^2y + \frac{1}{y}$, $Q = x^3 - \frac{x}{y^2}$. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 - \frac{1}{y^2}.$$

Таким образом, условие Грина $\left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ имеет место при $y \neq 0$. Следовательно, данное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, которая может быть найдена как криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(3x^2y + \frac{1}{y}\right)\,dx + \left(x^3 - \frac{x}{y^2}\right)\,dy,$$

где (x_0, y_0) — произвольная фиксированная точка плоскости Oxy, не лежащая на оси Ox (так как $y_0 \neq 0$). Положим $(x_0, y_0) = (0, 1)$, а в качестве пути интегрирования выберем путь $L = ABC$, изображенный на рис. 47. Тогда сокращенно можно написать

$$U(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} = \int\limits_{ABC} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC}.$$

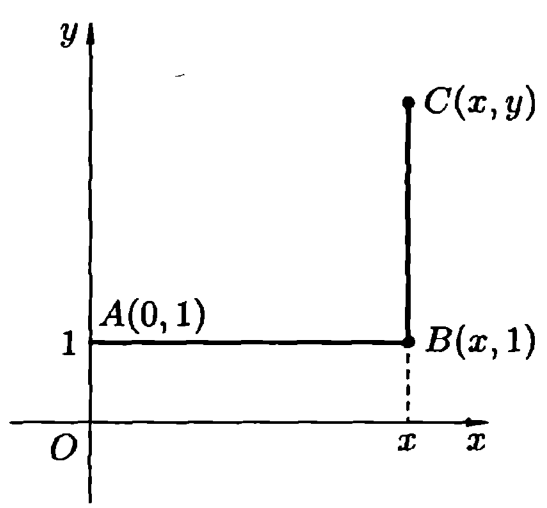


Рис. 47

Имеем: 1) (AB): $y = 1$, т.е. $dy = 0$ и

$$\int\limits_{AB} \left(3x^2y + \frac{1}{y}\right)\,dx + \left(x^3 - \frac{x}{y^2}\right)\,dy = \int\limits_{(0,1)}^{(x,1)} (3x^2 + 1)dx = x^3 + x.$$

2) (BC): x— фиксировано, следовательно, $dx = 0$, откуда

$$\int_{BC} \left(3x^2y + \frac{1}{y}\right) dx + \left(x^3 - \frac{x}{y^2}\right) dy = \int_{(x,1)}^{(x,y)} \left(x^3 - \frac{x}{y^2}\right) dy =$$

$$= \left(x^3y + \frac{x}{y}\right)\Big|_{(x,1)}^{(x,y)} = x^3y + \frac{x}{y} - x^3 - x.$$

3) Таким образом, $U(x, y) = x^3 + x + x^3y + \frac{x}{y} - x^3 - x = x^3y + \frac{x}{y}$. Проверка показывает, что действительно,

$$dU = d\left(x^3y + \frac{x}{y}\right) = \left(3x^2y + \frac{1}{y}\right) dx + \left(x^3 - \frac{x}{y^2}\right) dy. \qquad \bullet$$

Найдя первообразные данных подынтегральных выражений вычислить криволинейные интегралы:

4.2.26. $\displaystyle\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)\, dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\, dy.$

4.2.27. $\displaystyle\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x\, dy - y\, dx}{(x - y)^2},\ (y \neq x).$

4.2.28. $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(3,1)} \frac{(x + 2y)\, dx + y\, dy}{(x + y)^2},\ (x + y \neq 0).$

4.2.29. $\displaystyle\int_{(3,4)}^{(12,5)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x\right) dy.$

Вычислить криволинейные интегралы, взятые вдоль пространственных кривых:

4.2.30. $\displaystyle\int_L (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz$, где L — виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

4.2.31. $\displaystyle\oint_L y\, dx + z\, dy + x\, dz$, где L — окружность, заданная формулами $x = R\cos\alpha\cos t$, $y = R\cos\alpha\sin t$, $z = R\sin\alpha$ $(\alpha = \text{const})$.

Вычислить криволинейные интегралы от полных дифференциалов (предварительно найдя первообразную):

4.2.32. $\displaystyle\int_{(1,0,-3)}^{(6,4,8)} x\, dx + y\, dy - z\, dz.$ **4.2.33.** $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz.$

4.2.34. $\displaystyle\int\limits_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

4.2.35. С помощью формулы Грина преобразовать криволинейный интеграл

$$\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left[xy + \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\right] dy$$

в двойной и с его помощью вычислить интеграл по контуру прямоугольника $ABCD$ (рис. 48), где $A(1,1)$, $B(7,1)$, $C(7,4)$, $D(1,4)$.

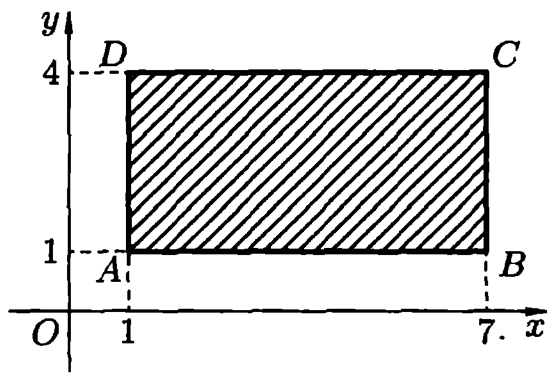


Рис. 48

○ Имеем $P = \sqrt{x^2+y^2}$, $Q = y\big(xy + \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\big)$, откуда

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y\left[y + \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right] =$$

$$= y\left[y + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = y\frac{y\sqrt{x^2+y^2}+1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = y^2.$$

Таким образом, в силу формулы Грина данный криволинейный интеграл равен двойному интегралу от y^2 по прямоугольнику $ABCD$, т. е.

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{ABCD}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_{ABCD} y^2\,dxdy = \int\limits_1^7 dx \int\limits_1^4 y^2\,dy =$$

$$= x\Big|_1^7 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_1^4 = 7 \cdot \frac{63}{3} = 147. \quad ●$$

4.2.36. Применяя формулу Грина, вычислить

$$\int\limits_L 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy,$$

где L — контур $\triangle ABC$, пробегаемый в положительном направлении, и $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$. Полученный результат проверить непосредственным вычислением криволинейного интеграла.

Найти функции по данным полным дифференциалам:

4.2.37. $dU = x^2\,dx + y^2\,dy$.

4.2.38. $dU = 4(x^2 - y^2)(x\,dx - y\,dy)$.

4.2.39. $dU = \dfrac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$.

4.2.40. $dU = \dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\,dx - \dfrac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$.

4.2.41. $dU = \left(\dfrac{x-2y}{(y-x)^2} + x\right)dx + \left(\dfrac{y}{(y-x)^2} - y^2\right)dy$.

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

4.2.42. $\oint\limits_L \dfrac{x\,dy + y\,dx}{x^2+y^2}$, где L — окружность $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

4.2.43. $\oint\limits_L (xy + y + x)\,dx + (yx - y + x)\,dy$, L — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

4.2.44. $\oint\limits_L (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy$, L — окружность $x^2 + y^2 = ax$.

4.2.45. $\oint\limits_L (2x + 3y)\,dx + (3x - 4y)\,dy$, где L состоит из дуги параболы $y = ax^2$, соединяющей точки $O(0,0)$ и $A(2,4)$, и отрезка прямой, соединяющей эти точки.

4.2.46. $\oint\limits_L (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$, где L — дуга верхней половины гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ от точки $A(-a, \sqrt{2}b)$ до точки $B(a, \sqrt{2}b)$ и отрезка прямой, соединяющей эти точки.

4.2.47. Вычислить площадь эллипса при помощи криволинейного интеграла.

◐ Запишем эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в параметрической форме $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, после чего воспользуемся формулой для площади области D

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{\partial D} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\sin t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab. \quad \bullet$$

Вычислить площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

4.2.48. Астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

4.2.49. Кардиоидой $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

4.2.50. Петлей декартова листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$.

4.2.51. Кривой $(x+y)^3 = axy$.

4.2.52. Петлей $(x+y)^4 = x^2y$.

4.2.53. Лемнискатой Бернулли $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$.

4.2.54. Петлей линии $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = xy$.

4.2.55. Вычислить работу силового поля $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки вдоль верхней половины эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

из точки $C(a,0)$ в точку $B(-a,0)$.

○ Работа A силового поля $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки M вдоль линии CB равна

$$\int\limits_{CB} P\,dx + Q\,dy.$$

Запишем дугу эллипса CB в параметрической форме: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0,\pi]$. Тогда $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = b\cos t\,dt$ и

$$A = \int\limits_{CB} y\,dx - x\,dy = \int\limits_0^{\pi} (-ab\sin^2 t - ab\cos^2 t)\,dt = -ab\int\limits_0^{\pi} dt = \pi ab. \quad \bullet$$

4.2.56. Дана переменная сила $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + (3y - 8x)\mathbf{j}$. Вычислить работу этой силы при перемещении материальной точки вдоль контура прямоугольника с вершинами $A(9,4)$, $B(-9,4)$, $C(-9,-4)$, $D(9,-4)$.

4.2.57. Найти работу силы $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + (3y - 8x)\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки вдоль эллипса

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

4.2.58. Найти работу силы $\mathbf{F} = -4y\mathbf{i} + (4y - 3x)\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки вдоль прямоугольника с вершинами $A(2,-6)$, $B(2,6)$, $C(-2,6)$, $D(-2,-6)$.

4.2.59. Найти работу силы $\mathbf{F} = -4y\mathbf{i} + (4y - 3x)\mathbf{j}$ вдоль эллипса

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Дополнительные задания

4.2.60. Даны точки $A(2,2)$, $B(2,0)$, $C(0,2)$. Вычислить

$$\int_L (2x+3)\,dx + (x+7y+1)\,dy,$$

где

а) $L = OA$; б) $L = OBA$;

в) $L = OC$; г) $L = OCA$;

д) L — парабола, симметричная оси Oy и соединяющая точки O и A.

4.2.61. Даны точки $A(9,0,0)$, $B(9,4,0)$, $C(9,9,9)$. Вычислить

$$\int_L dx + (3z+8)\,dy + (7z+6)\,dz,$$

где

а) $L = AC$; б) $L = OABC$.

4.2.62. Даны точки $A(-2,-2)$, $B(-2,0)$, $C(0,-2)$. Вычислить

$$\int_L (y+4)\,dx + (3x+3y)\,dy,$$

где

а) $L = OA$; б) $L = OCA$;

в) $L = OBA$; г) L — дуга параболы OA.

4.2.63. Даны точки $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(2,2,2)$. Вычислить

$$\int_L 4\,dx + (4z+3)\,dy + (3x+4)\,dz,$$

где

а) $L = AC$; б) $L = OBC$.

4.2.64. Вычислить $\int\limits_{ABC} (3x^2y+y)\,dx + (x-2y^2)\,dy$, где ABC — контур треугольника ABC с вершинами $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$.

4.2.65. Вычислить

$$\int_L y\,dx - x\,dy,$$

где L — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемый в положительном направлении.

4.2.66. Вычислить

$$\int_L \frac{x\,dx}{x^2+y^2} - \frac{y\,dy}{x^2+y^2}$$

по окружности с центром в начале координат.

4.2.67. Вычислить
$$\int\limits_L \frac{y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$
по отрезку прямой $y = x$ от точки $x = 1$ до точки $x = 2$.

4.2.68. Вычислить
$$\int\limits_L x\,dy - y\,dx\ .$$
по петле декартова листа $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

4.2.69. Вычислить
$$\int\limits_L x\,dy - y\,dx,$$
где L — арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Найти функции по их полным дифференциалам:

4.2.70. $dU = y\,dx + x\,dy$.

4.2.71. $dU = (\cos x + 3x^2 y)\,dx + (x^3 - y^2)\,dy$.

4.2.72. $dU = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$.

4.2.73. $dU = (2x + y + z)\,dx + (x + 2y + z)\,dy + (x + y + 2z)\,dz$.

4.2.74. $dU = (3x^2 + 2y^2 + 3z)\,dx + (4xy + 2y - z)\,dy + (3x - y - 2)\,dz$.

4.2.75. $dU = (2xyz - 3y^2 z + 8xy^2 + 2)\,dx + (x^2 z - 6xyz + 8x^2 y + 1)\,dy + {}$ $+(x^2 y - 3xy^2 + 3)\,dz$.

4.2.76. $dU = \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{z}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{z^2}\right)dz$.

4.2.77. Вычислить работу силы $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ при перемещении точки из начала координат в точку $A(1,1)$:

а) по прямой;

б) по параболе $y = x^2$.

4.2.78. В каждой точке эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ приложена сила $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

а) Вычислить работу силы $\mathbf{F}$ при перемещении точки вдоль дуги эллипса, лежащей в первой четверти.

б) Вычислить работу, если точка обходит весь эллипс.

Найти работу данного силового поля F при перемещении материальной точки вдоль отрезка AB, если известны координаты концов отрезка:

4.2.79. $\mathbf{F} = (x^4 + 4xy^3)\mathbf{i} + (6x^2y^2 - 5y^2)\mathbf{j}$, $A(-2,-1)$, $B(3,0)$.

4.2.80. $\mathbf{F} = \dfrac{x}{(x-y)^2}\mathbf{i} - \dfrac{y}{(x-y)^2}\mathbf{j}$, $A(0,-1)$, $B(1,0)$.

4.2.81. $\mathbf{F} = \dfrac{(x+2y)}{(x+y)^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{(x+y)^2}\mathbf{j}$, $A(1,1)$, $B(3,1)$.

4.2.82. $\mathbf{F} = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)\mathbf{j}$, $A(0,0)$, $B(1,1)$.

4.2.83. $\mathbf{F} = (3x^2y - y^3)\mathbf{i} + (x^3 - 3xy^2)\mathbf{j}$, $A(0,0)$, $B(1,1)$.

4.2.84. $\mathbf{F} = \left(\sqrt{y} - \dfrac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{x}{2y} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathbf{j}$, $A(1,4)$, $B(9,1)$.

4.2.85. $\mathbf{F} = \dfrac{y}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)}\mathbf{i} - \dfrac{x}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)}\mathbf{j}$, $A(1,1)$, $B(2,2)$.

4.2.86. $\mathbf{F} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{2y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$, $A(2,1)$, $B(1,7)$.

4.2.87. $\mathbf{F} = (y^3 - 6xy^2)\mathbf{i} + (3xy^2 - 6x^2y + 8y^3)\mathbf{j}$, $A(0,0)$, $B(1,1)$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

Вычислить криволинейные интегралы II рода:

4.2.88. $\displaystyle\int\limits_{OmAnO} dx - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dy$, где OmA — дуга параболы $y = x^2$, а OnA — отрезок прямой $y = x$.

4.2.89. $\displaystyle\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,dy + y\,dx.$

4.2.90. $\displaystyle\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx + y\,dy.$

4.2.91. $\displaystyle\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$, $(x \neq 0)$.

4.2.92. $\displaystyle\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

4.2.93. $\displaystyle\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy.$

4.2.94. Доказать, что если $f(u)$ — непрерывная функция, то

$$\int\limits_L f(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0$$

для любого гладкого контура L.

Найти первообразную функцию по данному дифференциалу:

4.2.95. $dz = \dfrac{2x\,dx + 2y\,dy}{x^2+y^2}.$

4.2.96. $dz = -\dfrac{2y\,dx}{x^2\sin^2\frac{2y}{x}} + \dfrac{2y\,dy}{x\sin\frac{2y}{x}}.$

4.2.97. $dz = \dfrac{5}{(x-y)^2}[-y\,dx + x\,dy].$

4.2.98. Вычислить

$$\int\limits_L (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2\,dz,$$

где L — кривая $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

4.2.99. Вычислить

$$\int\limits_L (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz,$$

где L — контур, который ограничивает часть сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0,$$

пробегаемый так, что внешняя сторона сферы остается слева.

4.2.100. Доказать, что для криволинейного интеграла II рода справедлива оценка

$$\left| \int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \right| \leqslant LM,$$

где L — длина кривой L, а

$$M = \max_{(x,y)\in L} \sqrt{P^2(x,y) + Q^2(x,y)}.$$

4.2.101. Оценить интеграл

$$\int\limits_L \frac{y\,dx - x\,dy}{(x^2 + xy + y^2)^2},$$

где L — окружность $x^2 + y^2 = R^2$. Доказать, что при $R \to +\infty$ данный интеграл стремится к нулю.

§ 3. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение и вычисление поверхностного интеграла первого рода

⇛ Пусть $f(x, y, z)$ — функция, заданная в точках некоторой гладкой поверхности S. Рассмотрим разбиение поверхности S на части $S_1, \ldots, S_n$ с площадями $\Delta\sigma_1, \ldots, \Delta\sigma_n$ и диаметрами $d_1, \ldots, d_n$ соответственно. Произвольно выбрав на каждой из частей S_i точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta\sigma_i,$$

которая называется *интегральной суммой первого рода* для функции $f(x, y, z)$.

Если при $d \to 0$ (где $d = \max\limits_i d_i$) существует предел интегральных сумм, который не зависит от способа разбиения поверхности S на части и выбора точек M_i, то этот предел называется *поверхностным интегралом первого рода* и обозначается

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma. \qquad \Leftarrow$$

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна, то интеграл

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma$$

существует.

Определение поверхностного интеграла первого рода аналогично определению криволинейного интеграла первого рода. Свойства поверхностного интеграла первого рода (линейность, аддитивность и т. д.) также аналогичны соответствующим свойствам криволинейного интеграла первого рода.

Если поверхность S задана на области D плоскости Oxy функцией $z = z(x,y)$, причем $z(x,y)$ непрерывна вместе со своими частными производными $z'_x = z'_x(x,y)$ и $z'_y = z'_y(x,y)$, то поверхностный интеграл сводится к двойному с помощью формулы:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy.$$

Если поверхность S задана параметрически в виде $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, где x, y, z — непрерывно дифференцируемые функции в некоторой области G плоскости Ouv, то

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_G f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{EH-F^2}\,dudv,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \qquad H = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Приложения поверхностного интеграла первого рода

Пусть S — гладкая материальная поверхность с плотностью $\rho = \rho(x,y,z)$. Тогда с помощью поверхностных интегралов первого рода можно вычислить:

1) статические моменты этой поверхности относительно координатных плоскостей

$$M_{xy} = \iint\limits_S z\rho\,d\sigma, \quad M_{yz} = \iint\limits_S x\rho\,d\sigma, \quad M_{xz} = \iint\limits_S y\rho\,d\sigma;$$

2) координаты центра тяжести поверхности

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}, \quad \text{где} \quad m = \iint\limits_S \rho\,d\sigma;$$

3) моменты инерции относительно координатных осей и начала координат

$$J_x = \iint_S (y^2 + z^2)\rho\, d\sigma, \quad J_y = \iint_S (x^2 + z^2)\rho\, d\sigma, \quad J_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho\, d\sigma,$$

$$J_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\rho\, d\sigma.$$

Определение и вычисление поверхностного интеграла второго рода

$\Rrightarrow$ Площадь поверхности S можно найти по формуле

$$\iint_S d\sigma = \text{пл.} S.$$

Если $\rho(x, y, z)$ — поверхностная плотность материальной поверхности S, то ее масса m находится так:

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\, d\sigma.$$

Пусть S — гладкая ориентированная поверхность, на которой задана непрерывная функция $R(x, y, z)$, и пусть в каждой точке M поверхности определено положительное направление нормали $\overline{n}(M)$ ($\overline{n}(M)$ — непрерывная вектор-функция).

Выберем ту сторону S^+ поверхности S, для которой угол между единичной нормалью $\overline{n}$ и осью Oz острый. Теперь разобьем поверхность S на части $S_1, \ldots, S_n$ с диаметрами $d_1, \ldots, d_n$. Обозначим через $\Delta P_1, \ldots, \Delta P_n$ площади соответствующих проекций частей $S_1, \ldots, S_n$ на плоскость Oxy, а через d — максимум из чисел $d_1, \ldots, d_n$. Выбрав в каждой части S_i произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\Delta P_i,$$

которая называется *интегральной суммой второго рода* для функции $R(x, y, z)$. Предел интегральных сумм (он существует в силу непрерывности $R(x, y, z)$) при $d \to 0$, который не зависит от способа разбиения поверхности S на части и выбора точек M_i, называется *поверхностным интегралом второго рода* от функции $R(x, y, z)$ по поверхности S и обозначается

$$\iint_{S+} R(x, y, z)\, dxdy.$$

Аналогично определяются поверхностные интегралы второго рода

$$\iint_{S+} P(x, y, z)\, dydz \quad \text{и} \quad \iint_{Q+} R(x, y, z)\, dxdz$$

от непрерывных функций $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$. Сумма трех указанных поверхностных интегралов второго рода называется *общим поверхностным интегралом второго рода* и обозначается

$$\iint\limits_{S+} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy. \qquad \Leftarrow$$

Пусть теперь поверхность S имеет явное представление $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \in D \subset Oxy$. Тогда поверхностный интеграл второго рода сводится к двойному интегралу по области D

$$\iint\limits_{S+} R(x, y, z)\,dxdy = \iint\limits_{D} R(x, y, z(x, y))\,dxdy.$$

Если выбрана противоположная сторона S^- поверхности S, то

$$\iint\limits_{S^-} R(x, y, z)\,dxdy = -\iint\limits_{D} R(x, y, z(x, y))\,dxdy.$$

Аналогично вычисляются и поверхностные интегралы

$$\iint\limits_{S+} P(x, y, z)\,dydz \quad \text{и} \quad \iint\limits_{S+} Q(x, y, z)\,dxdz.$$

Связь поверхностных интегралов первого и второго рода

Если α, β, γ — углы, образованные соответственно с положительными направлениями осей Ox, Oy и Oz, единичной нормалью $\mathbf{n}$ к выбранной стороне S^+ поверхности S, то связь поверхностных интегралов первого и второго рода выражается следующим равенством

$$\iint\limits_{S+} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma.$$

Поскольку $\mathbf{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то поверхностный интеграл первого рода в правой части этого равенства можно записать компактно в векторной форме

$$\iint\limits_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,d\sigma,$$

где $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ — векторное поле, определенное на S.

Векторное поле $\mathbf{F}$ можно ассоциировать с полем скоростей жидкости, протекающей через поверхность S. Тогда интеграл

$$\iint\limits_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,d\sigma$$

можно истолковывать механически как общее количество жидкости, протекающее в единицу времени через поверхность S в положительном направлении, т. е. вдоль $\mathbf{n}$. Поэтому этот интеграл называется *потоком* векторного поля $\mathbf{F}$ через поверхность S.

4.3.1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{(1+x+z)^3},$$

где σ — часть плоскости $x+y+z=1$, заключенная в первом октанте.

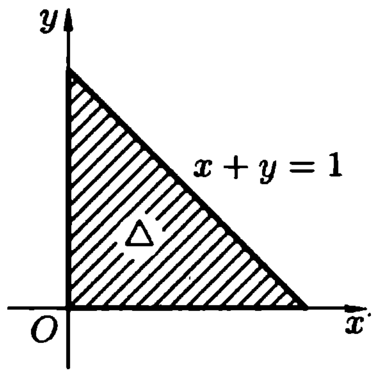


Рис. 49

❍ Поверхность σ можно выразить явно: $z = 1-x-y$, $(x,y) \in D$, где область D — треугольник, ограниченный прямыми $x=0, y=0$ и $x+y=1$ (рис. 49). При этом $d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy = \sqrt{3}\,dxdy$. Данный интеграл сводится к двойному (при этом знаменатель подынтегральной функции равен $1+x+z = 1+x+(1-x-y) = 2-y$):

$$\iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{(1+x+z)^3} = \iint\limits_{\Delta} \frac{\sqrt{3}\,dxdy}{(2-y)^3} = \sqrt{3}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{dy}{(2-y)^3} =$$

$$= \sqrt{3}\int\limits_0^1 dx \left(\frac{1}{2(2-y)^2}\Big|_0^{1-x} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_0^1 dx \left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{4} \right] dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{1+x} - \frac{1}{4}x \right)\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}. \quad ●$$

Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

4.3.2. $\displaystyle\iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{(1+x+z)^2}$, где σ — часть плоскости $x+y+z=1$ при условии $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

4.3.3. $\displaystyle\iint\limits_{\sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) d\sigma$, где σ — часть плоскости $6x+4y+3z=11$, лежащая в I октанте.

4.3.4. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)d\sigma,$$

где σ — сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$.

○ В силу симметрии относительно координатных плоскостей поверхности σ и подынтегральной функции ограничимся вычислением интеграла при условии $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ (т. е. в первом октанте), а результат умножим на 8.

Используя сферические координаты, запишем параметрические уравнения сферы $x = R\sin\varphi\cos\theta$, $y = R\sin\varphi\sin\theta$, $z = R\cos\varphi$, учитывая, что $u=\theta$, $v=\varphi$. Тогда

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 =$$

$$= (-R\sin\varphi\sin\theta)^2 + (R\sin\varphi\cos\theta)^2 + 0 = R^2\sin^2\varphi,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 =$$

$$= (R\cos\varphi\cos\theta)^2 + (R\cos\varphi\sin\theta)^2 + (-R\sin\varphi)^2 = R^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} =$$

$$= (-R\sin\varphi\sin\theta)(R\cos\varphi\cos\theta) + (R\sin\varphi\cos\theta)(R\cos\varphi\sin\theta) = 0,$$

$$\sqrt{EG-F^2} = R^2\sin\varphi,$$

а область интегрирования — четверть круга $x^2+y^2 \leqslant R^2$ (обозначим ее через B) в параметрической форме имеет вид

$$R^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta \leqslant R^2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Остается выразить через параметры подынтегральную функцию $f(x,y) = x^2+y^2$. На сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$ имеем $f(x,y) = R^2 - z^2 = R^2 - R^2\cos^2\varphi = R^2(1-\cos^2\varphi)$. Таким образом данный интеграл равен

$$8\int\limits_{B} R^2(1-\cos^2\varphi)\cdot R^2\sin\varphi\, d\theta d\varphi = -8R^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\varphi)\, d(\cos\varphi) =$$

$$= -8R^4\cdot\frac{\pi}{2}\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}R^4\pi. \quad ●$$

4.3.5. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)d\sigma,$$

где σ — сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$ способом выделения однозначной ветви поверхности интегрирования (сферы). Этот пример совпадает с примером 4.3.4, но его следует решить иным способом.

4.3.6. Вычислить
$$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,ds,$$
где S— боковая поверхность конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ $(0 \leqslant z \leqslant b)$.

4.3.7. Вычислить площадь той части параболоида вращения $ay = x^2+z^2$, которая находится в первом октанте и ограничена плоскостью $y = 2a$ $(a > 0)$.

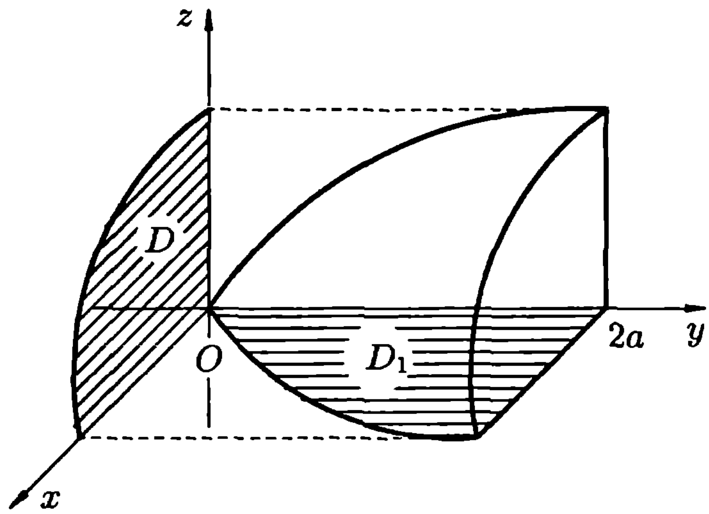


Рис. 50

Способ 1. Поверхность, площадь которой будем вычислять, представим в виде $y = \frac{x^2+z^2}{a}$, т.е. как функцию переменных x и z. Следовательно, соответствующая формула для площади примет вид
$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz,$$
где область D — проекция поверхности на плоскость Oxz (рис. 50). Параболоид $ay = x^2+z^2$ пересекается плоскостью $y = 2a$ по окружности $x^2+z^2 = 2a^2$ радиуса $a\sqrt{2}$. Следовательно, D — четверть круга $x^2+z^2 \leqslant 2a^2$ $(x \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$. Определим подынтегральную функцию. Имеем $y'_x = \frac{2x}{a}$, $y'_z = \frac{2z}{a}$,
$$1+(y'_x)^2+(y'_z)^2 = 1+\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4z^2}{a^2} = \frac{a^2+4(x^2+z^2)}{a^2}.$$
Таким образом,
$$S = \frac{1}{a}\iint\limits_D \sqrt{a^2+4(x^2+z^2)}\,dxdz.$$
Переходя к полярным координатам, получаем
$$S = \frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2+4r^2}\,r\,dr = \frac{1}{a}\cdot\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{4\cdot 3}(a^2+4r^2)^{3/2}\Big|_0^{a\sqrt{2}} = \frac{13}{12}\pi a^2.$$

Способ 2. Поверхность параболоида представим в виде $z = \sqrt{ay - x^2}$, т. е. как функцию переменных x и y. В этом случае соответствующая формула имеет вид

$$S = \iint_{D_1} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy,$$

где D_1 — проекция поверхности на плоскость Oxy. Область D_1 ограничена осью Oy, параболой $x = \sqrt{ay}$ и прямой $y = 2a$. Определим подынтегральную функцию. Имеем

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{ay - x^2}}, \quad z'_y = \frac{a}{2\sqrt{ay - x^2}}, \quad 1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = \frac{4ay + a^2}{4(ay - x^2)}.$$

Таким образом

$$S = \frac{1}{2} \iint_{D_1} \frac{\sqrt{4ay + a^2}}{\sqrt{ay - x^2}}\, dxdy = \frac{1}{2} \int_0^{2a} \sqrt{a^2 + 4ay}\, dy \int_0^{\sqrt{ay}} \frac{dx}{\sqrt{ay - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2a} \sqrt{a^2 + 4ay}\, dy \cdot \arcsin \frac{x}{\sqrt{ay}} \Big|_0^{\sqrt{ay}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(a^2 + 4ay)^{3/2}}{6} \Big|_0^{2a} = \frac{13}{12}\pi a^2. \quad \bullet$$

4.3.8. Найти площадь части параболоида $4z = x^2 + y^2$, отсекаемой цилиндром $y^2 = z$ и плоскостью $z = 3$.

4.3.9. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\sigma} z\, dxdy + y\, dxdz + x\, dydz,$$

где σ — верхняя сторона плоскости $x + y + z = 1$, ограниченной координатными плоскостями.

◐ Интеграл будем вычислять покомпонентно, проектируя σ на разные координатные плоскости (см. рис. 51).

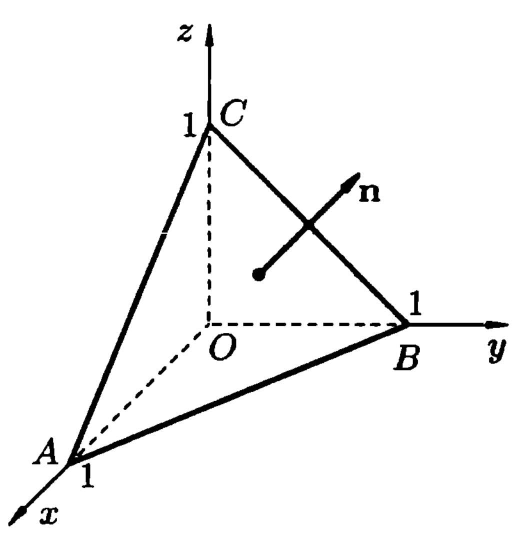


Рис. 51

Вычислим
$$\iint_\sigma z\,dxdy.$$
Выражая явно z через x и y, сведем этот интеграл к двойному интегралу по ΔOAB. Подставляя $z = 1 - x - y$ в подынтегральную функцию и учитывая, что: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$, получаем

$$\iint_\sigma z\,dxdy = \iint_{OAB} (1 - x - y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)\,dy =$$
$$\int_0^1 dx \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]\Big|_0^{1-x} = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\,dx = -\frac{(1-x)^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Убедитесь, что остальные интегралы
$$\iint_\sigma y\,dxdz \quad \text{и} \quad \iint_\sigma x\,dydz$$
приводят к такому же результату. Поэтому искомый интеграл равен $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. ●

Вычислить следующие интегралы второго рода:

4.3.10. $\iint\limits_\sigma yz\,dydz + xz\,dxdz + xy\,dxdy$, где σ — внешняя сторона тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

4.3.11. $\iint\limits_S z\,dxdy$, где S — внешняя сторона эллипсоида
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

4.3.12. $\iint\limits_\sigma x^2\,dydz + y^2\,dxdz + z^2\,dxdy$, где σ — внешняя сторона поверхности верхней полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4.3.13. $\iint\limits_\sigma x^3\,dydz + y^3\,dxdz + z^3\,dxdy$, где σ — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4.3.14. $\iint\limits_\sigma (x - y)\,dxdy + (z - x)\,dxdz + (y - z)\,dydz$, где σ — внешняя сторона конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$.

4.3.15. Найти поток векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности эллипсоида
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$
лежащую в первом октанте в направлении внешней нормали.

○ Искомый поток равен

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_\sigma (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,d\sigma.$$

Последний интеграл сводится к поверхностным интегралам второго рода

$$\iint_{D_1} x\,dydz + \iint_{D_2} y\,dxdz + \iint_{D_3} z\,dxdy,$$

где D_1, D_2, D_3 — проекции эллипсоида на соответствующие координатные плоскости.

Рассмотрим, например,

$$\iint_{D_3} z\,dxdy,$$

где z можно выразить через x и y из уравнения эллипсоида, D_3 — внутренность четверти эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

Очевидно, что

$$\iint_{D_3} z\,dxdy$$

равен объему восьмой части эллипсоида, которая, как известно, равна $\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi abc$. Аналогичные интерпретации можно дать и другим интегралам, поэтому исходный интеграл I рода, т.е. поток векторного поля, равен $3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi abc = \frac{\pi abc}{2}$. ●

4.3.16. Найти поток вектора $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через поверхность тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2$, плоскостью Oxy и однополостным гиперболоидом $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$.

○ Имеем

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_\sigma (x^2\cos\alpha - y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,d\sigma =$$

$$= \iint_\sigma x^2\cos\alpha\,d\sigma - \iint_\sigma y^2\cos\beta\,d\sigma + \iint_\sigma z^2\cos\gamma\,d\sigma.$$

На плоскости Oxz и Oyz поверхность σ проектируется дважды, с обеих сторон, к тому же поверхность σ симметрична относительно этих плоскостей. Поэтому соответствующие интегралы получаются нулевыми:

$$\iint_\sigma x^2\cos\alpha\,d\sigma = \iint_\sigma y^2\cos\beta\,d\sigma = 0.$$

А теперь вычислим

$$\iint_\sigma z^2\cos\gamma\,d\sigma.$$

Поверхность σ состоит из трех частей (см. рис. 52):

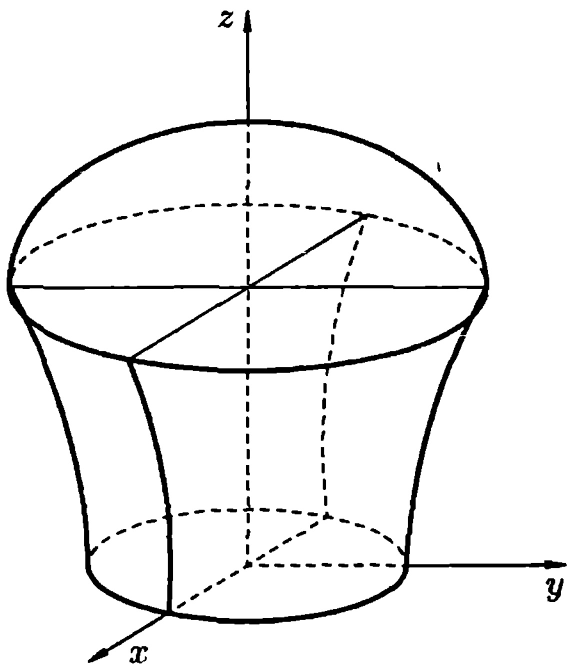


Рис. 52

а) сегмент сферы $z = \sqrt{3R^2 - x^2 - y^2}$, для которого $\cos\gamma > 0$ (внешняя нормаль образует с Oz острый угол); проекция этого сегмента на Oxy есть круг $x^2 + y^2 \leqslant 2R^2$ (сегмент сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2$ пересекается с гиперболоидом $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$ по линии

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2 \\ x^2 + y^2 - z^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2R^2 \\ z = R \end{cases} \quad —$$

окружность радиуса $\sqrt{2}R$);

б) сегмент параболоида проектируется на Oxy в кольцо $R^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2R^2$, $z = x^2 + y^2 - R^2$ (из уравнения гиперболоида);

в) наконец, третья часть — это круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, на котором $z = 0$. Поэтому

$$\iint\limits_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} z^2 \cos\gamma\, d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 2R^2} (3R^2 - x^2 - y^2)\, dxdy - \iint\limits_{R^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2R^2} (x^2 + y^2 - R^2)\, dxdy = \frac{7\pi R^4}{2}.$$

Предлагаем самостоятельно вычислить эти интегралы. ●

4.3.17. Найти поток вектора $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через поверхность тела $\frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant H$ в направлении внешней нормали.

4.3.18. Найти поток вектора $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ через часть поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant H$ в направлении внешней нормали.

4.3.19. Найти поток вектора $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ в направлении внешней нормали.

4.3.20. Найти поток вектора $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ через поверхность куба $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant a$ в направлении внешней нормали.

4.3.21. Найти массу полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$ радиуса R с поверхностной плотностью, равной $\sqrt{x^2 + y^2}$.

○ Имеем

$$m = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{x^2 + y^2}\, d\sigma,$$

где

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

(проверьте!). Следовательно,

$$m = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} R \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy.$$

Переходя к полярным координатам в двойном интеграле, получаем

$$m = R \iint\limits_{r \leqslant R} \frac{r^2\, dr d\varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}} = R \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, dr = \frac{\pi^2 R^3}{2}. \qquad \bullet$$

4.3.22. Найти массу поверхности куба $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, если поверхностная плотность в каждой ее точке $M(x, y, z)$ равна $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

4.3.23. Найти массу поверхности куба $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, если поверхностная плотность в каждой ее точке (x, y, z) равна $\rho(x, y, z) = xyz$.

4.3.24. Определить координаты центра тяжести однородной параболической оболочки $az = x^2 + y^2$ $(0 \leqslant z \leqslant a)$.

4.3.25. Найти момент инерции части боковой поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$ относительно оси Oz.

4.3.26. Вычислить

$$\iint\limits_{\sigma} d\sigma,$$

где σ —часть параболоида $z = x^2 + y^2$, которая вырезана цилиндром $(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$.

Дополнительные задания

4.3.27. Найти статические моменты однородной треугольной пластинки $x + y + z = a$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ относительно координатных плоскостей.

4.3.28. Вычислить момент инерции относительно Ox сферической оболочки $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(x \geqslant 0)$.

4.3.29. Вычислить моменты инерции однородной конической оболочки $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ $(0 \leqslant z \leqslant b)$ относительно прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z - b}{0}$.

4.3.30. Найти координаты центра тяжести однородной поверхности
$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \qquad (x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x + y \leqslant a).$$

4.3.31. Найти полярный момент инерции I_0 поверхности куба $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant a$.

4.3.32. Найти моменты инерции треугольной пластины $x + y + z = 1$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$) относительно координатных плоскостей.

4.3.33. Найти полярный момент инерции полной поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$.

4.3.34. Вычислить площадь той части параболоида $2az = x^2 + y^2$, которая ограничена плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $z = \frac{a}{2}$, $z = x \operatorname{tg} \alpha$, α — фиксировано, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

4.3.35. Вычислить площадь той части поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, которая вырезана цилиндром $x^2 + y^2 = ay$.

4.3.36. Вычислить площадь той части поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, которая вырезана цилиндром $x^2 + y^2 = b^2$, $b < a$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

4.3.37. Найти площадь поверхности $z = \frac{xy}{a}$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

4.3.38. Найти
$$\iint\limits_{\sigma} z\, d\sigma,$$
где σ — часть поверхности $2az = x^2 + z^2$ ($a > 0$), вырезанная конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.3.39. Найти
$$\iint\limits_{\sigma} (x + y + z)\, d\sigma,$$
где σ — верхняя половина сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4.3.40. Найти
$$\iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)\, d\sigma,$$
где σ — граница тела, заданного неравенствами $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1$.

4.3.41. Вычислить
$$\iint\limits_{\sigma} z\, d\sigma,$$
где σ — часть поверхности геликоида $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$ ($0 \leqslant u \leqslant a$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$).

4.3.42. Вычислить
$$\iint\limits_{\sigma} z^2\, d\sigma,$$
где σ — часть поверхности конуса
$$x = r \cos\varphi \sin\alpha, \quad y = r \sin\varphi \sin\alpha, \quad z = r \cos\alpha$$
($0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$), α — постоянная $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

4.3.43. Вычислить
$$\iint\limits_{\sigma}(xy + yz + xz)\,d\sigma,$$
где σ — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанная поверхностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

4.3.44. Вычислить
$$\iint\limits_{S} x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy,$$
где S — внешняя сторона сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Вычислить
$$\int\limits_{L} \frac{y^2}{x}\,dl,$$
где L — дуга параболы $y^2 = 2x$, заключенная между точками $(1, \sqrt{2})$ и $(2, 2)$.

2. Вычислить
$$\int\limits_{L}(4y + 4)\,dx + (3x + 3y + 4)\,dy,$$
где L — контур треугольника $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y = 6$, и результат проверить при помощи формулы Грина.

3. Вычислить
$$\int\limits_{(1,1)}^{(4,9)} \left(3x^2 - 3y^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right) dx + \left(-6xy + \frac{1}{2\sqrt{xy}}\right) dy.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл первого рода
$$\iint\limits_{S} x^2 dS,$$
где S — боковая поверхность конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $0 \leqslant z \leqslant h$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода
$$\iint\limits_{\sigma} y^2 dxdz,$$
σ — внутренняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y \geqslant 0$.

Вариант 2

1. Вычислить
$$\int_L (x+y)\,dl,$$
где L — контур треугольника ABC с вершинами $A(1,-1)$, $B(-3,-1)$, $C(-3,2)$.

2. Вычислить массу дуги четверти эллипса
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$
расположенный в первой четверти, если линейная плотность в каждой точке пропорциональна абсцисса этой точке, с коэффициентом m.

3. Вычислить
$$\int_{(1,1)}^{(2,2)} \left(6x-3y-\frac{1}{y}\right)dx+\left(-3x+\frac{x}{y^2}\right)dy.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл первого рода
$$\iint_S z^4 dS,$$
где S — боковая поверхность конуса $4(x^2+y^2)=z^2$, $0 \leqslant z \leqslant 2$.

5. Вычислить поверхность интеграла второго рода
$$\iint_\sigma z^3\,dxdy,$$
σ — внешняя поверхность плоскости $x+y+z=10$, расположенная в первом октанте ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$).

Вариант 3

1. Вычислить
$$\int_L (x^2+y^2)\,dl,$$
L — окружность $(x+a)^2+y^2=a^2$, $a>0$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода
$$\int_L (x+1)\,dx+xyz\,dy+y^2z\,dz,$$
где L — отрезок, соединяющий точку $M(2,-1,3)$ с точкой $N(7,4,11)$.

3. Вычислить

$$\int\limits_{(1,1)}^{(6,4)} \left(6x^2 + \frac{1}{x+y}\right) dx + \left(-\frac{1}{x+y} + 3y^2\right) dy.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_S z^3 dS,$$

где S — верхняя часть полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$.

5. Вычислить поверхность интеграла второго рода

$$\iint\limits_\sigma z^4 dxdy,$$

σ — внутренняя сторона поверхности полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$.

Вариант 4

1. Вычислить

$$\int\limits_L (x^2 + y^2 - z)\, dl,$$

L — дуга цепной линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

2. При помощи криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $x = 8\cos^3 t$, $y = 8\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

3. Вычислить

$$\int\limits_{(1,1)}^{(3,3)} \left(3x\sqrt{x^2 + 3y^2} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(9y\sqrt{x^2 + 3y^2} - \frac{x}{y^2}\right) dy.$$

4. Вычислить площадь той части параболоида вращения $z = -a(x^2 + y^2)$, которая находится в пятом октанте ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \leqslant 0$) и ограничена плоскостью $z = -2a$ ($a < 0$).

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_\sigma yz\,dxdy,$$

где σ — внешняя сторона плоскости $2x + 3y + 4z = 12$, расположены в первом октанте ($x \geqslant 0, y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$).

Вариант 5

1. Вычислить интеграл

$$\int_L (x-y)\,dl,$$

L — левый лепесток лемнискаты $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $a > 0$.

2. Вычислить работу силового поля $\mathbf{F} = (x+y+2)\mathbf{i} + (8x+7y+6)\mathbf{j}$ по контуру треугольника, стороны которого лежат на прямых $x = 0$, $y = 0$, $3x + 2y = 6$, и результат проверить при помощи формулы Грина.

3. Вычислить

$$\int_{(0,\frac{1}{\sqrt{3}})}^{(\sqrt{3},0)} \left(\frac{1}{x^2+2xy+y^2+1} + 10x^2y\right) dx + \left(\frac{1}{(x+y)^2+1} + 10x^2y\right) dy.$$

4. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_S x^2 dS,$$

где S — нижняя часть полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \leqslant 0$.

5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_\sigma (x+y)\,d\sigma,$$

где σ — внутренняя сторона конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, расположены в первом октанте ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant h$).

❏

Глава 5. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

В этой главе все рассматриваемые функции будут предполагаться дифференцируемыми достаточное число раз.

§ 1. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ. ПОВЕРХНОСТЬ УРОВНЯ. ВЕКТОРНЫЕ ЛИНИИ

Скалярное поле

⇛ Функция $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$, где $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$ — радиус-вектор произвольной точки пространства $\mathbb{R}^3$, называется *скалярным полем.* ⇚

Скалярное поле можно рассматривать как обыкновенную функцию $U = U(x, y, z)$ трех переменных.

Наряду с определенными выше скалярными полями рассматривают также *плоские* скалярные поля, т. е. функции $U = U(\mathbf{r}) = U(x, y)$, где $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$ — радиус-вектор произвольной точки плоскости.

⇛ *Поверхностью уровня* скалярного поля $U = U(x, y, z)$ называется множество точек пространства $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющих уравнению $U(x, y, z) = c$, где c — произвольная постоянная. ⇚

Аналогично определяется понятие *линии уровня* плоского скалярного поля $U = U(x, y)$.

Понятие поверхности уровня и линии уровня скалярного поля тождественны понятиям, соответственно, поверхности уровня функции $U = U(x, y, z)$ трех переменных и линии уровня функции $U = U(x, y)$ двух переменных.

Векторное поле

⇛ Вектор-функция $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = P(x, y, z) \cdot \mathbf{i} + Q(x, y, z) \cdot \mathbf{j} + R(x, y, z) \cdot \mathbf{k}$ называется *векторным полем.* ⇚

⇛ Вектор-функция $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = P(x, y) \cdot \mathbf{i} + Q(x, y) \cdot \mathbf{j}$, где $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$, называется *плоским* векторным полем. ⇚

⇛ Линии $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, касательные к которым в каждой их точке совпадают с направлением векторного поля $\mathbf{F}(P, Q, R)$, называются *векторными линиями* этого поля. ⇚

Аналогичным образом определяется понятие векторных линий плоского векторного поля.

Векторные линии векторного поля $\mathbf{F}(P, Q, R)$ могут быть найдены из системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y, z), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dt} = R(x, y, z) \end{cases}$$

или из системы, записанной в симметрической форме:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Векторные линии поля называют также силовыми линиями или линиями тока.

Градиент

$\Rrightarrow$ *Градиентом* скалярного поля $U = U(x, y, z)$ называется векторное поле $\mathbf{grad}\, U = \dfrac{\partial U}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y} \cdot \mathbf{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z} \cdot \mathbf{k} = U'_x \cdot \mathbf{i} + U'_y \cdot \mathbf{j} + U'_z \cdot \mathbf{k}$. $\Lleftarrow$

Градиент скалярного поля в каждой точке перпендикулярен поверхностям уровня этого скалярного поля. Кроме того, градиент скалярного поля U показывает направление наибольшего роста функции $U = U(x, y, z)$.

Величиной градиента называют скалярное поле

$$|\mathbf{grad}\, U| = \sqrt{(U'_x)^2 + (U'_y)^2 + (U'_z)^2}.$$

5.1.1. Найти величину и направление градиента скалярного поля $U = x^2 - y^2 + yz - x$ в точке $A(1, 0, -1)$.

◐ Находим частные производные функции U:

$$U'_x = 2x - 1, \quad U'_y = -2y + z, \quad U'_z = y.$$

Таким образом, $\mathbf{grad}\, U = (2x - 1) \cdot \mathbf{i} + (-2y + z) \cdot \mathbf{j} + y \cdot \mathbf{k}$. Подставляя в последнее равенство координаты точки A, получим:

$$\mathbf{grad}\, U(A) = \mathbf{i} - \mathbf{j} = (1, -1, 0).$$

Величина градиента при этом будет

$$|\mathbf{grad}\, U(A)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$ ●

Найти градиент скалярного поля $U(x, y, z)$:

5.1.2. $U = xyz$.

5.1.3. $U = x^2 + y^2 - z^2$.

5.1.4. $U = e^{xy} - yz^2$.

5.1.5. $U = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

Найти градиент скалярного поля $U(x,y,z)$ в точке $A(x_0,y_0,z_0)$:

5.1.6. $U = 3x^2 - xy^3 + xz - z^2$, $A(1,2,3)$.

5.1.7. $U = z\sin(x-y)$, $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, 1\right)$.

5.1.8. $U = \dfrac{x+y}{z}$, $A(2,0,1)$.

5.1.9. $U = \operatorname{arctg}(x + 2y + z^2)$, $A(1,1,0)$.

5.1.10. В каких точках градиент скалярного поля $U = xy + 2z - z^2$:

а) коллинеарен вектору $\mathbf{a}(1,-1,2)$;

б) перпендикулярен оси Ox;

в) перпендикулярен плоскости $2x + y + z = 1$?

❍ Вычислим градиент поля:

$$\mathbf{grad}\, U = y\cdot\mathbf{i} + x\cdot\mathbf{j} + (2-2z)\cdot\mathbf{k} = (y, x, 2-2z).$$

а) Для ответа на этот вопрос напишем условие коллинеарности векторов $\mathbf{grad}\, U$ и $\mathbf{a}$:

$$\frac{y}{1} = \frac{x}{-1} = \frac{2-2z}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Это уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(0,0,1)$ с направляющим вектором $\boldsymbol{\ell}(-1,1,-1)$.

б) $\mathbf{i}(1,0,0)$ — направляющий вектор оси Ox. Условием перпендикулярности векторов $\mathbf{grad}\, U$ и $\mathbf{a}$ является равенство нулю их скалярного произведения: $\mathbf{grad}\, U\cdot\mathbf{i} = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Уравнение $y = 0$ задает плоскость Oxz. Во всех точках этой плоскости $\mathbf{grad}\, U$ перпендикулярен оси Ox.

в) Поскольку $\mathbf{grad}\, U$ перпендикулярен плоскости $2x+y+z = 1$, то он коллинеарен ее нормальному вектору $\mathbf{n}(2,1,1)$, т. е. должны выполняться равенства

$$\frac{y}{2} = \frac{x}{1} = \frac{2-2z}{1} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-1}.$$

Следовательно, $\mathbf{grad}\, U$ перпендикулярен исходной плоскости в точках прямой, проходящей через точку $M_0(0,0,1)$ с направляющим вектором $\boldsymbol{\ell}(2,4,-1)$. ●

5.1.11. В каких точках плоскости $\mathbb{R}^2$ градиент плоского скалярного поля $U = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}y^2$ перпендикулярен радиусу-вектору $\mathbf{r} = x\cdot\mathbf{i} + y\cdot\mathbf{j}$?

5.1.12. Найти угол между градиентами поля $U = \dfrac{x}{y^2+z^2}$ в точках $A(3,0,1)$ и $B(1,-1,0)$.

5.1.13. В каких точках градиент скалярного поля

$$U = r^2 \qquad (\mathbf{r} = x\cdot\mathbf{i} + y\cdot\mathbf{j} + z\cdot\mathbf{k}, \quad r = |\mathbf{r}|):$$

а) параллелен оси Ox;

б) перпендикулярен оси Ox;

в) параллелен плоскости $x - y + z = 3$;

г) перпендикулярен плоскости $x - 3y + 2z - 1 = 0$;

д) равен 0;

е) имеет величину, равную 4?

5.1.14. Найти линии уровня плоских скалярных полей:

а) $U = xy$;

б) $U = r^2$, где $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$, $r = |\mathbf{r}|$;

в) $U = \arcsin(x + y)$.

5.1.15. Найти поверхности уровня скалярных полей:

а) $U = r$, где $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$ и $r = |\mathbf{r}|$;

б) $U = x^2 + y^2$;

в) $U = \operatorname{arctg} \dfrac{x^2 + y^2}{z^2}$.

5.1.16. Найти поверхности уровня скалярного поля $U = f(r)$, где $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$ и $r = |\mathbf{r}|$, функция $f(t)$ определена для всех $t \geqslant 0$ и:

а) $f(t)$ — монотонна;

б) $f(t)$ — не монотонна.

5.1.17. Найти векторные линии векторного поля $\mathbf{F}(P, Q, R)$:

а) $\mathbf{F}(3, 1, 2)$;

б) $\mathbf{F}(y, x, z)$;

в) $\mathbf{F}(z - y, x - z, y - x)$.

а) Составим нормальную систему дифференциальных уравнений, определяющую векторные линии поля:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2. \end{cases}$$

Ее решениями будут прямые линии, задаваемые в параметрической форме системой уравнений:

$$\begin{cases} x = 3t + x_0, \\ y = t + y_0, \\ z = 2t + z_0, \end{cases}$$

(x_0, y_0, z_0 — произвольные постоянные). Таким образом, векторными линиями будут прямые с направляющим вектором $\boldsymbol{\ell}(3, 1, 2)$.

б) В этом случае можно поступить так же, как в пункте а), составив систему линейных однородных дифференциальных уравнений и решив ее (см. § 7, глава 2). Однако векторные линии находятся проще с помощью метода составления интегрируемых комбинаций. Проиллюстрируем его в этом (и в следующем) пункте.

Запишем уравнения векторных линий в виде системы

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}.$$

Равенство $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x}$ образует первую интегрируемую комбинацию. Это уравнение легко решается методом разделения переменных: $x\,dx = y\,dy$, откуда $x^2 = y^2 + C_1$. Для получения еще одной интегрируемой комбинации используют обычно известное свойство пропорции:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3}{k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3},$$

причем множители k_i подбирают так, чтобы в числителе образовался дифференциал знаменателя или чтобы в знаменателе получался нуль, а в числителе — полный дифференциал. В нашем случае, складывая числители и знаменатели первых двух дробей (здесь $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 0$), получим следующую интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x+y)}{x+y} = \frac{dz}{z}.$$

Интегрируя данное равенство, получаем $x + y = C_2z$. Таким образом, векторные линии задаются системой

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1, \\ x + y = C_2z, \end{cases}$$

т. е. являются линиями пересечения гиперболических цилиндров $x^2-y^2 = C_1$ с плоскостями $x + y - C_2z = 0$.

в) Запишем, как и в пункте б), уравнения векторных линий поля в симметрической форме:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}.$$

Составим первую интегрируемую комбинацию:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{(z-y)+(x-z)+(y-x)} = \frac{d(x+y+z)}{0}.$$

Чтобы последнее отношение равнялось предыдущим, необходимо, чтобы выполнялось $d(x + y + z) = 0$, т. е. $x + y + z = C$. Вторая интегрируемая комбинация может быть получена следующим образом:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} =$$

$$= \frac{xdx+ydy+zdz}{x(z-y)+y(x-z)+z(y-x)} = \frac{d\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)\right)}{0}.$$

Следовательно, $d\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)\right) = 0$, т. е. $x^2+y^2+z^2 = R^2$. Таким образом, векторные линии получаются как пересечение плоскостей $x+y+z = C$ со сферами $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и, следовательно, являются окружностями с центрами на прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ и расположенные в плоскостях, отсекающих на осях координат равные отрезки. ●

Найти векторные линии плоских векторных полей:

5.1.18. $\mathbf{F} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$. **5.1.19.** $\mathbf{F} = y \cdot \mathbf{i} + x \cdot \mathbf{j}$.

5.1.20. $\mathbf{F} = (y, -x)$.

Найти векторные линии пространственных векторных полей:

5.1.21. $\mathbf{F} = a \cdot \mathbf{i} + b \cdot \mathbf{j} + c \cdot \mathbf{k}$, где a, b, c — константы.

5.1.22. $\mathbf{F} = (y + z) \cdot \mathbf{i} + (x + z) \cdot \mathbf{j} + (x + y) \cdot \mathbf{k}$.

5.1.23. $\mathbf{F}(-y, x, a)$, где a — константа.

5.1.24. Доказать, что $\mathbf{grad}\,(u \cdot v) = u \cdot \mathbf{grad}\, v + v \cdot \mathbf{grad}\, u$.

◯ По определению градиента скалярного поля имеем:

$$\mathbf{grad}\,(u \cdot v) = ((uv)'_x, (uv)'_y, (uv)'_z).$$

Используя правило дифференцирования произведения функций, а также правила сложения векторов и умножения их на число в координатной форме, получаем:

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\,(u \cdot v) &= (u'_x v + uv'_x, u'_y v + uv'_y, u'_z v + uv'_z) = \\ &= (u'_x v, u'_y v, u'_z v) + (uv'_x, uv'_y, uv'_z) = v \cdot (u'_x, u'_y, u'_z) + u \cdot (v'_x, v'_y, v'_z) = \\ &= u \cdot \mathbf{grad}\, v + v \cdot \mathbf{grad}\, u.\end{aligned}$$ ●

5.1.25. Докажите свойства градиента скалярного поля:

а) $\mathbf{grad}\,(U + C) = \mathbf{grad}\, U$, где C — константа;

б) $\mathbf{grad}\,(C \cdot U) = C \cdot \mathbf{grad}\, U$, где C — константа;

в) $\mathbf{grad}\,\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v \cdot \mathbf{grad}\, u - u \cdot \mathbf{grad}\, v)$.

5.1.26. Докажите равенство $\mathbf{grad}\,(\varphi(u)) = \varphi'(u) \cdot \mathbf{grad}\, u$.

5.1.27. Найти $\mathbf{grad}\,(u \cdot \varphi(u))$.

5.1.28. Доказать, что $\mathbf{grad}\, f(u, v) = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \mathbf{grad}\, u + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \mathbf{grad}\, v$.

В следующих задачах $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$ *и* $r = |\mathbf{r}|$.

5.1.29. Вычислить $\mathbf{grad}\, r$.

◯ Найдем длину вектора $\mathbf{r}$: $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Далее находим частные производные функции r:

$$r'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \quad r'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r},$$

$$r'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r}.$$

Следовательно, градиентом скалярного поля r будет векторное поле

$$\mathbf{grad}\, r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{1}{r}(x, y, z) = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$ ●

5.1.30. Доказать, что $\mathbf{grad}\, r^2 = 2\mathbf{r}$.

5.1.31. Найти $\mathbf{grad}\, f(r)$.

5.1.32. Найти $\mathbf{grad}\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})$, где $\mathbf{c}$ — фиксированный вектор.

5.1.33. Найти производную поля $U = r$ в направлении вектора $\mathbf{r}$.

○ Как известно, производная по направлению единичного вектора $\boldsymbol{\ell}$ функции $U = U(x, y, z)$ может быть найдена по формуле: $\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\ell}} = \mathbf{grad}\, U\cdot\boldsymbol{\ell}$. Находим градиент скалярного поля U: $\mathbf{grad}\, U = \mathbf{grad}\, r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ (см. задачу 5.1.29). Единичным вектором, имеющим то же направление, что и вектор $\mathbf{r}$, будет вектор $\boldsymbol{\ell} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\ell}} = \mathbf{grad}\, U\cdot\boldsymbol{\ell} = \frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{r^2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = \frac{r^2}{r^2} = 1. \quad \bullet$$

5.1.34. Найти производную поля $U = \frac{1}{r}$ в направлении градиента скалярного поля $v = r$.

Дополнительные задания

5.1.35. Найти поверхности уровня скалярного поля

$$U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

5.1.36. Найти поверхности уровня скалярного поля $U = e^{x^2+y^2}$.

5.1.37. Показать, что для скалярного поля $U = x^2 + y^2 + z^2$ векторные поля $\mathbf{grad}\, U$ и $\mathbf{grad}\, |\mathbf{grad}\, U|$ коллинеарны.

5.1.38. Найти угол между градиентами скалярных полей $U = xyz$ и $V = yz + zx + xy$ в точке $M_0(1, -1, 2)$.

5.1.39. В каких точках пространства градиенты скалярных полей $U = x^2 + y^2 + z^2$ и $V = x^2 - y^2 + z^2$ перпендикулярны?

5.1.40. Найти поверхности уровня скалярного поля $|\mathbf{grad}\, U|$, где скалярное поле U задано равенством $U = xy + yz + zx$.

5.1.41. Доказать, что линии уровня плоских скалярных полей $U = xy$ и $V = x^2 - y^2$ перпендикулярны в каждой точке плоскости, кроме начала координат.

5.1.42. Найти векторные линии поля $\mathbf{F} = yz\cdot\mathbf{i} + xz\cdot\mathbf{j} + xy\cdot\mathbf{k}$.

5.1.43. Найти векторные линии поля $\mathbf{F} = \mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = x\cdot\mathbf{i} + y\cdot\mathbf{j} + z\cdot\mathbf{k}$.

5.1.44. Найти $\mathbf{r}\times\mathbf{grad}\, r$, где $r = |\mathbf{r}|$, а $\mathbf{r} = x\cdot\mathbf{i} + y\cdot\mathbf{j} + z\cdot\mathbf{k}$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

5.1.45. Могут ли разные скалярные поля обладать одним и тем же набором поверхностей уровня?

5.1.46. Верно ли, что если поверхности уровня у скалярных полей U и V одинаковы, то эти поля удовлетворяют условию

$$U - V = \text{const}?$$

5.1.47. Могут ли разные поверхности уровня скалярного поля U пересекаться?

5.1.48. Может ли у разных векторных полей быть один и тот же набор векторных линий?

5.1.49. Привести пример двух пространственных скалярных полей, у которых поверхности уровня ортогональны в каждой точке пространства.

5.1.50. Вдоль каких линий градиент скалярного поля $U = xy + yz + zx$ сохраняет свое направление?

5.1.51. Найти силовые линии векторного поля

$$\mathbf{F}(nz - ly, lx - mz, my - nx).$$

5.1.52. Найти производную скалярного поля U в направлении градиента скалярного поля V.

5.1.53. Какова связь между поверхностями уровня скалярного поля U и векторными линиями $\mathbf{grad}\, U$.

5.1.54. Верно ли, что если линия, уравнение которой $x^2 + y^2 = 1$, является линией уровня некоторого скалярного поля U, то линия $x^2 + y^2 = 2$ тоже является линией уровня того же скалярного поля?

§ 2. ДИВЕРГЕНЦИЯ И РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

Дивергенция и ротор

⇛ *Дивергенцией* (*расходимостью*) векторного поля $\mathbf{F}(P, Q, R)$ называется скалярное поле, определяемое равенством

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = P'_x + Q'_y + R'_z. \qquad ⇚$$

⇛ *Ротором* векторного поля $\mathbf{F}(P, Q, R)$ называется векторное поле, определяемое следующим образом:

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y). \qquad ⇚$$

Для удобства запоминания ротора принята формальная запись:

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

где «умножение» символов дифференцирования на одну из функций понимается как взятие соответствующей частной производной этой функции.

Физический смысл ротора[2]: если вектор-функция $\mathbf{v}$ является полем скоростей твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, то с точностью до числового множителя ротор векторного поля $\mathbf{v}$ представляет собой мгновенную угловую скорость $\mathbf{w}$ этого вращения: $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$.

Ротор векторного поля называют иногда *вихрем* векторного поля.

Оператор Гамильтона

⇛ *Оператор Гамильтона* или оператор ∇ (*набла*) определяется формулой

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}. \qquad ⇚$$

Применение этого оператора к скалярным и векторным полям с формальной точки зрения соответствует операции «умножения» на вектор с координатами $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$:

$$\nabla U \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) U \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) \equiv \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (P, Q, R) \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что стоящие в правых частях последних трех равенств выражения суть градиент, дивергенция и ротор полей:

$$\nabla U = \mathbf{grad}\, U, \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{F}, \quad \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{rot}\, \mathbf{F}.$$

Оператор Лапласа

⇛ *Оператор Лапласа* (обозначаемый $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla$ *или* Δ) определяется формулой

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad ⇚$$

Применение этого оператора к скалярным и векторным полям определяется равенствами:

$$\Delta U \equiv \nabla^2 U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

$$\Delta \mathbf{F} \equiv \nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = (\nabla^2 P)\mathbf{i} + (\nabla^2 Q)\mathbf{j} + (\nabla^2 R)\mathbf{k}.$$

⇛ Скалярное поле $U(x, y, z)$ называется *гармоническим*, если $\Delta U \equiv 0$. ⇚

[2] О физическом смысле дивергенции будет сказано в следующем параграфе.

5.2.1. Вычислить дивергенцию и ротор векторного поля

$$\mathbf{F} = xy^2 \cdot \mathbf{i} - yz \cdot \mathbf{j} + z^2 \cdot \mathbf{k}.$$

По определению, $\operatorname{div}\mathbf{F} = P'_x + Q'_y + R'_z$. В нашем случае $P = xy^2$, $Q = -yz$, $R = z^2$. Отсюда находим $P'_x = y^2$, $Q'_y = -z$, $R'_z = 2z$. Следовательно, $\operatorname{div}\mathbf{F} = y^2 - z + 2z = y^2 + z$.

Вычислим ротор поля $\mathbf{F}$:

$$\operatorname{\mathbf{rot}}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R'_y - Q'_z)\mathbf{i} + (P'_z - R'_x)\mathbf{j} + (Q'_x - P'_y)\mathbf{k} =$$

$$= (0 + y)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (0 - 2xy)\mathbf{k} = (y, 0, -2xy).$$

Вычислить дивергенцию и ротор векторного поля $\mathbf{F}$:

5.2.2. $\mathbf{F} = \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

5.2.3. $\mathbf{F} = \mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$.

5.2.4. $\mathbf{F}(yz, xz, xy)$.

5.2.5. $\mathbf{F}\left(\frac{1}{2}(y^2 + z^2), \frac{1}{2}(z^2 + x^2), \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)$.

5.2.6. $\mathbf{F} = x^2y \cdot \mathbf{i} + y^2z \cdot \mathbf{j} + z^2x \cdot \mathbf{k}$.

5.2.7. Вычислить дивергенцию и ротор градиента скалярного поля $U = U(x, y, z)$.

5.2.8. Вычислить $\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r}$, где $\mathbf{r}(x, y, z)$ и $r = |\mathbf{r}|$.

$\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x}{r} \cdot \mathbf{i} + \frac{y}{r} \cdot \mathbf{j} + \frac{z}{r} \cdot \mathbf{k}$. Найдем

$$P'_x = \left(\tfrac{x}{r}\right)'_x = \frac{r - x \cdot r'_x}{r^2} =$$

$$= \frac{r - x(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})'_x}{r^2} = \frac{r - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2)}}}{r^2} = \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}.$$

Аналогично находим

$$Q'_y = \left(\frac{y}{r}\right)'_y = \frac{r^2 - y^2}{r^3} \quad \text{и} \quad R'_z = \left(\tfrac{z}{r}\right)'_z = \frac{r^2 - z^2}{r^3}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} = \frac{3r^2 - r^2}{r^3} = \frac{2}{r}.$$

5.2.9. Вычислить $\operatorname{div}(r \cdot \mathbf{r})$.

5.2.10. Вычислить $\operatorname{div}(f(r) \cdot \mathbf{r})$.

5.2.11. Доказать равенство $\operatorname{div}(f \cdot \mathbf{F}) = \operatorname{\mathbf{grad}} f \cdot \mathbf{F} + f \cdot \operatorname{div}\mathbf{F}$.

Пусть $\mathbf{F} = P \cdot \mathbf{i} + Q \cdot \mathbf{j} + R \cdot \mathbf{k}$. Тогда $f \cdot \mathbf{F} = f \cdot P \cdot \mathbf{i} + f \cdot Q \cdot \mathbf{j} + f \cdot R \cdot \mathbf{k}$ и

$$\operatorname{div}(f \cdot \mathbf{F}) = (fP)'_x + (fQ)'_y + (fR)'_z = (f'_x \cdot P + f \cdot P'_x) + (f'_y \cdot Q + f \cdot Q'_y) +$$
$$+ (f'_z \cdot R + f \cdot R'_z) = (f'_x \cdot P + f'_y \cdot Q + f'_z \cdot R) + f \cdot (P'_x + Q'_y + R'_z).$$

В первой скобке стоит скалярное произведение градиента скалярного поля f на вектор $\mathbf{F}$, а во второй — дивергенция векторного поля $\mathbf{F}$. Таким образом, $\operatorname{div}(f\cdot\mathbf{F}) = \mathbf{grad}\, f\cdot\mathbf{F} + f\cdot\operatorname{div}\mathbf{F}$. ●

5.2.12. Доказать свойства линейности дивергенции:

а) $\operatorname{div}(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2) = \operatorname{div}\mathbf{F}_1 + \operatorname{div}\mathbf{F}_2$;

б) $\operatorname{div}(c\cdot\mathbf{F}) = c\cdot\operatorname{div}\mathbf{F}$, где c — константа.

5.2.13. Доказать равенство: $\operatorname{div}(U\cdot\mathbf{c}) = \mathbf{grad}\, U\cdot\mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

5.2.14. Вычислить $\operatorname{div}(U\cdot\mathbf{grad}\, V)$.

5.2.15. Доказать равенство $\operatorname{div}(\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{F}_2$.

5.2.16. Доказать свойства линейности ротора:

а) $\mathbf{rot}\,(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2) = \mathbf{rot}\,\mathbf{F}_1 + \mathbf{rot}\,\mathbf{F}_2$;

б) $\mathbf{rot}\,(c\cdot\mathbf{F}) = c\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$, где c — произвольная постоянная.

5.2.17. Доказать, что $\mathbf{rot}\,(f\cdot\mathbf{F}) = f\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{F} + \mathbf{grad}\, f\times\mathbf{F}$.

◯ Пусть $\mathbf{F} = P\cdot\mathbf{i} + Q\cdot\mathbf{j} + R\cdot\mathbf{k}$. Тогда $f\cdot\mathbf{F} = f\cdot P\cdot\mathbf{i} + f\cdot Q\cdot\mathbf{j} + f\cdot R\cdot\mathbf{k}$. Найдем $\mathbf{rot}\,(f\cdot\mathbf{F})$:

$$\mathbf{rot}\,(f\cdot\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fP & fQ & fR \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}[(fR)'_y - (fQ)'_z] - \mathbf{j}[(fR)'_x - (fP)'_z] + \mathbf{k}[(fQ)'_x - (fP)'_y] =$$

$$= \mathbf{i}[f'_yR + fR'_y - f'_zQ - fQ'_z] - \mathbf{j}[f'_xR + fR'_x - f'_zP - fP'_z] +$$

$$+ \mathbf{k}[f'_xQ + fQ'_x - f'_yP - fP'_y] = f[\mathbf{i}(R'_y - Q'_z) - \mathbf{j}(R'_x - P'_z) + \mathbf{k}(Q'_x - P'_y)] +$$

$$+ [\mathbf{i}(f'_yR - f'_zQ) - \mathbf{j}(f'_xR - f'_zP) + \mathbf{k}(f'_xQ - f'_yP)] =$$

$$= f\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = f\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{F} + \mathbf{grad}\, f\times\mathbf{F}. \quad ●$$

5.2.18. Доказать, что $\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\mathbf{F}) = 0$.

5.2.19. Вычислить ротор векторного поля $\mathbf{F} = r\cdot\mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, а r — модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$.

5.2.20. Для векторного поля $\mathbf{F}(xy, yz, zx)$ вычислить $\mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{F})$.

5.2.21. Найти $\mathbf{grad}\,(\operatorname{div}\mathbf{F})$, если $\mathbf{F}(xyz^2, xy - z, zx^2)$.

5.2.22. Записать с помощью оператора набла ∇ векторные поля:

а) $\mathbf{grad}\,(\operatorname{div}\mathbf{F})$; б) $\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\, U)$.

◯ а) Дивергенция векторного поля $\mathbf{F}$ с помощью оператора ∇ записывается так: $\nabla\cdot\mathbf{F}$. Градиент скалярного поля U через оператор ∇ выражается следующим образом: ∇U. Следовательно,

$$\mathbf{grad}\,(\operatorname{div}\mathbf{F}) = \nabla(\operatorname{div}\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}).$$

б) Ротор векторного поля $\mathbf{F}$ с использованием оператора ∇ записывается следующим образом: $\nabla\times\mathbf{F}$. Следовательно,

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\, U) = \nabla\times(\mathbf{grad}\, U) = \nabla\times(\nabla U). \quad ●$$

5.2.23. Записать с помощью оператора Гамильтона следующие выражения:
а) $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\, U)$; б) $\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\mathbf{F})$;
в) $\mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{F})$; г) $\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\,(\operatorname{div}\mathbf{F}))$.

5.2.24. Доказать следующие равенства:
а) $\nabla \times (\nabla U) = 0$; б) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$;
в) $\nabla \cdot (\nabla U) = \nabla^2 U \equiv \Delta U$.

5.2.25. Доказать свойства линейности оператора Гамильтона:
а) $\nabla(C_1U_1 + C_2U_2) = C_1 \cdot \nabla U_1 + C_2 \cdot \nabla U_2$;
б) $\nabla \cdot (C_1\mathbf{F}_1 + C_2\mathbf{F}_2) = C_1(\nabla \cdot \mathbf{F}_1) + C_2(\nabla \cdot \mathbf{F}_2)$;
в) $\nabla \times (C_1\mathbf{F}_1 + C_2\mathbf{F}_2) = C_1(\nabla \times \mathbf{F}_1) + C_2(\nabla \times \mathbf{F}_2)$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные, U_1, U_2 — скалярные поля, а $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ — векторные поля.

5.2.26. Доказать равенства (U, V — скалярные поля, $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ — векторные поля):
а) $\nabla(U \cdot V) = U\nabla V + V\nabla U$;
б) $\nabla(U \cdot \mathbf{F}) = U(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\nabla U) \cdot \mathbf{F}$;
в) $\nabla(\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot (\nabla \times \mathbf{F}_1) + \mathbf{F}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{F}_2)$;
г) $\nabla \times (U\mathbf{F}) = U(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla U) \times \mathbf{F}$.

Дополнительные задания

Вычислить дивергенцию и ротор векторного поля $\mathbf{F}$*:*

5.2.27. $\mathbf{F} = y \cdot \mathbf{i} + z \cdot \mathbf{j} + x \cdot \mathbf{k}$.

5.2.28. $\mathbf{F} = xy \cdot \mathbf{i} + yz \cdot \mathbf{j} + zx \cdot \mathbf{k}$.

5.2.29. $\mathbf{F} = (x^3 + y^2 + z) \cdot \mathbf{i} + (y^3 + z^2 + x) \cdot \mathbf{j} + (z^3 + x^2 + y) \cdot \mathbf{k}$.

5.2.30. $\mathbf{F} = \dfrac{zy}{x} \cdot \mathbf{i} + \dfrac{xz}{y} \cdot \mathbf{j} + \dfrac{xy}{z} \cdot \mathbf{k}$.

5.2.31. Найти угол между роторами векторных полей $\mathbf{F}_1(x^2y, y^2z, z^2x)$ и $\mathbf{F}_2(z, x, y)$ в точке $M_0(1, 1, 1)$.

5.2.32. Найти длину ротора векторного поля $\mathbf{F}(x - z^2, yz, x^2 + y^2)$ в точке $M(1, 2, -1)$.

5.2.33. В каких точках пространства ротор векторного поля

$$\mathbf{F}(y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2)$$

перпендикулярен оси Ox?

5.2.34. В каких точках пространства ротор векторного поля

$$\mathbf{F}(x^2y, y^2z, z^2x)$$

перпендикулярен плоскости $x + y + z = 2$?

5.2.35. В каких точках пространства роторы векторных полей

$$\mathbf{F}_1(xy, yz, zx) \quad \text{и} \quad \mathbf{F}_2(z, x, y)$$

коллинеарны?

В следующих задачах $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$ *и* $r = |\mathbf{r}|$:

5.2.36. Вычислить $\operatorname{div}(\mathbf{c} \times \mathbf{r})$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

5.2.37. Вычислить $\operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы.

5.2.38. Вычислить $\operatorname{div} \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

5.2.39. Вычислить $\mathbf{rot}\,(\mathbf{c} \times \mathbf{r})$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

5.2.40. Вычислить $\mathbf{rot}\,\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

5.2.41. Вычислить $\mathbf{rot}\,\mathbf{b}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы.

5.2.42. Доказать свойства оператора Лапласа:
а) $\Delta(C_1U_1 + C_2U_2) = C_1\Delta U_1 + C_2\Delta U_2$;
б) $\Delta(U_1 \cdot U_2) = U_1 \cdot \Delta U_2 + 2(\nabla U_1) \cdot (\nabla U_2) + U_2 \cdot \Delta U_1$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

В следующих задачах $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$ *и* $r = |\mathbf{r}|$:

5.2.43. Вычислить дивергенцию и ротор векторного поля $\mathbf{F} = f(r) \cdot \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

5.2.44. Доказать, что если $\operatorname{div}(f(r) \cdot \mathbf{r}) = 0$, то $f(r) = \dfrac{k}{r^3}$.

5.2.45. Вычислить $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\, f(r))$. Какова должна быть функция $f(r)$, чтобы $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\, f(r)) = 0$.

5.2.46. Вычислить $\mathbf{rot}\,[\mathbf{c} \times f(r) \cdot \mathbf{r}]$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

5.2.47. Доказать равенство: $\mathbf{grad}\,(\operatorname{div} \mathbf{F}) = \nabla^2\mathbf{F} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$.

5.2.48. Доказать равенство: $\mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$.

5.2.49. Векторное поле $\mathbf{F}$ задано равенством: $\mathbf{F} = \mathbf{c} \cdot \ln r$, где r — модуль радиуса-вектора точки. Найти $\nabla\mathbf{F}$, $\nabla \times \mathbf{F}$ и $\nabla^2\mathbf{F}$.

§ 3. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задано некоторое векторное поле $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, где $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ — непрерывно дифференцируемые в области Ω функции. Пусть $S \subset \Omega$ — гладкая ориентируемая поверхность, на которой выбрана определенная сторона, задаваемая единичной нормалью $\mathbf{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ к этой поверхности.

⇛ *Потоком векторного поля* $\mathbf{F}$ *через поверхность* S *в направлении единичной нормали* $\mathbf{n}$ называют поверхностный интеграл первого рода:

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS. \tag{3.1}$$

⇚

Если обозначить через $F_{\mathbf{n}}$ проекцию вектора $\mathbf{F}$ на направление вектора $\mathbf{n}$, то, учитывая, что имеет место равенство $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{n}| \cos\varphi = |\mathbf{F}| \cdot \cos\varphi = F_{\mathbf{n}}$ (где φ — угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{n}$), формулу для вычисления потока можно записать в форме, которая не зависит от выбора системы координат:

$$\Pi = \iint\limits_S F_{\mathbf{n}} \cdot dS.$$

Поверхностный интеграл первого рода в формуле (3.1) связан с поверхностным интегралом второго рода равенством:

$$\Pi = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS = \iint\limits_{(S,\mathbf{n})} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy, \quad (3.2)$$

которое дает еще один способ вычисления потока.

Физический смысл потока: если вектор-функция $\mathbf{F}$ есть поле скоростей текущей жидкости, то поток Π этого векторного поля через поверхность S равен общему количеству жидкости, протекающей через S за единицу времени.

Используя понятие потока, можно понять *физический смысл потока* (см. также задачу 5.3.39). Дивергенция векторного поля $\mathbf{F}$ в точке M есть предел отношения потока поля через сферу S достаточно малого радиуса, окружающую точку M, к объему V шара, ограниченного этой сферой, при стремлении диаметра d шара к нулю: $\operatorname{div}\mathbf{F} = \lim\limits_{d\to 0} \frac{1}{V} \iint\limits_S F_{\mathbf{n}} \cdot dS$

Формула Гаусса–Остроградского

Теорема 5.1 (Остроградский). Пусть S — замкнутая гладкая ориентируемая поверхность, являющаяся границей тела V и $\mathbf{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичная внешняя нормаль к S. Пусть векторное поле $\mathbf{F}(P, Q, R)$ — непрерывно дифференцируемо на S и в V. Тогда

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV. \quad (3.3)$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла в правой части равенства (3.3), представляет собой дивергенцию векторного поля $\mathbf{F}$, интеграл, стоящий слева, представляет собой поток векторного поля $\mathbf{F}$ через поверхность S в направлении внешней нормали. Поэтому формула (3.3) может быть переписана в виде:

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV.$$

Если использовать оператор Гамильтона, то формула Гаусса–Остроградского (3.3) может быть записана в следующей форме:

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint\limits_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV.$$

Формулу Гаусса–Остроградского часто применяют для вычисления потока векторного поля через замкнутую поверхность S. Однако следует иметь в виду, что для применения этой формулы необходимо, чтобы векторное поле было непрерывно дифференцируемым внутри поверхности S. Это условие всегда будет выполнено, если область Ω, в которой рассматривается поверхность S, *пространственно односвязная*:

⇛ Область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ называется *пространственно односвязной*, если из того, что замкнутая поверхность S лежит в Ω, следует, что тело V, границей которого является поверхность S, тоже лежит в Ω. ⇚

5.3.1. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{F}(P, Q, R)$ через поверхность S в сторону, определяемую вектором единичной нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S, если:

а) $\mathbf{F}(4, -5, 2)$, а S — часть плоскости $x + 2y + 3z = 6$, расположенная в октанте $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $\mathbf{n}$ образует острый угол с осью Oz;

б) $\mathbf{F}(0, y, 0)$, S — часть плоскости $1 - x + y - z = 0$, расположенная в октанте $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, $z \geqslant 0$, а $\mathbf{n}$ образует острый угол с осью Oz;

в) $\mathbf{F}(1, 1, z)$, S — часть параболоида $z = x^2 + y^2$, удовлетворяющая условию $z \leqslant 1$, а $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к параболоиду.

○ а) Хорошо известно, что нормальным вектором к плоскости является вектор, координаты которого суть коэффициенты при неизвестных в уравнении плоскости. В нашем случае — это вектор $\mathbf{m}(1, 2, 3)$. Поскольку $\mathbf{m} \cdot \mathbf{F} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 2 = 0$, то нормаль $\mathbf{m}$ к плоскости, (а, значит, и единичная нормаль $\mathbf{n}$ к этой плоскости) перпендикулярна векторному полю. Но тогда

$$\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint\limits_S 0\, dS = 0.$$

б) Вычислим поток векторного поля с помощью поверхностного интеграла II рода (формула (3.2))

$$\Pi = \iint\limits_{(S,\mathbf{n})} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdxy = \iint\limits_{(S,\mathbf{n})} y\, dzdx$$

(в нашем случае $P = R = 0$, $Q = y$). Для вычисления последнего интеграла изобразим на чертеже поверхность S (рис. 53) и ее проекцию D_{xz} на плоскость Oxz (рис. 54)

Нормаль $\mathbf{n}$ к плоскости $1 - x + y - z = 0$, образующая острый угол с осью Oz, образует тупой угол с осью Oy (это очевидно из чертежа; однако несложно показать, что нужную сторону поверхности S задает единичная нормаль $\mathbf{n}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; здесь $\cos\gamma > 0$, а $\cos\beta < 0$, следовательно, $\mathbf{n}$ образует острый угол с осью Oz и тупой — с осью Oy). Поэтому при сведении поверхностного интеграла к двойному по области D_{xz} перед

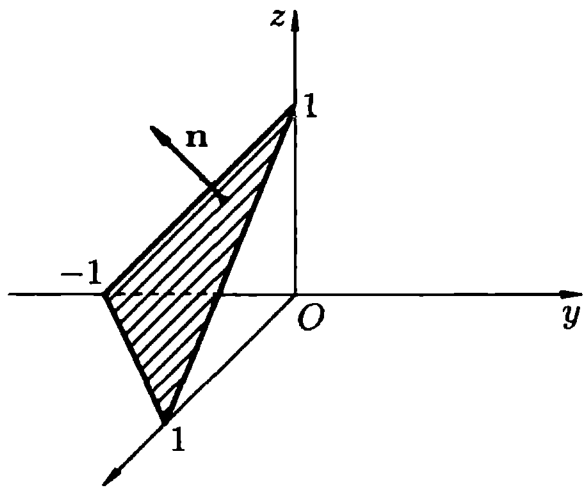


Рис. 53

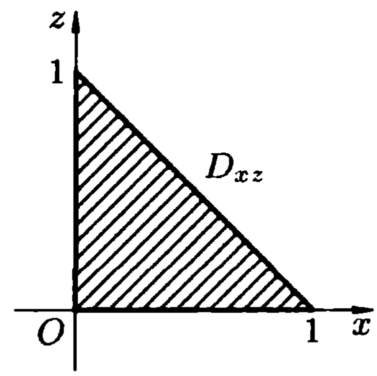


Рис. 54

двойным интегралом необходимо поставить знак минус:

$$\Pi = \iint\limits_{(S,\mathbf{n})} y\,dzdx = -\iint\limits_{D_{xz}} (z+x-1)\,dxdz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (z+x-1)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}z^2 + xz - z\right)\Big|_0^{1-x} dx = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2}(1-x)^2 + x(1-x) - (1-x)\right] dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\right) dx = \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{6}.$$

в) Изобразим поверхность S вместе с требуемой в условии задачи нормалью на рис. 55.

Из геометрических соображений понятно, что единичная нормаль $\mathbf{n}$ (т. к. она — внешняя нормаль) образует тупой угол с осью Oz. Также ясно, что она образует острый угол с осью Ox в тех точках, где $x \geqslant 0$ и тупой — в тех, где $x < 0$. Аналогично, $\mathbf{n}$ образует острый (тупой) угол с осью Oy в точках, где выполняется неравенство $y > 0$ ($y < 0$). Для вычисления потока векторного поля напишем интеграл II рода:

$$\Pi = \iint\limits_{(S,\mathbf{n})} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_{(S,\mathbf{n})} dydz + dzdx + z\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(S,\mathbf{n})} dydz + \iint\limits_{(S,\mathbf{n})} dzdx + \iint\limits_{(S,\mathbf{n})} z\,dxdy.$$

Вычислим каждый из трех интегралов отдельно. Для вычисления интеграла

$$\iint\limits_{(S,\mathbf{n})} dydz$$

разобьем поверхность S на две части: S_1 и S_2 плоскостью Ozy (S_1 отвечает той части параболоида, где $x \geqslant 0$). Необходимость разбиения продиктована, как уже отмечалось выше, тем фактором, что нормаль $\mathbf{n}$ на S_1 образует острый угол с осью Ox (т.е. $\cos\alpha > 0$), а на S_2 — тупой. Проекцией и S_1 и S_2 на плоскость Ozy является одна и та же область D_{zy}, показанная на рис. 56. Следовательно,

$$\iint\limits_{(S,\mathbf{n})} dydz = \iint\limits_{(S_1,\mathbf{n})} dydz + \iint\limits_{(S_2,\mathbf{n})} dydz = \iint\limits_{D_{zy}} dydz - \iint\limits_{D_{zy}} dydz = 0.$$

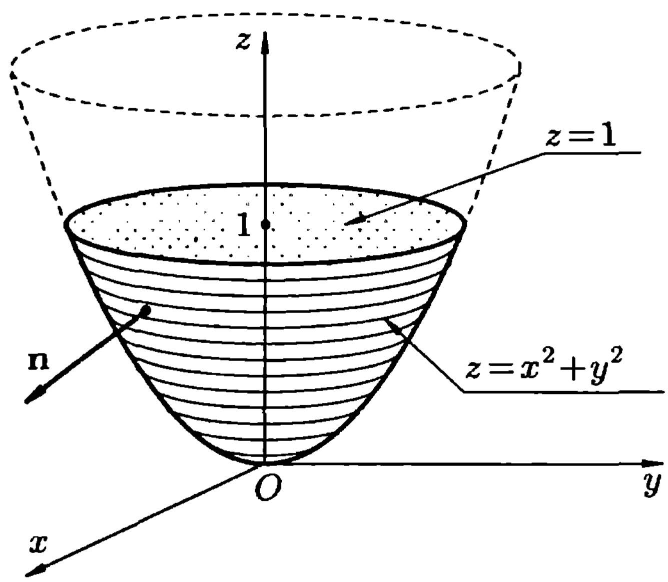


Рис. 55

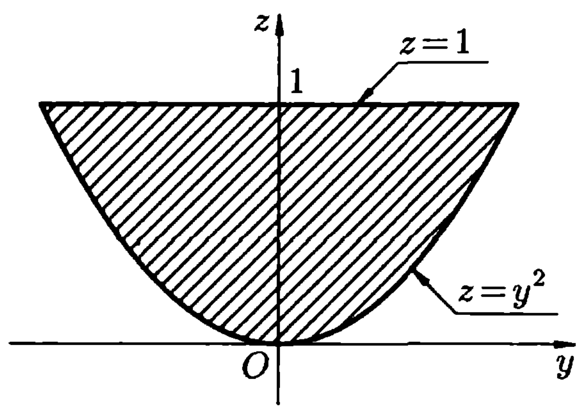


Рис. 56

Знак минус перед вторым двойным интегралом поставлен постольку, поскольку на S_2 нормаль образует тупой угол с осью Ox (или, что то же самое, $\cos\alpha < 0$). Из соображений симметрии понятно, что и

$$\iint\limits_{(S,\mathbf{n})} dzdx = 0.$$

Осталось вычислить

$$\iint\limits_{(S,\mathbf{n})} z\, dxdy.$$

Как отмечено выше, $\cos\gamma < 0$. Поэтому имеем:

$$\iint\limits_{(S,\mathbf{n})} z\, dxdy = - \iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2)\, dxdy,$$

где D_{xy} — проекция поверхности S на плоскость xOy (она изображена на рис. 57). Для вычисления последнего интеграла перейдем к полярным координатам:

$$- \iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2)\, dxdy = - \iint\limits_{D'_{\rho\varphi}} \rho^2 \cdot \rho\, d\rho d\varphi = - \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3\, d\rho = -\frac{\pi}{2}.$$

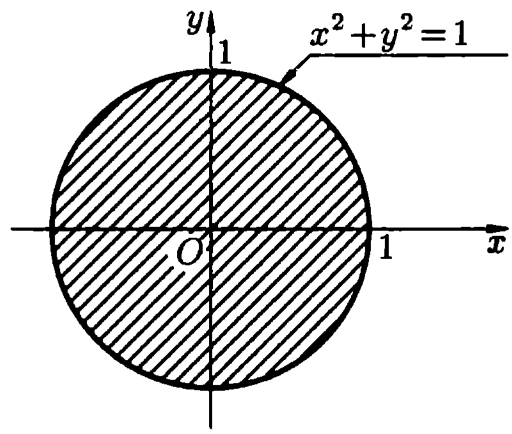


Рис. 57

Таким образом, поток векторного поля равен $-\frac{\pi}{2}$. ●

Вычислить поток векторного поля $\mathbf{F}(P, Q, R)$ *через поверхность* S *в сторону, определяемую нормалью* $\mathbf{n}$ *к поверхности* S*, если:*

5.3.2. $\mathbf{F}(2, -1, 1)$, S — квадрат: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $z = 1$, нормаль $\mathbf{n}$ направлена вверх.

5.3.3. $\mathbf{F}(-y, x, z)$, S — часть цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль.

5.3.4. $\mathbf{F}(x, y, 0)$, S — часть плоскости $y + z = 1$, расположенная в первом октанте между плоскостями $x = 0$ и $x = 1$, $\mathbf{n}$ образует острый угол с осью Oy.

5.3.5. $\mathbf{F}(x, y, z)$, S — полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенная в полупространстве $z \geqslant 0$, $\mathbf{n}$ образует острый угол с осью Oz.

5.3.6. $\mathbf{F}(y-z, z-x, x-y)$, S — часть конуса $z^2 = x^2+y^2$, заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = 2$, $\mathbf{n}$ образует тупой угол с осью Oz.

5.3.7. $\mathbf{F}(1, 0, 0)$, S — поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

5.3.8. $\mathbf{F}(xy, yz, xz)$, S — часть сферы $x^2+y^2+z^2 = R^2$, расположенная в первом октанте, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к сфере.

5.3.9. Пользуясь формулой Гаусса–Остроградского вычислить поток векторного $\mathbf{F}$ поля через замкнутую поверхность S в направлении внешней нормали:

а) $\mathbf{F} = x^2 \cdot \mathbf{i} + y^2 \cdot \mathbf{j} + z^2 \cdot \mathbf{k}$, S — поверхность куба $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$;

б) $\mathbf{F}(x(z-y), y(x-z), z(y-x))$, S — произвольная замкнутая поверхность.

◐ а) Вычислим дивергенцию поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = (x^2)'_x + (y^2)'_y + (z^2)'_z = 2(x + y + z).$$

Воспользовавшись формулой Гаусса–Остроградского, вычислим поток векторного поля:

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = 2\iiint\limits_V (x+y+z)\,dxdydz =$$
$$= 2\int\limits_0^a dx\int\limits_0^a dy\int\limits_0^a (x+y+z)\,dz = 3a^4.$$

Промежуточные вычисления, в силу их очевидности, опущены.

б) Пусть V — тело, ограниченное поверхностью S. Тогда

$$\Pi = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV.$$

Но

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = [x(z-y)]'_x + [y(x-z)]'_y + [z(y-x)]'_z = (z-y)+(x-z)+(y-x) = 0.$$

Следовательно, и поток равен 0. ●

5.3.10. Доказать, что поток постоянного векторного поля $\mathbf{F}=\mathbf{c}$ через любую замкнутую поверхность равен 0.

5.3.11. Докажите, пользуясь формулой Гаусса–Остроградского, что поток радиуса-вектора $\mathbf{r}$ через любую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен утроенному объему тела, ограниченного этой поверхностью.

В задачах 5.3.12–5.3.14 вычислить поток векторного поля $\mathbf{F}$ *через замкнутую поверхность* S *в направлении внешней нормали, если:*

5.3.12. $\mathbf{F}(x,z,y)$, S — полная поверхность цилиндра $x^2+y^2=R^2$, $z=0$, $z=H$.

5.3.13. $\mathbf{F} = xz\cdot\mathbf{i} + y^2\cdot\mathbf{j} + x\cdot\mathbf{k}$, S — полная поверхность призмы, ограниченной плоскостями $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=1$.

5.3.14. $\mathbf{F} = (y^2-z)\cdot\mathbf{i} + xy\cdot\mathbf{j} - (y+x)\cdot\mathbf{k}$, S — полная поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

5.3.15. Используя задачу 5.3.11, найти поток радиуса-вектора $\mathbf{r}$ через полную поверхность пирамиды $ABCD$ с вершинами в точках $A(-1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(1,-1,0)$, $D(0,2,3)$.

5.3.16. Найти поток градиента скалярного поля $U=x^2+y^2+z^2$ через поверхность уровня $U=1$ этого скалярного поля в направлении внешней нормали.

5.3.17. Найти поток ротора векторного поля $\mathbf{F}(yz,zx,xy)$ через сферу $x^2+y^2+z^2=4$ в направлении внешней нормали.

5.3.18. Найти поток векторного поля $\mathbf{F}(x-1,y+3,z)$ через боковую поверхность конуса $z^2=x^2+y^2$, заключенную между плоскостями $z=0$ и $z=1$ в направлении внешней нормали.

◔ Рассмотрим тело V, границей которого служит коническая поверхность $z^2=x^2+y^2$ (S_1) и плоскость $z=1$ (S_2) (см. рис. 58).

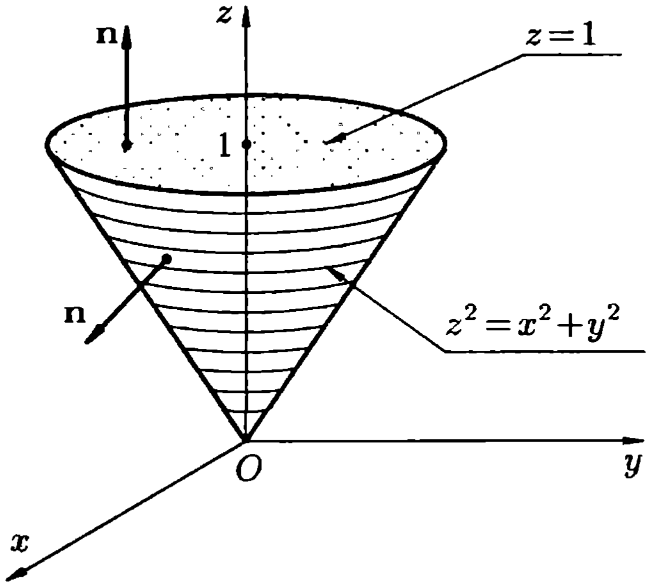


Рис. 58

На поверхности $S = S_1 \cup S_2$, являющейся объединением поверхностей S_1 и S_2, возьмем внешнюю нормаль $\mathbf{n}$. Поток П через поверхность S складывается из потоков Π_1 и Π_2 через поверхности S_1 и S_2 соответственно. Следовательно, интересующий нас поток может быть найден как разность потоков: $\Pi_1 = \Pi - \Pi_2$. Поток П может быть найден по формуле Гаусса–Остроградского:

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint\limits_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = 3 \iiint\limits_V dV.$$

Последний интеграл представляет собой объем тела V. Тело представляет собой конус с высотой $h = 1$ и радиусом основания $R = 1$. По известной из элементарной математики формуле, его объем равен $\frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi$. Отсюда $\Pi = 3 \cdot \frac{1}{3}\pi = \pi$. Поток Π_2 (через плоскость $z = 1$) может быть вычислен довольно просто. Внешней единичной нормалью к плоскости является вектор $\mathbf{n}(0, 0, 1)$. Поэтому

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint\limits_{S_2} z\, dS.$$

Поскольку $z = 1$ на S_2, а элемент площади (dS) равен элементу площади ее проекции на плоскость Oxy ($dxdy$), то последний интеграл сводится к двойному:

$$\iint\limits_{D_{xy}} dxdy,$$

где D_{xy} — круг с центром в начале координат и радиуса 1. Этот интеграл выражает площадь этого круга, которая равна π. Следовательно, искомый поток через коническую поверхность равен $\Pi_1 = \Pi - \Pi_2 = \pi - \pi = 0$. ●

Найти поток векторного поля $\mathbf{F}$ *через незамкнутую поверхность* S *в направлении нормали* $\mathbf{n}$*, используя формулу Гаусса–Остроградского:*

5.3.19. $\mathbf{F}(1,2,3)$, S — боковая поверхность конуса, осью которого служит ось Oz, вершина находится в точке $M(h,0,0)$, а основание — круг радиуса R, лежащий в плоскости Oxy.

5.3.20. $\mathbf{F}(x^3,y^3,0)$, S — верхняя часть сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенная выше плоскости Oxy, $\mathbf{n}$ образует острый угол с осью Oz.

5.3.21. $\mathbf{F}(2x,-y,z)$, S — боковая поверхность цилиндра $x^2+y^2=R^2$, расположенного между плоскостями $z=0$ и $z=H$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль.

5.3.22. $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+y\mathbf{k}$, S — часть поверхности параболического цилиндра $z=1-x^2$, отсеченная плоскостями $y=0$, $y=1$, $z=0$, $\mathbf{n}$ — нормаль, образующая острый угол с осью Oz.

5.3.23. $\mathbf{F}=(y-1)\mathbf{i}+\mathbf{j}-y\mathbf{k}$, S — часть цилиндра $x^2+y^2=1$, расположенная между плоскостями $z=0$ и $x+y+z=5$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль.

5.3.24. Найти поток градиента скалярного поля $U=x^2+yz$ через часть сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y\geqslant 0$ в направлении единичной нормали, образующей острый угол с осью Oy.

Дополнительные задания

Вычислить поток векторного поля $\mathbf{F}$ *через поверхность* S *в сторону, определяемую единичной нормалью* $\mathbf{n}$ *к поверхности* S*:*

5.3.25. $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-z\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$, S — прямоугольник: $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 1$, нормаль $\mathbf{n}$ направлена вверх.

5.3.26. $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}-2xy\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, S — сфера: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль.

5.3.27. $\mathbf{F}=(1-yz)\mathbf{i}+(1+xz)\mathbf{j}+2(x+y)\mathbf{k}$, S — часть параболоида $z=x^2+y^2$, заключенная между плоскостями $z=0$, $z=1$, $\mathbf{n}$ — нормаль, образующая тупой угол с осью Oz.

5.3.28. $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+(1-z)\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$, S — часть плоскости $x+y=1$, ограниченная плоскостями $z=0$, $z=1$, $x=0$, $y=0$, $\mathbf{n}$ — нормаль, образующая острый угол с осью Ox.

5.3.29. $\mathbf{F}(0,0,z)$, S — часть конуса $z^2=x^2+y^2$, заключенная между плоскостями $z=0$, $z=1$, $\mathbf{n}$ — нормаль, образующая тупой угол с осью Oz.

5.3.30. $\mathbf{F}(x^2,y^2,z^2)$, S — боковая поверхность цилиндра, заключенная между плоскостями $z=0$, $z=2$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль.

5.3.31. Найти поток радиуса-вектора $\mathbf{r}$ через боковую поверхность пирамиды, вершина которой находится в точке $A(4,5,3)$, а основанием служит четырехугольник с вершинами $B(0,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(3,-1,0)$, $E(2,-2,0)$.

5.3.32. Найти поток векторного поля $\mathbf{F}(yz, x+2yz, z^2-z)$ через поверхность параллелепипеда, построенного на векторах **OA**, **OB** и **OC**, где $O(0,0,0)$, $A(1,-2,1)$, $B(3,2,1)$, $C(1,0,-1)$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

5.3.33. Показать, что поток градиента скалярного поля U, являющегося гармонической функцией (т. е. удовлетворяющей уравнению $\Delta U = 0$) через любую замкнутую поверхность равен 0.

5.3.34. Показать, что поток $\mathbf{grad}\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, а $\mathbf{c}$ — фиксированный вектор, через произвольную замкнутую поверхность равен 0.

5.3.35. Найти поток поля $\mathbf{c}\times\mathbf{r}$ через поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ в направлении внешней нормали.

5.3.36. Отрезок кривой $z=\sqrt{y}$, лежащий в плоскости Ozy между точками $O(0,0,0)$ и $A(0,1,1)$, вращаясь вокруг оси Oz образует поверхность S. Найти поток векторного поля $\mathbf{F}(y,x,z-1)$ через поверхность S в направлении внешней нормали.

5.3.37. Найти поток векторного поля $\mathbf{F}(x^3,y^3,z^3)$ через сферу:

а) $x^2+y^2+z^2=R^2$;

б) $x^2-x+y^2+z^2=0$ в направлении внешней нормали.

5.3.38. Найти поток векторного поля $\mathbf{F}\left(\dfrac{x^3}{3a^2},\dfrac{y^3}{3b^2},\dfrac{z^3}{3c^2}\right)$ через поверхность эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

в направлении внешней нормали.

5.3.39. Пользуясь формулой Гаусса–Остроградского доказать формулу:

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(M)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{|V_\varepsilon|}\iint\limits_{S_\varepsilon}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS\right],$$

где V_ε — шар с центром в точке M, а S_ε — ограничивающая его сфера, $|V_\varepsilon|$ — объем этого шара. Используя этот факт показать, что дивергенция не зависит от выбора прямоугольной системы координат.

5.3.40. Пусть U — дважды непрерывно дифференцируемое скалярное поле в пространственно односвязной области Ω. Пусть тело V вместе со своей границей S лежит в Ω, а $\dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$ — производная поля U в направлении внешней нормали к поверхности S. Доказать, что

$$\iiint\limits_V \Delta U\,dV = \iint\limits_S \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}\,dS \quad \text{(теорема Гаусса)}.$$

5.3.41. Пусть U, V — дважды непрерывно дифференцируемые скалярные поля в пространственно односвязной области Ω. Пусть тело V вместе со своей границей S лежит в Ω, а $\dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$ и $\dfrac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}$ — производные полей U и V в направлении внешней нормали к поверхности S. Доказать, что:

а) $\displaystyle\iint\limits_S U\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}\,dS = \iiint\limits_V |\nabla U|^2\,dV + \iiint\limits_V U\cdot\nabla^2 U\,dV$;

б) $\displaystyle\iint\limits_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} & \dfrac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \\ U & V \end{vmatrix}\,dS = \iiint\limits_V \begin{vmatrix} \Delta U & \Delta V \\ U & V \end{vmatrix}\,dV.$

§ 4. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ — векторное поле, заданное в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, и функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ — непрерывно дифференцируемы в области Ω. Пусть L — гладкая кривая, расположенная в области Ω.

⇛ Криволинейный интеграл

$$A = \int\limits_L \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{4.1}$$

называется *работой векторного поля* $\mathbf{F}$ *вдоль кривой* L. ⇚

⇛ В случае, если L — замкнутая кривая, то криволинейный интеграл (4.1) называется *циркуляцией векторного поля* $\mathbf{F}$ *вдоль кривой* L. ⇚

Таким образом, циркуляция поля $\mathbf{F}$ равна:

$$\text{Ц} = \oint\limits_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

В случае, когда векторное поле $\mathbf{F}(P,Q)$ — плоское, его циркуляция вдоль замкнутой кривой L задается интегралом:

$$\text{Ц} = \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy.$$

Формула Стокса

Теорема 5.2 (Стокс). Пусть S — гладкая ориентируемая поверхность, а L — замкнутая гладкая кривая, являющаяся границей поверхности S. Пусть $\mathbf{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичная нормаль к поверхности S, задающая одну из ее сторон. Пусть векторное поле $\mathbf{F}(P, Q, R)$ — непрерывно дифференцируемо на S и L. Тогда

$$\oint P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$
$$=\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS=$$
$$=\iint\limits_{(S,\mathbf{n})}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \quad (4.2)$$

причем направление обхода контура L выбрано так, что при взгляде с конца вектора $\mathbf{n}$ оно происходит против часовой стрелки.

Левый интеграл в формуле (4.2) представляет собой циркуляцию векторного поля $\mathbf{F}$ вдоль контура L, а правый — поток ротора этого поля через поверхность S. Поэтому формулу Стокса удобно записывать в векторной форме:

$$\oint\limits_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint\limits_S \mathbf{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint\limits_S(\mathbf{rot}\,\mathbf{F})_{\mathbf{n}}\,dS,$$

т. е. поток ротора векторного поля $\mathbf{F}$ через ориентированную поверхность S равен циркуляции поля $\mathbf{F}$ вдоль контура L этой поверхности (проходимого в положительном направлении). Используя оператор Гамильтона, формулу Стокса можно записать в виде:

$$\oint\limits_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint\limits_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

В случае, когда векторное поле $\mathbf{F}(P, Q)$ — плоское, формула Стокса принимает вид формулы Грина:

$$\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy=\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Формулу Стокса часто применяют для вычисления циркуляции векторного поля. Однако следует помнить, что для того, чтобы можно было применить формулу Стокса к контуру $L\subset\Omega$, необходимо, чтобы нашлась поверхность S, целиком лежащая в Ω, границей которой был бы контур L.

Область Ω, обладающая таким свойством, называется *поверхностно односвязной* областью. Более точно, область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ называется *поверхностно односвязной*, если для любого замкнутого контура $L\subset\Omega$ найдется поверхность $S\subset\Omega$, границей которого является контур L.

5.4.1. Найти работу плоского векторного поля $\mathbf{F}(P, Q)$ вдоль кривой L:

а) $\mathbf{F}(x^2, yx)$, L — часть параболы $y = x^2$, концевыми точками которой служат точки $A(0,0)$ и $B(2,4)$;

б) $\mathbf{F}(y, x)$, L — арка циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

❍ а) Вычислим работу поля, применяя формулу (4.1):

$$A = \int\limits_L x^2\,dx + yx\,dy$$

(т. к. поле плоское, то $R = 0$). Поскольку вдоль кривой L переменные связаны равенством $y = x^2$, то $dy = 2x\,dx$, и криволинейный интеграл сводится к определенному интегралу:

$$A = \int\limits_0^2 x^2\,dx + x^2 \cdot x \cdot 2x\,dx = \int\limits_0^2 (x^2 + 2x^4)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5\right)\Big|_0^2 = \frac{232}{15}.$$

б) Находим $dx = (1 - \cos t)\,dt$ и $dy = \sin t\,dt$. Тогда

$$A = \int\limits_L y\,dx + x\,dy = \int\limits_0^{2\pi} [(1 - \cos t)(1 - \cos t) + (t - \sin t)\sin t]\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} [1 - 2\cos t + \cos^2 t + t\sin t - \sin^2 t]\,dt = \int\limits_0^{2\pi} [1 - 2\cos t + \cos 2t + t\sin t]\,dt =$$

$$= \left(t - 2\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t - t\cos t + \sin t\right)\Big|_0^{2\pi} = 0. \quad ●$$

5.4.2. Найти работу векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z)$ вдоль линии L, являющейся пересечением параболического цилиндра $z = y^2$ с плоскостью $z + x = 1$ от точки $A(0,1,1)$ до точки $B(1,0,0)$.

❍ Зададим линию L параметрически: положив $y = t$, получим $z = t^2$, а $x = 1 - z = 1 - t^2$. Тогда $dx = -2t\,dt$, $dy = dt$, $dz = 2t\,dt$. Точке A соответствует значение параметра $t = 1$, а точке B — значение $t = 0$. Таким образом,

$$A = \int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_1^0 (1 - t^2) \cdot (-2t)\,dt + t\,dt + t^2 \cdot 2t\,dt =$$

$$= \int\limits_1^0 (-2t + 2t^3 + t + 2^3)\,dt = \int\limits_1^0 (4t^3 - t)\,dt = \left(t^4 - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^0 =$$

$$= 0 - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}. \quad ●$$

Найти работу плоского векторного поля $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ вдоль кривой L:

5.4.3. $\mathbf{F} = -\frac{1}{y}\mathbf{i} + \frac{1}{x}\mathbf{j}$, L — часть окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащая в I четверти и пробегаемая против часовой стрелки.

5.4.4. $\mathbf{F} = -x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$, L задана параметрически уравнениями $x = \sqrt{\cos t}$, $y = \sqrt{\sin t}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

5.4.5. $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, L — ломаная ABC, где $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,4)$.

Найти работу пространственного векторного поля $\mathbf{F}(P,Q,R)$ *вдоль кривой* L:

5.4.6. $\mathbf{F}(x,2y,-z)$, L — отрезок AB прямой, задаваемой уравнениями $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$, где $A(1,0,-1)$, $B(3,1,-2)$.

5.4.7. $\mathbf{F}(x,y,1)$, L — первый виток винтовой линии, заданной параметрически уравнениями $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = at$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

5.4.8. $\mathbf{F}(z,1,2y)$, L — часть окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

5.4.9. Найти работу градиента скалярного поля $U = xyz$ вдоль отрезка прямой AB, где $A(1,2,3)$, $B(3,-2,3)$.

5.4.10. Найти работу ротора векторного поля $\mathbf{F}(y,z,x)$ вдоль конической спирали $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

5.4.11. Найти циркуляцию плоского векторного поля $\mathbf{F}(P,Q)$ по замкнутой кривой L в положительном направлении:

а) $\mathbf{F}(-y,x)$, L — окружность, задаваемая уравнением

$$x^2 + (y+1)^2 = R^2;$$

б) $\mathbf{F}(2y,x)$, L — контур треугольника ABC, где $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$.

а) Запишем параметрические уравнения окружности: $x = R\cos t$, $y = R\sin t - 1$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Находим $dx = -R\sin t\,dt$, $dy = R\cos t\,dt$. Тогда циркуляция поля $\mathbf{F}$ вдоль кривой L будет равна:

$$Ц = \oint\limits_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint\limits_L -y\,dx + x\,dy = \int\limits_0^{2\pi} \left[(R\sin t - 1)R\sin t + R^2\cos^2 t\right] dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (R^2 - R\sin t)\,dt = (R^2 t + R\cos t)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R^2.$$

б) *Первый способ.*

Контур L есть объединение отрезков AB, BC и CA. Поэтому циркуляция поля $\mathbf{F}$ вдоль кривой L будет равна:

$$Ц = \oint\limits_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\limits_{AB} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int\limits_{BC} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int\limits_{CA} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

Вычислим каждый из интегралов. Вдоль отрезка AB имеем $y = 0$ и, стало быть, $dy = 0$. Следовательно,

$$\int\limits_{AB} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\limits_{AB} 2y\,dx + x\,dy = 0.$$

Вдоль отрезка BC имеем $x = 1$ и $dx = 0$. Поэтому

$$\int\limits_{BC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\limits_{BC} 2y\,dx + x\,dy = \int\limits_0^1 dy = 1.$$

Наконец, вдоль отрезка CA имеем $y = x$ и $dy = dx$. Следовательно,

$$\int\limits_{CA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\limits_{CA} 2y\,dx + x\,dy = \int\limits_1^0 3x\,dx = \frac{3x^2}{2}\bigg|_1^0 = -\frac{3}{2}.$$

Таким образом, циркуляция поля $\mathbf{F}$ вдоль контура L будет равна: Ц $=$ $= 0 + 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.

Второй способ.

Вычислим циркуляцию, применив формулу Грина:

$$\text{Ц} = \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

где областью D является треугольник ABC. В нашем случае $P = 2y$, $Q = x$. Следовательно, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, а $\frac{\partial P}{\partial y} = 2$. Тогда циркуляция поля $\mathbf{F}$ вдоль L равна

$$\text{Ц} = \iint\limits_D (1-2)\,dxdy = -\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy = -\int\limits_0^1 y\Big|_0^x\,dx = -\int\limits_0^1 x\,dx = -\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}.$$

●

Найти циркуляцию плоского векторного поля $\mathbf{F}(p, Q)$ *вдоль кривой* L *(направление обхода — положительное):*

5.4.12. $\mathbf{F}(y^2, 2xy)$, L — произвольный замкнутый контур.

5.4.13. $\mathbf{F}(y, -x)$, L — окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

5.4.14. $\mathbf{F}(y, -x)$, L — окружность $(x-1)^2 + (y+1)^2 = R^2$.

5.4.15. $\mathbf{F}(2x - xy^2, -2xy)$, L — ломаная ABA, где $A(0,0)$, $B(1,1)$, кривая AB — кусок параболы $y = x^2$, а BA — отрезок прямой.

5.4.16. $\mathbf{F}(xy, 1)$, L — граница квадрата $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

5.4.17. Вычислить циркуляцию пространственного векторного поля $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ вдоль эллипса L, получающегося пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ с плоскостью $x + y + z = 1$ (при взгляде с положительного направления оси Oz обход контура L совершается против часовой стрелки).

❍ *Первый способ.*

Запишем параметрические уравнения эллипса: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1 - \cos t - \sin t$. При изменении параметра t от 0 до 2π получаем требуемое направление обхода контура L. Вычислим теперь циркуляцию:

$$Ц = \oint\limits_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \oint\limits_L -x\,dx + x\,dy + y\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} [(-\cos t)\cdot(-\sin t) + \cos t\cdot\cos t + \sin t(\sin t - \cos t)]\,dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Второй способ.

Вычислим циркуляцию, применив формулу Стокса, причем в качестве поверхности S, ограничиваемой кривой L, выберем часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$. Единичную нормаль к плоскости выберем так, чтобы, глядя с ее конца, направление обхода контура L проходило против часовой стрелки. Такой единичной нормалью будет вектор $\mathbf{n}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. По формуле Стокса имеем:

$$Ц = \oint\limits_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint \mathbf{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS =$$

$$= \iint\limits_S [(R'_y - Q'_z)\cos\alpha + (P'_z - R'_x)\cos\beta + (Q'_x - P'_y)\cos\gamma]\,dS =$$

$$= \iint\limits_S \left[(1-0)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + (0-0)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + (1-0)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right]dS = \iint\limits_S \frac{2}{\sqrt{3}}\,dS.$$

Вычисление последнего интеграла сведем к вычислению двойного интеграла по области D_{xy}, являющейся проекцией поверхности S на плоскость Oxy. Этой областью будет круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Поскольку $dS = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{3}\,dxdy$, то окончательно получаем:

$$Ц = \iint\limits_S \frac{2}{\sqrt{3}}\,dS = \iint\limits_{D_{xy}} 2\,dxdy = 2\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = 2S(D_{xy}) = 2\pi.$$ ●

Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{F}(P, Q, R)$ *вдоль замкнутого контура* L*:*

5.4.18. $\mathbf{F}(x^2, y^2, z^2)$, L — окружность, параметрические уравнения которой: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$, направление обхода — в сторону увеличения параметра t.

5.4.19. $\mathbf{F}(y+z, z+x, x+y)$, L — окружность, получающаяся пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и плоскости $x + y + z = 0$, направление обхода— против часовой стрелки, если смотреть с конца оси Oz.

5.4.20. $\mathbf{F}(x-y, y-z, z-x)$, L — контур треугольника ABC, $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(1,0,1)$.

5.4.21. $\mathbf{F}\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$,

а) L — окружность: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = h$; направление обхода — в сторону увеличения параметра;

б) L — окружность: $x = \cos t + 2$, $y = \sin t + 2$, $z = h$; направление обхода — в сторону увеличения параметра.

5.4.22. $\mathbf{F}(x - 2y - z, x - z, y + x)$, L — контур треугольника ABC, где $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

5.4.23. Найти поток ротора векторного поля $\mathbf{F}(y, z, x)$ через поверхность параболоида $z = 4 - x^2 - y^2$, расположенную выше плоскости Oxy в направлении нормали, у которой $\cos\gamma > 0$.

○ При решении данной задачи имеет смысл воспользоваться теоремой Стокса, поскольку вычисление потока, проведенное непосредственно, сложнее, нежели вычисление циркуляции по границе поверхности. Границей параболоида является окружность L, лежащая в плоскости xOy, параметрические уравнения которой: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 0$. Таким образом,

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint\limits_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint\limits_L y\,dx + z\,dy + x\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} 2\sin t(-2\sin t)\,dt = -4\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\,dt = -2\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = -4\pi.$$

Замечание. Если в аналогичных задачах вычисление циркуляции затруднительно, то можно вновь воспользоваться теоремой Стокса, рассмотрев другую, более простую поверхность, которую ограничивает данный контур. В нашем случае — это мог быть круг в плоскости Oxy: $x^2 + y^2 \leqslant 4$. ●

5.4.24. Найти поток ротора векторного поля $\mathbf{F}(xz^2, y^2z, z + y)$ через часть поверхности конуса $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$, расположенную между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$ в направлении внешней нормали.

5.4.25. Найти поток ротора векторного поля $\mathbf{F}(z, x, y)$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(z \geqslant 0)$ в направлении внешней нормали.

5.4.26. Тело вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz. Вычислить циркуляцию поля линейных скоростей вдоль окружности единичного радиуса, центр которой лежит на оси вращения, а плоскость, в которой лежит окружность, перпендикулярна оси Oz, в направлении оси вращения.

Дополнительные задания

5.4.27. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ вдоль ломаной ABC, где $A(1,1)$, $B(4,2)$, $C(0,4)$.

5.4.28. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{F}(-y, x)$ вдоль кардиоиды $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$ в сторону увеличения параметра.

5.4.29. Показать, что циркуляция радиуса-вектора $\mathbf{r}$ вдоль любого замкнутого контура равна 0.

5.4.30. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{F}(-y, x, 1)$

а) вдоль окружности $(x-3)^2 + y^2 = 1$, $z = 1$;

б) вдоль окружности $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$.

5.4.31. Показать, что циркуляция постоянного векторного поля $\mathbf{F} = \mathbf{c}$ вдоль любой гладкой замкнутой линии L равна 0.

5.4.32. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{F}(z, 2, 1)$ вдоль ломаной ABC, где $A(1,3,2)$, $B(0,0,1)$, $C(-1,-1,1)$.

5.4.33. Найти циркуляцию векторного поля

$$\mathbf{F} = (z + 2x - 3y)\mathbf{i} + (x + y - 2z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

вдоль контура треугольника ABC, где $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,1)$.

5.4.34. Найти циркуляцию градиента скалярного поля $U = x^3y^2z$ вдоль эллипса: $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 3$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

5.4.35. Привести примеры области Ω:

а) являющейся пространственно односвязной, но не поверхностно односвязной;

б) являющейся поверхностно односвязной, но не пространственно односвязной;

в) не являющейся ни поверхностно, ни пространственно односвязной.

5.4.36. Верно ли, что если в области Ω ротор векторного поля $\mathbf{F}$ равен 0, то циркуляция этого векторного поля $\mathbf{F}$ по любому замкнутому контуру L, расположенному в Ω равна 0?

5.4.37. Верно ли, что потоки ротора векторного поля $\mathbf{F}$ через две разные поверхности S_1 и S_2, имеющие одну и ту же границу L совпадают?

§ 5. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ И СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

⇛ Векторное поле $\mathbf{F}$ называется *потенциальным*, если оно является градиентом некоторого скалярного поля U, т. е. $\mathbf{F} = \mathbf{grad}\, U = \nabla U$. ⇚

В случае, если поле $\mathbf{F}(P, Q, R)$ потенциально, выполняются равенства

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

что равносильно тому, что выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y, z)$. Эта функция называется *потенциалом* векторного поля $\mathbf{F}$.

Теорема 5.3[3]. Пусть область Ω поверхностно односвязна и функции P, Q, R — непрерывно дифференцируемы в Ω. Тогда векторное поле $\mathbf{F}(P, Q, R)$ потенциально тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Приведенная теорема фактически утверждает, что векторное поле $\mathbf{F}$ потенциально тогда и только тогда, когда $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$, т. е. поле является *безвихревым*. Условие $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ является также необходимым и достаточным условием того, что криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

не зависит от формы кривой, соединяющей точки A и B в области Ω (в предположении, естественно, что Ω— поверхностно односвязная), а также того, что циркуляция поля $\mathbf{F}$ по любому замкнутому контуру равна нулю, т. е.

$$\oint\limits_{L} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Если поле $\mathbf{F}$ потенциально, то его потенциал U может быть найден путем решения системы уравнений с частными производными:

$$U'_x = P, \quad U'_y = Q, \quad U'_z = R.$$

Также можно найти потенциал U непосредственным интегрированием по некоторому пути M_0M:

$$U = \int\limits_{M_0M} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

При этом, в силу независимости этого интеграла от формы пути, путь M_0M выбирают в виде ломаной $M_0M_1M_2M$, вдоль каждого из звеньев которой изменяется лишь одна координата, а остальные остаются постоянными. В этом случае два из трех дифференциалов в криволинейном интеграле обращаются в ноль, и потенциал вычисляется в виде суммы:

$$U = \int\limits_{M_0M_1} P(x, y_0, z_0)\,dx + \int\limits_{M_1M_2} Q(x, y, z_0)\,dy + \int\limits_{M_2M} R(x, y, z)\,dz,$$

[3]Терема о необходимом и достаточном условии потенциальности векторного поля.

где каждый из интегралов — суть обычный определенный интеграл по соответствующей переменной, а остальные переменные (индексированные и неиндексированные) играют роль констант.

Если потенциал векторного поля $\mathbf{F}$ известен, то

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{AB} dU = U(B) - U(A).$$

⇛ Векторное поле $\mathbf{F}$ называется *соленоидальным*, если оно является ротором некоторого векторного поля $\mathbf{A}$, т. е. $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$. Поле $\mathbf{A}$ называется *векторным потенциалом* поля $\mathbf{F}$. ⇚

Теорема 5.4[4]. Пусть область Ω пространственно односвязна и координаты P, Q, R векторного поля непрерывно дифференцируемы в Ω. Тогда векторное поле $\mathbf{F}(P,Q,R)$ соленоидально в том и только в том случае, когда

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

в каждой точке области Ω.

Если векторное поле соленоидально, то его поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.

5.5.1. Показать, что поле $\mathbf{F}(2x+yz)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (xy+2z)\mathbf{k}$ потенциально и найти его потенциал.

◑ Покажем, что $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (R'_y - Q'_z)\mathbf{i} + (P'_z - R'_x)\mathbf{j} + (Q'_x - P'_y)\mathbf{k} = \\ = (x - x)\mathbf{i} + (y - y)\mathbf{j} + (z - z)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, поле $\mathbf{F}$ потенциально. Найдем потенциал $U(x,y,z)$ поля $\mathbf{F}$ двумя разными способами.

I *способ*. Составим систему уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} U'_x = 2x + yz, \\ U'_y = xz, \\ U'_z = xy + 2z. \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение по x, получаем:

$$U = \int (2x + yz)\,dx = x^2 + xyz + \varphi(y,z)$$

(здесь роль константы интегрирования играет любая функция $\varphi(y,z)$, ибо ее частная производная по x равна нулю). Далее, дифференцируя

[4]Теорема о необходимом и достаточном условии соленоидальности поля.

полученную функцию U по переменной y и используя второе равенство системы, получаем уравнение $xz + \varphi'_y(y,z) = xz$, откуда $\varphi'_y(y,z) = 0$. Интегрируя полученное уравнение по переменной y, получим $\varphi(y,z) = \psi(z)$. Подставляя найденное значение функции $\varphi(y,z)$ в функцию U, приходим к равенству: $U = x^2 + xyz + \varphi(y,z) = x^2 + xyz + \psi(z)$. Наконец, дифференцируя функцию U по переменной z и используя последнее равенство системы, получаем: $xy + \psi'(z) = xy + 2z$, откуда $\psi'(z) = 2z$, т.е. $\psi(z) = z^2 + C$. Таким образом, приходим к окончательному виду потенциала: $U = x^2 + xyz + z^2 + C$.

II *способ*. Вычислим потенциал непосредственным интегрированием. Фиксируя точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, рассмотрим произвольную точку $M(x,y,z)$. Тогда

$$U(x,y,z) \equiv U(M) = \int\limits_{M_0M} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Линию интегрирования (в силу независимости такого интеграла от формы пути) выберем в виде ломаной $M_0M_1M_2M$, где отрезок M_0M_1 параллелен оси Ox, отрезок M_1M_2 — оси Oy, а отрезок M_2M — оси Oz. Вдоль M_0M_1 имеем $y = y_0$ и $z = z_0$, а, следовательно, $dy = dz = 0$, вдоль M_1M_2 уже x — постоянно и $z = z_0$, откуда $dx = dz = 0$, а вдоль M_2M обе переменные, x и y — постоянны, а, значит, $dx = dy = 0$. Тогда

$$U(M) = \int\limits_{x_0}^{x} (2x + y_0z_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} xz_0\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} (xy + 2z)\,dz =$$

$$= (x^2 + y_0z_0x)\Big|_{x_0}^{x} + xyz_0\Big|_{y_0}^{y} + (xyz + z^2)\Big|_{z_0}^{z} =$$

$$= (x^2 + y_0z_0x - x_0^2 - y_0z_0x_0) + (xyz_0 - xy_0z_0) + (xyz + z^2 - xyz_0 - z_0^2) =$$

$$= x^2 + xyz + z^2 - (x_0^2 + x_0y_0z_0 + z_0^2) = x^2 + xyz + z^2 + C. \quad \bullet$$

Являются ли следующие векторные поля потенциальными?

5.5.2. $\mathbf{F} = \mathbf{r}$.

5.5.3. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + yx\mathbf{j} + zy\mathbf{k}$.

5.5.4. $\mathbf{F}(x^2, -y^2, xz)$.

5.5.5. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

5.5.6. $\mathbf{F} = y^2(1-z)\mathbf{i} + 2xy(1-z)\mathbf{j} - (xy^2 - 3z^2)\mathbf{k}$.

Показать, что следующие векторные поля потенциальны, и найти их потенциалы:

5.5.7. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$.

5.5.8. $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yx\mathbf{k}$.

5.5.9. $\mathbf{F}(z - 2x, z - 2y, x + y)$.

5.5.10. $\mathbf{F}(y^2z^3, 2xyz^3 + z^2, 3xy^2z^2 + 2yz + 1)$.

5.5.11. Показать, что плоское поле

$$\mathbf{F}(2xy^3 + 2xy\sin(x^2y), 3x^2y^2 + x^2\sin(x^2y))$$

потенциально, и найти его потенциал.

5.5.12. Не используя теорему 5.3 показать, что ротор потенциального поля равен нулю.

5.5.13. Непосредственным вычислением показать, что циркуляция гладкого потенциального поля **F** вдоль любой замкнутой кривой L равна 0.

5.5.14. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{F}(yz^2, xz^2, 2xyz)$ вдоль эллипса: $x^2 + y^2 = 4$, $x + 2y + 3z = 6$.

5.5.15. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{F}(3x^2y^2z, 2x^3yz, x^3y^2)$ вдоль контура ABC, где $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

5.5.16. Вычислить работу силового поля $\mathbf{F}(yz, xz, yx)$ вдоль одного витка винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

◐ При $t = 0$ получим начальную точку кривой $M_1(1,0,0)$, при $t = 2\pi$ — конечную точку $M_2(1,0,2\pi)$. Так как векторное поле потенциально (см. задачу 5.5.8), то работа силового поля не зависит от формы пути. Поэтому выберем в качестве пути M_1M_2 прямолинейный отрезок. Вдоль него $x = 1$, $y = 0$, $dx = dy = 0$, и, следовательно, работа

$$A = \int\limits_{M_1M_2} yz\,dx + xz\,dy + yx\,dz = \int\limits_0^{2\pi} 0\,dz = 0.$$

Другим способом работу можно было бы найти как разность потенциалов в точках M_2 и M_1. Для этого находим сначала потенциал $U = xyz$ (см. задачу 5.5.8). Тогда $A = U(M_2) - U(M_1) = 1 \cdot 0 \cdot 2\pi - 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$. ●

5.5.17. Вычислить работу векторного поля $\mathbf{F}(z^3 - y^3, -3xy^2, 3xz^2)$ от точки $A(1,1,1)$ до точки $B(2,0,1)$.

5.5.18. Вычислить работу векторного поля $\mathbf{F}(y + 2xz^2, x - 2y, 2x^2z)$ вдоль полуокружности большого радиуса сферы

$$(1 + x)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

от точки $A(-1,1,0)$ до точки $B(-1,-1,0)$.

Является ли векторное поле **F** *соленоидальным?*

5.5.19. $\mathbf{F}(xy, -y - x, z - zy)$. **5.5.20.** $\mathbf{F}(x^2yz, 2xyz, -z^2(xy + x))$.

5.5.21. $\mathbf{F} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} - (xy + z^3)\mathbf{j} + (y^2 + zx)\mathbf{k}$.

5.5.22. $\mathbf{F} = (x^2yz - x^3)\mathbf{i} + yx^3\mathbf{j} + (x^2z - y)\mathbf{k}$.

5.5.23. Является ли пространственное векторное поле $\mathbf{r} \times \mathbf{c}$ (где $\mathbf{c}$ — постоянный ненулевой вектор):

а) потенциальным; б) соленоидальным?

5.5.24. Является ли пространственное векторное поле $\mathbf{F} = \frac{1}{r} \cdot \mathbf{r}$:

а) потенциальным; б) соленоидальным?

5.5.25. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{F}(xy^2 - z, -xy + z, zx - zy^2)$ через поверхность эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

в направлении внешней нормали.

Дополнительные задания

Являются ли следующие поля потенциальными?

5.5.26. $\mathbf{F} = (yz^2 - 1)\mathbf{i} + xz^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$.

5.5.27. $\mathbf{F} = (x^2 + y - z)\mathbf{i} + (xy - xz)\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$.

5.5.28. $\mathbf{F} = \cos(2y + 3z)\mathbf{i} - 2y\sin(2y + 3z)\mathbf{j} + 3z\sin(2y + 3z)\mathbf{k}$.

5.5.29. Показать, что векторное поле

$$\mathbf{F}(yz(2x + y + z), xz(x + 2y + z), xy(x + y + 2z))$$

потенциально, и найти его потенциал.

5.5.30. Показать, что векторное поле

$$\mathbf{F} = (6xy - 2x)\mathbf{i} + (3x^2 - 2z)\mathbf{j} + (1 - 2y)\mathbf{k}$$

потенциально, и найти его потенциал.

Являются ли следующие поля соленоидальными?

5.5.31. $\mathbf{F} = (x^2 - yz + 2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + (yx^3 - 1)\mathbf{k}$.

5.5.32. $\mathbf{F}(xy - yz + xz)\mathbf{i} + (yz - xz + xy)\mathbf{j} + (xz - xy + yz)\mathbf{k}$.

5.5.33. $\mathbf{F}(x^2y, y^2z - y^2x, xy - yz^2)$.

Вычислить работу векторного поля $\mathbf{F}$ *от точки* A *до точки* B:

5.5.34. $\mathbf{F}(3x^2, 2y, 1)$, $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 1)$.

5.5.35. $\mathbf{F}(y^2 + 2xz, z^2 + 2xy, x^2 + 2yz)$, $A(0, 0, 0)$, $B(1, -1, 1)$.

5.5.36. $\mathbf{F} = r \cdot \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, а $r = |\mathbf{r}|$, $A(0, 0, 0)$, $B(6, 2, 3)$.

5.5.37. $\mathbf{F} = 4r^2 \cdot \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки и $r = |\mathbf{r}|$, $A(0, 3, 4)$, $B(3, 4, 0)$.

5.5.38. Показать, что если векторные поля $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ потенциальны и c — число, то $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ и $c \cdot \mathbf{F}_1$ — также потенциальные векторные поля.

5.5.39. Показать, что если векторные поля $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ соленоидальны, то $c_1 \cdot \mathbf{F}_1 + c_2 \cdot \mathbf{F}_2$ — соленоидальное векторное поле (c_1 и c_2 — некоторые константы).

Контрольные вопросы и более сложные задания

5.5.40. Привести пример векторного поля:

а) потенциального и соленоидального;

б) потенциального, но не соленоидального;

в) не потенциального, но соленоидального;

г) не потенциального и не соленоидального.

5.5.41. Показать, что потенциал U потенциального и соленоидального поля $\mathbf{F}$ удовлетворяет уравнению Лапласа: $\Delta U = 0$.

5.5.42. Показать, что если векторное поле $\mathbf{F} = f(r)\cdot\mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ и $r = |\mathbf{r}|$, соленоидально, то $f(r) = \frac{k}{r^3}$.

5.5.43. Будет ли пространственное поле $\mathbf{F}=r\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $r=|\mathbf{r}|$ и $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, соленоидальным?

5.5.44. Показать, что пространственное поле $\mathbf{F} = f(r)\cdot\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}(x, y, z)$ и $r = |\mathbf{r}|$, потенциально и найти его потенциал.

5.5.45. Показать, что если векторное поле $\mathbf{F}$ потенциально, то векторное поле $\mathbf{c}\times\mathbf{F}$ (где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор) является соленоидальным. Верно ли обратное?

5.5.46. Верно ли, что векторное произведение потенциальных полей потенциально?

5.5.47. Верно ли, что векторное произведение соленоидальных полей соленоидально?

5.5.48. Показать, что векторное произведение потенциальных полей — соленоидальное векторное поле.

5.5.49. Верно ли, что векторное произведение соленоидальных полей — потенциальное векторное поле?

❑

Глава 6. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

❏

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Во многих задачах классической теории вероятностей используется *комбинаторика,* т. е. раздел математики, в котором изучаются различные соединения (комбинации) элементов конечных множеств.

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью двух правил — правила умножения и правила сложения.

Теорема 6.1. *Правило умножения*: если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) — n_2 способами, то оба объекта (a и b) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Этот принцип распространяется на случай трех и более объектов.

Теорема 6.2. *Правило сложения:* если некоторый объект a можно выбрать n_1 способами, а объект b можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из объектов (a или b) можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Это правило распространяется на любое конечное число объектов.

Существуют две схемы выбора m элементов из заданного множества: *без возвращения,* когда выбранные элементы не возвращаются в исходное множество, и с *возвращением,* когда выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге.

Схема выбора без возвращений

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов.

⇛ *Размещением из n элементов по k элементов* ($0 \leqslant k \leqslant n$) **называется** любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее k элементов. ⇚

Два размещения различны, если они отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k обозначаются символом A_n^k и вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \tag{1.1}$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$, причем $1! = 1$, $0! = 1$.

⇛ *Перестановкой из n элементов* называется размещение из n элементов по n элементов. ⇚

Таким образом, указать ту или иную перестановку данного множества из n элементов значит выбрать определенный порядок этих элементов. Поэтому любые две перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = A_n^n = n! \tag{1.2}$$

⇛ *Сочетанием из n элементов по k* $(0 \leqslant k \leqslant n)$ называется любое подмножество данного множества, которое содержит k элементов. ⇚

Любые два сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (т. е. отличаются только составом элементов). Число сочетаний из n элементов по k обозначается символом C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}. \tag{1.3}$$

Для чисел C_n^k (они называются *биномиальными коэффициентами*) справедливы следующие тождества:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad \textit{(правило симметрии)},$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n,$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad \textit{(правило Паскаля)},$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1.$$

Схема выбора с возвращением

Если при упорядоченной выборке k элементов из n элементы возвращаются обратно, то полученные выборки представляют собой *размещения с повторениями*. Число всех размещений с повторениями из n элементов по k обозначается символом $\overline{A}_n^k$ и вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k. \tag{1.4}$$

Если при выборке k элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания (таким образом, одни и те же элементы могут выниматься по нескольку раз, т. е. повторяться), то полученные выборки есть *сочетания с повторениями*. Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначается символом $\overline{C}_n^k$ и вычисляется по формуле

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k. \tag{1.5}$$

Пусть в множестве из n элементов есть k различных типов элементов, при этом 1-й тип элементов повторяется n_1 раз, 2-й — n_2 раз, …, k-й — n_k раз, причем $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$. Тогда перестановки элементов данного множества представляют собой *перестановки с повторениями.*

Число перестановок с повторениями (иногда говорит о числе разбиений множества) из n элементов обозначается символом $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ и вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!}. \tag{1.6}$$

Итоговая сводка формул приведена в следующей таблице.

Таблица 1

(1-я строка — без повторений, 2-я строка — с повторениями)

	Размещения	Перестановки	Сочетания
1	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$P_n = n!$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
2	$\overline{A}_n^k = n^k$	$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$ $(n_1+n_2+\ldots+n_k=n)$	$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

6.1.1. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 5, 7 если:

а) цифры не повторяются; б) цифры могут повторяться?

○ а) Первую цифру можно выбрать четырьмя способами (числа вида 025, 073, ... не считаем трехзначными). Выбрав первую цифру (например, цифру 5), вторую цифру можно также выбрать четырьмя способами (второй цифрой может быть любая из оставшихся 0, 2, 3, 7). Третью цифру, очевидно, можно выбрать тремя способами. Следовательно, согласно правилу умножения имеется $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ способов расстановки цифр, т. е. искомых трехзначных чисел будет 48 (вот некоторые из них: 509, 237, 530, 702, ...).

б) Понятно, что если цифры могут повторяться, то трехзначные числа можно составить $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ способами (вот некоторые из них: 222, 200, 332, ...). ●

6.1.2. Сколько чисел, содержащих не менее трех попарно различных цифр, можно составить из цифр 2, 4, 6, 8, 9?

○ По правилу умножения трехзначных чисел можно составить $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способами, а четырехзначных — $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ способами, столько же пятизначных чисел $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$. По правилу сложения, всего можно составить $60 + 120 + 120 = 300$ чисел, состоящих не менее чем из трех попарно различных цифр. ●

6.1.3. Сколькими способами могут быть распределены три призовых места среди 16 соревнующихся?

6.1.4. В студенческой группе 12 девушек и 16 юношей. Сколькими способами можно выбрать для вручения призов двух студентов одного пола?

6.1.5. Если подбросить одновременно три игральные кости, то сколько имеется различных возможных комбинаций выброшенных очков?

6.1.6. В цветочном киоске 7 видов цветов. Сколькими разными способами можно составить букет, содержащий 3 цветка?

6.1.7. Из пункта A в пункт B можно добраться самолетом, поездом, автобусом, а из него в пункт C — пешком, на тракторе, на лошади, на лодке. Сколькими способами можно выбрать дорогу от пункта A до пункта C через B?

6.1.8. Сколькими способами можно выбрать один цветок из корзины, в которой имеется 12 гвоздик, 15 роз и 7 хризантем?

6.1.9. Составить различные размещения по два элемента из элементов множества $A = \{3, 4, 5\}$ и подсчитать их число.

◔ Из трех элементов можно образовать следующие размещения по два элемента: $(3,4)$; $(4,3)$; $(3,5)$; $(5,3)$; $(4,5)$; $(5,4)$. Таким образом, всего их 6. Однако число размещений можно подсчитать и по формуле (1.1): $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ или $A_3^2 = \dfrac{3!}{(3-2)!} = \dfrac{6}{1} = 6$. ●

6.1.10. Сколькими способами 3 награды (за I, II, III места) могут быть распределены между 10 участниками соревнований?

◔ Будем считать, что каждый участник соревнований может получить не более одной награды. Выбрать 3-х участников соревнований из 10 можно

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 720$$

способами, так как «призовые тройки» отличаются друг от друга либо составом участников, либо порядком их следования.

Этот же результат можно получить, применяя правило умножения: претендентов на главную награду (за I место) 9; на вторую — 8; на третью — 7; число различных способов распределения наград равно $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. ●

6.1.11. Сколько имеется пятизначных чисел, все цифры у которых различны?

6.1.12. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг (три горизонтальных полосы), если имеется материя 5 различных цветов?

6.1.13. Из группы в 15 человек выбирают 4-х участников эстафеты $800 \times 400 \times 200 \times 100$. Сколькими способами можно расставить спортсменов на этих этапах?

6.1.14. Составить различные перестановки из элементов множества $A = \{5; 8; 9\}$.

По формуле (1.2) число перестановок из 3-х элементов равно $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Составляем их: $(5,8,9)$; $(5,9,8)$; $(8,9,5)$; $(8,5,9)$; $(9,5,8)$; $(9,8,5)$. ●

6.1.15. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник произведений Д. Лондона, располагая их:

а) в произвольном порядке;

б) так, чтобы I, V и IX тома стояли рядом (в любом порядке);

в) так, чтобы I, II, III тома не стояли рядом (в любом порядке).

а) Число способов расстановки 10 книг равно числу перестановок из 10 элементов: $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$.

б) Мысленно связав I, V и IX тома или положив в один пакет, получим 8 «книг», т. е. 7 книг и 1 связку (или пакет) книг. Их можно расставить на полке $P_8 = 8!$ способами. Каждому из этих способов расстановки соответствуют $P_3 = 3!$ способов расстановки книг, находящихся в связке (I, V и IX тома по-прежнему стоят рядом, но в ином порядке). Согласно правилу умножения, число возможных расстановок 10 книг на полке так, чтобы 3 определенные книги (I, V и IX тома) стояли рядом, равно $P_8 \cdot P_3 = 8! \cdot 3! = 40\,320 \cdot 6 = 241\,920$.

в) Искомое число способов расстановки книг, с учетом пунктов а) и б), равно $P_{10} - P_8 \cdot P_3 = 3\,628\,800 - 241\,920 = 3\,386\,880$. ●

6.1.16. В комнате имеется 7 стульев. Сколькими способами можно разместить на них 7 гостей? 3 гостя?

6.1.17. Студенты сдают 5 экзаменов, в том числе 2 экзамена по математике. Сколькими способами можно распределить экзамены, но так, чтобы экзамены по математике следовали один за другим? Не следовали один за другим?

6.1.18. Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове:

а) СОЛНЦЕ; **б)** ТЕАТР;

в) ЛИЛИ; **г)** SOS?

6.1.19. Сколькими способами можно упорядочить множество $A = \{8, 9, 10, 11, \ldots, 15\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

6.1.20. Составить различные сочетания по два из элементов множества $A = \{3, 4, 5\}$ и подсчитать их число.

Из трех элементов можно составить следующие три сочетания по два элемента: $\{3,4\}$; $\{3,5\}$; $\{4,5\}$. Их число можно подсчитать и по формуле (1.3): $C_3^2 = \dfrac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ (или так: $C_3^2 = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = 3$; или так: $C_3^2 = C_3^1 = 3$). ●

6.1.21. Владимир хочет пригласить в гости троих из семи своих лучших друзей. Сколькими способами он может выбрать приглашенных?

❍ Так как для Владимира важен только состав гостей (порядок роли не играет), то число способов выбора троих гостей из 7 можно найти по формуле сочетаний (1.3): $C_7^3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$ ●

6.1.22. В вазе стоят 9 красных и 7 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из нее:

а) 3 гвоздики;

б) 6 гвоздик одного цвета;

в) 4 красных и 3 розовых гвоздики?

❍ **а)** Так как порядок выбора цветов не имеет значения, то выбрать 3 гвоздики из вазы, в которой стоят 16 гвоздик, можно C_{16}^3 способами. По формуле (1.3) находим: $C_{16}^3 = \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 560.$

б) Выбрать 6 гвоздик красного цвета можно $C_9^6 = 84$ способами, а 6 гвоздик розового цвета $C_7^6 = 7$ способами. По правилу сложения выбрать 6 гвоздик одного цвета (красных или розовых) можно $C_9^6 + C_7^6 = 84 + 7 = 91$ способом.

в) Выбрать 4 красных гвоздики из 9 имеющихся можно C_9^4 способами, а 3 розовых из имеющихся 7 можно C_7^3 способами. Поэтому букет из 4 красных и 3 розовых гвоздик можно составить по правилу умножения $C_9^4 \cdot C_7^3 = \dfrac{9!}{4! \cdot 5!} \cdot \dfrac{7!}{3! \cdot 4!} = \dfrac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{5! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \dfrac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 4410$ способами. ●

6.1.23. Сколькими способами можно разбить 8 предметов на две равные (по количеству предметов) группы?

6.1.24. Группа шахматистов сыграла между собой 28 партий. Каждые два из них встречались между собой один раз. Сколько шахматистов участвовало в соревновании?

6.1.25. Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирает по жребию 5 человек для приготовления ужина. Сколько существует способов при которых в эту «пятерку» попадут:

а) одни девушки; **б)** 3 юноши и 2 девушки;

в) 1 юноша и 4 девушки; **г)** 5 юношей?

6.1.26. Сколькими способами можно разбить 9 предметов на 2 группы (выбор одной группы однозначно определяет вторую)?

6.1.27. Пять авторов должны написать задачник по математике, состоящий из 14 глав. Два автора напишут по 2 главы, два других — по 3 и еще один — 4 главы книги. Сколькими способами может быть распределен материал между авторами?

6.1.28. В ящике 15 деталей, среди которых 6 бракованных. Наудачу выбирается комплект из 5 деталей. Сколько всего комплектов, в каждом из которых 2 детали бракованные?

6.1.29. Из элементов (цифр) 2, 4, 5 составить все размещения и сочетания с повторениями по два элемента.

❍ Размещения с повторениями по два элемента таковы: $(2,2)$; $(2,4)$; $(2,5)$; $(4,4)$; $(4,5)$; $(4,2)$; $(5,5)$; $(5,2)$; $(5,4)$.

Их число можно вычислить и по формуле (1.4):

$$\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9.$$

Сочетания с повторениями по два элемента таковы (в отличие от размещений здесь порядок элементов в выборке не имеет значения, т. е., например, пары $(2, 4)$ и $(4, 2)$ не различаются): $\{2, 2\}$; $\{2, 4\}$; $\{2, 5\}$; $\{4, 4\}$; $\{4, 5\}$; $\{5, 5\}$.

Их число можно вычислить и по формуле (1.5):

$$\overline{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6. \qquad \bullet$$

6.1.30. В магазине имеется 7 видов тортов. Сколькими способами можно составить набор, содержащий 3 торта? А если имеются 3 вида тортов, а нужен набор из 7 тортов?

○ Поскольку порядок расположения тортов в наборе не играет роли, то искомое число наборов равно числу сочетаний с повторениями из 7 элементов по 3 в каждом. По формуле (1.5) имеем $\overline{C}_7^3 = C_9^3 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ (см. также задачу 6.1.6).

Если имеется 3 вида тортов, а нужен набор из 7 тортов, то число возможных наборов равно $\overline{C}_3^7 = C_9^7 = \dfrac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$. ●

6.1.31. Пять человек вошли в лифт на 1-м этаже девятиэтажного дома. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта на нужных этажах?

○ Каждый из 5 пассажиров может выйти на любом из восьми этажей со 2-го по 9-й включительно. Возможными вариантами их выхода являются, например, 2–3–5–5–5 (это значит, что на 2-м этаже вышел один пассажир, на 3-м — один, а трое вышли на 5-м этаже) или 9–9–9–9–9 или 4–5–6–7–9, и т. д.

Общее число выходов пассажиров, по формуле (1.4), равно

$$\overline{A}_8^5 = 8^5 = 32\,768.$$

Этот же результат можно получить, используя правило умножения: для 1-го пассажира имеется 8 вариантов выхода на этаже, для 2-го — тоже 8, и для 3-го — 8, и для 4-го — 8, и для 5-го — 8. Всего получается $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^5$ вариантов выхода 5-ти пассажиров. ●

6.1.32. Сколько различных «слов» (под «словом» понимается любая комбинация букв) можно составить, переставляя буквы в слове АГА? MISSISSIPPI?

○ Вообще из трех букв можно составить $P_3 = 3! = 6$ различных трехбуквенных «слов». В слове АГА буква А повторяется, а перестановка одинаковых букв не меняет «слова». Поэтому число перестановок с повторениями меньше числа перестановок без повторений во столько раз, сколько можно переставлять повторяющиеся буквы. В данном слове две буквы (1-я и 3-я) повторяются; поэтому различных трехбуквенных «слов» из букв слова АГА можно составить столько: $\frac{P_3}{P_2} = \frac{3!}{2!} = 3$. Впрочем, ответ можно получить и проще: каждое слово из букв А, Г и А однозначно определяется положением буквы Г; их всего три, поэтому и различных слов будет тоже три.

Пользуясь формулой (1.6), этот результат можно получить сразу: $P_3(2,1) = \frac{3!}{2!1!} = 3$.

По этой же формуле найдем число одиннадцатибуквенных «слов» при перестановке букв в слове MISSISSIPPI. Здесь $n = 11$, $n_1 = 1$, $n_2 = 4$ (4 буквы S), $n_3 = 4$ (4 буквы I), $n_4 = 2$, поэтому

$$P_{11}(1,4,4,2) = \frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 24 \cdot 2} = 34\,650. \qquad \bullet$$

6.1.33. Сколькими способами можно разместить в двух комнатах 9 различных предметов?

6.1.34. Сколькими способами можно распределить 6 разных книг между 3 школьниками?

6.1.35. В почтовом отделении продаются открытки 6 видов. Сколькими способами можно приобрести в нем 4 открытки? 4 одинаковых открытки? 4 разных открытки?

6.1.36. Сколько различных букетов по 5 цветков в каждом можно составить, если в наличии есть достаточно много цветков четырех видов?

6.1.37. У врача есть 3 вида одного лекарства, 2 вида — другого и 4 вида — третьего. В течение девяти дней он каждый день предлагает больному по одному лекарству. Сколькими способами он может выделить больному лекарства?

6.1.38. Сколько существует различных перестановок букв в слове ТРАКТАТ? А в «слове» АААУУАУУУУ?

Дополнительные задания

6.1.39. Сколько можно составить четырехзначных чисел так, чтобы любые две соседние цифры были различными?

6.1.40. Сколько различных «слов», состоящих из трех букв, можно образовать из букв слова

а) ЛЕТО; **б)** ШАЛУН?

6.1.41. Сколько существует шестизначных чисел, у которых на четных местах стоят четные цифры?

6.1.42. 20 студентов обмениваются фотокарточками. Сколько фотокарточек понадобилось для этого?

6.1.43. Каждого из 6 студентов можно направить для прохождения практики на одно из трех предприятий. Сколькими различными способами это можно осуществить?

6.1.44. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4 если:

а) цифры не могут повторяться;

б) цифры могут повториться;

в) числа должны быть четными (цифры могут повторяться);

г) число должно делиться на 5 (цифры не могут повторяться).

6.1.45. 4 пианиста, 5 скрипачей и 6 баянистов участвуют в конкурсе. Сколькими способами жюри может отобрать по три победителя в каждой номинации?

6.1.46. Сколькими способами можно составить трехцветный (три вертикальные полосы) полосатый флаг, если имеется материал красного, желтого, зеленого и черного цветов, причем известно, что одна из полос должна быть зеленой?

6.1.47. В классе изучается 7 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть 5 различных предметов?

6.1.48. Сколькими способами можно рассадить вокруг круглого стола 6 мальчиков и 6 девочек, если каждая девочка должна сидеть между двумя мальчиками?

6.1.49. Сколькими способами можно сформировать железнодорожный состав из 9 вагонов так, чтобы 2-й и 4-й вагоны шли через один?

6.1.50. Сколько различных инициалов (ФИО) можно образовать, используя 5 первых букв русского алфавита?

6.1.51. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, нужно выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2-х женщин. Сколькими способами это можно сделать?

6.1.52. Сколькими способами можно распределить 36 игральных карт поровну между четырьмя игроками?

6.1.53. Сколько различных комбинаций из 6 карт содержат 3 дамы, 2 короля и 1 туз?

6.1.54. Из группы в 12 человек надо выбрать 2 человека для выполнения одной работы и 3 — для другой. Сколькими способами это можно сделать?

6.1.55. Сколько чисел, больших 100, можно записать с помощью цифр 0, 1, 3, 5, 6 (без повторений)?

6.1.56. В футбольной команде имеется 13 полевых игроков и 2 вратаря. Сколькими способами можно выбрать играющий состав, состоящий из 10 игроков и 1-го вратаря?

6.1.57. Сколькими способами можно распределить 6 билетов в театр по трем группам первокурсников?

6.1.58. В подъезде дома установлен замок с кодом. Дверь автоматически отпирается, если в определенной последовательности нажать 4 кнопки из имеющихся 12. Некто, не зная кода, стал наудачу набирать различные комбинации из 4-х цифр. Какое наибольшее число попыток ему надо осуществить, чтобы дверь открылась?

6.1.59. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Сколькими способами можно приобрести в ней:

а) 3 пирожных одного вида; б) 5 пирожных?

6.1.60. 12 человек прибыли в гостиницу, в которой есть один четырехместный, два трехместных и один двухместный номера. Сколько существует способов их размещения?

Контрольные вопросы и более сложные задания

6.1.61. Сколькими способами можно переставить буквы слова ЗОЛОТО так, чтобы буквы О не стояли подряд?

6.1.62. На предприятии имеется 3 вакансии для мужчин, 2 — для женщин и 4 вакансии, которые могут быть заняты как мужчинами, так и женщинами. Сколькими способами могут выбрать место работы трое мужчин и две женщины?

6.1.63. Сколькими способами можно разбить на две группы 6 мальчиков? На две группы по 3 мальчика в каждой?

6.1.64. В четырехзначном числе пропущены (не видны) две цифры. Сколько можно получить различных четырехзначных чисел, вставляя пропущенные цифры?

6.1.65. Сколькими возможными способами 3 незнакомых человека могут разместиться в 8 вагонах электрички?

6.1.66. В азбуке Морзе используются два знака: точка и тире. Каждый символ (например, буква) кодируется определенной последовательностью этих знаков (например, Е = ·, А = · –, Э = · · – · ·). Какое число разных символов можно закодировать не более чем четырьмя знаками азбуки?

6.1.67. Две команды, в каждой из которых по 5 спортсменов, строятся в одну шеренгу. Сколькими способами можно построить шеренгу, чтобы игроки одной команды не стояли рядом?

6.1.68. 20 студентов обменялись рукопожатиями. Сколько было сделано рукопожатий?

6.1.69. Из 20 сотрудников лаборатории 5 человек должны выехать в командировку. Сколько может быть различных составов отъезжающей группы, если 3 руководителя лаборатории (заведующий, его заместитель и главный инженер) одновременно уезжать не должны?

6.1.70. Сколько прямых линий можно провести через 7 точек, из которых лишь 3 лежат на одной прямой?

6.1.71. Группа туристов в количестве 9 человек намеревается пойти в поход в ближайшее воскресенье. Сколько существует вариантов прихода (некоторые могут не явиться) этих туристов к месту отправления?

6.1.72. 7 яблок, 3 апельсина и 5 лимонов раскладываются в три пакета по 5 фруктов в каждом. Сколькими способами это можно сделать?

6.1.73. В шахматной встрече двух команд по 6 человек участники партий и цвет фигур каждого участника определяются жеребьевкой. Каково число различных исходов жеребьевки?

6.1.74. Сколько чисел меньших, чем 1 000 000, можно написать с помощью цифр 8 и 9.

§ 2. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ДЕЙСТВИЯ НАД СОБЫТИЯМИ

⇛ *Случайным событием* (или просто: *событием*) называется такой исход опыта (испытания, эксперимента, наблюдения), который может произойти или не произойти. ⇚

События обозначаются, как правило, заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$.

⇛ Событие называется *достоверным*, если оно обязательно наступит в результате данного опыта; достоверное событие обозначается через Ω. ⇚

⇛ Событие называется *невозможным*, если оно заведомо не произойдет в результате проведения опыта; невозможное событие обозначается через $\varnothing$. ⇚

⇛ Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же опыте; в противном случае события называются *совместными*. ⇚

⇛ События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *попарно-несовместными*, если любые два из них несовместны. ⇚

⇛ События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и в результате каждого опыта происходит одно и только одно из них. ⇚

⇛ Несколько событий в данном опыте называются *равновозможными*, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие (т. е. все события имеют равные «шансы»). ⇚

⇛ *Суммой событий* A и B называется событие $C = A+B$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A и B (т. е. или A, или B, или оба вместе). ⇚

⇛ *Произведением событий* A и B называется событие $C = A \cdot B$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события A и B (т. е. и A и B вместе). ⇚

⇛ *Разностью событий* A и B называется событием $C = A - B$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит B. ⇚

$\Rrightarrow$ *Событие A влечет событие B* (или: A является частным случаем B), если из того, что происходит событие A, следует наступление события B; записывают это так: $A \subseteq B$. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то события A и B называются *равными*; обозначается это следующим образом: $A = B$. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ *Противоположным событию* A называется событие $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A. $\Lleftarrow$

Теоретико-множественная интерпретация операций над событиями

Пусть проводится некоторый опыт со случайным исходом.

$\Rrightarrow$ Множество $\Omega = \{\omega\}$ всех возможных взаимоисключающих исходов данного опыта (испытания, эксперимента) называется *пространством элементарных событий* (коротко ПЭС), а сами исходы ω — *элементарными событиями* (или «элементами», «точками»). $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ *Случайным событием* (или просто *событием*) называется любое подмножество множества Ω, если оно конечно или счетно. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ Элементарные события, входящие в подмножество A пространства Ω, называются *благоприятствующими событию* A. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ Множество Ω называется *достоверным событием*; ему благоприятствует любое элементарное событие, в результате опыта оно обязательно произойдет. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ Пустое множество $\varnothing$ называется *невозможным событием*; в результате опыта оно произойти не может. $\Lleftarrow$

Под операциями (действиями) над событиями понимаются операции над множествами, точнее — подмножествами пространства Ω.

$\Rrightarrow$ *Сумма* (или *объединение*) двух событий $A \subseteq \Omega$ и $B \subseteq \Omega$ (обозначается $A+B$ или $A \cup B$) — это множество, которое состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из событий A и B. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ *Произведение* (или *пересечение*) двух событий $A \subseteq \Omega$ и $B \subseteq \Omega$ (обозначается $A \cdot B$ или $A \cap B$) — это множество, которое состоит из элементов, общих для событий A и B. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ *Разность* событий $A \subseteq \Omega$ и $B \subseteq \Omega$ (обозначается $A - B$ или $A \setminus B$) — это множество, которое содержит те элементы события A, которые не входят в B. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ *Противоположным* событию $A \subseteq \Omega$ называется событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$; множество $\overline{A}$ называют также дополнением множества A. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ *Событие A влечет событие B* (или A есть подмножество B), если каждый элемент события A содержится в B; обозначается $A \subseteq B$. $\Lleftarrow$

По определению $\varnothing \subseteq A$ для любого A.

$\Rrightarrow$ События A и B называются *несовместными*, если их произведение (пересечение) есть невозможное событие, т. е. $A \cdot B = \varnothing$. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ Несколько событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют *полную группу несовместных событий*, если их сумма представляет все ПЭС, а сами события попарно не совместны, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ и $A_i \cdot A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$. $\Lleftarrow$

Полную группу, в частности, образуют события A и $\overline{A}$ ($A+\overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$).

Операции над событиями (множествами) обладают следующими свойствами:

1. $A + B = B + A$, $A \cdot B = BA$ (переместительное);
2. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$, $A\cdot B + C = (A+C)\cdot(B+C)$ (распределительное);
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (сочетательное);
4. $A + A = A$, $A \cdot A = A$;
5. $A + \Omega = \Omega$, $A \cdot \Omega = A$;
6. $A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$;
7. $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\overline{A}} = A$;
8. $A - B = A \cdot \overline{B}$;
9. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ и $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ (законы де Моргана).

6.2.1. В урне находится 12 пронумерованных шаров. Опыт состоит в извлечении одного шара из урны. Требуется:

1) составить пространство элементарных событий для данного опыта;

2) указать элементарные события (исходы), благоприятствующие событиям: $A = \{$появление шара с нечетным номером$\}$, $B = \{$появление шара с четным номером$\}$, $C = \{$появление шара с номером большим, чем 3$\}$, $D = \{$появление шара с номером меньшим, чем 7$\}$;

3) пояснить, что означают события $\overline{B}$, $\overline{C}$;

4) указать, какие из пар событий A, B, C, D совместны, а какие нет;

5) указать, какие из этих пар событий образуют полную группу, а какие нет;

6) привести примеры невозможного и достоверного событий;

7) привести пример другого пространства элементарных событий в данном опыте.

1) Пространство элементарных событий можно записать в виде $\Omega = \{\omega_i\}$, где ω_i — появление шара с номером i, где $i = 1, 2, \dots, 12$. Появление i-го шара можно обозначить и так: $Ш_i$, $\omega_{Ш_i}$ и т. д. Поэтому можно записать:

$$\Omega = \{Ш_1, Ш_2, \dots, Ш_{12}\} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{12}\} = \{\omega_{Ш_1}, \omega_{Ш_2}, \dots, \omega_{Ш_{12}}\}.$$

2) Рассмотрим события A, B, C и D как подмножества пространства Ω. Элементарные события, входящие в эти подмножества и являются благоприятствующими указанным событиям: $A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_9,\omega_{11}\}$, $B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6,\omega_8,\omega_{10},\omega_{12}\}$, $C=\{\omega_4,\omega_5,\ldots,\omega_{12}\}$, $D=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_6\}$.

3) Событие $\overline{B}$ означает, что событие B не происходит, т. е.

$$\overline{B} = \{\omega_1,\omega_3,\ldots,\omega_{11}\},$$

откуда ясно, что $\overline{B} = A$.

Событие $\overline{C}$ является противоположным событию C, поэтому $\overline{C} = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$.

4) События A и B несовместны; события A и C, так же, как A и D, B и C и другие — совместны.

5) События A и B образуют полную группу; в результате опыта произойдет только одно из них: или A или B. Другие пары событий (A и C, B и D и т. д.) не образуют полную группу. Так, появление шара с номером 3 означает наступление двух событий: и A и D.

6) Событие $E_1 = \{$появление шара с номером 13$\}$ — является невозможным событием, а событие $E_2 = \{$появление шара с номером $n \leqslant 12\}$ — достоверное, т. е. $E_2 = \Omega$.

7) Если в данном опыте нас интересует лишь то, что извлеченный шар имеет четный или нечетный номер, то можно считать $\Omega = \{\omega_1,\omega_2\}$, где ω_1 — появление шара с нечетным номером, ω_2 — с четным.

Другим возможным пространством для описания данного опыта может быть такое $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$, где ω_1 — появление шара с номером от 1 до 9 включительно, $\omega_2,\omega_3,\omega_4$ — появление шара с номером 10, 11, 12 соответственно. Примером неправильно выбранного пространства может служить $\Omega = \{\omega_1,\omega_2\}$, где ω_1 — появление шара с номером меньшим, чем 10, а ω_2 — большем, чем 6. События ω_1 и ω_2 не являются элементарными, так как в результате опыта эти исходы могут наступить одновременно. ●

6.2.2. Указать пространства элементарных событий для следующих опытов (испытаний):

а) подбрасывание двух игральных костей;

б) стрельба по мишени до первого попадания;

в) наблюдение за временем безотказной работы прибора.

○ **а)** Согласно правилу умножения (см. § 1 настоящей главы) число исходов в данном опыте равно $6 \cdot 6 = 36$. Изобразим пространство элементарных исходов (событий) в виде матрицы

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \ldots & \omega_{16} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & \ldots & \omega_{26} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{61} & \omega_{62} & \omega_{63} & \ldots & \omega_{66} \end{pmatrix},$$

где ω_{ij} означает, что на первой игральной кости выпало i очков, а на второй j $(i,j = \overline{1,6})$.

б) В данном случае пространство Ω теоретически бесконечно, но счетно. Обозначая знаком «+» попадание в цель при соответствующем выстреле, а знаком «−» — промах, получим такое пространство элементарных событий:

$$\Omega = \{+, -+, --+, ---+, ----+, \ldots\}.$$

Здесь, например, событие $---+$ означает, что первые три выстрела были промахами, а на четвертый произошло попадание.

Можно записать ПЭС и так:

$$\Omega = \{1, 01, 001, 0001, \ldots\},$$

где 1 означает попадание в цель, 0 — промах.

в) Здесь также исходов опыта (наблюдения) бесконечно много, при этом множество Ω несчетное: $\Omega = \{t: \ 0 \leqslant t < \infty\}$, где t — время безотказной работы прибора. Понятно, что в качестве результата наблюдения может появиться любое число $t \geqslant 0$. ●

6.2.3. Игральная кость бросается 1 раз. Описать пространство элементарных событий, указать элементарные события, благоприятствующие событиям: A_1 — выпало четное число очков; A_2 — выпало не менее 4 очков; A_3 — выпало более 6 очков.

6.2.4. Построить пространство Ω для следующих испытаний:

а) проводится одна игра в шахматы;

б) трижды подбрасывается монета;

в) подсчитывается число студентов группы, сдавших экзамены по теории вероятностей.

6.2.5. Какие из следующих пар событий являются несовместными, совместными:

а) $A_1 = \{$выход из строя телевизора, работающего в гостиной$\}$, $A_2 = \{$на кухне$\}$;

б) $A_3 = \{$попадание при одном выстреле$\}$, $A_4 = \{$промах$\}$;

в) $A_5 = \{$выпадение герба при бросании монеты$\}$, $A_6 = \{$выпадение решки$\}$;

г) $A_7 = \{$хотя бы одно попадание при двух выстрелах$\}$, $A_8 = \{$два попадания$\}$?

6.2.6. Образуют ли полную группу следующие события:

а) A_3 и A_4 из задачи 6.2.5;

б) A_7 и A_8 из задачи 6.2.5;

в) $B_0 = \{$ни одного попадания при трех выстрелах по мишени$\}$, $B_1 = \{$одно попадание$\}$, $B_2 = \{$два попадания$\}$, $B_3 = \{$три попадания$\}$;

г) $C_1 = \{$покупатель купит товар хотя бы в одном из трех магазинов$\}$, $C_2 = \{$не купит ни в одном магазине$\}$?

6.2.7. Каждый из двух стрелков производит по одному выстрелу в мишень. Пусть событие $A = \{$первый стрелок попал в цель$\}$, событие B = {второй стрелок попал в цель}. Что означают события:

а) $A + B$; б) $A \cdot B$;

в) $A \cdot \overline{B}$?

○ Составим пространство элементарных событий данного опыта: $\Omega = \{\omega_{00}, \omega_{10}, \omega_{01}, \omega_{11}\}$, где ω_{00} означает: первый стрелок промахнулся и второй промахнулся; ω_{10} — первый попал, второй промахнулся и т.д. Тогда A = {(1-й стрелок попал, 2-й не попал) или (1-й стрелок попал, 2-й тоже попал)} $= \{\omega_{10}, \omega_{11}\}$, $B = \{\omega_{01}, \omega_{11}\}$.

а) Событие $A + B$ состоит в том, что хотя бы один стрелок попал в цель. Событие (множество) $A + B$ состоит из элементарных исходов, каждый из которых входит или в множество A, или в множество B, или в оба эти множества, т.е. $A + B = \{\omega_{10}, \omega_{01}, \omega_{11}\}$.

б) Событие $A \cdot B$ состоит в том, что оба стрелка попали в цель. Оно состоит из элементарных событий, каждое из которых входит и в множество A, и в множество B. Следовательно, $A \cdot B = \{\omega_{11}\}$.

в) Событие $A \cdot \overline{B}$ состоит в том, что первый стрелок попал в цель, а второй — нет. Оно состоит из тех элементарных событий, каждое из которых входит и в множество A, и в множество $\overline{B} = \{\omega_{00}, \omega_{10}\}$, т.е. $A \cdot \overline{B} = \{\omega_{10}\}$. ●

6.2.8. Три студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Пусть событие A_1 = {первый студент решил задачу}, A_2 = {второй студент решил задачу}, A_3 = {третий студент решил задачу}. Выразить через события A_i ($i = 1, 2, 3$) следующие события:

1) A = {все студенты решили задачу};

2) B = {задачу решил только первый студент};

3) C = {задачу решил хотя бы один студент};

4) D = {задачу решил только один студент}.

○ 1) Осуществление события A означает, что произошли события A_1, A_2 и A_3 одновременно, т.е. имеем произведение событий: $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

2) В этом случае событие A_1 произошло, а события A_2 и A_3 не произошли, т.е. произошли события $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_3$. Следовательно, $B = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$.

3) Событие C означает, что произошло или событие A_1, или событие A_2, или событие A_3, или любые два из них, или все вместе, т.е. имеем сумму событий: $C = A_1 + A_2 + A_3$.

4) Задачу решит только первый студент ($A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$), или только второй студент ($\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3$), или только третий студент ($\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$), т.е. имеем сумму событий $D = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$. ●

6.2.9. Из корзины, содержащей красные, желтые и белые розы, выбирается один цветок. Пусть события A = {выбрана красная роза}, B = {выбрана желтая роза}, C = {выбрана белая роза}. Что означают события:

а) $\overline{A}$; б) $A+B$;
в) AC; г) $\overline{A+B}$;
д) $\overline{A}+\overline{B}$; е) $AB+C$?

6.2.10. В задаче 6.2.8 найти выражения для следующих событий:
а) $E=\{$с задачей не справился ни один из студентов$\}$;
б) $F=\{$задачу решило не более двух студентов$\}$.

6.2.11. В задаче 6.2.1 выяснить, что означают следующие события:
а) $A+B$; б) $A\cdot D$;
в) $\overline{C-D}$; г) $\overline{A\cdot B}-C$;
д) $\overline{A\cdot\overline{D}}$; е) $\overline{A}\cdot\overline{B}$.

6.2.12. Пусть A,B,C — три произвольных события. Выразить через A,B,C и их отрицания следующие события:
а) произошло только событие C;
б) произошли все три события;
в) произошло по крайней мере одно из этих событий;
г) произошло по крайней мере два события;
д) произошло только два события;
е) ни одно событие не произошло;
ж) произошло не более двух событий.

6.2.13. Событие C влечет событие D. Что представляют собой события:
а) $C+D$, б) $C\cdot D$,
в) $C-D$, г) $\overline{D}\cdot C$?

6.2.14. Пусть событие $A=\{$экзамен сдан$\}$, а событие $B=\{$экзамен сдан на отлично$\}$. В чем состоят события:
а) $A-B$; б) $\overline{A-B}$;
в) $A-\overline{B}$?

6.2.15. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рисунке 59. Событие $A_i=\{$элемент с номером i вышел из строя$\}$, $i=1,2,3$. Событие $B=\{$схема вышла из строя (разрыв цепи)$\}$. Выразить события B и $\overline{B}$ через события A_i.

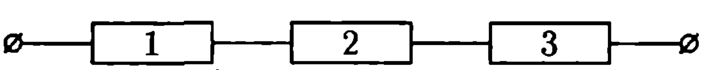


Рис. 59

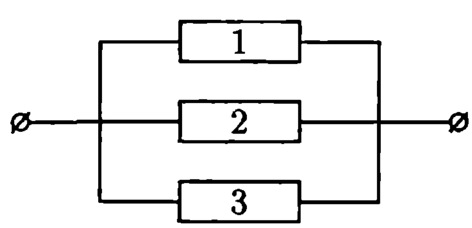


Рис. 60

6.2.16. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рисунке 60. Событие $A_i=\{$элемент с номером i вышел из строя$\}$, $i=1,2,3$. Событие $B=\{$разрыв цепи$\}$. Выразить события B и $\overline{B}$ через события A_i.

6.2.17. Упростить выражение $A + A \cdot B$.

○ $A + A \cdot B = A \cdot \Omega + A \cdot B = A \cdot (\Omega + B) = A(B + \Omega) = A \cdot \Omega = A$, т.е. $A + AB = A$. Использованы свойства 5, 2, 1 операций над событиями. ●

6.2.18. Пусть A, B и C — случайные события. Доказать, что

$$A(B - C) = A \cdot B - A \cdot C.$$

○ Пусть произвольный исход (элементарное событие) опыта $\omega \in A(B - C)$. Тогда $\omega \in A$ и $\omega \in (B - C)$, т.е. $\omega \in A$, $\omega \in B$, но $\omega \notin C$. Следовательно, $\omega \in AB$ и $\omega \notin AC$, т.е. $\omega \in AB - AC$. Таким образом. любой исход события $A(B - C)$ является исходом события $AB - AC$, т.е. $A(B - C) \subseteq AB - AC$. Аналогично доказывается, что $AB - AC \subseteq A(B - C)$. Отсюда следует $A(B - C) = A \cdot B - A \cdot C$ (события $A(B - C)$ и $AB - AC$ состоят из одних и тех же элементарных событий ω). ●

6.2.19. Доказать, что $A + B = A + \overline{A}B$, где A и B — случайные события. Привести геометрическую интерпретацию событий.

○ Используя свойства операций над событиями, получаем:

$$A + B = A \cdot \Omega + B \cdot \Omega = A \cdot \Omega + B(A + \overline{A}) = A \cdot \Omega + B \cdot A + B \cdot \overline{A} =$$
$$= A \cdot (\Omega + B) + \overline{A} \cdot B = A \cdot \Omega + \overline{A} \cdot B = A + \overline{A} \cdot B.$$

Изображая пространство Ω прямоугольником, элементарные события (исходы) — точками этого прямоугольника, а события — его подмножествами (такая интерпретация множеств носит название диаграмм Эйлера–Венна), получим рисунки, изображенные на рис. 61.

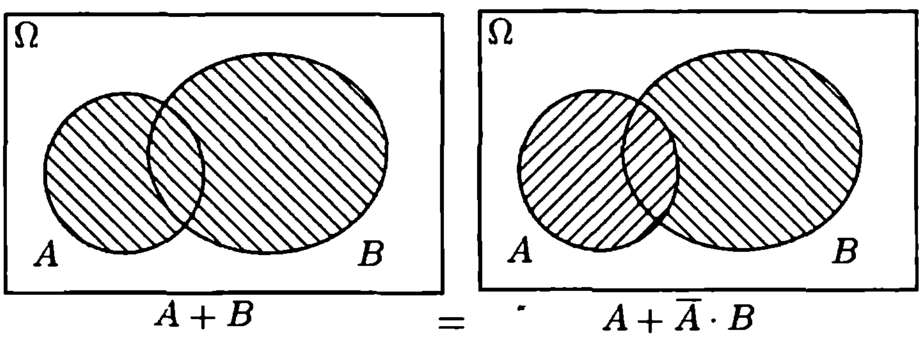


Рис. 61

●

6.2.20. Упростить выражение $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + B)$.

6.2.21. Доказать, что события A, $\overline{A} \cdot B$, $\overline{A + B}$ образуют полную группу.

6.2.22. Упростить выражения:

а) $A(B - AB)$; б) $A\overline{B} + AC + BC + B$;

в) $A + \overline{A}B + \overline{A + B}$.

6.2.23. Доказать справедливость законов де Моргана:

а) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; б) $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

6.2.24. Упростить выражения: AB, $A + B$, $A + B + C$, если известно, что $A \subseteq B$.

6.2.25. Установить, какие из следующих соотношений правильны:
а) $\overline{A}+\overline{B}=\overline{A+B}$; б) $\overline{A+B+C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$;
в) $(A+B)-C=A+(B-C)$.

6.2.26. Совместны ли события A и $\overline{A+B}$?

6.2.27. Справедливы ли и в каком случае равенства
а) $A\cdot B=\overline{A}$; б) $A+B=\overline{A}$?

Дополнительные задания

6.2.28. Построить пространство Ω для следующих испытаний:
а) монета бросается до первого появления герба или до тех пор, пока решка выпадет три раза подряд;
б) подбрасывается игральная кость, а затем монета.

6.2.29. В урне находится 10 одинаковых шаров, занумерованных числами $0,1,2,\ldots,9$. Из нее извлекаются по одному 4 шара. После каждого извлечения вынутый шар возвращается обратно. Описать пространство Ω для этого эксперимента и найти число его элементов.

6.2.30. Из четырех карточек с номерами 1, 2, 3, 4 последовательно наудачу выбирают две. Составить пространство элементарных событий для этого опыта, если его элементами служат:
а) двузначные числа, образованные извлеченными карточками;
б) суммы номеров, извлеченных карточек.

6.2.31. Назвать противоположные события для следующих событий:
а) $A=\{$выигрыш 1-го игрока в шахматной партии$\}$;
б) $B=\{$произошло хотя бы одно попадание при десяти выстрелах$\}$;
в) $C=\{$произошло три попадания при трех выстрелах$\}$;
г) $D=\{$произошло не более двух попаданий при пяти выстрелах$\}$;
д) $E=\{$в семейной паре муж старше жены$\}$.

6.2.32. Упростить выражения:
а) $(X+Y)Y+X(XY)$; б) $(X-ZX)+(Y-ZY)+Z$.

6.2.33. Доказать тождество:
а) $A-B=A\cdot\overline{B}$; б) $A-B=A-AB$;
в) $A+B=A\cdot\overline{B}+\overline{A}B+AB$.

6.2.34. Показать, что:
а) $AB=A \implies A\subseteq B$;
б) $A\subseteq B \implies A+B=B,\ AB=A$.

6.2.35. Упростить выражение:
а) $(A+B)\cdot(A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})$;
б) $\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}$; в) $(A+B)(B+C)(C+A)$.

6.2.36. Доказать, что:

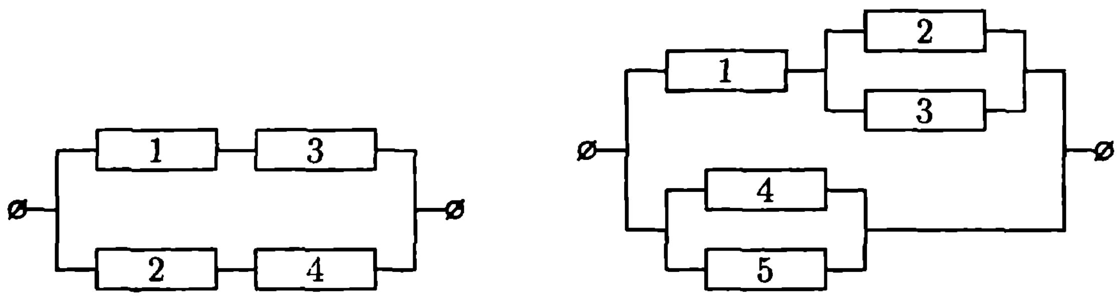
а) $\overline{AB+\overline{B}} = B - A$;

б) $B = \overline{A}$, если $A \cdot B = \varnothing$ и $\overline{A} \cdot \overline{B} = \varnothing$.

6.2.37. Электрическая цепь с выключателями составлена по схеме, приведенной на рисунке 62. Пусть событие $A_i = \{$включен выключатель с номером $i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 5$.

а) Для схемы рис. 62 *а* записать через A_i событие $A = \{$ток идет$\}$;

б) для схемы рис. 62 *б* записать через A_i события A и $\overline{A}$.



а *б*

Рис. 62

6.2.38. Пусть A, B, C — случайные события, причем A и B несовместны. Показать, что события AC и BC также несовместны.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

6.2.39. Из колоды игральных карт (всего их 36) извлекают одну. Составить не менее двух пространств элементарных событий для данного опыта.

6.2.40. Сколько событий можно составить для пространства

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}?$$

6.2.41. Подбрасываются 3 монеты. Сколько имеется равновозможных исходов данного опыта? Составить события, образующие полную группу. Привести примеры событий, не образующих полную группу. Указать подмножества множества Ω, соответствующие событиям: A — выпало не более одной решки; B — выпало ровно два герба.

6.2.42. Известно, что события A_1 и A_2 произошли, а событие A_3 не произошло. Произошли ли события:

а) $\overline{A}_1 \cdot A_2 + A_3$; б) $A_1 + A_2A_3$;

в) $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$?

6.2.43. Каков смысл равенств:

а) $A \cdot B \cdot C = A$; б) $A + B + C = A$?

6.2.44. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рис. 63. Пусть события A_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, состоят в том, что одноименные элементы работают безотказно в течение времени T. Событие $B = \{$схема работает безотказно в течение времени $T\}$. Выразить события B и $\overline{B}$ через события A_i.

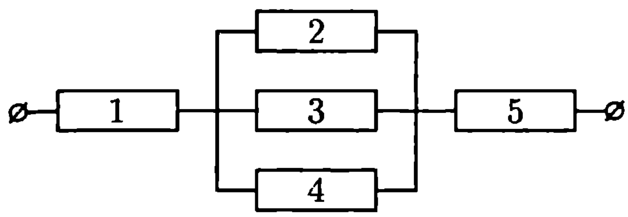


Рис. 63

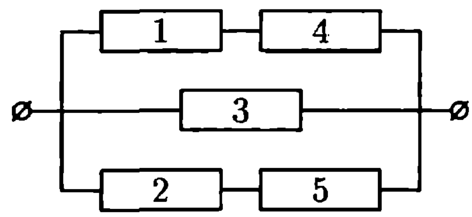


Рис. 64

6.2.45. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рис. 64. Событие A_i — элемент под номером i выходит из строя, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Событие B — разрыв цепи. Выразить событие B через события A_i.

6.2.46. Доказать, что $A \cdot B + C = (A + C) \cdot (B + C)$, где A, B, C — случайные события.

6.2.47. Найти случайное событие X из равенства:

а) $A \cdot X = A + X$; б) $\overline{A + X} + \overline{\overline{A} + X} = C$.

6.2.48. Справедливы ли следующие равенства:

а) $A + \overline{A} = A$; б) $A \cdot \overline{A} = A$;

в) $A + B = A \cdot B$?

6.2.49. При каком условии справедливо равенство $(A + B) - B = A$?

6.2.50. Доказать, что $(A + B) - B = A - B$.

6.2.51. Показать, что если $B \subseteq A$, то $(A - B) + B = A$.

6.2.52. Доказать, что $A - B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$.

§ 3. ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Классическое определение вероятности

Вероятность события численно характеризует степень возможности его появления в рассматриваемом опыте.

⇛ Пусть производится опыт с n равновозможными исходами, образующими полную группу несовместных событий. Такие исходы называются *элементарными исходами (событиями), случаями, шансами*. Случай, который приводит к наступлению события A, называется *благоприятным* (или *благоприятствующим*) ему. ⇚

$\Rightarrow$ *Вероятностью события* A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих этому событию, к общему числу n случаев.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Такое определение вероятности называется *классическим*. $\Leftarrow$

Из классического определения следуют свойства вероятности: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$; $P(\varnothing) = 0$; $P(\Omega) = 1$; $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(A+B) = P(A) + P(B)$, если $A \cdot B = \varnothing$.

Геометрическое определение вероятности

Обобщением понятия «классической вероятности» на случай опытов с бесконечным (вообще говоря, несчетным) числом исходов является понятие «геометрической вероятности». К этому понятию приводят задачи на подсчет вероятности попадания точки в некую область (отрезок, часть плоскости, часть тела и т. д.).

Пусть пространство элементарных событий Ω представляет собой некоторую область плоскости. Тогда в качестве событий могут рассматриваться области A, содержащиеся в Ω.

$\Rightarrow$ Вероятность попадания в область A точки, наудачу выбранной из области Ω, называется *геометрической вероятностью* события A и находится по формуле

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)},$$

где $S(A)$ и $S(\Omega)$ площади областей A и Ω соответственно. $\Leftarrow$

Случай, когда Ω представляет собой отрезок или трехмерную область, рассматривается аналогично.

Аксиоматическое определение вероятности

Пусть Ω — множество всех возможных исходов некоторого опыта (эксперимента). Согласно *аксиоматическому определению вероятности*, каждому событию A (A — подмножество множества Ω) ставится в соответствии некоторое число $P(A)$, называемое вероятностью события A, причем так, что выполняются следующие три условия (аксиомы вероятностей):

$$P(A) \geqslant 0; \tag{3.1}$$

$$P(\Omega) = 1; \tag{3.2}$$

$$\text{аксиома сложения:}\quad P\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k), \tag{3.3}$$

если $A_i \cdot A_j = \varnothing$ ($i \neq j$), т. е. вероятность суммы попарно-несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Из аксиом (3.1)–(3.3) вытекают основные свойства вероятности:

1. $P(\varnothing) = 0$, т. е. вероятность невозможного события равна нулю.
2. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.
3. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ для любого события A.
4. $P(A) \leqslant P(B)$, если $A \subseteq B$.
5. $\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$, если $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ и $A_i \cdot A_j = \varnothing$, $i \neq j$.

Если множество Ω состоит из n равновозможных элементарных событий, (т. е. $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$), то вероятность события A определяется по формуле классического определения вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число случаев (элементов) ω_i, принадлежащих множеству A (число благоприятствующих событию A исходов), n — число элементов множества Ω (число всех исходов опыта).

6.3.1. В урне содержится 5 белых и 4 черных шара, различающихся только цветом.

1) Вынимается наудачу один шар. Найти вероятность того, что он белый.

2) Вынимаются наудачу два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара белые; б) хотя бы один из них черный.

◐ **1)** Перенумеруем шары. Пространство элементарных событий можно записать в виде $\Omega = \{Б_1, Б_2, Б_3, Б_4, Б_5, Ч_1, Ч_2, Ч_3, Ч_4,\}$. Пусть событие $A = \{$появление белого шара$\}$, тогда $A = \{Б_1, Б_2, Б_3, Б_4, Б_5\}$.

Так как все элементарные исходы равновозможны, то по классическому определению вероятности $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{9}$.

2) При вынимании двух шаров возможны такие исходы: $(Б_1, Ч_1)$, $(Б_2, Б_3)$, $(Б_3, Б_2)$, $(Ч_4, Б_5)$ и т. д. Число всех случаев равно $n = A_9^2 = 9 \cdot 8 = 72$.

а) Исходами, благоприятствующими наступлению события $B = \{$появление двух белых шаров$\}$, являются $(Б_1, Б_2)$, $(Б_1, Б_3)$, $(Б_3, Б_5)$, $(Б_3, Б_1)$ и т. д. Число таких случаев равно $m = A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$. Поэтому $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$.

б) Исходами, благоприятствующими наступлению события $C = \{$появление хотя бы одного черного шара$\}$, являются $(Б_1, Ч_1)$, $(Б_1, Ч_2)$, $(Б_1, Ч_3)$, $(Ч_3, Б_1)$, $(Ч_1, Ч_2)$, $(Ч_3, Ч_4)$ и т. д. Число таких случаев равно $m = A_9^2 - A_5^2 = 72 - 20 = 52$ (в 20 случаях из 72 появятся два белых шара (см. пункт a), поэтому в остальных случаях хотя бы один из пары шаров будет черным. Отсюда $P(C) = \frac{52}{72} = \frac{13}{18}$. Этот же результат можно получить иначе, т. к. $C = \overline{B}$, то $P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$. ●

6.3.2. В коробке 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что:

а) все они одного цвета; **б)** все они разных цветов;

в) среди них 2 синих и 1 зеленый карандаш.

Сначала заметим, что число способов выбрать 3 карандаша из 12 имеющихся в наличии равно $n = C_{12}^3 = 220$.

а) Выбрать 3 синих карандаша из 5 можно C_5^3 способами; 3 красных из имеющихся 4 можно выбрать C_4^3 способами; 3 зеленых из 3 зеленых — C_3^3 способами.

По правилу сложения общее число m случаев, благоприятствующих событию $A = \{$три карандаша, вынутых из коробки, одного цвета$\}$, равно $m = C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 15$. Отсюда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$.

б) Пусть событие $B = \{$три вынутых карандаша разных цветов$\}$. Число m исходов, благоприятствующих наступлению события B, по правилу умножения равно $m = C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$.

в) Пусть событие $C = \{$из трех выбранных карандашей 2 синих и 1 зеленый$\}$. Выбрать 2 синих карандаша из имеющихся 5 синих можно C_5^2 способами, а 1 зеленый из имеющихся 3 зеленых — C_3^1 способами. Отсюда по правилу умножения имеем: $m = C_5^2 \cdot C_3^1 = 30$. Поэтому $P(\text{C}) = \frac{m}{n} = \frac{30}{220} = \frac{3}{22}$. ●

6.3.3. Дано шесть карточек с буквами Н, М, И, Я, Л, О. Найти вероятность того, что:

а) получится слово ЛОМ, если наугад одна за другой выбираются три карточки;

б) получится слово МОЛНИЯ, если наугад одна за другой выбираются шесть карточек и располагаются в ряд в порядке появления.

а) Из шести данных букв можно составить $n = A_6^3 = 120$ трехбуквенных «слов» (НИЛ, ОЛЯ, ОНИ, ЛЯМ, МИЛ и т. д.). Слово ЛОМ при этом появится лишь один раз, т. е. $m = 1$. Поэтому вероятность появления слова ЛОМ (событие A) равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120}$.

б) Шестибуквенные «слова» отличаются друг от друга лишь порядком расположения букв (НОЛМИЯ, ЯНОЛИМ, ОЛНИЯМ и т. д.). Их число равно числу перестановок из 6 букв, т. е. $n = P_6 = 6!$. Очевидно, что $m = 1$. Тогда вероятность появления слова МОЛНИЯ (событие B) равна $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$. ●

6.3.4. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) сумма выпавших очков не превосходит 7;

б) на обеих костях выпадет одинаковое число очков;

в) произведение выпавших очков делится на 4;

г) хотя бы на одной кости выпадет 6 очков.

6.3.5. Код домофона состоит из 8 цифр, которые могут повторяться. Какова вероятность того, что, случайно набирая цифры, можно угадать нужный код?

6.3.6. Из букв А, С, Н, Н, А, А разрезной азбуки составляется наудачу слово, состоящее из 6 букв. Какова вероятность того, что получится слово «АНАНАС»?

6.3.7. Восемь друзей распределяют места за круглым столом по жребию. Какова вероятность того, что два из них, а именно A и B, будут сидеть рядом?

6.3.8. Двое друзей, A и B, стоят в очереди из 8 человек. Найти вероятность того, что:

а) A и B стоят рядом;

б) между A и B стоят два человека.

6.3.9. На 5 карточках написано по одной цифре из набора 1, 2, 3, 4, 5. Наугад выбираются две карточки. Какова вероятность того, что число на второй карточке больше, чем на первой?

6.3.10. Из колоды в 36 карт извлекаются наудачу 4 карты. Какова вероятность событий: $A = \{$все извлеченные карты пиковой масти$\}$, $B = \{$среди этих четырех карт окажется хотя бы один король$\}$?

6.3.11. Из 40 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 30. Найти вероятность того, что среди трех наугад выбранных вопросов студент знает:

а) 3 вопроса; б) 2 вопроса;

в) 1 вопрос.

6.3.12. Три человека произвольно размещаются в 8 вагонах электрички. Какова вероятность того, что все они:

а) зайдут в один вагон; б) зайдут в вагон № 3;

в) разместятся в разных вагонах?

6.3.13. 12 человек, среди которых Петров и Иванов, размещаются в гостинице, в которой есть один 4-местный, два 3-местных и один 2-местный номер. Какова вероятность события A, состоящего в том, что Петров и Иванов попадут в 2-местный номер?

6.3.14. На отрезок AB длины α наудачу нанесена точка C. Найти вероятность того, что меньший из отрезков AC и CB имеет длину, большую, чем $\frac{\alpha}{6}$.

Расположим отрезок AB на числовой оси Ox так, как это изображено на рисунке 65.

Пусть x — координата случайной точки C. Тогда пространство Ω элементарных событий можно записать в виде $\Omega = \{x : \ 0 \leqslant x \leqslant \alpha\}$. Ясно, что исходов опыта (нанесение точки C на отрезок AB) бесчисленное множество и все они равновозможны.

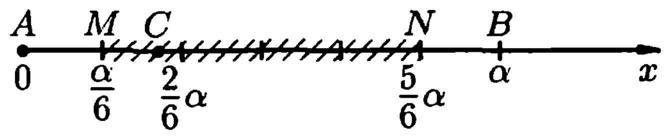


Рис. 65

Разобьем отрезок AB на 6 равных отрезков. Очевидно, что условие «меньший из отрезков AC и CB имеет длину, большую, чем $\frac{\alpha}{6}$» (событие A) будет выполнено, если точка C попадет на отрезок $MN = \left[\frac{\alpha}{6}, \frac{5\alpha}{6}\right]$. Таким образом, областью, благоприятствующей наступлению события A (на рисунке 65 она заштрихована), является отрезок MN, а множеству всех исходов опыта соответствует отрезок AB. Отсюда

$$P(A) = \frac{MN}{AB} = \frac{\frac{4\alpha}{6}}{\alpha} = \frac{2}{3}. \qquad \bullet$$

6.3.15. Противник в течение часа делает один десятиминутный налет на участок шоссе. В течение этого же часа нужно преодолеть этот опасный участок шоссе. С какой вероятностью можно избежать налета, если время преодоления опасного участка пять минут?

○ Обозначим через x момент времени, когда начинается выход на опасный участок шоссе, а через y — момент времени начала обстрела этого участка шоссе. Ясно, что $0 \leqslant x \leqslant 60$, $0 \leqslant y \leqslant 60$.

Будем рассматривать x и y как декартовы координаты на плоскости. Тогда элементарные исходы в данном опыте (он состоит в фиксации времени начала действий обеих сторон), изобразятся точками (x, y) квадрата со стороной $T = 60$, т. е. $\Omega = \{(x, y): \ 0 \leqslant x \leqslant 60, \ 0 \leqslant y \leqslant 60\}$.

Интересующее нас событие $A = \{$удастся избежать налета$\}$ наступит тогда и только тогда, когда налет начнется спустя пять (или больше) минут после выхода на опасный участок либо начнется за десять (и более) минут до начала преодоления участка шоссе, т. е. должно выполняться одно из условий

$$\left[\begin{array}{l} y - x > 5, \\ x - y > 10. \end{array}\right.$$

Эти неравенства определяют благоприятствующую событию A область D, заштрихованную на рисунке 66.

Площадь области D равна $S(D) = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot 55 \cdot 55 = 2762{,}5$; площадь квадрата Ω равна $S(\Omega) = 60 \cdot 60 = 3600$.

Тогда искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{S(D)}{S(\Omega)} = \frac{2762{,}5}{3600} = \frac{221}{288} \approx 0{,}77. \qquad \bullet$$

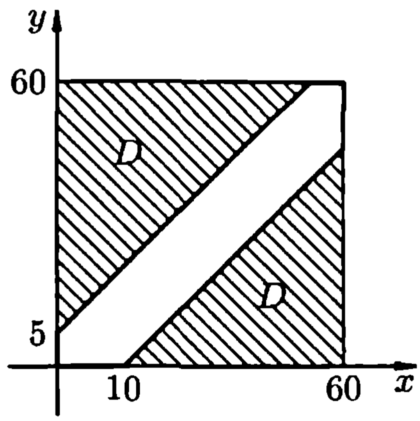


Рис. 66

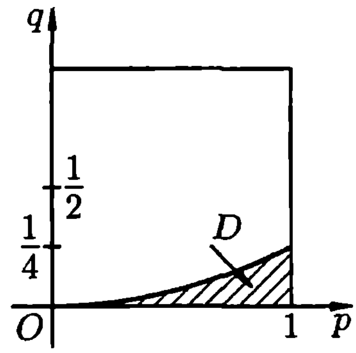


Рис. 67

6.3.16. Какова вероятность того, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ будут действительными, если коэффициенты p и q уравнения выбираются наудачу из отрезка $[0, 1]$?

○ Будем рассматривать множество всех возможных пар чисел (p, q) как координаты точек единичного квадрата с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ (см. рис. 67). Поэтому $\Omega = \{(p,q):\ 0 \leqslant p \leqslant 1,\ 0 \leqslant q \leqslant 1\}$.

Корни уравнения действительны, если выполняется неравенство $p^2 - 4q \geqslant 0$, т. е. $q \leqslant \frac{1}{4}p^2$. Отсюда ясно, что множество точек квадрата, благоприятствующих событию $A = \{$корни уравнения действительны$\}$, есть область D (на рисунке 67 область D заштрихована):

$$D = \left\{(p,q):\ q \leqslant \frac{1}{4}p^2,\ 0 \leqslant p \leqslant 1,\ 0 \leqslant q \leqslant 1\right\}.$$

Искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{S(D)}{S(\Omega)} = \frac{\int\limits_0^1 \frac{p^2}{4}\,dp}{1} = \frac{p^3}{12}\bigg|_0^1 = \frac{1}{12}.$$ ●

6.3.17. В некоторой точке C линии AB длины L произошел разрыв. Какова вероятность того, что точка C удалена от точки A на расстояние не меньше l?

6.3.18. В круг радиуса r наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника?

6.3.19. На площадку, покрытую кафельной плиткой со стороной $a = 6$ см, случайно падает монета радиуса $r = 2$ см. Найти вероятность того, что монета целиком окажется внутри квадрата.

6.3.20. На отрезке $[0, 3]$ наудачу выбраны два числа x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \leqslant 3y \leqslant 3x$.

6.3.21. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов не зависит друг от друга и равновозможно в любой промежуток времени длительностью 3 часа. Сигнализатор срабатывает, если интервал между моментами поступления сигналов менее 0,15 ч. Найти вероятность того, что сигнализатор сработает в течение 3 часов, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

6.3.22. Минное заграждение состоит из мин, расположенных в одну линию на расстоянии 50 м одна от другой. Ширина корабля 20 м. Какова вероятность того, что корабль благополучно пройдет через заграждение?

6.3.23. В шар вписан куб. Найти вероятность того, что выбранная наудачу внутри шара точка окажется внутри куба.

6.3.24. Опираясь на аксиомы теории вероятностей, доказать следующие утверждения:

а) $P(\varnothing) = 0$; б) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

○ а) Так как $\varnothing + \Omega = \Omega$, то $P(\varnothing + \Omega) = P(\Omega)$. По аксиоме (3.3):

$$P(\varnothing + \Omega) = P(\varnothing) + P(\Omega),$$

т. к. $\varnothing \cdot \Omega = \varnothing$. Итак, $P(\varnothing) + P(\Omega) = P(\Omega)$, откуда $P(\varnothing) = 0$.

б) Так как $\overline{A} + A = \Omega$ и $\overline{A} \cdot A = \varnothing$, то по аксиомам (3.2)–(3.3):

$$P(\overline{A} + A) = P(\overline{A}) + P(A) = P(\Omega) = 1.$$

Отсюда $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. ●

6.3.25. Доказать, что $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

○ Так как $A+B = A+(B-A)$ и $B = (B-A)+AB$, причем $A\cdot(B-A) = \varnothing$ и $(B - A) \cdot AB = \varnothing$, то по аксиоме сложения (3.3) находим: $P(A + B) = P(A) + P(B - A)$ и $P(B) = P(B - A) + P(AB)$, откуда $P(B - A) = P(B) - P(AB)$. Следовательно, $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. ●

6.3.26. Доказать, что для любых событий A и B выполнено неравенство $P(A + B) \leqslant P(A) + P(B)$.

6.3.27. Доказать, что для любых событий A, B и C

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - \\ - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

6.3.28. Пусть $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Доказать, что $P(AB) = P(\overline{A} \cdot \overline{B})$.

6.3.29. Доказать, что если $A \supseteq B$, то $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

Дополнительные задания

6.3.30. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью не меньше 0,6 хотя бы один раз выпало 6 очков?

6.3.31. Из последовательности чисел $1, 2, 3, 4, \ldots, 600$ наудачу выбираются два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше 126, а другое больше 126?

6.3.32. В лотерее разыгрывается 100 билетов. Выигрыши выпали на 20 билетов. Некто приобрел 5 билетов. Найти вероятности следующих событий:

а) выигрыш выпадет на все 5 билетов;

б) выигрыш выпадет хотя бы на 1 билет;

в) выигрыш выпадет на 2 билета.

6.3.33. Восемь шахматистов, среди которых три гроссмейстера, путем жеребьевки делятся на две команды по 4 человека. Какова вероятность того, что два гроссмейстера попадут в одну команду, а еще один — в другую?

6.3.34. В ящике 20 деталей, 4 из них — нестандартные. Какова вероятность того, что среди 6 наугад взятых деталей нестандартных не окажется?

6.3.35. Железнодорожный состав из 9 вагонов и вагона-ресторана формируется произвольным образом. Какова вероятность того, что:

а) вагон № 7 и вагон-ресторан расположены рядом;

б) между вагоном № 7 и вагоном-рестораном окажется 5 вагонов?

6.3.36. Две однотипные радиостанции имеют 8 фиксированных одинаковых частот. Какова вероятность того, что при независимом и произвольном выборе частот они окажутся настроенными на:

а) одну частоту; б) разные частоты?

6.3.37. Найти вероятность того, что 30 студентов одной группы родились:

а) в разные дни года (в году 365 дней);

б) в один день года; в) 8 марта;

г) в разные месяцы года; д) в сентябре;

е) в разные дни сентября.

6.3.38. Наудачу выбирают 5 военнослужащих из группы, состоящей из 4 офицеров и 12 солдат. Какова вероятность того, что в группе будет не более двух офицеров?

6.3.39. Найти вероятность того, что участник лотереи «Спортлото — 6 из 49», купивший один билет, угадает правильно:

а) 2 номера; б) 6 номеров.

6.3.40. Какова вероятность того, что произвольно взятое трехзначное число делится на 3?

6.3.41. Натуральные числа от 1 до n расставлены случайно. Найти вероятность того, что числа 5, 6, 7 расположены рядом и притом в порядке возрастания.

6.3.42. На 9 одинаковых карточках написаны буквы Е, Е, Р, Р, С, С, Я, Г, И. Эти карточки выкладывают наудачу в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово РЕГРЕССИЯ?

6.3.43. В «Словаре русского языка» С. И. Ожегова 900 страниц. Какова вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь порядковый номер, кратный 13?

6.3.44. В группе 10 юношей и 10 девушек. Для дежурства на вечере путем жеребьевки выделяют 5 человек. Какова вероятность того, что в число дежурных войдут:

а) 5 юношей; б) 2 юноши и 3 девушки?

6.3.45. В урне 3 белых, 6 черных и 5 синих шаров. Из нее вынимают наудачу 2 шара. Какова вероятность того, что они окажутся разного цвета?

6.3.46. Какова вероятность того, что два определенных студента будут посланы на практику в город C, если в наличие имеется 5 мест в город A, 8 — в город B и 7 — в город C?

6.3.47. 10 яблок, 3 груши и 8 лимонов раскладывают наудачу в три пакета с равным количеством фруктов. Найти вероятности событий:

а) в каждом пакете по 1 груше;

б) в случайном выбранном пакете нет груш.

6.3.48. Из колоды в 36 карт вынимают наудачу 4 карты. Найти вероятности событий: $A = \{$все карты — дамы$\}$, $B = \{$две карты из четырех — шестерки$\}$. Решить задачу для схемы выбора:

а) без возвращения; б) с возвращением.

6.3.49. На плоскости нарисованы две концентрические окружности, радиусы которых 3 см и 5 см. Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу в больший круг, попадет в кольцо, образованное этими окружностями?

6.3.50. Какова вероятность того, что произведение двух наугад взятых правильных положительных дробей будет не больше $\frac{1}{4}$?

6.3.51. Два человека договорились о встрече в определенном месте в промежутке времени от 19.00 до 20.00. Каждый из них приходит наудачу, независимо от другого и ожидает 15 минут. Какова вероятность того, что они встретятся?

6.3.52. Наудачу выбирают два числа из промежутка $[0, 1]$. Какова вероятность того, что их сумма заключена между $\frac{1}{4}$ и 1?

6.3.53. На паркет, составленный из правильных треугольников со стороной a, случайно падает монета радиуса r. Найти вероятность того, что монета целиком окажется внутри одного из треугольников.

6.3.54. Стержень длины L ломают на три части, выбирая случайным образом места разлома. Найти вероятность того, что из полученных отрезков можно составить треугольник.

6.3.55. *Задача-шутка.*

На дне глубокого сосуда
Лежат спокойно n шаров,
Поочередно их оттуда
Таскают двое дураков.

Сие занятье им приятно,
Они таскают m минут
И, взявши шар, его обратно
В сосуд немедленно кладут.

Ввиду условия такого
Сколь вероятность велика,
Что первый был глупей второго,
Когда шаров он вынул k?

В.П. Скитович, 1946 г.

Контрольные вопросы и более сложные задания

6.3.56. 12 предметов произвольно расставляют по трем комнатам. Какова вероятность того, что в первой комнате окажется 2 предмета, во второй — 3, а в третьей — 7?

6.3.57. Из множества чисел $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ наудачу выбираются два числа. Какова вероятность того, что второе число больше первого, если выбор осуществляется с возвращением?

6.3.58. n шаров произвольно раскладываются по n гнездам. Какова вероятность того, что одно гнездо окажется пустым?

6.3.59. Не́кто написал на листке четырехзначное число и предложил отгадать его. Какова вероятность угадывания числа с первой попытки?

6.3.60. Бросается 10 монет. Найти вероятность того, что на 4 монетах выпадет герб.

6.3.61. Какова вероятность появления герба не менее одного раза при двукратном бросании монеты?

6.3.62. Числа $1, 2, 3 \ldots, n$ расставлены в случайном порядке. Какова вероятность того, что числа 4, 5, 6 расположены в порядке возрастания, но необязательно рядом?

6.3.63. Из 5 видов открыток наудачу выбираются 3 открытки. Найти вероятность того, что все отобранные открытки будут разными.

6.3.64. Внутри квадрата с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ и $(0, 1)$ наудачу выбирается точка $M(x, y)$. Найти вероятность события $A = \{(x, y) : \ x + y^2 \leqslant a^2, \ a > 0\}$.

6.3.65. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Моменты времени прихода обоих пароходов независимы и равновозможны в течение данных суток. Найти вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода — 1 час, а второго — 2 часа.

6.3.66. *Задача Бюффона.* Игла длины l бросается на плоскость, разграфленную параллельными прямыми на полосы шириной L. Все положения центра иглы и все ее направления одинаково вероятны. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

6.3.67. На окружность радиуса R наудачу поставлены три точки A, B и C. Найти вероятность того, что треугольник ABC — остроугольный.

6.3.68. Какой толщины должна быть монета радиуса R, чтобы вероятность падения на ребро была равна $\frac{1}{3}$?

6.3.69. Расстояние от пункта A до пункта B пешеход проходит за 20 минут, а автобус — за 2 минуты. Интервал движения автобусов 30 минут. Пешеход в случайный момент времени отправляется из A в B. Какова вероятность того, что его в пути догонит автобус?

§ 4. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Правило умножения вероятностей

⇛ Пусть A и B — некоторые события, причем $P(B) > 0$. *Условной вероятностью события* A при условии B (обозначается $P(A \mid B)$) называется вероятностью события A, найденная при условии, что событие B произошло. Эта вероятность находится по формуле

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad ⇚$$

Аналогично определяется условная вероятность события B при условии A:

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (P(A) \neq 0).$$

Из этих формул следует

Теорема 6.3 (правило умножения вероятностей). *Вероятность произведения двух событий* равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) \text{ или } P(AB) = P(B) \cdot P(A \mid B).$$

Понятие условной вероятности, так же как и правило умножения вероятностей естественным образом обобщаются на случай произвольного числа событий. А именно, в случае n событий имеем

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}).$$

Независимые события

⇛ *Событие A называется независимым от события B,* если вероятность события A не зависит от того, осуществилось или нет событие B. ⇚

В этом случае условная вероятность события A при условии B равна безусловной вероятности события A, т. е. выполняется равенство

$$P(A \mid B) = P(A).$$

Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от A. Оба события при этом называются независимыми.

Таким образом два события называются *независимыми*, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого.

Для независимых событий правило умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Эта формула часто используется в качестве определения независимых событий.

⇛ События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми (или независимыми в совокупности)*, если вероятность каждого из них не зависит от осуществления или неосуществления любого числа остальных событий. ⇚

В случае n независимых событий имеем

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *попарно-независимыми*, если любые два события A_i и A_j $(i \neq j)$ из этого набора независимы.

Независимые события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ являются попарно-независимыми. Обратное, вообще говоря, неверно.

Вероятность суммы совместных событий

Теорема 6.4. *Вероятность суммы двух совместных событий* есть сумма их вероятностей минус вероятность их произведения, т. е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Для трех событий A, B и C имеем:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

В случае трех и большего числа событий для нахождения вероятности суммы S этих событий проще найти вероятность противоположного события $\overline{S}$, а затем воспользоваться равенством $P(S) = 1 - P(\overline{S})$.

6.4.1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что на первой кости выпало 2 очка при условии, что сумма очков, выпавших на двух костях, меньше 6.

Решим задачу двумя способами.

1. Пусть событие $A = \{$на первой кости выпало 2 очка$\}$, событие $B = \{$сумма очков, выпавших на двух костях, меньше 6$\}$. Событие B состоит из 10 элементарных событий:

$$B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(2,2),(2,3),(3,2)\}.$$

Событие A, определяемое условием B (это значит, что исходы, благоприятствующие событию A, отбираются среди исходов, составляющих событие B), состоит из трех элементарных исходов опыта: $(2,1),(2,2),(2,3)$. Поэтому искомая вероятность равна $P(A \mid B) = \frac{3}{10}$.

2. Пространство элементарных событий состоит из 36 элементов: $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}$. Для вычисления вероятности $P(A \mid B)$ воспользуемся формулой $P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Так как

$$A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\},$$
$$B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(2,2),(2,3),(3,2)\},$$

то $AB = \{(2,1),(2,2),(2,3)\}$.

По классическому определению вероятности $P(A) = \frac{6}{36}$, $P(B) = \frac{10}{36}$, $P(AB) = \frac{3}{36}$. Поэтому

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{3}{10}.$$

6.4.2. Из стандартного набора домино (28 штук) берется наудачу одна кость. Какова вероятность того, что эта кость будет дублем (т. е. будет иметь вид 1–1, 4–4 и т. д.), если известно, что сумма очков на ней — четное число?

6.4.3. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей хотя бы на одной выпадет 5 очков, при условии, что на всех костях выпали грани с нечетным числом очков? с четным числом очков?

6.4.4. Вероятность попадания в цель равна 0,3, а вероятность ее уничтожения равна 0,05. Найти вероятность того, что при попадании в цель она будет уничтожена.

6.4.5. В произвольном порядке выписываются 2 буквы И и 2 буквы С. Найти вероятность того, что обе буквы С стоят рядом, при условии, что последняя по порядку буква есть буква И.

6.4.6. Известно, что события A и B независимы. Доказать, что события $\overline{A}$ и B так же независимы.

◯ По условию, $P(A \mid B) = P(A)$. А так как $P(A \mid B) + P(\overline{A} \mid B) = 1$, то $P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) = 1 - P(A) = P(\overline{A})$. Итак, $P(\overline{A} \mid B) = P(\overline{A})$, т.е. события $\overline{A}$ и B — независимы. ●

6.4.7. В урне находится 4 шара: красный, синий, черный и трехцветный (красно-сине-черный) шар. Из урны извлекается один шар. Исследовать на независимость события: К $=$ {извлеченный шар имеет красный цвет}, С $=$ {извлеченный шар имеет синий цвет}, Ч $=$ {извлеченный шар имеет черный цвет}.

◯ Множество возможных исходов опыта таково: $\Omega = \{\text{К}; \text{С}; \text{Ч}; \text{КСЧ}\}$, где буква К означает, что извлечен шар красного цвета, и т. д.

Очевидно, что $P(\text{К}) = \frac{2}{4} = P(\text{С}) = P(\text{Ч}) = \frac{1}{2}$.

Событиям К $\cdot$ С, К $\cdot$ Ч, С $\cdot$ Ч благоприятствует лишь один исход — это шар КСЧ (имеет все 3 цвета). Значит, $P(\text{К} \cdot \text{С}) = \frac{1}{4} = P(\text{К}) \cdot P(\text{С})$, $P(\text{К} \cdot \text{Ч}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(\text{К}) \cdot P(\text{Ч})$ и $P(\text{С} \cdot \text{Ч}) = \frac{1}{4} = P(\text{С}) \cdot P(\text{Ч})$. Следовательно, события К и С, К и Ч, С и Ч независимы. Тем не менее, события К, С и Ч не являются независимыми в совокупности. Действительно, $P(\text{К} \cdot \text{С} \cdot \text{Ч}) = \frac{1}{4}$, а $P(\text{К}) \cdot P(\text{С}) \cdot P(\text{Ч}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, т.е. $P(\text{К} \cdot \text{С} \cdot \text{Ч}) \neq P(\text{К}) \cdot P(\text{С}) \cdot P(\text{Ч})$. ●

6.4.8. Брошены три игральные кости. Событие $A =$ {на 1-й и 2-й кости выпало одинаковое число очков}, событие $B =$ {на 2-й и 3-й кости выпало одинаковое количество очков}, событие $C =$ {на 1-й и 3-й кости выпало одинаковое количество очков}. Будут ли события A, B и C:

а) попарно независимы;

б) независимы в совокупности?

6.4.9. Из колоды в 36 карт вытаскивается наудачу одна. Зависимы ли события $A =$ {вытащен валет} и $B =$ {вытащена карта черной масти}?

6.4.10. Доказать, что если события A и B независимы, то события $\overline{B}$ и A, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.

6.4.11. В урне находится a белых и b черных шаров, причем $a > 2$ и $b > 2$. Из нее извлекаются два шара по схеме выбора с возвращением. Пусть событие $A_1 =$ {первый шар — белый}, $A_2 =$ {второй шар — белый}. Найти $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_1 \cdot A_2)$, $P(A_1 \mid A_2)$ и $P(A_2 \mid A_1)$. Выяснить: являются ли события A_1 и A_2 независимыми? совместными?

6.4.12. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара белые. Рассмотреть выборки:

а) без возвращения; б) с возвращением.

Пусть событие $A_1 = \{$первый шар — белый$\}$, событие $A_2 = \{$второй шар — белый$\}$. Тогда событие $A = \{$оба шара белые$\}$ наступит, если осуществится и событие A_1, и событие A_2, т. е. $A = A_1 \cdot A_2$.

а) События A_1 и A_2 зависимы, т. к. наступление события A_1 влияет на вероятность события A_2 (шаров в урне останется 6, из них только 3 белых). Поэтому

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}.$$

б) Если после первого извлечения шар возвращается в урну, то события A_1 и A_2 — независимы, откуда

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}.$$ ●

6.4.13. Задачу 6.3.6 решить другим способом, используя правило умножения вероятностей для n событий.

Рассмотрим следующие события: $A = \{$получится слово АНАНАС$\}$, $A_1 = \{$первой, выбранной наудачу буквой, будет буква А$\}$, $A_2 = \{$второй — Н$\}$, $A_3 = \{$третьей — А$\}$, $A_4 = \{$четвертой — Н$\}$, $A_5 = \{$пятой — А$\}$, $A_6 = \{$шестой — С$\}$. Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6$. Применяя правило умножения вероятностей, имеем

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1A_2) \times$$
$$\times P(A_4 \mid A_1A_2A_3) \cdot P(A_5 \mid A_1A_2A_3A_4) \cdot P(A_6 \mid A_1A_2A_3A_4A_5) =$$
$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{60}.$$ ●

6.4.14. Из колоды в 36 карт наудачу вынимаются три карты (без возврата). Какова вероятность того, что среди них не будет ни одной шестерки?

6.4.15. Среди 100 лотерейных билетов есть 10 выигрышных. Какова вероятность того, что 2 наудачу выбранных билета окажутся выигрышными?

6.4.16. Только один из 9 ключей подходит к данному замку. Какова вероятность того, что придется опробовать 5 ключей для открывания замка?

6.4.17. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,3, второй — 0,4, третий — 0,5. По условиям приема события, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент вообще услышит вызов.

6.4.18. В ящике содержатся 9 белых, 6 черных и 5 зеленых шаров. Наудачу вынимается один шар. Найти вероятность того, что он окажется либо черным, либо зеленым.

○ Пусть событие A = {извлеченный шар окажется черным}, B = {извлеченный шар окажется зеленым}. Тогда событие C = {извлеченный шар окажется либо черным, либо зеленым} представляет собой сумму несовместных событий A и B , т. е. $C = A + B$. Поэтому

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{20} + \frac{5}{20} = \frac{11}{20} = 0{,}55.$$

Вероятность извлечения черного или зеленого шара можно было бы найти без использования теоремы сложения вероятностей; ведь имеется 11 равновозможных, благоприятных событию C исходов: $P(C) = \frac{11}{20}$.) ●

6.4.19. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,7, а второго — 0,8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена. А если стрелки сделают по два выстрела?

○ Пусть событие A_i = {попадание в мишень первым стрелком при i-м выстреле}, событие B_i = {попадание в мишень вторым стрелком при i-м выстреле}, $i = 1, 2$; событие C = {мишень поражена}.

Сначала решим задачу для случая, когда стрелки делают по одному выстрелу.

Первое решение.

По условию $P(A_1) = P(A_2) = 0{,}7$, $P(B_1) = P(B_2) = 0{,}8$.

Событие $C = A_1 + B_1$ состоит в том, что при одном залпе мишень будет поражена хотя бы одним стрелком.

Так как события A_1 и B_1 совместны, то

$$P(C) = P(A_1 + B_1) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1 \cdot B_1).$$

События A_1 и B_1 — независимы, поэтому $P(A_1 \cdot B_1) = P(A_1) \cdot P(B_1)$, откуда

$$P(C) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1) \cdot P(B_1) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94.$$

Второе решение.

Поражение цели (C) означает, что: в нее попал первый стрелок, а второй промазал ($A_1 \cdot \overline{B}_1$); или попал второй стрелок, а первый промазал ($\overline{A}_1 \cdot B_1$); или попали оба стрелка ($A_1 \cdot B_1$). Тогда

$$C = A_1 + B_1 = A_1\overline{B}_1 + \overline{A}_1 B_1 + A_1 B_1.$$

По правилу сложения вероятностей несовместных событий получаем

$$P(C) = P(A_1\overline{B}_1) + P(\overline{A}_1 B_1) + P(A_1 B_1) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94.$$

Третье решение.

Найдем вероятность события $\overline{C}$, противоположного событию C. Очевидно, что $\overline{C} = \overline{A_1 + B_1} = \overline{A}_1 \cdot \overline{B}_1$ = {оба стрелка промахнулись}. Так как события $\overline{A}_1$ и $\overline{B}_1$ независимы, то $P(\overline{C}) = P(\overline{A} \cdot \overline{B}_1) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{B}_1) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$. Следовательно, $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Если стрелки делают по два выстрела в мишень, то событию C благоприятствует 15 исходов данного опыта (стрельба по мишеням) из 16 возможных исходов. Такими исходами являются, например, следующие: $A_1\overline{A}_2\overline{B}_1\overline{B}_2$, $\overline{A}_1A_2\overline{B}_1\overline{B}_2$, $A_1\overline{A}_2\overline{B}_1B_2$, $\overline{A}_1A_2B_1B_2$ и т. д. Поэтому проще найти вероятность противоположного события $\overline{C}$ = {все четыре выстрела — промах}. Имеем $P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{B}_1\overline{B}_2) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{B}_1)\cdot P(\overline{B}_2) = 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2 = 0{,}0036$. Следовательно, $P(C) = 1-P(\overline{C}) = 1-0{,}0036 = 0{,}9964$. ●

6.4.20. Среди партии из 100 изделий имеется 10 бракованных. С целью контроля из этой партии отбираются наугад 7 изделий. Если среди них окажется более двух бракованных, то бракуется вся партия изделий. Какова вероятность того, что партия изделий будет забракована?

◐ Партия бракуется, если среди 7 изделий бракованных будет не менее трех; не бракуется — если среди 7 изделий бракованных ноль, одно или два.

Пусть событие A_0 = {среди 7 изделий нет бракованных}, событие A_1 = {среди 7 изделий есть одно бракованное}, событие A_2 = {среди 7 изделий — два бракованных}. Тогда событие A = {партия изделий принимается} можно представить в виде $A = A_0 + A_1 + A_2$. И так как события A_0, A_1, A_2 несовместны, то

$$P(A) = P(A_0 + A_1 + A_2) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2).$$

Найдем вероятность $P(A_0)$, используя классическое определение вероятности. Отобрать 7 деталей из 100 можно $n = C_{100}^7$ способами. Событию A_0 благоприятствует $m = C_{90}^7\cdot C_{10}^0 = C_{90}^7$ случаев. Следовательно, $P(A_0) = \frac{m}{n} = \frac{C_{90}^7}{C_{100}^7}$. Аналогично находим, что

$$P(A_1) = \frac{C_{10}^1\cdot C_{90}^6}{C_{100}^7},\quad P(A_2) = \frac{C_{10}^2\cdot C_{90}^5}{C_{100}^7}.$$

Таким образом, $P(A) = \frac{C_{10}^0\cdot C_{90}^7}{C_{100}^7} + \frac{C_{10}^1\cdot C_{90}^6}{C_{100}^7} + \frac{C_{10}^2\cdot C_{90}^5}{C_{100}^7} \approx 0{,}98$.

Следовательно, вероятность того, что партия изделий будет забракована, равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$. ●

6.4.21. Один студент выучил 20 из 25 вопросов программы, а второй — только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответят:

а) оба студента; б) только первый студент;
в) только один из них; г) хотя бы один из студентов.

6.4.22. В одной комнате находятся 4 девушки и 7 юношей, в другой 10 девушек и 5 юношей. Наудачу выбирают по одному человеку из каждой комнаты. Найти вероятность того, что оба они окажутся юношами или оба — девушками.

6.4.23. Монета бросается до первого появления герба. Какова вероятность того, что понадобится четное число бросков?

6.4.24. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что для запуска двигателя придется включать зажигание не более трех раз?

6.4.25. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рисунке 68. Элементы с номерами 1, 2, 3 могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями, равными соответственно 0,10; 0,15; 0,20. Какова вероятность разрыва цепи?

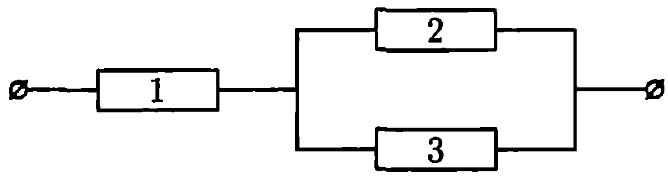


Рис. 68

6.4.26. Устройство состоит из

а) пяти последовательно включенных элементов;

б) пяти параллельно включенных элементов.

Вероятность безотказной работы каждого из них равна 0,80. Определить вероятность безотказной работы всего устройства, полагая, что отказы отдельных элементов независимы.

6.4.27. Какова вероятность того, что наудачу написанную дробь $\frac{m}{n}$, $m, n \in \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

а) можно сократить на 2; **б)** нельзя сократить на 6?

6.4.28. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,875. Какова вероятность попадания при одном выстреле?

Дополнительные задания

6.4.29. В урне содержится 3 белых и 4 черных шара. Из нее последовательно вынимаются два шара. Обозначая события $A_1 = \{$первый шар белый$\}$, $A_2 = \{$второй шар белый$\}$, $B = \{$хотя бы один из вынутых шаров белый$\}$, вычислить условные вероятности: $P(A_1 \mid A_2)$, $P(A_1 \mid B)$.

6.4.30. Бросают две игральные кости. Известно, что выпала сумма очков, равная 7. Какова вероятность того, что выпало 1 и 6?

6.4.31. Пусть $P(A \mid B) > P(B \mid A)$, $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$. Верно ли, что $P(A) > P(B)$?

6.4.32. Один раз подбрасывается игральная кость. Событие $A = \{$выпадение нечетного числа очков$\}$, событие $B = \{$выпадение четного числа очков$\}$, событие $C = \{$выпадение менее 4 очков$\}$. Вычислить вероятности $P(A \mid B)$, $P(A \mid C)$.

6.4.33. Пятизначное число образовано при помощи перестановки цифр 2, 2, 2, 5, 5. Все размещения равновозможны. Найти вероятность того, что обе пятерки стоят рядом при условии, что полученное число четное.

6.4.34. Двадцать пять экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся может ответить только на 45 вопросов. Найти вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один опрос из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

6.4.35. В группе 8 человек, говорящих только на немецком языке, и 6 человек — только на финском. Какова вероятность того, что из двух наудачу выбранных людей оба говорят на одном языке?

6.4.36. В урне находятся 3 белых, 4 желтых и 2 черных шара. Из нее наугад вынимают (без возвращения) один за другим по одному шару. Какова вероятность того, что белый шар появится раньше желтого?

6.4.37. Рабочий обслуживает 3 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что за смену первый станок не потребует внимания рабочего равна 0,9, второй — 0,8, третий — 0,75. Найти вероятность того, что за смену:

а) только один станок потребует внимания;

б) хотя бы один станок потребует внимания;

в) только третий станок потребует внимания рабочего.

6.4.38. Для приема партии готовых изделий применяют выборочный контроль. Для этого берут наугад 3 изделия. Если среди них окажется:

а) хотя бы одно бракованное;

б) более одного бракованное, то бракуется вся партия.

Вычислить в обоих случаях вероятность того, что при таком способе контроля партия, состоящая из 46 стандартных изделий и 4 бракованных, будет принята.

6.4.39. Студент знает 30 из 40 вопросов программы. Экзаменатор задает ему вопросы до тех пор, пока не обнаруживает пробел в знаниях студента. Найти вероятность того, что будут заданы:

а) два вопроса; **б)** более двух вопросов;

в) менее пяти вопросов.

6.4.40. Электрическая цепь (рис. 62 *а*) состоит из 4 элементов, выход из строя которых в заданном промежутке времени — независимые события, имеющие вероятности $q_1 = 0{,}1$; $q_2 = 0{,}2$; $q_3 = 0{,}3$; $q_4 = 0{,}4$. Найти вероятность разрыва цепи.

6.4.41. Электрическая цепь состоит из 5 элементов:

а) рис. 63; **б)** рис. 64.

Найти вероятность разрыва цепи, предполагая, что отказы отдельных элементов независимы. Вероятности отказов элементов соответственно равны: $q_1 = 0{,}1$; $q_2 = 0{,}15$; $q_3 = 0{,}15$; $q_4 = 0{,}15$; $q_5 = 0{,}2$.

6.4.42. Два игрока поочередно бросают:

а) монету; б) игральную кость.

Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб (в случае *а*), шестерка (в случае *б*). Найти вероятность выигрыша первого игрока.

6.4.43. Из набора цифр от 0 до 9, написанных по одной на 10 одинаковых картонках, извлекаются по одной 4 цифры и ставятся в ряд. Какова вероятность того, что получившееся число:

а) 1957; б) 2003?

Рассмотреть два случая выборки: без возвращения и с возвращением.

6.4.44. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,35. Найти вероятность попадания при одном выстреле первым орудием, если для второго орудия эта вероятность равна 0,75.

6.4.45. Работа некоторого устройства прекратилась из-за выхода из строя одного из четырех блоков. Производится последовательная замена наудачу взятого блока новым до тех пор, пока устройство не начнет работать (новые блоки не заменяются). Какова вероятность того, что придется заменить:

а) один блок; б) два блока;
в) четыре блока?

6.4.46. При автоматическом изготовлении болтов допускается в среднем 3% брака. Какова вероятность того, что среди взятых для контроля 5 болтов не окажется

а) ни одного бракованного; б) один бракованный?

6.4.47. Четверть билетов лотереи — выигрышные. Сколько билетов надо приобрести, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, быть уверенным, что выиграет хотя бы один билет?

6.4.48. Стрелок производит выстрел по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,5. Какова вероятность того, что по мишени будет произведено:

а) 7 выстрелов; б) не более 7 выстрелов?

6.4.49. Из букв А, А, И, Л, М, Н разрезной азбуки выбирают наудачу по одной и ставят в ряд. Найти вероятность того, что получится слово:

а) МИНА; б) НАЛИМ;
в) МАЛИНА?

6.4.50. Покупатель ищет необходимую ему вещь, обходя три магазина. Вероятность наличия ее в каждом магазине равна 0,2. Что вероятнее — найдет он искомую вещь или нет?

6.4.51. Найти вероятность того, что заказанный (в данный промежуток времени) междугородный разговор не состоится, если вероятность занятости всех каналов связи в этот промежуток равна 0,7, а вероятность отсутствия вызываемого лица равна 0,4.

6.4.52. Студент может добраться до института или автобусом, который ходит через каждые 20 мин, или троллейбусом, который ходит через каждые 10 мин. Найти вероятность того, что студент, подошедший к остановке, уедет в течение ближайших 5 мин?

Контрольные вопросы и более сложные задания

6.4.53. Доказать свойства условных вероятностей:

а) $P(\Omega \mid B) = 1$;

б) $P(A \mid B) = 1 - P(\overline{A} \mid B)$;

в) $P(A + C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B) - P(AC \mid B)$.

6.4.54. Верно ли равенство $P(A \mid B) + P(A \mid \overline{B}) = 1$?

6.4.55. В семье двое детей. Считая, что рождение мальчика и девочки — независимые и равновероятные события, вычислить вероятность того, что:

а) оба ребенка — мальчики;

б) оба ребенка — мальчики, если известно, что в семье есть мальчик.

6.4.56. Зависимы ли:

а) несовместные события;

б) события, образующие полную группу?

6.4.57. Известно, что $AB = \varnothing$, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$. Доказать, что события A и B зависимы.

6.4.58. Каждую из 5 палок разламывают произвольно на две части — короткую и длинную. Из полученных обломков наудачу образуют 5 «новых» палок. Какова вероятность того, что:

а) обломки объединены в том виде, в каком они были первоначально;

б) все длинные палки соединены с короткими?

6.4.59. Брошены белая и черная игральные кости. Какова вероятность того, что на белой кости выпадет больше очков, чем на черной?

6.4.60. Абонент забыл последнюю цифру телефона и набирает ее наугад. Какова вероятность того, что ему придется звонить не более чем в 5 мест?

6.4.61. Известно, что

$$P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B}).$$

Доказать, что события A и B независимы.

6.4.62. Подброшены 3 монеты. Определить зависимы или не зависимы события A и B, если: $A = \{$выпадение решки на первой монете$\}$; $B = \{$выпадение хотя бы одной решки$\}$.

6.4.63. Для повышения надежности p данного прибора он дублируется несколькими такими же приборами так, чтобы полученная система работала (она работает, если работает хотя бы один из приборов). Сколько приборов надо взять, чтобы повысить его надежность до заданной вероятности p_1?

6.4.64. В урне два белых и три черных шара. Два игрока поочередно вынимают (без возвращения) по одному шару. Выигрывает тот, кто первым вытащит белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

6.4.65. Электрическая цепь состоит из 5 элементов (рис. 69), выход из строя которых в заданный промежуток времени — независимые в совокупности события, имеющие соответственно вероятности q_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Найти вероятность разрыва цепи.

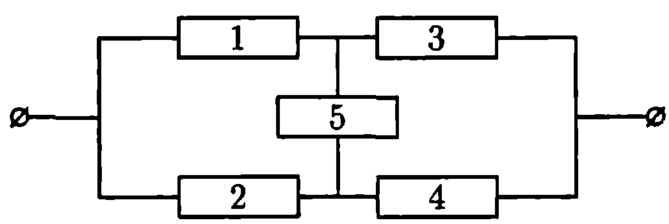


Рис. 69

§ 5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БЕЙЕСА

Теорема 6.5. Пусть событие A может произойти только с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, т. е. $H_i \cdot H_j = \varnothing$, $i \neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

Тогда вероятность события A вычисляется по *формуле полной вероятности*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i). \tag{5.1}$$

При этом события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ обычно называют *гипотезами*, а числа $P(H_i)$ — *вероятностями гипотез*.

Теорема 6.6. Если в результате опыта осуществилось событие A, то прежние, доопытные (или *априорные*) вероятности гипотез $P(H_1), \ldots, P(H_n)$ должны быть заменены на новые, послеопытные (или *апостериорные*) вероятности $P(H_1 \mid A), \ldots, P(H_n \mid A)$, которые вычисляются по *формуле Бейеса*:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, где вероятность $P(A)$ вычисляется по формуле (5.1).

6.5.1. 45% телевизоров, имеющихся в магазине, изготовлены на 1-м заводе, 15% — на 2-м, остальные — на 3-м заводе. Вероятности того, что телевизоры, изготовленные на этих заводах, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока, равны 0,96, 0,84, 0,90 соответственно. Найти вероятность того, что купленный наудачу телевизор выдержит гарантийный срок работы.

❍ Пусть событие: A = {телевизор выдержит гарантийный срок работы}, а гипотезы H_1 = {телевизор изготовлен на 1-м заводе}, H_2 = {телевизор изготовлен на 2-м заводе}, H_3 = {телевизор изготовлен на 3-м заводе}.

События H_1, H_2, H_3 образуют полную группу несовместных событий, при этом: $P(H_1) = 0{,}45$; $P(H_2) = 0{,}15$; $P(H_3) = 0{,}40$. (Для контроля можно найти сумму вероятностей гипотез; она должна равняться единице: $\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) = 0{,}45 + 0{,}15 + 0{,}40 = 1$).

По условию $P(A \mid H_1) = 0{,}96$, $P(A \mid H_2) = 0{,}84$, $P(A \mid H_3) = 0{,}90$. Отсюда по формуле полной вероятности имеем

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) = \\ = 0{,}45 \cdot 0{,}96 + 0{,}15 \cdot 0{,}84 + 0{,}40 \cdot 0{,}90 = 0{,}918.$$ ●

6.5.2. Для улучшения качества радиосвязи используются два радиоприемника. Вероятность приема сигнала каждым приемником равна 0,8, и эти события (прием сигнала приемником) независимы. Определить вероятность приема сигнала, если вероятность безотказной работы за время сеанса радиосвязи для каждого приемника равна 0,9.

❍ Пусть событие A = {сигнал будет принят}. Рассмотрим четыре гипотезы: H_1 = {первый приемник работает, второй — нет}; H_2 = {второй приемник работает, первый — нет}; H_3 = {оба приемника работают}, H_4 = {оба приемника не работают}. Событие A может произойти только с одной из этих гипотез. Найдем вероятность этих гипотез, рассматривая следующие события: C_1 = {первый приемник работает}, C_2 = {второй приемник работает}. Тогда:

$P(H_1) = P(C_1 \cdot \overline{C}_2) = P(C_1) \cdot P(\overline{C}_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09$;
$P(H_2) = P(\overline{C}_1 \cdot C_2) = P(\overline{C}_1) \cdot P(C_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}09$;
$P(H_3) = P(C_1 \cdot C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$;
$P(H_4) = P(\overline{C}_1 \cdot \overline{C}_2) = P(\overline{C}_1) \cdot P(\overline{C}_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$.

(Контроль: $\sum\limits_{i=1}^{4} P(H_i) = 0{,}09 + 0{,}09 + 0{,}81 + 0{,}01 = 1$.)

Условные вероятности $P(A \mid H_i)$ соответственно равны: $P(A \mid H_1) = 0{,}8$; $P(A \mid H_2) = 0{,}8$; $P(A \mid H_3) = 0{,}8+0{,}8-0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$; $P(A \mid H_4) = 0$.

Теперь по формуле полной вероятности находим искомую вероятность $P(A) = 0{,}09 \cdot 0{,}8 + 0{,}09 \cdot 0{,}8 + 0{,}81 \cdot 0{,}96 + 0{,}01 \cdot 0 = 0{,}9216$. ●

6.5.3. Имеются две одинаковые урны с шарами. В 1-й находится 3 белых и 4 черных шара, во 2-й — 2 белых и 3 черных. Из наудачу выбранной урны вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

6.5.4. Студент знает 24 билета из 30. В каком случае вероятность вытащить счастливый билет для него больше, если он идет сдавать экзамен первым или если — вторым?

6.5.5. На рисунке 70 изображена схема дорог. Туристы выходят из пункта A, выбирая наугад на развилке дорог один из возможных путей. Какова вероятность того, что они попадут в пункт B?

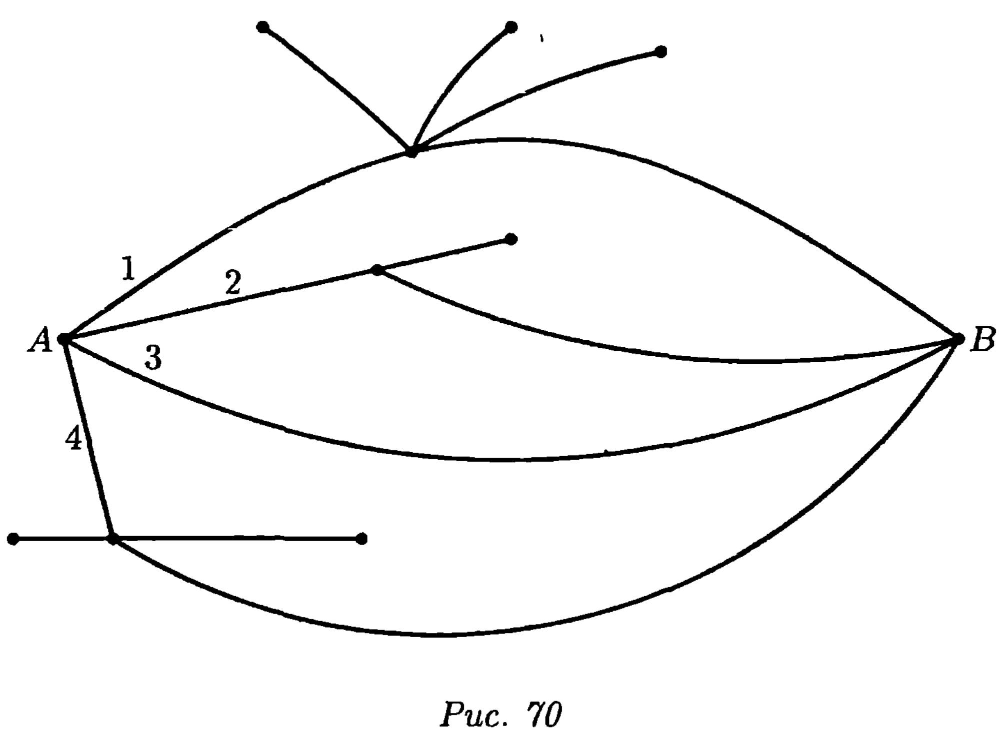


Рис. 70

6.5.6. Три стрелка произвели по одному выстрелу по намеченной цели. Вероятность попадания 1-м стрелком равна 0,6, 2-м — 0,7, 3-м — 0,8. При одном попадании в мишень вероятность поражения цели равна 0,2, при двух — равна 0,6, при трех — цель заведомо поражается. Найти вероятность поражения цели.

6.5.7. Известно, что в среднем 95% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной продукцию с вероятностью 0,96, если она стандартна, и с вероятностью 0,06, если она нестандартна. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие пройдет упрощенный контроль.

6.5.8. Техническое устройство выйдет из строя, если откажут не менее двух из трех независимо работающих элементов. Вероятности отказов 1-го, 2-го, 3-го элементов соответственно равны 0,2; 0,4; 0,3.

Известно, что устройство отказало. Найти вероятность того, что отказали 1-й и 2-й элементы.

◐ Пусть событие $A = \{$устройство отказало$\}$. До опыта, т. е. до отказа устройства, можно сделать следующие предположения-гипотезы:

$H_0 = \{$откажут все три элемента$\}$;
$H_1 = \{$откажут два элемента: 1-й и 2-й, 3-й — не откажет$\}$;
$H_2 = \{$откажут два элемента: 1-й и 3-й, 2-й — не откажет$\}$;
$H_3 = \{$откажут два элемента: 2-й и 3-й, 1-й — не откажет$\}$;
$H_4 = \{$откажет один элемент: 1-й, не откажут 2-й, 3-й$\}$;
$H_5 = \{$откажет один элемент: 2-й, не откажут 1-й, 3-й$\}$;
$H_6 = \{$откажет один элемент: 3-й, не откажут 1-й, 2-й$\}$;
$H_7 = \{$все элементы, будут работать$\}$.

Пользуясь правилом умножения вероятностей для независимых событий, найдем вероятности этих гипотез:

$P(H_0) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}024;$
$P(H_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}056;$
$P(H_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}036;$
$P(H_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}096;$
$P(H_4) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}084;$
$P(H_5) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}224;$
$P(H_6) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}144;$
$P(H_7) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}336.$

(Контроль: $\sum\limits_{i=0}^{7} P(H_i) = 0{,}024 + 0{,}056 + \ldots + 0{,}336 = 1.$)

Учитывая, что в результате опыта произошло событие A, которое невозможно при гипотезах H_4, H_5, H_6, H_7 и достоверно при гипотезах H_0, H_1, H_2, H_3, найдем условные вероятности событий $P(A \mid H_i)$:

$P(A \mid H_0) = 1$, $P(A \mid H_1) = 1$, $P(A \mid H_2) = 1$, $P(A \mid H_3) = 1$, $P(A \mid H_4) = 0$, $P(A \mid H_5) = 0$, $P(A \mid H_6) = 0$, $P(A \mid H_7) = 0$.

Найдем вероятность гипотезы H_1 при условии, что событие A произошло (т. е. $P(H_1 \mid A)$) по формуле Бейеса. Для этого предварительно найдем вероятность события A по формуле (5.1)

$$P(A) = \sum_{i=0}^{7} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i) =$$
$$= 0{,}024 \cdot 1 + 0{,}056 \cdot 1 + 0{,}036 \cdot 1 + 0{,}096 \cdot 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0{,}212.$$

Отсюда

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}056 \cdot 1}{0{,}212} = \frac{56}{212} = \frac{14}{53} \approx 0{,}264. \quad \bullet$$

6.5.9. Предположим, что 5% мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Считая, что мужчин и женщин одинаковое количество, найти вероятность того, что этот человек:

а) мужчина, б) женщина.

○ Пусть событие A = {выбранный человек оказался дальтоником}. Тогда в качестве гипотез примем события H_1 = {выбранный человек — мужчина} и H_2 = {выбранный человек — женщина}. Очевидно,

$$H_1 + H_2 = \Omega, \quad H_1 \cdot H_2 = \varnothing \quad \text{и} \quad P(H_1) = P(H_2) = 0{,}5.$$

Для нахождения искомых вероятностей, т. е. условных вероятностей $P(H_1 \mid A)$ и $P(H_2 \mid A)$, воспользуемся формулой Бейеса. Сначала по формуле полной вероятности найдем $P(A)$: т. к. по условию $P(A \mid H_1) = 0{,}05$ и $P(A \mid H_2) = 0{,}0025$, то $P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}0025 = 0{,}02625$. Следовательно:

а) $P(H_1 \mid A) = \dfrac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(A)} = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}05}{0{,}02625} = \dfrac{20}{21}$;

б) $P(H_2 \mid A) = \dfrac{P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)}{P(A)} = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}0025}{0{,}02625} = \dfrac{1}{21}$.

Отметим, что сумма условных вероятностей гипотез (т. е. апостериорных вероятностей) также равна единице $(\frac{20}{21} + \frac{1}{21} = 1)$. ●

6.5.10. Система обнаружения самолета из-за наличия помех в зоне действия локатора может давать ложные показания с вероятностью 0,05, а при наличии цели в зоне система обнаруживает ее с вероятностью 0,9. Вероятность появления противника в зоне равна 0,25. Определить вероятность ложной тревоги.

6.5.11. В условиях задачи 6.5.7 взятое изделие прошло упрощенный контроль. Найти вероятность того, что оно стандартное. А если изделие дважды прошло упрощенный контроль?

6.5.12. В условиях задачи 6.5.5 туристы пришли в пункт B. Какова вероятность того, что они пошли по дороге № 3?

6.5.13. В магазин поступают одинаковые изделия с трех заводов, причем 1-й завод поставил 50 изделий, 2-й — 30, 3-й — 20 изделий. Среди изделий 1-го завода 70% первосортных, а среди изделий

2-го — 80%, 3-го — 90% первосортных. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Какова вероятность того, что это изделие выпущено 1-м заводом?

6.5.14. Перед посевом 80% всех семян было обработано ядохимикатами. Вероятность поражения растений, проросших из этих семян, вредителями равна 0,06, а растений, проросших из необработанных семян — 0,3. Какова вероятность того, что взятое наудачу растение окажется пораженным? Если оно пораженное, то какова вероятность того, что оно выращено из обработанного семени?

Дополнительные задания

6.5.15. В студенческой группе 70% — юноши. 20% юношей и 40% девушек имеют сотовый телефон. После занятий в аудитории был найден кем-то забытый телефон. Какова вероятность того, что он принадлежал

а) юноше? б) девушке?

6.5.16. Два стрелка независимо друг от друга сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятности их попадания в мишень соответственно равны 0,75 (1-й стрелок) и 0,80 (2-й стрелок). После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Какова вероятность того, что в мишень попал 2-й стрелок?

6.5.17. В урну, содержащую 100 шаров, опущен красный шар, после чего из нее наудачу вынимают шар. 1) Какова вероятность того, что он красный? 2) Известно, что из урны вынут красный шар. Какова вероятность того, что в ней содержалось 44 красных шара?

(Все предположения о первоначальном количестве красных шаров в урне равновозможны.)

6.5.18. Военный корабль может пройти вдоль пролива шириной 1 км с минным заграждением в любом месте. Вероятность его подрыва на мине в правой части заграждения шириной 200 м равна 0,3, а на остальной части — 0,8. Найти вероятность того, что корабль благополучно пройдет пролив.

6.5.19. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что 1-й автомат дает 0,25% брака, 2-й — 0,40%, 3-й — 0,60%. Какова вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с 1-го автомата поступило 2000, со 2-го — 1500 и с 3-го — 1300 деталей?

6.5.20. В урне находится a шаров, из них b — белых. Из нее вытащили наудачу сначала один шар, а затем — другой. Шары не возвращаются. Какова вероятность того, что второй шар — белый?

6.5.21. Две электрические цепи содержат соответственно 3 и 4 элемента (рис. 71). Выход из строя этих элементов — независимые события, имеющие вероятности $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}3$ (1-я цепь); $p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = 0{,}4$ (2-я цепь). Наудачу выбирается одна цепь. Какова вероятность того, что она работает?

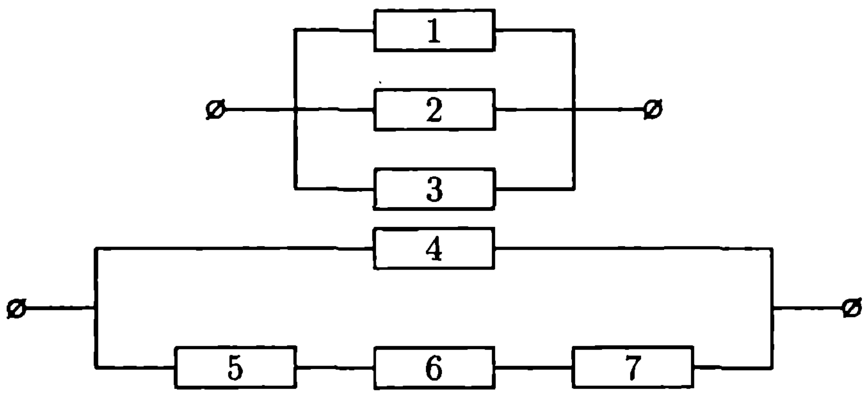


Рис. 71

6.5.22. В 1-й урне находится 7 белых и 5 черных шаров, а во 2-й — 4 белых и 8 черных. Из первой урны наудачу перекладывают во вторую 2 шара, а затем из 2-й урны извлекают один шар. Какова вероятность того, что он окажется белым?

6.5.23. Планируется ракетный залп по кораблю противника. Вероятность попадания каждой ракеты в цель равна 0,4. Вероятность поражения корабля при попадании одной, двух, трех, четырех ракет соответственно равна 0,3; 0,4; 0,5; 0,6. Найти вероятность поражения корабля.

6.5.24. В коробке находится 4 новых и 2 уже использованных теннисных мяча. Для первой игры берут из коробки 2 мяча, а затем их возвращают после игры в коробку. Найти вероятность того, что для второй игры будут вытянуты два новых мяча.

6.5.25. В торговую фирму поставляются телевизоры тремя фирмами в соотношении 5 : 2 : 3. Телевизоры, поступающие от этих фирм, не требуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 96%, 92% и 94% случаев. Найти вероятность того, что купленный наудачу телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

6.5.26. На вход радиолокационного устройства с вероятностью 0,7 поступает полезный сигнал с помехами, а с вероятностью 0,3 — только одни помехи. Если поступает полезный сигнал с помехами, то устройство регистрирует наличие сигнала с вероятностью p_1; если только помехи — с вероятностью p_2. Какова вероятность того, что устройство зарегистрирует какой-то сигнал?

6.5.27. Из 1000 ламп 100 принадлежит 1-й партии, 250 — 2-й и остальные — 3-й партии. В 1-й партии 6%, во 2-й — 5%, в 3-й — 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Какова вероятность того, что выбранная лампа — бракованная?

6.5.28. В условиях задачи 6.5.18 корабль прошел благополучно пролив. Какова вероятность того, что он прошел в левой части пролива?

6.5.29. В условиях задачи 6.5.21 электрическая цепь работает. Какова вероятность того, что выбрана 1-я цепь?

6.5.30. В условиях задачи 6.5.23 корабль был поражен. Какова вероятность того, что он был поражен попаданием трех ракет?

6.5.31. В условиях задачи 6.5.25 купленный телевизор не потребовал ремонта в течение гарантийного срока. Какая фирма вероятнее всего поставила данный телевизор?

Контрольные вопросы и более сложные задачи

6.5.32. Из полного набора домино (28 костей) наудачу берутся две кости. Какова вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой по правилам домино (рис. 72)?

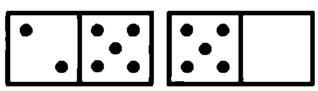


Рис. 72

6.5.33. Сообщение может передаваться по одному из 10 каналов связи; из них 4 канала находятся в отличном состоянии, 3 — в хорошем, 2 — в посредственном и 1 — в плохом. Вероятности правильной передачи сообщения для разного вида каналов равны соответственно 0,6; 0,4; 0,2; 0,1.

Какова вероятность того, что хотя бы один раз сообщение будет передано, если оно передается по одному и тому же каналу (выбранному наудачу):

а) один раз; б) два раза?

6.5.34. На шахматную доску ставят наудачу двух слонов, белого и черного. Какова вероятность того, что слоны будут пробивать друг друга?

6.5.35. Вероятность отказа прибора при воздействии на него только вибрации равна 0,1, а только перегрева — 0,05; вероятность отказа при воздействии вибрации и перегрева равна 0,2. При эксплуатации прибора вероятность возникновения перегрева равна 0,2, вероятность возникновения вибрации равна 0,3. Перегрев и вибрация возникают независимо. Найти вероятность отказа прибора.

6.5.36. Семь студентов, получив билеты, готовятся к ответу экзаменатору. Знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0,9, незнание вероятностью 0,2. Какова вероятность того, что вызванный наудачу студент сдаст экзамен, если Иванов знает 20 билетов из 30, Петров — лишь 15, а остальные студенты знают все билеты?

6.5.37. Из множества чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$ последовательно (без возвращения) извлекают два числа. Какова вероятность того, что первое число больше второго:

а) на 20; б) не менее чем на 20?

6.5.38. В альбоме 7 негашеных и 6 гашеных марок. Из них наудачу извлекаются 2 марки, подвергаются гашению и возвращаются в альбом. После чего вновь извлекаются 3 марки. Определить вероятность того, что все 3 марки чистые.

6.5.39. Имеются три урны с белыми и черными шарами. Известно, что отношение числа белых шаров к числу черных равно c_1, c_2, c_3 для 1-й, 2-й, 3-й урн соответственно. Наудачу выбирается урна и из нее вытаскивается шар. Какова вероятность того, что он белый?

§ 6. СХЕМА ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ

Формула Бернулли

Пусть производятся n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти некоторое событие A (по традиции такой исход опыта называют *успехом*) с одной и той же вероятностью $P(A) = p$ или произойти противоположное событие $\overline{A}$ (такой исход называют *неудачей*) с вероятностью $P(\overline{A}) = q = 1 - p$ (такого рода схема испытаний называется *схемой Бернулли*). Тогда вероятность того, что событие A наступит ровно m раз, находится по *формуле Бернулли*

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда, в частности, следует, что вероятность того, что в n испытаниях, удовлетворяющих схеме Бернулли, событие A наступит:

а) *менее m раз* — равна $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1)$;

б) *более m раз* — равна $P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n)$;

в) *хотя бы один раз* — равна $P_n(m \geqslant 1) = 1 - q^n$;

г) *не менее m_1 раз и не более m_2 раз* — равна

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1 + 1) + \ldots + P_n(m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m).$$

Число m_0 $(0 \leqslant m_0 \leqslant n)$ называется *наивероятнейшим числом* наступлений события A (или *наиболее вероятным числом успехов*) в схеме Бернулли, если

$P_n(m_0) \geqslant P_n(m)$ для всех $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Если вероятность p и q отличны от нуля, то число m_0 определятся из двойного неравенства

$$np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p.$$

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность наступления события A равна p_i (числа p_i, вообще говоря, разные), то вероятность $P_n(m)$ того, что в этой серии испытаний событие A наступит m раз, равна коэффициенту при m-й степени (т. е. при z^m) многочлена

$$\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z) \cdot \ldots \cdot (q_n + p_n \cdot z).$$

Функция $\varphi_n(z)$ при этом называется *производящей функцией.*

Полиномиальное распределение

Пусть теперь каждое из n испытаний может иметь только k исходов событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (ясно, что $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$). Тогда вероятность того, что в этих опытах событие A_1 появится m_1 раз, событие A_2 — m_2 раз,..., событие A_k — m_k раз ($m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$) равна

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}.$$

Эта формула задает *полиномиальное распределение* вероятностей (название объясняется тем, что выражение для $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ является общим членом полинома $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)^n$). Заметим, что схема Бернулли является частным случаем полиномиального распределения при $k = 2$, $p_2 = 1 - p_1 = q_1$.

6.6.1. Игральную кость подбрасывают 10 раз. Найти вероятность того, что шестерка выпадет:

а) два раза; б) не более восьми раз;

в) хотя бы один раз.

Проводится 10 независимых испытаний. Каждое испытание имеет два исхода: шестерка выпадет, шестерка не выпадет. Вероятность выпадения шестерки в каждом испытании постоянна и равна $\frac{1}{6}$, т. е. $p = \frac{1}{6}$. Таким образом, мы имеем дело со схемой Бернулли. Для нахождения искомых вероятностей применим формулу Бернулли.

а) Здесь $n = 10$, $m = 2$, $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Отсюда

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-2} = 45 \cdot \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0{,}291.$$

б) Искомая вероятность равна

$P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3) + P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) + P_{10}(7) + P_{10}(8)$.

Однако в этом случае проще найти вероятность противоположного события — шестерка выпадет более 8 раз, т. е. выпадет 9 или 10 раз. Имеем: $P_{10}(9)+P_{10}(10)=C_{10}^{9}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{9}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{1}+C_{10}^{10}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{0}=10\cdot\frac{5}{6^{10}}+1\cdot\frac{1}{6^{10}}=\frac{51}{6^{10}}$.

Итак, вероятность того, что шестерка выпадет не более восьми раз, равна $1-\left(P_{10}(9)+P_{10}(10)\right)=1-\frac{51}{6^{10}}$.

в) Искомая вероятность равна $P_{10}(m\geqslant 1)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$. Ее можно найти и так (что, конечно, гораздо сложнее): $P_{10}(1)+P_{10}(2)+\ldots+P_{10}(10)$ или $1-P_{10}(0)=1-C_{10}^{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$. ●

6.6.2. Всхожесть семян данного сорта растений составляет 70%. Найти наивероятнейшее число всхожих семян в партии из 240 семян.

❍ Наивероятнейшее число m_0 всхожих семян находим из условия

$$np-q\leqslant m_0\leqslant np+p.$$

Поскольку $n=240$, $p=0{,}7$ и $q=0{,}3$, то $240\cdot 0{,}7-0{,}3\leqslant m_0\leqslant 240\cdot 0{,}7+0{,}7$, т. е. $167{,}7\leqslant m_0\leqslant 168{,}7$. Отсюда следует, что $m_0=168$. ●

6.6.3. Прибор состоит из 3 независимо работающих элементов. Вероятности отказов элементов за время t различны и соответственно равны: $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}3$. Найти вероятности того, что за время t откажут:

а) все элементы; **б)** два элемента;
в) один элемент; **г)** ноль элементов.

❍ Так как $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}3$, то вероятности того, что элементы не откажут, соответственно равны: $q_1=0{,}9$, $q_2=0{,}8$, $q_3=0{,}7$. Составим производящую функцию:

$$\varphi_3(z)=(0{,}9+0{,}1z)(0{,}8+0{,}2z)(0{,}7+0{,}3z)=0{,}006z^3+0{,}092z^2+0{,}398z+0{,}504.$$

Отсюда следует, что:

а) $P_3(3)=0{,}006$;
б) $P_3(2)=0{,}092$;
в) $P_3(1)=0{,}398$;
г) $P_3(0)=0{,}504$. ●

6.6.4. По мишени произведено 3 выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найти вероятность n попаданий в мишень, где $n=0,1,2,3$.

6.6.5. Тест содержит 10 вопросов, на которые следует отвечать, используя одно из двух слов: да, нет. Какова вероятность получения не менее 80% правильных ответов, если использовать «метод угадывания»?

6.6.6. Пусть вероятность того, что студент опоздает на лекцию, равна 0,08. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 96 студентов.

6.6.7. В ящике находится 70% стандартных и 30% нестандартных деталей. Найти вероятность того, что из 5 взятых наудачу деталей не более одной окажется нестандартными.

6.6.8. Корабль выходит из строя, если получит не менее 5 попаданий в надводную часть или 2 попадания в подводную часть. Найти вероятность выхода из строя корабля при 5 попаданиях, если вероятности попадания в надводную и подводную части при попадании в корабль относятся как семь к трем.

6.6.9. В семье 6 детей. Найти вероятность того, что в данной семье не менее двух мальчиков, но не более четырех. Считать вероятности рождения мальчика и девочки равными 0,5.

6.6.10. В помещении 6 электролампочек. Вероятность того, что каждая лампочка останется исправной в течение года, равна 0,7. Найти:

а) вероятность того, что в течение года придется заменить 2 лампочки;

б) наивероятнейшее число лампочек, которые будут работать в течение года.

Дополнительные задания

6.6.11. Прибор состоит из 5 независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения равна 0,2. Найти:

а) вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказало не менее 4 элементов;

б) наивероятнейшее число m_0 отказавших элементов;

в) вероятность $P_5(m_0)$.

6.6.12. Вероятность приема радиосигнала при каждой передаче равна 0,86. Найти вероятность того, что при пятикратной передаче сигнал будет принят:

а) 4 раза; б) не менее 4 раз.

6.6.13. Что вероятнее выиграть у равносильного противника:

а) одну из двух партий или две из четырех;

б) не менее двух из трех партий или не менее четырех из восьми?

6.6.14. Вероятность события A в одном испытании равна 0,1. Какое минимальное число испытаний достаточно провести, чтобы с вероятностью, не меньшей, чем 0,95, событие A наступило хотя бы один раз?

6.6.15. Десять человек пришли на избирательный участок и случайным образом отдали свои голоса за одного из пяти кандидатов в президенты. Какова вероятность того, что за первого по списку кандидата проголосовало 3 человека?

6.6.16. В урне 8 белых и 4 черных шара. Наудачу вынимаются с возвращением 12 шаров. Найти вероятность того, что белых шаров будет вынуто:

а) 1;

б) не менее 10 белых шаров?

6.6.17. Вероятность выигрыша по билету лотереи равна 0,125. Найти вероятность выиграть не менее чем по двум билетам из пяти.

6.6.18. Отмечено, что в городе D в среднем 10% заключенных браков в течение года заканчиваются разводом. Какова вероятность того, что из 8 случайно отобранных пар, заключивших брак, в течение года:

а) ни одна пара не разведется;

б) разведутся 2 пары?

6.6.19. Из четырех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для 1-го орудия равна 0,8, 2-го — 0,7, 3-го — 0,6, 4-го — 0,5. Найти вероятность того, что в цель попадут:

а) два орудия; б) три орудия;

в) четыре орудия.

6.6.20. Вероятность выхода на линию каждого из 18 автобусов равна 0,9. Какова вероятность нормальной работы автобазы в течение дня, если для этого необходимо иметь на линии не менее 15 автобусов?

6.6.21. В электричку из 4 вагонов садятся наудачу 8 пассажиров. Какова вероятность того, что в каждый вагон вошло по 2 человека?

6.6.22. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,19 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,11 — мелкий выигрыш и с вероятностью 0,70 билет может оказаться без выигрыша. Куплено 15 билетов. Найти вероятность получения трех крупных выигрышей и одного мелкого.

6.6.23. В равносторонний треугольник со стороной, равной a, вписан круг. Внутри треугольника независимо друг от друга наудачу выбираются 5 точек. Найти вероятность того, что 3 из них окажутся внутри круга.

6.6.24. Сколько раз надо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадений шестерки было равно 5?

6.6.25. Считая, что в среднем 15% открывающихся малых предприятий становятся в течение года банкротами, найти вероятность того, что из 10 новых малых предприятий за это время банкротами станут:

а) одно предприятие; б) более трех предприятий.

6.6.26. Проводятся испытания по схеме Бернулли. Вероятность успеха в одном испытании равна p. Найти вероятность события $A = \{$все m успехов в n испытаниях появятся подряд$\}$.

6.6.27. Монета бросается

а) 2 раза; б) 4 раза.

Какова вероятность выпадения одного герба в случае **а)**, двух гербов в случае **б)**?

Контрольные вопросы и более сложные задания

6.6.28. *Задача Банаха.* Некий курящий носит с собой две коробки спичек. Всякий раз, когда необходима спичка, он выбирает наугад одну из коробок. В какой-то момент одна из коробок окажется пустой. Какова вероятность того, что в этот момент в другой коробке окажется m спичек ($m = 0, 1, 2, \ldots, n$; n — число спичек, бывших первоначально в каждой из коробок)?

6.6.29. В задаче на схему Бернулли найти значение p, при котором вероятность $P_3(2)$ достигает максимума, и вычислить этот максимум.

6.6.30. По мишени, состоящей из «яблочка» и двух колец, произведено 5 выстрелов. Вероятность попадания в яблочко равна 0,2, в 1-е кольцо — 0,3, во 2-е — 0,5. Найти вероятность того, что будут два попадания во второе кольцо, два в первое кольцо и одно — в «яблочко».

6.6.31. Игральную кость подбрасывают 8 раз. Какова вероятность того, что 5 раз выпадут одинаковые числа?

§ 7. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

Непосредственное применение формулы Бернулли при большом числе испытаний связано с громоздкими вычислениями. Поэтому при больших n вместо нее, как правило, используют приближенные формулы Пуассона и Муавра–Лапласа.

Везде далее речь идет о серии n независимых испытаний по схеме Бернулли, $P_n(m)$ означает вероятность m успехов в этой серии.

Формула Пуассона

Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность p достаточно мала, причем их произведение $a = np$ не мало и не велико (обычно достаточно условий $p < 0{,}1$; $npq < 10$), то вероятность $P_n(m)$ можно приближенно найти по формуле Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}.$$

Локальная формула Муавра–Лапласа

Теорема 6.7. Если число испытаний n достаточно велико, а вероятности p и q не очень близки к нулю (обычно достаточно условий $n > 100$, $npq > 20$), то вероятность $P_n(m)$ можно приближенно найти по *локальной формуле Муавра–Лапласа*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ — функция Гаусса.

Таблица значений функции $\varphi(x)$ приводится в приложениях.

Интегральная формула Муавра–Лапласа

Теорема 6.8. В условиях локальной формулы Муавра–Лапласа вероятность $P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ того, что число успехов m заключено между m_1 и m_2, можно приближенно найти по *интегральной формуле Муавра–Лапласа*

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1),$$

где

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \text{ — функция Лапласа.}$$

Таблица значений функции $\Phi(x)_0$ приводится в приложениях.

6.7.1. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,007. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность 9 «сбоев».

○ По условию $n = 1000$, $m = 9$, $p = 0{,}007$. Поскольку n — достаточно велико, p — мало ($npq < 7$), то для вычисления $P_{1000}(9)$ можно использовать формулу Пуассона. Имеем $a = [np] = 1000 \cdot 0{,}007 = 7$, откуда $P_{1000}(9) \approx \dfrac{7^9 \cdot e^{-7}}{9!} \approx 0{,}1014$. ●

6.7.2. Завод-изготовитель отправил на базу 12 000 доброкачественных изделий. Число изделий поврежденных при транспортировке, составляет в среднем 0,05%. Найти вероятность того, что на базу поступит:

а) не более 3 поврежденных изделий;

б) хотя бы 2 поврежденных.

Для нахождения искомых вероятностей применим формулу Пуассона. Имеем $n = 12\,000$, $p = 0{,}0005$, $a = 12\,000 \cdot 0{,}0005 = 6$.

а) В этом случае имеем

$$P_{12\,000}(0 \leqslant m \leqslant 3) = P_{12\,000}(0) + P_{12\,000}(1) + P_{12\,000}(2) + P_{12\,000}(3) \approx$$
$$\approx \frac{6^0 \cdot e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 \cdot e^{-6}}{1!} + \frac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!} + \frac{6^3 \cdot e^{-6}}{3!} = e^{-6}(1+6+18+36) = 0{,}151.$$

б) Искомая вероятность $P_{12\,000}(m \geqslant 2) = P_{12\,000}(2) + P_{12\,000}(3) + \ldots$ $\ldots + P_{12\,000}(12\,000)$ вычисляется довольно громоздко, поэтому найдем вероятность противоположного события: поступило менее 2-х поврежденных деталей:

$$P_{12\,000}(0 \leqslant m \leqslant 1) = P_{12\,000}(0) + P_{12\,000}(1) \approx e^{-6} + 6e^{-6} = 0{,}0174.$$

Следовательно, $P_{12\,000}(m \geqslant 2) = 1 - 0{,}0174 = 0{,}9826$. ●

6.7.3. Вероятность выхода из строя одного элемента устройства, в течение t часов работы, равна 0,002. Какова вероятность того, что за время t из 1500 независимо работающих элементов выйдет из строя:

а) 4 элемента; б) не более 2 элементов?

6.7.4. Вероятность допустить ошибку при наборе некоторого текста, состоящего из 1200 знаков, равна 0,005. Найти вероятность того, что при наборе будет допущено:

а) 6 ошибок; б) хотя бы одна ошибка.

6.7.5. Какова вероятность того, что среди 730 пассажиров поезда:

а) четверо родилось 23 февраля;

б) двое родилось 1 марта;

в) никто не родился 22 июня? (Считать, что в году 365 дней.)

6.7.6. Некачественные изделия составляют 2% всей продукции цеха. Какова вероятность того, что среди 200 наудачу взятых изделий окажется:

а) не более 5 некачественных изделий;

б) два или три некачественных изделия.

6.7.7. Вероятность того, что при автоматической штамповке изделий отдельное изделие окажется бракованным (т. е. с отклонением от стандарта), постоянна и равна 0,05. Какова вероятность того, что в партии из 1000 изделий встретится ровно 40 бракованных?

По условию задачи $n = 1000$, $m = 40$, $p = 0{,}05$, $q = 0{,}95$. Теоретически можно использовать формулу Бернулли, тогда

$$P_{1000}(40) = C_{1000}^{40} \cdot (0{,}05)^{40} \cdot (0{,}95)^{960}.$$

Однако полученное выражение слишком громоздко, поэтому удобнее применить локальную формулу Муавра–Лапласа ($n \cdot p \cdot q = 1000 \cdot 0{,}05 \times$ $\times 0{,}95 = 47{,}5 > 20$). Так как

$$\sqrt{npq} = \sqrt{47{,}5} \approx 6{,}892, \quad m - np = 40 - 1000 \cdot 0{,}05 = 40 - 50 = -10,$$

то

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{-10}{6{,}892} \approx -1{,}45, \quad \varphi(x) = \varphi(-1{,}45) = \varphi(1{,}45) \approx 0{,}1394$$

(значение функции $\varphi(x)$ находим по таблице). Следовательно,

$$P_{1000}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) = \frac{0{,}1394}{6{,}892} = 0{,}02.$$ ●

6.7.8. Используя условие задачи 6.7.7, выяснить, сколько небракованных изделий следует ожидать с вероятностью 0,042.

○ Имеем: $n = 1000$, $p = 0{,}95$ (вероятность стандартного изделия), $q =$ $= 0{,}05$; требуется найти m. Снова используем локальную формулу Муавра–Лапласа. Так как $\sqrt{npq} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05} \approx 6{,}892$, то

$$P_{1000}(m) \approx \frac{1}{6{,}892} \cdot \varphi(x) = 0{,}042.$$

Отсюда находим $\varphi(x) = 6{,}892 \cdot 0{,}042 \approx 0{,}289$.

По таблице значений функции $\varphi(x)$ находим $x \approx \pm 0{,}80$. Учитывая, что $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{m - 1000 \cdot 0{,}95}{6{,}892} = \dfrac{m - 950}{6{,}892}$, получаем $\dfrac{m - 950}{6{,}892} =$ $= \pm 0{,}80$. Отсюда $m = 950 \pm 5{,}51$, т.е. $m = 955$ или $m = 945$ (m — целое число, поэтому округляем). ●

6.7.9. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Приборы испытываются независимо друг от друга. Что вероятнее: отказ 10 приборов при испытании 80, или отказ 15 при испытании 120?

6.7.10. Монета подбрасывается 2020 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет 1000 раз?

6.7.11. Всхожесть семян данного сорта растений составляет 70%. Найти вероятность того, что из 700 посаженных семян будет 500 проросших.

6.7.12. В городе N из каждых 100 семей 85 имеют цветные телевизоры. Какова вероятность того, что из 400 семей 340 имеют такие телевизоры?

6.7.13. Вероятность попадания в цель из скорострельного орудия при отдельном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 300 выстрелах число попаданий будет не менее 210, но не более 230 раз.

○ По условию $n = 300$, $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$, $m_1 = 210$, $m_2 = 230$. Для нахождения вероятности $P_{300}(210 \leqslant m \leqslant 230)$ воспользуемся интегральной формулой Муавра–Лапласа.

Имеем: $np = 300 \cdot 0{,}75 = 225$, $\sqrt{npq} = \sqrt{300 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25} = 7{,}5$. Тогда $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{210 - 225}{7{,}5} = -2$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{230 - 225}{7{,}5} = 0{,}67$. Следовательно,

$$P_{300}(210 \leqslant m \leqslant 230) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1) = \Phi_0(0{,}67) - \Phi_0(-2) =$$
$$= \Phi_0(0{,}67) + \Phi_0(2) = 0{,}2486 + 0{,}4772 = 0{,}7258.$$ ●

6.7.14. Сколько раз надо подбросить симметричную монету, чтобы с вероятностью 0,90 частота $\frac{m}{n}$ появления герба отличалась от $\frac{1}{2}$ (вероятности выпадения герба) не более чем на 0,01?

○ Пусть произведено n испытаний (бросаний монеты). Тогда, согласно условию задачи, число m выпадений герба должно удовлетворять неравенству $\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{2}\right| \leqslant 0{,}01$. Отсюда следует, что $-0{,}01 \leqslant \frac{m}{n} - \frac{1}{2} \leqslant 0{,}01$, т.е. $0{,}49 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant 0{,}51$, и, значит, $0{,}49n \leqslant m \leqslant 0{,}51n$.

Воспользуемся интегральной формулой Муавра–Лапласа. Имеем: $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$, $m_1 = 0{,}49n$, $m_2 = 0{,}51n$, $np = 0{,}5n$. Тогда, по условию задачи, $P_n(0{,}49n \leqslant m \leqslant 0{,}51n) = 0{,}90$, т. е.

$$\Phi_0\left(\frac{0{,}51n - 0{,}5n}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) - \Phi_0\left(\frac{0{,}49n - 0{,}5n}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) = 0{,}90,$$

откуда $\Phi_0(0{,}02 \cdot \sqrt{n}) + \Phi_0(0{,}02 \cdot \sqrt{n}) = 0{,}90$, или $\Phi_0(0{,}02 \cdot \sqrt{n}) = 0{,}45$. Используя таблицу значений функции Лапласа, получаем $0{,}02 \cdot \sqrt{n} = 1{,}65$. Отсюда следует, что $\sqrt{n} = 82{,}5$, т. е. $n = 6807$.

Таким образом, нужно подбросить монету около 7000 раз.

Замечание. Задачу можно было решить проще, используя формулу «вероятности отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в n независимых испытаниях не более чем на число $\varepsilon > 0$»

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi_0\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Тогда

$$2\Phi_0\left(0{,}01 \cdot \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) = 0{,}90,$$

откуда $\Phi_0(0{,}02\sqrt{n}) = 0{,}45$, т. е. $0{,}02\sqrt{n} \approx 1{,}65$ и, следовательно, $n \approx 7000$. ●

6.7.15. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаниях равна 0,7. Найти вероятность того. что число m наступлений события удовлетворяет следующим неравенствам:

а) $83 \leqslant m \leqslant 93$; б) $m \geqslant 70$.

6.7.16. Какова вероятность того, что из 2450 ламп, освещающих улицу, к концу года будет гореть от 1500 до 1600 ламп? Считать, что каждая лампа будет гореть в течение года с вероятностью 0,64.

6.7.17. Замечено, что в среднем 80% посаженных семян всхожи. Сколько нужно посадить семян, чтобы с вероятностью 0,90 можно было бы ожидать, что не менее 100 посаженных семян взойдут?

6.7.18. Используя условие задачи 6.7.11, найти вероятность того, что число проросших семян будет лежать в промежутке [450; 520].

Дополнительные задания

6.7.19. Прибор содержит 1000 элементов, каждый из которых за время t может выйти из строя, независимо от других, с вероятностью 0,002. Какова вероятность выхода из строя за время t прибора, если это происходит при отказе хотя бы одного из элементов?

6.7.20. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,005. Какова вероятность попадания в цель не менее трех раз, если число выстрелов равно 800?

6.7.21. Посеяли 1000 семян. Вероятность не прорасти для каждого семени равна 0,002. Найти вероятность того, что:

а) не прорастет 10 семян; **б)** все семена прорастут.

6.7.22. Садоводческий кооператив застраховал на год свои дачные дома от пожара. Каждый из 600 домовладельцев внес по 150 рублей. Вероятность пожара (в одном доме) в течение года равна 0,005, а страховая сумма, выплачиваемая пострадавшему, составляет 12 000 рублей. Какова вероятность того, что страховая компания понесет убыток?

6.7.23. Книга издана тиражом 10 000 экземпляров. Вероятность того, что книга будет сброшюрована неправильно, равна 0,0002. Найти вероятность того, что тираж содержит менее 5 бракованных книг.

6.7.24. Стрелок сделал 80 выстрелов; вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что:

а) стрелок попадет 56 раз;

б) число попаданий будет заключено между 50 и 60.

6.7.25. Вероятность изготовления доброкачественного изделия равна 0,9. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 300 изделий 95% окажется доброкачественных.

6.7.26. Используя условие задачи 6.7.11, найти вероятность того, что из 700 посаженных семян число проросших будет заключено между 460 и 510.

6.7.27. Вероятность рождения девочки равна 0,485. Найти вероятность того, что из 600 родившихся детей девочек:

а) будет 300;

б) будет больше, чем мальчиков.

6.7.28. Контрольную работу по теории вероятностей успешно выполняют в среднем 70% студентов. Какова вероятность того, что из 200 студентов работу успешно выполнят:

а) 150 студентов; б) не менее 100 студентов;

в) не более 150 студентов?

6.7.29. Игральная кость бросается 180 раз. Найти приближенные границы, в которых число m выпадений единицы будет заключено с вероятностью 0,997.

Контрольные вопросы и более сложные задания

6.7.30. Известно, что левши в среднем составляют 1% населения. Используя формулы Бернулли, Пуассона и локальную формулу Муавра–Лапласа, найти вероятность того, что среди 100 человек окажется пятеро левшей.

6.7.31. Максимальный выигрыш в игре «Спортлото 6 × 49» можно получить, угадав 6 из 49 номеров. В очередном розыгрыше участвуют 10 млн карточек. Какова вероятность того, что хотя бы на одной картинке будут зачеркнуты 6 выигрышных номеров?

6.7.32. Равна ли сумма вероятностей числа появлений события в независимых испытаниях, вычисленных по формуле Пуассона, единице? Ответ объяснить.

6.7.33. Сколько нужно взять случайных цифр, чтобы среди них с вероятностью, не меньшей 0,95, цифра 2 появилась хотя бы один раз?

6.7.34. 144 служащих предприятия обедают в одном из двух кафе, причем выбор ими кафе одинаково вероятен. Владелец одного из кафе желает, чтобы с вероятностью 0,95 все пришедшие служащие смогли одновременно пообедать. Сколько мест должно для этого быть в его кафе?

6.7.35. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 4 : 3. Из нее извлекается шар, фиксируется цвет и возвращается в урну. Чему равно минимальное число n извлечений, при котором с вероятностью 0,9545 можно ожидать, что отклонение относительной частоты появления белого шара от вероятности его появления в одном опыте не превышает, по модулю, величины 0,05?

6.7.36. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Было произведено 600 выстрелов. Найти:

а) границы, в которых с вероятностью 0,9948 будет заключено число попаданий в цель;

б) число выстрелов, которые надо произвести по мишени, чтобы с вероятностью 0,9948 ожидать, что отклонение относительной частоты от вероятности попадания при одном выстреле будет меньше по модулю величины 0,05.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. 12 студентов случайным образом рассаживаются на 12 первых местах одного ряда партера. Какова вероятность, что студенты М и Н будут сидеть рядом?

2. Батарея, состоящая из 10 орудий, ведет огонь по 15 кораблям неприятеля. Найти вероятность того, что все орудия стреляют: а) по одной цели; б) по разным целям (выбор цели случаен и не зависит от других).

3. В ящике находятся 20 лампочек, среди которых 3 перегоревшие. Найти вероятность того, что 10 лампочек, взятых наудачу из ящика, будут гореть.

4. На АТС могут поступать вызовы трех типов. Вероятности поступления вызовов 1-го, 2-го и 3-го типа соответственно равны 0,2; 0,3; 0,5. Поступило три вызова. Какова вероятность того, что а) все они разных типов; б) среди них нет вызова 2-го типа?

5. На елочный базар поступают елки с трех лесхозов, причем 1-й лесхоз поставил 50% елок, 2-й — 30%, 3-й — 20%. Среди елок 1-го лесхоза 10% голубых, 2-го — 20%, 3-го — 30%. Куплена одна елка. Она оказалась голубой. Какова вероятность, что она поставлена 2-м лесхозом?

6. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,004. Какова вероятность того, что из 750 проверяемых изделий более трех изделий не выдержат испытания?

7. Найти вероятность отказа схемы (рис. 73), предполагая, что отказы отдельных элементов независимы. Вероятность отказа каждого элемента равна q.

Вариант 2

1. 9 туристов наудачу рассаживаются по 12 вагонам электрички. Найти вероятность того, что все они окажутся: а) в одном вагоне; б) во втором вагоне; в) в разных вагонах.

Рис. 73

2. В автопарке 20 экскурсионных автобусов двух марок: 12 и 8 соответственно. Вероятность выезда на экскурсию автобусов каждой марки одна и та же. Какова вероятность того, что после выезда на экскурсию 16 автобусов, в автопарке остались автобусы: а) первой марки; б) одной марки; в) разных марок.

3. С вероятностью 0,4 посланное сообщение принимается при одной передаче. Сколько надо сделать передач, чтобы с вероятностью не менее 0,9 она была принята хотя бы один раз?

4. В одной коробке находится 4 красных, 5 зеленых и 3 черных карандаша, а в другой — 3 красных и 2 черных. Из первой коробки взяты три карандаша, а из второй — два. Какова вероятность того, что все вытащенные карандаши одного цвета?

5. Из 1000 ламп 590 принадлежит 1-й партии, 200 — 2-й, остальные — 3-й партии. В 1-й партии 6%, во 2-й — 5%, в 3-й — 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Какова вероятность того, что она бракованная?

6. Проведено 8 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании двух монет. Найти вероятность того, что
а) в трех испытаниях из восьми появится по 2 герба;
б) не менее двух раз выпадет 2 герба.

7. Найти вероятность безотказной работы схемы (рис. 74), предполагая, что отказы отдельных элементов независимы. Вероятность отказа каждого элемента равна q.

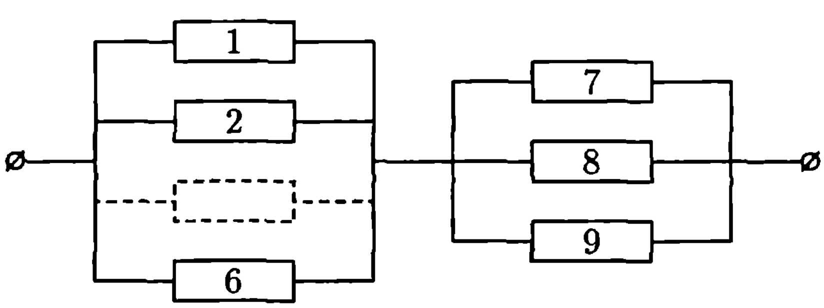


Рис. 74

Вариант 3

1. В семизначном телефонном номере стерлись три последние цифры. Найти вероятность того, что стерлись: а) одинаковые цифры; б) разные цифры.

2. На устройство поступают 2 сигнала, причем поступление каждого сигнала, в течение часа, равновозможно.

Устройство срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 10 минут. Найти вероятность того, что устройство сработает.

3. В урне находится 40 шаров. Вероятность того, что 2 извлеченных шара окажутся белыми, равна $\frac{7}{60}$. Сколько в урне белых шаров?

4. Вероятность потери письма в почтовом отделении равна 0,03, а телеграммы — 0,01. Отправлено два письма и одна телеграмма. Какова вероятность того, что дойдет: а) только телеграмма; б) хотя бы одно из отправлений?

5. В пункте проката имеется 8 новых и 10 подержанных (т. е. хотя бы раз использованных) автомобилей. 3 машины взяли наудачу в прокат и спустя некоторое время вернули. После этого вновь наудачу взяли в прокат два автомобиля. Какова вероятность того, что оба автомобиля новые?

6. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах цель будет поражена: а) 2 раза; б) не менее 2 раз; в) не будет поражена ни разу.

7. Найти вероятность отказа схемы (рис. 75), предполагая, что отказы отдельных элементов независимы. Вероятности q_i отказов элементов соответственно 0,1; 0,2; 0,05; 0,2; 0,1.

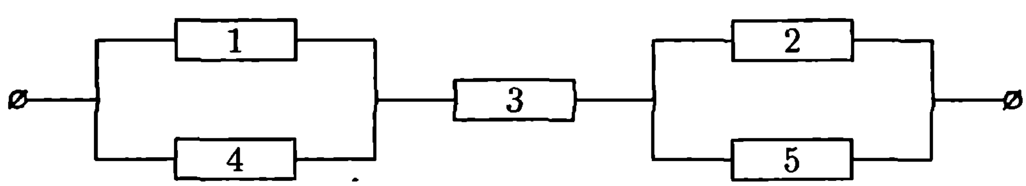


Рис. 75

Вариант 4

1. Два приятеля B и C решили, что за билетами в кино пойдет тот, у кого выпадет меньшее число очков при бросании игральной кости. Какова вероятность того, что за билетами пойдет: а) C; б) проигравший; в) выигравший?

2. В ящике 50 годных и 16 дефектных деталей. Сборщик наудачу достает 8 деталей. Найти вероятность того, что среди них: а) нет дефектных; б) 3 дефектных.

3. Вероятность того, что в результате 5 независимых опытов событие A (предполагается, что она одна и та же во всех опытах) произойдет хотя бы один раз, равна 0,99757. Определить вероятность появления события при одном опыте.

4. В мастерской три станка. Они требуют наладки в течение смены с вероятностями 0,05; 0,1; 0,3 соответственно. Какова вероятность того, что в течение смены потребуется наладить: а) все станки; б) только один станок.

5. В первой урне 3 белых и 7 черных шаров, во второй 5 белых и 2 черных. Из первой урны переложили во вторую три шара, затем из второй урны извлечен один шар. Какова вероятность того, что он белый?

6. По каналу связи передаются 7 сообщений, каждое из которых, независимо от других, может быть искажено с вероятностью 0,15. Найти вероятность того, что будет правильно принято не менее двух сообщений.

7. Найти вероятность безотказной работы схемы (рис. 76), считая что отказы отдельных элементов независимы. Вероятность отказа элемента с номером i равна q_i.

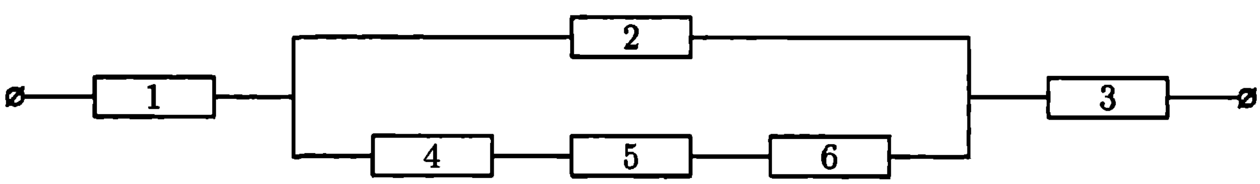


Рис. 76

Вариант 5

1. В ящике лежат 9 кубиков с номерами от 1 до 9. Последовательно извлекаются три кубика. Найти вероятность того, что появятся кубики: а) с номерами 2, 5, 9; б) с номерами 5, 2, 9; в) с номерами 4, 5, 4.

2. 52 игральные карты раздаются 4 игрокам. Найти вероятность того, что: а) все тузы будут у одного игрока; б) каждый игрок получил один туз.

3. Три стрелка делают по одному выстрелу в цель. Вероятности попаданий в цель соответственно равны 0,6; 0,85; 0,7. Какова вероятность попадания в цель: а) только второго стрелка; б) хотя бы одного стрелка?

4. В мешке смешаны нити, среди которых 30% красных, 60% синих, а остальные белые. Какова вероятность того, что три вынутые наудачу нити будут одного цвета?

5. На склад с оружием совершают налет четыре самолета. Вероятность поражения самолета системой ПВО равна 0,8. При прорыве k самолетов атакуемый объект будет уничтожен с вероятностью p_k. Найти вероятность уничтожения склада.

6. Найти вероятность того, что в серии из 9 подбрасываний игральной кости 5 очков выпадет менее трех раз.

7. Вероятность того, что наугад взятое изделие окажется пригодным без доводки, равна 0,97. Контролер проверяет 400 изделий. Если среди них окажется 16 или более нуждающихся в доводке, вся партия возвращается на доработку. Найти вероятность того, что партия изделий будет принята.

Вариант 6

1. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что случайная точка, брошенная в круг, не попадет в квадрат.

2. В цветочном ларьке продаются 8 аспарагусов и 5 гераний. Какова вероятность того, что среди 5 проданных растений: а) 2 аспарагуса; б) все герани?

3. В ящике 6 белых и 30 черных шаров. Какова вероятность того, что из двух вынутых шаров один белый, а другой черный?

4. Вероятность дозвониться с первой попытки в Справочное бюро вокзала равна 0,4. Какова вероятность того, что: а) удастся дозвониться при втором звонке; б) придется звонить не более трех раз?

5. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что третье орудие попало, если вероятности попадания в цель 1-м, 2-м и 3-м орудиями соответственно равны 0,5; 0,3; 0,4.

6. Сообщение содержит 500 символов. Вероятность искажения символа при передаче постоянна и равна p. Если хотя бы один символ искажен, то сообщение будет принято неверно. При каких значениях p вероятность того, что сообщение будет успешно передано, окажется равной 0,95?

7. Игральная кость бросается 16 раз. Найти наивероятнейшее число m_0 появлений числа очков, кратного трем. Найти вероятность $P_{16}(m_0)$?

§ 8. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Понятие случайной величины. Функция распределения

Понятие случайной величины — одно из важнейших в теории вероятностей. При этом под *случайной величиной* понимают величину, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное числовое значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Случайные величины (кратко: с. в.) обозначают большими латинскими буквами $X, Y, \ldots$, а принимаемые ими значения — малыми буквами x_1, $x_2, \ldots$, y_1, $y_2, \ldots$

Используя теоретико-множественную трактовку, можно дать более строгое определение:

⇛ *Случайная величина* X есть числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω. ⇚

Таким образом, с. в. X каждому элементарному событию ω ставит в соответствие действительное число $X(\omega)$, т. е. $X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Для того, чтобы получить полное представление о данной случайной величине, недостаточно знать, какие значения она принимает — важно еще знать, насколько часто они принимаются этой величиной («выпадают») в результате испытаний. Для этой цели используют понятие закона распределения.

Любое правило (таблица, функция, график), позволяющее находить вероятности произвольных событий $A \subseteq \Omega$ (в частности, вероятности того, что данная с. в. примет конкретное значение или попадет в заданный интервал), называется *законом распределения случайной величины* (или короче: распределением). Если для с. в. X задан закон распределения, то говорят, что она распределена по этому закону.

Одним из наиболее удобных и универсальных способов задания закона распределения является функция распределения.

⇛ *Функцией распределения с. в.* X называется функция $F_X(x)$ (коротко $F(x)$), которая для любого числа $x \in \mathbb{R}$ равна вероятности события $\{X < x\}$, т. е. $F(x) = P\{X < x\}$. ⇚

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;
2. $F(x)$ — неубывающая функция, т. е. $F(x_2) \geqslant F(x_1)$, если $x_2 > x_1$;
3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;
4. $F(x)$ непрерывна слева в любой точке x, т. е. $F(x - 0) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$;
5. $P\{a \leqslant X < b\} = F(b) - F(a)$.

Дискретные случайные величины

⇛ Если множество возможных значений с. в. X конечно или счетно (это значит, что его элементы могут быть перенумерованы натуральными числами), т. е. дискретно, то с. в. X называется *дискретной* (коротко: д. с. в. X). Если же множество значений с. в. X заполняет (непрерывно) конечный или бесконечный промежуток на числовой оси, то такая случайная величина называется *непрерывной* (коротко: н. с. в. X). ⇐

О непрерывных случайных величинах пойдет речь в следующем параграфе.

Закон распределения д. с. в. X удобно задавать с помощью следующей таблицы

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

называемой *рядом распределения*. При этом возможные значения $x_1, x_2, \ldots$ с. в. X в верхней строке этой таблицы располагаются в определенном порядке, а в нижней — соответствующие вероятности $p_i = P\{X = x_i\}$ ($\sum\limits_i p_i = 1$).

Графически ряд распределения изображают в виде *многоугольника* (или полигона) *распределения* (рис. 77).

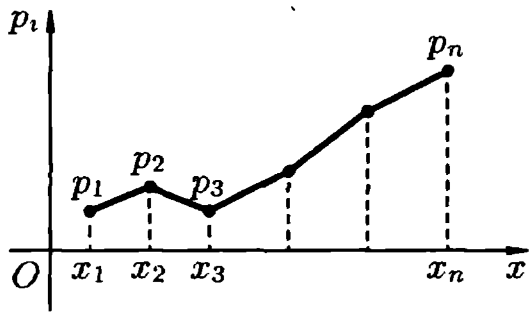


Рис. 77

Функция распределения д. с. в. имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i,$$

где суммирование ведется по всем индексам i, для которых $x_i < x$.

Операции над дискретными случайными величинами

⇛ *Суммой* (соответственно, *разностью* или *произведением*) д. с. в. X, принимающей значения x_i с вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и д. с. в. Y, принимающей значения y_j с вероятностями $q_j = P\{Y = y_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ называется д. с. в., принимающая все значения вида $x_i + y_j$ (соответственно, $x_i - y_j$ или $x_i \cdot y_j$) с вероятностями $p_{ij} = P\big\{\{X = x_i\} \cdot \{Y = y_j\}\big\} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$. Обозначение: $X + Y$ (соответственно, $X - Y$ или $X \cdot Y$). ⇐

⇛ *Произведением* д. с. в. X на число c называется д. с. в. cX, принимающая значения $c \cdot x_i$ с вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}$. ⇐

⇛ *Квадратом* (соответственно, m-ой степенью) д. с. в. X называется д. с. в., принимающая значения x_i^2 (соответственно, x_i^m) с вероятностями $p_i = P\{X = x_i\}$. Обозначение: X^2 (соответственно, X^m). ⇐

⇛ Дискретные с. в. X и Y называются *независимыми*, если независимы события $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$ при любых $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. ⇚

6.8.1. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее последовательно вынимают шары до первого появления белого шара. Построить ряд и многоугольник распределения д. с. в. X — числа извлеченных шаров.

◯ Возможными значениями с. в. X являются числа $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. Значение $x_3 = 3$, например, означает, что первый и второй шары были черными, а третий — белый.

Соответствующие им вероятности p_1, p_2, p_3, p_4 найдем, воспользовавшись правилом умножения вероятностей:

$$p_1 = P\{X = 1\} = P\{\text{1-й шар белый}\} = \frac{4}{7},$$
$$p_2 = P\{X = 2\} = P\{\text{1-й шар черный, 2-й — белый}\} = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7},$$
$$p_3 = P\{X = 3\} = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{35},$$
$$p_4 = P\{X = 4\} = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{35}.$$

Таким образом, ряд распределения с. в. X имеет вид

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

$\left(\text{Контроль: } \sum_{i=1}^{4} p_i = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{35} + \frac{1}{35} = 1.\right)$

Многоугольник распределения с. в. X представлен на рис. 78. ●

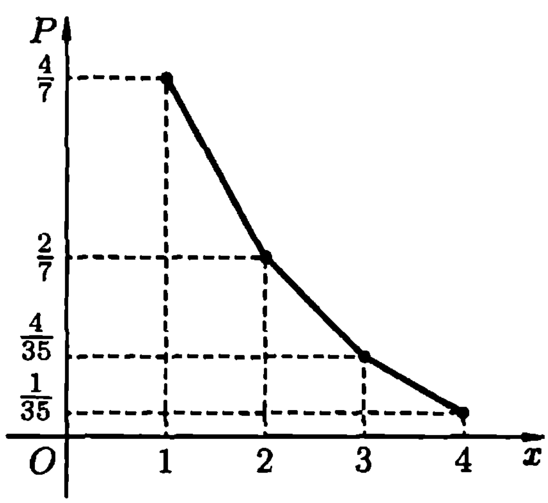


Рис. 78

6.8.2. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу извлекли три шара. Найти:

а) ряд распределения д. с. в. Y — числа извлеченных белых шаров;

б) вероятность события $A = \{$извлечено не менее 2-х белых шаров$\}$.

◑ а) Случайная величина Y может принять следующие значения: $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$. Соответствующие им значения p_i найдем, исходя из классического определения вероятности:

$$p_0 = P\{Y = 0\} = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}, \quad p_1 = P\{Y = 1\} = \frac{C_3^2 \cdot C_4^1}{C_7^3} = \frac{12}{35},$$

$$p_2 = P\{Y = 2\} = \frac{C_3^1 \cdot C_4^2}{C_7^3} = \frac{18}{35}, \quad p_3 = P\{Y = 3\} = \frac{C_3^0 \cdot C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}.$$

Отсюда ряд распределения с. в. Y имеет вид

y_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$$\left(\text{Контроль: } \sum_{i=0}^{3} p_i = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = 1.\right)$$

б) Найдем искомую вероятность, используя ряд распределения с. в. Y: $P(A) = P\{Y \geqslant 2\} = P\{Y = 2\} + P\{Y = 3\} = \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35}$. ●

6.8.3. Монета подбрасывается 5 раз. Построить многоугольник распределения д. с. в. Z — числа выпадений герба.

6.8.4. Три стрелка, ведущие огонь по цели, сделали по одному выстрелу. Вероятности их попадания в цель соответственно равны 0,5, 0,6, 0,8. Построить ряд распределения с. в. X — числа попаданий в цель.

6.8.5. Вероятность того, что автомат при опускании одной монеты срабатывает правильно, равна 0,98. Построить ряд распределения с. в. — числа опусканий монет в автомат до первого правильного срабатывания автомата. Найти вероятность того, что будет опущено 5 монет. Решить ту же задачу при условии, что в наличии всего 3 монеты.

6.8.6. Построить ряд распределения числа попаданий в ворота при двух одиннадцатиметровых ударах, если вероятность попадания при одном ударе равна 0,7.

6.8.7. Дискретная с. в. X задана рядом распределения

x_i	-2	1	2	3
p_i	0,08	0,40	0,32	0,2

Найти:

а) функцию распределения $F(x)$;

б) вероятности событий $A = \{X < 2\}$, $B = \{1 \leqslant X < 3\}$, $C = \{1 < X \leqslant 3\}$;

в) построить график функции $F(x)$.

◑ а) По определению функции распределения находим:
если $x \leqslant -2$, то $F(x) = P\{X < x\} = 0$;
если $-2 < x \leqslant 1$, то $F(x) = P\{X < x\} = P\{X = -2\} = 0{,}08$;

если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P\{X = -2\} + P\{X = 1\} = 0{,}08 + 0{,}40 = 0{,}48$;
если $2 < x \leqslant 3$, то $F(x) = P\{X = -2\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 0{,}08 + 0{,}40 + 0{,}32 = 0{,}80$;
если $3 < x$, то $F(x) = P\{X = -2\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 0{,}08 + 0{,}40 + 0{,}32 + 0{,}2 = 1$.

$$\text{Итак, } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -2, \\ 0{,}08, & \text{если } -2 < x \leqslant 1, \\ 0{,}48, & \text{если } 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}80, & \text{если } 2 < x \leqslant 3, \\ 1, & \text{если } 3 < x. \end{cases}$$

б) Сначала найдем искомые вероятности непосредственно:

$$P(A) = P\{X < 2\} = P\{X = -2\} + P\{X = 1\} = 0{,}08 + 0{,}40 = 0{,}48;$$
$$P(B) = P\{1 \leqslant x < 3\} = 0{,}40 + 0{,}32 = 0{,}72;$$
$$P(C) = P\{1 < x \leqslant 3\} = 0{,}32 + 0{,}2 = 0{,}52.$$

Эти же вероятности можно найти, используя формулы

$$F(x) = P\{X < x\} \quad \text{и} \quad P\{a \leqslant X < b\} = F(b) - F(a).$$

Тогда

$$P(A) = P\{X < 2\} = F(2) = 0{,}48;$$
$$P(B) = P\{1 \leqslant x < 3\} = F(3) - F(1) = 0{,}80 - 0{,}08 = 0{,}72;$$
$$P(C) = P\{1 < x \leqslant 3\} = P\{1 \leqslant x < 3\} - P\{X = 1\} + P\{X = 3\} = F(3) - F(1) - 0{,}40 + 0{,}2 = 0{,}72 - 0{,}2 = 0{,}52.$$

в) График функции $F(x)$ изображен на рис. 79. ●

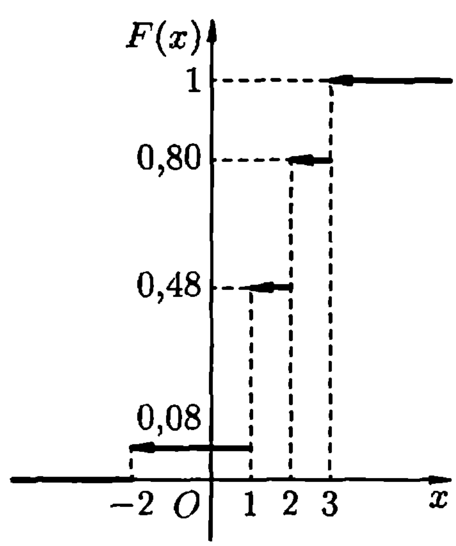


Рис. 79

6.8.8. Найти функцию распределения случайной величины X, закон распределения которой получен при решении задачи 6.8.1.

○ Найдем $F(x)$, используя формулу $F(x) = \sum\limits_{x_i<x} p_i$ (что быстрее приводит к цели, чем использование определения $F(x)$). Тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ \frac{4}{7}, & 1 < x \leqslant 2, \\ \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}, & 2 < x \leqslant 3, \\ \frac{4}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{35} = \frac{34}{35}, & 3 < x \leqslant 4, \\ \frac{4}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{35} + \frac{1}{35} = 1, & x > 4. \end{cases}$$ ●

6.8.9. В команде 16 спортсменов, из которых 6 перворазрядников. Наудачу выбирают двух спортсменов. Построить ряд распределения и функцию распределения числа перворазрядников среди выбранных.

6.8.10. Задана функция распределения с. в. X. Найти ряд распределения, а также вероятности: $P\{X = 1\}$, $P\{1 < X \leqslant 8\}$.

а) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0{,}3, & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{при } 1 < x; \end{cases}$

б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ 0{,}2, & 1 < x \leqslant 3, \\ 0{,}35, & 3 < x \leqslant 6, \\ 0{,}8, & 6 < x \leqslant 8, \\ 1, & 8 < x. \end{cases}$

6.8.11. Дискретная с. в. X задана рядом распределения

x_i	1,1	1,4	1,7	2,0	2,3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Построить многоугольник распределения, график функции распределения, найти вероятности

$$P\{X > 1{,}4\}, \quad P\{1{,}4 \leqslant x \leqslant 2{,}3\}.$$

6.8.12. Подбрасывают две монеты. Найти функцию распределения с. в. X — числа выпадений герба.

6.8.13. Задано распределение д. с. в. X

x_i	−2	−1	1	2	3
p_i	0,20	0,25	0,30	0,15	0,10

Построить ряд распределения случайных величин:

а) $Y = 2X$; б) $Z = X^2$.

○ а) Возможные значения с. в. Y таковы:

$$y_1 = 2 \cdot (-2) = -4, \quad y_2 = 2 \cdot (-1) = -2, \quad y_3 = 2, \quad y_4 = 4, \quad y_5 = 6.$$

Вероятности этих значений равны вероятностям соответствующих значений с. в. X (например, $P\{Y=-4\}=P\{X=-2\}=0{,}20$ и т. д.). Таким образом

y_i	-4	-2	2	4	6
p_i	0,20	0,25	0,30	0,15	0,10

б) Значения с. в. Z таковы: $z_1=(-2)^2=4$, $z_2=(-1)^2=1$, $z_3=1^2=1$, $z_4=2^2=4$, $z_5=3^2=9$. При этом

$$P\{Z=4\}=P\{X^2=4\}=P\{X=-2\}+P\{X=2\}=0{,}20+0{,}15=0{,}35$$

и т. д. Поэтому ряд распределения с. в. Z имеет вид

z_i	1	4	9
p_i	0,55	0,35	0,10

●

6.8.14. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и Y:

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,5	0,2

и

y_i	-2	-1
p_i	0,4	0,6

Найти закон распределения случайных величин

а) $Z=X+Y$; б) $W=X\cdot Y$.

◐ **а)** Найдем возможные значения $z_{ij}=x_i+y_j$: $-1=1+(-2)$, $0=1+(-1)$, $0=2+(-2)$, $1=2+(-1)$, $1=3+(-2)$, $2=3+(-1)$, т. е. случайная величина Z принимает значения $z_1=-1$, $z_2=0$, $z_3=1$ и $z_4=2$. Находим вероятности этих значений:

$$p_1=P\{Z=-1\}=P\{X=1,Y=-2\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=-2\}=0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}12;$$

$$p_2=P\{Z=0\}=P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=2,Y=-2\}=0{,}3\cdot 0{,}6+0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}38;$$

$$p_3=P\{Z=1\}=P\{X=2,Y=-1\}+P\{X=3,Y=-2\}=0{,}5\cdot 0{,}6+0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}38;$$

$$p_4=P\{Z=2\}=P\{X=3,Y=-1\}=0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}12.$$

Напомним, что запись вида $P\{X=3,Y=-1\}$ означает вероятность наступления двух независимых событий $\{X=3\}$ и $\{Y=-1\}$, т. е.

$$P\{X=3,Y=-1\}=P\{\{X=3\}\cdot\{Y=-1\}\}=P\{X=3\}\cdot P\{Y=-1\}.$$

При нахождении вероятности $p_3=P\{Z=1\}$ и p_2 мы воспользовались правилом сложения несовместных событий.

В итоге получаем закон распределения с. в. $Z=X+Y$:

z_i	-1	0	1	2
p_i	0,12	0,38	0,38	0,12

$\left(\text{Контроль: } \sum\limits_{i=1}^{4} p_i=1.\right)$

б) Аналогично находим (проверьте!) ряд распределения с. в. $W = X \cdot Y$:

w_i	-6	-4	-3	-2	-1
p_i	0,08	0,20	0,12	0,42	0,18

$\left(\text{Контроль: } \sum_{i=1}^{5} p_i = 1.\right)$ ●

6.8.15. Задано распределение дискретной с. в. X

x_i	-3	-1	0	1	3	5
p_i	0,05	0,20	0,25	0,30	0,15	0,05

Найти распределение с. в.:

а) $Y = |X|$; б) $Z = X^3 + 1$.

6.8.16. Дискретная с. в. X имеет ряд распределения

x_i	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Построить:

а) ряд распределения с. в. $Y = \sin\left(X - \frac{\pi}{4}\right)$;

б) график функции распределения с. в. Y.

6.8.17. Построить ряд распределения для случайных величин

$$Z = X + Y \quad \text{и} \quad W = X \cdot Y,$$

если X и Y — независимые случайные величины, заданные рядами распределения

x_i	0	1
p_i	0,3	0,7

и

y_j	2	3
p_j	0,4	0,6

Найти условную вероятность события $\{Z < 4\}$ при условии, что $\{Z > 2\}$.

6.8.18. Распределение д. с. в. X задано формулой $P\{X = k\} = C \cdot k$, где $k = 2, 3, 4, 5, 6$. Найти:

а) значение C; б) $P\{|X - 4| < 1\}$.

Дополнительные задания

6.8.19. Подброшены 2 игральные кости. Построить ряд распределения:

а) суммы выпавших очков; б) разности выпавших очков.

6.8.20. Вероятность того, что студент найдет в библиотеке нужную ему книгу, равна 0,4. Построить ряд распределения числа библиотек, которые он может посетить, если ему доступны четыре библиотеки.

6.8.21. Автомобиль на пути к месту назначения встретит 5 светофоров, каждый из которых пропустит его с вероятностью $\frac{1}{3}$. Построить ряд распределения числа светофоров, пройденных машиной до первой остановки или до прибытия к месту назначения.

6.8.22. У дежурного имеется 7 разных ключей от разных комнат. Вынув наудачу ключ, он пробует открыть дверь одной из комнат. Построить ряд распределения числа попыток открыть дверь (проверенный ключ второй раз не используется). Построить многоугольник этого распределения.

6.8.23. АТС обслуживает 1500 абонентов. Вероятность того, что в течение 3 минут на АТС поступит вызов, равна 0,002. Построить ряд распределения с. в. X, равной числу вызовов, поступивших на АТС в течение 3 минут. Найти вероятность того, что за это время поступит более трех вызовов.

6.8.24. В партии, содержащей 20 изделий, имеется четыре изделия с дефектами. Наудачу отобрали три изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения числа дефектных изделий, содержащихся в указанной выборке.

6.8.25. Используя условие задачи 6.8.4, найти функцию распределения с. в. и построить ее график.

6.8.26. Используя условие задачи 6.8.6, найти функцию распределения с. в. и построить ее график.

6.8.27. Используя условие задачи 6.8.22, найти функцию распределения с. в. и построить ее график.

6.8.28. Подброшены 2 игральные кости. Построить ряд распределения и функцию распределения д. с. в. X — числа выпадений четного числа очков.

6.8.29. X и Y — независимые дискретные случайные величины, заданные таблицами распределения

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,2	0,5

и

y_i	2	4
p_i	0,6	0,4

Найти:

а) ряд распределения с. в. $Z = X \cdot Y$;

б) $P\{X + Y > 5\}$;

в) $P\{(X + Y > 5) \mid (X = 2)\}$.

6.8.30. Заданы распределения двух независимых случайных величин X и Y:

x_i	0	1	2
p_i	0,2	0,4	0,4

и

y_i	2	3	4
p_i	0,3	0,3	0,4

Найти:

а) функцию распределения с. в. X;

б) ряд распределения случайных величин $Z = X + Y$, $W = X - Y$;

в) $P\{|X - Y| \leqslant 2\}$;

г) построить многоугольники распределения с. в. Z и W.

6.8.31. Найти функцию распределения с. в. $Y = \sin \frac{\pi}{3} X$, где с. в. X — число очков, выпадающее при бросании игральной кости.

6.8.32. Испытания по схеме Бернулли с вероятностью успеха p в одном испытании повторяются до двух успехов. Построить ряд распределения числа проведенных испытаний. Найти вероятность того, что в первых N испытаниях число успехов меньше 2.

6.8.33. Пользуясь условием задачи 6.8.29, построить ряд распределения с. в. $Z = \min\{X, Y\}$.

6.8.34. Какая из нижеприведенных последовательностей является распределением вероятностей некоторой дискретной случайной величины?

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}; \quad b_n = p^n \cdot (1-p)^2,\ 0 < p < 1;$$

$$c_n = \frac{4^{n-1}}{(n-1)!}e^{-4}; \quad d_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{n-1}^{n} \frac{dx}{1+x^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6.8.35. Дискретная с. в. X принимает целочисленные значения $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, ... Известно, что $p_n = P\{X = n\} = \dfrac{c}{n^2 + 3n + 2}$. Найти:

а) значение параметра c;

б) вероятность события $D = \{X = 5\}$.

6.8.36. Может ли функция $F(x)$ быть функцией распределения некоторой с. в., если:

а) $F(x) = e^{-x}$; б) $F(x) = e^{x}$;

в) $F(x) = 1 - e^{x}$; г) $F(x) = 1 - e^{-x}$;

д) $F(x) = 0{,}5 + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}(x)$;

е) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 0{,}4, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}35, & 1 < x \leqslant 5, \\ 1, & 5 < x? \end{cases}$

6.8.37. Можно ли утверждать, что событие C является невозможным, если $P(C) = 0$?

6.8.38. Совпадают ли законы распределения дискретных случайных величин $X + X$ и $2 \cdot X$?

6.8.39. Дискретная с. в. X принимает натуральные значения, причем значение n с вероятностью $\frac{1}{2^n}$. Построить ряд распределения вероятностей для с. в. $Y = \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}X\right)\right|$.

§ 9. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В предыдущем параграфе было введено понятие непрерывной случайной величины (н. с. в.). Можно дать другое, более строгое, определение н. с. в., используя понятие функции распределения.

$\Rrightarrow$ Случайная величина X называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна на всей числовой оси. $\Lleftarrow$

В отличие от дискретных случайных величин вероятность отдельного значения для непрерывной случайной величины равна нулю: $P\{X = c\} = 0$, $\forall c \in \mathbb{R}$. Поэтому для н. с. в. X имеем:

$$P\{a \leqslant X < b\} = P\{a < X < b\} = P\{a < X \leqslant b\} = P\{a \leqslant X \leqslant b\} = F(b) - F(a).$$

Помимо функции распределения для непрерывных случайных величин, существует еще один удобный способ задания закона распределения — плотность вероятности.

$\Rrightarrow$ Пусть функция распределения $F(x)$ данной н. с. в. X непрерывна и дифференцируема всюду, кроме, может быть, отдельных точек. Тогда производная $f(x)$ ее функции распределения называется *плотностью распределения* непрерывной с. в. X (или «плотностью вероятности», или просто «плотностью»):

$$f(x) = F'(x).$$ $\Lleftarrow$

Наряду с обозначением $f(x)$ для плотности распределения используется также обозначение $p(x)$ (т. е. $p(x) = F'(x)$).

Свойства плотности распределения:

1. $f(x) \geqslant 0$ (свойство неотрицательности);
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (свойство нормированности);
3. $P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$;
4. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$;
5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

$\Rrightarrow$ График плотности распределения $f(x)$ называется *кривой распределения*. $\Lleftarrow$

6.9.1. Задана функция распределения н. с. в. X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 3, \\ C(x-3)^2, & \text{при } 3 \leqslant x \leqslant 5, \\ 1, & \text{при } 5 < x. \end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент C;

б) плотность распределения $f(x)$ с. в. X и построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;

в) $P\{X \in [3,4)\}$.

○ а) Так как с. в. X — непрерывна, то $F(x)$ должна быть непрерывной функцией в любой точке, в частности, и при $x = 5$. Так как $F(5) = 1$, то $C \cdot (5-3)^2 = 1$, откуда $C = \frac{1}{4}$. Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 3, \\ \frac{1}{4}(x-3)^2, & \text{при } 3 \leqslant x \leqslant 5, \\ 1, & \text{при } 5 < x. \end{cases}$$

б) Плотность распределения $f(x) = F'(x)$ выражается формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 3, \\ \frac{1}{2}(x-3), & \text{при } 3 \leqslant x \leqslant 5, \\ 0, & \text{при } 5 < x. \end{cases}$$

Графики функций $F(x)$ и $f(x)$ представлены на рис. 80 и рис. 81.

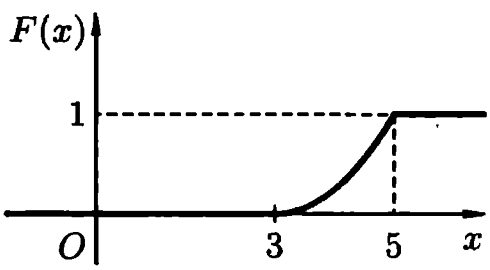


Рис. 80

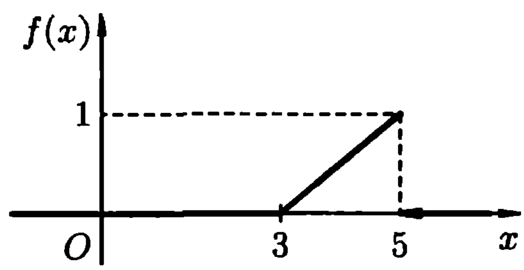


Рис. 81

в) Используя формулу $P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, находим, что

$$P\{X \in [3,4)]\} = P\{3 \leqslant X < 4\} = \int\limits_3^4 \frac{1}{2}(x-3)\,dx = \frac{1}{4}.$$

Или, иначе $P\{3 \leqslant X < 4\} = F(4) - F(3) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$. ●

6.9.2. При каких значения параметров k и b функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ kx + b, & -1 < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x \end{cases}$$

может быть функцией распределения некоторой непрерывной с. в. X? Найти вероятность того, что с. в. X примет значение, заключенное в промежутке $(-2{,}3; 1{,}5)$. Построить график плотности распределения этой случайной величины.

6.9.3. Задана функция распределения н. с. в. X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi, \\ a(\cos x + c), & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x. \end{cases}$$

Найти:

а) значения постоянных a и c;

б) $f(x)$;

в) $P_1\left\{X \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$, $P_2\left\{X = \frac{\pi}{2003}\right\}$.

6.9.4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant A, \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{x} - 1, & A < x \leqslant B, \\ 1, & B < x. \end{cases}$$

Найти: значения A и B, плотность распределения н. с. в. X, вероятность события $C = \{X \in (3; 5)\}$.

6.9.5. При каком значении параметра C функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{x^4}, & x \geqslant 1, \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

может быть плотностью распределения некоторой непрерывной с. в. X? Найти $P\{1 < X < 5\}$.

◯ Очевидно, что $f(x) > 0$ при $C > 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Используя свойство нормированности ($\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$), найдем значение параметра C:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{C}{x^4}\,dx = C \cdot \lim_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} x^{-4}\,dx =$$

$$= -\frac{C}{3} \cdot \lim_{b\to\infty} \frac{1}{x^3}\Big|_1^b = -\frac{C}{3}(0 - 1) = \frac{C}{3},$$

т. е. $\dfrac{C}{3} = 1$, отсюда $C = 3$. Таким образом, функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^4}, & x \geqslant 1, \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

является плотностью распределения некоторой с. в. X.

Найдем искомую вероятность, используя формулу

$$P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Получаем:

$$P\{1 \leqslant X \leqslant 5\} = P\{1 < X < 5\} = \int\limits_{1}^{5} \frac{3}{x^4}\,dx = 3 \cdot \frac{1}{-3x^3}\Big|_1^5 = \frac{124}{125} = 0{,}992. \quad ●$$

6.9.6. Непрерывная с. в. X имеет плотность распределения вероятностей
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^4}, & x \geqslant 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$
Найти функцию распределения вероятностей $F(x)$; построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

○ Используем формулу
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$
При $x \in (-\infty, 1)$ имеем:
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0.$$

При $x \in [1, +\infty)$ промежуток интегрирования разбивается на два:
$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0 \cdot dt + \int_{1}^{x} \frac{3}{t^4}\,dt = 3\int_{1}^{x} t^{-4}\,dt = -\frac{1}{t^3}\Big|_1^x = -\frac{1}{x^3} + 1.$$

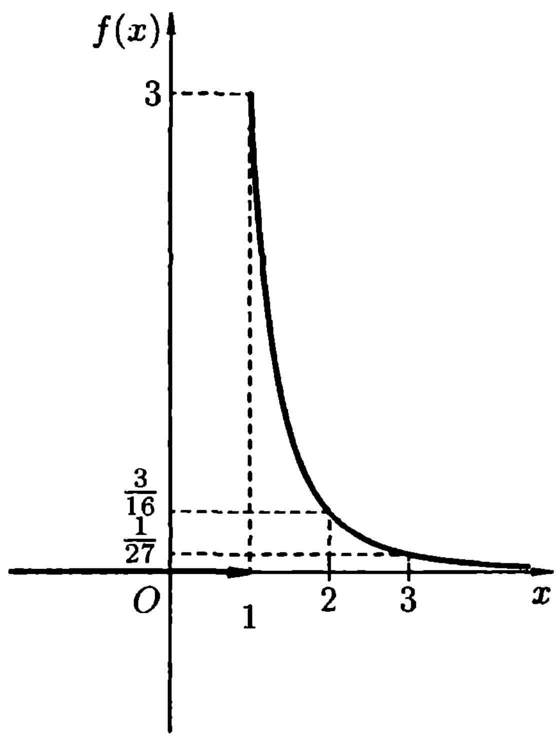


Рис. 82

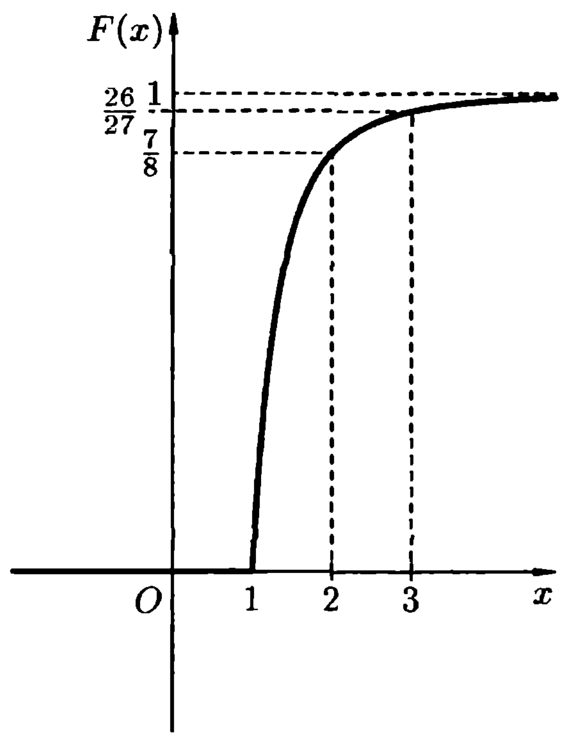


Рис. 83

Таким образом,
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^3}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ представлены соответственно на рис. 82 и рис. 83. ●

6.9.7. Непрерывная случайная величина X распределена «по закону прямоугольного треугольника» на интервале $(0,4)$; на рис. 84 изображена плотность распределения этой с. в. Найти:

а) значение y_0;

б) аналитическое выражение для плотности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$. Построить график $F(x)$.

○ а) Так как площадь S фигуры, ограниченной сверху кривой распределения (т. е. графиком функции $f(x)$), а снизу — осью Ox, равна 1, то $S = S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot y_0 = 1$. Отсюда $y_0 = \frac{1}{2}$.

б) Уравнение прямой AB найдем как уравнение прямой, проходящей через точки $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ и $B(4;0)$): $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$. Аналитическое выражение для плотности распределения с. в. X таково:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}, & x \in [0,4], \\ 0, & x \notin [0,4]. \end{cases}$$

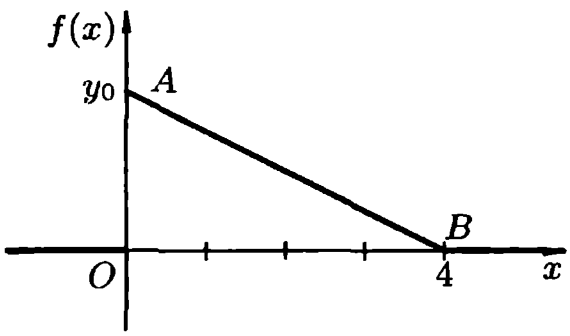


Рис. 84

Теперь найдем функцию распределения $F(x)$:

если $x \in (-\infty, 0)$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$;

если $x \in [0,4]$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{x} \left(-\frac{1}{8}t + \frac{1}{2}\right) dt = \left(-\frac{1}{16}t^2 + \frac{t}{2}\right)\Big|_0^x = -\frac{x^2}{16} + \frac{x}{2};$$

если $x \in (4, +\infty)$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{4} \left(-\frac{1}{8}t + \frac{1}{2}\right) dt + \int\limits_{4}^{x} 0\,dt =$$

$$= 0 + \left(-\frac{t^2}{16} + \frac{t}{2}\right)\Big|_0^4 + 0 = -1 + 0 + 2 - 0 = 1.$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ -\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 85. ●

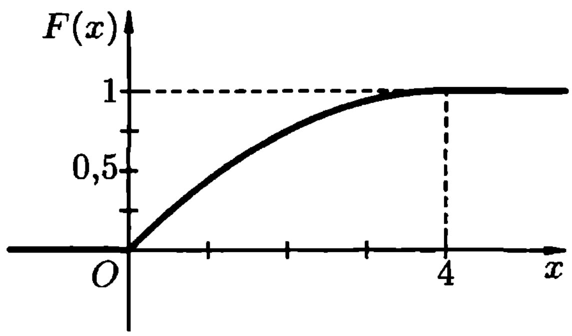


Рис. 85

6.9.8. Дана плотность распределения с. в. X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0,\\ b\cdot x, & \text{при } 0\leqslant x<5{,}8,\\ 0, & \text{при } 5{,}8\leqslant x.\end{cases}$$

Определить постоянную b, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график, вычислить вероятность того, что с. в. X примет значение, удовлетворяющее условию:

а) $X<3{,}3$; б) $3{,}3<X<7{,}8$.

6.9.9. Плотность вероятности с. в. X имеет вид

$$f(x)=\frac{a}{e^x+e^{-x}},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Найти значение параметра a, функцию распределения $F(x)$.

6.9.10. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{4-x^2}}, & |x|<2,\\ 0, & |x|\geqslant 2.\end{cases}$$

Найти:

а) значение параметра c;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) $P\{1<X<5\}$.

6.9.11. Задана плотность распределения н. с. в. X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1,\\ 2x-2, & 1<x\leqslant 2,\\ 0, & 2<x.\end{cases}$$

Что вероятнее: попадание случайной величины в интервал $(1{,}6; 1{,}8)$ или в $(1{,}9; 2{,}6)$?

6.9.12. Задана плотность распределения н. с. в. X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -A, \\ -x, & -A \leqslant x < 0, \\ 2x, & 0 \leqslant x < A, \\ 0, & A \leqslant x. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $P\{-2 < X < 1\}$.

6.9.13. График плотности распределения н. с. в. X имеет вид, изображенный на рис. 86. Записать аналитическое выражение для плотности распределения $f(x)$.

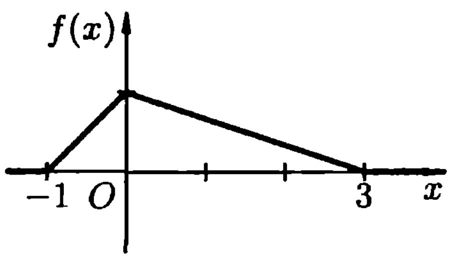


Рис. 86

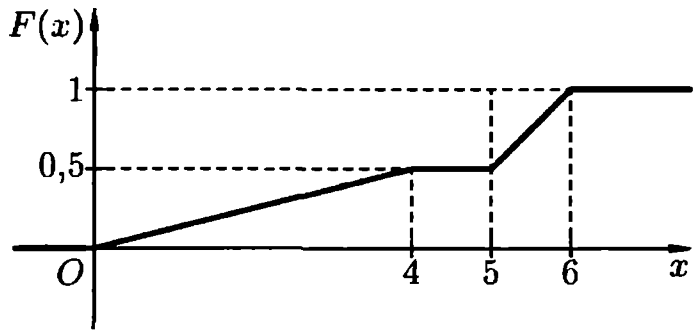


Рис. 87

Дополнительные задания

6.9.14. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 3^x, & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность $f(x)$;

б) вероятность того, что с. в. X в результате опыта примет значение в интервале $(-1, 1)$.

6.9.15. На рис. 87 задан график функции распределения с. в. X. Найти аналитическое выражение для:

а) $F(x)$; **б)** $f(x)$.

Построить график плотности распределения с. в. X.

6.9.16. Функция распределения н. с. в. X задана выражением

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -\frac{\pi}{6}, \\ a \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + b, & -\frac{\pi}{6} < x \leqslant \frac{\pi}{3}, \\ 1, & \frac{\pi}{3} < x. \end{cases}$$

Найти:

а) коэффициенты a, b; б) плотность $f(x)$;

в) $P\left\{0 \leqslant X < \frac{\pi}{2}\right\}$.

Построить график функции $f(x)$.

6.9.17. Задана функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ a \cdot x^2, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Определить:

а) при каком значении a функция $F(x)$ будет функцией распределения некоторой с. в. X;

б) плотность вероятности с. в. X;

в) вероятность события $D = \left\{-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}\right\}$.

6.9.18. Функция распределения с. в. X имеет вид $F(x) = a + b \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Найти:

а) значение параметров a и b;

б) плотность вероятности.

6.9.19. Функция распределения н. с. в. X — времени безотказной работы некоторого прибора — равна $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{T}}$, $x \geqslant 0$. Найти $P\{X > T\}$, т. е. вероятность безотказной работы прибора за время, большее T.

6.9.20. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot x \cdot e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

При каком значении параметра A эта функция является плотностью распределения некоторой н. с. в. X? Найти $F(x)$.

6.9.21. Задана плотность вероятности случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ -Ax, & -4 \leqslant x < 0, \\ A\sqrt{x}, & 0 \leqslant x < 4, \\ 0, & 4 \leqslant x. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $P\{-1 < X < 5\}$.

6.9.22. Плотность вероятности н. с. в. X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -A, \\ -\frac{x}{2}, & -A \leqslant x < 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \leqslant x < 2A, \\ 0, & 2A \leqslant x. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $P\{-0{,}5 < X < 2\}$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

6.9.23. Задана некоторая функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ \frac{1}{6} \cdot (x+1)^3, & -1 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Является ли она функцией распределения некоторой случайной величины X? Чему равна вероятность события

$$A = \{0 \leqslant X < 1\}?$$

6.9.24. Значения с. в. X находятся в промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Может ли функция распределения $F(x)$ равняться на этом участке:

а) $\sin x$; б) x^2;

в) 1,1; г) $\cos x$;

д) $\frac{2x}{\pi}$?

6.9.25. Непрерывная с. в. X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{4}, \\ a \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + b, & -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}, \\ c, & \frac{3\pi}{4} < x. \end{cases}$$

Найти:

а) значения a, b, c;

б) плотность $f(x)$ распределения с. в. X. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

6.9.26. Функция распределения н. с. в. X, равная

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ ax^2 + bx + c, & 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x. \end{cases}$$

Функция $F(x) = ax^2 + bx + c$ при $x = 2$ имеет максимум. Найти:

а) параметры a, b, c;

б) вероятности событий $A = \{X > 3\}$, $B = \{1 \leqslant X < 3\}$, $E = \{X \in (-1; 1{,}5)\}$.

6.9.27. Непрерывная с. в. X распределена по закону Лапласа:

$$f(x) = A \cdot e^{-\lambda \cdot |x|}, \text{где } \lambda > 0.$$

Найти коэффициент A и функцию распределения $F(x)$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

6.9.28. Непрерывная с. в. X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \sqrt{3}, \\ \frac{x^6 - x^4 - 18}{30}, & \sqrt{3} < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x. \end{cases}$$

Найти $P\{1{,}8 < X < 2{,}8\}$, $f(x)$; построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

6.9.29. Случайная величина X подчиняется закону Гаусса:

$$f(x) = \frac{1}{3\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x+2)^2}{18}}.$$

Найти функцию распределения $F(x)$, построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

6.9.30. При каком значении параметра A функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant 1, \\ A\cdot(1-|x|), & |x| < 1 \end{cases}$$

является плотностью распределения некоторой н. с. в. X? Построить график $f_X(x)$. Найти функцию распределения этой с. в. Найти

$$P\left\{|X| \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

§ 10. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

При решении многих задач теории вероятности вовсе необязательно знать закон распределения данной случайной величины, полностью ее описывающей. Зачастую достаточно иметь под рукой лишь несколько *числовых характеристик* этой случайной величины, т. е. числовых параметров, характеризующих наиболее важные черты ее закона распределения. Важнейшими среди них являются *характеристики положения* (математическое ожидание, медиана и т. д.) и *характеристики рассеяния* (дисперсия, среднеквадратическое отклонение и др.).

⇛ *Математическим ожиданием* (или средним значением) $M(X)$ (или MX) дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений x_i на их соответствующие вероятности:

$$M(X) = \sum_i x_i p_i.$$ ⇚

Если д. с. в. X принимает конечное число значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то ее математическое ожидание находится по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Если же д. с. в. X принимает счетное число значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i;$$

при этом математическое ожидание существует, если ряд в правой части этой формулы абсолютно сходится.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X с плотностью вероятности $f(x)$ находится по формуле

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx.$$

При этом математическое ожидание существует, если интеграл в правой части формулы абсолютно сходится (это значит, что сходится интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx$).

Свойства математического ожидания

1. $M(C) = C$, где $C = \text{const}$;
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$;
3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$ (правило сложения математических ожиданий);
4. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, если X и Y — независимые случайные величины (правило умножения математических ожиданий).

Обозначим математическое ожидание с. в. X через a.

⇛ *Дисперсией* (рассеянием) случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения с. в. от ее математического ожидания a:

$$D(X) = M(X - a)^2.$$ ⇚

Сразу из определения вытекает часто используемая формула

$$D(X) = M(X)^2 - a^2.$$

Если X — дискретная случайная величина, то ее дисперсия вычисляется по формуле

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 \cdot p_i, \quad \text{т. е.} \quad D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - a^2$$

в случае конечного числа значений, принимаемых с. в. X, и по формуле

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a)^2 p_i$$

(т. е. $D(X) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - a^2$) в случае счетного числа значений.

Если X — непрерывная случайная величина с плотностью $f(x)$, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 \cdot f(x)\, dx, \quad \text{или} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx - a^2.$$

Свойства дисперсии

1. $D(C) = 0$, где $C = \text{const}$;
2. $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$;
3. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, если X и Y — независимые случайные величины (правило сложения дисперсий);
4. $D(X + C) = D(X)$.

$\Rrightarrow$ *Средним квадратическим отклонением* случайной величины X называется число $\sigma(X)$, определяемое равенством $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$. $\Lleftarrow$

Величина $\sigma(X)$ неотрицательна и имеет ту же размерность, что и с. в. X.

$\Rrightarrow$ *Начальным моментом* порядка k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) случайной величины X называется число α_k, определяемое по формуле

$$\alpha_k = M(X^k), \quad \text{т. е.} \quad \alpha_k = \sum_i x_i^k \cdot p_i,$$

если X — д. с. в., и

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\, dx,$$

если X — н. с. в. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ *Центральным моментом порядка* k с. в. X называется число μ_k, определяемое по формуле

$$\mu_k = M(X - a)^k, \quad \text{т. е.} \quad \mu_k = \sum_i (x_i - a)^k \cdot p_i,$$

если X — д. с. в., и

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^k \cdot f(x)\, dx,$$

если X — н. с. в. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ *Коэффициент асимметрии («скошенности»)*, или, короче, асимметрия с. в. X есть величина

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3(X)}. \quad \Lleftarrow$$

$\Rrightarrow$ *Коэффициент эксцесса («островершинности»)*, или, проще, эксцесс с. в. X, есть величина

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} - 3. \quad \Lleftarrow$$

$\Rrightarrow$ *Мода д. с. в.* X — есть ее наиболее вероятное значение $M_0(X)$. *Мода н. с. в.* X с плотностью $f(x)$ есть то ее значение $M_0(X)$, при котором функция $f(x)$ достигает максимума. $\Lleftarrow$

$\Rrightarrow$ *Медиана* случайной величины X (обозначение $M_e(X)$) — есть такое ее значение x_p, для которого одинаково вероятно, окажется ли с. в. X меньше x_p или больше x_p, т. е.

$$P\{X < x_p\} = P\{X > x_p\} = \frac{1}{2}. \quad \Lleftarrow$$

⇛ *Квантилью уровня* p с. в. X называется число x_p, удовлетворяющее уравнению $P\{X < x_p\} = p$. ⇚

Таким образом, x_p является решением уравнения $F(x_p) = p$. В частности, $x_{0,5} = M_e(X)$.

6.10.1. Задан закон распределения д. с. в. X:

x_i	-2	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,25	0,15	0,1	0,2

Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин X, $-2X$, X^2.

○ Сначала найдем математические ожидания данных величин. Используя формулу $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, находим

$$M(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = -2 \cdot 0{,}1 - 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}15 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}55.$$

Для нахождения $M(-2X)$ воспользуемся свойством математического ожидания: $M(CX) = C \cdot M(X)$. Имеем: $M(-2X) = -2 \cdot M(X) = -2 \cdot 0{,}55 = -1{,}1$.

Закон распределения с. в. X^2 запишем в виде таблицы распределения:

x_i	0	1	4	9
p_i	0,25	0,35	0,2	0,2

Тогда, $M(X^2) = 0 \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}35 + 4 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}2 = 2{,}95$.

Найдем дисперсии указанных случайных величин. Непосредственно по определению дисперсии имеем:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{6} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i =$$
$$= (-2 - 0{,}55)^2 \cdot 0{,}1 + (-1 - 0{,}55)^2 \cdot 0{,}2 + (0 - 0{,}55)^2 \cdot 0{,}25 +$$
$$+ (1 - 0{,}55)^2 \cdot 0{,}15 + (2 - 0{,}55)^2 \cdot 0{,}1 + (3 - 0{,}55)^2 \cdot 0{,}22 = 2{,}6475.$$

Эту же величину можно найти проще, используя формулу

$$D(X) = M(X^2) - (MX)^2.$$

Действительно, $M(X^2) = 2{,}95$, $(M(X))^2 = 0{,}55^2 = 0{,}3025$. Следовательно, $D(X) = 2{,}95 - 0{,}3025 = 2{,}6475$. Далее,

$$D(-2X) = (-2)^2 D(X) = 4 \cdot 2{,}6475 = 10{,}59;$$
$$D(X^2) = (0 - 2{,}95)^2 \cdot 0{,}25 + (1 - 2{,}95)^2 \cdot 0{,}35 + (4 - 2{,}95)^2 \cdot 0{,}2 + (9 - 2{,}95)^2 \cdot 0{,}2 = 11{,}0475.$$

Поскольку ряд распределения д. с. в. X^4 имеет вид

x_i^4	0	1	16	81
p_i	0,25	0,35	0,2	0,2

то $D(X^2)$ можно найти проще:

$$D(X^2) = M(X^4) - (MX^2)^2 = 0^2 \cdot 0{,}25 + 1^2 \cdot 0{,}35 + 4^2 \cdot 0{,}2 + 9^2 \cdot 0{,}2 - (2{,}95)^2 = \\ = 19{,}75 - 8{,}7025 = 11{,}0475. \quad \bullet$$

6.10.2. Брошены 10 игральных костей. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$, где с. в. X — сумма очков, выпавших на всех игральных костях.

◐ Обозначим через X_i $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ число очков, выпавших на i-й кости. Тогда $X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_{10}$. Случайные величины X_1, $X_2, \ldots, X_{10}$ имеют одинаковые законы распределения, поэтому $M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_{10})$ и $D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_{10})$. И так как с. в. X_i $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ независимы, то

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_{10}) = \\ = 10 \cdot M(X_1),$$

$$D(X) = D(X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_{10}) = 10 \cdot D(X_1).$$

Закон распределения с. в. X_1 имеет вид

$x_{1,i}$	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Поэтому, учитывая, что

$$D(X) = M(X)^2 - (M(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - (MX)^2,$$

имеем

$$M(X_1) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2},$$

$$D(X_1) = \left(1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6^2 \cdot \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

Стало быть, $M(X) = 10 \cdot M(X_1) = 10 \cdot \frac{7}{2} = 35$, $D(X) = 10 \cdot D(X_1) = 10 \cdot \frac{35}{12} = \frac{175}{6} = 29\frac{1}{6}$, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{175}{6}} \approx 5{,}4$. ●

6.10.3. Закон распределения д. с. в. X задан таблицей распределения

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	c

Найти c, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P\{X < 3\}$.

6.10.4. Функция распределения д. с. в. X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 0{,}2, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}6, & 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}9, & 2 < x \leqslant 3, \\ 1, & 3 < x. \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $M(X^2)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

6.10.5. Независимо испытываются на надежность 3 прибора. Вероятности выхода из строя каждого прибора одинаковы и равны 0,6. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$, где с. в. X — число вышедших из строя приборов.

6.10.6. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые выпадают при бросании двух игральных костей.

6.10.7. Случайные величины X и Y независимы, причем $D(X) = 2$ и $D(Y) = 6$. Найти $D(Z)$, если $Z = 12 \cdot X - 3Y + 2$.

❍ На основании свойств дисперсии (1–4) получаем:

$$D(Z) = D(12X - 3Y + 2) = 144 \cdot D(X) + 9 \cdot D(Y) =$$
$$= 144 \cdot 2 + 9 \cdot 6 = 342. \quad \bullet$$

6.10.8. Математическое ожидание и дисперсия с. в. X соответственно равны $\frac{7}{2}$ и $\frac{35}{12}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $4X - 1$.

❍ Согласно свойствам математического ожидания и дисперсии, получаем:

$$M(4X - 1) = M(4X) + M(-1) = 4M(X) - 1 = 4 \cdot \frac{7}{2} - 1 = 13;$$

$$D(4X - 1) = 16 \cdot D(X) = 16 \cdot \frac{35}{12} = \frac{140}{3}. \quad \bullet$$

6.10.9. Независимые случайные величины X и Y заданы таблицами распределения вероятностей

x_i	10	20
p_i	0,2	0,8

и

y_i	30	40	50
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти $D(X+Y)$ двумя способами: 1) составив предварительно таблицу распределения с. в. $Z = X + Y$; 2) используя правило сложения дисперсий.

6.10.10. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$ для случайной величины

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

где X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — независимые дискретные случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание a и одну и ту же дисперсию σ^2.

6.10.11. Вероятность появления события A в каждом независимом испытании одинакова и равна p. Найти эту вероятность, если для д. с. в. $X = \{$число появлений события A в 5 испытаниях$\}$ дисперсия равна $D(X) = 1{,}25$.

6.10.12. Вероятность того, что студент сдаст экзамен на «5», равна 0,2, на «4» — 0,4. Определить вероятности получения им оценок «3» и «2», если известно, что $M(X) = 3{,}7$, где д. с. в. X — оценка, полученная студентом на экзамене.

6.10.13. Дан ряд распределения с. в. X:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Найти начальные и центральные моменты первых четырех порядков.

6.10.14. Плотность вероятности с. в. X задается формулой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{26}(x-3)^2, & x \in [0,2], \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

Найти ее числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение, асимметрию и эксцесс.

❍ Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,dx + \int\limits_{0}^{2} x \cdot \frac{3}{26}(x-3)^2\,dx + \int\limits_{2}^{+\infty} x \cdot 0\,dx =$$

$$= \frac{3}{26} \cdot \int\limits_{0}^{2} (x^3 - 6x^2 + 9x)\,dx = \frac{3}{26}\left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 9 \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{9}{13} \approx 0{,}692.$$

Теперь отыщем дисперсию:

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{2} \left(x - \frac{9}{13}\right)^2 \cdot \frac{3}{26}(x-3)^2\,dx = \frac{3}{26} \int\limits_{0}^{2} \left(x^2 - \frac{48}{13}x + \frac{27}{13}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{3}{26} \cdot \int\limits_{0}^{2} \left[\left(x - \frac{9}{13}\right)(x-3)\right]^2 dx =$$

$$= \frac{3}{26} \cdot \int\limits_{0}^{2} \left(x^4 + \frac{2304}{169}x^2 + \frac{729}{169} - \frac{96}{13}x^3 + \frac{54}{13}x^2 - \frac{2592}{169}x\right) dx =$$

$$= \frac{3}{26}\left(\frac{x^5}{5} + \frac{768}{169}x^3 + \frac{729}{169}x - \frac{24}{13}x^4 + \frac{18}{13}x^3 - \frac{1296}{169}x^2\right)\Big|_0^2 \approx 0{,}259.$$

(Иначе:

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - (M(X))^2 = \int\limits_0^2 x^2 \cdot \frac{3}{26}(x-3)^2\,dx - \left(\frac{9}{13}\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{26}\int\limits_0^2 (x^4 - 6x^3 + 9x^2)\,dx - \left(\frac{9}{13}\right)^2 = \frac{3}{26}\left(\frac{x^5}{5} - 6\cdot\frac{x^4}{4} + 9\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 - \frac{81}{169} =$$

$$= \frac{3}{26}\left(\frac{32}{5} - 24 + 24\right) - \frac{81}{169} = \frac{3\cdot 32}{26\cdot 5} - \frac{81}{169} = \frac{48}{65} - \frac{81}{169} = \frac{219}{845} \approx 0{,}259.)$$

Отсюда найдем среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}259} \approx 0{,}509.$$

Наконец, вычислим асимметрию:

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{1}{(0{,}509)^3}\cdot\int\limits_0^2 \left(x - \frac{9}{13}\right)^3 \cdot \frac{3}{26}\cdot(x-3)^2\,dx \approx$$

$$\approx \frac{1}{0{,}132}\cdot\frac{3}{26}\int\limits_0^2 \left(x^5 - \frac{105}{13}x^4 + \frac{3870}{169}x^3 - \frac{60750}{2197}x^2 + \frac{32805}{2197}x - \frac{6561}{2197}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{26}\cdot\frac{1}{0{,}132}\left(\frac{x^6}{6} - \frac{105x^5}{13\cdot 5} + \frac{3870x^4}{169\cdot 4} - \frac{60750x^3}{2197\cdot 3} + \frac{32805x^2}{2197\cdot 2} - \frac{6561x}{2197}\right)\Big|_0^2 \approx$$

$$\approx 0{,}634.$$

и эксцесс:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \approx \frac{1}{0{,}067}\cdot\int\limits_0^2 \left(x - \frac{9}{13}\right)^4 \cdot \frac{3}{26}\cdot(x-3)^2\,dx - 3 =$$

$$= \frac{3}{26}\cdot\frac{1}{0{,}067}\cdot\int\limits_0^2 \left(x^6 - \frac{114}{13}x^5 + \frac{4815}{169}x^4 - \frac{95580}{2197}x^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{973215}{28561}x^2 - \frac{380538}{28561}x + \frac{59049}{28561}\right)dx - 3 \approx -0{,}545. \quad \bullet$$

6.10.15. Дана плотность распределения вероятностей случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{8}\cdot x, & \text{при } 0 \leqslant x < 4, \\ 0, & \text{при } 4 \leqslant x. \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

6.10.16. Плотность распределения с. в. X

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\cdot e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0,\ (\lambda > 0), \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

6.10.17. Случайная величина X принимает положительные значения, имеет плотность вероятностей $f(x) = -ax^2 + 2ax$. Найти значение параметра a и математическое ожидание с. в. X.

6.10.18. Плотность вероятностей случайной величины X равна

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{100 - x^2}}, & \text{при } -10 < x < 10, \\ 0, & \text{при } |x| \geqslant 10. \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

6.10.19. Плотность распределения с. в. X задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin x, & \text{при } 0 \leqslant x < \pi, \\ 0, & \text{при } 0 < x \text{ и } x \geqslant \pi. \end{cases}$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

6.10.20. Найти моду, медиану, математическое ожидание и квантиль уровня 0,75 случайной величины с плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 8x \cdot e^{-4x^2}, & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

❍ Найдем точку максимума функции $f(x)$:

$$f'(x) = 8e^{-4x^2} + 8x \cdot e^{-4x^2}(-8x) = 8e^{-4x^2}(1 - 8x^2);$$

отсюда $f'(x) = 0$ при $x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Точка $x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ является точкой максимума функции $f(x)$ (так как, если $x < \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, то $f'(x) > 0$, а если $x > \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, то $f'(x) < 0$). Следовательно, мода $M_0(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}35$.

Медиана $M_e(X) = x_1$ определяется как значение случайной величины, которое делит площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, на две равные части. Поэтому

$$\int_0^{x_1} 8x \cdot e^{-4x^2}\,dx = \frac{1}{2} \quad \Big(\text{или:} \quad \int_{x_1}^{+\infty} 8x \cdot e^{-4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big),$$

откуда

$$-\int_0^{x_1} e^{-4x^2}\,d(-4x^2) = \frac{1}{2}, \quad \text{т. е.} \quad -e^{-4x^2}\Big|_0^{x_1} = \frac{1}{2},$$

и, следовательно, $e^{-4x_1^2} = \frac{1}{2}$. Отсюда находим:

$$x_1 = M_eX = \frac{1}{2}\sqrt{\ln 2} \approx 0{,}42.$$

Находим математическое ожидание с. в. X:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} x \cdot 8x^2 \cdot e^{-4x^2}\,dx =$$

$$= 8 \lim_{M\to+\infty} \int_0^M x \cdot x^2 \cdot e^{-4x^2} dx =$$

$$\left[\text{по частям: } u = x^2, du = 2x\,dx,\ dv = x \cdot e^{-4x^2}\,dx,\ v = -\tfrac{1}{8}e^{-4x^2}\right]$$

$$= 8 \lim_{M\to+\infty} \left(-\frac{1}{8} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{e^{4x^2}}\bigg|_0^M + \frac{2}{8}\int_0^M x \cdot e^{-4x^2}\,dx \right) =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left(-\frac{M^2}{e^{4M^2}} - \frac{2}{8}\int_0^M e^{-4x^2} d(-4x^2) \right) = -\frac{1}{4} \lim_{M\to+\infty} e^{-4x^2}\bigg|_0^M =$$

$$= -\frac{1}{4} \lim_{M\to+\infty} (e^{-4M^2} - 1) = -\tfrac{1}{4}(0-1) = \tfrac{1}{4} = 0{,}25.$$

Найдем функцию распределения с. в. X. Предварительно заметим, что если $x < 0$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

Если же $x \geqslant 0$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^x 8t \cdot e^{-4t^2}\,dt = -e^{-4t^2}\bigg|_0^x = -e^{-4x^2} + 1,$$

т. е. $F(x) = 1 - e^{-4x^2}$, $x \geqslant 0$.

Квантиль $x_{0,75}$ находим из равенства $F(x_{0,75}) = 0{,}75$. Имеем:

$$1 - e^{-4x_{0,75}^2} = 0{,}75.$$

Отсюда находим, что $x_{0,75} = \frac{1}{2}\sqrt{\ln 4} \approx 0{,}59$.

Кривая распределения (с. в. X распределена по закону Релея) представлена на рис. 88. ●

6.10.21. Случайная величина имеет плотность распределения вида

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{x^2 + a^2}, \quad a > 0$$

(распределена по закону Коши). Найти моду, медиану и квантили порядка $p = 0{,}25; 0{,}5; 0{,}75$.

6.10.22. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{19} \cdot (x^3 - 8), & 2 < x \leqslant 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти: $M(X)$, $M_0(X)$, $M_e(X)$.

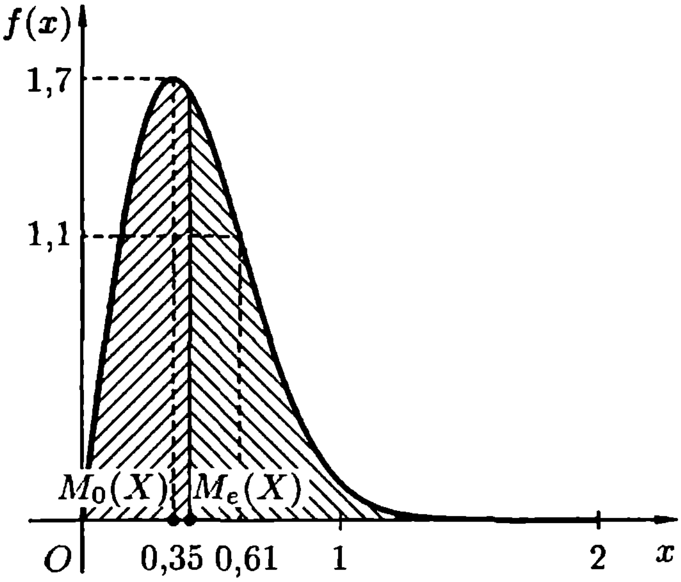


Рис. 88

6.10.23. Плотность распределения с. в. X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & x \in [0;2], \\ 0, & x \notin [0;2]. \end{cases}$$

Найти моду, медиану, математическое ожидание и квантиль порядка 0,25.

Дополнительные задания

6.10.24. Найти закон распределения дискретной с. в. X, зная, что: она принимает два значения x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) и, кроме того, $P(x_1) = 0{,}4$; $M(X) = 2{,}6$; $D(X) = 8{,}64$.

6.10.25. Используя условие задачи 6.8.3, найти математическое ожидание и дисперсию с. в. Z.

6.10.26. Используя условие задачи 6.8.5, найти среднее значение числа опусканий монет в автомат.

6.10.27. Используя условие задачи 6.8.9, найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$, где X — число перворазрядников среди двух выбранных наугад спортсменов.

6.10.28. Используя условие задачи 6.8.10, найти:

а) $M(X)$ и $M(X^2)$ для функции из условия задачи 6.8.10 *а*;

б) $D(X)$ и $\sigma(X)$ для функции из условия задачи 6.8.10 *б*.

6.10.29. Используя условие задачи 6.8.11, найти $M(X)$, $M(X^2)$, $D(X)$, $D(X^2)$.

6.10.30. Используя условие задачи 6.8.16, найти $M(X)$ и $M(Y)$.

6.10.31. Используя условие задачи 6.8.17, найти $M(Z)$, $M(W)$, $D(X)$, $D(W)$.

6.10.32. Производится два независимых выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна. Найти дисперсию с. в. X — числа попаданий, если $M(X) = 1{,}6$.

6.10.33. Человек находится в начале прямоугольной системы координат. Он подбрасывает монету. При появлении герба делает шаг направо, при появлении решки — шаг налево (длина шага равна одной единице масштаба). Пусть X — абсцисса положения человека после трех бросаний. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

6.10.34. Используя условие задачи 6.10.13, найти асимметрию и эксцесс с. в. X.

6.10.35. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10-2x}{9}, & \text{при } 2 \leqslant x \leqslant 5, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Вычислить: $M(X)$, начальные моменты второго и третьего порядка, $D(X)$.

6.10.36. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma+1}, & x \in [-1; 2], \\ 0, & x \notin [-1; 2]. \end{cases}$$

Найти: параметр γ, $M(X)$ и $D(X)$.

6.10.37. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \cdot \sin^2 x, & x \in [0; \pi], \\ 0, & x \notin [0; \pi]. \end{cases}$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

6.10.38. Используя условие задачи 6.9.6, найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

6.10.39. Используя условие задачи 6.9.11, найти:
а) $M(X)$; **б)** $D(X)$;
в) $\sigma(X)$.

6.10.40. Используя условие задачи 6.9.14, найти:
а) $M(X)$; **б)** $D(X)$;
в) моду с. в. X.

6.10.41. Используя условие задачи 6.9.20, найти:
а) $M(X)$; **б)** $D(X)$;
в) $\sigma(X)$.

6.10.42. Используя условие задачи 6.9.27, найти:
а) $M(X)$; **б)** $M_0(X)$;
в) $M_e(X)$;
г) $x_{0,5}$ (квантиль порядка $p = 0{,}5$).

6.10.43. Используя условие задачи 6.9.30, найти математическое ожидание и моду с. в. X.

6.10.44. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1, & \text{при } x \in [0;10], \\ 0, & \text{при } x \notin [0;10]. \end{cases}$$

Найти: $M(X)$, $D(X)$, $M_e(X)$, квантиль порядка $p = 0{,}25$, $p = 0{,}50$ и $p = 0{,}75$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

6.10.45. Используя условие задачи 6.8.22, найти среднее число попыток открыть дверь.

6.10.46. Используя условие задачи 6.8.24, найти математическое ожидание, дисперсию, моду и коэффициент асимметрии случайной величины X — числа дефектных изделий в выборке.

6.10.47. Используя условие задачи 6.8.29, найти математическое ожидание, дисперсию, центральный момент четвертого порядка, коэффициент эксцесса случайной величины Z.

6.10.48. Используя условие задачи 6.8.32, найти математическое ожидание числа проведенных испытаний.

6.10.49. Случайная величина X принимает значение m с вероятностью $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n;\ p + q = 1)$. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

6.10.50. X и Y — независимые случайные величины. Доказать, что $D(XY) = D(X) \cdot D(Y) + (M(Y))^2 \cdot D(X) + (M(X))^2 \cdot D(Y)$.

6.10.51. Доказать, что $m \leqslant M(X) \leqslant M$, где X — дискретная случайная величина, m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения с. в. X.

6.10.52. Показать, что дисперсия числа успехов при однократном проведении испытания не превосходит 0,25.

6.10.53. Выразить центральные моменты второго, третьего и четвертого порядков через начальные моменты.

6.10.54. Непрерывная с. в. X имеет плотность распределения вероятностей вида

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x-a|}{\sigma}}, \quad \text{где} \quad \sigma > 0,\ a \in \mathbb{R}.$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

6.10.55. Плотность распределения вероятностей с. в. X задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Найти A, $M(X)$ и $D(X)$.

6.10.56. Используя условие задачи 6.9.28, найти математическое ожидание, начальные и центральные моменты первого и второго порядков с. в. X.

6.10.57. Задана плотность распределения с. в. X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0{,}1, & 0 \leqslant x < A, \\ 0{,}2, & A \leqslant x < 2A, \\ 0, & 2A \leqslant x. \end{cases}$$

Найти A, $M(X)$ и $D(X)$.

6.10.58. Что можно сказать о математическом ожидании с. в. X, заданной плотностью распределения

$$f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}, \quad x \in \mathbb{R}?$$

§ 11. ВАЖНЕЙШИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Важнейшие дискретные распределения

$\Rrightarrow$ **1.** Дискретная случайная величина имеет *биномиальное распределение* (или распределена по биномиальному закону), если она принимает значения: $0, 1, 2, \ldots, n$ с соответствующими вероятностями:

$$p_m = P\{X = m\} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \quad \text{где} \quad 0 < p < 1,\ q = 1 - p,\ m = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

$\Lleftarrow$

Математическое ожидание и дисперсия с. в. X, имеющей биномиальное распределение, находятся по формулам:

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

Из формулы Бернулли следует, что с. в. X — число появлений события A в серии из n независимых испытаний ($P(A) = p$) — распределена по биномиальному закону.

$\Rrightarrow$ **2.** Дискретная случайная величина имеет *распределение Пуассона* (или распределена по закону Пуассона), если она принимает счетное число значений: $0, 1, 2, \ldots, m \ldots$, с соответствующими вероятностями

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}, \quad \text{где} \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \quad a = np. \qquad \Lleftarrow$$

Математическое ожидание и дисперсия с. в. X, имеющей распределение Пуассона, находятся по формулам:

$$M(X) = a, \quad D(X) = a.$$

Распределение Пуассона является предельным для биномиального, если число опытов n устремляется к бесконечности, а вероятность события p стремится к нулю, причем их произведение $np = a$ остается постоянным. При этих условиях (т. е. $n \to \infty$, $p \to 0$, $np = a = \text{const}$) вероятность $P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $q = 1 - p$, находимая по формуле Бернулли, стремится к вероятности

$\frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$, находимой по закону Пуассона. Поэтому распределение Пуассона приближенно заменяет биномиальное распределение в случае, когда число опытов велико, а вероятность события A в каждом из них мала. С этим связано еще одно название распределение Пуассона — *закон редких событий.*

$\Rrightarrow$ **3.** Дискретная случайная величина имеет *геометрическое распределение*, если она принимает счетное число значений: $1, 2, \ldots, m, \ldots$ с соответствующими вероятностями:

$$p_m = P\{X = m\} = q^{m-1} \cdot p, \quad \text{где} \quad m = 1, 2, \ldots, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p. \quad \Lleftarrow$$

Для с. в. X, имеющей геометрическое распределение

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Случайную величину, распределенную по геометрическому закону, можно интерпретировать как число m опытов (испытаний), проведенных по схеме Бернулли до первого положительного исхода.

Важнейшие непрерывные распределения

$\Rrightarrow$ **4.** Непрерывная случайная величина X имеет *равномерное распределение на отрезке* $[a; b]$, если ее плотность вероятности $f(x)$ постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при} \quad x \in [a, b], \\ 0, & \text{при} \quad x \notin [a, b]. \end{cases} \quad \Lleftarrow$$

Тот факт, что с. в. X распределена равномерно, записывают коротко так:

$$X \sim R[a, b].$$

К случайным величинам, имеющим равномерное распределение, относятся те с. в., о которых известно, что все их значения лежат внутри некоторого промежутка $[a, b]$ и при этом одинаково возможны. Например, время ожидания транспорта, ошибка, получающаяся от округления результата измерения до ближайшего целого числа, и т. д.

Функция распределения $F(x)$ для равномерно распределенной с. в. X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{при} \quad a < x \leqslant b, \\ 1, & \text{при} \quad b < x. \end{cases}$$

Числовые характеристики равномерного распределения:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

⇛ **5.** Непрерывная случайная величина X имеет *показательное* (или *экспоненциальное*) распределение, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0, & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ — параметр данного распределения. ⇚

Функция распределения с. в. X, распределенной по показательному закону, находится по формуле

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x}, & \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ 0, & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Важнейшие числовые характеристики этого распределения определяются равенствами:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

⇛ **6.** Непрерывная случайная величина X имеет *нормальное распределение* (говорят также, что она распределена по нормальному закону или по закону Гаусса), если ее плотность имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

График функции $f(x)$ называется *кривой Гаусса* (рис. 89). ⇚

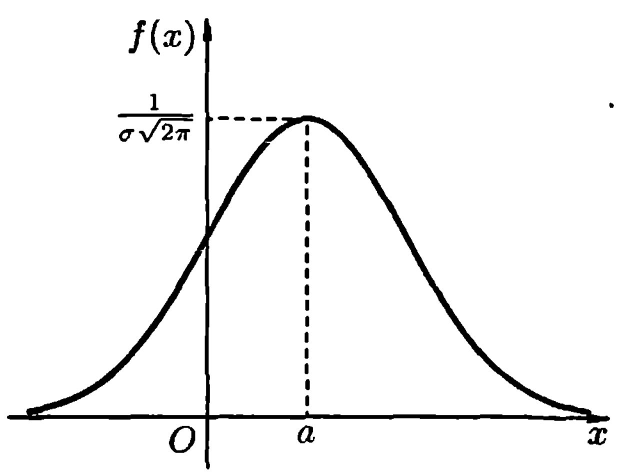


Рис. 89

Тот факт, что с. в. X распределена по нормальному закону, записывают коротко, так: $X \sim N(a, \sigma)$.

Параметры a и σ представляют собой соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение с. в. X, т. е.

$$a = M(X), \quad \sigma = \sigma(X).$$

Отсюда $D(X) = \sigma^2$.

Если $a = 0$ и $\sigma = 1$, т. е. с. в. $X \sim N(0,1)$, то соответствующее нормальное распределение называется *стандартным*. Функция распределения для такой случайной величины имеет вид

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

и обладает (помимо обычных свойств функции распределения) свойством

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В более общем случае ($X \sim N(a, \sigma)$) функция распределения нормального закона выражается формулой

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\, dt = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = 0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где функция

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

— называется *функцией Лапласа* (иногда функцией Лапласа называют функцию

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} dt).$$

Функция Лапласа обладает следующими свойствами:
1) $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$, т. е. функция $\Phi_0(x)$ — нечетная. Отсюда, в частности, следует, что $\Phi_0(0) = 0$;
2) $\Phi_0(+\infty) = 0{,}5$.

Таблицу значений функции Лапласа можно найти в приложении 2.

Связь функции $\Phi(x)$ с функцией Лапласа $\Phi_0(x)$ выражается формулой

$$\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x).$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал (α, β) определяется формулой

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Вероятность попадания с. в. $X \sim N(a, \sigma)$ в интервал $(a - \varepsilon,\, a + \varepsilon)$, симметричный относительно центра рассеяния a, находится по формуле

$$P\{a - \varepsilon < X < a + \varepsilon\} = P\{|X - a| < \varepsilon\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1.$$

В частности, $P\{|X - a| < 3\sigma\} \approx 0{,}9973$, т. е. практически достоверно, что с. в. $X \sim N(a, \sigma)$ принимает свои значения в промежутке $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$. Это утверждение называется «правилом трех сигм».

6.11.1. 20% изделий, выпускаемых данным предприятием, нуждаются в дополнительной регулировке. Наудачу отобрано 150 изделий. Найти среднее значение и дисперсию случайной величины X — числа изделий в выборке, нуждающихся в регулировке.

❍ В данном случае мы имеем дело со схемой испытаний Бернулли, поэтому с. в. X имеет биномиальное распределение. Используя формулы $M(X) = np$ и $D(X) = npq$, находим (при $n = 150$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$)

$$M(X) = 150 \cdot 0{,}2 = 30, \quad D(X) = 150 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 24. \quad \bullet$$

6.11.2. Найти среднее число лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, а вероятность выигрыша одного билета равна 0,1. Найти дисперсию числа успехов в данном опыте.

6.11.3. Проводятся 3 независимых испытания, в каждом из которых вероятность наступления некоторого события постоянна и равна p. Пусть X — число появлений события A в этом опыте. Найти $D(X)$, если известно, что $M(X) = 2{,}1$.

6.11.4. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Сколько надо произвести выстрелов, чтобы можно было ожидать в среднем 80 попаданий в цель?

6.11.5. Проверяется партия из 10 000 изделий. Вероятность того, что изделие окажется бракованным, равна 0,002. Найти математическое ожидание и дисперсию числа бракованных изделий в этой партии. Найти вероятность того, что в партии есть хотя бы одно бракованное изделие.

❍ Число опытов ($n = 10\,000$) достаточно велико, а вероятность ($p = 0{,}002$) «успеха» в каждом из них мала, поэтому можно считать, что случайная величина X — число бракованных изделий — распределена по закону Пуассона: ее возможные значения $0, 1, 2, \ldots, 10\,000$, а соответствующие вероятности вычисляются по формуле

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{a^m e^{-a}}{m!}.$$

По формуле $a = np$ определяем параметр a и математическое ожидание с. в. X:

$$M(X) = a = 10000 \cdot 0{,}002 = 20.$$

Дисперсия числа бракованных изделий равна

$$D(X) = npq = 10000 \cdot 0{,}002 \cdot 0{,}998 = 19{,}96,$$

т. е. $M(X) \approx D(X)$. Полагая $M(X) = D(X) = 20$, находим приближенно искомую вероятность события $A = \{$в партии содержится хотя бы одно бракованное изделие$\}$:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P_{10000}(0) = 1 - \frac{20^0 \cdot e^{-20}}{0!} = \\ = 1 - e^{-20} = 1 - 2{,}06 \cdot 10^{-9} \approx 1. \quad \bullet$$

6.11.6. Дискретная случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $a = 0{,}324$. Найти математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

6.11.7. В магазин отправлены 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,002. Найти:

а) среднее число разбитых бутылок;

б) вероятность того, что магазин получит более двух разбитых бутылок.

6.11.8. Сообщение содержит 1000 символов. Вероятность искажения одного символа равна 0,004. Найти среднее число искаженных символов; найти вероятность того, что будет искажено не более 3-х символов.

6.11.9. Производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X — числа произведенных выстрелов, считая, что:

а) стрелять можно неограниченное число раз;

в) в наличии есть всего 5 патронов.

а) Случайная величина X имеет геометрическое распределение, ее ряд распределения имеет вид

x_i	1	2	3	...
p_i	p	qp	q^2p	...

Числовые характеристики этого распределения: $M(X) = \frac{1}{p}$, $D(X) = \frac{q}{p^2}$. Следовательно, зная, что $p = 0{,}2$ и $q = 0{,}8$, имеем:

$$M(X) = \frac{1}{0{,}2} = 5; \quad D(X) = \frac{0{,}8}{0{,}04} = 20.$$

б) Ряд распределения с. в. X имеет вид

x_i	1	2	3	4	5
p_i	p	qp	q^2p	q^3p	q^4

Поэтому, $M(X) = 1 \cdot p + 2 \cdot qp + 3 \cdot q^2p + 4 \cdot q^3p + 5q^4$; при $p = 0{,}2$ и $q = 0{,}8$ имеем $M(X) = 0{,}2 + 0{,}32 + 0{,}384 + 0{,}4096 + 2{,}048 = 3{,}3616$, т. е. $M(X) = 3{,}3616$; Далее

$D(X) = M(X)^2 - (M(X))^2 = 1 \cdot p + 4 \cdot qp + 9 \cdot q^2p + 16 \cdot q^3p + 25q^4 - (M(X))^2$;

при $p = 0{,}2$ и $q = 0{,}8$ получим

$D(X) = 0{,}2 + 0{,}64 + 1{,}152 + 1{,}6384 + 10{,}24 - (3{,}3616)^2 \approx 13{,}8704 - 11{,}3 = 2{,}57$,

т. е. $D(X) = 2{,}57$. ●

6.11.10. Игрок покупает лотерейные билеты до первого выигрыша. Вероятность выигрыша по одному билету равна 0,1. Найти $M(X)$, где с. в. X — число купленных билетов, если игрок может купить:

а) только четыре билета;

б) неограниченное (пусть теоретически) число билетов.

6.11.11. Вероятность производства нестандартной детали равна 0,05. Контролер проверяет партию деталей, беря по одной до первого появления нестандартной детали, но не более 3 штук. Найти математическое ожидание и дисперсию числа проверенных стандартных деталей.

6.11.12. Игральная кость подбрасывается до первого появления пяти очков. Какова вероятность того, что первое выпадение пятерки произойдет при пятом подбрасывании игральной кости?

6.11.13. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[a, b]$, т. е. $X \sim R[a, b]$. Найти вероятность попадания с. в. X на отрезок $[\alpha, \beta]$, целиком содержащийся внутри отрезка $[a, b]$.

❍ Воспользуемся известной формулой

$$P\{\alpha \leqslant X \leqslant \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx,$$

где плотность вероятности с. в. $X \sim R[a, b]$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Следовательно,

$$P\{\alpha \leqslant X \leqslant \beta\} = P\{X \in [\alpha, \beta]\} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot x\Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta-\alpha}{b-a},$$

т. е. окончательно $P\{X \in [\alpha, \beta]\} = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$. ●

6.11.14. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}25 \cdot A, & x \in [0, 4], \\ 0, & x \notin [0, 4]. \end{cases}$$

Найти A, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P\{X \in [0; 1{,}1]\}$.

❍ Коэффициент A найдем, используя следующее свойство плотности вероятности

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Имеем
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{4} 0{,}25A\,dx + \int\limits_{4}^{\infty} 0\,dx = 1,$$
т. е. $0{,}25Ax\big|_0^4 = 1$. Отсюда следует, что $A = 1$. Итак,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [0,4], \\ 0, & x \notin [0,4], \end{cases}$$
и, значит, случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,4]$,

Функция распределения для с. в. $X \sim R[0,4]$ имеет вид
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leqslant 4, \\ 1, & 4 < x. \end{cases}$$

Числовые характеристики этого распределения таковы:
$$M(X) = \left[\frac{a+b}{2}\right] = \frac{0+4}{2} = 2,$$
$$D(X) = \left[\frac{(b-a)^2}{12}\right] = \frac{4^2}{12} = \frac{4}{3},$$
$$\sigma(X) = \left[\sqrt{D(X)}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Вероятность попадания с. в. X в промежуток $[0;1{,}1]$ находим, используя формулу $P\{X \in [\alpha,\beta]\} = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$ (см. задачу 6.11.13). Отсюда $P\{X \in [0;1{,}1]\} = \dfrac{1{,}1-0}{4-0} = \dfrac{1{,}1}{4} = 0{,}275.$ ●

6.11.15. Некто ожидает телефонный звонок между 19.00 и 20.00. Время ожидания звонка есть непрерывная с. в. X, имеющая равномерное распределение на отрезке $[19,20]$. Найти вероятность того, что звонок поступит в промежутке от 19 час 22 минут до 19 час 46 минут.

6.11.16. Случайная величина X, распределенная равномерно, имеет следующие числовые характеристики $M(X) = 2$, $D(X) = 3$. Найти $F(x)$.

6.11.17. Про с. в. X известно, что $X \sim R[4,7]$. Найти:
а) $f(x)$; б) $M(X)$ и $\sigma(X)$;
в) $P\{X \in (6;6{,}81)\}$.

6.11.18. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид, указанный на рис. 90. Найти аналитические выражения для $F(x)$, $f(x)$, $M(X)$ и $D(X)$.

6.11.19. Непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение. Найти вероятность попадания с. в. X в интервал (a,b), где $a \geqslant 0$.

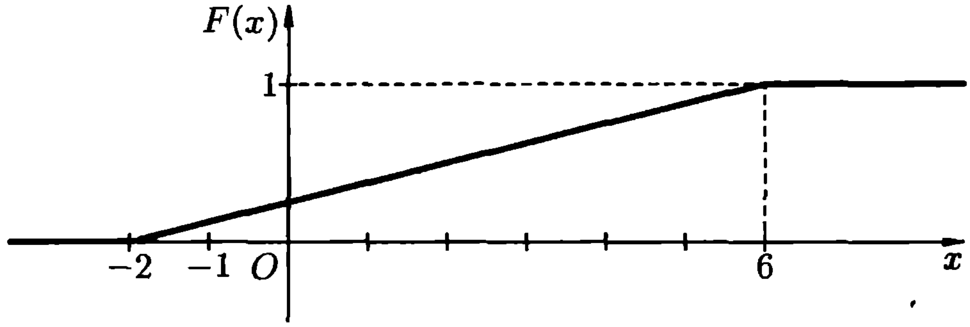


Рис. 90

◑ Воспользовавшись формулой

$$P\{\alpha \leqslant X \leqslant \beta\} = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx,$$

находим:

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_a^b = -e^{-\lambda b} + e^{-\lambda a},$$

т. е. $P\{X \in (a,b)\} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Этот же результат можно получить, используя формулу

$$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a).$$

Так как $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$, то

$$P\{a < X < b\} = (1 - e^{-\lambda b}) - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$ ●

6.11.20. Время T выхода из строя радиостанции подчинено показательному закону распределения с плотностью

$$F_T(t) = \begin{cases} 0{,}2 \cdot e^{-0{,}2t}, & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ 0, & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Найти: функцию распределения $F_T(t)$; математическое ожидание и дисперсию случайной величины T; вероятность того, что радиостанция сохранит работоспособность от 1 до 5 час. работы.

6.11.21. С. в. X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 0{,}4$. Найти дифференциальную и интегральную функции распределения (т. е. $f(x)$ и $F(x)$), $\sigma(X)$, а также вероятность попадания значений с. в. X в интервал $(0{,}25; 5)$.

6.11.22. С. в. X, которая равна длительности работы элемента, имеет плотность распределения $f(t) = 0{,}003e^{-0{,}003t}$, $t \geqslant 0$. Найти: среднее время работы элемента; вероятность того, что элемент проработает не менее 400 часов.

6.11.23. Средняя продолжительность телефонного разговора равна 3 мин. Найти вероятность того, что произвольный телефонный разговор будет продолжаться не более 9 минут, считая, что время разговора является с. в. X, распределенной по показательному закону.

6.11.24. Определить закон распределения случайной величины X, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = A \cdot e^{-x^2+2x+1}.$$

Найти:

а) $M(X)$; б) $\sigma(X)$;

в) значение коэффициента A; г) $M(X^2)$;

д) $P\{1 < X < 3\}$.

○ Сравнив данную функцию

$$f(x) = A \cdot e^{-x^2+2x+1} = A \cdot e^{-(x-1)^2+2} = A \cdot e^2 \cdot e^{-(x-1)^2} = A \cdot e^2 \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

нормального распределения, заключаем, что с. в. X имеет нормальное распределение.

а) Очевидно, $M(X) = 1$.

б) $\sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

в) Значение коэффициента A найдем из равенства $A \cdot e^2 = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$, где $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$. Отсюда

$$A = \frac{1}{e^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{1}{e^2 \cdot \sqrt{\pi}}.$$

Следовательно, плотность вероятности с. в. X имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{e^2 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot e^2 \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}},$$

т. е.

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}.$$

Ясно, что $X \sim N\left(1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

г) $M(X^2)$ найдем, используя формулу $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$. В нашем случае $M(X) = 1$, $D(X) = (\sigma(X))^2 = \frac{1}{2}$. Поэтому

$$M(X^2) = D(X) + (M(X))^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

д) Используя формулу

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

находим, что

$$P\{1 < X < 3\} = \Phi_0\left(\frac{3-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) - \Phi_0\left(\frac{1-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) =$$

$$= \Phi_0(2{,}82) - \Phi(0) = 0{,}4976 - 0 = 0{,}4976.$$

Значение $\Phi_0(2{,}82)$ найдено по таблице значений функции

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

(см. приложение 2 в конце книги). ●

6.11.25. Случайные ошибки измерения детали подчинены нормальному закону с параметром $\sigma = 20$ мм. Найти вероятность того, что измерение детали произведено с ошибкой, не превосходящей по модулю 25 мм.

○ Воспользуемся формулой $P\{|X - a| < \varepsilon\} = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$. В нашем случае $\sigma = 20$, $\varepsilon = 25$, поэтому

$$P\{|X - a| < 25\} = 2\Phi_0\left(\frac{25}{20}\right) = 2\Phi_0(1{,}25) = 2 \cdot 0{,}3944 = 0{,}7888.$$ ●

6.11.26. Пусть $X \sim N(5; 0{,}5)$. Найти вероятность того, что при трех независимых испытаниях с. в. X хотя бы в одном из них X примет значение в интервале $(2; 4)$.

6.11.27. Плотность вероятностей с. в. X имеет вид

$$f(x) = c \cdot e^{-2x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}}.$$

Найти: c, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P\left\{-\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right\}$.

6.11.28. Известно, что $X \sim N(50, \sigma)$, $P\{X \in (40; 60)\} = 0{,}7888$. Найти $D(X)$.

6.11.29. Рост взрослых мужчин является случайной величиной X, распределенной по нормальному закону: $X \sim N(175; 10)$. Найти: плотность вероятности, функцию распределения этой случайной величины; вероятность того, что ни один из 3 наудачу выбранных мужчин не будет иметь рост менее 180 см.

Дополнительные задания

6.11.30. Контрольная работа по теории вероятности состоит из 6 задач. Вероятность решить правильно каждую задачу для данного студента равна 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию с. в. X — числа правильно решенных задач.

6.11.31. Стрельба по мишени ведется до второго попадания. Найти $M(X)$, где с. в. X — число попаданий, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,25.

6.11.32. Известно, что: среднее число попаданий в мишень в серии из n выстрелов равно 192; вероятность попадания при каждом выстреле равна p; $\sigma(X) = 8$, где с. в. X — число попаданий. Найти n и p.

6.11.33. В боевой операции участвуют 30 самолетов. Вероятность гибели самолета в результате обстрела противником равна $\frac{1}{15}$. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$, где с. в. X — число сбитых самолетов.

6.11.34. Успеваемость студентов I курса составляет 80%. Найти математическое ожидание и дисперсию числа успевающих студентов среди 50 наудачу отобранных первокурсников.

6.11.35. Используя условие задачи 6.6.4, найти $M(X)$ и $\sigma(X)$, где с. в. X — число попаданий в мишень.

6.11.36. Используя условие задачи 6.6.12, найти среднее число приемов радиосигнала.

6.11.37. Используя условие задачи 6.7.19, найти $M(X)$ и $\sigma(X)$, где с. в. X — число электроэлементов, вышедших из строя.

6.11.38. Используя условие задачи 6.7.21, найти среднее число семян, которые не прорастут.

6.11.39. Используя условие задачи 6.7.23, найти:

а) $M(X)$ и $D(X)$, где с. в. X — число книг сброшюрованных неправильно;

б) вероятность того, что тираж содержит 10 бракованных книг.

6.11.40. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в минуту, равно 180. Какова вероятность события:

а) $A = \{$за 2 секунды на АТС не поступит ни одного вызова$\}$;

б) $B = \{$за 2 секунды на АТС поступит менее 2-х вызовов$\}$?

6.11.41. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что первое попадание в цель произойдет при четвертом выстреле?

6.11.42. Производятся последовательные независимые испытания пяти приборов на надежность. Надежность каждого из приборов равна 0,8. Каждый следующий прибор испытывается лишь в случае, когда предыдущий оказался надежным. Составить закон распределения д. с. в. X — числа испытанных приборов. Найти $M(X)$.

6.11.43. Студент знает 30 из 40 вопросов. Экзаменатор задает вопросы студенту до тех пор, пока обнаружит незнание вопроса. Найти вероятность того, что число заданных вопросов больше двух.

6.11.44. Производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,1. Найти:

а) $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$, где с. в. X — число сделанных выстрелов;

б) вероятность того, что потребуется сделать не более трех выстрелов.

6.11.45. Автобусы данного маршрута идут с интервалом 30 мин. Пассажир подходит к автобусной остановке в произвольный момент времени. Время ожидания автобуса есть непрерывная случайная величина X, имеющая равномерное распределение. Найти: плотность вероятности; функцию распределения; математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины; вероятность появления пассажира не ранее чем через 17 минут после ухода предыдущего автобуса, но не позднее чем за одну минуту до отхода следующего автобуса.

6.11.46. Найти математическое ожидание и дисперсию произведения двух независимых непрерывных случайных величин X и Y с равномерными законами распределения:

$$X \sim R[0;1], \quad Y \sim R[1;3].$$

6.11.47. Известно, что непрерывная случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}375, & x \in \left(a - \frac{4}{3}; a + \frac{4}{3}\right), \\ 0, & x \notin \left(a - \frac{4}{3}; a + \frac{4}{3}\right). \end{cases}$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

6.11.48. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,1. Показания прибора округляют до ближайшего деления. Полагая, что ошибка округления распределена по равномерному закону в промежутке от 0 до 0,1, найти:

а) вероятность того, что ошибка округления более 0,03;

б) вероятность того, что ошибка округления меньше 0,02;

в) среднее значение ошибки.

6.11.49. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, а именно,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-4x}, & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Найти:

а) значение параметра λ; б) $M(X)$ и $D(X)$.

Построить график функции распределения $F(x)$. Найти вероятность того, что с. в. X примет значение, меньшее, чем $M(X)$.

6.11.50. Найти математическое ожидание с. в. X, распределенной по показательному закону, если ее функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-5x}, & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Найти $P\{|X - M(X)| < 3\sigma(X)\}$.

6.11.51. 90% лампочек перегорают после 800 часов работы. Найти вероятность того, что лампочка перегорит в промежутке от 100 до 200 часов работы (с. в. T — время безотказной работы лампочки).

6.11.52. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение со средним значением для 1-го элемента 20 часов, 2-го — 25 часов. Найти вероятность того, что за промежуток времени длительностью 10 часов:

а) оба элемента будут работать;

б) откажет только один элемент;

в) хотя бы один элемент откажет.

6.11.53. Известно, что время ремонта телевизоров есть с. в. T, распределенная по показательному закону; при этом среднее время ремонта телевизора составляет две недели. Найти:

а) $D(T)$ и $\sigma(T)$;

б) вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется менее десяти дней.

6.11.54. Известно, что $X \sim N(a, \sigma)$, а максимальное значение плотности вероятности равно $\dfrac{1}{3 \cdot \sqrt{7\pi}}$. Найти $D(X)$.

6.11.55. X — нормально распределенная с. в., причем $M(X) = 6{,}2$ и $\sigma(X) = 4{,}4$. Найти $P\{|X - M(X)| < 5{,}7\}$.

6.11.56. Ошибка измерения подчинена нормальному закону с параметрами $a = 50$ дм и $\sigma = 10$ дм. Найти вероятность того, что измеренное значение будет отклоняться от истинного не более чем на 20 дм.

6.11.57. Установлено, что с. в. $X \sim N(a, \sigma)$,

$$P\{X > 20\} = 0{,}02, \quad P\{X < 10\} = 0{,}31.$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

6.11.58. Срок безотказной работы телевизора представляет собой с. в. $X \sim N(12; 3)$. Найти вероятность того, что телевизор проработает

а) не менее 15 лет; **б)** от 6 до 9 лет;

в) от 9 до 15 лет.

6.11.59. Отклонение размера детали от стандарта представляет собой с. в. X, распределенную нормально, с математическим ожиданием $M(X) = 4$ и со среднеквадратическим отклонением

$\sigma = 0{,}2$. Найти процент деталей, отклоняющихся от $M(X)$ по модулю не более чем на 0,05.

6.11.60. Деталь изготавливается на станке с систематической ошибкой 3, среднеквадратической ошибкой 4 и считается годной, если ее отклонение от номинала менее 12. Найти вероятность того, что три наудачу взятые детали из пяти будут годными.

Контрольные вопросы и более сложные задания

6.11.61. Случайная величина X распределена по биномиальному закону. Найти:

а) начальные моменты до 4-го порядка включительно;

б) центральные моменты до 4-го порядка включительно;

в) асимметрию $(A = \frac{\mu_3}{\sigma^3})$ и эксцесс $(E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3)$ случайной величины X.

6.11.62. Найти математическое ожидание и дисперсию относительной частоты $\frac{n_A}{n}$ в n независимых испытаниях, в каждом из которых событие A может наступить с вероятностью p.

6.11.63. Доказать рекуррентную формулу для биномиальных вероятностей

$$P_n(m+1) = \frac{p}{q} \cdot \frac{n-m}{m+1} \cdot P_n(m).$$

6.11.64. Доказать, что сумма двух независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона с параметрами a_1 и a_2, также распределена по закону Пуассона с параметром

$$a = a_1 + a_2.$$

6.11.65. Какая из величин в законе Пуассона больше: математическое ожидание, число независимых испытаний или дисперсия?

6.11.66. Вероятность брака партии деталей равна 0,2. Сколько в среднем нужно проверить деталей до первого обнаружения брака?

6.11.67. Доказать, что вероятности p_i отдельных значений д. с. в. X, имеющей геометрическое распределение, удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

6.11.68. Известно, что непрерывная случайная величина $X \sim R[a, b]$. Найти четвертый центральный момент и эксцесс этой случайной величины.

6.11.69. С. в. X имеет показательное распределение. Найти:

а) центральные моменты третьего и четвертого порядков;

б) асимметрию и эксцесс.

6.11.70. Доказать, что функция

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$, является функцией распределения некоторой случайной величины X. Построить ее график при $\lambda = 2$.

6.11.71. Во сколько раз уменьшится максимальное значение ординаты кривой Гаусса, если дисперсия случайной величины увеличить в 16 раз?

6.11.72. Вычислить центральные моменты второго, третьего и четвертого порядков случайной величины, распределенной по нормальному закону.

6.11.73. Чему равны мода и медиана с. в. $X \sim N(a, \sigma)$?

6.11.74. Найти функцию распределения $F(x)$ с. в. $X \sim N(a, \sigma)$. Учесть, что:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

6.11.75. Известно, что: с. в. $X \sim N(1; \sigma)$, $P\{X < 2\} = 0{,}99$. Найти: а) σ; б) $M(X^2)$.

6.11.76. Случайная величина X распределена по закону $N(a, \sigma)$. Найти $P\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\}$, где x_1 и x_2 — абсциссы точек перегиба соответствующей кривой Гаусса.

6.11.77. В нормально распределенной совокупности 15% значений X меньше 12 и 40% значений X больше 16,2. Найти среднее значение и среднеквадратичное отклонение для данного распределения.

6.11.78. Случайная величина X распределена нормально, ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x+2)^2}{8}}.$$

Найти математическое ожидание с. в. $Y = 3X - 1$, зная, что $Y \sim N(a, \sigma)$.

§ 12. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Функция распределения системы случайных величин

Во многих практических задачах результат опыта описывается не одной, а двумя (или более) случайными величинами X и Y. В этом случае говорят о *системе двух случайных величин* (X, Y) (или *двумерной случайной величине* (X, Y)).

Геометрически систему двух случайных величин (X, Y) можно интерпретировать как случайную точку на плоскости.

На двумерные случайные величины практически без изменений переносятся основные понятия для одномерных случайных величин, в частности закон распределения, функция распределения, плотность распределения и т. д.

Закон распределения системы (X, Y) двух дискретных случайных величин в случае конечного числа значений можно задать формулой

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, \; i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m$$

или с помощью таблицы с двойным входом:

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

где $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Важнейшей из исчерпывающих характеристик (законов распределения) системы случайных величин является функция распределения.

⇛ *Функцией распределения* (иначе: интегральной функцией) системы с. в. (X, Y) называется функция $F(x, y)$, которая для любых действительных чисел x и y равна вероятности совместного выполнения двух событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$, т. е. $F(x,y) = P\{X < x,\ Y < y\}$ (событие $\{X < x,\ Y < y\}$ означает произведение событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$). ⇚

Геометрически каждое значение функции $F(x, y)$ означает вероятность попадания случайной точки (X, Y) в заштрихованной прямой угол $R_{x,y}$ (квадрант) с вершиной в точке (x, y) (рис. 91).

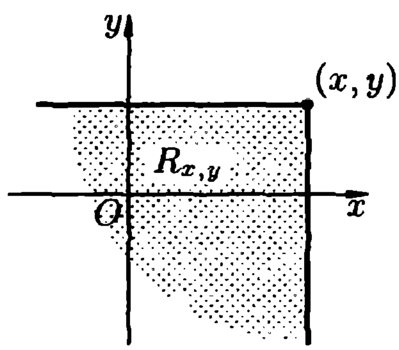


Рис. 91

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник D со сторонами, параллельными координатным осям, находится по формуле:

$$P\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant Y \leqslant y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$

Свойства двумерной функции распределения

1. $0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1$;

2. $F(x, y)$ — не убывает по каждому из своих аргументов (при фиксированном другом аргументе):

$$F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y) \text{ при } x_2 > x_1;$$
$$F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1) \text{ при } y_2 > y_1.$$

3. $F(x, y)$ непрерывна слева по каждому из своих аргументов;

4. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$, где, например, $F(x, -\infty)$ означает $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x, y)$;

5. $F(+\infty, +\infty) = 1$;

6. $F(x, +\infty) = F_1(x) = F_X(x)$, $F(+\infty, y) = F_2(y) = F_Y(y)$, где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ — функции распределения с. в. X и Y соответственно.

Значение $F(x, y)$ функции распределения в случае системы (X, Y) двух дискретных с. в. находится суммированием всех вероятностей p_{ij} с индексом i, j, для которых $x_i < x$, $y_j < y$, т. е.

$$F(x, y) = \sum_{x_i<x} \sum_{y_j<y} p_{ij}.$$

Плотность распределения системы случайных величин

В случае системы непрерывных случайных величин (X, Y) ее закон распределения удобно задавать с помощью плотности распределения.

$\Rrightarrow$ *Плотностью распределения вероятностей* (или просто *плотностью*) системы (X, Y) двух непрерывных случайных величин называется вторая смешанная производная ее функции распределения, т. е.

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{XY}(x, y).$$ $\Lleftarrow$

Свойства двумерной плотности распределения вероятностей

1. $f(x, y) \geqslant 0$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dxdy = 1$;
3. $P\{(X, Y) \in D\} = \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$, где D — произвольная область;
4. $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u, v)\,dudv$;
5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy = f_1(x) = f_X(x)$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx = f_2(y) = f_Y(y)$.

Независимые случайные величины

$\Rrightarrow$ Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если независимыми являются события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ для любых действительных чисел x и y. В противном случае случайные величины называются *зависимыми*. $\Lleftarrow$

Сразу из определения независимости с. в. X и Y вытекает следующее равенство, которое можно положить в основу равносильного определения:

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

В случае системы двух дискретных случайных величин (X, Y) необходимым и достаточным условием их независимости является равенство

$$P\{X = x_i,\ Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\},$$

выполняющееся для любых $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

Необходимым и достаточным условием независимости двух непрерывных с. в. X и Y, образующих систему (X, Y), является равенство

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Условные законы распределения

⇛ *Условным законом распределения* одной из с. в., входящих в систему (X, Y), называется закон ее распределения, найденный при условии, что другая с. в. приняла определенное значение (или попала в некий интервал). ⇚

В частности, в случае системы двух дискретных случайных величин (X, Y) *условным законом распределения с. в. Y при условии $X = x_i$* называется совокупность вероятностей

$$P\{Y = y_j \mid X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i,\ Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}}, \quad j = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n.$$

Аналогично определяется условный закон распределения дискретной с. в. X при условии $Y = y_j$.

⇛ *Условная плотность непрерывной с. в. Y при условии $X = x$* (обозначение $f(y \mid x)$) определяется равенством

$$f(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}, \text{ где } f_1(x) \neq 0. \qquad ⇚$$

Аналогично,

$$f(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}, \text{ где } f_2(y) \neq 0.$$

Теорема умножения плотностей распределения:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f(y \mid x) = f_2(y) \cdot f(x \mid y).$$

Математическое ожидание и дисперсия системы случайных величин

⇛ *Математическим ожиданием двумерной с. в.* (X, Y) называется совокупность двух м. о. $M(X)$ и $M(Y)$ (т. е. упорядоченная пара $(M(X),\ M(Y))$), определяемых равенствами:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} \quad \text{и} \quad M(Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij},$$

если X и Y — дискретные с. в.;

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x,y)\,dxdy \quad \text{и} \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x,y)\,dxdy,$$

если X и Y — непрерывные с. в. $\Leftarrow$

Математическое ожидание с. в. $\varphi(X,Y)$, являющейся функцией компонент X и Y двумерной с. в. (X,Y), находится аналогично по формулам:

$$M\bigl(\varphi(X,Y)\bigr) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) \cdot f(x,y)\,dxdy \text{ для непрерывного случая;}$$

$$M\bigl(\varphi(X,Y)\bigr) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi(x_i,y_j) \cdot p_{ij} \text{ для дискретного случая.}$$

Дисперсия системы с. в. (X,Y):

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - a_x)^2 p_{ij} \quad \text{и} \quad D(Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (y_j - a_y)^2 p_{ij},$$

если (X,Y) — система дискретных случайных величин ($a_x = M(X), a_y = M(Y)$);

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - a_x)^2 f(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)\,dxdy - a_x^2$$

и

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (y - a_y)^2 f(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)\,dxdy - a_y^2,$$

если (X,Y) — система непрерывных случайных величин.

Пусть (X,Y) — система дискретных случайных величин. *Условное математическое ожидание дискретной с. в. Y при условии $X = x_i$* определяется равенством:

$$M(Y \mid X = x_i) = M(Y \mid x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j \mid x_i),$$

где

$$p(y_j \mid x_i) = p\{Y = y_j \mid X = x_i\}.$$

Аналогично

$$M(X \mid Y = y_j) = M(X \mid y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i \mid y_j).$$

Пусть теперь (X,Y) — система непрерывных случайных величин. В этом случае *условное математическое ожидание с. в. Y при условии $X = x$* определяется равенством:

$$M(Y \mid x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y \mid x)\,dy.$$

Аналогично

$$M(X \mid y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x \mid y)\, dx.$$

Корреляционный момент и коэффициент корреляции

$\Rrightarrow$ Для характеристики связи между величинами X и Y служит *корреляционный момент* K_{XY} (иначе: *ковариация* $\operatorname{cov}(X, Y)$), который для дискретных с. в. вычисляется по формуле

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - a_x) \cdot (y_j - a_y) \cdot p_{ij};$$

а для непрерывных — по формуле

$$K_{XY} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - a_x)(y - a_y) f(x, y)\, dx dy. \qquad \Lleftarrow$$

Корреляционный момент удобно вычислять по формуле

$$K_{XY} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y).$$

Если с. в. X и Y независимы, то $K_{XY} = 0$ ($\operatorname{cov}(X, Y) = 0$). Таким образом, если $K_{XY} \neq 0$, *то с. в. X и Y зависимы;* в этом случае случайные величины называют *коррелированными.* В случае $K_{XY} = 0$, с. в. X и Y называют *некоррелированными.*

$\Rrightarrow$ *Коэффициент корреляции* r_{XY} *двух с. в. X и Y* есть безразмерная величина, определяемая равенством

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где σ_x и σ_y — среднеквадратические отклонения соответственно величин X и Y. $\Lleftarrow$

Коэффициент корреляции характеризует степень линейной зависимости случайных величин X и Y.

Свойства коэффициента корреляции

1. $-1 \leqslant r_{XY} \leqslant 1$;

2. Если X и Y — независимые с. в., то $r_{XY} = 0$;

3. Если с. в. X и Y связаны линейной зависимостью $Y = aX + b$, $a \neq 0$, то $|r_{XY}| = 1$;

4. Если $|r_{XY}| = 1$, то с. в. X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

6.12.1. Задана таблица распределения дискретной двумерной случайной величины

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0,16	0,12	0,08
2	0,28	0,11	0,25

Найти:

а) законы распределения случайных величин X и Y;

б) функцию распределения системы с. в. (X, Y).

○ а) Случайная величина X принимает два значения: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Вероятности этих значений соответственно равны: $p_1 = [p_{11} + p_{12} + p_{13}] = 0{,}16 + 0{,}12 + 0{,}08 = 0{,}36$, $p_2 = 0{,}28 + 0{,}11 + 0{,}25 = 0{,}64$. Следовательно, закон распределения с. в. X (т. е. безусловный закон распределения компоненты X) можно представить в виде

x_i	1	2
p_i	0,36	0,64

Аналогично получаем безусловный закон распределения компоненты Y:

y_i	1	2	3
p_i	0,44	0,23	0,33

б) В соответствии с формулой $F(x,y) = \sum\limits_{x_i<x} \sum\limits_{y_j<y} p_{ij}$ получаем:

если $x \leqslant 1$ и $y \leqslant 1$, то $F(x,y) = P\{X < x,\ Y < y\} = 0$, так как события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ в этом случае являются невозможными.

Аналогично получаем:

если $x \leqslant 1$ и $1 < y$, то $F(x,y) = 0$;

если $1 < x \leqslant 2$ и $y \leqslant 1$, то $F(x,y) = 0$;

если $1 < x \leqslant 2$ и $1 < y \leqslant 2$, то $F(x,y) = P\{X = 1,\ Y = 1\} = 0{,}16$;

если $1 < x \leqslant 2$ и $2 < y \leqslant 3$, то

$$F(x,y) = P\{X = 1,\ Y = 1\} + P\{X = 1,\ Y = 2\} = 0{,}16 + 0{,}12 = 0{,}28;$$

если $1 < x \leqslant 2$ и $3 < y$, то

$$F(x,y) = P\{X = 1,\ Y = 1\} + P\{X = 1,\ Y = 2\} + P\{X = 1,\ Y = 3\} = 0{,}16 + 0{,}12 + 0{,}08 = 0{,}36;$$

если $2 < x$ и $y \leqslant 1$, то $F(x,y) = 0$;

если $2 < x$ и $1 < y \leqslant 2$, то

$$F(x,y) = P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 2,\ Y = 1\} = 0{,}16 + 0{,}28 = 0{,}44;$$

если $2 < x$ и $2 < y \leqslant 3$, то

$$F(x,y) = P\{X = 1,\ Y = 1\} + P\{X = 2,\ Y = 1\} + P\{X = 1,\ Y = 2\} + P\{X = 2,\ Y = 2\} = 0{,}16 + 0{,}28 + 0{,}12 + 0{,}11 = 0{,}67;$$

если $2 < x$ и $3 < y$, то $F(x,y) = 0{,}16 + 0{,}28 + 0{,}12 + 0{,}11 + 0{,}08 + 0{,}25 = 1$.

Таким образом, функция распределения данной системы дискретных случайных величин имеет вид

$F(x,y) =$

при	$y \leqslant 1$	$1 < y \leqslant 2$	$2 < y \leqslant 3$	$3 < y$
$x \leqslant 1$	0	0	0	0
$1 < x \leqslant 2$	0	0,16	0,28	0,36
$2 < x$	0	0,44	0,67	1

●

6.12.2. Закон распределения системы дискретных случайных величин задан таблицей

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	0,10	0,15	0,04	0,06
2	0,12	0,08	0,05	0,04
3	0,03	0,02	0,11	D

Найти:

а) значение числа D;

б) безусловные законы распределения случайных величин X и Y;

в) вероятности событий $\{X = 1,\ Y \geqslant 2\}$ и $\{X = Y\}$.

6.12.3. Двумерная случайная величина (X, Y) задана законом распределения

$X\backslash Y$	0	1
0	0,12	0,18
1	0,28	0,42

Найти:

а) функцию распределения д. с. в. X;

б) функцию распределения двумерной с. в. (X, Y);

в) вероятность события $\{X \leqslant Y\}$.

6.12.4. По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна 0,75. Пусть с. в. X — число попаданий; с. в. Y — число промахов. Составить таблицу совместного распределения вероятностей случайных величин X и Y. Описать функцию распределения $F(x, y)$ системы с.в. (X, Y).

6.12.5. Используя условие задачи 6.12.1, установить, зависимы или нет компоненты X и Y.

○ Условие независимости с. в. X и Y в дискретном случае имеет вид: $P\{X = x_i,\ Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}$ для любых $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, m$. Проверяем: пусть $x_1 = 1$ и $y_1 = 1$. По условию

$$P\{X = 1,\ Y = 1\} = 0{,}16,$$

а $P\{X = 1\} = 0{,}36$, $P\{Y = 1\} = 0{,}44$ (эти вероятности найдены в ходе решения задачи 6.12.1). Поскольку

$$P\{X = 1, Y = 1\} = 0{,}16 \neq 0{,}36 \cdot 0{,}44 = P\{X = 1\} \cdot P\{Y = 1\},$$

то отсюда заключаем: компоненты системы (X, Y) зависимы. ●

6.12.6. Задано распределение двумерной случайной величины (X, Y)

$X\backslash Y$	1	1,5	2
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
2,5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Найти одномерные распределения компонент системы. Установить, зависимы ли компоненты X и Y. Найти $P\{X + Y \leqslant 3{,}5\}$.

6.12.7. Используя условие задачи 6.12.2, установить, зависимы или нет случайные величины X и Y.

6.12.8. Заданы законы распределения двух независимых друг от друга случайных величин X и Y:

x_i	8	9	10
p_i	0,1	0,3	0,6

и

y_i	8	9	10
p_i	0,2	0,3	0,5

Описать функцию распределения $F(x, y)$ и вычислить ее значение в точке $(9{,}2; 8{,}5)$.

6.12.9. Закон распределения системы дискретных случайных величин (X, Y) задан таблицей

$X\backslash Y$	-2	-1	0	1
-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
0	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	0
1	0	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{2}{16}$

Найти:

а) безусловные законы распределения случайных величин X и Y;

б) условный закон распределения с. в. Y при $X = 0$;

в) проверить независимость случайных величин X и Y.

а) Случайная величина X принимает значения $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, вероятности которых находим суммированием вероятностей соответственно в первой, второй и третьей строках таблицы:

$$p_1 = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}, \quad p_2 = \frac{6}{16}, \quad p_3 = \frac{3}{16}.$$

Суммируя вероятности в первом, втором, третьем и четвертом столбцах таблицах, находим вероятности соответствующих значений с. в. Y.

Таким образом, безусловные законы распределения X и Y имеют вид:

x_i	-1	0	1
p_i	$\frac{7}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{3}{16}$

,

y_i	-2	-1	0	1
p_i	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$

б) Вероятности значений с. в. Y при $X = 0$ найдем с помощью формулы

$$P\{Y = y_j \mid X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i,\ Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}}.$$

Так как

$$P\{X = 0\} = \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16},$$

то

$$P\{Y = -2 \mid X = 0\} = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{6}{16}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P\{Y = -1 \mid X = 0\} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{6}{16}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$P\{Y = 0 \mid X = 0\} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{6}{16}} = \frac{1}{6},$$

$$P\{Y = 1 \mid X = 0\} = \frac{0}{\frac{6}{16}} = 0.$$

Таким образом, условный закон распределения с. в. Y при $X = 0$ имеет вид

y_i	-2	-1	0	1
$p_{X=0}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0

в) Так как безусловный и условный законы распределения с. в. Y не совпадают, то случайные величины X и Y зависимы. (В этом можно было бы убедиться и «старым способом»:

$$P\{X = -1,\ Y = -2\} = \frac{1}{16} \neq \frac{7}{16} \cdot \frac{3}{16} = P\{X = -1\} \cdot P\{Y = -2\}.) \quad \bullet$$

6.12.10. Используя условие задачи 6.12.9, найти условный закон распределения:

а) с. в. Y при $X = -1$; **б)** с. в. X при $Y = -2$;

в) с. в. X при $Y = 0$.

6.12.11. Задана система дискретных случайных величин (X, Y):

$X \backslash Y$	10	20	30
50	0,15	0,30	0,15
100	0,10	0,05	0,25

Найти:

а) условный закон распределения с. в. Y при условии, что $X = 100$;

б) условный закон распределения с. в. X при условии, что $Y = 20$.

Являются ли независимыми величины X и Y?

6.12.12. Используя условие задачи 6.12.1, найти:
а) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;
б) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;
в) среднеквадратические отклонения $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$.

○ **а)** Используя формулы для вычисления математического ожидания, приведенные в начале параграфа, находим $M(X)$ и $M(Y)$:

$$M(X) = x_1p_{11} + x_1p_{12} + x_1p_{13} + x_2p_{21} + x_2p_{22} + x_3p_{23} =$$
$$= 1 \cdot 0{,}16 + 1 \cdot 0{,}12 + 1 \cdot 0{,}08 + 2 \cdot 0{,}28 + 2 \cdot 0{,}11 + 2 \cdot 0{,}25 = 1{,}64,$$

т. е. $a_x = M(X) = 1{,}64$. Аналогично

$$M(Y) = 1 \cdot 0{,}16 + 1 \cdot 0{,}28 + 2 \cdot 0{,}12 + 2 \cdot 0{,}11 + 3 \cdot 0{,}08 + 3 \cdot 0{,}25 = 1{,}89,$$

т. е. $a_y = M(X) = 1{,}89$.

Отметим, что, найдя безусловные законы распределения случайных величин X и Y (в задаче 6.12.1 они найдены), можно найти указанные числовые характеристики, используя «старые формулы»:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}36 + 2 \cdot 0{,}64 = 1{,}64; \quad M(Y) = 1 \cdot 0{,}44 + 2 \cdot 0{,}23 + 3 \cdot 0{,}33 = 1{,}89.$$

б) Находим дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$:

$$D(X) = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - a_x)^2 \cdot p_{ij}\right] =$$
$$= (1 - 1{,}64)^2 \cdot 0{,}16 + (1 - 1{,}64)^2 \cdot 0{,}12 + (1 - 1{,}64)^2 \cdot 0{,}08 +$$
$$+ (2 - 1{,}64)^2 \cdot 0{,}28 + (2 - 1{,}64)^2 \cdot 0{,}11 + (2 - 1{,}64)^2 \cdot 0{,}25 =$$
$$= 0{,}4096 \cdot 0{,}36 + 0{,}1296 \cdot 0{,}64 = 0{,}2304, \text{ т. е. } D(X) = 0{,}2304.$$

Аналогично

$$D(Y) = (1 - 1{,}98)^2 \cdot 0{,}16 + (1 - 1{,}89)^2 \cdot 0{,}28 + (2 - 1{,}89)^2 \cdot 0{,}12 +$$
$$+ (2 - 1{,}89)^2 \cdot 0{,}11 + (3 - 1{,}89)^2 \cdot 0{,}08 + (3 - 1{,}89)^2 \cdot 0{,}25 =$$
$$= 0{,}7921 \cdot 0{,}44 + 0{,}0121 \cdot 0{,}23 + 1{,}2321 \cdot 0{,}33 = 0{,}7579.$$

Найдем $D(X)$ иначе, используя безусловный закон распределения с. в. X: $D(X) = \left[M(X^2) - (M(X))^2\right] = 1 \cdot 0{,}36 + 2^2 \cdot 0{,}64 - (1{,}64)^2 = 0{,}2304$. Точно так же

$$D(Y) = [M(Y^2) - (M(Y))^2] = 1^2 \cdot 0{,}44 + 2^2 \cdot 0{,}23 + 3^2 \cdot 0{,}33 - (1{,}89)^2 =$$
$$= 4{,}33 - 3{,}5721 = 0{,}7579.$$

в) Теперь уже легко найти $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}2304} = 0{,}48$ и $\sigma(Y) = \sqrt{0{,}7579} \approx 0{,}87$. ●

6.12.13. Используя условие задачи 6.12.3, найти $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$.

6.12.14. Используя условие задачи 6.12.6, найти $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$.

6.12.15. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины задан таблицей

$X\backslash Y$	-2	0	2
0,2	0,03	0,05	0,12
0,6	0,15	0,30	0,35

Найти условное математическое ожидание $M(X \mid Y = 2)$.

❍ Для нахождения искомой величины воспользуемся формулой

$$M(X \mid Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i \mid y_j), \text{ где } p(x_i \mid y_j) = P\{X = x_i \mid Y = y_j\}.$$

Найдем сначала условный закон распределения компоненты X при условии, что $Y = 2$.

Так как $P\{Y = 2\} = 0{,}12 + 0{,}35 = 0{,}47$, то условный закон распределения с. в. X при $Y = 2$ имеет вид

$p(x_i \mid y_3) =$

x_i	0,2	0,6
$P_{Y=2}$	$\frac{0{,}12}{0{,}47}$	$\frac{0{,}35}{0{,}47}$

(См. решение задачи 6.12.9.)

Стало быть,

$$M(X \mid Y = 2) = [x_1 p(x_1 \mid y_3) + x_2 p(x_2 \mid y_3)] =$$
$$= 0{,}2 \cdot \frac{0{,}12}{0{,}47} + 0{,}6 \cdot \frac{0{,}35}{0{,}47} = \frac{0{,}024 + 0{,}21}{0{,}47} = \frac{0{,}234}{0{,}47} = \frac{234}{470} \approx 0{,}498,$$

т. е. окончательно $M(X \mid Y = 2) \approx 0{,}498$. ●

6.12.16. Используя условие задачи 6.12.15, найти:

а) $M(X)$; б) $M(X \mid Y = 0)$;
в) $M(Y)$; г) $M(Y \mid X = 0{,}2)$.

6.12.17. Используя условие задачи 6.12.10, найти

$$M(Y \mid X = -1), \quad M(X \mid Y = -2), \quad M(X \mid Y = 0).$$

6.12.18. Используя условие задачи 6.12.1, найти корреляционный момент K_{XY} (ковариацию) и коэффициент корреляции r_{XY}.

❍ Математические ожидания компонент уже найдены: $a_x = M(X) = 1{,}64$; $a_y = M(Y) = 1{,}89$ (см. задачу 6.12.12).

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение компонент также известны: $D(X) = 0{,}2304$; $D(Y) = 0{,}7579$; $\sigma(X) = 0{,}48$; $\sigma(Y) = 0{,}87$ (задача 6.12.12).

Найдем корреляционный момент K_{XY}.

$$K_{XY} = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - a_x)(y_j - a_y)p_{ij}\right] =$$

$$= (1-1{,}64)(1-1{,}89)\cdot 0{,}16 + (1-1{,}64)(2-1{,}89)\cdot 0{,}12 + (1-1{,}64)(3-1{,}89)\cdot 0{,}08 +$$
$$+ (2-1{,}64)(1-1{,}89)\cdot 0{,}28 + (2-1{,}64)(2-1{,}89)\cdot 0{,}11 + (2-1{,}64)(3-1{,}89)\cdot 0{,}25 =$$
$$= -0{,}64 \cdot (-0{,}0404) + 0{,}36 \cdot 0{,}0404 = 0{,}0404.$$

Теперь найдем K_{XY} иначе, используя формулу

$$K_{XY} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y):$$

$$K_{XY} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}16 + 1 \cdot 2 \cdot 0{,}12 + 1 \cdot 3 \cdot 0{,}08 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}28 + \\ + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}11 + 2 \cdot 3 \cdot 0{,}25 - 1{,}64 \cdot 1{,}89 = 3{,}16 - 3{,}0996 = 0{,}0404.$$

Как видно, второй способ проще.

Находим коэффициент корреляции.

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} = \frac{0{,}0404}{0{,}48 \cdot 0{,}87} \approx 0{,}096732,$$

т. е. $r_{XY} \approx 0{,}1$. ●

6.12.19. Используя условие задачи 6.12.3, найти K_{XY} и r_{XY}.

6.12.20. Используя условие задачи 6.12.9, найти основные характеристики $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, K_{XY}, r_{XY} данной системы случайных вличин (X, Y).

6.12.21. Совместное распределение случайных величин X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot (y - xy), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где область $D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Найти:

а) коэффициент c;

б) плотности распределения отдельных компонент X и Y;

в) вероятности попадания случайной точки (X, Y) в область $D_1 = \{(x,y) : 0{,}7 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 0{,}3\}$;

г) совместную функцию распределения $F(x, y)$.

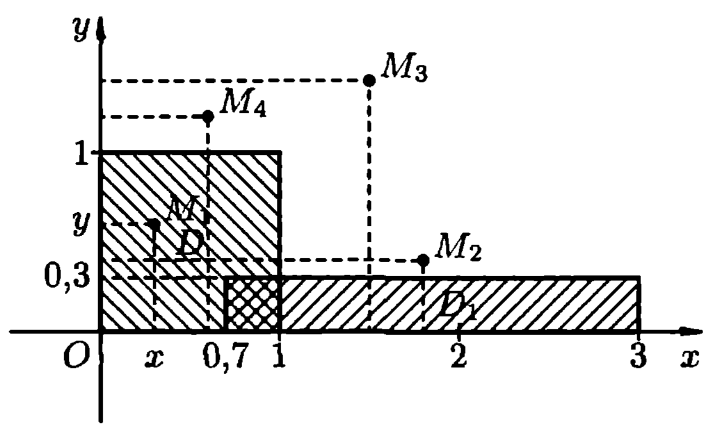


Рис. 92

❍ Области D и D_1 изображены на рис. 92.

а) Коэффициент c найдем из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dxdy = 1.$$

Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 c\cdot y(1-x)\,dy =$$

$$= c\int\limits_0^1 (1-x)\,dx\cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{c}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{c}{4},$$

откуда $\frac{c}{4}=1$, т. е. $c=4$.

б) Находим плотности распределения компонент X и Y:

$$f_1(x) = f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 4y(1-x)\,dy = 4(1-x)\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = 2(1-x),$$

т. е.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x), & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1];\end{cases}$$

$$f_2(y) = f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_0^1 4y(1-x)\,dx = 4y\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 2y,$$

т. е.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & y\in[0,1],\\ 0, & y\notin[0,1].\end{cases}$$

в) Для нахождения вероятности попадания случайной точки (X,Y) в область D_1 воспользуемся формулой

$$P\{(X,Y)\in D\} = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

Тогда

$$P\{(X,Y)\in D_1\} = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{0,7}^{1} dx\int\limits_0^{0,3} 4(1-x)y\,dy + \int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{0,3} 0\,dy =$$

$$= 4\int\limits_{0,7}^{1}(1-x)\,dx\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^{0,3} = 2\cdot 0{,}09\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0,7}^{1} =$$

$$= 0{,}18\left(1-\frac{1}{2}-0{,}7+\frac{0{,}49}{2}\right) = 0{,}0081.$$

г) Для нахождения совместной функции распределения воспользуемся формулой

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv,$$

где x и y — любые действительные числа.

Рассмотрим возможные положения точки (x, y) на плоскости:

1) если точка (x, y) расположена во II четверти ($x < 0$, $y > 0$), либо в III ($x < 0$, $y < 0$), либо в IV четверти ($x > 0$, $y < 0$), то $F(x, y) = 0$, так как там всюду $f(x, y) = 0$;

2) если точка (x, y) расположена в I четверти, то она находится либо: (а) внутри области D (на рис. 92 это точка M_1); (б) справа от области D, причем $y \leqslant 1$ (точка M_2); (в) справа от области D, причем $y > 1$ (точка M_3); (г) над областью D, причем $x \leqslant 1$ (точка M_4).

В случае (а) имеем

$$F(x,y) = 4\int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} (1-u)v\,dv = 4\int_{0}^{x}(1-u)\,du\int_{0}^{y} v\,dv =$$
$$= 4\int_{0}^{x}(1-u)\,du\cdot\frac{y^2}{2} = 2y^2\left(u - \frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^x = 2y^2\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = xy^2(2-x);$$

В случае (б) получаем

$$F(x,y) = 4\int_{0}^{y} v\,dv\int_{0}^{1}(1-u)\,du = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_0^y = y^2;$$

В случае (в) имеем

$$F(x,y) = 4\int_{0}^{1} v\,dv\int_{0}^{1}(1-u)\,du = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_0^1 = 1;$$

И, наконец, в случае (г):

$$F(x,y) = 4\int_{0}^{x}(1-u)\,du\int_{0}^{1} v\,dv = 4\cdot\frac{1}{2}\left(u - \frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^x = 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = x(2-x).$$

Таким образом,

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0,\ y < 0 \text{ или } x < 0,\ y > 0 \text{ или } x > 0,\ y < 0, \\ xy^2(2-x), & (x,y) \in D, \\ y^2, & 0 \leqslant y \leqslant 1,\ x > 1, \\ x(2-x), & 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y > 1, \\ 1, & x > 1,\ y > 1. \end{cases}$$

●

6.12.22. Используя результаты, полученные при решении задачи 6.12.21, найти:

а) частные функции распределения случайных величин, входящих в систему с. в. (X, Y);

б) вероятность попадания случайной точки в прямоугольник D_1 с вершинами в точках (0,7;0), (0,7;0,3), (3;0,3), (3;0) (рис. 92).

○ **а)** Так как

$$f_1(x) = f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x), & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases}$$

то:
при $x \leqslant 0$ имеем

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0,$$

при $0 < x \leqslant 1$ получаем

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} 2(1-u)\,du = 2x - x^2,$$

при $1 < x$ получаем

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 2(1-x)\,dx + \int_{1}^{x} 0\,du = 1.$$

Таким образом,

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 2x - x^2, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Аналогично находим, что

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ y^2, & 0 < y \leqslant 1, \\ 1, & 1 < y. \end{cases}$$

б) Используя формулу

$$P\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant Y \leqslant y_2\} = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1),$$

находим искомую вероятность:

$$P\{0{,}7 \leqslant X \leqslant 3,\ 0 \leqslant Y \leqslant 0{,}3\} =$$
$$= F(3;0{,}3) - F(0{,}7;0{,}3) - F(3;0) + F(0{,}7;0) =$$
$$= (0{,}3)^2 - (2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^2 - 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^2) - 0^2 + (2 \cdot 0{,}7 \cdot 0 - 0{,}7^2 \cdot 0) =$$
$$= 0{,}09 - 0{,}126 + 0{,}0441 = 0{,}0081.$$

Получим такой же ответ, как и в задаче 6.12.21. ●

6.12.23. Задана плотность совместного распределения системы непрерывных с. в. (X, Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot xy, & \text{если } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где $D = \{(x,y): \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ x + y \leqslant 1\}$. Найти:

а) коэффициент c;

б) плотности распределения отдельных компонент X и Y;

в) функции распределения отдельных компонент;

г) вероятность события $A = \{X > \frac{1}{2}, \ Y \leqslant 1\}$.

6.12.24. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x,y) = \frac{c}{\left(\frac{1}{3} + x^2\right)(3 + y^2)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Найти:

а) значение величины c;

б) функцию распределения $F(x,y)$;

в) плотности распределения отдельных компонент X и Y;

г) вероятность события $A = \{X < 1, \ Y < \sqrt{3}\}$.

6.12.25. Используя условие задачи 6.12.21, проверить, зависимы ли случайные величины X и Y.

❍ Проверим, выполняется ли условие независимости двух непрерывных случайных величин X и Y: $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

В ходе решения задачи были получены следующие результаты:

1) $c = 4$ и, значит, плотность распределения вероятностей $f(x,y)$ имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} 4y(1-x), & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

2) плотности распределения отдельных компонент X и Y имеют вид

$$f_1(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 2y, & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Как видим, равенство $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ выполняется. Следовательно, случайные величины X и Y независимы. В этом же можно убедиться, проверив выполнение равенства $F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$. ●

6.12.26. Используя условие задачи 6.12.23, выяснить, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

6.12.27. Используя условие задачи 6.12.24, показать, что случайные величины X и Y независимы.

6.12.28. Независимые случайные величины X и Y имеют соответственно плотности:

$$f_1(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } x < 0, \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 4e^{-4y}, & \text{при } y \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения двумерной случайной величины (X,Y);

б) функцию распределения $F_{XY}(x,y)$.

6.12.29. Используя условие задачи 6.12.21, найти условные плотности отдельных компонент X и Y.

○ Для нахождения условной плотности распределения $f(x \mid y)$ воспользуемся формулой $f(x \mid y) = \dfrac{f(x,y)}{f_2(y)}$ при всех $y \in [0,1]$. Так как

$$f(x,y) = \begin{cases} 4y(1-x), & 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях}\ , \end{cases}$$

а

$$f_2(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

то

$$f(x \mid y) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Аналогично находим

$$f(y \mid x) = \begin{cases} 2y, & 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Отметим, что безусловные плотности распределения компонент X и Y равны соответствующим условным плотностям. Это доказывает, что случайные величины X и Y независимы. ●

6.12.30. Используя условие задачи 6.12.23, найти условные плотности компонент X и Y.

6.12.31. Двумерная с. в. (X,Y) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольной области D ($\triangle ABC$), т. е.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S}, & \text{если } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где S — площадь области D. Координаты вершин треугольника ABC таковы: $A(-1;1)$, $B(1;1)$, $C(0;0)$. Найти плотности распределения компонент X и Y, условные плотности распределения с. в. X и Y. Являются ли с. в. X и Y независимыми?

6.12.32. Используя условие задачи 6.12.21, найти:

а) $M(X)$, $M(Y)$; б) $D(X)$, $D(Y)$.

○ а) Используя формулу

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x,y)\,dxdy$$

и учитывая, что вне области D имеем $f(x,y)=0$, находим математическое ожидание компоненты X:

$$M(X) = \iint\limits_D x\cdot 4y(1-x)\,dxdy = 4\int\limits_0^1 x(1-x)\,dx\int\limits_0^1 y\,dy =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^1 (x-x^2)\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Аналогично находим $M(Y)$:

$$M(Y) = \iint\limits_D y\cdot f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D y\cdot 4y(1-x)\,dxdy =$$

$$= 4\int\limits_0^1 (1-x)\,dx\int\limits_0^1 y^2\,dy = 4\int\limits_0^1 (1-x)\,dx\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

Отметим, что $M(X)$ и $M(Y)$ можно так же найти, используя формулы:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_1(x)\,dx, \quad M(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_2(y)\,dy.$$

А именно:

$$M(X) = \int\limits_0^1 x\cdot 2(1-x)\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{3};$$

$$M(Y) = \int\limits_0^1 y\cdot 2y\,dy = 2\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

б) Для нахождения дисперсии с. в. X можно воспользоваться одной из следующих формул

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a_x)^2\cdot f(x,y)\,dxdy;$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x,y)\,dxdy - (a_x)^2;$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a_x)^2\cdot f_1(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f_1(x)\,dx - (a_x)^2.$$

Здесь $a_x = M(X)$. Найдем $D(X)$, используя первую формулу:

$$D(X) = \iint\limits_D\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\cdot 4y(1-x)\,dxdy = 4\int\limits_0^1(1-x)\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 dx\int\limits_0^1 y\,dy =$$

$$= 4\int_0^1 (1-x)\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) dx \cdot \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right) =$$

$$= 2\int_0^1 \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9}x\right) dx =$$

$$= 2\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{7}{9}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{9}x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{5}{9} - \frac{7}{18} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{18}.$$

Теперь найдем $D(X)$ другим способом, используя третью формулу:

$$D(X) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_1(x)\,dx - a_x^2\right] = \int_0^1 x^2 \cdot 2(1-x)\,dx - \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{9} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

Отсюда видно, что второй способ оказался проще. Находим этим способом $D(Y)$:

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f_2(y)\,dy - (a_y)^2 = \int_0^1 y^2 \cdot 2y\,dy - \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$= 2\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}. \quad \bullet$$

6.12.33. Используя условие задачи 6.12.21, найти корреляционный момент K_{XY} (или: $\operatorname{cov}(X,Y)$) и коэффициент корреляции r_{XY}.

❍ Корреляционный момент с. в. X и Y можно найти, используя формулы

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-a_x)(y-a_y) f(x,y)\,dxdy$$

или

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f(x,y)\,dxdy - a_x a_y.$$

Здесь $a_x = M(X)$, $a_y = M(Y)$. Воспользуемся второй формулой.

$$K_{XY} = \iint_D xy\cdot 4y(1-x)\,dxdy - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = 4\int_0^1 (x-x^2)\,dx \int_0^1 y^2\,dy - \frac{2}{9} =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 - \frac{2}{9} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{6} - \frac{2}{9} = 0.$$

Отсюда и

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = 0.$$

Этого следовало ожидать, ведь X и Y — независимые случайные величины! (См. решение задачи 6.12.25.) ●

6.12.34. Используя условие задачи 6.12.31, найти:

а) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

б) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;

в) коэффициент корреляции r_{XY}.

6.12.35. Используя условие задачи 6.12.23, найти:

а) $M(X)$ и $M(Y)$; б) $D(X)$ и $D(Y)$;

в) $\operatorname{cov}(X, Y)$; г) r_{XY}.

6.12.36. Плотность совместного распределения случайных величин X и Y задана формулой

$$f(x,y) = \begin{cases} 0{,}25(1 - xy^3), & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент корреляции с. в. X и Y;

б) безусловные и условные плотности распределения с. в. X и Y;

в) условное математическое ожидание $M(Y \mid X = x)$.

6.12.37. Случайные величины X и Y независимы, имеют плотности распределения соответственно

$$f_1(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y \geqslant 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$). Найти:

а) плотность совместного распределения $f(x, y)$;

б) $P\{X > Y\}$;

в) значения $M(X)$ и $M(Y)$.

Дополнительные задания

6.12.38. По цели производится два независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,8, при втором 0,9. Случайная величина X — число попаданий при первом выстреле, Y — число попаданий при втором выстреле. Найти:

а) закон распределения системы случайных величин (X, Y);

б) безусловные законы распределения отдельных компонент X и Y и их функции распределения;

в) функцию распределения $F_{XY}(x, y)$.

6.12.39. Функция распределения системы дискретных с. в. (X, Y) имеет вид

при	$y \leqslant -4$	$-4 < y \leqslant 1$	$1 < y \leqslant 8$	$8 < y$
$x \leqslant -2$	0	0	0	0
$-2 < x \leqslant 3$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$
$3 < x$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	1

Найти таблицу распределения случайного вектора (X, Y); ряд распределения с. в. Y; вероятность события $\{X > Y\}$.

6.12.40. Симметричную монету подбрасывают 3 раза. Пусть с. в. X — количество гербов, выпавших в первом и втором испытаниях, с. в. Y — количество гербов, выпавших во втором и третьем испытаниях. Найти: совместное распределение с. в. X и Y; вероятность события $\{X \neq Y\}$.

6.12.41. Задано распределение двумерной случайной величины (X, Y)

$X\backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Установить, зависимы ли компоненты X и Y. Найти

$$P\{XY > 2\}.$$

6.12.42. Используя условие задачи 6.12.6, найти:

а) условный закон распределения с. в. Y при $X = 2{,}5$;

б) $P\{X = x_i \mid Y = 2\}$; в) $P\{\sqrt{X^2 + Y^2} \leqslant \sqrt{2}\}$.

6.12.43. Система случайных величин (X, Y) задана таблицей распределения

$X\backslash Y$	-1	0	1
0	0,1	0,2	0,1
1	0,1	0,3	0,2

Найти:

а) безусловный закон распределения с. в. Y;

б) закон распределения с. в. Y при условии, что $X = 0$;

в) вероятность события $\{X = 0,\ Y \geqslant 0\}$.

6.12.44. Среди 10 лотерейных билетов есть 2 выигрышных. Сначала девушка вытягивает один билет, затем один билет вытягивает юноша. Описать закон распределения системы случайных величин (X, Y), где X — число выигрышных билетов у девушки, Y — у юноши. Найти:

а) $P\{X > Y\}$; б) $P\{Y = y_i \mid X = 1\}$.

6.12.45. Используя условие задачи 6.12.6, найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

6.12.46. Используя условие задачи 6.12.11, найти математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y.

6.12.47. Используя условие задачи 6.12.6, найти r_{XY}.

6.12.48. Используя условие задачи 6.12.11, найти K_{XY}, r_{XY}.

6.12.49. Двумерная случайная величина задана таблицей распределения

$X\backslash Y$	4	5	6	7
1	0,08	0,10	0,10	0,03
2	0,08	0,14	0,16	0,05
3	0,04	0,06	0,14	D

Найти величину D, одномерные распределения составляющих; проверить независимость случайных величин X и Y; вычислить $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y) = K_{XY}$, r_{XY}.

Система случайных величин (X,Y) подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot \sin(x+y), & \text{в области } D, \\ 0, & \text{вне области } D, \end{cases}$$

где $D = \left\{(x,y) : x \geqslant 0,\ x \leqslant \frac{\pi}{2},\ y \geqslant 0,\ y \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$. Найти:

а) коэффициент c;

б) плотности распределения отдельных компонент X и Y;

в) вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$.

Система непрерывных с. в. (X,Y) равномерно распределена (т. е. $f(x,y) = c = \mathrm{const}$) внутри эллипса $9x^2 + 16y^2 \leqslant 144$, вне эллипса $f(x,y) = 0$. Найти:

а) совместную плотность $f(x,y)$;

б) плотности компонент X и Y (т. е. $f_1(x)$ и $f_2(y)$);

в) вероятность события $A = \{-1 \leqslant X \leqslant 1,\ 0 < Y < 1\}$.

Дана плотность распределения вероятностей двумерной с. в. (X,Y)

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot e^{-x-y}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Найти:

а) параметр c;

б) функцию распределения вероятностей $F(x,y)$;

в) вероятности событий: $A = \{X < 0,\ Y < 2\}$, $B = \{0 \leqslant X \leqslant 1, -X \leqslant Y \leqslant X\}$.

Двумерная случайная величина (X,Y) имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & \text{в области } D, \\ 0, & \text{вне области } D, \end{cases}$$

где $D = \{(x,y) :\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1,\ 2y - x \leqslant 2\}$. Найти

а) величину c ;

б) плотность распределения случайной величины X;

в) функцию распределения $F_X(x) = P\{X < x\}$;

г) вероятность события $\{X \geqslant 0\}$.

6.12.54. Плотность распределения вероятностей системы случайных величин (X, Y) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x \in [0,1],\ y \in [0,1], \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти
а) $f_X(x)$ и $f_Y(y)$; б) $P\{X+Y<1\}$.
Являются ли с. в. X и Y независимыми?

6.12.55. Двумерная с. в. (X, Y) задана плотностью совместного распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot xy^4, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где D область на плоскости Oxy, определяемая системой неравенств: $\{y > -1,\ x > 0,\ y < -x^3\}$. Найти безусловное и условное распределения составляющей X. Убедиться, что с. в. X и Y зависимы.

6.12.56. Используя условие задачи 6.12.51, найти условные плотности $f(x \mid y)$ и $f(y \mid x)$ компонент X и Y двумерной случайной величины (X, Y).

6.12.57. Задана плотность

$$f(x,y) = \frac{2}{\pi} e^{-(x^2+4xy+8y^2)}$$

совместного распределения двумерной с. в. (X, Y). Найти безусловные и условные плотности распределения случайных величин X и Y; выяснить являются ли с. в. X и Y независимыми (известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}).$$

6.12.58. Используя условие задачи 6.12.50, найти:
а) $M(X)$, $M(Y)$; б) $D(X)$, $D(Y)$;
в) $\operatorname{cov}(X, Y)$, т. е. K_{XY}; г) r_{XY}.

6.12.59. Задана плотность совместного распределения системы двух с. в. (X, Y)

$$f(x,y) = \begin{cases} 90x^2y^2, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где $D = \{(x,y) :\ |x| + |y| < 1,\ y < 0\}$. Найти:
а) коэффициент корреляции r_{XY};
б) $f_1(x)$; в) $f(y \mid x)$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

6.12.60. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины задан таблицей

$X\backslash Y$	-2	0	4
0	0,15	0,05	0
10	0,10	0,20	0,10
20	0,05	0,10	0,25

Составить функцию распределения $F_{X,Y}(x,y)$. Найти условный закон распределения с. в. Y при $X = 20$. Выяснить, зависимы ли случайные величины X и Y.

6.12.61. В урне содержится 5 белых и 3 черных шара. Из нее извлекают 2 шара без возвращения. Пусть с. в. X — число белых шаров в выборке, с. в. Y — число черных шаров в выборке. Составить закон совместного распределения случайного вектора (X, Y). Найти:

а) $P\{X \geqslant 2, Y = 1\}$; б) $D(X)$ и $D(Y)$;

в) коэффициент корреляции r_{XY}.

6.12.62. Задана система случайных величин (X, Y). Известно, что:

$$M(X) = 1, \quad M(Y) = -2, \quad D(X) = 4, \quad D(Y) = 2, \quad r_{XY} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Найти:

а) $M(2X + Y)$; б) $D(X - 3Y)$.

6.12.63. Случайные величины X и Y связаны зависимостью $Y = -X + 1$. Показать, что $r_{XY} = -1$.

6.12.64. Дана плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y)

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot \cos x \cos y, & \text{в области } D, \\ 0, & \text{вне области } D, \end{cases}$$

где $D = \left\{(x,y) :\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right),\ y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right\}$. Найти:

а) функцию распределения $F_{XY}(x,y)$;

б) плотность $f_X(x)$;

в) вероятность события $A = \{Y < 2X\}$.

6.12.65. Функция распределения двумерной случайной величины имеет вид

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Найти:

а) двумерную плотность вероятности системы (X, Y);

б) вероятность события $A = \{X < 1, Y < 1\}$?

6.12.66. Функция распределения системы (X,Y) непрерывных с. в. задана в виде

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ или } y<0,\\ 0{,}5(\sin x+\sin y-\sin(x+y)), & 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2},\\ 1, & x>\frac{\pi}{2} \text{ и } y=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти:

а) $P\{(X,Y)\in D\}$, где

$$D=\left\{(x,y):\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3},\\ \frac{\pi}{3}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}\end{array}\right.\right\}$$

б) $f_{XY}(x,y)$.

6.12.67. Двумерный случайный вектор (X,Y) равномерно распределен $(f(x,y)=c)$ в области $D=\{(x,y):\ |x|+|y|\leqslant 1\}$ (вне области $f(x,y)=0$). Найти:

а) $f_{XY}(x,y)$; б) $f_X(x)$ и $f_Y(y)$.

Зависимы ли случайные величины X и Y?

6.12.68. Задана функция $f(x,y)=K\cdot e^{-(ax^2+bx+cy^2)}$. Каким условиям должны удовлетворять числа a, b и c для того, чтобы эта функция могла бы быть плотностью распределения вероятностей?

6.12.69. Пусть случайные величины X и Y независимы и нормально распределены: $X\sim N(0;1)$ и $Y\sim N(0;1)$. Найти:

а) совместную плотность распределения $f_{XY}(x,y)$;

б) $P\{(X,Y)\in D\}$, где $D=\{(x,y):\ 2\leqslant\sqrt{x^2+y^2}<3\}$.

6.12.70. Непрерывная с. в. $X{\sim}R[-2;4]$, а непрерывная с. в. $Y{\sim}N(-1;2)$. Известно, что $r_{XY}{=}-0{,}5$. Найти $M(XY)$.

6.12.71. Задана непрерывная с. в. X с плотностью распределения вероятностей $f_X(x)=A\cdot e^{-x^2}$. Известно, что другая с. в. Y связана со с. в. X равенством $Y=X^2$. Чему равен коэффициент корреляции с. в. X и Y? Какой вывод следует из полученного результата?

§ 13. ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Функции одной случайной величины

Пусть рассматриваются две случайные величины X и Y, связанные функциональной зависимостью

$$Y=\varphi(X).$$

Если X — дискретная с. в., закон распределения которой определяется формулой $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, то с. в. Y также дискретна, а ее закон распределения выражается формулой $p_i = P\{Y = y_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, где $y_i = \varphi(x_i)$, $P\{Y = y_i\} = P\{X = x_i\}$.

Математическое ожидание и дисперсия с. в. Y определяются соответственно равенствами

$$M(Y) = M(\varphi(X)) = \sum_i y_i p_i = \sum_i \varphi(x_i) p_i$$

и

$$D(Y) = D(\varphi(X)) = \sum_i (y_i - a_y)^2 p_i = \sum_i (\varphi(x_i) - a_y)^2 p_i,$$

где $a_y = M(Y)$.

Если X — непрерывная с. в. с плотностью распределения $f(x)$ и если $y = \varphi(x)$ — дифференцируемая и монотонная функция, то плотность распределения $g(y)$ с. в. $Y = \varphi(X)$ выражается формулой

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|,$$

где $\psi(y) = \varphi^{-1}(y) = x$ — функция, обратная функции $y = \varphi(x)$ (эта функция существует в силу монотонности $\varphi(X)$).

Если функция $y = \varphi(x)$ немонотонная, то числовая прямая разбивается на n промежутков монотонности и обратная функция $\psi_i(y)$ находится на каждом из них; плотность распределения $g(y)$ с. в. $Y = \varphi(X)$ определяется в этом случае по формуле

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} f(\psi_i(y)) \cdot |\psi_i'(y)|.$$

Для нахождения математического ожидания и дисперсии с. в. $Y = \varphi(X)$ необязательно находить закон ее распределения; можно воспользоваться формулами

$$M(Y) = M(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f(x)\, dx,$$

$$D(Y) = D(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - a_y)^2 f(x)\, dx.$$

Функции двух случайных величин

⇛ Пусть рассматривается система двух случайных величин (X, Y). Если каждой паре (x, y) возможных значений с. в. X и Y соответствует одно возможное значение $z = \varphi(x, y)$ (находимое по определенному закону) с. в. Z, то Z называют *функцией двух случайных аргументов* X и Y:

$$Z = \varphi(X, Y).$$ ⇚

Для функции двух (и более) аргументов удобнее сначала находить ее функцию распределения $G(z)$, а затем — плотность распределения $g(z)$:

$$g(z) = G'(z).$$

Если (X, Y) — система дискретных с. в., то

$$G(z) = P\{Z < z\} = \sum_{i,j:\varphi(x_i,y_j)<z} p_{ij};$$

если (X, Y) — система непрерывных с. в., то

$$G(z) = P\{Z < z\} = \iint_{D_z} f(x,y)\,dxdy,$$

где $f(x,y)$ — плотность распределения системы (X, Y);

$$D_z = \{(x,y) : \ \varphi(x,y) < z\}.$$

Важное для практики значение имеет задача определения закона распределения суммы двух случайных величин: $Z = X + Y$.

Функция распределения с. в. Z может быть найдена по формуле

$$G_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

где $f(x,y)$ — плотность распределения системы (X, Y). Плотность распределения суммы двух случайных величин выражается формулой

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,dx \quad \text{(или:} \quad g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,dy\text{)}.$$

Особенно важен случай, когда случайные величины X и Y независимы. Тогда $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ и

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x)\,dx \quad \text{(или: } g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)f_2(y)\,dy\text{)},$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — плотности распределения с. в. X и Y соответственно. Если возможные значения аргументов неотрицательны, то $g(x)$ находим по формуле

$$g(z) = \int_0^z f_1(x)f_2(z-x)\,dx.$$

Последнюю формулу называют *формулой свертки* или *формулой композиции двух распределений*, а функцию $g(z)$ — *сверткой функций* $f_1(x)$ и $f_2(y)$; закон распределения суммы $Z = X + Y$ двух независимых с. в. называют *композицией* (сверткой) законов распределения слагаемых.

6.13.1. Дискретная с. в. X задана своим рядом распределения

x_i	-2	-1	0	1	2	3	4
p_i	0,05	0,10	0,15	0,25	0,15	0,20	0,10

Найти:

а) распределение с. в. $Y = -3X^2 + 1$;

б) закон распределения с. в. $T = \cos\left(\frac{\pi}{2}X\right) - 1$, а также $M(T)$ и $D(T)$.

○ а) Случайная величина Y принимает следующие значения: $y_1 = -3(-2)^2 + 1 = -11$, $y_2 = -3(-1)^2 + 1 = -2$, $y_3 = 1$, $y_4 = -2 \cdot 1 + 1 = -2$, $y_5 = -3 \cdot 4 + 1 = -11$, $y_6 = -3 \cdot 3^2 + 1 = -26$, $y_7 = -3 \cdot 4^2 + 1 = -47$. Вероятности, этих значений такие же, как и у с. в. X, т. е. $p_1 = 0{,}05$, $p_2 = 0{,}10$ и т. д. Закон распределения с. в. Y можно записать в виде

y_i	-11	-2	1	-2	-11	-26	-47
p_i	0,05	0,10	0,15	0,25	0,15	0,20	0,10

или (учитывая, что $P\{Y=-11\}=p_1+p_5=0{,}05+0{,}15=0{,}20$, $P\{Y=-2\}=0{,}10+0{,}25=0{,}35$) в более компактном виде

y_i	-47	-26	-11	-2	1
p_i	0,10	0,20	0,20	0,35	0,15

б) Аналогично получаем закон распределения с. в. $T = \cos\frac{\pi X}{2} - 1$:

t_i	-2	-1	0
p_i	0,20	0,55	0,25

$\left(\text{проверка: } \sum_{i=1}^{3} p_i = 1\right)$.

Находим математическое ожидание и дисперсию:

$$M(T) = -2 \cdot 0{,}20 + (-1) \cdot 0{,}55 + 0 \cdot 0{,}25 = -0{,}95;$$

$$D(T) = [M(T^2) - (M(T))^2] = (-2)^2 \cdot 0{,}20 + (-1)^2 \cdot 0{,}55 + 0^2 \cdot 0{,}25 - (-0{,}95)^2 = 1{,}35 - 0{,}9025 = 0{,}4475.$$ ●

6.13.2. Дискретная с. в. X задана законом распределения

x_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
p_i	0,15	0,15	0,25	0,30	0,10	0,05

Найти:

а) закон распределения с. в. $Y = 4\sin^2 X$;

б) $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$.

6.13.3. Дискретная с. в. X задана таблицей распределения

x_i	-4	0	4	6
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Найти:

а) законы распределения с. в. $Y = \frac{1}{2}|X|$, $Z = X - M(X)$;

б) $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$, $M(Z)$, $D(Z)$.

6.13.4. Плотность распределения вероятностей непрерывной с. в. X имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{8}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Найти плотность распределения с. в. $Y = X^2$.

○ Отметим, что заданная н. с. в. X распределена по нормальному закону: $X \sim N(0;2)$. Решим задачу двумя способами:

1) предварительно найдя функцию распределения $G(y)$ с. в. Y, а затем, воспользовавшись равенством $g(y) = G'(y)$, и искомую плотность распределения $g(y)$ с. в. Y;

2) используя формулу $g(y) = f(\psi(y))\cdot|\psi'(y)|$.

Способ 1. Возможные значения случайных величин X и Y связаны зависимостью $y = x^2$. Так как с. в. Y не принимает отрицательных значений, то $G(y) = P\{Y < y\} = 0$ для $y \leqslant 0$. Пусть $y > 0$. Тогда

$$G(y) = P\{Y < y\} = P\{X^2 < y\} = P\{|X| < \sqrt{y}\} =$$
$$= P\{-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\} = \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{8}}\,dx = \frac{1\cdot 2}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{8}}\,dx,$$

т. е.

$$G(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{8}}\,dx, & \text{при } y > 0,\\ 0, & \text{при } y \leqslant 0.\end{cases}$$

Отсюда

$$g(y) = G'(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{8}}\cdot(\sqrt{y})', \\ 0, \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{8}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}, \\ 0, \end{cases}$$

т. е.

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{8}}, & \text{при } y > 0,\\ 0, & \text{при } y \leqslant 0.\end{cases}$$

Замечание. Выражение для функции распределения с. в. Y можно записать иначе:

$$G(y) = P\{Y < y\} = \ldots = P\{-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\} =$$
$$= P\{X < \sqrt{y}\} - P\{X \leqslant -\sqrt{y}\} = P\{X < \sqrt{y}\} - P\{X < -\sqrt{y}\} =$$
$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$

Дифференцируя полученное равенство по y, получаем

$$g(y) = G'_Y(y) =$$

$$= F'_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + F'_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{8}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{8}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2y\pi}} e^{-\frac{y}{8}},$$

т. е. такой же результат

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{8}}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

Способ 2. В интервале $(-\infty; \infty)$ функция $y = x^2$ не монотонна. Разобьем этот интервал на два интервала $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$, в которых функция $y = x^2$ монотонна. На интервале $(-\infty; 0)$ обратная функция к функции $y = x^2$ есть $x_1 = \psi_1(y) = -\sqrt{y}$, на интервале $(0; \infty)$ имеем $x_2 = \psi_2(y) = \sqrt{y}$. Искомую плотность распределения найдем, используя равенство

$$g(y) = f_X(\psi_1(y)) \cdot |\psi'_1(y)| + f_X(\psi'_2(y)) \cdot |\psi'_2(y)|.$$

Так как

$$|\psi'_1(y)| = |(-\sqrt{y})'| = \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \text{ и } |\psi'_2(y)| = |(\sqrt{y})'| = \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

то

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{8}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{8}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{8}}.$$

Так как $y = x^2$, $x \in \mathbb{R} = (-\infty; \infty)$, то $y > 0$, поэтому $g(y) = 0$ при $y \leqslant 0$. Итак,

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{8}}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$ ●

6.13.5. Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[1; 3]$ $\left(\text{т. е. } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{при } x \in [1; 3], \\ 0, & \text{при } x \notin [1; 3] \end{cases} \right)$.

Найти плотность распределения функции:

а) $Y = 2X$; б) $Y = X^2$.

❍ а) Функция $y = 2x$ на отрезке возможных значений с. в. X монотонна. Поэтому обратная ей функция $x = \psi(y) = \frac{1}{2}y$ существует и также монотонна на отрезке $[2; 6]$ (так как $1 \leqslant x \leqslant 3$, то $2 \leqslant y = 2x \leqslant 6$). Используя формулу $g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|$, получаем:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left| \left(\frac{1}{2} y \right)' \right| \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{при } 2 \leqslant y \leqslant 6, \\ 0, & \text{при } y \notin [2; 6]. \end{cases}$$

Как видим, н. с. в. Y имеет также равномерное распределение, т. е.

$$Y \sim R[2;6].$$

б) Функция $y = x^2$ тоже монотонна на отрезке $[1;3]$ и поэтому имеет обратную функцию $x = \psi(y) = \sqrt{y}$, которая также монотонна на отрезке $[1;9]$. Отсюда $x' = \psi'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $|\psi'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ и, следовательно,

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 1 \leqslant y \leqslant 9, \\ 0, & y \notin [1;9]. \end{cases}$$ ●

6.13.6. Известно, что плотность распределения с. в. X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения с. в. $Y = X^2$;

б) числовые характеристики $M(Y)$ и $D(Y)$.

6.13.7. Непрерывная с. в. X $(0 < x < \infty)$ имеет плотность распределения вероятностей $f(x)$ и функцию распределения вероятностей $F(x)$. Для с. в. $Y = \ln X$ найти плотность распределения вероятностей $g(y)$ и функцию распределения вероятностей $G(y)$.

6.13.8. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1]. \end{cases}$$

Найти плотность распределения с. в. $Y = |X - 2|$.

6.13.9. Задана плотность распределения н. с. в. X:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти $F_Y(y)$ и $f_Y(y)$, если $Y = e^{-X}$.

6.13.10. Случайная величина имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2}, & x \in [2;4], \\ 0, & x \notin [2;4]. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $g_Y(y)$;

б) математическое ожидание $M(Y)$ и дисперсию $D(Y)$ с. в. Y, которая представляет собой площадь круга радиуса X.

6.13.11. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [1;2], \\ 0, & \text{при } x \notin [1;2]. \end{cases}$$

Другая с. в. Y связана с X функциональной зависимостью $Y = 2X^3+1$. Найти математическое ожидание и дисперсию с. в. Y:

а) не находя плотности $g_Y(y)$;

б) найдя предварительно плотность $g_Y(y)$.

6.13.12. Совместное распределение д. с. в. X и Y задано таблицей

$X\backslash Y$	0	4	9
1	0,20	0,15	0,10
4	0,30	0,20	0,05

Описать закон распределения с. в. $Z = X - \sqrt{Y}$.

Запишем законы распределения составляющих X и Y:

x_i	1	4
p_i	0,45	0,55

y_i	0	4	9
p_i	0,50	0,35	0,15

Закон распределения с. в. $\sqrt{Y}$ имеет вид

$\sqrt{y_i}$	0	2	3
p_i	0,50	0,35	0,15

Случайная величина $Z = X - \sqrt{Y}$ принимает значения $z_1 = 1 - 0 = 1$, $z_2 = 1 - 2 = -1$, $z_3 = 1 - 3 = -2$, $z_4 = 4 - 0 = 4$, $z_5 = 4 - 2 = 2$, $z_6 = 4 - 3 = 1$. Вероятности этих значений таковы:

$$P\{Z = 1\} = P\{Z = z_1\} + P\{Z = z_6\} =$$
$$= P\{X = 1, \sqrt{Y} = 0\} + P\{X = 4, \sqrt{Y} = 3\} =$$
$$= P\{X = 1, Y = 0\} + P\{X = 4, Y = 9\} = 0{,}20 + 0{,}05 = 0{,}25;$$
$$P\{Z = -1\} = P\{X = 1, \sqrt{Y} = 2\} = P\{X = 1, Y = 4\} = 0{,}15;$$
$$P\{Z = -2\} = P\{X = 1, Y = 9\} = 0{,}10;$$
$$P\{Z = 4\} = P\{X = 4, Y = 0\} = 0{,}30;$$
$$P\{Z = 2\} = P\{X = 4, Y = 4\} = 0{,}20.$$

Таким образом, закон распределения с. в. $Z = X - \sqrt{Y}$ имеет вид

z_i	−2	−1	1	2	4
p_i	0,10	0,15	0,25	0,20	0,30

●

6.13.13. Используя условие задачи 6.13.12, описать закон распределения с. в.:

а) $Z_1 = X + Y$; б) $Z_2 = |X - Y|$;

в) $Z_3 = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

6.13.14. X и Y — независимые случайные величины, распределенные по одному и тому же геометрическому закону с параметром $p = 0{,}7$ (p — вероятность успеха в одном испытании). Описать закон распределения с. в. $Z = X + Y$.

6.13.15. Совместное распределение с. в. X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & \text{при } x\in[0;1], y\in[0;1],\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Найти:

а) функцию распределения вероятностей с. в. $Z=X+Y$;

б) плотность распределения $f_Z(z)$.

○ а) $F_Z(z)=F_{X+Y}(z)=P\{X+Y<z\}=\iint\limits_{D_z}(x+y)\,dxdy$, где область D_z есть множество точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству $x+y<z$, где z — произвольное число (на рис. 93 область D_z есть часть квадрата ($0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$), лежащая ниже прямой $y=-x+z$). При $z\leqslant 0$, очевидно, $F(z)=0$ (вне квадрата $f(x,y)=0$). Если $0<z\leqslant 1$ (область D_z заштрихована на рис. 93), то

$$F(z)=\iint\limits_{D_z}(x+y)\,dxdy=\int\limits_0^z dx\int\limits_0^{-x+z}(x+y)\,dy=\int\limits_0^z dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{-x+z}=$$

$$=\int\limits_0^z\left(-x^2+xz+\frac{(z-x)^2}{2}\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+z\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(z-x)^3}{3}\right)\Big|_0^z=$$

$$=-\frac{z^3}{3}+\frac{z^3}{2}+\frac{1}{6}(z-0)^3=\frac{z^3}{6}+\frac{z^3}{6}=\frac{z^3}{3}.$$

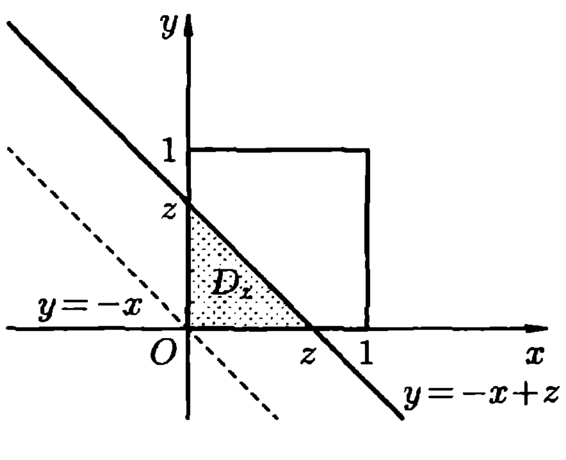


Рис. 93

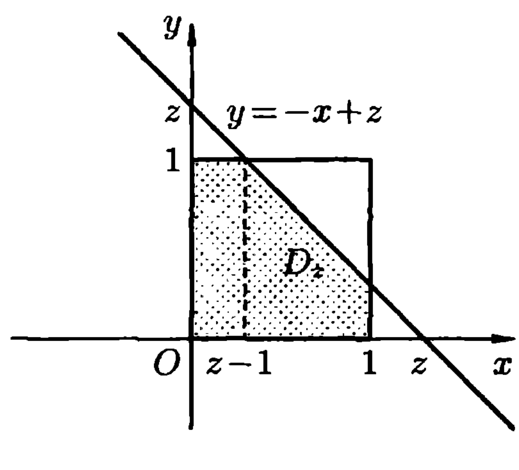


Рис. 94

Если $1<z\leqslant 2$ (см. рис. 94), то

$$F(z)=\iint\limits_{D_z}(x+y)\,dxdy=\int\limits_0^{z-1}dx\int\limits_0^1(x+y)\,dy+\int\limits_{z-1}^1 dx\int\limits_0^{-x+z}(x+y)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^{z-1}dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1+\int\limits_{z-1}^1 dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{-x+z}=$$

$$= \int\limits_0^{z-1} \left(x + \frac{1}{2}\right) dx + \int\limits_{z-1}^{1} \left(-x^2 + xz + \frac{(z-x)^2}{2}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right)\Big|_0^{z-1} + \left(-\frac{x^3}{3} + z \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(z-x)^3}{3}\right)\Big|_{z-1}^{1} =$$

$$= \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{z-1}{2} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{(z-1)^3}{3} + \frac{z}{2} - \frac{z}{2}(z-1)^2 - \frac{1}{6}[(z-1)^3 - 1]\right) =$$

$$= \frac{z^2 - z}{2} + \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 2}{3} + \frac{2z^2 - z^3}{2} - \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 2}{6} =$$

$$= \frac{-2z^3 + 6z^2 - 2}{6} = \frac{1}{3}(-z^3 + 3z^2 - 1).$$

Наконец, если $z > 2$, то

$$F(z) = \iint\limits_{D_z} (x+y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 (x+y)\,dy = \ldots = 1.$$

Таким образом,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } z \leqslant 0, \\ \dfrac{z^3}{3}, & \text{при } 0 < z \leqslant 1, \\ -\dfrac{z^3}{3} + z^2 - \dfrac{1}{3}, & \text{при } 1 < z \leqslant 2, \\ 1, & \text{при } z > 2. \end{cases}$$

б) Находим $f_Z(z)$, используя равенство $f_Z(z) = F'_Z(z)$:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } z \leqslant 0 \text{ или } z > 2, \\ z^2, & \text{при } 0 < z \leqslant 1, \\ -z^2 + 2z, & \text{при } 1 < z \leqslant 2. \end{cases}$$

Можно убедиться, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\,dz = 1.$ ●

6.13.16. Используя условие задачи 6.13.15, найти $F_Z(z)$ и $f_Z(z)$, где $Z = X - Y$.

6.13.17. Используя условие задачи 6.13.15, найти $F_Z(z)$ и $f_Z(z)$, где $Z = X \cdot Y$.

6.13.18. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение: $X \sim R[0;1]$, $Y \sim R[-1;2]$. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

❍ Найдем закон распределения суммы независимых с. в. двумя способами.

Способ 1. Сначала найдем функцию распределения с. в. $Z = X + Y$.

Система двух с. в. (X, Y) равномерно распределена в прямоугольнике $ABCD$ (см. рис. 95), поэтому

$$F_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{X + Y < z\} = \iint\limits_{D_z} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_z} f_1(x) f_2(y)\,dxdy,$$

где область D_z — часть этого прямоугольника, лежащая ниже прямой $x+y=z$, т.е. $y=-x+z$; $f(x,y)$ — плотность распределения двумерной с.в. (X,Y); $f_1(x)=f_X(x)$ и $f_2(y)=f_Y(y)$ — плотности распределения вероятностей случайных величин X и Y соответственно. По условию

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & x\in[0;1],\\ 0, & x\notin[0;1],\end{cases} \quad \text{и} \quad f_2(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & y\in[-1;2],\\ 0, & y\notin[-1;2].\end{cases}$$

Так как с.в. X и Y независимы, то $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ в прямоугольнике $ABCD$ (вне его $f(x,y)=0$).

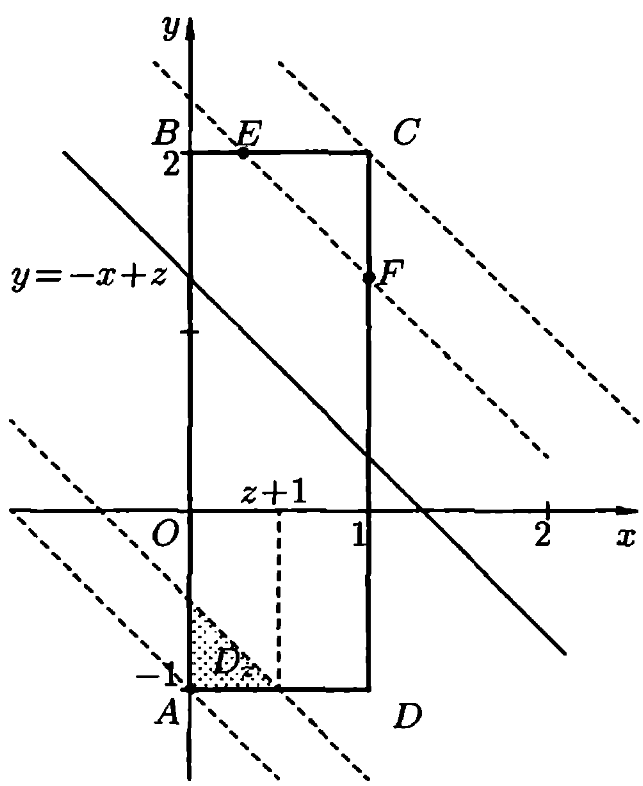


Рис. 95

Следовательно,

$$F_Z(z)=\iint\limits_{D_z}\frac{1}{3}\,dxdy=\frac{1}{3}\iint\limits_{D_z}dxdy=\frac{1}{3}S_{D_z}$$

(здесь S_{D_z} — площадь области D_z). Отсюда имеем:

1) если $z\leqslant -1$, то $F(z)=0$;

2) если $-1<z\leqslant 0$, то $F(z)=\left[\frac{1}{3}S_{D_z}\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(z+1)(z+1)=\frac{(z+1)^2}{6}$,

поскольку в этом случае область D_z — прямоугольный треугольник с катетами $z+1$ и $z+1$ (на рис. 95 область D_z заштрихована).

Площадь области D_z можно, конечно, найти с помощью интеграла (хотя этот способ более громоздкий):

$$S_{D_z} = \int\limits_0^{z+1} dx \int\limits_{-1}^{z-x} dy = \int\limits_0^{z+1} dx \cdot y\Big|_{-1}^{z-x} = \int\limits_0^{z+1} (z-x+1)\,dx =$$

$$= \left(zx - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^{z+1} = z^2 + z - \frac{(z+1)^2}{2} + z + 1 =$$

$$= \frac{2z^2+4z+2-z^2-2z-1}{2} = \frac{z^2+2z+1}{2} = \frac{(z+1)^2}{2}.$$

3) если $0 < z \leqslant 2$, то $F(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(z+1)+z}{2} \cdot 1 = \frac{2z+1}{6}$, так как область D_z в этом случае представляет собой прямоугольную трапецию с основаниями $z+1$ и z (проверьте!); ее высота равна 1.

4) если $2 < z \leqslant 3$, то

$$F(z) = \frac{1}{3}(S_{\square ABCD} - S_{\triangle CEF}) = \frac{1}{3}\left(1 \cdot 3 - \frac{1}{2}(1-(z-2)) \cdot (1-(z-2))\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3 - \frac{1}{2}(3-z)^2\right) = 1 - \frac{1}{6}(3-z^2).$$

Или, иначе, используя интегралы:

$$F(z) = \frac{1}{3}\left(\int\limits_0^{z-2} dx \int\limits_{-1}^{2} dy + \int\limits_{z-2}^{1} dx \int\limits_{-1}^{z-x} dy\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3x\Big|_0^{z-2} + \int\limits_{z-2}^{1}(z-x+1)\,dx\right) = \frac{1}{3}\left(3z-6+\left(zx-\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{z-2}^{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3z-6+z-z^2+2z-\frac{1}{2}+\frac{(z-2)^2}{2}+1-z+2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-z^2+5z-\frac{7}{2}+\frac{(z-2)^2}{2}\right) = \frac{1}{6}(-2z^2+10z-7+z^2-4z+4) =$$

$$= \frac{1}{6}(-z^2+6z-3) = -\frac{1}{6}(z^2-6z+9-6) = 1 - \frac{1}{6}(z-3)^2;$$

5) если $3 < z$, то $F(z) = \frac{1}{3}S_{D_z} = \frac{1}{3}S_{\square ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$. Таким образом

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant -1, \\ \dfrac{(z+1)^2}{6}, & -1 < z \leqslant 0, \\ \dfrac{2z+1}{6}, & 0 < z \leqslant 2, \\ 1 - \dfrac{(z-3)^2}{6}, & 2 < z \leqslant 3, \\ 1, & 3 < z. \end{cases}$$

Отсюда

$$f_Z(z) = F'(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant -1,\ z > 3, \\ \dfrac{z+1}{3}, & -1 < z \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{3}, & 0 < z \leqslant 2, \\ 1 - \dfrac{z}{3}, & 2 < z \leqslant 3. \end{cases}$$

Способ 2. Найдем плотность распределения с. в. $Z = X + Y$, используя формулу свертки:

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x)\, dx.$$

Функции под знаком интеграла отличны от нуля лишь в случае

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1 \leqslant z - x \leqslant 2, \end{cases} \text{т. е.} \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ z - 2 \leqslant x \leqslant z + 1. \end{cases} \tag{13.1}$$

Решение системы зависит от значения z.

Если $z < -1$, система (13.1) несовместна; отрезки $[0; 1]$ и $[z-2; z+1]$ не пересекаются (см. геометрическую иллюстрацию на рис. 96). Следовательно, в этом случае $f_2(z - x) = 0$ и, значит, $f(z) = 0$.

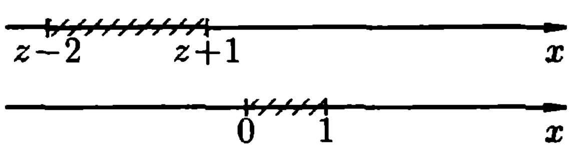


Рис. 96

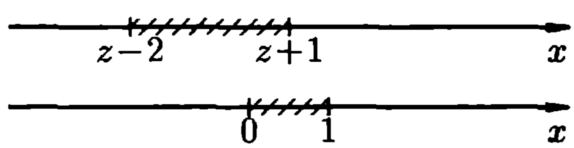


Рис. 97

Если $-1 < z \leqslant 0$, система (13.1) эквивалентна неравенству $0 \leqslant x \leqslant z + 1$ (рис. 97). Поэтому

$$f(z) = \int\limits_0^{z+1} \frac{1}{3}\, dx = \frac{z+1}{3}.$$

Если $0 < z \leqslant 2$, система (13.1) эквивалентна неравенству $0 \leqslant x \leqslant 1$ (рис. 98). Поэтому

$$f(z) = \int\limits_0^1 \frac{1}{3}\, dx = \frac{1}{3}.$$

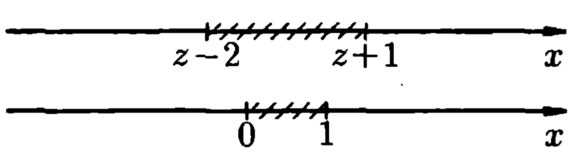


Рис. 98

Если $2 < z \leqslant 3$, система (13.1) эквивалентна неравенству $z-2 \leqslant x \leqslant 1$ (рис. 99). Поэтому

$$f(z) = \int\limits_{z-2}^{1} \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}(1 - z + 2) = 1 - \frac{z}{3}.$$

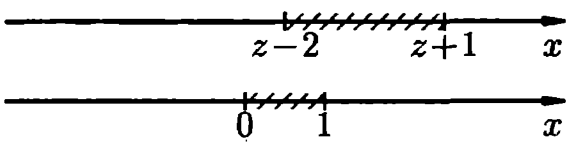


Рис. 99

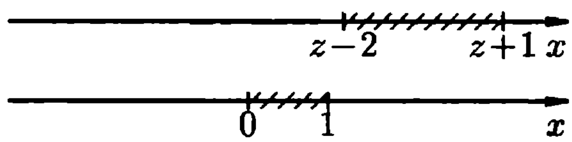


Рис. 100

Если $3 < z$, система (13.1) несовместна, так как отрезки $[z-2; z+1]$ и $[0; 1]$ не пересекаются (рис. 100); т. е. $f_2(z-x) = 0$ и $f(z) = 0$.

Итак, как и в первом случае,

$$fz(z) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1,\ x > 3, \\ \dfrac{z+1}{3}, & -1 < z \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{3}, & 0 < z \leqslant 2, \\ 1 - \dfrac{z}{3}, & 2 < z \leqslant 3. \end{cases}$$ ●

6.13.19. Найти плотность распределения вероятностей суммы двух независимых случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[0; 2]$.

6.13.20. Найти закон распределения суммы Z двух независимых случайных величин X и Y, распределенных по нормальному закону: $X \sim N(0;1)$, $Y \sim N(0;1)$. Найти $M(Z)$ и $D(Z)$.

6.13.21. Случайные величины X и Y независимы и распределены по показательному закону:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 0{,}2e^{-0{,}2y}, & y \geqslant 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Найти композицию этих законов.

❍ Плотность распределения с. в. $Z = X+Y$ найдем, используя формулу

$$g(z) = \int\limits_0^z f_1(x) \cdot f_2(z-x)\,dx.$$

Имеем

$$g(z) = \int\limits_0^z 0{,}25e^{-0{,}25x} \cdot 0{,}2e^{-0{,}2(z-x)}\,dx = 0{,}05e^{-0{,}2z} \int\limits_0^z e^{-0{,}25x+0{,}20x}\,dx =$$

$$= 0{,}05e^{-0{,}2z} \int\limits_0^z e^{-0{,}05x}\,dx = -e^{-0{,}2z} \cdot e^{-0{,}05x}\Big|_0^z = e^{-0{,}2z} \cdot (1 - e^{-0{,}05z}).$$ ●

6.13.22. Найти законы распределения с. в. $Z = X + Y$, где X и Y — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на отрезке $[0; 1]$

$$\left(f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1], \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0;1], \\ 0, & y \notin [0;1] \end{cases} \right).$$

6.13.23. Известно, что с. в. X распределена по показательному закону

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}3e^{-0{,}3x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

а с. в. $Y \sim R[0; 2]$ и не зависит от X. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Дополнительные задания

6.13.24. Случайный вектор (X, Y) распределен по закону, заданному таблицей

$X \backslash Y$	-2	-1	0	1
-1	0,02	0,16	0,24	0,03
0	0,05	0,15	0,10	0,06
2	0,03	0,09	0,06	0,01

Найти:

а) законы распределения с. в. X и Y;

б) законы распределения с. в. $Z = -5X + 2$ и $W = |Y^3 - 1|$;

в) математические ожидания и дисперсии случайных величин Z и W.

6.13.25. Дискретная с. в. X задана своим рядом распределения

x_i	-2	-1	0	2	7
p_i	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

Найти дисперсию с. в. $Y = \sqrt{X + 2}$.

6.13.26. Непрерывная с. в. X распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Найти:

а) плотность распределения с. в. $Y = \sin X$;

б) числовые характеристики $M(Y)$ и $D(Y)$.

6.13.27. Случайная величина X распределена по закону Коши

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины:

а) $Y = 1 - X$; б) $Y = X^3$.

6.13.28. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $g(y)$ случайной величины:

а) $Y = 6X + 3$; б) $Y = |X|$;

в) $Y = e^{-X^2}$.

6.13.29. Пусть $f(x)$ — плотность распределения н. с. в. X, $x \in (-\infty, \infty)$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y, если:

а) $Y = -X$; б) $Y = X + 10$;

в) $Y = X^2$; г) $Y = \operatorname{arctg} X$.

6.13.30. Пусть $F(x)$ — функция распределения н. с. в. X. Выразить через нее функцию распределения $F(y)$ случайной величины Y, если:

а) $Y = 2X + 3$; б) $Y = e^{-X}$;

в) $Y = X^3$.

6.13.31. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Найти плотность распределения вероятностей $g(y)$ случайной величины Y, если:

а) $Y = \frac{1}{X}$; б) $Y = |X - 1|$;

в) $Y = 5X + 1$.

6.13.32. Известно, что н. с. в. $X \sim R[0, 2]$. Найти функцию распределения и плотность распределения случайных величин

$$Y = -2X + 4, \quad Z = |X - 1|.$$

Найти $M(Y)$ и $D(Y)$.

6.13.33. Законы распределения числа очков, выбиваемых каждым из двух стрелков (X и Y соответственно), таковы:

x_i	8	9	10
p_i	0,1	0,3	0,6

,

y_i	8	9	10
p_i	0,2	0,3	0,5

Описать закон распределения суммы очков, выбиваемых этими стрелками.

6.13.34. Используя условие задачи 6.13.15, найти $F_T(t)$ и $f_T(t)$, где

$$T = \frac{Y}{X}.$$

6.13.35. Совместное распределение с. в. X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей с. в. $Z = X + Y$.

6.13.36. Случайные величины X и Y независимы и одинаково распределены по закону $N(0,1)$. Найти распределение с. в. $Z = X^2 + Y^2$.

6.13.37. Используя условие задачи 6.13.18, найти функцию и плотность распределения вероятностей с. в. $Z = \dfrac{Y}{X}$.

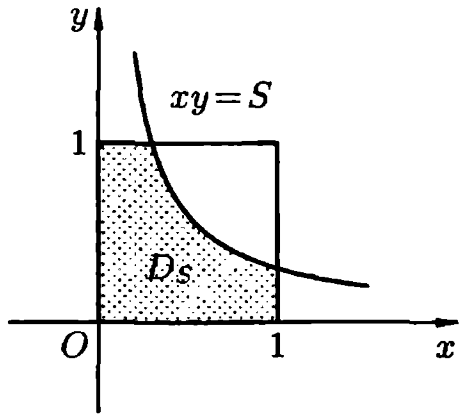


Рис. 101

6.13.38. Случайная точка (X,Y) распределена равномерно в квадрате со стороной 1 (рис. 101). Найти закон распределения с. в. $S = XY$.

$$\left(f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \right)$$

6.13.39. Найти функцию распределения и плотность распределения вероятностей с. в. $Z = \max\{X, Y\}$, где X и Y — непрерывные, независимые, равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$ случайные величины.

6.13.40. Заданы плотности распределения вероятностей двух независимых с. в. X и Y:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}25x, & x \in [1,3], \\ 0, & x \notin [1,3] \end{cases} \quad \text{и} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [1,2], \\ 0, & y \notin [1,2]. \end{cases}$$

Найти плотность распределения суммы $Z = X + Y$.

6.13.41. Время T_1, в течение которого клиент ожидает обслуживания, и само время обслуживания T_2 — две независимые непрерывные случайные величины, имеющие показательное распределение с параметрами λ_1 и $\lambda_2 \neq \lambda_1$ соответственно. Найти плотность распределения вероятностей общего времени $T = T_1 + T_2$, проведенного клиентом в системе массового обслуживания.

6.13.42. Независимые случайные величины X и Y распределены по одному и тому же:

а) показательному закону с параметром $\lambda = 0{,}1$;

б) равномерному закону в интервале $(0,1)$.

Найти $M(Z)$, где $Z = X + Y$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

6.13.43. Известно, что с. в. $X \sim N(a, \sigma)$. Показать, что с. в. Y, связанная со с. в. X линейной функциональной зависимостью $Y = kX + b$ $(k, b \in \mathbb{R})$, также распределена по нормальному закону. Чему равны $M(Y)$ и $\sigma(Y)$?

6.13.44. Известно, что с. в. $X \sim R[-1, 2]$. Найти плотность распределения с. в. $Y = |X|$. (Найти $f_X(x)$ в интервале $(-1; 1)$, а затем в интервале $(1; 2)$.)

6.13.45. Пусть $F(x)$ — функция распределения непрерывной случайной величины X. Найти функции распределения случайных величин $Y = 16X^2 - 9$, $Z = e^{-3X}$, выразив их через функцию распределения с. в. X.

6.13.46. Случайная величина X имеет показательное распределение с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Будет ли иметь показательное распределение с. в. $Y = X + 1$? Найти функцию плотности распределения случайных величин $Y = 2e^X + 6$, $Z = X^2$.

6.13.47. Будут ли независимы с. в. X и Y, если их совместное распределение $f(x, y)$ является равномерным:

а) в области $D = \{(x, y): \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$;

б) в области $F = \{(x, y): \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$?

6.13.48. Используя условие задачи 6.13.35, найти $F_Z(z)$ и $f_Z(z)$, где $Z = \dfrac{Y}{X}$.

6.13.49. Известно, что X и Y — независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение: $X \sim N(0; 1)$, $Y \sim N(0; 1)$. Найти распределение с. в. $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

6.13.50. Найти плотность распределения суммы двух равномерно распределенных на отрезке $[-1; 1]$ независимых случайных величин X и Y. Чему равна $F_{X+Y}(z)$?

6.13.51. Студент при поездке в институт пользуется метро и троллейбусом. Поезд метро приходится ожидать не более 3 минут, а ожидание троллейбуса не более 8 минут. Считается время ожидания поезда в метро и троллейбуса непрерывными с. в. X и Y, распределенными равномерно соответственно в промежутках $[0; 3]$ и $[0; 8]$, найти плотность распределения вероятностей общего времени ожидания $Z = X + Y$.

§ 14. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Во многих задачах теории вероятностей изучаются случайные величины, являющиеся суммами большого числа других случайных величин, т. е. зависящие от большого числа случайных факторов. Определенные свойства таких случайных величин описываются совокупностью так называемых *предельных теорем*, которые, в свою очередь, разбиваются на две группы теорем — «закон больших чисел» и «центральная предельная теорема».

Группа теорем, называемых «законом больших чисел», устанавливает устойчивость средних значений: при большом числе испытаний их средний результат может быть предсказан с достаточной точностью. Другая группа теорем, называемая «центральной предельной теоремой», устанавливает, что при достаточно общих и естественных условиях закон распределения суммы большого числа случайных величин близок к нормальному.

Неравенство Чебышева и закон больших чисел

Теорема 6.9 (Неравенство Маркова). Если с. в. X принимает неотрицательные значения и имеет математическое ожидание $M(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство:

$$P\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Это неравенство, очевидно, равносильно следующему

$$P\{X < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Теорема 6.10 (Неравенство Чебышева). Если с. в. X имеет математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P\{|X - M(X)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева можно заменить равносильным

$$P\{|X - M(X)| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{14.1}$$

Неравенства Маркова и Чебышева можно использовать для оценки вероятностей событий, связанных со случайной величиной, распределение которой неизвестно.

Если с. в. $X = m$ имеет *биномиальное распределение* с математическим ожиданием $M(X) = a = np$ и дисперсией $D(X) = npq$, неравенство Чебышева имеет вид

$$P\{|m - np| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}.$$

Для *относительной частоты* $\frac{m}{n}$ события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с вероятностью p, неравенство Чебышева принимает вид

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \tag{14.2}$$

Основной формой «закона больших чисел» считается

Теорема 6.11 (Чебышев). Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы и существует такое число $c > 0$, что $D(X_i) \leqslant c$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, то для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}. \tag{14.3}$$

Из неравенства (14.3) следует предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Теорема Чебышева показывает, что *среднее арифметическое большого числа случайных величин как угодно мало отличается* (с вероятностью близкой к 1) *от среднего арифметического их математических ожиданий.*

Следствие 6.1. Если с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы и одинаково распределены, с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Следствие 6.2 (Теорема Бернулли). Если в условиях схемы Бернулли вероятность наступления события A в одном опыте равна p, число наступлений этого события при n независимых испытаниях равно m, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Центральная предельная теорема

Сформулируем центральную предельную теорему для случая одинаково распределенных слагаемых.

Теорема 6.12. Пусть независимые с. в. $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ одинаково распределены с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Тогда функция распределения центрированной и нормированной суммы Z_n этих случайных величин

$$Z_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - M\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

стремится при $n \to \infty$ к функции распределения стандартной нормальной случайной величины:

$$F_{Z_n}(x) = P\{Z_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Из центральной предельной теоремы, в частности, следует, что при больших n сумма $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ приближенно распределена по нормальному закону:

$$S_n \sim N(na, \sqrt{n}\sigma).$$

Напомним, что:

1. С. в. X называется центрированной и нормированной (т. е. стандартной), если $M(X) = 0$ и $D(X) = 1$.

2. Функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

связана с нормированной функцией Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

равенством

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x).$$

Из теоремы 6.12 также следует, что при достаточно больших n (уже при $n > 10$) выполняется соотношение

$$P\{\alpha < S_n < \beta\} \approx \Phi_0\left(\frac{\beta - M(S_n)}{\sigma(S_n)}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - M(S_n)}{\sigma(S_n)}\right). \qquad (14.4)$$

Частным случаем центральной предельной теоремы являются рассмотренные ранее локальная и интегральная теоремы Муавра–Лапласа.

6.14.1. Дискретная с. в. X задана рядом распределения

x_i	0	2	6	10
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 5$.

❍ Найдем сначала математическое ожидание и дисперсию с. в. X:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}1 = 4;$$

$$D(X) = 0^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 6^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}1 - 4^2 = 25{,}6 - 16 = 9{,}6.$$

Согласно формуле (14.1), получаем следующую оценку вероятности:

$$P\{|X - 4| < 5\} \geqslant 1 - \frac{9{,}6}{5^2} = 1 - 0{,}384 = 0{,}616. \quad \bullet$$

6.14.2. Средний срок службы прибора 10 лет. Используя неравенство Маркова, оценить вероятность того, что данный прибор не прослужит более 15 лет.

6.14.3. Дискретная с. в. X задана законом распределения:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,10	0,15	0,30	0,25	0,20

Найти вероятность события $A = \{|X - M(X)| < 1{,}5\}$. Оценить эту вероятность, пользуясь неравенством Чебышева.

6.14.4. Непрерывная с. в. $X \sim R(2, 8)$. Найти вероятность события $A = \{3{,}5 < X < 6{,}5\}$; оценить вероятность события A, используя неравенство Чебышева.

❍ Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}, & x \in (2, 8), \\ 0, & x \notin (2, 8). \end{cases}$$

Используя формулу

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx,$$

находим вероятность события A. Имеем:

$$P(A) = \int_{3{,}5}^{6{,}5} \frac{1}{6}\, dx = \frac{1}{6} \cdot x \Big|_{3{,}5}^{6{,}5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \text{т. е.} \quad P(A) = 0{,}5.$$

Математическое ожидание и дисперсия с. в. X таковы:

$$M(X) = \left[\frac{a+b}{2}\right] = \frac{8+2}{2} = 5, \quad D(X) = \left[\frac{(b-a)^2}{12}\right] = \frac{36}{12} = 3.$$

Так как

$$A = \{3{,}5 < X < 6{,}5\} = \{-1{,}5 < X - 5 < 1{,}5\} = \{|X - 5| < 1{,}5\},$$

то, используя неравенство Чебышева (14.1), получаем (здесь $\varepsilon = 1{,}5$) искомую оценку:

$$P(A) = P\{|X - 5| < 1{,}5\} \geqslant 1 - \frac{3}{1{,}5^2} = -\frac{1}{3}.$$

Получили неинтересную (грубую) оценку; вероятность любого события всегда неотрицательна! ●

6.14.5. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что с. в. X отклонится от своего математического ожидания $M(X)$ менее, чем на:

а) σ; **б)** 3σ;

в) 9σ, где $\sigma = \sqrt{D(X)}$ — среднее квадратическое отклонение с. в. X.

6.14.6. X — непрерывная с. в. с плотностью распределения

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{-3|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найти:

а) $P\{|X| < 2\}$;

б) оценку вероятности события $\{|X| < 2\}$, используя неравенство Чебышева.

6.14.7. Всхожесть семян некоторой культуры равна 0,85. Оценить вероятность того, что из 400 посеянных семян число взошедших будет заключено в пределах от 300 до 380.

6.14.8. Устройство состоит из 400 независимо работающих элементов. Вероятность отказа любого из них за время T равна 0,01. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что модуль разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за время T окажется не менее 5.

6.14.9. Число дождливых дней в году для данной местности является с. в. X с $M(X) = 100$. Оценить вероятность того, что в следующем году в данной местности будет меньше 140 дождливых дней.

6.14.10. Парикмахерская обслуживает в среднем 120 клиентов в день. Оценить вероятность того, что сегодня в данной парикмахерской будет обслужено:

а) не менее 150 клиентов; **б)** менее 160 клиентов.

6.14.11. Оценить вероятность того, что при 15 000 подбрасываниях монеты относительная частота появления герба отклонится от вероятности появления герба при одном подбрасывании по модулю меньше, чем на 0,01.

❍ Рассматриваемые испытания удовлетворяют схеме Бернулли. Воспользуемся неравенством (14.2). Имеем $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 15\,000$, $\varepsilon = 0{,}01$, поэтому

$$P\left\{\left|\frac{m}{15\,000} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}01\right\} \geqslant 1 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{15\,000\cdot 0{,}01^2} \approx 0{,}83,$$

т. е. $P \geqslant 0{,}83$. ●

6.14.12. Игральная кость подбрасывается 1200 раз. Оценить вероятность отклонения относительной частоты выпадения 6 очков от вероятности этого события (по модулю) на величину, меньшую, чем 0,02.

6.14.13. В урне находится 20 белых и 80 черных шаров. Из нее извлекают, с возвращением, 40 шаров. Оценить вероятность того, что количество белых шаров в выборке заключено между 4 и 12.

6.14.14. В автопарке 200 автомобилей. Каждый из них за время эксплуатации t может выйти из строя, независимо от других, с вероятностью 0,04. Оценить вероятность того, что доля надежных автомобилей отличается по модулю от вероятности безотказной работы любого из них не более чем на 0,1.

6.14.15. Игральная кость подбрасывается 400 раз. Оценить вероятность того, что среднее арифметическое числа выпавших очков отклонится от математического ожидания числа очков, выпавших при однократном подбрасывании кости, по модулю меньше, чем на 0,1.

❍ Обозначим через $X_i (i = 1, 2, \ldots, 400)$ — число очков, выпавших на грани кости в i-м испытании.Эти случайные величины независимы; имеют одно и то же математическое ожидание, равное $\frac{7}{2}$ (см. задачу 6.10.2) и ограниченные в совокупности дисперсии, равные $\frac{35}{12}$ (см. задачу 6.10.2). Поэтому к данной последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_{400}$ применим закон больших чисел (теорема Чебышева).

Искомую оценку получим, используя неравенство (14.3), где $n = 400$, $c = D(X_i) = \frac{35}{12}$, $M(X_i) = \frac{7}{2}$, $\varepsilon = 0{,}1$:

$$P\left\{\left|\frac{1}{400}\sum_{i=1}^{400} X_i - \frac{1}{400}\sum_{i=1}^{400} M(X_i)\right| < 0{,}1\right\} =$$

$$= P\left\{\left|\frac{1}{400}\sum_{i=1}^{400} X_i - \frac{7}{2}\right| < 0{,}1\right\} \geqslant 1 - \frac{35}{12\cdot 400\cdot 0{,}01} = \frac{13}{48} \approx 0{,}271.$$ ●

6.14.16. Дисперсия каждой из 2000 независимых с. в. не превышает 2. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих с. в. от среднего арифметического их математических ожиданий меньше 0,04.

6.14.17. Применима ли к последовательности независимых с. в. $X_1, X_2, X_3, \ldots$ теорема Чебышева, если закон распределения каждой из с. в. X_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) имеет вид:

а)

$x_{n,i}$	$-na$	0	na
p_i	0,25	0,5	0,25

, где $a > 0$;

б)

$x_{n,i}$	$-n^{-1}$	n^{-1}
p_i	0,5	0,5

;

в)

$x_{n,i}$	$-n^{0,1}$	$n^{0,1}$
p_i	0,5	0,5

?

6.14.18. Сколько раз нужно измерить длину детали, истинное значение которой a, чтобы с вероятностью не меньшей, чем 0,95, можно было утверждать, что среднее арифметическое этих измерений отличается от a по модулю меньше, чем на 1, если дисперсия каждого измерения меньше 16?

6.14.19. На отрезке $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ случайным образом выбраны 162 числа, т. е. рассматриваются 162 независимых и равномерно распределенных случайных величин X_1, X_2, X_3, …, X_{162}. Найти вероятность того, что их сумма заключена между 22 и 26.

○ Пусть $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_{162} = S_{162}$. Случайные величины независимы, одинаково распределены с математическим ожиданием $M(X_i) = \left[\frac{a+b}{2}\right] = \frac{1}{8}$ и дисперсией $D(X_i) = \left[\frac{(b-a)^2}{12}\right] = \frac{1}{192}$. Условия центральной предельной теоремы соблюдены, поэтому случайная величина S_{162} приближенно распределена по нормальному закону с плотностью

$$f_{S_{162}}(s) \approx \frac{1}{\sigma(S_{162}) \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s - M(S_{162}))^2}{2 \cdot \sigma^2(S_{162})}}.$$

Итак, $S_{162} \sim N\left(162 \cdot \frac{1}{8}, \sqrt{162} \cdot \sqrt{\frac{1}{192}}\right)$. Так как

$$M(S_{162}) = M\left(\sum_{i=1}^{162} X_i\right) = \sum_{i=1}^{162} M(X_i) = \frac{1}{8} \cdot 162 = \frac{81}{4},$$

$$D(S_{162}) = D\left(\sum_{i=1}^{162} X_i\right) = \sum_{i=1}^{162} D(X_i) = \frac{1}{192} \cdot 162 = \frac{27}{32},$$

то, применяя формулу (14.4), получим

$$P\{22 < S_{162} < 26\} \approx \Phi_0\left(\frac{26 - \frac{81}{4}}{\sqrt{\frac{27}{32}}}\right) - \Phi_0\left(\frac{22 - \frac{81}{4}}{\sqrt{\frac{27}{32}}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi_0(6{,}26) - \Phi(1{,}91) \approx 0{,}5 - 0{,}4719 = 0{,}0281.$$

Итак, с вероятностью, приблизительно равной 0,03, можно утверждать, что сумма 162 случайных чисел, выбранных на отрезке $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, заключена между 22 и 26. ●

6.14.20. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле для данного стрелка равна 0,7. Найти вероятность того, что число попаданий в цель будет больше 52, если он произвел 84 выстрела.

6.14.21. Складываются 300 независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_{300}$, равномерно распределенных на отрезке $[0; 0{,}4]$. Найти:

а) приближенное выражение плотности с. в. $Y = \sum\limits_{i=1}^{300} X_i$;

б) вероятность события $A = \{56 < Y < 65\}$.

6.14.22. Напряжения на выходах 40 каналов радиотехнического устройства есть независимые с. в. с математическими ожиданиями, равными 5 В и дисперсиями, равными 10 В. Найти вероятность того, что напряжение на выходе устройства, суммирующего напряжения каналов:

а) будет находиться в пределах от 140 В до 200 В;

б) превысит 180 В.

6.14.23. При статистическом отчете складывается 900 чисел, каждое из которых округлено с точностью до 0,001. Предполагается, что ошибки округления независимы и равномерно распределены в интервале $(-0{,}5 \cdot 10^{-3}; 0{,}5 \cdot 10^{-3})$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью, не меньшей, чем 0,996, будет находиться суммарная ошибка.

Дополнительные задания

6.14.24. Игральная кость подбрасывается 120 раз. Оценить вероятность того, что:

а) число появлений 6 очков будет не меньше 30;

б) 6 очков появится от 12 до 28 раз.

6.14.25. Монета подбрасывается 100 раз. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что число выпавших гербов будет находиться в пределах от 40 до 60. Найти вероятность этого же события с помощью интегральной формулы Муавра–Лапласа.

6.14.26. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 1, \\ (x-1)^2, & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{при } 2 < x. \end{cases}$$

С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность события $A = \left\{|X - M(X)| < \frac{1}{2}\right\}$. Найти $P\left\{|X - M(X)| < \frac{1}{2}\right\}$.

6.14.27. Изготовлена партия деталей. Среднее значение длины детали равно 20 см, а среднее квадратическое отклонение равно 0,1 см.

Оценить снизу вероятность того, что длина случайно отобранной детали находится в пределах от 19,6 до 20,4 см.

6.14.28. Известно, что: X и Y — неотрицательные независимые случайные величины; $M(X) = 2$, $M(Y) = 7$. Оценить вероятность событий $A = \{X + Y < 16\}$, $B = \{XY < 42\}$.

6.14.29. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80%. Оценить вероятность того, что при посеве 4000 семян:

а) отклонение числа взошедших семян (с.в. X) от $M(X)$ не превзойдет по модулю 100;

б) отклонение доли взошедших семян от вероятности всхожести любого из них не превзойдет по модулю 0,03.

6.14.30. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что среди 800 новорожденных детей мальчиков будет от 370 до 430 включительно. Считать вероятность рождения мальчика равной 0,5.

6.14.31. Сколько раз надо подбросить монету, чтобы вероятность отклонения относительной частоты появления герба от вероятности его появления при одном подбрасывании на величину, меньшую 0,1, была:

а) больше 0,90; б) больше 0,98?

6.14.32. Известно, что с.в. X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 e^{-x}}{2}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность события $A = \{X \in (0; 6)\}$.

6.14.33. Дисперсия каждой из независимых с.в. X_i, означающей продолжительность горения электролампочки, не превышает 30 часов. Сколько лампочек надо взять для испытаний, чтобы вероятность того, что отклонение средней продолжительности горения лампочки от среднего арифметического их математических ожиданий меньше (по модулю) одного часа, была не меньше 0,90?

6.14.34. Удовлетворяет ли последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимых с.в., имеющих плотность $f_{X_i}(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$, закону больших чисел?

6.14.35. Вероятность искажения одного сигнала равна 0,02. Пользуясь центральной предельной теоремой, найти вероятность того, что из 1000 переданных сигналов будет искажено:

а) больше 22; б) меньше 40.

6.14.36. Поезд состоит из 49 вагонов. Вес вагона — случайная величина X, для которой $M(X) = 60$ т, $\sigma(X) = 7$ т. Локомотив может везти поезд, если масса последнего не превосходит 3000 т.

В противном случае подцепляют дополнительный локомотив. Какова вероятность того, что этого делать не придется?

6.14.37. Игральная кость подбрасывается 360 раз. Найти вероятность того, что суммарное число очков будет находиться в пределах от 1200 до 1298 (т. е. $P\{1200 \leqslant S_{360} \leqslant 1298\}$).

6.14.38. Приживаются в среднем 70% от числа посаженных саженцев. Сколько нужно посадить саженцев, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, ожидать, что отклонение числа прижившихся саженцев от математического ожидания не превышает по модулю 40? Решить задачу с помощью неравенства Чебышева.

6.14.39. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ — последовательность независимых стандартных случайных величин (т. е. $X_i \sim N(0;1)$). Используя центральную предельную теорему, найти вероятность того, что с. в. $S_{100} = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_{100}^2$ примет значение больше, чем 125,8.

Контрольные вопросы и более сложные задания

6.14.40. Оценить вероятность того, что с. в. X отклонится от своего математического ожидания $M(X)$ менее чем на $3\sigma(X)$. Указать эти вероятности для с. в. X, имеющей:

а) показательное распределение;

б) равномерное распределение;

в) нормальное распределение.

6.14.41. Игральная кость подбрасывается 100 раз. Оценить вероятность того, что суммарное число очков (с. в. X):

а) будет не менее 400;

б) отклонится от математического ожидания $M(X)$ меньше, чем на 25.

6.14.42. Общая стоимость всех букетов в цветочном киоске составляет 18 000 руб. Вероятность того, что стоимость взятого наугад букета не превышает 300 рублей, равна 0,7. Что можно сказать о количестве букетов в киоске?

6.14.43. Вероятность выхода из строя элемента радиотехнического устройства за время T равна 0,1. Оценить вероятность того, что за время T из 100 элементов выйдет из строя менее 20.

6.14.44. Применима ли к последовательности независимых с. в. $X_1, \ldots$ $\ldots, X_n, \ldots$, где

$$X_i \sim R(a, b),$$

теорема Чебышева?

6.14.45. Доказать теорему Маркова:

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — последовательность независимых с. в., для которых

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \left| \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} M(X_i) \right| \leqslant \varepsilon \right\} = 1.$$

6.14.46. Найти

$$\lim_{a\to\infty} \sum_{m=0}^{a} \frac{a^m e^{-a}}{m!},$$

где a — целое положительное число.

6.14.47. Известно, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение соответственно на промежутках $(0; 1)$, $(0; 2)$,..., $(0; n)$. Как будет меняться с. в.

$$X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

при увеличении n?

❏

Глава 7. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

⇛ Пусть D — некоторое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. *Комплексной функцией* $f(z)$ с областью определения D называется отображение, которое каждой точке $z \in D$ ставит в соответствие комплексное число $w = f(z)$. ⇚

Если $z = x + iy$, $w = u + iv$, то можно записать $f(z)$ в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ — действительная часть $f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ — мнимая часть $f(z)$.

Укажем некоторые элементарные функции комплексного переменного:

$$\begin{gathered} e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{R} \quad (\textit{формула Эйлера}), \\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \\ \ln z = \ln|z| + i \arg z \quad (\arg z \in (-\pi, \pi]), \\ \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i \arg z + i \cdot 2\pi k = \ln z + i \cdot 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{gathered} \tag{1.1}$$

Заметим, что $\operatorname{Ln} z$ — многозначная функция, которая каждому числу $z \neq 0$ ставит в соответствие бесконечное множество значений $\{\operatorname{Ln} z\}$.

7.1.1. Для данной функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $z = x + iy$, найти действительную часть $u(x, y)$ и мнимую часть $v(x, y)$:

а) $f(z) = z^2$; б) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$;

в) $f(z) = e^z$; г) $f(z) = \sin z$.

○ а) $z^2 = (x+iy)^2 = x^2+2x \cdot iy+(iy)^2 = x^2+i \cdot 2xy-y^2 = (x^2-y^2)+i \cdot 2xy$, т. е. $u(x, y) = x^2 - y^2$; $v(x, y) = 2xy$.

б) $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{\overline{x+iy}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \cdot \frac{y}{x^2+y^2}$, т. е. $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$.

в) $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y$, т. е. $u(x, y) = e^x \cos y$; $v(x, y) = e^x \sin y$.

г) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{ix-y} - e^{-ix+y}\right) =$
$= \dfrac{1}{2i}\left(e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos(-x) + i\sin(-x))\right) = -\dfrac{i}{2}\big(\cos x(e^{-y} - e^{y}) +$
$+ i\sin x(e^{-y} + e^{y})\big) = i\cos x\cdot\dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2} + \sin x\cdot\dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2} = \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y$,
т. е. $u(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y$; $v(x, y) = \cos y \operatorname{sh} y$. ●

Для данных функций найти их действительную часть $u(x, y)$ и мнимую часть $v(x, y)$:

7.1.2. z.
7.1.3. iz.
7.1.4. $(\bar{z})^2$.
7.1.5. $z^2 - 2z + i$.
7.1.6. z^3.
7.1.7. $\operatorname{Re}\bar{z} + i\operatorname{Im} z$.
7.1.8. $z + \bar{z}$.
7.1.9. $\dfrac{1+i}{z-i}$.
7.1.10. $\dfrac{1}{z^2}$.
7.1.11. $z - \dfrac{1}{z}$.
7.1.12. $e^{\bar{z}}$.
7.1.13. e^{-iz}.
7.1.14. $\operatorname{sh} z$.
7.1.15. $\sin(2\bar{z})$.
7.1.16. $\cos z$.
7.1.17. $i\ln z$.
7.1.18. $\ln(z^2)$.
7.1.19. $\operatorname{sh}(z + i)$.

7.1.20. Для данной функции $f(z)$, где $z = re^{i\varphi}$, найти $|f(z)|$ и $\operatorname{Arg} f(z)$:
а) $f(z) = z^2$; **б)** $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$; **в)** $f(z) = e^z$.

○ **а)** *Имеем* $z^2 = (re^{i\varphi})^2 = r^2\cdot e^{i\cdot 2\varphi}$. Так как $|e^{i\varphi}| = 1$ *для любого* действительного φ, а $\operatorname{Arg}(e^{i\varphi}) = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то

$$|z^2| = r^2, \quad \operatorname{Arg}(z^2) = 2\varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Так как $\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{\overline{re^{i\varphi}}} = \dfrac{1}{re^{-i\varphi}} = \dfrac{1}{r}\cdot e^{i\varphi}$, то

$$\left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{1}{r}, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

в) Поскольку $e^z = e^{x+iy} = e^x\cdot e^{iy} = e^{r\cos\varphi}\cdot e^{ir\sin\varphi}$, то

$$|e^z| = e^{r\cos\varphi}, \quad \operatorname{Arg}(e^z) = r\sin\varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$ ●

Для данных функций $f(z)$ найти $|f(z)|$ и $\operatorname{Arg} f(z)$:

7.1.21. z.
7.1.22. $\dfrac{z}{|z|}$.
7.1.23. z^3.
7.1.24. z^n.
7.1.25. z^{-5}.

7.1.26. Определить функцию $f(z)$, где $z = x + iy$, если $\operatorname{Re} f(z) = x$ и $\operatorname{Im} f(z) = -y$.

○ Так как $z = x + iy$, а $\bar{z} = x - iy$, то $z + \bar{z} = 2x$, $z - \bar{z} = 2iy$, откуда

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} = -i\frac{z - \bar{z}}{2}. \tag{1.2}$$

Следовательно, $f(z) = x - iy = \frac{z+\bar{z}}{2} - i \cdot \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{z+\bar{z}}{2} - \frac{z-\bar{z}}{2} = \bar{z}$. Итак, $f(z) = \bar{z}$. ●

7.1.27. Определить функцию $f(z)$, где $z = x+iy$, если $\operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y$ и $\operatorname{Im} f(z) = e^x \sin y$.

○ Имеем:

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z.$$

Другой способ: воспользуемся равенствами (1.2) и (1.1). Тогда

$$f(z) = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y = e^{\frac{z+\bar{z}}{2}} \cos \frac{z-\bar{z}}{2i} + i \cdot e^{\frac{z+\bar{z}}{2}} \sin \frac{z-\bar{z}}{2i} =$$

$$= e^{\frac{z+\bar{z}}{2}} \left(\frac{1}{2} \left(e^{i\frac{z-\bar{z}}{2i}} + e^{-i\frac{z-\bar{z}}{2i}} \right) + i \cdot \frac{1}{2i} \left(e^{i\frac{z-\bar{z}}{2i}} - e^{-i\frac{z-\bar{z}}{2i}} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{z+\bar{z}}{2}} \left(e^{\frac{z-\bar{z}}{2}} + e^{-\frac{z-\bar{z}}{2}} + e^{\frac{z-\bar{z}}{2}} - e^{-\frac{z-\bar{z}}{2}} \right) = \frac{1}{2} e^{\frac{z+\bar{z}}{2}} \cdot 2e^{\frac{z-\bar{z}}{2}} = e^z. \; ●$$

Определить функцию $f(z)$, где $z = x + iy$, по заданным $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$ *и* $\operatorname{Im} f(z) = v(x,y)$*:*

7.1.28. $u = -y$, $v = x$.

7.1.29. $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

7.1.30. $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v = \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

7.1.31. $u = \operatorname{ch} y \cos x$, $v = -\operatorname{sh} y \sin x$.

7.1.32. Найти значение функции $\bar{z} - \frac{1}{z}$ в точке $3 + 2i$.

○ Имеем:

$$\overline{3+2i} - \frac{1}{3+2i} = 3 - 2i - \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = 3 - 2i - \frac{3-2i}{9+4} =$$

$$= \left(3 - \frac{3}{13}\right) + i\left(-2 + \frac{2}{13}\right) = \frac{36}{13} - i \cdot \frac{24}{13}. \; ●$$

7.1.33. Вычислить значение z^5 в точке

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Записать ответ в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

○ Так как вычисление значения

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^5$$

непосредственно в алгебраической форме довольно трудоемко, запишем число z_0 в показательной форме: $z_0 = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ (см. рис. 102); отсюда следует, что

$$z_0^5 = \left(1 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -z_0. \; ●$$

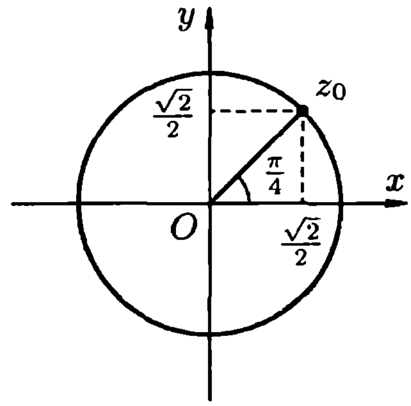


Рис. 102

7.1.34. Вычислить $\sin(\pi + i)$.

Пользуясь формулами (1.1), получим

$$\sin(\pi+i) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(\pi+i)} - e^{-i(\pi+i)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-1+i\pi} - e^{1-i\pi}\right) =$$

$$\frac{1}{2i}\left(e^{-1}e^{i\pi} - e^{1}e^{-i\pi}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-1}(\cos\pi + i\sin\pi) - e^{1}(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{-1}\cdot(-1+0) - e^{1}\cdot(-1+0)\right) = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{1}-e^{-1}}{2} = -i\cdot \operatorname{sh} 1.$$

Вычислить значения функции $f(z)$ в точках z_1, z_2. В задачах 7.1.37–7.1.38 ответ записать в показательной, тригонометрической и алгебраической формах.

7.1.35. $f(z) = z^2 - 2z + i,\ z_1 = -2 + 3i,\ z_2 = 4 - 3i.$

7.1.36. $f(z) = \frac{1}{\bar{z}} - 2i,\ z_1 = 1 - i,\ z_2 = \frac{i}{2}.$

7.1.37. $f(z) = \frac{z}{|z|},\ z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$

7.1.38. $f(z) = z^7,\ z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_2 = \sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

7.1.39. $f(z) = e^{\bar{z}},\ z_1 = 1 + i,\ z_2 = \ln 2 - 10\pi i.$

7.1.40. $f(z) = \operatorname{ch} z,\ z_1 = \frac{\pi}{2}i,\ z_2 = \ln 3 + i\frac{\pi}{2}.$

7.1.41. $f(z) = \ln(iz),\ z_1 = -1,\ z_2 = 1.$

7.1.42. $f(z) = \cos\bar{z},\ z_1 = 2\pi - i,\ z_2 = 2\pi i.$

Дополнительные задания

Для данных функций $f(z)$, где $z = x + iy$, найти их действительную часть $u(x,y)$ и мнимую часть $v(x,y)$:

7.1.43. $iz^2.$

7.1.44. $(\bar{z})^3 + 2i - 1.$

7.1.45. $\operatorname{Re}(z^2) + i\operatorname{Im}\left((\bar{z})^2\right).$

7.1.46. $\frac{z+1}{z-i}.$

7.1.47. $z\cdot|z-1|.$

7.1.48. $i\cos(\bar{z} - i).$

7.1.49. $\operatorname{sh}(iz^2)$. **7.1.50.** $e^{1/z}$.

7.1.51. $\operatorname{tg} z$.

Для данных функций $f(z)$, где $z = re^{i\varphi}$, найти $|f(z)|$ и $\operatorname{Arg} f(z)$:

7.1.52. αz, где $\alpha \in \mathbb{R}$. **7.1.53.** $z \cdot \rho e^{i\theta}$, где $\rho, \theta \in \mathbb{R}$.

7.1.54. $\dfrac{1}{z^n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Определить функцию $f(z)$, где $z = x + iy$, по заданным $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$ и $\operatorname{Im} f(z) = v(x,y)$:

7.1.55. $u = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $v = -\dfrac{1}{2xy}$.

7.1.56. $u = x^3 - 3xy^2$, $v = y^3 - 3x^2y$.

7.1.57. $u = x\dfrac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}$, $v = y\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}$.

Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0:

7.1.58. $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$, $z_0 = -2 + i$.

7.1.59. $f(z) = (\bar{z})^2 \cdot \operatorname{Im} z$, $z_0 = 1 - 2i$.

7.1.60. $f(z) = \dfrac{1}{z^6}$, $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

7.1.61. $f(z) = 2i \sin 2iz$, $z_0 = -1$.

7.1.62. $f(z) = \operatorname{sh}(\bar{z} + i)$, $z_0 = 2 - i$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

7.1.63. Могут ли у двух различных функций комплексного переменного быть

а) различные действительные части и одинаковые мнимые части;

б) одинаковые действительные части и различные мнимые части;

в) одинаковые действительные части и одинаковые мнимые части;

г) различные действительные части и различные мнимые части?

7.1.64. Верно ли, что $e^z \neq 0$ при любом $z \in \mathbb{C}$?

7.1.65. Решить уравнение $\sin z = 0$.

7.1.66. Существуют ли такие точки $z \in \mathbb{C}$, что $|\cos z| > 1$?

7.1.67. Верно ли, что функция $\sin z$ не ограничена на $\mathbb{C}$?

7.1.68. Найти все такие точки $z \in \mathbb{C}$, в которых значения функции e^z чисто мнимые.

7.1.69. Возможно ли однозначно задать функцию $f(z)$, если известно, что

а) $|f(z)| = |z|$, $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} z$ (при $\operatorname{Re} z > 0$);

б) $\operatorname{Arg} f(z) = \operatorname{Arg} z$, $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} z$ (при $\operatorname{Re} z > 0$)?

§ 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0 комплексной плоскости.

⇛ *Производной* $f'(z_0)$ функции $f(z)$ в точке z_0 называется предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0),$$

если он существует и конечен. ⇚

⇛ Если существует производная $f'(z_0)$, то функция $f(z)$ называется *дифференцируемой* в точке z_0. ⇚

Множество D точек расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ называется *областью*, если

1) множество D открыто, т. е. для каждой точки, принадлежащей D, существует окрестность этой точки, принадлежащая D;

2) множество D связно, т. е. любые две точки из D можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат D.

⇛ Функция $f(z)$ называется *аналитической в области* D, если она дифференцируема в каждой точке этой области. ⇚

Функция $f(z)$ называется *аналитической в точке* z_0, если она дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности точки z_0.

Теорема 7.1. Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$ была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, достаточно, чтобы

1) частные производные

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

существовали и были непрерывны в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) (как функции двух действительных переменных x и y);

2) в точке (x_0, y_0) были выполнены *условия Коши–Римана*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}. \tag{2.1}$$

Заметим, что условия Коши–Римана являются необходимыми для дифференцирования функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$.

В полярных координатах (r, φ) условия Коши–Римана записываются следующим образом:

$$\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v(r,\varphi)}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v(r,\varphi)}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \varphi}. \tag{2.2}$$

Если существует производная $f'(z)$, то ее можно записать одним из следующих способов:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

или

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

Для производных от функций комплексного переменного имеют место правила, аналогичные соответствующим правилам для производных от функций действительного переменного. А именно: если в точке z существуют производные $f'(z)$ и $g'(z)$, то существуют и производные $\big(C \cdot f(z)\big)'$, $\big(f(z) \pm g(z)\big)'$, $\big(f(z) \cdot g(z)\big)'$, $\big(f(z)/g(z)\big)'$, причем выполняются следующие равенства:

$$\big(C \cdot f(z)\big)' = C \cdot f'(z)', \text{ где } C \in \mathbb{C},$$
$$\big(f(z) \pm g(z)\big)' = f'(z) \pm g'(z),$$
$$\big(f(z) \cdot g(z)\big)' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z),$$
$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)} \quad (\text{при } g(z) \neq 0).$$

Если функция $f(z)$ — аналитическая в области D, то ее действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ являются функциями, *гармоническими* в D. Это значит, что у каждой из функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ существуют непрерывные в D частные производные 2-го порядка, и для каждой из них верно *уравнение Лапласа*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x, y) \in D,$$

где Δ — оператор Лапласа (см. с. 243). Если функция $u(x, y)$ (функция $v(x, y)$) является гармонической в некоторой области D (вообще говоря, односвязной[5]), то существует аналитическая в D функция $f(z)$ с действительной частью $u(x, y)$ (соответственно, с мнимой частью $v(x, y)$), определяемая с точностью до постоянного слагаемого.

7.2.1. Найти точки, в которых существует производная функции e^z, и вычислить эту производную.

---

[5] То есть ограниченной замкнутой несамопересекающейся линией. Области, описываемые в приводимых далее задачах, являются односвязными.

○ Так как (см. задачу 7.1.1в) $e^z = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y$, то

$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y.$$

Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ и выясним, в окрестностях каких точек они существуют и непрерывны, а также в каких точках плоскости выполняются условия Коши–Римана (2.1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y) = e^x \cos y,$$

т.е. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ для любых действительных x и y, и эти частные производные непрерывны во всей плоскости $\mathbb{R}^2$; кроме того,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) = e^x \sin y,$$

т.е. $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ для любых действительных x и y, и эти частные производные непрерывны во всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

Так как условия Коши–Римана (2.1) выполняются для любой пары действительных чисел (x,y), и частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ существуют и непрерывны в окрестности любой точки (x,y), то производная $f'(z)$ существует в любой точке $z = x + iy$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Найдем эту производную:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Итак, $f'(z) = (e^z)' = e^z$ $(\forall z \in \mathbb{C})$. ●

7.2.2. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = \bar{z}$ и вычислить производную.

○ Так как $\bar{z} = x - iy$, то $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -1$$

для любых действительных x и y. Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$, и первое из двух условий Коши–Римана (2.1) не выполняется ни для какой пары действительных чисел (x,y). Значит, функция $f(z) = \bar{z}$ не дифференцируема ни в какой точке $z \in \mathbb{C}$. ●

7.2.3. Найти точки, в которых существует производная функции $\frac{1}{z}$, и вычислить эту производную.

○ *Способ 1.* Так как

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2},$$

то

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ и выясним, в окрестностях каких точек они существуют и непрерывны, а также в каких точках выполняются условия Коши–Римана (2.1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\frac{\partial x}{\partial x}\cdot(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\cdot x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2) - 2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{\frac{\partial y}{\partial y}\cdot(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\cdot y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= -\frac{(x^2+y^2) - 2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

т. е. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ для любой пары действительных чисел (x, y), если $x^2+y^2 \neq 0$. Эти частные производные существуют и непрерывны в окрестности каждой точки плоскости $\mathbb{R}^2$, за исключением точки $(0, 0)$. Далее,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\frac{\partial x}{\partial y}\cdot(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\cdot x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{0\cdot(x^2+y^2) - 2y\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{\frac{\partial y}{\partial x}\cdot(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\cdot y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= -\frac{0\cdot(x^2+y^2) - 2x\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

т. е. $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ для любой пары действительных чисел (x, y), если $x^2+y^2 \neq 0$. Эти частные производные существуют и непрерывны в окрестности каждой точки из $\mathbb{R}^2$, за исключением точки $(0, 0)$.

Так как условия Коши–Римана (2.1) выполняются для любой пары действительных чисел (x, y), кроме пары $(0, 0)$, и частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ существуют и непрерывны в окрестности любой точки из $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, то производная $f'(z)$ существует в любой точке $z = x + iy$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением точки $z = 0$.

Найдем эту производную:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + i \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 + i \cdot 2xy}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{y^2 - x^2 + i \cdot 2xy}{(x+iy)^2(x-iy)^2} = \frac{-(x^2 - y^2 - i \cdot 2xy)}{(x+iy)^2(x^2 - y^2 - i \cdot 2xy)} = -\frac{1}{(x+iy)^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

Итак, $f'(z) = \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$ $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

Как видно из решения, нахождение производной таким способом не вполне очевидно. В данном примере более целесообразно вычисление производной в полярных координатах.

Способ 2. Так как

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{r}\cos\varphi + i\left(-\frac{1}{r}\sin\varphi\right),$$

то

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{r}\cos\varphi, \quad v(r,\varphi) = -\frac{1}{r}\sin\varphi.$$

Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial r}$ и $\frac{\partial v}{\partial r}$:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cos\varphi\right) = -\frac{1}{r^2}\cos\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{r}\sin\varphi\right) = \frac{1}{r^2}\sin\varphi.$$

Вычисление частных производных $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$, а также проверку условий Коши–Римана (2.2) предоставляем читателю.

Найдем производную функции $f(z) = \frac{1}{z}$:

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{r}{z}\left(-\frac{1}{r^2}\cos\varphi + i \cdot \frac{1}{r^2}\sin\varphi\right) =$$

$$= -\frac{1}{zr}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = -\frac{1}{re^{i\varphi} \cdot r} \cdot e^{-i\varphi} = -\frac{1}{re^{i\varphi} \cdot re^{i\varphi}} = -\frac{1}{z^2}.$$

Получили тот же результат, что и при решении первым способом. ●

7.2.4. Указать область дифференцируемости функции $f(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) и найти $f'(z)$.

○ Так как

$$f(z) = z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

то

$$u(r,\varphi) = r^n\cos n\varphi, \quad v(r,\varphi) = r^n\sin n\varphi.$$

Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \frac{\partial v}{\partial \varphi}$ и выясним, где они существуют и непрерывны, а также в каких точках выполняются условия Коши–Римана (2.2):

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(r^n\cos n\varphi) = nr^{n-1}\cos n\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}(r^n\sin n\varphi) = nr^n\cos n\varphi,$$

т. е. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}$ для любой пары чисел (r, φ), $r > 0$; эти частные производные существуют и непрерывны в любой точке (r, φ) при $r > 0$. Далее,

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(r^n \sin n\varphi) = nr^{n-1}\sin n\varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}(r^n \cos n\varphi) = -nr^n \sin n\varphi,$$

т. е. $\dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$ для любой пары чисел (r, φ), $r > 0$; эти частные производные существуют и непрерывны в любой точке (r, φ) при $r > 0$.

Так как условия Коши–Римана (2.2) выполняются для любой пары чисел (r, φ) (при $r > 0$) и частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial v}{\partial r}$, $\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}$ существуют и непрерывны в окрестности каждой точки (r, φ) (при $r > 0$), то производная $f'(z)$ существует в любой точке $z = re^{i\varphi}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (за исключением, может быть, точки $z = 0$).

Найдем эту производную:

$$f'(z) = (z^n)' = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{r}{re^{i\varphi}}\left(nr^{n-1}\cos n\varphi + inr^{n-1}\sin n\varphi\right) =$$
$$= \frac{nr^{n-1}}{e^{i\varphi}}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = nr^{n-1}\cdot\frac{e^{in\varphi}}{e^{i\varphi}} = nr^{n-1}\cdot e^{i(n-1)\varphi} =$$
$$= n\cdot\left(re^{i\varphi}\right)^{n-1} = nz^{n-1}.$$

Итак, $f'(z) = (z^n)' = nz^{n-1}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ $(z \neq 0)$. Проверку условий Коши–Римана (2.1) в точке $z = 0$ и вычисление производной функции в этой точке предоставляем читателю. ●

Для данной функции $f(z)$ указать точки, в которых существует производная $f'(z)$, и найти производную в этих точках:

7.2.5. $f(z) = i\bar{z}$.

7.2.6. $f(z) = z + 2i$.

7.2.7. $f(z) = iz^2 - 3z + 1$.

7.2.8. $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$.

7.2.9. $f(z) = z^6$.

7.2.10. $f(z) = \dfrac{1}{z^3}$.

7.2.11. $f(z) = \ln(z^2)$.

7.2.12. $f(z) = \mathrm{Ln}(z^2)$.

7.2.13. $f(z) = \mathrm{ch}\,z$.

7.2.14. $f(z) = \sin\bar{z}$.

7.2.15. $f(z) = \sin(z + 2i)$.

7.2.16. $f(z) = \cos(iz)$.

7.2.17. Найти множество точек, в которых функция $v(x, y) = 2xy - 3$ удовлетворяет условию $\Delta v = 0$. Определить, существует ли аналитическая в некоторой области D функция $f(z)$ $(z = x + iy)$, для которой $\mathrm{Im}\, f = v$. Если такая функция $f(z)$ существует, то найти ее.

◐ 1. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

для любой пары действительных чисел x и y, т.е. функция $v(x, y)$ является гармонической во всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Значит, существует такая аналитическая во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функция $f(z)$, что

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

2. Найдем действительную часть $u(x, y)$. Первое из условий Коши–Римана (2.1) дает равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x$, из которого возможно определить функцию $u(x, y)$ с точностью до слагаемого $\varphi(y)$ — функции, зависящей только от y и не зависящей от x, — следующим образом:

$$u(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \varphi(y) = \int 2x\, dx + \varphi(y) = x^2 + \varphi(y).$$

Так как по второму из условий (2.1) выполняется равенство $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2y$, то

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big(x^2 + \varphi(y)\big) = -2y,$$

т.е.

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(x^2\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(\varphi(y)\big) = 0 + \varphi'(y) = -2y.$$

Из последнего равенства имеем:

$$\varphi(y) = \int (-2y)\, dy = -y^2 + C,$$

где $C = \text{const}$, $C \in \mathbb{R}$. Значит, $u(x, y) = x^2 - y^2 + C$, откуда окончательно

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = (x^2 - y^2 + C) + i(2xy - 3) =$$
$$= (x^2 - y^2 + i \cdot 2xy) + C - 3i = (x + iy)^2 + C - 3i = z^2 + C - 3i. \quad ●$$

7.2.18. Найти множество точек, в которых функция $u(x, y) = e^x \cos y$ удовлетворяет условию $\Delta u = 0$. Определить, существует ли аналитическая в некоторой области D функция $f(z)$ $(z = x + iv)$, для которой $\operatorname{Re} f = u$. Если такая функция $f(z)$ существует, то найти ее.

○ 1. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big(e^x \cos y\big) = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big(e^x \cos y\big) = -e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\big(e^x \cos y\big) = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\big(-e^x \cos y\big) = -e^x \cos y.$$

Следовательно,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Таким образом, функция $u(x, y)$ гармоническая в плоскости $\mathbb{C}$, и значит, существует такая аналитическая в $\mathbb{C}$ функция $f(z)$, что $f(z) = f(x+iy) = = u(x, y) + iv(x, y)$.

2. Найдем мнимую часть $v(x, y)$. Первое из условий Коши–Римана (2.1) дает равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$, откуда возможно определить функцию $v(x, y)$ с точностью до слагаемого $\varphi(x)$ — функции, зависящей только от x и не зависящей от y, — следующим образом:

$$v(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial y}\, dy + \varphi(x) = \int e^x \cos y\, dy + \varphi(x) = e^x \sin y + \varphi(x).$$

Так как по второму из условий (2.1) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(-e^x \sin y) = e^x \sin y,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(e^x \sin y + \varphi(x)\big) = e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(e^x \sin y\big) + \frac{\partial}{\partial x}\big(\varphi(x)\big) = e^x \sin y + \varphi'(x) = e^x \sin y.$$

Следовательно, $\varphi'(x) = 0$, откуда $\varphi(y) = C$, где $C \in \mathbb{R}$. Значит, $v(x, y) = = e^x \sin y + C$, и

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = e^x \cos y + i(e^x \sin y + C) =$$
$$= e^x(\cos y + i \sin y) + iC = e^z + iC. \qquad \bullet$$

7.2.19. Выяснить, будет ли скалярное поле $v(x, y) = \dfrac{\cos x}{y}$ гармоническим (см. с. 243). Существует ли аналитическая в некоторой области D функция $f(z)$ $(z = x + iv)$, для которой $\operatorname{Im} f = v$? Если такая функция $f(z)$ существует, то найти ее.

○ Найдем частные производные:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos x}{y}\right) = -\frac{\sin x}{y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos x}{y}\right) = -\frac{\cos x}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\cos x}{y}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2\cos x}{y^3}.$$

Следовательно,

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\cos x}{y} + \frac{2\cos x}{y^3} = \frac{\cos x}{y^3}(2 - y^2).$$

Отсюда видно, что $\Delta v = 0$ при $y = \pm\sqrt{2}$ или при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}, y \neq 0$.

Множество всех точек, в которых $\Delta v = 0$, не образует никакой области в $\mathbb{R}^2$, и значит, не существует никакой аналитической функции $f(z) = f(x + iy)$ с мнимой частью $v(x, y)$. $\bullet$

Найти множество точек, в которых функция $u(x, y)$ (или $v(x, y)$) является гармонической. Выяснить, существует ли аналитическая в некоторой области D функция $f(z)$ ($z = x + iy$), для которой $\operatorname{Re} f = u$ (соответственно $\operatorname{Im} f = v$). Если такая функция $f(z)$ существует, то найти ее.

7.2.20. $u(x, y) = x$.

7.2.21. $v(x, y) = y^2 - x^2 - 2$.

7.2.22. $v(x, y) = -\frac{1}{y}$.

7.2.23. $v(x, y) = 3xy^2 - x^3 + 7y$.

7.2.24. $u(x, y) = \cos y \operatorname{ch} x$.

7.2.25. $u(x, y) = e^x \operatorname{ch} y$.

7.2.26. $v(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

7.2.27. $v(x, y) = -\cos 2x \operatorname{sh} 2y + 3x$.

7.2.28. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

7.2.29. $v(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + 2y$.

Дополнительные задания

Для данной функции $f(z)$ указать точки, в которых существует производная $f'(z)$, и найти производную в этих точках:

7.2.30. $f(z) = \operatorname{Im} z$.

7.2.31. $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.

7.2.32. $f(z) = \ln(iz)$.

7.2.33. $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$.

7.2.34. $f(z) = e^{3z}$.

7.2.35. $f(z) = i \operatorname{sh} \bar{z}$.

7.2.36. Доказать, что не существует аналитической на всей плоскости $\mathbb{C}$ функции, для которой функция $x^2 - y$ являлась бы мнимой частью.

Найти множество точек, в которых функция $u(x, y)$ является гармонической. Найти аналитическую на этом множестве функцию $f(z) = f(x + iy)$, для которой функция $u(x, y)$ будет являться действительной частью. Указать соответствующую мнимую часть $v(x, y)$.

7.2.37. $u(x, y) = y + x^2 - y^2 + 1$.

7.2.38. $u(x, y) = e^{-y} \cos x - x$.

7.2.39. $u(x, y) = -\dfrac{y}{2(x^2 + y^2)} + x^2 - y^2$.

7.2.40. $u(x, y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

7.2.41. Может ли функция быть дифференцируемой в точке z_0 и не быть аналитической в этой точке?

7.2.42. Может ли функция быть аналитической только в одной точке?

7.2.43. Может ли функция, аналитическая в области, быть:

а) суммой двух функций, не аналитических в этой области;

б) произведением двух функций, не аналитических в этой области;

в) частным двух функций, не аналитических в этой области;

г) суммой аналитической и не аналитической в этой области функций;

д) произведением ненулевой аналитической и не аналитической в этой области функций?

7.2.44. Верно ли, что функция $f(z)$ аналитическая в области D, если $\operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$ — функции, гармонические в этой области?

7.2.45. Что можно сказать о двух аналитических в односвязной области функциях, если их действительные части:

а) совпадают;

б) отличаются на постоянное слагаемое;

в) отличаются на постоянный множитель?

7.2.46. Доказать, что для дифференцируемой функции $f(z)$:

а) $\dfrac{\partial}{\partial z}(\operatorname{Re} f(z)) = \dfrac{1}{2}f'(z)$; б) $\dfrac{\partial}{\partial z}(\operatorname{Im} f(z)) = \dfrac{1}{2i}f'(z)$.

7.2.47. Доказать, что уравнение Лапласа может быть записано в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

⇛ Пусть на комплексной плоскости C задана ориентированная кусочно-гладкая кривая l, на которой определена функция $f(z)$. Разобьем эту кривую на n частей $(z_{k-1},\ z_k)$ точками $z_0, z_1, \ldots, z_n$, пронумерованными в направлении от z_0 — начальной точки кривой l, до z_n — конечной точки l, и на каждой части выберем какую-нибудь точку c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. *Интегралом от функции $f(z)$ по кривой l* называется предел:

$$\lim_{\max|z_k - z_{k-1}| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_l f(z)\,dz, \tag{3.1}$$

если этот предел существует и не зависит от выбора промежуточных точек z_k и c_k. ⇚

Если функция $f(x)$ непрерывна на кривой l, то интеграл (3.1) существует. Если $z = x + iy$ и $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то

$$\int_l f(z)\,dz = \int_l \big(u(x,y) + iv(x,y)\big)\,d(x+iy) = \int_l \big(u(x,y) + iv(x,y)\big)(dx + i\,dy) =$$

$$= \int_l \big(u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy\big) + i\int_l \big(v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy\big), \tag{3.2}$$

т. е. интеграл (3.1) может быть записан в виде суммы двух криволинейных интегралов 2-го рода.

Если кривая l задана уравнением $y = y(x)$ или парой параметрических уравнений $y = y(t)$, $x = x(t)$, то в формулах (3.2) можно записать

$$dy = dy(x) = y'(x)\,dx$$

или, соответственно,

$$dx = dx(t) = x'(t)\,dt, \quad dy = dy(t) = y'(t)\,dt.$$

Довольно часто в качестве параметра t выбирается угол $\varphi = \arg z$.

⇛ Функция $F(z)$ называется *первообразной* функции $f(z)$ в области D, если $F(z)$ дифференцируема в этой области, и $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in D$. ⇚

Теорема 7.2. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, а l — некоторая кривая (с начальной точкой z_1 и конечной точкой z_2), целиком лежащая в D. Тогда

1) существует первообразная $F(z)$ для $f(z)$ в D, и для интеграла $\int_l f(z)\,dz$ верна *формула Ньютона–Лейбница*:

$$\int_l f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1), \tag{3.3}$$

т. е. этот интеграл не зависит от вида кривой l, а зависит от начальной и конечной точек z_1 и z_2;

2) если l — замкнутая кривая, то верна *теорема Коши*:

$$\oint_l f(z)\,dz = 0 \tag{3.4}$$

(через $\oint_l$ обозначается интеграл по замкнутой кривой l);

3) если точка z_0 лежит внутри замкнутой кривой l, то верна *интегральная формула Коши*:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \tag{3.5}$$

и

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.6}$$

(обход кривой l совершается против часовой стрелки).

7.3.1. Вычислить интеграл $J = \int_l \operatorname{Im} z\,dz$, где l:

а) отрезок прямой от точки 0 до точки $1 + 2i$;

б) дуга параболы $y = 2x^2$ от точки 0 до точки $1 + 2i$.

а) Так как l — отрезок прямой $y = 2x$ (рис. 103) и $\operatorname{Im} z = y$, то

$$J = \int_l y\, d(x+iy) = \int_0^1 2x\, d(x + i\cdot 2x) = \int_0^1 2x\cdot(dx + 2i\,dx) =$$
$$= \int_0^1 2x\,dx + \int_0^1 2x\cdot 2i\,dx = 2\int_0^1 x\,dx + 4i\int_0^1 x\,dx =$$
$$= (2+4i)\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = (1+2i)\cdot(1^2 - 0^2) = 1 + 2i.$$

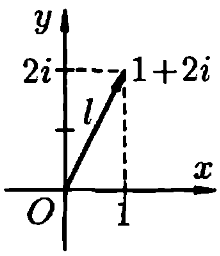


Рис. 103

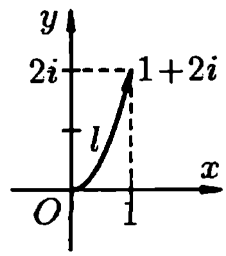


Рис. 104

б) Так как для всех точек l имеем $y = 2x^2$, то (рис. 104)

$$J = \int_l y\, d(x+iy) = \int_0^1 2x^2\, d(x + i\cdot 2x^2) = \int_0^1 2x^2\big(dx + 2i\,d(x^2)\big) =$$
$$= \int_0^1 2x^2(dx + 2i\cdot 2x\,dx) = 2\int_0^1 x^2\,dx + 8i\int_0^1 x^3\,dx =$$
$$= 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 8i\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(1-0) + 2i(1-0) = \frac{2}{3} + 2i.$$

Этот пример показывает, что если l — кривая в области D с начальной точкой z_1 и конечной точкой z_2, а $f(z)$ не аналитическая функция в D, то интеграл

$$\int_l f(z)\,dz,$$

вообще говоря, зависит не только от точек z_1 и z_2, а также и от вида кривой l. ●

7.3.2. Вычислить интеграл

$$J = \int_l (i\bar{z} + z^2)\,dz,$$

где l — часть окружности $|z| = 2$, $\arg z \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Так как для всех точек l выполняется равенство $r = |z| = 2$ (рис. 105), то

$$z = re^{i\varphi} = 2e^{i\varphi},\quad \bar{z} = 2e^{-i\varphi},\quad z^2 = \left(2e^{i\varphi}\right)^2 = 4e^{i\cdot 2\varphi},$$

$$dz = d(2e^{i\varphi}) = 2ie^{i\varphi}\,d\varphi, \quad \varphi = \arg z \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Отсюда получаем:

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(i\cdot 2e^{-i\varphi} + 4e^{2i\varphi}\right)2ie^{i\varphi}\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(i^2\cdot 4e^{-i\varphi+i\varphi} + 8ie^{2i\varphi+i\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-4+8ie^{3i\varphi}\right)d\varphi = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi + 8i\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{3i\varphi}\,d\varphi = -4\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + 8i\cdot\frac{e^{3i\varphi}}{3i}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= -4\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{8}{3}\left(e^{3i\pi}-e^{3i\frac{\pi}{2}}\right) = -4\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{8}{3}(-1-(-i)) = -2\pi-\frac{8}{3}+\frac{8}{3}i. \quad \bullet$$

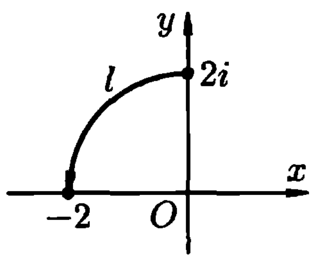


Рис. 105

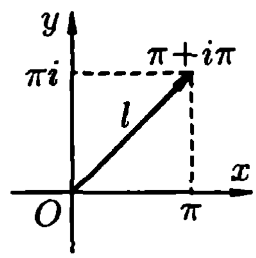


Рис. 106

7.3.3. Вычислить интеграл

$$J = \int_l \sin z\,dz,$$

где l — отрезок прямой от точки 0 до точки $\pi + i\pi$.

❍ Так как всюду на l имеем $y = x$ (рис. 106), а $\sin z = \sin x\operatorname{ch} y + i\cos x\operatorname{sh} y$ (см. задачу 7.1.1), то

$$J = \int_l (\sin x\operatorname{ch} y + i\cos x\operatorname{sh} y)\,d(x+iy) =$$

$$= \int_0^{\pi}(\sin x\operatorname{ch} x + i\cos x\operatorname{sh} x)\,d(x+ix) = \int_0^{\pi}(\sin x\operatorname{ch} x - \cos x\operatorname{sh} x)\,dx +$$

$$+ i\int_0^{\pi}(\sin x\operatorname{ch} x + \cos x\operatorname{sh} x)\,dx = (J_1 - J_2) + i(J_1 + J_2),$$

где

$$J_1 = \int_0^{\pi}\sin x\operatorname{ch} x\,dx; \quad J_2 = \int_0^{\pi}\cos x\operatorname{sh} x\,dx.$$

Применяя дважды формулу интегрирования по частям и учитывая, что $d(\sin x) = \cos x\,dx$, $d(\cos x) = -\sin x\,dx$, $d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x\,dx$, $d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x\,dx$, найдем J_1 и J_2:

$$J_1 = \int_0^\pi \sin x\, d(\operatorname{sh} x) = \sin x \operatorname{sh} x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{sh} x\, d(\sin x) =$$

$$= \sin\pi \operatorname{sh}\pi - \sin 0 \operatorname{sh} 0 - \int_0^\pi \operatorname{sh} x \cos x\, dx = 0 - \int_0^\pi \cos x\, d(\operatorname{ch} x) =$$

$$= -\left(\cos x \operatorname{ch} x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{ch} x\, d(\cos x)\right) = -(\cos\pi \operatorname{ch}\pi - \cos 0 \operatorname{ch} 0) +$$

$$+ \int_0^\pi \operatorname{ch} x(-\sin x)\, dx = -(-1\cdot\operatorname{ch}\pi - 1\cdot 1) - \int_0^\pi \sin x \operatorname{ch} x\, dx =$$

$$= \operatorname{ch}\pi + 1 - J_1,$$

откуда $2J_1 = \operatorname{ch}\pi + 1$, следовательно, $J_1 = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\pi + 1)$.

Аналогично получаем

$$J_2 = \int_0^\pi \cos x\, d(\operatorname{ch} x) = \cos x \operatorname{ch} x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{ch} x\, d(\cos x) =$$

$$= \cos\pi \operatorname{ch}\pi - \cos 0 \operatorname{ch} 0 + \int_0^\pi \operatorname{ch} x \sin x\, dx = -\operatorname{ch}\pi - 1 + \int_0^\pi \sin x\, d(\operatorname{sh} x) =$$

$$= -\operatorname{ch}\pi - 1 + \sin x \operatorname{sh} x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{sh} x\, d(\sin x) =$$

$$= -\operatorname{ch}\pi - 1 + (\sin\pi \operatorname{sh}\pi - \sin 0 \operatorname{sh} 0) - \int_0^\pi \operatorname{sh} x \cos x\, dx = -\operatorname{ch}\pi - 1 - J_2,$$

откуда $2J_2 = -(\operatorname{ch}\pi + 1)$, т.е. $J_2 = -\frac{1}{2}(\operatorname{ch}\pi + 1) = -J_1$.

Итак,

$$J = \int_l \sin z\, dz = (J_1 - J_2) + i(J_1 + J_2) = 2J_1 + i\cdot 0 = \operatorname{ch}\pi + 1. \qquad \bullet$$

7.3.4. Вычислить интеграл

$$J = \int_l z^k\, dz,$$

где:

а) l — окружность $|z| = 1$, $\arg z \in [0, 2\pi]$ (точка z совершает полный оборот по окружности $|z| = 1$);

б) l — окружность $|z| = 1$, $\arg z \in [0, 4\pi]$ (точка z совершает два полных оборота по окружности $|z| = 1$).

○ Так как для всех точек l выполняется равенство $r = |z| = 1$ (рис. 107), то

$$z = re^{i\varphi} = e^{i\varphi}, \quad z^k = e^{ik\varphi}, \quad dz = d(e^{i\varphi}) = ie^{i\varphi}\, d\varphi.$$

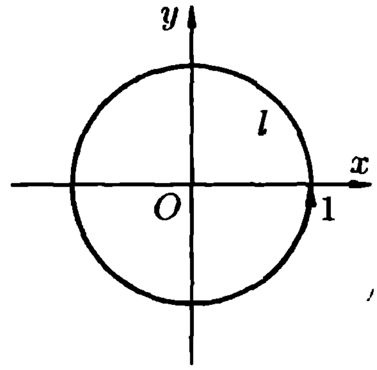


Рис. 107

а) Вычислим интеграл при $\varphi = \arg z \in [0, 2\pi]$:

$$J = \int\limits_0^{2\pi} e^{ik\varphi} \cdot ie^{i\varphi}\, d\varphi = i \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \begin{cases} i \int\limits_0^{2\pi} e^0\, d\varphi = i\varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i, & \text{при } k+1=0, \text{ т.е. } k=-1; \\ i\dfrac{e^{i(k+1)\varphi}}{i(k+1)}\Big|_0^{2\pi} = \dfrac{1}{k+1}\left(e^{i(k+1)\cdot 2\pi} - e^{i(k+1)\cdot 0}\right) = 0, & \text{при } k+1 \neq 0. \end{cases}$$

Итак,

$$\int\limits_l \frac{dz}{z} = 2\pi i \text{ (в случае } k=-1\text{), и } \int\limits_l z^k\, dz = 0 \text{ (при } k \neq -1\text{)},$$

в частности,

$$\int\limits_l z\, dz = \int\limits_l z^2\, dz = \int\limits_l z^{10}\, dz = \int\limits_l \frac{dz}{z^2}\, dz = \int\limits_l \frac{dz}{z^3}\, dz = \int\limits_l \frac{dz}{z^{100}}\, dz = 0.$$

б) Вычислим интеграл при $\varphi = \arg z \in [0, 4\pi]$:

$$J = \int\limits_0^{4\pi} e^{ik\varphi} \cdot ie^{i\varphi}\, d\varphi = i \int\limits_0^{4\pi} e^{i(k+1)\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \begin{cases} i \int\limits_0^{4\pi} e^0\, d\varphi = i\varphi \Big|_0^{4\pi} = 4\pi i, & \text{при } k=-1; \\ i\dfrac{e^{i(k+1)\varphi}}{i(k+1)}\Big|_0^{4\pi} = \dfrac{1}{k+1}\left(e^{i(k+1)\cdot 4\pi} - e^{i(k+1)\cdot 0}\right) = 0, & \text{при } k \neq -1. \end{cases}$$

Таким образом, для такой кривой l получим

$$\int\limits_l \frac{dz}{z} = 4\pi i \text{ (в случае } k=-1\text{) и } \int\limits_l z^k\, dz = 0 \text{ (при } k \neq -1\text{)}.$$

7.3.5. Используя аналитичность подынтегральной функции, вычислить интеграл
$$\int\limits_l \sin z\,dz,$$
где l — отрезок прямой от точки O до точки $\pi + i\pi$.

○ Функция $\sin z$ — аналитическая на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а функция $(-\cos z)$, очевидно, является первообразной для $\sin z$ в $\mathbb{C}$, следовательно,
$$\int\limits_l \sin z\,dz = (-\cos z)\Big|_0^{\pi+i\pi} = -(\cos(\pi+i\pi) - \cos 0) =$$
$$[\text{т. к.} \cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y]$$
$$= -(\cos\pi \operatorname{ch}\pi - i\sin\pi \operatorname{sh}\pi - 1) = -(-\operatorname{ch}\pi - 1) = \operatorname{ch}\pi + 1$$
(сравните с задачей 7.3.3). ●

7.3.6. Вычислить интеграл
$$\oint\limits_l \frac{z^2dz}{z+i}$$
по замкнутой кривой l, используя формулы (3.4), (3.5) или (3.6) (обход кривой осуществляется против часовой стрелки).

а) l: $|z| = \frac{1}{2}$;   б) l: $|z+i| = 1$.

○ а) Так как функция
$$\frac{z^2}{z+i}$$
аналитична на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, кроме точки $-i$, которая не лежит внутри окружности $|z| = \frac{1}{2}$ и на этой окружности, то по теореме Коши (3.4) получим:
$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^2dz}{z+i} = 0.$$

б) Так как функция $f(z) = z^2$ аналитична на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и точка $z_0 = -i$ лежит внутри окружности $|z+i| = 1$, то по интегральной формуле Коши (3.5) получим:
$$f(z_0 = -i) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z+i|=1} \frac{z^2}{z+i}\,dz,$$
откуда
$$\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{z^2}{z+i}dz = 2\pi i \cdot f(z_0 = -i) = 2\pi i \cdot (-i)^2 = 2\pi i \cdot (-1) = -2\pi i. \quad ●$$

7.3.7. Вычислить интеграл
$$\oint\limits_l \frac{dz}{(z+2)^3 z}$$

по замкнутой кривой l, используя формулы (3.4)–(3.6) (обход кривой осуществляется против часовой стрелки).

а) l: $|z-2|=1$; б) l: $|z|=1$;

в) l: $|z+2|=1$.

○ а) Так как подынтегральная функция $\frac{1}{(z+2)^3 z}$ аналитична на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением точек (-2) и 0, которые не лежат внутри окружности $|z-2|=1$ и на этой окружности, то по теореме Коши получим:

$$\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{dz}{(z+2)^3 z} = 0.$$

б) Так как функция $f(z) = \frac{1}{(z+2)^3}$ аналитическая на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением точки (-2), которая не лежит внутри окружности $|z|=1$ и на этой окружности, а точка $z_0 = 0$ лежит внутри этой окружности, то по интегральной формуле Коши получим:

$$f(z_0 = 0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{\frac{1}{(z+2)^3}}{z-0}\,dz,$$

откуда

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(z+2)^3 z} = 2\pi i \cdot f(z_0=0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{(0+2)^3} = 2\pi i \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4}.$$

в) Так как функция $f(z) = \frac{1}{z}$ аналитична на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением нулевой точки, которая не лежит внутри окружности $|z+2|=1$ и на этой окружности, а точка $z_0 = -2$ лежит внутри этой окружности, то по формуле (3.6) получим:

$$f''(z_0 = -2) = \frac{2!}{2\pi i} \oint\limits_{|z+2|=1} \frac{\frac{1}{z}}{(z+2)^3}\,dz,$$

откуда

$$\oint\limits_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^3 z} = \frac{2\pi i}{2!} f''(z_0=-2) = \pi i \cdot \left(\frac{1}{z}\right)'' \Big|_{z_0=-2} =$$

$$= \pi i \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)' \Big|_{z_0=-2} = \pi i \cdot \frac{2}{z^3}\Big|_{z_0=-2} = \pi i \cdot \frac{2}{(-2)^3} = -\frac{\pi i}{4}. \quad \bullet$$

Вычислить интегралы:

7.3.8. $\int\limits_l \operatorname{Re} z\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = i$.

7.3.9. $\int\limits_l \operatorname{Im} z\,dz$, где:

а) l — отрезок прямой от точки $z_1 = 2$ до точки $z_2 = 3$;

б) l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$;

в) l — дуга параболы $y = x^2$ от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1+i$.

7.3.10. $\int\limits_l (z + \bar{z})\,dz$, где:

а) l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = -1 + i$;

б) l — дуга параболы $y=x^2$ от точки $z_1 =0$ до точки $z_2=-1+i$.

7.3.11. $\int\limits_l |z|\,dz$, где:

а) l — дуга окружности $|z| = 1$ от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = -1$;

б) l — отрезок прямой от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = -1$;

в) l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 2 - 2i$.

7.3.12. $\int\limits_l \frac{dz}{z}$, где l — дуга окружности $|z| = 2$ от точки $z_1 = 2$ до точки $z_2 = 2e^{2\pi i}$.

7.3.13. $\int\limits_l |z|^2\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

7.3.14. $\int\limits_l (z^2 - z)\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = i$.

7.3.15. $\int\limits_l (2i - z)\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.

7.3.16. $\int\limits_l \operatorname{Re}(z^2 - z)\,dz$, где l — дуга параболы $y = 2x^2$ от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + 2i$.

7.3.17. $\int\limits_l (iz^2 + 2z)\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.

7.3.18. $\int\limits_l (z^2 - 3iz)\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = i$.

7.3.19. $\int\limits_l (z^3 - 1)\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.

7.3.20. $\int\limits_l (iz^3 + 3)\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = i$.

7.3.21. $\int\limits_l e^z\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = i$ до точки $z_2 = 1 + i$.

7.3.22. $\int\limits_l e^{\bar{z}}\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = \frac{\pi}{2}i$.

7.3.23. $\int\limits_l \sin z\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = i$.

7.3.24. $\int\limits_l \operatorname{ch} z\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = \pi - \pi i$.

Используя аналитичность подынтегральной функции, вычислить интегралы:

7.3.25. $\int\limits_l (iz^3 + 3)\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = i$ (см. также задачу 7.3.20).

7.3.26. $\int\limits_l \operatorname{ch} z\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = \pi - \pi i$ (см. также задачу 7.3.24).

7.3.27. $\int\limits_l z^3\,dz$, где l — часть эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ от точки $z_1 = 2i$ до точки $z_2 = -3$ (обход осуществляется против часовой стрелки).

Дополнительные задания

Вычислить интегралы:

7.3.28. $\int\limits_l (z - \bar{z})\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = \frac{\pi}{2}$ до точки $z_2 = 2\pi$.

7.3.29. $\int\limits_l |z|\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 3 + 2i$.

7.3.30. $\int\limits_l z|z|\,dz$, где l — дуга окружности $|z| = 1$ от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = e^{2\pi i}$.

7.3.31. $\int\limits_l |z|^2\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = \sqrt{3} + i$.

7.3.32. $\int\limits_l (iz^2 + z)\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = i$ до точки $z_2 = 1$.

7.3.33. $\int\limits_l \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im}(z^2)\,dz$, где l — дуга параболы $y = 2x^3$ от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + 2i$.

7.3.34. $\int\limits_l \operatorname{Im} z\,dz$, где l — дуга окружности $|z| = 3$ от точки $z_1 = 3$ до точки $z_2 = 3e^{2\pi i}$.

7.3.35. $\int\limits_l e^{\bar{z}}\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = \pi + \pi i$.

7.3.36. $\int\limits_l \operatorname{Re}(\sin z)\cos z\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = \frac{1}{2}(\pi - i)$ до точки $z_2 = \frac{1}{2}(\pi + i)$.

7.3.37. $\int\limits_l z\sin 2z\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 3$ до точки $z_2 = 1 + i$ (функция $z\sin 2z$ аналитична в $\mathbb{C}$).

Вычислить интегралы по замкнутой кривой, используя формулы (3.4), (3.5) *или* (3.6) *(обход кривой осуществляется против часовой стрелки).*

7.3.38. $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin z \cdot \sin(z-1)}{z(z-1)}\,dz$.

7.3.39. $\oint\limits_l \dfrac{\sin z}{(z^2 + \pi^2)^2}\,dz$.

а) l: $|z| = 1$; б) l: $|z - \pi i| = 1$;
в) l: $|z + \pi i| = 1$.

7.3.40. $\oint\limits_l \dfrac{dz}{z^5 - z^3}$.

а) l: $|z| = \frac{1}{2}$; б) l: $|z - 1| = \frac{1}{2}$;
в) l: $|z + 1| = \frac{1}{2}$.

7.3.41. $\oint\limits_l \dfrac{z}{z+1}\,dz$.

а) l: $|z| = \frac{1}{2}$; б) l: $|z| = 2$.

7.3.42. $\oint\limits_l \dfrac{\cos z}{z - \pi}\,dz$.

а) l: $|z - \pi| = 1$; б) l: $|z| = 1$.

7.3.43. $\oint\limits_l \frac{z\,dz}{(z-1)^2}$.

а) l: $|z| = \frac{1}{2}$; б) l: $|z| = 2$.

7.3.44. $\oint\limits_l \frac{\sin z\,dz}{z}$.

а) l: $|z| = 1$; б) l: $|z-1| = \frac{1}{2}$.

7.3.45. $\oint\limits_l \frac{\sin z\,dz}{z^3}$.

а) l: $|z| = 1$; б) l: $|z-1| = \frac{1}{2}$.

7.3.46. $\oint\limits_l \frac{dz}{z^2-1}$.

а) l: $|z-1| = 1$; б) l: $|z+1| = 1$;

в) l: $|z| = \frac{1}{2}$.

7.3.47. $\oint\limits_l \frac{dz}{(z^2+1)^3}$.

а) l: $|z-i| = 1$; б) l: $|z+i| = 1$;

в) l: $|z| = \frac{1}{2}$.

7.3.48. $\oint\limits_l \frac{dz}{(z+1)^3(z-1)^2}$.

а) l: $|z-1| = 1$; б) l: $|z+1| = 1$;

в) l: $|z| = \frac{1}{2}$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

7.3.49. Пусть l_1 — дуга некоторой кривой l с начальной точкой z_1 и конечной точкой z_2, а l_2 — дуга той же кривой с начальной точкой z_2 и конечной точкой z_1 (множества точек на l_1 и l_2 совпадают). Что можно сказать об интегралах

$$\int\limits_{l_1} f(z)\,dz \quad \text{и} \quad \int\limits_{l_2} f(z)\,dz\,?$$

7.3.50. Что можно сказать об интеграле

$$\int\limits_l \operatorname{Re} f(z)\,dz,$$

где l — отрезок на мнимой оси, а функция $f(z)$ непрерывна на этом отрезке?

7.3.51. Если

$$\oint\limits_l f(z)\,dz = 0,$$

следует ли из этого, что $f(z)$ — аналитическая функция внутри замкнутой кривой l?

7.3.52. Доказать равенство:

$$\int_l \alpha f(z)\,dz = \alpha \int_l f(z)\,dz.$$

7.3.53. Вычислить $\displaystyle\int_{|z|=1} \operatorname{ctg} z\,dz.$

7.3.54. Верно ли, что для любой функции $f(z)$ и любой кривой l выполняется неравенство:

а) $\displaystyle\int_l |f(z)|\,dz \geqslant 0;$ б) $\displaystyle\int_l f^2(z)\,dz \geqslant 0$?

7.3.55. Верно ли равенство

$$\int_l \left(f_1(z) + f_2(z)\right)^2 dz = \int_l f_1^2(z)\,dz + 2\int_l f_1(z) f_2(z)\,dz + \int_l f_2^2(z)\,dz?$$

§ 4. РЯДЫ ЛОРАНА. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

⇛ *Рядом Лорана* называется ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \ldots + \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots, \tag{4.1}$$

где z_0 — фиксированная точка комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а c_n (*коэффициенты* ряда Лорана) — заданные комплексные числа. ⇚

Ряд Лорана представляет собой сумму двух рядов: ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots \tag{4.2}$$

и ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots. \tag{4.3}$$

Ряд Лорана называется *сходящимся* в некоторой точке $z \in \mathbb{C}$, если в этой точке сходятся оба этих ряда (т. е. ряды (4.2) и (4.3)), при этом сумма ряда (4.1) по определению равна сумме двух слагаемых — суммы ряда (4.2) и суммы ряда (4.3).

Теорема 7.3 (Лоран). Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $0 \leqslant r < |z - z_0| < R$, то в этом кольце она представима сходящимся рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

причем это представление единственно; коэффициенты c_n однозначным образом определяются равенствами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad r < \rho < R, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Иногда ряд Лорана, сходящийся к функции $f(z)$ в некотором кольце $0 \leqslant r < |z - z_0| < R$, называется рядом Лорана для $f(z)$ в точке z_0.

Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$, то разложение $f(z)$ в ряд Лорана в этом круге представляет собой разложение $f(z)$ в ряд, называемый рядом Тейлора — в этом разложении отсутствуют слагаемые, содержащие отрицательные степени $(z - z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots$$

$\Rrightarrow$ Пусть однозначная функция $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности точки $z_0 \neq \infty$ (т. е. в некотором кольце $0 < |z - z_0| < R$), но не аналитична в точке z_0. В этом случае точка z_0 называется *изолированной особой точкой* (однозначного характера) для функции $f(z)$. $\Lleftarrow$

Аналогично, бесконечно удаленная точка (обозначается значком ∞) называется *изолированной особой точкой* для функции $f(z)$, если $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в некотором кольце $r < |z - z_0| < +\infty$ (z_0 — некоторая точка плоскости $\mathbb{C}$).

Далее в этом параграфе будем рассматривать только однозначные функции.

$\Rrightarrow$ *Главной частью* ряда Лорана в окрестности изолированной особой точки (конечной или бесконечной) называется сумма всех тех и только тех членов ряда Лорана, которые стремятся к бесконечности при стремлении z к особой точке (т. е. ряд (4.2) в случае $z_0 \neq \infty$). *Правильной частью* ряда Лорана называется сумма всех остальных членов ряда (т. е. ряд (4.3) в случае $z_0 \neq \infty$).

Таким образом:

1) в окрестности особой точки $z_0 \neq \infty$:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n}_{\text{главная часть}} + \underbrace{c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{правильная часть}};$$

2) в окрестности бесконечно удаленной особой точки ∞:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n + c_0}_{\text{правильная часть}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{главная часть}};$$

(z_0 — некоторая точка плоскости $\mathbb{C}$). $\Leftarrow$

$\Rrightarrow$ Изолированная особая точка z_0 (конечная или бесконечная) функции $f(z)$ называется

1) *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$;

2) *полюсом*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;

3) *существенно особой точкой*, если предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует. $\Leftarrow$

Изолированная особая точка (конечная или бесконечная) является устранимой особой точкой для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности особой точки равна нулю (т. е. равны нулю все коэффициенты c_n главной части), т. е.:

1) для особой точки $z_0 \neq \infty$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots;$$

2) для бесконечно удаленной особой точки ∞:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n(z-z_0)^n = c_0 + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots$$

(z_0 — некоторая точка плоскости $\mathbb{C}$).

Изолированная особая точка z_0 является устранимой особой точкой для функции $f(z)$ в том и только в том случае, когда эта функция аналитическая и ограниченная в некоторой проколотой окрестности точки z_0 (т. е. в некотором кольце $0 < |z - z_0| < R$).

Изолированная особая точка является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности этой точки содержит конечное (отличное от нуля) число ненулевых членов, т. е.:

1) для особой точки $z_0 \neq \infty$:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n;$$

2) для бесконечно удаленной особой точки ∞:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots c_{m-1}(z-z_0)^{m-1} + c_m(z-z_0)^m$$

(z_0 — некоторая точка плоскости $\mathbb{C}$).

⇛ Число m (наибольшая из степеней слагаемых в главной части ряда Лорана) называется *порядком полюса.* ⇚

Точка $z_0 \neq \infty$ является полюсом m-го порядка (или порядка m) функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ представима в виде частного

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m},$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$.

Если точка z_0 — полюс порядка m функции $f(z)$, то z_0— нуль кратности m функции $\dfrac{1}{f(z)}$. Кроме того, точка z_0— полюс порядка m функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = C \neq 0$.

Бесконечно удаленная точка ∞ является полюсом m-го порядка функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ представима в виде произведения

$$f(z) = \varphi(z)(z - z_0)^m,$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в бесконечно удаленной точке ∞, $\varphi(\infty) \neq 0$.

Изолированная особая точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит бесконечное число ненулевых членов с отрицательными степенями $(z - z_0)$ (для особой точки $z_0 \neq \infty$) или с положительными степенями $(z - z_0)$ (для бесконечно удаленной точки ∞).

7.4.1. Найти разложение функции $\dfrac{1}{z^2} \sin z$ в ряд Лорана

а) в особой точке $z_0 = 0$; **б)** в особой точке ∞.

Указать главную и правильную части ряда и его область сходимости.

○ а) Воспользуемся известным разложением функции

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

в ряд (Тейлора) в области $0 \leqslant |z| < +\infty$, т. е. во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$\frac{1}{z^2} \sin z = \frac{1}{z^2} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{главная часть}} - \underbrace{\frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \ldots}_{\text{правильная часть}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}.$$

Область сходимости ряда — вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$ за исключением точки $z = 0$, т. е. кольцо $0 < |z| < +\infty$.

б) Для разложения в ряд Лорана в бесконечно удаленной точки сделаем замену $t = \frac{1}{z}$ и будем искать разложение в точке $t_0 = 0$:

$$t^2 \sin\frac{1}{t} = t^2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{t^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{t^5} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{t^{2n+1}} + \ldots\right) =$$

$$= t - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{t} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{t^3} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{t^{2n-1}},$$

откуда

$$\frac{1}{z^2}\sin z = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{правильная часть}} - \underbrace{\frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \ldots}_{\text{главная часть}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-1}.$$

Область сходимости ряда— кольцо $0 < |z| < +\infty$.

Как видим, в случае, когда разложение в ряд Лорана по степеням z сходится в кольце $0 < |z| < +\infty$, оно является одновременно разложением и в точке $z_0 = 0$, и в точке ∞. ●

7.4.2. Найти разложение функции $\frac{1}{3-z}$ в ряд Лорана по степеням $(z-1)$ в окрестности точки $z_0 = 1$. Указать главную и правильную части ряда и его область сходимости.

○ Сначала выделим выражение $(z-1)$ в знаменателе дроби $\frac{1}{3-z}$:

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{2-(z-1)} = \frac{1}{2\left(1-\frac{z-1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}.$$

Теперь воспользуемся разложением дроби

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{4.4}$$

в бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = z$ в той области, где z — «мало» (т. е. в открытом круге $q = |z| < 1$).

В силу вышесказанного, дробь

$$\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}$$

представима в виде ряда Лорана, сходящегося в области, где $|q| = \left|\frac{z-1}{2}\right|$ «мало», т. е. в открытом круге $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$, или $|z-1| < 2$.

Отсюда

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z-1}{2} + \ldots + \left(\frac{z-1}{2}\right)^n + \ldots\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{z-1}{2\cdot 2} + \ldots + \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} + \ldots}_{\text{правильная часть}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

Область сходимости — открытый круг $|z-1| < 2$. ●

7.4.3. Найти разложение функции $\dfrac{2}{z(3-z)}$ в ряд Лорана в особой точке $z_0 = 0$. Указать главную и правильную части ряда и его область сходимости.

◐ Предварительно представим данную дробь в виде суммы двух простейших дробей

$$\frac{2}{z(3-z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{3-z}.$$

Найдем числа A и B:

$$\frac{2}{z(3-z)} = \frac{A(3-z)+Bz}{z(3-z)},$$

следовательно, $0 \cdot z + 2 = (B - A)z + 3A$, откуда

$$\begin{cases} 0 = B - A, \\ 2 = 3A, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad A = B = \frac{2}{3}.$$

Итак, $\dfrac{2}{z(3-z)} = \dfrac{2/3}{z} + \dfrac{2/3}{3-z}$.

Так как дробь $\dfrac{2/3}{z}$ уже представлена в виде суммы (состоящей из одного слагаемого) членов вида $c_n z^n$, то остается найти разложение дроби $\dfrac{2/3}{3-z}$. Для этого воспользуемся разложением (4.4) (в круге $|z| < 1$) и получим:

$$\frac{2/3}{3-z} = \frac{2/3}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)} = \frac{2}{3\cdot 3}\left(1 + \frac{z}{3} + \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{3}\right)^n + \dots\right) =$$
$$= \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3}z + \frac{2}{3^4}z^2 + \dots + \frac{2}{3^{n+2}}z^n + \dots$$

Этот ряд (бесконечно убывающая геометрическая прогрессия) сходится при $|q| = \left|\frac{z}{3}\right| < 1$, т. е.в открытом круге $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$, или $|z| < 3$.

Теперь запишем ряд Лорана для исходной дроби:

$$\frac{2}{z(3-z)} = \frac{2/3}{z} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3}z + \frac{2}{3^4}z^2 + \dots = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{2}{3^{n+2}}z^n.$$

Область сходимости этого ряда — кольцо $0 < |z| < 3$. Первое слагаемое, $\dfrac{2/3}{z}$, является главной частью ряда, оставшаяся часть ряда — правильной. ●

7.4.4. Найти разложение функции $\dfrac{2}{z(3-z)}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Указать главную и правильную части ряда и его область сходимости.

○ Мы уже знаем (задача 7.4.3), что $\dfrac{2}{z(3-z)} = \dfrac{2/3}{z} + \dfrac{2/3}{3-z}$. Запишем разложение функции $\dfrac{2/3}{3-z}$ в бесконечно убывающую геометрическую прогрессию в области, в которой z — «велико», т.е. $\frac{1}{z}$ — «мало»:

$$\frac{2/3}{3-z} = \frac{2/3}{-z\left(1-\frac{3}{z}\right)} = -\frac{2}{3z}\left(1+\frac{3}{z}+\left(\frac{3}{z}\right)^2+\dots+\left(\frac{3}{z}\right)^{n-1}+\dots\right) =$$

$$= -\frac{2}{3z} - \frac{2}{z^2} - \frac{2\cdot 3}{z^3} - \dots - \frac{2\cdot 3^{n-2}}{z^n} - \dots$$

Этот ряд сходится при $\left|\frac{3}{z}\right| < 1$, т.е. в области $|z| > 3$.

Теперь запишем разложение в ряд Лорана для исходной дроби:

$$\frac{2}{z(3-z)} = \frac{2/3}{z} - \frac{2}{3z} - \frac{2}{z^2} - \frac{2\cdot 3}{z^3} - \dots - \frac{2\cdot 3^{n-2}}{z^n} - \dots =$$

$$= -\frac{2}{z^2} - \frac{2\cdot 3}{z^3} - \dots - \frac{2\cdot 3^{n-2}}{z^n} - \dots = \sum_{n=2}^{\infty}(-2)\cdot 3^{n-2}\cdot\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-2} -\frac{2}{3^{n+2}}\cdot z^n.$$

Область сходимости этого ряда — кольцо $|z| > 3$. ●

Найти разложение функции в ряд Лорана в точке z_0 по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда и его область сходимости.

7.4.5. $\frac{1}{z}\cos z$,
а) $z_0 = 0$; б) $z_0 = \infty$.

7.4.6. $z\sin z$,
а) $z_0 = 0$; б) $z_0 = \infty$.

7.4.7. $e^{\frac{1}{z+1}}$,
а) $z_0 = -1$; б) $z_0 = \infty$.

7.4.8. $e^{\frac{3z+4}{z+1}}$,
а) $z_0 = -1$; б) $z_0 = \infty$.

7.4.9. $\sin(2+z)$,
а) $z_0 = 0$; б) $z_0 = \infty$.

7.4.10. $\cos\dfrac{3z+10}{z+3}$, $z_0 = -3$.

7.4.11. $\dfrac{2}{z-1}$,
а) $z_0 = 1$; б) $z_0 = \infty$.

7.4.12. $\dfrac{3+2i}{(z+i)^2}$,
а) $z_0 = -i$; б) $z_0 = \infty$.

7.4.13. $\dfrac{z}{z-1}$, $z_0 = 1$.

7.4.14. $\dfrac{z+2i}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$.

7.4.15. $\frac{1}{z}$, $z_0 = 1$.

7.4.16. $\dfrac{2}{z+i}$,

а) $z_0 = 0$; б) $z_0 = \infty$.

7.4.17. $\dfrac{z^2}{z-1}$, $z_0 = -1$.

7.4.18. $\dfrac{z+2}{z-3}$, $z_0 = 1$.

7.4.19. $\dfrac{z-2}{(z-1)(z+2)}$,

а) $z_0 = 1$; б) $z_0 = -2$.

7.4.20. $\dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$, $z_0 = 1$.

7.4.21. $\dfrac{z-2}{(z-1)(z+2)}$, $z_0 = -1$.

7.4.22. Найти все особые точки функции $\dfrac{1}{z-2}$ и определить их тип, для полюса найти его порядок.

○ Особыми точками функции являются точки $z_1 = 2$ и $z_2 = \infty$.

Способ 1.

а) Так как $\lim\limits_{z\to 2}(z-2) = 0$, то $\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{1}{z-2} = \infty$, значит, точка $z_1 = 2$ является полюсом.

Определим порядок этого полюса, для чего найдем предел

$$\lim_{z\to 2} f(z)\cdot(z-2)^1 = \lim_{z\to 2}\frac{z-2}{z-2} = \lim_{z\to 2} 1 = 1 \neq 0.$$

Значит, порядок полюса равен 1.

б) Так как $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{z-2} = 0$, то точка $z_2 = \infty$ является устранимой особой точкой.

Способ 2.

Разложим функцию $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ в ряд Лорана по степеням $(z-2)$: $\dfrac{1}{z-2} = 1\cdot(z-2)^{-1}$ — это и есть разложение (состоящее из одного слагаемого) в ряд Лорана по степеням $(z-2)$, сходящееся в области $0 < |z-2| < +\infty$.

а) Так как это разложение содержит конечное число слагаемых (а именно, одно слагаемое) с отрицательными степенями $(z-2)$, то точка $z_1 = 2$ является полюсом. Так как наибольшая степень слагаемых вида

$$\left(\frac{1}{z-2}\right)^n$$

в разложении равна 1, то порядок полюса равен 1.

б) Поскольку разложение функции в ряд Лорана по степеням $(z-2)$, сходящееся в окрестности точки $z_2 = \infty$, не содержит положительных степеней вида $(z-2)^n$, то точка z_2 является устранимой особой точкой. ●

7.4.23. Найти все особые точки функции

$$\frac{z+2}{(z^2-4)(z-2)^2}$$

и определить их тип, для полюса найти его порядок.

❍ Так как
$$\frac{z+2}{(z^2-4)(z-2)^2} = \frac{z+2}{(z+2)(z-2)(z-2)^2} = \frac{z+2}{(z+2)(z-2)^3},$$
то особыми точками функции являются точки $z_1 = -2$, $z_2 = 2$, $z_3 = \infty$.

а) Поскольку существует конечный предел
$$\lim_{z\to(-2)} \frac{z+2}{(z+2)(z-2)^3} = \lim_{z\to(-2)} \frac{1}{(z-2)^3} = \frac{1}{(-2-2)^3} = -\frac{1}{64} \neq \infty,$$
то точка $z_1 = -2$ является устранимой особой точкой.

б) Так как $\lim\limits_{z\to(-2)}(z-2) = 0$, то
$$\lim_{z\to 2} \frac{z+2}{(z+2)(z-2)^3} = \lim_{z\to 2} \frac{1}{(z-2)^3} = \infty.$$
Следовательно, точка $z_2 = 2$ является полюсом.

Определим порядок этого полюса. Очевидно,
$$\lim_{z\to 2} f(z)\cdot(z-2)^3 = \lim_{z\to 2} \frac{1}{(z-2)^3}\cdot(z-2)^3 = \lim_{z\to 2} 1 = 1 \neq 0.$$
Таким образом, точка $z_2 = 2$ является полюсом 3-го порядка.

в) В силу того, что
$$\lim_{z\to\infty} \frac{z+2}{(z+2)(z-2)^3} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{(z-2)^3} = 0,$$
точка $z_3 = \infty$ является устранимой особой точкой. ●

7.4.24. Найти все особые точки функции $\sin\dfrac{1}{z-2}$ и определить их тип, для полюса найти его порядок.

❍ Особыми точками функции являются точки $z_1 = 2$ и $z_2 = \infty$.

Способ 1.

а) Так как $\lim\limits_{z\to 2}(z-2) = 0$, то $\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{1}{z-2} = \infty$, и значит,
$$\lim_{z\to 2}\left(\sin\frac{1}{z-2}\right)$$
не существует. Отсюда следует, что точка $z_1 = 2$ является существенно собой точкой.

б) Поскольку $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{z-2} = 0$, то
$$\lim_{z\to\infty}\left(\sin\frac{1}{z-2}\right) = 0,$$
следовательно, точка $z_2 = \infty$ является устранимой особой точкой.

Способ 2.

Разложим функцию $f(z) = \sin\dfrac{1}{z-2}$ в ряд Лорана по степеням $(z-2)$:
$$\sin\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z-2)^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(z-2)^5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z-2)^{2n+1}} + \ldots$$
Область сходимости этого ряда — кольцо $0 < |z-2| < +\infty$.

а) Полученное разложение, сходящееся в проколотой окрестности точки $z_1 = 2$, содержит бесконечное число слагаемых с отрицательными степенями $(z-2)$, поэтому точка z_1 является существенно особой точкой.

б) Так как это разложение, сходящееся в окрестности точки $z_2 = \infty$, не содержит слагаемых с положительными степенями $(z-2)$, то точка z_2 является устранимой особой точкой. ●

7.4.25. Найти все особые точки функции $\frac{1}{\cos z}$ и определить их тип, для полюса найти его порядок.

○ Особыми точками функции являются все точки, в которых $\cos z = 0$, т. е. точки $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, и точка $z = \infty$.

а) Так как $\lim\limits_{z \to z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k} \cos z = 0$, то

$$\lim_{z \to z_k} \frac{1}{\cos z} = \infty, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

значит, каждая точка $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ является полюсом.

Определим порядок каждого полюса. Найдем предел

$$\lim_{z \to \frac{\pi}{2} + \pi k} \frac{\left[z - \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)\right]^1}{\cos z} = \left[\begin{array}{c} t = z - \frac{\pi}{2} - \pi k \Leftrightarrow z = t + \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ z \to \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow t \to 0 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t}{\cos\left(t + \frac{\pi}{2} + \pi k\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{(-1)^{k+1} \sin t} = \frac{1}{(-1)^{k+1}} \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} =$$

$$= \frac{1}{(-1)^{k+1}} \neq 0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Следовательно, каждая из точек $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ является полюсом 1-го порядка.

б) Точка $z = \infty$ является предельной для последовательности полюсов — точек $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, следовательно, $z = \infty$ не является изолированной особой точкой. ●

Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их тип, для полюса найти его порядок.

7.4.26. $f(z) = \frac{z^2 - 4}{z - 2}$.

7.4.27. $f(z) = \frac{z^2 + 4}{z - 2i}$.

7.4.28. $f(z) = \frac{1}{z + i}$.

7.4.29. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)^2}$.

7.4.30. $f(z) = \operatorname{sh} \frac{1}{z^2 - 1}$.

7.4.31. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

7.4.32. $f(z) = \frac{z}{\sin z}$.

7.4.33. $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^5} \cdot (z^5 + 3)$.

7.4.34. $f(z) = \frac{z - 2}{1 + z^2} \cos \frac{1}{z}$.

7.4.35. $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 4)^2} \operatorname{sh} \frac{1}{z - 1}$.

7.4.36. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$.

7.4.37. $f(z) = z^3 \operatorname{ctg} \dfrac{1}{z+1}$.

7.4.38. $f(z) = e^{z - \frac{1}{z}}$.

Дополнительные задания

Найти разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в точке z_0 по степеням $z - z_0$. Указать главную и правильную части ряда и его область сходимости.

7.4.39. $f(z) = \dfrac{1}{z^2} e^z$,

а) $z_0 = 0$, б) $z_0 = \infty$.

7.4.40. $f(z) = z e^{\frac{1}{z-i}}$, $z_0 = i$.

7.4.41. $f(z) = (z+2)^2 \sin \dfrac{z^2 + 4z + 5}{(z+2)^2}$, $z_0 = -2$.

7.4.42. $f(z) = \dfrac{z + 2i}{z - 2}$,

а) $z_0 = 2$, б) $z_0 = \infty$.

7.4.43. $f(z) = \dfrac{z - 2i}{(z + 2i)^3}$, $z_0 = -2i$.

7.4.44. $f(z) = \dfrac{2 + 3i}{z + 1 - i}$, $z_0 = i$.

7.4.45. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$, $z_0 = \infty$.

7.4.46. $f(z) = \dfrac{z - 2}{(z-1)(z+2)}$, $z_0 = i$.

Найти все особые точки функции $f(z)$, определить их тип, для полюса найти его порядок.

7.4.47. $f(z) = \dfrac{z^2 - z - 6}{(z+2)^2}$.

7.4.48. $f(z) = \dfrac{2 + i}{(z - i)^2 (z+3)^5}$.

7.4.49. $f(z) = \cos \dfrac{z^2 + 1}{z - 2}$.

7.4.50. $f(z) = e^{-z^2}$.

7.4.51. $f(z) = \operatorname{tg} z$.

7.4.52. $f(z) = \dfrac{1}{\sin z} - \dfrac{1}{z}$.

Контрольные вопросы и более сложные задания

7.4.53. Может ли разложение некоторой функции в ряд Лорана содержать:

а) конечное число слагаемых с отрицательными степенями $(z - z_0)$;

б) конечное число слагаемых с положительными степенями $(z - z_0)$;

в) бесконечное число слагаемых с отрицательными степенями $(z - z_0)$;

г) бесконечное число слагаемых с положительными степенями $(z - z_0)$?

7.4.54. Пусть $z_0 \neq \infty$ — изолированная особая точка функции $f(z)$. Определить тип этой особой точки, если разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0 содержит:

а) конечное число слагаемых с положительными степенями $(z - z_0)$ и конечное ($\neq 0$) число слагаемых с отрицательными степенями $(z - z_0)$;

б) бесконечное число слагаемых с положительными степенями $(z - z_0)$ и бесконечное число слагаемых с отрицательными степенями $(z - z_0)$;

в) только бесконечное число слагаемых с положительными степенями $(z - z_0)$.

7.4.55. Пусть c_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Найти коэффициенты c'_n разложения в ряд Лорана функции:

а) $(z - z_0) f(z)$; б) $(z - z_0)^3 f(z)$;

в) $\dfrac{1}{z - z_0} f(z)$;

г) $\dfrac{1}{(z - z_0)^m} f(z)$ (m — натуральное число).

7.4.56. Найти множество точек, в которых сходится ряд Лорана:

а) $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{z^n}{3^n + 1}$; б) $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n^2 + 1}$;

в) $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n z^n$.

7.4.57. Указать тип особой точки z_0 для функции $f(z) + g(z)$, если точка z_0 является:

а) устранимой особой точкой для $f(z)$ и устранимой особой точкой для $g(z)$;

б) устранимой особой точкой для $f(z)$ и полюсом для $g(z)$;

в) устранимой особой точкой для $f(z)$ и существенно особой точкой для $g(z)$;

г) полюсом для $f(z)$ и существенно особой точкой для $g(z)$;

д) полюсом n-го порядка для $f(z)$ и полюсом m-го порядка для $g(z)$.

7.4.58. Может ли точка z_0 быть особой точкой указанных типов для данных функций:

а) полюсом для $f(z)$ и полюсом для $(z - z_0) f(z)$;

б) полюсом для $f(z)$ и устранимой особой точкой для $(z-z_0)f(z)$;

в) полюсом для $f(z)$ и существенно особой точкой для $(z-z_0)f(z)$;

г) существенно особой точкой для $f(z)$ и существенно особой точкой для $(z-z_0)f(z)$;

д) устранимой особой точкой для $f(z)$ и устранимой особой точкой для $\frac{1}{z-z_0}f(z)$;

е) устранимой особой точкой для $f(z)$ и полюсом для $\frac{1}{z-z_0}f(z)$;

ж) устранимой особой точкой для $f(z)$ и существенно особой точкой для $\frac{1}{z-z_0}f(z)$?

7.4.59. Пусть точка z_0 является полюсом k-го порядка для функции $f(z)$. Указать тип особой точки z_0 для функции:

а) $(z-z_0)f(z)$; **б)** $(z-z_0)^3 f(z)$;

в) $\frac{1}{z-z_0}f(z)$; **г)** $\frac{1}{(z-z_0)^5}f(z)$.

7.4.60. Определить тип особой точки $z_0 = 0$ для функции $\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{\sin z}$.

7.4.61. Определить тип особой точки $z_0 = \frac{\pi}{2}$ для функции

$$\frac{1}{\cos z} - \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{-2}.$$

7.4.62. Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$. Доказать, что если $f(z)$ ограничена в окрестности точки z_0, то z_0 — устранимая особая точка для $f(z)$.

7.4.63. Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$. Доказать, что если

$$|f(z)| < \frac{1}{(z-z_0)^m}$$

(m — натуральное число) в некоторой окрестности точки z_0, то z_0 — либо устранимая особая точка, либо полюс для функции $f(z)$.

7.4.64. Доказать, что функция аналитическая во всей конечной комплексной плоскости и имеющая в точке $z_0 = \infty$ полюс порядка n, является многочленом степени n.

§ 5. ВЫЧЕТЫ

⇛ Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности U конечной точки z_0. *Вычетом функции* $f(z)$ *в точке* z_0 называется число

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} f(z)\,dz,$$

где γ — некоторый замкнутый контур, целиком лежащий в U и содержащий внутри точку z_0, а $|z - z_0| = \rho$ — окружность с центром в точке z_0 достаточно малого радиуса ρ, целиком лежащая в U. Обход контура γ и окружности производится *против часовой стрелки.* $\Lleftarrow$

Значения обоих приведенных интегралов при указанных условиях совпадают.

Если функция $f(z)$ разложена в ряд Лорана в окрестности точки z_0:

$$f(z) = \ldots + \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \ldots + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) \ldots + c_n(z - z_0)^n \ldots, \tag{5.1}$$

то $\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = c_{-1}$.

$\Rrightarrow$ Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности U бесконечно удаленной точки ∞. *Вычетом функции* $f(z)$ *в точке* ∞ называется число

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} f(z)\, dz,$$

где γ — некоторый замкнутый контур, а $|z| = \rho$ — окружность достаточно большого радиуса, целиком лежащая в U. Обход контура и окружности производится *по часовой стрелке.* $\Lleftarrow$

Значения обоих приведенных интегралов при указанных условиях совпадают.

Если разложение (5.1) сходится в некоторой окрестности точки ∞, то

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Теорема 7.4. Если функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots z_n$, то

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z).$$

Если функция $f(z)$ аналитична в точке z_0 или если z_0 — устранимая особая точка для $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = 0.$$

Теорема 7.5. Если точка z_0 — полюс k-го порядка ($k > 1$) для функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}\left[f(z)(z - z_0)^k\right]}{dz^{k-1}}.$$

Если z_0 — полюс 1-го порядка для функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \big[f(z)(z-z_0)\big],$$

а если еще известно, что функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — аналитические в точке z_0, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Часто при вычислении интегралов от функций комплексного переменного применяют следующую теорему.

Теорема 7.6 (Основная теорема о вычетах). Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в односвязной области D за исключением некоторых изолированных особых точек; l — простая замкнутая кривая, целиком лежащая в D и не проходящая через особые точки функции $f(z)$. Тогда

$$\oint_l f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k} f(z),$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_k$ — особые точки функции $f(z)$, находящиеся внутри l.

7.5.1. Найти вычеты функции

$$f(z) = \frac{z+1}{(z+2i)^2(z-1)}$$

во всех особых точках и определить их тип, найти вычет в бесконечно удаленной точке.

❍ Особыми точками функции $f(z)$, очевидно, являются следующие точки:

$-2i$ — полюс 2-го порядка,

1 — полюс 1-го порядка.

Найдем вычет в точке $-2i$:

$$\operatorname*{res}_{-2i} f(z) = \lim_{z\to-2i}\big[f(z)(z-(-2i))^2\big]' = \lim_{z\to-2i}\left[\frac{(z+1)(z+2i)^2}{(z+2i)^2(z-1)}\right]' =$$

$$= \lim_{z\to-2i}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)' = \lim_{z\to-2i}\frac{1\cdot(z-1)-1\cdot(z+1)}{(z-1)^2} = \lim_{z\to-2i}\frac{-2}{(z-1)^2} =$$

$$= \frac{-2}{(-2i-1)^2} = \frac{-2}{(1+2i)^2} = -\frac{2}{1+4i-4} = \frac{2}{3-4i};$$

упрощая это выражение, получим

$$\frac{2}{3-4i} = \frac{2(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{6+8i}{9+16} = \frac{6+8i}{25}.$$

Итак, $\operatorname*{res}_{-2i} f(z) = \dfrac{2}{3-4i} = \dfrac{6+8i}{25}$.

Найдем вычет в точке 1, записав функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\frac{z+1}{(z+2i)^2}}{z-1}, \text{ где } \psi(1) = 0,\ \psi'(z) = 1 \neq 0,$$

тогда

$$\operatorname*{res}_{1} f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}\Big|_{z=1} = \frac{\frac{z+1}{(z+2i)^2}}{1}\Big|_{z=1} = \frac{z+1}{(z+2i)^2}\Big|_{z=1} =$$

$$= \frac{2}{(1+2i)^2} = \frac{2}{-3+4i} = -\frac{6+8i}{25}.$$

Найдем вычет в бесконечно удаленной точке:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\big(\operatorname*{res}_{-2i} f(z) + \operatorname*{res}_{1} f(z)\big) = -\left(\frac{6+8i}{25} - \frac{6+8i}{25}\right) = 0.$$ ●

7.5.2. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ во всех особых точках, определить их тип, найти вычет в бесконечно удаленной точке.

❍ Особой точкой данной функции, очевидно, является точка $z = 0$. Так как существует конечный предел

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{\sin z}{z} = 1 \text{ (1-й замечательный предел)},$$

то 0 — устранимая особая точка и, значит,

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) = 0.$$

Отсюда в силу теоремы 7.4 получим

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{0} f(z) = 0.$$ ●

7.5.3. Найти вычеты функции

$$f(z) = \frac{\cos z}{(2z-\pi)^2}$$

во всех особых точках, определить их тип, найти вычет в бесконечно удаленной точке.

❍ Особой точкой данной функции, очевидно, является точка $z = \frac{\pi}{2}$. Так как

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \left[f(z)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2\right] = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{(2z-\pi)^2}\cdot\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2 = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{4} = 0,$$

то $\frac{\pi}{2}$ не является существенно особой точкой или полюсом порядка выше 1-го и, стало быть, может быть либо устранимой особой точкой, либо полюсом 1-го порядка. Найдем предел

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left[f(z)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos z}{(2z-\pi)^2}\cdot\left(z-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos z}{2(2z-\pi)} =$$

$$\left[\text{неопределенность вида } \frac{0}{0}, \text{ воспользуемся правилом Лопиталя}\right]$$

$$= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos z)'}{\left(2(2z-\pi)\right)'} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin z}{4} = -\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Отсюда следует, что точка $\frac{\pi}{2}$ является полюсом 1-го порядка и

$$\operatorname*{res}_{\frac{\pi}{2}} f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left[f(z)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{\frac{\pi}{2}} f(z) = \frac{1}{4}.$$ ●

7.5.4. Найти вычеты функции $f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}}$ во всех особых точках, определить их тип, найти вычет в бесконечно удаленной точке.

○ Особой точкой данной функции, очевидно, является точка $z = 0$. Определим тип этой особой точки с помощью разложения в ряд Лорана по степеням z:

$$f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}} = z^4\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n} = z^4 + z^3 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z} + \frac{1}{6!}\frac{1}{z^2} + \ldots$$

Данный ряд сходится в кольце $0 < |z| < \infty$ и содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями z. Следовательно, точка 0 — существенно особая точка функции $f(z)$. Коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$, значит,

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) = \frac{1}{120}.$$

Так как полученный ряд сходится в окрестности бесконечно удаленной точки, и $c_{-1} = \frac{1}{120}$, то

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{0} f(z) = -\frac{1}{120}.$$ ●

Найти вычеты данных функций во всех особых точках и определить их тип, найти вычет в бесконечно удаленной точке.

7.5.5. $f(z) = \dfrac{3}{z-2}$.

7.5.6. $f(z) = \dfrac{e^z}{z-\pi i}$.

7.5.7. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z + 3}{1-2z}$.

7.5.8. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+i)^2}$.

7.5.9. $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(2iz-1)^2}$.

7.5.10. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{(z-1)^3}$.

7.5.11. $f(z) = \dfrac{z-1}{(z+1)(z-2i)}$.

7.5.12. $f(z) = \dfrac{z}{(z+3i)(z+2)^2}$.

7.5.13. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2(3z-\pi)}$.

7.5.14. $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^5}$.

7.5.15. $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z^2-9)^2}$.

7.5.16. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}}$.

7.5.17. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$.

7.5.18. $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^4}$.

7.5.19. $f(z) = \dfrac{1}{\cos z}$.

7.5.20. $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$.

7.5.21. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

7.5.22. $f(z) = z\cos\frac{1}{z}$.

7.5.23. Используя основную теорему о вычетах, вычислить интеграл $\oint\limits_l \dfrac{dz}{z^5 - z^3}$, где l — окружность $|z| = \frac{1}{2}$.

○ Особыми точками функции $f(z) = \dfrac{1}{z^5 - z^3} = \dfrac{1}{z^3(z-1)(z+1)}$ являются точки $0, -1, 1$. Из них внутри кривой l (внутри окружности $|z| = \frac{1}{2}$), очевидно, находится только точка $z_1 = 0$. Значит,

$$\oint\limits_l f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_0 f(z).$$

Точка $z_1 = 0$ является полюсом 3-го порядка. Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_0 f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(f(z)\cdot(z-0)^3\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z^3(z^2-1)}\cdot z^3\right)'' =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z^2-1}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{-2z}{(z^2-1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{-2(z^2-1)^2 - 2(z^2-1)\cdot 2z\cdot(-2z)}{(z^2-1)^4} = \frac{1}{2}\cdot(-2) = -1.$$

Итак,

$$\oint\limits_l \frac{dz}{z^5 - z^3} = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_0 \frac{1}{z^5 - z^3} = 2\pi i\cdot(-1) = -2\pi i.$$ ●

7.5.24. Используя основную теорему о вычетах, вычислить интеграл $\oint\limits_l \dfrac{z+1}{(z+zi)^2(z-1)}\,dz$, где l — окружность $|z| = 3$.

○ Функция $f(z) = \dfrac{z+1}{(z+i)^2(z-1)}$ аналитическая во всей комплексной плоскости за исключением точек $z_1 = -2i$ и $z_2 = 1$, которые лежат внутри окружности $|z| = 3$. Значит,

$$\oint\limits_l f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z_2} f(z)\right).$$

Так как

$$\operatorname*{res}_{z_1} f(z) = \operatorname*{res}_{-2i} f(z) = \frac{6+8i}{25}, \quad \operatorname*{res}_{z_2} f(z) = \operatorname*{res}_{1} f(z) = -\frac{6+8i}{25}$$

(см. задачу 7.5.1), то

$$\oint\limits_l \frac{z+1}{(z+zi)^2(z-1)}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{-2i} f(z) + \operatorname*{res}_{1} f(z)\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{6+8i}{25} - \frac{6+8i}{25}\right) = 0. \quad ●$$

Вычислить интегралы по заданному контуру l, используя основную теорему о вычетах:

7.5.25. $\oint\limits_l \dfrac{dz}{(z-1)(z+2)}$,

а) l: $|z-1| = 1$; б) l: $|z+2| = 1$;
в) l: $|z| = 3$.

7.5.26. $\oint\limits_l \dfrac{\cos z}{(2z-\pi)^2}\,dz$, l: $|z| = \pi$.

Дополнительные задания

Найти вычеты данных функций во всех особых точках, определить их тип, найти вычет в бесконечно удаленной точке.

7.5.27. $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{z - \frac{\pi}{2}i}$.

7.5.28. $f(z) = \dfrac{\cos 3z}{(2z+\pi)^2}$.

7.5.29. $f(z) = \dfrac{z\sin 2z}{(z+\pi i)^3}$.

7.5.30. $f(z) = \dfrac{\cos 3z}{(z+2)^5}$.

7.5.31. $f(z) = \dfrac{e^{-2z}}{z^2(z-4i)}$.

7.5.32. $f(z) = \dfrac{1}{(1-z^2)^3}$.

7.5.33. $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

7.5.34. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^3}$.

7.5.35. $f(z) = \operatorname{ctg}^2 z$.

7.5.36. $f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z}$.

Вычислить интегралы по заданному контуру l, используя основную теорему о вычетах:

7.5.37. $\oint\limits_l \dfrac{dz}{z(z+2)^3}$,

а) l: $|z| = 1$; б) l: $|z| = 3$.

7.5.38. $\oint\limits_l \dfrac{dz}{(z+1)^3(z-1)^2}$,

а) l: $|z+1| = 1$; б) l: $|z-1| = 1$;
в) l: $|z| = 3$.

7.5.39. $\oint\limits_l \frac{\sin z}{z}\,dz$,

а) l: $|z-2|=1$; б) l: $|z|=1$.

7.5.40. $\oint\limits_l z^4 e^{\frac{1}{z}}\,dz$, l: $|z|=2$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

7.5.41. Может ли у функции $f(z)$ в изолированной особой точке:
а) быть вычет (ровно один); б) не быть ни одного вычета;
в) быть более одного вычета?

7.5.42. Пусть $\operatorname*{res}\limits_{z_0} f(z)=0$. Верно ли, что

$$\oint\limits_{|z-z_0|=R} f(z)\,dz=0$$

для любого $R>0$?

7.5.43. Пусть $\operatorname*{res}\limits_{z_0} f(z)=0$. Верно ли, что точка z_0 не является полюсом 1-го порядка функции $f(z)$?

7.5.44. Доказать, что $\operatorname*{res}\limits_{z_0}(f+g)(z)=\operatorname*{res}\limits_{z_0} f(z)+\operatorname*{res}\limits_{z_0} g(z)$, если все три вычета существуют.

7.5.45. Доказать, что если $f(z)$ — нечетная функция, то $\operatorname*{res}\limits_{z_0} f(z) = -\operatorname*{res}\limits_{-z_0} f(z)$, если хотя бы один из вычетов существует.

7.5.46. Вычислить

$$\operatorname*{res}\limits_{0}\frac{z}{\operatorname{ch} z-1-\frac{z^2}{2}}.$$

7.5.47. Вычислить вычеты функции

$$f(z)=\cos z\cdot\operatorname{ch} z\cdot\frac{1+z^8}{z^4(z^4+1)}$$

во всех особых точках и в бесконечно удаленной точке ∞.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Найти значение функции $f(z)=\cos 3z$ в точке $\frac{\pi}{6}i$. Указать точки, в которых существует производная $f'(z)$.

2. Определить, может ли функция $e^y\sin x+x$ быть действительной частью аналитической функции $f(z)$? Если да, то найти $f(z)$.

3. Вычислить $\oint\limits_l \operatorname{Re}(z^2)\,dz$, где l — дуга параболы $y=2x^2$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+2i$.

4. Найти разложение функции $\frac{1}{z-3}$ в ряд Лорана в точке $z_0 = 1$. Указать главную и правильную части ряда и область его сходимости.

5. Найти все особые точки функции $\frac{1}{z+1}\sin\frac{1}{z-1}$, определить их тип, для полюса найти его порядок. Найти вычеты во всех особых точках и в бесконечно удаленной точке.

Вариант 2

1. Найти значение функции $f(z) = \operatorname{ch}\bar{z}$ в точке $2 + \pi i$. Указать точки, в которых существует производная $f'(z)$.

2. Определить, может ли функция $\cos x \operatorname{sh} y - 2y$ быть мнимой частью аналитической функции $f(z)$? Если да, то найти $f(z)$.

3. Вычислить $\oint\limits_l (2z+1)\bar{z}\,dz$, где l — дуга окружности $|z| = 1$ от точки $z_1 = 1 = e^{i\cdot 0}$ до точки $z_2 = -1 = e^{i\cdot\pi}$.

4. Найти разложение функции $\cos(z-1)$ в ряд Лорана в точке $z_0 = 0$. Указать главную и правильную части ряда и область его сходимости.

5. Найти все особые точки функции

$$\frac{z}{z^2-1}e^{\frac{1}{z+1}},$$

определить их тип, для полюса найти его порядок. Найти вычеты во всех особых точках и в бесконечно удаленной точке.

Вариант 3

1. Найти значение функции $f(z) = \frac{2}{z}$ в точке $1 - i$. Указать точки, в которых существует производная $f'(z)$.

2. Определить, может ли функция $e^{-x}\cos y + 2x$ быть действительной частью аналитической функции $f(z)$? Если да, то найти $f(z)$.

3. Вычислить $\oint\limits_l |z|\,dz$, где l — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 3 - 2i$.

4. Найти разложение функции $\frac{2}{z+1}$ в ряд Лорана в точке $z_0 = 2$. Указать главную и правильную части ряда и область его сходимости.

5. Найти все особые точки функции $\frac{z-i}{z+1}\cos\frac{1}{z}$, определить их тип, для полюса найти его порядок. Найти вычеты во всех особых точках и в бесконечно удаленной точке.

Вариант 4

1. Найти значение функции $f(z) = \operatorname{sh} iz$ в точке $\frac{\pi}{2} - i$. Указать точки, в которых существует производная $f'(z)$.

2. Определить, может ли функция $\cos y \operatorname{ch} x - y$ быть мнимой частью аналитической функции $f(z)$? Если да, то найти $f(z)$.

3. Вычислить

$$\oint_l \frac{z\,dz}{\bar{z}},$$

где l — дуга окружности $|z| = 1$ от точки $z_1 = 1 = e^{i\cdot 0}$ до точки $z_2 = -i = e^{i(-\frac{\pi}{2})}$.

4. Найти разложение функции $\sin(2 - z)$ в ряд Лорана в точке $z_0 = 0$. Указать главную и правильную части ряда и область его сходимости.

5. Найти все особые точки функции $\frac{z+1}{z-1} \operatorname{sh} \frac{1}{z}$, определить их тип, для полюса найти его порядок. Найти вычеты во всех особых точках и в бесконечно удаленной точке.

❑

Глава 8. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. ОРИГИНАЛ ИЗОБРАЖЕНИЯ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. НАХОЖДЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Оригинал и преобразование Лапласа

$\Rrightarrow$ Комплекснозначная функция $f(t)$ действительного переменного называется *оригиналом*, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $f(t) = 0$ для всех $t < 0$;

2. $f(t)$ — абсолютно интегрируема[6] на любом отрезке $[0, a]$ положительной полуоси;

3. существуют действительные числа $M > 0$, $t_0 \geqslant 0$ и s такие, что $|f(t)| < Me^{st}$ при всех $t > t_0 \geqslant 0$. $\Lleftarrow$

Простейшим оригиналом является *функция Хевисайда*, определяемая следующим образом:

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ 1, & \text{при } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 2 и 3, то функция $f(t) = \varphi(t) \cdot \chi(t)$ удовлетворяет и условию 1, т. е. является оригиналом. Ради упрощения записи в дальнейшем, за небольшим исключением, будем писать $f(t)$ вместо $f(t) \cdot \chi(t)$:

$\Rrightarrow$ Пусть $f(t)$ — оригинал, а $p = \alpha + i\beta$ — комплексное число. *Изображением* оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$, определяемая равенством:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt.$$

Функция $F(p)$ называется также *преобразованием Лапласа* от функции $f(t)$. $\Lleftarrow$

Можно показать, что несобственный интеграл в определении изображения сходится для значений p, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} p > s$, а определяемая им функция $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s$.

Тот факт, что функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, обозначают так: $f(t) \to F(p)$ или $F(p) = L\{f(t)\}$.

Разным оригиналам соответствуют разные изображения, точнее имеет место следующая

Теорема 8.1 (единственности изображения). Если оригиналы $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны и имеют одинаковое изображение $F(p)$, то эти функции совпадают.

[6] Точнее: интеграл должен существовать хотя бы в несобственном смысле.

Свойства преобразования Лапласа

В дальнейшем всюду, если не оговорено противное, $f(t)$ обозначает некий оригинал. Изображение оригинала обозначается той же буквой, только заглавной, например: $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g_2(t) \risingdotseq G_2(p)$ и т. д. Важнейшие свойства преобразования Лапласа отражены в следующих восьми теоремах.

Теорема 8.2 (свойство линейности). Для произвольных комплексных постоянных α и β справедливо соотношение: $\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)$.

Теорема 8.3 (подобия). Для любого действительного $r > 0$ справедливо соотношение: $f(r \cdot t) = \frac{1}{r} \cdot F\left(\frac{p}{r}\right)$.

Теорема 8.4 (смещения). Для любого комплексного числа p_0 имеет место соотношение: $e^{p_0 t} \cdot f(t) \risingdotseq F(p - p_0)$.

Теорему смещения (изображения) называют иногда теоремой сдвига (изображения).

Теорема 8.5 (запаздывания). Для любого действительного положительного числа τ имеет место соотношение: $f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} \cdot F(p)$.

Теорему запаздывания (оригинала) реже называют теоремой смещения или сдвига оригинала.

Следует отметить, что при применении теоремы запаздывания нужно помнить, что по нашему соглашению под функцией-оригиналом $f(t)$ понимается функция $f(t) \cdot \chi(t)$; поэтому под функцией $f(t - \tau)$ следует понимать функцию $f(t-\tau) \cdot \chi(t - \tau)$, а не $f(t - \tau) \cdot \chi(t)$. При использовании этой теоремы уместно не использовать сокращенную запись для оригинала и приписывать функцию Хевисайда в качестве сомножителя. Теорему запаздывания часто используют для нахождения изображений периодических функций.

Теорема 8.6 (о дифференцировании оригинала). Если функция $f(t)$ и ее производные являются оригиналами и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0);$$

при этом под $f^{(k)}(0)$ понимается $\lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$, $\quad k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Эти формулы заметно упрощаются, если $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$. В этом случае:

$$f'(t) \doteqdot pF(p), \quad f''(t) \doteqdot p^2F(p), \quad \ldots, \quad f^n(t) \doteqdot p^nF(p).$$

Теорема 8.7 (о дифференцировании изображения). Если $f(t) \doteqdot F(p)$ то $-tf(t) \doteqdot F'(p)$. В более общем случае: $(-1)^n t^n f(t) \doteqdot F^{(n)}(p)$.

Из этой теоремы, в частности, получаем: $t \doteqdot \dfrac{1}{p^2}, t^2 \doteqdot \dfrac{2}{p^3}, \ldots, t^n \doteqdot \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

Теорема 8.8 (об интегрировании оригинала). Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}.$$

Теорема 8.9 (об интегрировании изображения). Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и интеграл $\int\limits_p^\infty F(p)\,dp$ является сходящимся, то $\dfrac{f(t)}{t} \doteqdot \int\limits_p^\infty F(p)\,dp$.

Теоремы о дифференцировании и интегрировании оригинала демонстрируют тот факт, что операции дифференцирования и интегрирования оригиналов сводятся соответственно к операциям умножения и деления на p их изображений.

В заключение приведем таблицу изображений некоторых основных функций (ниже подразумевается, что α и β — комплексные числа, n — натуральное):

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
I	1	$\dfrac{1}{p}$	VII	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
II	$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$	VIII	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{(p-\alpha)}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
III	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	IX	$t\cdot\sin\beta t$	$\dfrac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$
IV	$t^ne^{\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	X	$t\cdot\cos\beta t$	$\dfrac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
V	$\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$	XI	$\operatorname{sh}\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$
VI	$\cos\beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$	XII	$\operatorname{ch}\beta t$	$\dfrac{p}{p^2-\beta^2}$

8.1.1. Проверить, какие из следующих функций являются оригиналами, а какие — нет.

а) $f(t) = 2e^{3t} \cdot \cos 2t \cdot \chi(t)$;   б) $f(t) = \frac{1}{t} \cdot \chi(t)$;

в) $f(t) = e^{t^2} \cdot \chi(t)$;   г) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 \leqslant t < 2, \\ t, & t \geqslant 2. \end{cases}$

○ а) Условие 1 в определении оригинала, очевидно, выполнено. Далее, при $t \geqslant 0$ функция $f(t)$ — непрерывна, а следовательно и абсолютно интегрируема на любом отрезке $[0, a]$. Значит, условие 2 также выполняется. Наконец, $|2e^{3t} \cos 2t| \leqslant 2e^{3t}$, и в качестве констант M и s в условии 3 определения оригинала можно выбрать любое $M > 2$ и $s = 3$. Следовательно, $f(t)$ является оригиналом.

б) $f(t)$ не является оригиналом, поскольку интеграл

$$\int\limits_0^a \frac{1}{t}\, dt$$

расходится, а следовательно, не выполнено условие 2 определения оригинала.

в) $f(t)$ не является оригиналом, поскольку неравенство $e^{t^2} < Me^{st}$ не может выполняться ни при каких s для всех $t > 0$, т. к.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^2}}{Me^{st}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{M} e^{t(t-s)} = \infty.$$

Отсюда следует, что для любого s выполнено неравенство $e^{t^2} > Me^{st}$, начиная с некоторого значения t (иными словами, функция e^{t^2} растет быстрее любой функции Me^{st}).

г) Условие 1, очевидно, выполнено. При $t \geqslant 0$ функция непрерывна всюду, кроме точки $t = 1$, в которой она имеет разрыв 1-го рода. Следовательно, $f(t)$ — интегрируема на любом отрезке $[0, a]$. Т. к. $|f(t)| \leqslant e^t$, то и условие 3 тоже выполнено. Следовательно, $f(t)$ — оригинал. ●

Проверить являются ли оригиналами следующие функции:

8.1.2. $f(t) = 3^t \cdot \chi(t)$.

8.1.3. $f(t) = t^3 \cdot \chi(t)$.

8.1.4. $f(t) = e^{it} \cdot \chi(t)$.

8.1.5. $f(t) = e^{-t^2} \cdot \chi(t)$.

8.1.6. $f(t) = \dfrac{1}{(t-1)^2} \cdot \chi(t)$.

8.1.7. $f(t) = \ln t \cdot \chi(t)$.

8.1.8. $f(t) = \operatorname{tg} t \cdot \chi(t)$.

8.1.9. $f(t) = e^{(2+i)t} \cdot \chi(t-1)$.

8.1.10. $f(t) = \sin t \cdot \chi(t+1)$.

8.1.11. $f(t) = \frac{1}{t} \cdot \chi(t-1)$.

8.1.12. $f(t) = e^{it^2} \cdot \chi(t)$.

8.1.13. $f(t) = 2^{\sqrt[3]{t+t^4}} \cdot \chi(t)$.

В дальнейшем вместо $f(t) \cdot \chi(t)$ мы, как правило, будем просто писать $f(t)$.

8.1.14. Найти изображение функции $f(t) = e^{(3+i)t}$, используя преобразование Лапласа.

○ $f(t)$ является оригиналом. Так как $\left|e^{(3+i)t}\right| < Me^{3t}$ для $M > 1$, то изображение $F(p)$ этой функции будет определено и аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 3$. Далее, находим

$$f(t) \doteqdot F(p) = \int\limits_0^\infty e^{(3+i)t} e^{-pt}\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-(p-3-1)t}\,dt =$$

$$= -\lim_{K\to\infty} \frac{1}{p-(3+i)} e^{-(p-3-i)t}\Big|_0^K = \frac{1}{p-(3+i)}. \quad \bullet$$

Явно используя преобразования Лапласа, найти изображения следующих оригиналов:

8.1.15. $f(t) = 2$.

8.1.16. $f(t) = e^{2t}$.

8.1.17. $f(t) = \cos 4t$.

8.1.18. $f(t) = t$.

8.1.19. $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ 0, & t \notin [0,1]. \end{cases}$

8.1.20. $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1], \\ 1, & t \in (1,2], \\ 0, & t \notin [0,2]. \end{cases}$

8.1.21. $f(t) = e^t \cdot \chi(t-1)$.

8.1.22. Используя таблицу изображений и свойство линейности преобразования Лапласа, найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t) = 2 + t^3 + t\cos 2t$; **б)** $f(t) = 3^t$;
в) $f(t) = \cos^2 t$; **г)** $f(t) = \sin 2t \cos 3t$;
д) $f(t) = e^{t+5}$.

○ **а)** По таблице находим:

$$1 \doteqdot \frac{1}{p}\ \text{(I)}, \quad t^3 \doteqdot \frac{3!}{p^4} = \frac{6}{p^4}\ \text{(III)}, \quad t\cos 2t \doteqdot \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}\ \text{(X)}.$$

Следовательно, по свойству линейности (теорема 1) преобразования Лапласа получим: $2 + t^3 + t\cos 2t = 2\cdot 1 + t^3 + t\cos 2t \doteqdot \dfrac{2}{p} + \dfrac{6}{p^4} + \dfrac{p^2-4}{(p^2+4)^2}$.

б) Поскольку $3^t = e^{t\ln 3}$, то $3^t \doteqdot \dfrac{1}{p-\ln 3}$ (II).

в) Используя известную тригонометрическую формулу понижения степени, имеем:

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Т.к. $1 \doteqdot \dfrac{1}{p}$ (I), а $\cos 2t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+4}$ (VI), то по свойству линейности преобразования Лапласа получаем: $\cos^2 t \doteqdot \dfrac{1}{2p} + \dfrac{p}{2(p^2+4)}$.

г) Преобразуем оригинал $f(t)$: $\sin 2t \cos 3t = \frac{1}{2}(\sin 5t - \sin t)$. Тогда, используя формулу V таблицы и свойство линейности преобразования Лапласа, получаем: $\sin 2t \cos 3t \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{5}{p^2+5^2} - \frac{1}{p^2+1}\right)$.

д) Т. к. $e^{t+5} = e^5 e^t$ и $e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}$ (II), то $e^{t+5} = e^5 \frac{1}{p-1}$. ●

Используя таблицу изображений, найти изображения оригиналов:

8.1.23. $f(t) = 3e^{-t} + e^t \cos 3t$.

8.1.24. $f(t) = 4 \operatorname{sh} 2t - t^2$.

8.1.25. $f(t) = te^{2t} - \sin 3t$.

8.1.26. $f(t) = \frac{1}{2^t} + 1$.

8.1.27. $f(t) = te^{t-1} + t^2 e^{t-2}$.

8.1.28. $f(t) = \sin^3 t$.

8.1.29. $f(t) = \cos t \cos 3t$.

8.1.30. $f(t) = \sin 4t \sin 2t - t \sin t$.

8.1.31. $f(t) = e^t \cos^2 t$.

8.1.32. Используя теорему изображения, найти изображение оригинала $f(t) = e^{3t} \operatorname{ch} t$.

❍ По формуле XII таблицы изображений имеем: $\operatorname{ch} t \risingdotseq \frac{p}{p^2-1}$. Отсюда по теореме смещения ($p_0 = 3$) получаем:

$$e^{3t} \operatorname{ch} t \risingdotseq \frac{p-3}{(p-3)^2-1}.$$ ●

Найти изображения оригиналов, используя теорему смещения:

8.1.33. $f(t) = te^{2t} \cos 3t$.

8.1.34. $f(t) = e^t \operatorname{sh} 2t$.

8.1.35. $f(t) = e^{4t} \cos^2 t$.

8.1.36. $f(t) = te^{-t} \sin 2t$.

8.1.37. Найти изображение функции $g(t) = \cos(t-2)\chi(t-2)$.

❍ Рассмотрим функцию $f(t) = \cos t \cdot \chi(t)$. Тогда

$$g(t) = f(t-2) = \cos(t-2) \cdot \chi(t-2).$$

Для оригинала $f(t)$ имеем: $f(t) \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}$ (VI). Тогда по теореме запаздывания оригинала получим: $g(t) = f(t-2) \risingdotseq e^{-2p} \cdot \frac{p}{p^2+1}$. ●

Найти изображение следующих функций:

8.1.38. $(t-3)^3 \cdot \chi(t-3)$.

8.1.39. $e^{2t-4} \cdot \chi(t-2)$.

8.1.40. $\operatorname{ch}(2t-1) \cdot \chi\left(t - \frac{1}{2}\right)$.

8.1.41. $\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \sin(3t - \pi) \cdot \chi\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$.

8.1.42. Найти изображения функций, заданных графически:

а) график функции $f(t)$ приведен на рис. 108;

б) график функции $f(t)$ приведен на рис. 109.

❍ а) Изображение функции $f(t)$ можно, конечно, найти непосредственно, применив преобразование Лапласа. Однако проще представить ее в

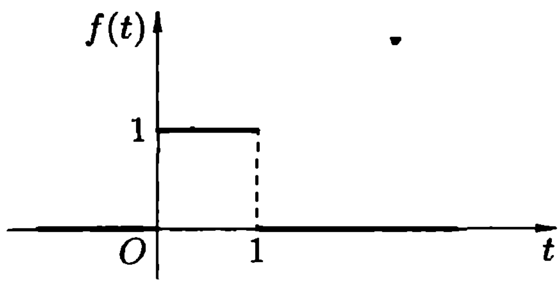


Рис. 108

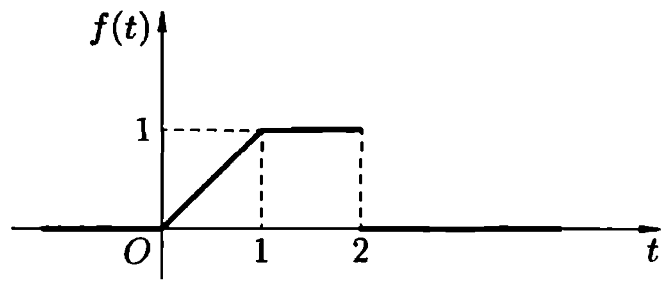


Рис. 109

виде $f(t) = \chi(t) - \chi(t-1)$. По таблице $\chi(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$ (I). Отсюда по теореме запаздывания оригинала имеем $\chi(t-1) \risingdotseq \frac{e^{-p}}{p}$. Следовательно, $f(t) \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}$;

б) Представим функцию $f(t)$ в виде:

$$f(t) = t \cdot \chi(t) - (t-1) \cdot \chi(t-1) - \chi(t-2).$$

По таблице находим $g(t) = t \cdot \chi(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}$ (III) и $\chi(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$. Далее, согласно теореме запаздывания оригинала, получаем:

$$g(t-1) = (t-1) \cdot \chi(t-1) \risingdotseq \frac{e^{-p}}{p^2} \quad \text{и} \quad \chi(t-2) \risingdotseq \frac{e^{-2p}}{p}.$$

Окончательно имеем: $f(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p}$. ●

Найти изображения оригиналов, заданных графически:

8.1.43. График функции $f(t)$ приведен на рис. 110.

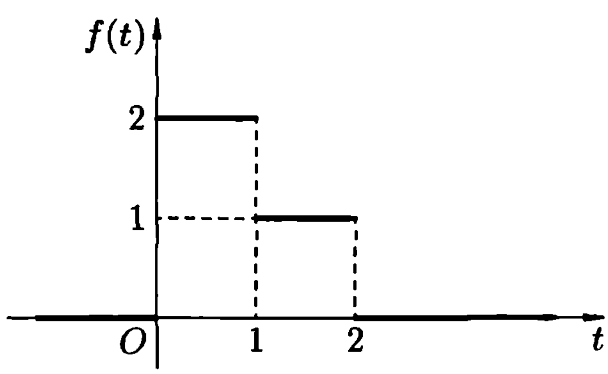


Рис. 110

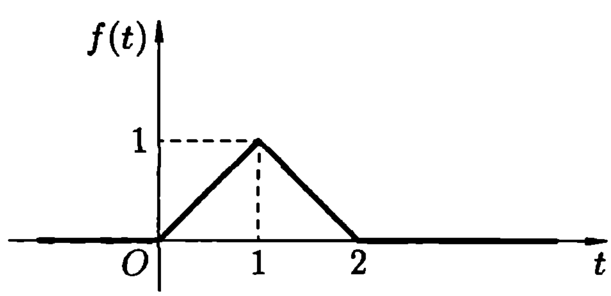


Рис. 111

8.1.44. График функции $f(t)$ приведен на рис. 111.

8.1.45. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in [0,\pi], \\ 0, & t \notin [0,\pi]. \end{cases}$ График функции $f(t)$ приведен на рис. 112.

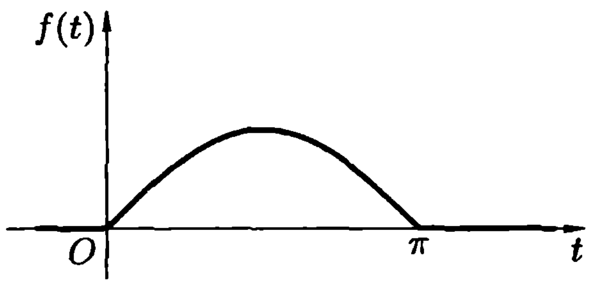


Рис. 112

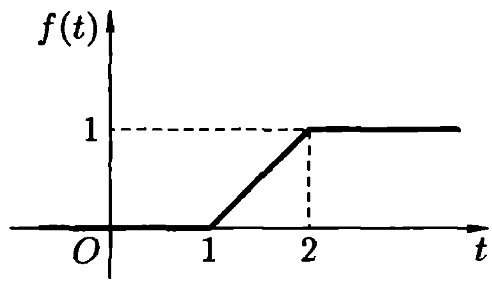


Рис. 113

8.1.46. График функции $f(t)$ приведен на рис. 113.

8.1.47. Найти изображение функции, заданной рядом: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \chi(t-n)$.

8.1.48. Найти изображение периодической функции $f(t) = \{t\}$ (здесь $\{t\}$ — дробная часть числа t).

❍ Функция $f(t)$ — периодическая с периодом $T = 1$. На отрезке $[0,1]$ она задается равенством $f(t) = t$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1], \\ 0, & t \notin [0,1]. \end{cases}$$

Ее можно записать также в виде $\varphi(t) = t\cdot\chi(t) - (t-1)\chi(t-1) - \chi(t-1)$. Тогда ее изображением будет функция $\Phi(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p}$. Функция $f(t)$ может быть представлена в виде ряда

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(t-n),$$

а ее изображением (по теореме запаздывания оригинала) будет функция $F(p) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-pn}\cdot\Phi(p)$. Полученный ряд представляет собой бесконечно убывающую (при $p > 0$) геометрическую прогрессию; и потому

$$F(p) = \Phi(p)(1+e^{-p}+e^{-2p}+\ldots) = \frac{\Phi(p)}{1-e^{-p}} = \frac{1}{1-e^{-p}}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p}\right) =$$

$$= \frac{e^p}{e^p-1}\cdot\frac{(1-e^{-p}-pe^{-p})}{p^2} = \frac{e^p-1-p}{p^2(e^p-1)}. \quad ●$$

Найти изображения периодических функций:

8.1.49. $f(t) = |\sin t|$.

8.1.50. Функция $f(t)$ задана графиком, который приведен на рис. 114.

8.1.51. Функция $f(t)$ задана графиком, который приведен на рис. 115.

8.1.52. Найти изображение функции $f(t) = t^2 \sin t$.

❍ По таблице изображений имеем:

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}.$$

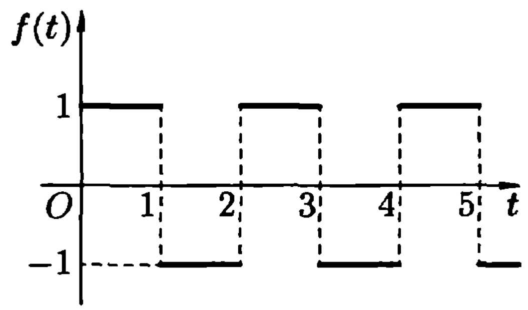


Рис. 114

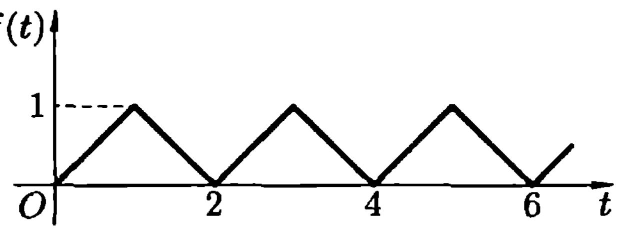


Рис. 115

Отсюда по теореме о дифференцировании изображения получим:

$$t^2 \sin t \mathrel{\dot{\to}} \left(\frac{1}{p^2+1}\right)''.$$

Находим

$$\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = \frac{-2p}{(p^2+1)^2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{p^2+1}\right)'' = \left(\frac{-2p}{(p^2+1)^2}\right)' = \frac{6p^2-2}{(p^2+1)^3}.$$

Окончательно, $t^2 \cdot \sin t \mathrel{\dot{\to}} \dfrac{6p^2-2}{(p^2+1)^3}$. ●

Найти изображения функций, используя теорему о дифференцировании изображения:

8.1.53. $f(t) = t^2 \cos 2t$.
8.1.54. $f(t) = t^3 \sin t$.
8.1.55. $f(t) = t \operatorname{sh} 3t$.
8.1.56. $f(t) = t \operatorname{ch} 2t$.
8.1.57. $f(t) = te^t \sin t$.

8.1.58. Найти изображение функции $f(t) = \dfrac{1-e^t}{t}$.

❍ По таблице изображений найдем изображение функции

$$\varphi(t) = 1 - e^t \mathrel{\dot{\to}} \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1}.$$

Тогда по теореме об интегрировании изображения имеем:

$$f(t) = \frac{1-e^t}{t} \mathrel{\dot{\to}} \int_p^{\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-1}\right) dp = [\ln p - \ln(p-1)] \Big|_p^{\infty} =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \ln \frac{p}{p-1} \Big|_p^M = 0 - \ln \frac{p}{p-1} = \ln \frac{p-1}{p}.$$ ●

Найти изображения следующих оригиналов:

8.1.59. $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.
8.1.60. $f(t) = \dfrac{1-\cos t}{t}$.
8.1.61. $f(t) = \dfrac{e^{2t}-1}{t}$.
8.1.62. $f(t) = \dfrac{\cos 3t - \cos t}{t}$.

8.1.63. Найти изображение функции $f(t) = \int\limits_0^t \tau e^\tau\, d\tau$.

○ Можно, вычислив интеграл, найти изображение по таблице изображений. Однако проще в данном случае воспользоваться теоремой об интегрировании оригинала. Действительно, имеем: $te^t \risingdotseq \dfrac{1}{(p-1)^2}$. Тогда по теореме об интегрировании оригинала получим:

$$\int\limits_0^t \tau e^\tau\, d\tau \risingdotseq \frac{1}{(p-1)^2} : p = \frac{1}{p(p-1)^2}. \qquad \bullet$$

Не вычисляя интегралы, найти изображения следующих функций:

8.1.64. $\int\limits_0^t \tau \sin 2\tau\, d\tau$.

8.1.65. $\int\limits_0^t \tau \cos 3\tau\, d\tau$.

8.1.66. $\int\limits_0^t \tau^2 e^{2\tau}\, d\tau$.

8.1.67. $\int\limits_0^t \tau \cos^2 \tau\, d\tau$.

8.1.68. $\int\limits_0^t \tau e^\tau \sin 2\tau\, d\tau$.

Дополнительные задания

В следующих задачах найти изображения оригиналов:

8.1.69. $f(t) = \dfrac{3}{5^t} - \dfrac{2t}{3^t}$.

8.1.70. $f(t) = e^t \sin 2t \cos 4t$.

8.1.71. $f(t) = te^{2t} \cos 3t$.

8.1.72. $f(t) = e^{-t} \sin^2 t$.

8.1.73. $f(t) = t\chi(t-1)$.

8.1.74. $f(t) = \sin(2t-4)\chi(t-2)$.

8.1.75. $f(t) = t^2 \cos t$.

8.1.76. $f(t) = t^2 \operatorname{sh} 2t$.

8.1.77. $f(t) = t^3 4^t$.

8.1.78. $f(t) = \dfrac{\sin 3t - \sin t}{t}$.

8.1.79. $f(t) = \dfrac{e^t - e^{2t}}{t}$.

8.1.80. $f(t) = \int\limits_0^t \tau \sin^2 2\tau\, d\tau$.

8.1.81. $f(t) = \int\limits_0^t \tau^3 e^\tau\, d\tau$.

8.1.82. $f(t) = \int\limits_0^t \tau e^{3\tau} \cos 4\tau\, d\tau$.

8.1.83. $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ 2-t, & t \in (1,2], \\ 0, & t \notin [0,2]. \end{cases}$

Найти изображения периодических функций:

8.1.84. $f(t) = |\cos t|$.

8.1.85. $f(t) = \arcsin(\sin t)$.

8.1.86. $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \chi(t-n)$.

8.1.87. $f(t)$ — периодическая функция с периодом $T = 1$ и на промежутке $[0,1)$ заданная равенством $f(t) = t^2$.

Более сложные задачи

8.1.88. Может ли функция $F(p) = \dfrac{1}{\sin p}$ быть изображением некоторого оригинала?

8.1.89. Если $f(t)$ — оригинал, то будет ли оригиналом функция:

1) $\int\limits_0^t f(t)\,dt$; 2) $f'(t)$.

8.1.90. Если $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы, то является ли оригиналом функция $f(t)g(t)$?

8.1.91. Показать, что если $f(t)$ — периодическая функция, являющаяся оригиналом, то ее изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > 0$.

8.1.92. Доказать, что если $f(t) \mathrel{\dot{\to}} F(p)$, то

$$f(t)\chi(t-s) \mathrel{\dot{\to}} F(p) - \int\limits_0^s f(t)e^{-pt}\,dt.$$

§ 2. СВЕРТКА ФУНКЦИЙ. ОТЫСКАНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ

⇛ *Сверткой* функций $f(t)$ и $g(t)$ (обозначение $f(t)*g(t)$) называется функция

$$\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$ ⇚

Операция свертывания функций обладает свойством коммутативности:

$$f(t)*g(t) = g(t)*f(t), \quad \text{т. е.} \quad \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau.$$

Теорема 8.10 (об умножении изображений, или теорема о свертке). Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — оригиналы, а $F(p)$ и $G(p)$, соответственно, их изображения. Тогда $f(t)*g(t) \mathrel{\dot{\to}} F(p)\cdot G(p)$.

Таким образом, *изображение свертки двух оригиналов есть произведение их изображений.*

Отыскание оригиналов по изображениям

Для нахождения оригиналов по заданным изображениям можно использовать несколько приемов.

Первый состоит в том, что изображение $\dfrac{Q(p)}{R(p)}$ представляется в виде суммы элементарных дробей, являющихся изображениями простых оригиналов. После чего, используя таблицу оригиналов и свойство линейности преобразования Лапласа, находят оригинал, соответствующий исходной дроби.

Второй способ состоит в том, что дробь представляется в виде произведения дробей, являющихся изображениями некоторых функций, после чего применяется теорема о свертке.

Третий способ основан на следующей теореме (приведем ее в несколько ослабленном варианте):

Теорема 8.11 (о разложении[7]). Пусть функция $F(p) = \dfrac{Q(p)}{R(p)}$ представляет собой правильную рациональную дробь, имеющую полюсы в точках p_k, где $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда оригиналом для нее служит функция

$$f(t) = \sum_{p_k} \operatorname*{res}_{p_k} \left(F(p) \cdot e^{pt}\right),$$

где сумма берется по всем полюсам.

8.2.1. Найти оригиналы следующих изображений:

а) $F(p) = \dfrac{7}{p^3}$; б) $F(p) = \dfrac{4}{(p+1)^4} - \dfrac{3}{(p-1)^2}$;

в) $F(p) = \dfrac{4}{p^2 - 6p + 13}$; г) $F(p) = \dfrac{3p - 1}{p^2 + 4p + 29}$;

д) $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{(p-2)^3}$.

а) По таблице изображений имеем: $t^2 \to \dfrac{2!}{p^3} = \dfrac{2}{p^3}$. Поэтому, преобразуя $F(p)$, получим $\dfrac{7}{p^3} = \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{2}{p^3}$. Отсюда по свойству линейности преобразования Лапласа находим оригинал для $F(p)$: $\dfrac{7}{p^3} = \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{2}{p^3} \leftarrow \dfrac{7}{2} t^2$.

б) Преобразуем $F(p)$ таким образом, чтобы можно было воспользоваться таблицей изображений:

$$\frac{4}{(p+1)^4} - \frac{3}{(p-1)^2} = \frac{4}{3!} \cdot \frac{3!}{(p+1)^4} - 3 \cdot \frac{1}{(p-1)^2}.$$

[7] Зачастую эту теорему называют также *второй теоремой разложения* (поскольку есть еще и первая теорема разложения).

Функция $\dfrac{3!}{(p+1)^4}$ является изображением оригинала $e^{-t}\cdot t^3$, а $\dfrac{1}{(p-1)^2}$ — изображением оригинала $e^t \cdot t$. Таким образом, окончательно имеем:

$$F(p) \leftarrow\!\!\div\ \frac{2}{3}e^{-t}\cdot t^3 - 3e^t\cdot t.$$

в) Преобразуем дробь, выделив полный квадрат в знаменателе:

$$F(p) = \frac{4}{p^2-6p+13} = \frac{4}{(p-3)^2+4} = \frac{4}{(p-3)^2+2^2} = 2\cdot\frac{2}{(p-3)^2+2^2}.$$

Последняя дробь является изображением функции $e^{3t}\sin 2t$. Тогда по свойству линейности преобразования Лапласа получаем

$$\frac{4}{(p-3)^2+4} \leftarrow\!\!\div\ 2e^{3t}\sin 2t.$$

г) Действуем аналогично пункту в):

$$F(p) = \frac{3p-1}{p^2+4p+29} = \frac{3p-1}{(p+2)^2+25}.$$

Покажем, что последняя дробь есть линейная комбинация изображений функций $e^{-2t}\sin 5t$ и $e^{-2t}\cos 5t$. Действительно,

$$\frac{3p-1}{(p+2)^2+25} = \frac{3(p+2)-7}{(p+2)^2+25} = \frac{3(p+2)}{(p+2)^2+25} - \frac{7}{(p+2)^2+25} =$$
$$= 3\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+25} - \frac{7}{5}\cdot\frac{5}{(p+2)^2+25}.$$

Следовательно, согласно таблице изображений и свойству линейности преобразования Лапласа, находим оригинал:

$$F(p) = 3\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+25} - \frac{7}{5}\cdot\frac{5}{(p+2)^2+25} \leftarrow\!\!\div\ 3e^{-2t}\cos 5t - \frac{7}{5}e^{-2t}\sin 5t.$$

д) По таблице изображений находим сначала оригинал $f(t)$ для функции $\dfrac{1}{(p-2)^3}$. А именно:

$$\frac{1}{(p-2)^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(p-2)^3} \leftarrow\!\!\div\ \frac{1}{2}e^{2t}t^2 = f(t).$$

Применив теорему запаздывания оригинала, имеем:

$$\frac{e^{-p}}{(p-2)^3} \leftarrow\!\!\div\ f(t-1) = \frac{1}{2}e^{2(t-1)}(t-1)^2\chi(t-1).$$

(напоминаем, что под функцией $\frac{1}{2}e^{2t}t^2$ мы понимаем функцию

$$\frac{1}{2}e^{2t}t^2\chi(t)).$$

●

Найти оригиналы для следующих изображений:

8.2.2. $F(p) = \frac{3}{p} + \frac{5}{p^3} + \frac{7}{p+1}$. **8.2.3.** $F(p) = \frac{4}{(p+3)^5} - \frac{8}{(p-4)^4}$.

8.2.4. $F(p) = \frac{3p+1}{p^2+9}$. **8.2.5.** $F(p) = \frac{5p-3}{p^2-4}$.

8.2.6. $F(p) = \frac{p}{p^2+2p+2}$. **8.2.7.** $F(p) = \frac{3-4p}{p^2+4p+8}$.

8.2.8. $F(p) = \frac{3e^{-p}}{p+3}$. **8.2.9.** $F(p) = \frac{e^{-p}+e^{-2p}}{(p-2)^2}$.

8.2.10. $F(p) = \frac{4e^{-3p}}{p^2+6p+10}$. **8.2.11.** $F(p) = \frac{(e^{-p}-3e^{-4p})p}{p^2+10p+29}$.

8.2.12. Найти оригиналы следующих изображений:

а) $F(p) = \frac{2}{p(p+1)}$; б) $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+1)}$;

в) $F(p) = \frac{p}{(p-1)^3}$; г) $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$.

а) В этом случае можно поступить так же, как в решении задачи 8.2.1. пункт в), а именно:

$$\frac{2}{p(p+1)} = \frac{2}{p^2+p} = \frac{2}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Отсюда по таблице изображений получаем:

$$\frac{2}{p(p+1)} \leftarrow\!\!\!\div\; 4e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2} = 4e^{-\frac{t}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}{2} = 2 - 2e^{-t}.$$

Однако можно найти оригинал и по-другому. Сначала представим дробь $\frac{2}{p(p+1)}$ в виде суммы простейших дробей

$$\frac{2}{p(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1}.$$

Затем с помощью стандартной процедуры находим коэффициенты A и B: имеем равенство $2 = A(p+1) + Bp$, которое справедливо для всех значений p. Полагая $p = -1$ и $p = 0$, получаем два соотношения $2 = -B$ и $2 = A$, из которых находим $A = 2$, $B = -2$. Отсюда

$$\frac{2}{p(p+1)} = \frac{2}{p} - \frac{2}{p-1}.$$

Теперь по таблице изображений находим: $\frac{2}{p(p+1)} \leftarrow\!\!\!\div\; 2 - 2e^{-t}$.

б) Представим дробь в виде суммы простейших дробей

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

Приводя правую часть равенства к общему знаменателю и приравнивая числители обеих дробей, получаем равенство:

$$1 = A(p-1)(p^2+1) + Bp(p^2+1) + (Cp+D)p(p-1).$$

Подставляя подходящие значения p, приходим к системе:

$$\begin{array}{lcl} p=0 & : & 1=-A \\ p=1 & : & 1=2B \\ p=-1 & : & 1=-4A-2B-2C+2D \\ p=2 & : & 1=5A+10B+4C+2D \end{array}$$

Вместо полученных уравнений можно составить другие уравнения, приравнивая, например, коэффициенты при одинаковых степенях многочленов, стоящих в обеих частях равенства. Так, сравнение коэффициентов при p^3 приводит к равенству: $0 = A + B + C$, что дает возможность получить более простую систему уравнений:

$$\begin{cases} A=-1, \\ 2B=1, \\ A+B+C=0, \\ -4A-2B-2C+2D=1, \end{cases}$$

откуда $A=-1$, $B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, $D=-\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2}\frac{p-1}{p^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+1)} \risingdotseq -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t.$$

в) Запишем $F(p)$ в виде:

$$\frac{p}{(p-3)^3} = \frac{(p-1)+1}{(p-1)^3} = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3} = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{(p-1)^3}.$$

По таблице изображений находим: $\dfrac{p}{(p-1)^3} \risingdotseq te^t + \dfrac{1}{2}t^2e^t$.

г) Представим $F(p)$ в виде линейной комбинации дробей

$$\frac{1}{p^2+1},\quad \frac{p}{p^2+1},\quad \frac{2p}{(p^2+1)^2},\quad \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2},$$

являющихся изображениями функций $\sin t$, $\cos t$, $t\sin t$, $t\cos t$ соответственно. Таким образом, ищем разложение дроби в виде:

$$\frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{A}{p^2+1} + \frac{Bp}{p^2+1} + \frac{2Cp}{(p^2+1)^2} + \frac{D(p^2-1)}{(p^2+1)^2}.$$

Используя приемы, изложенные выше, находим

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = C = 0, \quad D = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{2}\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} \risingdotseq \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t. \quad \bullet$$

По заданным изображениям найти оригиналы:

8.2.13. $F(p) = \dfrac{p+2}{p^3}$. **8.2.14.** $F(p) = \dfrac{3p-4}{(p-1)(p-2)}$.

8.2.15. $F(p) = \dfrac{2p+1}{p^2-p}$. **8.2.16.** $F(p) = \dfrac{2-p}{(p-1)^2}$.

8.2.17. $F(p) = \dfrac{2p^3+p^2+2p-1}{p^4-1}$. **8.2.18.** $F(p) = \dfrac{6p^2-p-6}{p^3-p^2-6p}$.

8.2.19. $F(p) = \dfrac{p^3+p^2-1}{p^4-p^3}$. **8.2.20.** $F(p) = \dfrac{3p^2-2p+5}{p^3-2p^2+5p}$.

8.2.21. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p+3)^4}$. **8.2.22.** $F(p) = \dfrac{p^3+2p^2+4p+2}{p^4+5p^2+4}$.

8.2.23. $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$. **8.2.24.** $F(p) = \dfrac{p^2-2p-1}{p^3-3p^2+3p-1}$.

8.2.25. $F(p) = \dfrac{p^2-p+1}{(p^2-1)^2}$. **8.2.26.** $F(p) = \dfrac{2p^3-p^2+4p-4}{p^4-8p^2+16}$.

8.2.27. $F(p) = \dfrac{(p+1)^2}{(p^2+1)^2}$. **8.2.28.** $F(p) = \dfrac{2p^3-2p^2-2}{(p^2-2p+2)^2}$.

8.2.29. $F(p) = \dfrac{(2p^2-5)e^{-3p}}{p^4-5p^2+4}$. **8.2.30.** $F(p) = \dfrac{p^2e^{-p}}{(p+2)^5}$.

8.2.31. Найти свертку функций $f(t)$ и $g(t)$и ее изображение:
а) $f(t) = e^t$, $g(t) = t$; **б)** $f(t) = \cos t$, $g(t) = e^{2t}$.

○ **а)** *Первый способ.*

Найдем по таблице изображения функций:

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}, \quad t \risingdotseq \frac{1}{p^2}.$$

Тогда по теореме о свертке получаем:

$$e^t * t \risingdotseq \frac{1}{p-1}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Итак, изображение свертки нами найдено. Теперь найдем саму свертку. Для этого методом неопределенных коэффициентов представим дробь $\dfrac{1}{p^2(p-1)}$ в виде:

$$\frac{1}{p^2(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}.$$

Наконец, по таблице изображений находим свертку функций e^t и t:

$$e^t * t \leftarrow e^t - 1 - t.$$

Второй способ.

Вычислим свертку функций, пользуясь определением:

$$e^t * t = \int_0^t e^\tau (t-\tau)\,d\tau.$$

Интегрируем по частям:

$$\int_0^t e^\tau (t-\tau)\,d\tau = \int_0^t (t-\tau)\,de^\tau = (t-\tau)e^\tau\Big|_0^t - \int_0^t e^\tau\,d(t-\tau) =$$

$$= -t + \int_0^t e^\tau\,d\tau = -t + e^\tau\Big|_0^t = -t + e^t - 1.$$

Следовательно, $e^t * t = e^t - t - 1$. Теперь по таблице изображений находим изображение свертки:

$$e^t * t \leftarrow \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

б) В этом случае проще использовать первый способ из пункта а), поскольку при непосредственном вычислении свертки потребуется двукратное интегрирование по частям. Поэтому найдем сначала изображение свертки. Имеем: $f(t) = \cos t \leftarrow \dfrac{p}{p^2+1}$ и $g(t) = e^{2t} \leftarrow \dfrac{1}{p-2}$. Тогда

$$f(t) * g(t) \leftarrow \frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p-2} = \frac{p}{(p^2+1)(p-2)}.$$

Последняя дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей. Опуская технические детали, получаем:

$$\frac{p}{(p^2+1)(p-2)} = \frac{-\frac{2}{5}p + \frac{1}{5}}{p^2+1} + \frac{\frac{2}{5}}{p-2} = -\frac{2}{5}\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{p^2+1} + \frac{2}{5}\frac{1}{p-2}.$$

По таблице изображений находим теперь саму свертку:

$$\cos t * e^{2t} = -\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t + \frac{2}{5}e^{2t}.$$ ●

Найти свертку функций, используя определение:

8.2.32. $f(t) = 1$, $g(t) = 2$.

8.2.33. $f(t) = 1$, $g(t) = t$.

8.2.34. $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$.

8.2.35. $f(t) = e^t$, $g(t) = e^{2t}$.

8.2.36. $f(t) = \cos t$, $g(t) = t$.

Найти изображение сверток функций, пользуясь теоремой о свертке:

8.2.37. $f(t) = \sin t$, $g(t) = \sin 2t$. **8.2.38.** $f(t) = e^{3t}$, $g(t) = t^2$.
8.2.39. $f(t) = \cos t$, $g(t) = t^3$. **8.2.40.** $f(t) = \operatorname{sh} t$, $g(t) = \operatorname{ch} t$.

В следующих задачах найти свертку функций $f(t)$ и $g(t)$ и ее изображение:

8.2.41. $f(t) = 1$, $g(t) = e^t$. **8.2.42.** $f(t) = e^{3t}$, $g(t) = e^{5t}$.
8.2.43. $f(t) = e^t$, $g(t) = \sin t$. **8.2.44.** $f(t) = t^2$, $g(t) = \cos 2t$.
8.2.45. $f(t) = t$, $g(t) = te^t$. **8.2.46.** $f(t) = \sin t$, $g(t) = \sin t$.
8.2.47. $f(t) = t$, $g(t) = t\sin t$.

8.2.48. Найти свертку функций $\chi(t)$ и $\chi(t-1)$.
8.2.49. Пусть $f(t) = e^t\chi(t)$. Найти свертку функций $f(t-1)$ и $f(t-2)$.
8.2.50. Пользуясь теоремой о свертке, найти оригинал изображения $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

○ Представим $F(p)$ в виде произведения

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1}\frac{p}{p^2+1}.$$

Функции $\dfrac{1}{p^2+1}$ и $\dfrac{p}{p^2+1}$ являются изображениями функций $\sin t$ и $\cos t$ соответственно. По теореме о свертке имеем:

$$\frac{p}{(p^2+1)^2} \risingdotseq \sin t * \cos t.$$

Осталось найти свертку функций $\sin t$ и $\cos t$:

$$\sin t * \cos t = \int_0^t \sin\tau\cos(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{1}{2}[\sin t + \sin(2\tau - t)]\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tau\sin t - \frac{1}{2}\cos(2\tau - t)\right)\Big|_0^t = \frac{1}{2}\left(t\sin t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\cos t\right) = \frac{1}{2}t\sin t.$$

Таким образом,

$$\frac{p}{(p^2+1)^2} \risingdotseq \frac{1}{2}t\sin t.$$

Заметим, что оригинал для $\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$ можно было найти иначе, воспользовавшись таблицей изображений. ●

Найти оригиналы изображений, пользуясь теоремой о свертке:

8.2.51. $F(p) = \dfrac{3}{(p^2+4)^2}$. **8.2.52.** $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$.
8.2.53. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2-2p+2)^2}$. **8.2.54.** $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

8.2.55. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^t e^{t-x}\sin x\,dx$; б) $\int\limits_0^1 e^{1-x}x\,dx$;

в) $\int\limits_0^t e^{-x}\cos x\,dx$.

○ а) Интеграл

$$\int\limits_0^t e^{t-x}\sin x\,dx$$

представляет собой свертку функций $\sin t$ и e^t. Ее изображением согласно теореме о свертке будет функция

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1}\frac{1}{p-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1}\right).$$

Оригиналом этого изображения служит функция

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - \cos t - \sin t\right).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^t e^{t-x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\left(e^t - \cos t - \sin t\right).$$

б) Рассмотрим функцию

$$f(t) = \int\limits_0^t e^{t-x}x\,dx.$$

Она представляет собой свертку функций t и e^t. Имеем

$$t * e^t \risingdotseq \frac{1}{p^2}\frac{1}{p-1} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}.$$

По таблице находим:

$$\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \fallingdotseq e^t - 1 - t.$$

Таким образом, $f(t) = t * e^t = e^t - 1 - t$. Поскольку

$$\int\limits_0^1 e^{1-x}x\,dx = f(1), \quad \text{то} \quad \int\limits_0^1 e^{1-x}x\,dx = e - 2.$$

в) Преобразуем интеграл:

$$\int\limits_0^t e^{-x}\cos x\,dx = e^{-t}\cdot e^t\int\limits_0^t e^{-x}\cos x\,dx = e^{-t}\int\limits_0^t e^{t-x}\cos x\,dx.$$

Очевидно,

$$\int_0^t e^{t-x}\cos x\,dx = \cos t * e^t.$$

Его изображением будет функция $\dfrac{p}{p^2+1}\cdot\dfrac{1}{p-1}$. Тогда по теореме смещения изображения имеем:

$$e^{-t}\int_0^t e^{t-x}\cos x\,dx \risingdotseq \frac{p+1}{(p+1)^2+1}\cdot\frac{1}{(p+1)-1} = \frac{p+1}{(p^2+2p+2)p} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{(p+1)^2+1} - \frac{p+1}{(p+1)^2+1}\right].$$

Оригиналом последнего выражения служит функция

$$\frac{1}{2}\left(1 + e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t\right).$$

Следовательно,

$$e^{-t}\int_0^t e^{t-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t\right),$$

откуда окончательно получаем:

$$\int_0^t e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t\right).$$ ●

Вычислить интегралы:

8.2.56. $\displaystyle\int_0^t \sin\tau\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau.$

8.2.57. $\displaystyle\int_0^t (t-x)^2\cos 2x\,dx.$

8.2.58. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot e^{\frac{\pi}{2}-x}\,dx.$

8.2.59. $\displaystyle\int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin(\pi-x)\,dx.$

8.2.60. С помощью теоремы о разложении найти оригиналы следующих изображений:

а) $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p+1)}$; б) $F(p) = \dfrac{p}{(p^2-1)^2}$;

в) $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2+4)}$.

◐ а) Функция $F(p)$ имеет полюсы первого порядка: $p_1 = 1$ и $p_2 = -1$. Тогда по теореме о разложении оригиналом для $F(p)$ служит функция $f(t) = \operatorname*{res}_{p=1} F(p)\cdot e^{pt} + \operatorname*{res}_{p=-1} F(p)\cdot e^{pt}$. Вычислим вычеты:

$$\operatorname*{res}_{p=1}\frac{e^{pt}}{(p-1)(p+1)} = \lim_{p\to 1}\frac{e^{pt}}{p+1} = \frac{e^t}{2},$$

$$\operatorname*{res}_{p=-1}\frac{e^{pt}}{(p-1)(p+1)} = \lim_{p\to -1}\frac{e^{pt}}{p-1} = -\frac{e^{-t}}{2}.$$

Следовательно, $f(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \operatorname{sh} t$.

б) Функция

$$F(p) = \frac{p}{(p-1)^2 \cdot (p+1)^2},$$

поэтому значения $p_1 = 1$ и $p_2 = -1$ являются полюсами второго порядка функции $F(p)$. Находим вычеты функции $F(p) \cdot e^{pt}$:

$$\operatorname*{res}_{p=1} \frac{e^{pt}p}{(p^2-1)^2} = \lim_{p\to 1} \frac{d}{dp}\left[\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2}\right] = \frac{te^t}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{p=-1} \frac{e^{pt}p}{(p^2-1)^2} = \lim_{p\to -1} \frac{d}{dp}\left[\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2}\right] = -\frac{te^{-t}}{4}.$$

Следовательно, $F(p) \leftarrow\!\!\!\!\div\; f(t) = \frac{te^t}{4} - \frac{te^{-t}}{4} = \frac{1}{2} t \operatorname{sh} t$.

в) Функция

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2+4)} = \frac{1}{p(p-2i)(p+2i)}$$

имеет полюсы первого порядка $p_1 = 0$, $p_2 = 2i$, $p_3 = -2i$. Тогда

$$\operatorname*{res}_{p=0} F(p) \cdot e^{pt} = \lim_{p\to 1} \frac{e^{pt}}{p^2+4} = \frac{1}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{p=2i} F(p) \cdot e^{pt} = \lim_{p\to 2i} \frac{e^{pt}}{p(p+2i)} = -\frac{1}{8}e^{2it} = -\frac{1}{8}(\cos 2t + i \sin 2t),$$

$$\operatorname*{res}_{p=-2i} F(p) \cdot e^{pt} = \lim_{p\to -2i} \frac{e^{pt}}{p(p-2i)} = -\frac{1}{8}e^{-2it} = -\frac{1}{8}(\cos 2t - i \sin 2t).$$

Следовательно,

$$F(p) \leftarrow\!\!\!\!\div\; f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(\cos 2t + i \sin 2t) - \frac{1}{8}(\cos 2t - i \sin 2t) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t) = \frac{\sin^2 t}{2}.$$ ●

С помощью теоремы о разложении найти оригиналы следующих изображений:

8.2.61. $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)(p-3)}$.

8.2.62. $F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

8.2.63. $F(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}$. **8.2.64.** $F(p) = \frac{1}{(p^2-4)(p-1)}$.

8.2.65. $F(p) = \frac{p+1}{(p^2-p)(p^2-5p+6)}$.

8.2.66. $F(p) = \frac{p}{p^4-1}$.

Дополнительные задачи

Найти оригиналы следующих изображений:

8.2.67. $\dfrac{5}{p}+\dfrac{3}{p^4}+\dfrac{p}{p^2+2p+5}$.

8.2.68. $\dfrac{-p^2+3p-3}{(p-1)^2(p-2)}$.

8.2.69. $\dfrac{p^2+4p-1}{(p^2+1)^2}$.

8.2.70. $\dfrac{-p^4+p^3-3p^2-1}{(p^2+1)^2p^2}$.

8.2.71. $\dfrac{4p^3-2p^2+p-2}{p^3(p^2+1)}$.

8.2.72. $\dfrac{2e^{-3p}}{p^4-1}$.

8.2.73. $\dfrac{3p^2-6p+7}{(p^2-2p+5)^2}$.

8.2.74. $\dfrac{p}{p^2+1}\left(e^{-p}+2e^{-2p}\right)$.

8.2.75. $\dfrac{e^{-\frac{p}{2}}}{p(p-3)}$.

Найти свертку следующих функций:

8.2.76. $f(t)=t$, $g(t)=t$.

8.2.77. $f(t)=3$, $g(t)=e^t$.

8.2.78. $f(t)=e^t$, $g(t)=e^t$.

8.2.79. $f(t)=\sin 3t$, $g(t)=\sin 2t$.

8.2.80. $f(t)=t^2$, $g(t)=te^t$.

8.2.81. Найти свертку функций $t\cdot\chi(t)$ и $(t-1)\chi(t-1)$.

8.2.82. Найти свертку функций

$$\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\chi\left(t-\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{и} \quad \sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\chi\left(t-\frac{\pi}{3}\right).$$

Контрольные вопросы и более сложные задания

8.2.83. Доказать, что если на отрезке $[0,t_0]$ оригиналы $f(t)$ и $g(t)$ равны нулю, то свертка $f(t)*g(t)$ равна нулю на отрезке $[0,2t_0]$.

8.2.84. Верно ли, что если $f(t)*g(t)\equiv 0$, то:

а) одна из функций тождественно равна нулю;

б) в каждой точке одна из функций обращается в нуль?

8.2.85. Доказать свойство коммутативности свертки:

$$f(t)*g(t)=g(t)*f(t).$$

8.2.86. Можно ли по свертке однозначно восстановить свертываемые функции?

8.2.87. Зная, что $1*f(t)=\sin t$, найти функцию $f(t)$.

8.2.88. Найти оригинал изображения

$$F(p)=\frac{6p^2-2}{(p^2+1)^3}.$$

8.2.89. Найти оригинал изображения

$$F(p)=\frac{1}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}.$$

§ 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений

Методы операционного исчисления удобно применять при решении некоторых дифференциальных уравнений.

Пусть задано дифференциальное уравнение (например, 2-го порядка) с постоянными коэффициентами: $a_0x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t) = f(t)$, где a_0, a_1, $a_2 = \text{const}$. Требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям: $x(0) = x_1$, $x'(0) = x_2$. Используя операционное исчисление, это решение находят следующим образом. Предположим, что правая часть данного уравнения является оригиналом. Тогда и решение $x(t)$ этого уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, также будет оригиналом. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Используя теорему о дифференцировании оригинала, находим изображения производных, входящих в уравнение. В нашем случае: $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0)$ и $x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$. Далее, находим изображение функции $f(t) \risingdotseq F(p)$. Наконец, применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения и пользуясь свойством линейности преобразования Лапласа, получаем *операторное уравнение*:

$$a_0\left(p^2X(p) - px(0) - x'(0)\right) + a_1(pX(p) - x(0)) + a_2X(p) = F(p).$$

Операторное уравнение (другое название — *изображающее уравнение*) является линейным уравнением относительно неизвестной функции $X(p)$. Решая его, находим $X(p)$ и, наконец, по $X(p)$ восстанавливаем оригинал $x(t)$.

Иногда методы операционного исчисления позволяют найти решение линейного уравнения с переменными коэффициентами. Это возможно, например, в случае, если функции $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ — многочлены, обычно не старше первой степени. Однако нахождение решения в этом случае сложнее, поскольку бывает затруднительно восстанавливать оригинал по найденному изображению (см. пример 3.42).

Решение интегральных уравнений

$\Rrightarrow$ *Интегральными уравнениями* называются такие уравнения, в которых неизвестная функция $x(t)$ стоит под знаком интеграла. $\Lleftarrow$

В некоторых случаях такие уравнения тоже могут быть решены средствами операционного исчисления. К таким уравнениям относятся, например, уравнения Вольтерра первого и второго рода, т. е. соответственно уравнения

$$\int_0^t k(t-\tau)x(\tau)\,d\tau = f(t) \quad \text{и} \quad x(t) = f(t) + \int_0^t k(t-\tau)x(\tau)\,d\tau.$$

Пусть, например, дано интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$x(t) = f(t) + \int_0^t k(t-\tau)x(\tau)\,d\tau.$$

В этом случае интеграл представляет собой свертку функций $k(t)$ и $x(t)$. Предполагая, что $x(t) \risingdotseq X(p)$, $k(t) \risingdotseq \Phi(p)$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$, применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнения. Пользуясь линейностью преобразования Лапласа и теоремой о свертке, получим операторное уравнение:

$$X(p) = F(p) + \Phi(p)X(p),$$

откуда находится неизвестная функция $X(p)$, а затем и соответствующий ей оригинал.

Аналогично решаются уравнения Вольтерра первого рода:

$$\int_0^t k(t-\tau)x(\tau)\,d\tau = f(t).$$

8.3.1. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

а) $x' - x = 1,\ \ x(0) = -1$;

б) $x'' - 2x' + 2x = 2t - 2,\ \ x(0) = x'(0) = 0$;

в) $x''' - x'' = 4e^{2t},\ \ x(0) = 1,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 4$.

а) Пусть функция $x(t)$ имеет изображение $X(p)$, т. е. $x(t) \risingdotseq X(p)$. Тогда по теореме о дифференцировании оригинала получим изображение $x'(t)$: $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) + 1$.

Изображением функции 1 является $\frac{1}{p}$. Таким образом, применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, приходим к операторному уравнению вида: $pX(p) + 1 - X(p) = \frac{1}{p}$. Отсюда находим $X(p) = -\frac{1}{p}$. Следовательно, $f(t) = -1$.

б) Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. По теореме о дифференцировании оригинала получаем изображения производных функции $x(t)$:

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p).$$

Так как

$$2t - 2 \risingdotseq \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p} = \frac{2(1-p)}{p^2},$$

то приходим к операторному уравнению

$$p^2X(p) - 2pX(p) + 2X(p) = \frac{2(1-p)}{p^2},$$

из которого находим изображение $X(p)$ частного решения дифференциального уравнения:

$$X(p) = \frac{2(1-p)}{p^2(p^2-2p+2)}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим разложение этой дроби в виде суммы дробей, являющихся оригиналами элементарных функций (см. § 2 этой главы):

$$\frac{2(1-p)}{p^2(p^2-2p+2)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2-2p+2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

Следовательно, $X(p) \leftarrow\!\!\!\div\; t - \sin t \cdot e^t$.

в) Пусть $x(t) \div\!\!\!\rightarrow X(p)$. Тогда

$$x''(t) = p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p - 2,$$
$$x'''(t) = p^3X(p) - p^2x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3X(p) - p^2 - 2p - 4.$$

Изображением правой части уравнения будет функций $\frac{4}{p-2}$. Отсюда получаем операторное уравнение

$$p^3X(p) - p^2 - 2p - 4 - p^2X(p) + p + 2 = \frac{4}{p-2}.$$

Решив его относительно функции $X(p)$, получим $X(p) = \frac{1}{p-2}$ и, следовательно, $x(t) = e^{2t}$. ●

8.3.2. Найти общее решение уравнения $x'' - 2x' + x = e^t$.

○ Выберем произвольные начальные условия задачи Коши. Пусть $x(0) = c_1$ и $x'(0) = c_2$. Пусть теперь $x(t) \div\!\!\!\rightarrow X(p)$. Тогда

$$x'(t) \div\!\!\!\rightarrow pX(p) - c_1 \quad \text{и} \quad x''(t) \div\!\!\!\rightarrow p^2X(p) - c_1p - c_2.$$

Так как $e^t \div\!\!\!\rightarrow \frac{1}{p-1}$, то соответствующее операторное уравнение имеет вид

$$p^2X(p) - c_1p - c_2 - 2pX(p) + 2c_1 + X(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Находим отсюда $X(p)$:

$$X(p) = \frac{c_1}{p-1} + \frac{c_2 - c_1}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3}.$$

Следовательно, решением дифференциального уравнения будет функция

$$x(t) = c_1e^t + \widetilde{c}_2te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$$

(здесь $\widetilde{c}_2 = c_2 - c_1$). ●

Средствами операторного исчисления решить линейные (однородные и неоднородные) дифференциальные уравнения (всюду $x = x(t)$):

8.3.3. $x' + 3x = 0$, $x(0) = 2$.

8.3.4. $x' - 4x = 1 - 4t$, $x(0) = 1$.

8.3.5. $x' + x = 2\cos t$, $x(0) = 0$.

8.3.6. $x'' + 4x' - 5x = 0$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -3$.

8.3.7. $x'' - 6x' + 9x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

8.3.8. $x'' + 4x = 0, \quad x(0) = 1, x'(0) = 6.$

8.3.9. $x'' + x' - 2x = 1, \quad x(0) = 0, x'(0) = -2.$

8.3.10. $x'' - 3x' + 10x = 9\sin t - 3\cos t, \quad x(0) = 0, x'(0) = -2.$

8.3.11. $x'' - 4x' + 4x = 4t, \quad x(0) = 4, x'(0) = 7.$

8.3.12. $x'' + 2x' + x = t + 2, \quad x(0) = 0, x'(0) = 2.$

8.3.13. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

8.3.14. $x'' - 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

8.3.15. $x'' - x' = e^t, \quad x(0) = x'(0) = 4.$

8.3.16. $x'' + x = 1, \quad x(0) = -1, x'(0) = 0.$

8.3.17. $x'' - x = \sin t, \quad x(0) = -1, x'(0) = 0.$

8.3.18. $x'' - x = 2\,\mathrm{sh}\,t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 1.$

8.3.19. $x'' + 2x' + x = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

8.3.20. $x'' + 2x' + 10x = \sin 3t + 6\cos 3t, \quad x(0) = x'(0) = 1.$

8.3.21. $x''' + x'' = 0, \quad x(0) = 2, x'(0) = x''(0) = 1.$

8.3.22. $x''' + x' = 0, \quad x(0) = 1, x'(0) = 2, x''(0) = 3.$

8.3.23. $x''' - 3x'' + 3x' - x = 0, \quad x(0) = 1, x'(0) = x''(0) = 0.$

8.3.24. $x^{IV} - x'' = 0, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, x'''(0) = 2.$

8.3.25. $x''' - x'' = -2e^t \sin t, \quad x(0) = 1, x'(0) = 1, x''(0) = 2.$

8.3.26. $x''' - x' = \cos t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

8.3.27. $x''' + 2x'' - 3x' = 4e^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

8.3.28. $x^{IV} - x = t^3, \quad x(0) = 3, x'(0) = 1, x''(0) = 3, x'''(0) = 1.$

8.3.29. $x^{IV} - 2x'' + x = 4t\sin t - 8\cos t, \quad x(0) = 1, x'(0) = 2, x''(0) = 1,$ $x'''(0) = 4.$

8.3.30. $x^{IV} - x'' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

8.3.31. $x'' - x = 0.$

8.3.32. $x'' + 2x' + x = 1.$

8.3.33. $x'' + x' - 2x = 3e^t.$

8.3.34. $x'' - 2x' + 5x = 5t^2 + t.$

8.3.35. $x''' + x' = 2.$

8.3.36. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x'' + x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$$

где $f(t)$ задана графически (рис. 116).

❍ Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Тогда $x''(t) \risingdotseq p^2X(p)$. Найдем изображение функции $f(t)$. Это можно сделать, или применив преобразование Лапласа к оригиналу $f(t)$, или воспользовавшись теоремой запаздывания оригинала.

Применим второй вариант. Функция $f(t)$ может быть записана в виде:

$$f(t) = \chi(t) - 2\chi(t-1) + \chi(t-2).$$

Тогда

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{2e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p}.$$

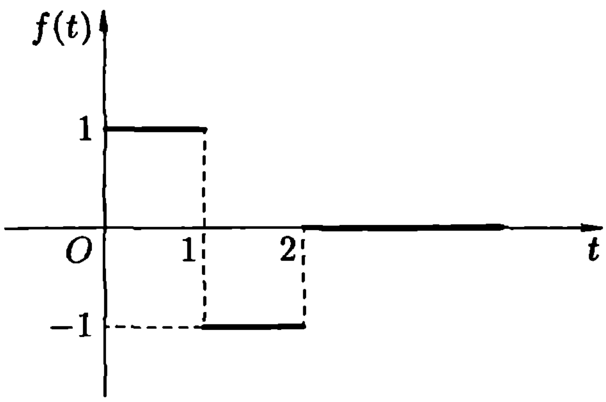


Рис. 116

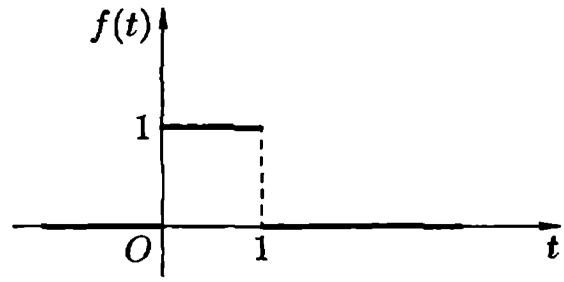


Рис. 117

Запишем теперь операторное уравнение:

$$p^2X(p) + X(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p}.$$

Находим из него неизвестное изображение $X(p)$:

$$X(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p(p^2+1)}.$$

Методом неопределенных коэффициентов (или же используя теорему о свертке) находим разложение дроби $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$ в сумму дробей

$$\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}.$$

Следовательно,

$$X(p) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2+1}\right)\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right).$$

Еще раз используя теорему запаздывания, находим искомый оригинал $f(t)$ изображения $X(p)$:

$$f(t) = (1-\cos t)\chi(t) - 2(1-\cos(t-1))\chi(t-1) + (1-\cos(t-2))\chi(t-2).$$ ●

Найти частные решения дифференциальных уравнений:

8.3.37. $x' + x = \chi(t-1)$, $x(0) = 0$.

8.3.38. $x'' - x' = f(t)$, $x(0) = x'(0)$, функция $f(t)$ задана графиком (рис. 117).

8.3.39. $x'' + x' = f(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, функция $f(t)$ задана графиком (рис. 118).

8.3.40. $x'' + 4x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, функция $f(t)$ задана графиком (рис. 119).

8.3.41. $x'' - x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, функция $f(t)$ задана графиком (рис. 120).

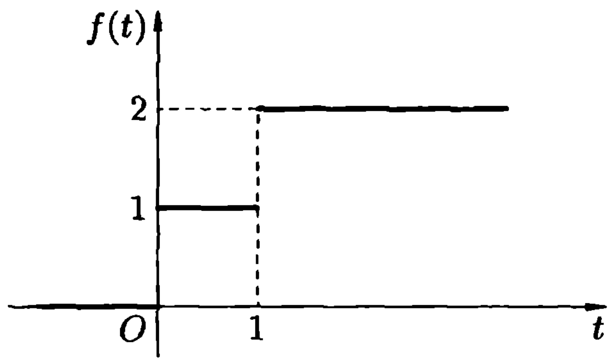


Рис. 118

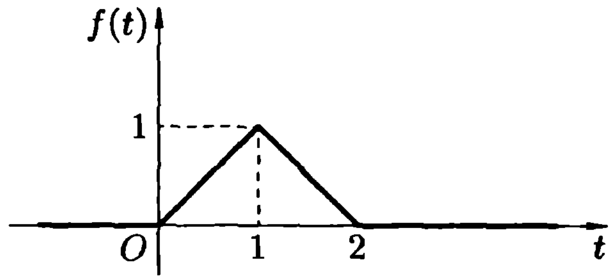


Рис. 119

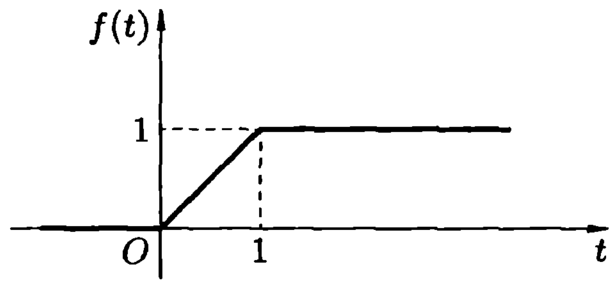


Рис. 120

8.3.42. Найти решение задачи Коши $tx'' + tx' - x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

◔ Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Тогда

$$x'(t) \risingdotseq pX(p),$$
$$x''(t) = p^2X(p) - x'(0) = p^2X(p) - 1.$$

Далее, по теореме о дифференцировании изображения находим изображения функций $tx'(t)$ и $tx''(t)$:

$$tx'(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}(pX(p)) = -X(p) - pX'(p),$$
$$tx''(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(p^2X(p) - 1\right) = -2pX(p) - p^2X'(p).$$

Следовательно, операторное уравнение примет вид:

$$-2pX(p) - p^2X'(p) - X(p) - pX'(p) - X(p) = 0,$$

или

$$(p^2 + p)X'(p) + 2(p+1)X(p) = 0,$$

откуда

$$pX'(p) + 2X(p) = 0.$$

В данном случае операторное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение. Однако порядок его ниже, чем порядок исходного уравнения. Разделяя переменные в этом уравнении и интегрируя обе части полученного равенства, имеем:

$$\frac{dX}{X} = -\frac{2dp}{p}, \quad \text{откуда} \quad \ln X = -2\ln p + \ln C, \quad \text{т.е.} \quad X(p) = \frac{C}{p^2}.$$

Оригиналом для этой функции служит функция $x(t) = C \cdot t$. Используя начальное условие $x'(0) = 1$, находим $C = 1$. Окончательно имеем $x(t) = t$. ●

Найти частные решения дифференциальных уравнений средствами операционного исчисления:

8.3.43. $tx'' - 3x' = 0, \quad x(0) = 2,\ x'(0) = 0.$

8.3.44. $tx'' + 2x' = 0, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

8.3.45. $tx'' + tx' + x = 0, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

8.3.46. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x' + y = 2e^t, \\ y' + x = 2e^t, \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 1.$$

❍ Пусть $x(t) \fallingdotseq X(p)$ и $y(t) \fallingdotseq Y(p)$. Учитывая, что $e^t \fallingdotseq \dfrac{1}{p-1}$, получаем операторную (или изображающую) систему линейных относительно функций $X(p)$ и $Y(p)$ уравнений

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + Y(p) = \dfrac{2}{p-1}, \\ pY(p) - 1 + X(p) = \dfrac{2}{p-1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pX(p) + Y(p) = \dfrac{p+1}{p-1}, \\ X(p) + pY(p) = \dfrac{p+1}{p-1}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $X(p) = Y(p) = \dfrac{1}{p-1}$. По таблице изображений находим теперь $x(t) = e^t$ и $y(t) = e^t$. ●

Решить системы уравнений:

8.3.47. $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

8.3.48. $\begin{cases} x' - 3x - 4y = 0, \\ y' - 4x + 3y = 0, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$

8.3.49. $\begin{cases} x' + x - y = 2, \\ y' + x + y = 2t, \end{cases} \quad x(0) = 0,\ y(0) = -1.$

8.3.50. $\begin{cases} x' + y + z = 0, \\ y' + x + z = 0, \\ z' + x + y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ z(0) = -1.$

8.3.51. $\begin{cases} x' + y = t, \\ y' + z = t^2 + 1, \\ z' + x = 2t + 1, \end{cases} \quad x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = 0.$

8.3.52. $\begin{cases} x'' - 2y' - x = 0, \\ y' + x' - x - y = e^t, \end{cases} \quad x(0) = 0,\ x'(0) = y(0) = 1.$

8.3.53. $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0, \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

8.3.54. Решить интегральные уравнения:

а) $\int\limits_0^t e^{t-\tau}x(\tau)\,d\tau = t$; б) $x(t) - \int\limits_0^t (t-\tau)x(\tau)\,d\tau = \sin t$.

○ а) Интеграл, стоящий в левой части уравнения, представляет собой свертку функций e^t и $x(t)$. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Тогда по теореме о свертке получим изображение интеграла

$$\int\limits_0^t e^{t-\tau}x(\tau)\,d\tau = e^t * x(t) \risingdotseq \frac{1}{p-1}X(p).$$

Составим теперь операторное уравнение:

$$\frac{1}{p-1}X(p) = \frac{1}{p^2}, \quad \text{откуда} \quad X(p) = \frac{p-1}{p^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}.$$

Следовательно, $x(t) = 1 - t$.

б) Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. По таблице изображений находим

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2} \quad \text{и} \quad \sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}.$$

По теореме о свертке получим изображение интеграла:

$$\int\limits_0^t (t-\tau)x(\tau)\,d\tau = t * x(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}X(p).$$

Составляем операторное уравнение

$$X(p) - \frac{1}{p^2}X(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Решая его относительно функции $X(p)$, находим

$$X(p) = \frac{p^2}{(p^2-1)(p^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2-1} + \frac{1}{p^2+1}\right).$$

Находя оригинал для функции $X(p)$, получаем решение исходного интегрального уравнения $x(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t + \sin t)$. ●

Решить интегральные уравнения:

8.3.55. $\int\limits_0^t e^{t-\tau}x(\tau)\,d\tau = \sin t$.

8.3.56. $\int\limits_0^t \cos\tau \cdot x(t-\tau)\,d\tau = \sin t$.

8.3.57. $\int\limits_0^t \cos(t-\tau)x(\tau)\,d\tau = t^2.$

8.3.58. $\int\limits_0^t e^{2(t-u)}x(u)\,du = t^2e^t.$

8.3.59. $\int\limits_0^t (t-\tau)x(\tau)\,d\tau - x(t) = -\cos t.$

8.3.60. $x(t) = \int\limits_0^t e^{t-\tau}x(\tau)\,d\tau + \cos t.$

8.3.61. $\int\limits_0^t (t-\tau)^2x(\tau)\,d\tau - 2x(t) + 2e^t = 0.$

8.3.62. $x(t) - 2\int\limits_0^t [(t-u) - \sin(t-u)]\,x(u)\,du = t.$

8.3.63. $\int\limits_0^t (1-2(t-\tau))x(\tau)\,d\tau - x(t) = 2\,(1+t-e^t).$

8.3.64. $x(t) = 1 + \frac{1}{6}\int\limits_0^t (t-u)^3x(u)\,du.$

8.3.65. $\int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)x(\tau)\,d\tau + x(t) = t.$

8.3.66. $\int\limits_0^t x(u)\,du + \int\limits_0^t (t-u)x(u)\,du + x(t) = t.$

Дополнительные задачи

Решить дифференциальные уравнения средствами операционного исчисления:

8.3.67. $x'' + 3x' = e^t,\ \ x(0) = 0,\ x'(0) = -1.$
8.3.68. $x'' - 4x' + x = 1 - 2e^t,\ \ x(0) = 2,\ x'(0) = 1.$
8.3.69. $x'' + 2x' + x = t^2,\ \ x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$
8.3.70. $x'' + x = \cos t,\ \ x(0) = -1,\ x'(0) = 1.$
8.3.71. $x''' - x' + 3x = 12 + 3\sin t - 2\cos t,\ \ x(0) = 4,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 0.$
8.3.72. $x'' + x = 1,\ \ x(0) = -1,\ x'(0) = 0.$
8.3.73. $x'' - x' = te^t,\ \ x(0) = x'(0) = 0.$
8.3.74. $x''' - 2x'' + x' = 4,\ \ x(0) = 1,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = -2.$
8.3.75. $x''' + x' = e^{2t},\ \ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$
8.3.76. $x^{IV} - x = 1,\ \ x(0) = 0,\ x'(0) = 3,\ x''(0) = -1,\ x'''(0) = 1.$
8.3.77. $x''' + x = 1,\ \ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

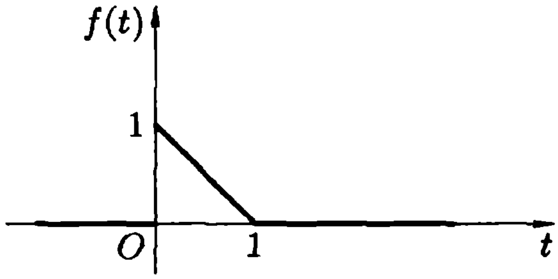


Рис. 121

8.3.78. $x' - x = f(t)$, $x(0) = 0$, функция $f(t)$ задана графиком (см. рис. 121).

Найти общие решения дифференциальных уравнений средствами операционного исчисления:

8.3.79. $x'' - 4x' = t$.

8.3.80. $x'' + 2x' + x = t^2 + 5t + 4$.

8.3.81. $x'' + x = 2\cos t$.

8.3.82. $x''' - x'' = e^t$.

8.3.83. $x^{IV} - 8x'' + 16x = \cos t$.

Решить интегральные и интегро-дифференциальные уравнения:

8.3.84. $\int\limits_0^t \operatorname{ch}(t-u)x(u)\,du = \operatorname{sh} t$.

8.3.85. $\int\limits_0^t \operatorname{ch} u \cdot x(t-u)\,du = t$.

8.3.86. $\int\limits_0^t x(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t$.

8.3.87. $x(t) - t = \frac{1}{2}\int\limits_0^t (t-\tau)^2 x(\tau)\,d\tau$.

8.3.88. $\int\limits_0^t \cos(t-u)x(u)\,du - x(t) + 1 + t = 0$.

8.3.89. $2x(t) - 2 = \int\limits_0^t \sin 2(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$.

8.3.90. $x'(t) + \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau = 1$, $x(0) = 0$.

8.3.91. $x'(t) + \int\limits_0^t (t-\tau)x(\tau)\,d\tau = 1 + t$, $x(0) = 0$.

Решить системы дифференциальных уравнений:

8.3.92. $\begin{cases} x' - 2x + y = 3 - 2t, \\ y' + x + 2y = 4 + t, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 2$.

8.3.93. $\begin{cases} x' + x - y = \sin t, \\ y' + 2x = \sin t, \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

8.3.94. $\begin{cases} x'' + y' - x = 4 - t^2, \\ x' - 2y + 2x = 2t^2, \end{cases}$ $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$, $y(0) = -1$.

8.3.95. $\begin{cases} x' - y + z = 0, \\ y' - z - x = -1, \\ z' - x + y = 1, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1$.

8.3.96. $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = -3x + y - 2z, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

8.3.97. $\begin{cases} x' + y + z = 2e^t + 3, \\ y' + x + z = 2e^t + 2, \\ z' + x + y = 2e^t + 1, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 3$, $z(0) = 1$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t) = t\cos^2 t$; б) $f(t) = \dfrac{1 - e^{3t}}{t}$.

2. Найти изображение периодической функции с периодом $T = 1$, заданной на отрезке $[0, 1]$ равенством $f(t) = 1 - t$.

3. Найти оригиналы по следующим изображениям:

а) $F(p) = \dfrac{p+1}{p^3 + 4p^2 + 5p}$; б) $F(p) = \dfrac{1 - e^{-3p}}{(p-1)(p+4)}$.

4. Решить дифференциальное уравнение $x'' + x' - 2x = e^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

5. Решить интегральное уравнение $x(t) = \dfrac{t^2}{2} + \displaystyle\int_0^t (t - \tau)e^{-(\tau - t)}x(\tau)\,d\tau$.

Вариант 2

1. Найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t) = t^2 \sin 2t$; б) $f(t) = \dfrac{\cos 3t - \cos t}{t}$.

2. Найти свертку и ее изображение для функций $f(t) = t^2$, $g(t) = \sin t$.

3. Найти оригиналы по следующим изображениям:

а) $F(p) = \dfrac{p}{p^4 - 4p^2 + 4}$; б) $F(p) = \dfrac{e^{-p} + e^{-2p}}{p^2 + 6p + 10}$.

4. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' + x - y = 0, \\ y' + x + y = 0, \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 0.$$

5. Решить интегральное уравнение $x(t) = \operatorname{sh} t - \int\limits_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$.

Вариант 3

1. Найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t) = t \operatorname{ch} 4t$;

б) функция $f(t)$ задана графически (рис. 122).

2. Найти свертку и ее изображение для функций $f(t) = e^{2t}$, $g(t) = \cos 2t$.

3. Найти оригиналы по следующим изображениям:

а) $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2 + 4)^2}$; б) $F(p) = \dfrac{pe^{-p}}{p^2 + 8p + 20}$.

4. Решить дифференциальное уравнение $x'' + 4x = e^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

5. Решить интегральное уравнение $x(t) - t = \int\limits_0^t \sin(t-u) \cdot x(u)\,du$.

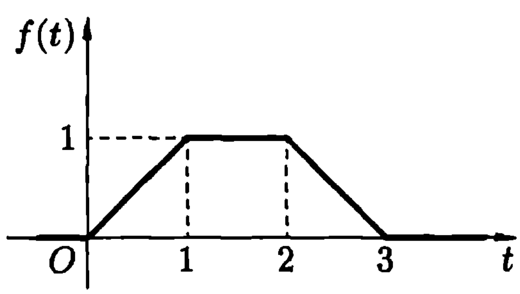


Рис. 122

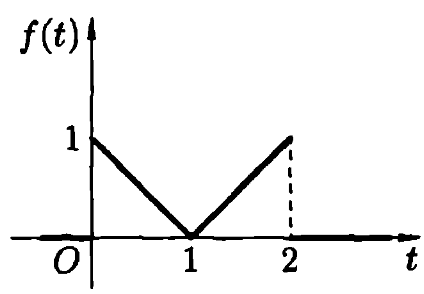


Рис. 123

Вариант 4

1. Найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t) = t \sin^2 3t$;

б) функция $f(t)$ задана графически (рис. 123).

2. Найти свертку и ее изображение для функций $f(t) = \cos t$, $g(t) = \cos 3t$.

3. Найти оригиналы по следующим изображениям:

а) $F(p) = \dfrac{2p-3}{(p-2)^4}$; б) $F(p) = \dfrac{1+pe^{-2p}}{p^2-4p+13}$.

4. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' - 3y = 0, \\ y' + x - 2y = 0, \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 0.$$

5. Решить интегральное уравнение $\displaystyle\int_0^t e^{t-u}x(u)\,du = te^{2t}$.

❑

ОТВЕТЫ

Глава 1. Ряды

§ 1. Понятие ряда. Ряды с положительными членами

1.1.2. $S_n = 0$ — при четном n; $S_n = 1$ — при нечетном n; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует; ряд расходится. **1.1.3.** $S_n = n^2$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$; ряд расходится. **1.1.4.** $S_n = \{2k+2$ при $n = 2k+1; -2k$ при $n = 2k\}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$; ряд расходится. **1.1.5.** $S_n = 2^n - 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$; ряд расходится.
1.1.6. $S_n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{4}{3}$; ряд сходится.
1.1.7. $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$; ряд сходится. **1.1.8.** $S_n = \ln(n+1)$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$; ряд расходится. **1.1.10.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$; ряд расходится.
1.1.11. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. **1.1.12.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$; ряд расходится. **1.1.13.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2}$; ряд расходится. **1.1.14.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. **1.1.15.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$; ряд расходится.
1.1.16. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не существует; ряд расходится. **1.1.17.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^3$; ряд расходится. **1.1.19.** Сходится; $\dfrac{\frac{\pi}{2}+1}{n^2}$. **1.1.20.** Расходится; $\left(\frac{5}{2}\right)^n$.
1.1.21. Расходится; $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **1.1.22.** Сходится; $\frac{1}{n^2}$. **1.1.24.** Расходится; $\frac{1}{n}$.
1.1.25. Сходится; $-\frac{1}{n^2}$. **1.1.26.** Расходится; $\frac{n}{3}$. **1.1.27.** Расходится; $\frac{1}{n}$.
1.1.28. Расходится; $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. **1.1.29.** Сходится; $\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$. **1.1.30.** Сходится; $\frac{1}{n^2}$.
1.1.31. Расходится; $\frac{1}{n}$. **1.1.32.** Сходится; $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. **1.1.33.** Расходится; $\frac{8}{n}$.
1.1.34. Сходится; $\left(\frac{2}{5}\right)^n$. **1.1.36.** Расходится; 2. **1.1.37.** Сходится; $\frac{1}{3}$.
1.1.38. Сходится; 0. **1.1.39.** Сходится; $\frac{1}{4}$. **1.1.40.** Расходится; $\frac{e}{2}$.
1.1.41. Расходится; $\frac{3}{2}$. **1.1.42.** Сходится; $\frac{2}{5}$. **1.1.44.** Расходится; e.
1.1.45. Сходится; $\frac{1}{2}$. **1.1.46.** Сходится; $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **1.1.47.** Сходится; $\frac{1}{e^2}$.
1.1.48. Сходится; 0. **1.1.49.** Расходится; $\frac{3}{2}$. **1.1.51.** Расходится; $2\sqrt{\ln x}$; $+\infty$.
1.1.52. Расходится; $\ln\ln(x+1)$; $+\infty$. **1.1.53.** Сходится; $-\frac{1}{\ln(x+1)}$; $\frac{1}{\ln 2}$.
1.1.54. При $p > 1$ сходится; $\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}$; $\frac{1}{p-1}$. При $p < 1$ расходится; $\frac{x^{p-1}}{1-p}$;

$+\infty$. При $p = 1$ расходится; $\ln x$; $+\infty$. **1.1.55.** Расходится; необходимый признак; $\frac{2}{3}$. **1.1.56.** Сходится; признак Даламбера; $\frac{1}{3}$. **1.1.57.** Расходится; 1-й признак сравнения; $\left(\frac{3}{2}\right)^n$. **1.1.58.** Расходится; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$.

1.1.59. Сходится; признак Коши; $\frac{1}{e}$. **1.1.60.** Сходится; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n^3}$. **1.1.61.** Расходится; необходимый признак; e^3. **1.1.62.** Расходится; интегральный признак; $\frac{3}{2}(\ln x)^{\frac{2}{3}}$; $+\infty$. **1.1.63.** Сходится; признак Коши; $\frac{8}{125}$.

1.1.64. Расходится; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$. **1.1.65.** Сходится; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. **1.1.66.** Расходится; необходимый признак; $+\infty$.

1.1.67. Расходится; признак Даламбера; $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **1.1.68.** Расходится; 1-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$. **1.1.69.** Расходится; признак Коши; $\frac{3}{2}$. **1.1.70.** Расходится; признак Даламбера; 3. **1.1.71.** $S_n = n$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$; ряд расходится.

1.1.72. $S_n = -\frac{1+n}{2}\cdot n$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$; ряд расходится. **1.1.73.** $S_n = (-1)^n \cdot n$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$; ряд расходится. **1.1.74.** $S_n = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{5}{4}$; ряд сходится. **1.1.75.** $S_n = \{5k$ при $n = 2k;\ 5k+2$ при $n = 2k+1\}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$; ряд расходится. **1.1.76.** $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$; ряд сходится.

1.1.77. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$; ряд расходится. **1.1.78.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln\frac{3}{2}$; ряд расходится.
1.1.79. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$; ряд расходится. **1.1.80.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2}$; ряд расходится.
1.1.81. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не существует; ряд расходится. **1.1.82.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
1.1.83. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$; ряд расходится. **1.1.84.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. **1.1.85.** Расходится; $\frac{1}{2n}$. **1.1.86.** Сходится; $\frac{1}{3^n}$. **1.1.87.** Расходится; $\frac{1}{n}$. **1.1.88.** Сходится; $\left(\frac{2}{5}\right)^n$.
1.1.89. Расходится; $\frac{1}{n}$. **1.1.90.** Расходится; $\frac{2}{3}$. **1.1.91.** Сходится; $-\frac{1}{n^2}$.
1.1.92. Сходится; $\frac{1}{n^2}$. **1.1.93.** Расходится; $\frac{3}{2\sqrt{n}}$. **1.1.94.** Расходится; $\frac{1}{n}$.
1.1.95. Расходится; $\frac{2}{n}$. **1.1.96.** Расходится; $\frac{1}{n}$. **1.1.97.** Расходится; $\frac{1}{n}$.
1.1.98. Сходится; $\frac{4\pi^2}{n^2}$. **1.1.99.** Расходится; $\left(\frac{5}{2}\right)^n$. **1.1.100.** Сходится; $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
1.1.101. Расходится; $\frac{3}{2}$. **1.1.102.** Сходится; 0. **1.1.103.** Расходится; $+\infty$.
1.1.104. Расходится; $\frac{3}{e}$. **1.1.105.** Расходится; $+\infty$. **1.1.106.** Сходится; $\frac{3}{4}$.
1.1.107. Расходится; $\frac{e}{2}$. **1.1.108.** Сходится; $\frac{1}{3}$. **1.1.109.** Сходится; $\frac{1}{9}$.
1.1.110. Сходится; 0. **1.1.111.** Сходится; $\frac{1}{e}$. **1.1.112.** Сходится; $\frac{2}{3}$.

1.1.113. Расходится; $\frac{1}{2}\ln^2 x$; $+\infty$. **1.1.114.** Расходится; $\frac{1}{2}\ln\ln(2x+1)$; $+\infty$.
1.1.115. Расходится; $\ln\ln\ln x$; $+\infty$. **1.1.116.** Сходится; $-\frac{1}{\ln\ln x}$; $\frac{1}{\ln\ln 2}$.
1.1.117. Расходится; 2-й признак сравнения; $\frac{2}{n}$. **1.1.118.** Сходится; признак Даламбера; 0. **1.1.119.** Сходится; признак Коши; $\frac{e}{3}$. **1.1.120.** Сходится; интегральный признак; $-\frac{1}{\ln x}$; $\frac{1}{\ln 2}$. **1.1.121.** Сходится; 2-й признак сравнения; $\frac{3}{n^2}$. **1.1.122.** Расходится; 1-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$.
1.1.123. Расходится; необходимый признак; $\cos\frac{2}{3}$. **1.1.124.** Сходится; признак Коши; 0. **1.1.125.** Расходится; признак Даламбера; $\frac{27}{8}$.
1.1.126. Расходится; признак Даламбера; $\frac{4}{3}$. **1.1.127.** Расходится; интегральный признак; $\frac{1}{3}\ln\ln(3x-1)$; $+\infty$. **1.1.128.** Расходится; необходимый признак; 2. **1.1.129.** Расходится; признак Коши; $\frac{5}{3}$.
1.1.130. Расходится; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{3n}$. **1.1.131.** Сходится; 2-й признак сравнения; $\frac{2}{n^2}$. **1.1.132.** Нет. **1.1.133.** **а)** Да; **б)** да; **в)** нет; **г)** нет.
1.1.134. **а)** Да; **б)** нет. **1.1.135.** **а)** Нет; **б)** нет; **в)** нет. **1.1.136.** **а)** Сходится. **б)** может сходиться, а может расходится; **в)** расходится. **1.1.137.** **а)** Нет; **б)** нет; **в)** нет. **1.1.138.** Расходится; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$.
1.1.139. Расходится; $\frac{a_n+1}{a_n} > 1$. **1.1.140.** **а)** Признак Даламбера не применим. **б)** Сходится; $\frac{3}{4}$. **1.1.141.** $a_n = -b_n = 2 + (-1)^n$. **1.1.142.** Признак Даламбера; 0. **1.1.143.** 0. *Указание.* Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$.

§ 2. Знакопеременные ряды

1.2.7. 1-й признак сравнения; $\frac{1}{n+1}$. **1.2.8.** 2-й признак сравнения; $\frac{2}{n}$.
1.2.9. Интегральный признак; $2\sqrt{\ln\ln n}$; $+\infty$. **1.2.10.** 2-й признак сравнения; $\frac{1}{2n}$. **1.2.11.** 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n^2}$. **1.2.12.** Признак Даламбера; 0.
1.2.13. Интегральный признак; $-\frac{1}{\ln n}$; $\frac{1}{\ln 2}$. **1.2.14.** Признак Даламбера; $\frac{1}{2}$.
1.2.15. Необходимый признак; $+\infty$. **1.2.16.** Признак Даламбера; $\frac{4}{3}$.
1.2.17. Необходимый признак; $\frac{3}{2}$. **1.2.18.** Признак Коши; $\frac{e}{2}$. **1.2.19.** Сходится абсолютно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{e^{n+1}}$. **1.2.20.** Расходится; необходимый признак; 1. **1.2.21.** Расходится; признак Даламбера; $+\infty$. **1.2.22.** Сходится условно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$. **1.2.23.** Сходится абсолютно; признак

Коши; $\ln 2$. **1.2.24.** Сходится абсолютно; 1-й признак сравнения; $\frac{1}{n^2}$.
1.2.25. Сходится условно; интегральный признак; $2\sqrt{\ln n}$; $+\infty$.
1.2.26. Расходится; необходимый признак; $\ln 2$. **1.2.27.** Сходится абсолютно; признак Даламбера; $\frac{1}{2}$. **1.2.31.** Расходится; необходимый признак; $\frac{1}{2}$.
1.2.32. Сходится абсолютно; признак Коши; $\frac{|2+i|}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **1.2.33.** Сходится абсолютно; признак Даламбера; $\frac{1}{|2+i|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. **1.2.34.** Сходится условно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **1.2.35.** Сходится абсолютно; признак Коши; $\frac{2}{|3i|} = \frac{2}{3}$. **1.2.36.** Расходится; признак Коши; $\frac{|3-i|}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. **1.2.37.** Сходится абсолютно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n^2}$. **1.2.38.** 2-й признак сравнения; $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
1.2.39. Интегральный признак; $\frac{3}{2}(\ln n + 2)^{\frac{2}{3}}$. **1.2.40.** 1-й признак сравнения; $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **1.2.41.** 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$. **1.2.42.** Признак Даламбера; $\frac{1}{2}$.
1.2.43. 2-й признак сходимости; $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. **1.2.44.** Признак Коши; $\frac{3}{e}$. **1.2.45.** 1-й признак сравнения; $\frac{1}{2^n}$. **1.2.46.** Необходимый признак; $+\infty$. **1.2.47.** Признак Даламбера; $+\infty$. **1.2.48.** Признак Коши; e^2. **1.2.49.** Необходимый признак; $\ln\frac{1}{2}$. **1.2.50.** Расходится; необходимый признак; $\frac{1}{2}$. **1.2.51.** Сходится абсолютно; признак Даламбера; $\frac{1}{3}$. **1.2.52.** Сходится абсолютно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{3n\sqrt{n}}$. **1.2.53.** Расходится; признак Коши; $+\infty$. **1.2.54.** Сходится условно; 2-й признак сравнения; $\frac{3}{n}$. **1.2.55.** Сходится абсолютно; 1-й признак сравнения; $\frac{1}{3^n}$. **1.2.56.** Сходится абсолютно; интегральный признак; $-\frac{(2+\ln n)^{-2}}{2}$; $\frac{1}{8}$. **1.2.57.** Расходится; необходимый признак; $+\infty$.
1.2.58. Сходится условно; 1-й признак; $\frac{1}{n}$. **1.2.59.** Сходится абсолютно, признак Коши; $\frac{1}{3}$. **1.2.60.** Расходится; признак Даламбера; $\frac{|2+i|}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.
1.2.61. Сходится условно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$. **1.2.62.** Сходится абсолютно; признак Даламбера; $\frac{|1+i|}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. **1.2.63.** Сходится абсолютно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. **1.2.64.** Сходится условно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$. **1.2.65.** Сходится абсолютно; признак Коши; $\frac{e}{3}$.
1.2.66. Расходится; необходимый признак; $\frac{1}{i}$. **1.2.67.** **а)** Нет; **б)** да.

1.2.68. Сходится абсолютно; признак Даламбера; $\frac{1}{2}$. **1.2.69.** Расходится; необходимый признак; $|a_n| = 1$. **1.2.70.** Нет. **1.2.71.** **а)** Нет; **б)** нет; **в)** нет; **г)** да. **1.2.73.** Расходится (см. задачу 1.2.72*б*). **1.2.74.** **а)** Расходится. **б)** Сходится абсолютно. **в)** Расходится. **г)** Сходится условно. **д)** Сходится условно. **1.2.75.** *Указание.* $1 \leqslant \frac{n+1}{n} \leqslant 2$. **1.2.76.** *Указание.* $2a_nb_n \leqslant a_n^2 + b_n^2$.

§ 3. Степенные ряды

1.3.7. $(-\infty, +\infty)$; 0. **1.3.8.** $(-\infty, +\infty)$; 0. **1.3.9.** $\{0\}$; $+\infty$ при $x \neq 0$. **1.3.10.** $\{-1\}$; $+\infty$ при $x \neq -1$. **1.3.11.** $(-1, 1)$; $|x|$. При $x = -1$ ряд расходится; необходимый признак; $+\infty$. При $x = 1$ ряд расходится; необходимый признак; $+\infty$. **1.3.12.** $(2, 4)$; $(3 - x)^2$. При $x = 2$ и $x = 4$ ряд расходится; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **1.3.13.** $[-1, 1)$; $|x|$. При $x = -1$ ряд сходится условно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$; признак Лейбница. При $x = 1$ ряд расходится; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$. **1.3.14.** $(-1, 1]$; $|x|$. При $x = -1$ ряд расходится; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$. При $x = 1$ ряд сходится условно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$; признак Лейбница. **1.3.15.** $\{0\}$; 0 при $x = 0$; $+\infty$ при $x \neq 0$. **1.3.16.** $\{3\}$; 0 при $x = 3$; $+\infty$ при $x \neq 3$. **1.3.17.** $(-\infty, +\infty)$; 0 при $x \in (-\infty, +\infty)$. **1.3.18.** $(-\infty, +\infty)$; 0 при $x \in (-\infty, +\infty)$. **1.3.19.** $(-1, 1)$; x^2. При $x = -1$ и при $x = 1$ ряд расходится; необходимый признак; e. **1.3.20.** $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$; $\frac{(x-2)^2}{2}$. При $x = 2 - \sqrt{2}$ и при $x = 2 + \sqrt{2}$ ряд расходится; необходимый признак; $\sqrt{2e}$. **1.3.21.** $(0, 6)$; признак Даламбера; $\frac{|x-3|}{3}$. При $x = 0$ ряд расходится; необходимый признак; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не существует. При $x = 6$ ряд расходится; необходимый признак; $\frac{1}{3}$. **1.3.22.** $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; признак Даламбера; $2|x|$. При $x = -\frac{1}{2}$ ряд сходится условно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; признак Лейбница. При $x = \frac{1}{2}$ ряд расходится; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. **1.3.23.** $[-1, 1]$; признак Коши; 0 при $|x| \leqslant 1$; $+\infty$ при $|x| > 1$. При $x = \pm 1$ ряд сходится абсолютно; признак Коши; 0. **1.3.24.** $[1, 3]$; признак Даламбера; $|x - 2|^2$. При $x = 1$ и при $x = 3$ ряд сходится условно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$; признак Лейбница. **1.3.25.** $(-1, 1)$; признак Коши; $|x|^4$. При $x = \pm 1$ ряд расходится; необходимый признак; e. **1.3.26.** $(1, 3)$; признак Даламбера; $(2 - x)^2$. При $x = 1$ и при $x = 3$ ряд расходится; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$. **1.3.27.** $[-2, 0)$; признак Даламбера; $|x + 1|$. При $x = -2$ ряд сходится условно; интегральный признак; $\ln\ln x$; $+\infty$; признак Лейбница. При $x = 0$ ряд расходится; интегральный признак; $\ln\ln x$; $+\infty$. **1.3.28.** $(-1, 1]$; признак Даламбера; $|x|$. При $x = -1$ ряд расходится; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$. При $x = 1$ ряд сходится условно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$; признак Лейбница. **1.3.29.** $[-3, 1]$; признак Даламбера; $\frac{|x+1|}{2}$. При $x = -3$ и при $x = 1$ ряд сходится абсолютно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n^2}$. **1.3.30.** $[-1, 1]$; признак Даламбера; 0 при $x \in [-1, 1]$; $+\infty$; при $|x| > 1$. При $x = \pm 1$ ряд сходится абсолютно; 1-й признак сравнения; $\frac{1}{2^n}$. **1.3.31.** $[-2, 2]$; признак Даламбера; $\frac{x^2}{4}$. При $x = \pm 2$ ряд сходится абсолютно, интегральный признак; $-\frac{1}{2\ln x}$; $\frac{1}{2\ln x}$. **1.3.32.** $(-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})$; признак Даламбера; $\frac{|x+2|^2}{3}$. При $x = -2-\sqrt{3}$ и при $x = -2+\sqrt{3}$ ряд расходится; необходимый признак; $\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$. **1.3.33.** $(-2, 0)$; признак Коши; $|x+1|$. При $x = -2$ ряд расходится; необходимый признак; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не существует. При $x = 0$ ряд расходится; необходимый признак; $\sqrt{e}$. **1.3.34.** $\{-7\}$; признак Даламбера; $+\infty$ при $x \neq -7$. **1.3.35.** $(-\infty, +\infty)$; признак Коши; 0 при всех $x \in (-\infty, +\infty)$. **1.3.36.** $(-\infty, +\infty)$; признак Даламбера; 0 при всех $x \in (-\infty, +\infty)$. **1.3.37.** $\{6\}$; признак Коши; 0 при $x = 6$; $+\infty$ при $x \neq 6$. **1.3.38.** $\{i\}$; признак Даламбера; $+\infty$ при $z \neq i$. **1.3.39.** $|z+2i| < 1$; признак Даламбера; $|z+2i|^2$. **1.3.40.** $\mathbb{C}$; признак Коши; 0 при всех $z \in \mathbb{C}$. **1.3.41.** $|z-i| < 3$; признак Коши; $\frac{|z-i|}{3}$. **1.3.42.** $|z| < 1$; признак Даламбера; $|z|$. **1.3.43.** $[1, 3]$; $|x-2|$. При $x = 1$ и при $x = 3$ ряд сходится абсолютно; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n^2}$. **1.3.44.** $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; $3^5|x|^5$. При $x = -\frac{1}{3}$ ряд сходится условно, 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$; признак Лейбница. При $x = \frac{1}{3}$ ряд расходится; 2-й признак сравнения; $\frac{1}{n}$. **1.3.45.** $\{0\}$; 0 при $x = 0$; $+\infty$ при $x \neq 0$. **1.3.46.** $(-\infty, +\infty)$; 0 при всех $x \in (-\infty, +\infty)$. **1.3.47.** $(-\infty, +\infty)$; 0 при всех $x \in (-\infty, +\infty)$. **1.3.48.** $\{-1\}$; 0 при $x = -1$; $+\infty$ при $x \neq -1$. **1.3.49.** $[-1, 1]$; 0 при $|x| \leqslant 1$; $+\infty$ при $|x| > 1$. При $x = \pm 1$ ряд сходится абсолютно; признак Коши; 0. **1.3.50.** **а)** Нет; **б)** нет; **в)** нет; **г)** да; **д)** да. **1.3.51.** **а)** Расходится. **б)** Ничего. **в)** Ничего. **1.3.52.** **а)** Ничего. **б)** Сходится абсолютно. **в)** Ничего. **1.3.53.** **а)** Ничего. **б)** Расходится. **в)** Сходится абсолютно. **1.3.54.** **а)** Да; **б)** нет; **в)** да; **г)** да; **д)** нет. **1.3.55.** $\left(1-\frac{1}{e}; 1+\frac{1}{e}\right)$. При $x = 1 \pm \frac{1}{e}$ ряд расходится; необходимый признак; $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **1.3.56.** В каждой точке интервала $(z_1; z_2)$ ряд сходится абсолютно. В точках прямой $(z_1; z_2)$ за исключением отрезка $[z_1; z_2]$ ряд расходится. О сходимости в остальных точках ничего сказать нельзя.

§ 4. Ряд Фурье функции, заданной на произвольном промежутке

1.4.2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$. **1.4.3.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$. **1.4.5.** $-\frac{12}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$.

1.4.7. $1+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}$. **1.4.8.** $-3+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$.

1.4.10. $1-\frac{16}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$. **1.4.11.** $-\frac{5}{2}+\frac{18}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$.

1.4.12. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$. **1.4.13.** $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$. **1.4.14.** $\frac{\pi^2}{6}$.

1.4.15. $\frac{\pi^2}{8}$. **1.4.16.** $1-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

1.4.17. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1-a^2}-\frac{2\sin 2x}{2^2-a^2}+\frac{3\sin 3x}{3^2-a^2}-\ldots\right)$.

1.4.18. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n\sin nx$. **1.4.19.** $\frac{\pi^2}{8}$.

1.4.21. а) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}$.

1.4.23. а) $-\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$; б) $-1+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$;

в) $-\frac{\pi^2}{3}-4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; г) $3+\frac{\pi^2}{6}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$.

1.4.25. $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{2}}{n}$. **1.4.26.** $\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin 2n\pi x}{n}$.

1.4.27. $1-\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}}{(2k-1)^2}$. **1.4.28.** $\frac{1}{8}-\frac{1}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 4(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$.

1.4.29. $6+\frac{12}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{3}}{n^2}$. **1.4.30.** $\frac{1}{6}+\frac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2n\pi x}{n^2}$.

1.4.31. $7-\frac{8}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$. **1.4.32.** $\frac{a+b}{2}-\frac{2(a-b)}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$.

1.4.33. $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$. **1.4.34.** $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\frac{a\cos x}{1-a^2}-\frac{a\cos 2x}{2^2-a^2}+\ldots\right)$.

1.4.35. $\frac{8a}{\pi^2}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)$.

1.4.36. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$. **1.4.37.** $\frac{\pi^2}{8}$. **1.4.38.** а) $\frac{\pi^2}{8}$;

б) $\frac{\pi}{4}$. **1.4.39.** $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$. **1.4.40.** $\frac{2l}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{n\pi x}{l}}{n}$.

1.4.41. $\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k-1)\pi x}{l}}{(2k-1)^2}$. **1.4.42.** $\frac{2l^2}{3}+\frac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l}}{n^2}$.

1.4.43. $\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left[1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\cos nx}{n^2+1}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n\sin nx}{n^2+1}\right]$.

1.4.44. а) $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}((-1)^n-1)\right)\sin nx$;

б) $\cos ax=-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)\sin(2k-1)x}{a^2-(2k-1)^2}$ при четном a,

$\cos ax=-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2k\sin 2kx}{a^2-(2k)^2}$ при нечетном a.

1.4.45. $\sin ax=\frac{4a}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{a^2-(2k-1)^2}$, если a — четное;

$\sin ax=\frac{2}{\pi a}+\frac{4a}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{a^2-(2k)^2}$, если a — нечетное.

1.4.46. $\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi^2n^3}-\frac{(-1)^n}{2n}\right)\sin 2n\pi x$.

1.4.47. $\frac{2}{3}-\frac{3}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{2n\pi}{3}}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}$.

1.4.48. $\operatorname{sh}l\left[\frac{1}{l}+2l\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\cos\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}+2\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{n\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}\right]$.

Глава 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

§ 1. Основные понятия. Уравнения с разделяющимися переменными

2.1.3. а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **2.1.5.** а) $y=x^2+x-1$; б) $y=1-\frac{1}{3}e^{-3x}$. **2.1.7.** а) $y=3x+C$; б) $y=2\ln|x|+C$. **2.1.8.** а) $xy'+y=0$; б) $2xyy'=3y^2-x^2$. **2.1.10.** $v'=-\frac{k}{m_0}v^2$. **2.1.11.** $\frac{dm}{dt}=-km$. **2.1.16.** $(1-x)(1+y)=C$. **2.1.17.** $\sqrt{1-y^2}=\arcsin x+C$. **2.1.18.** $x^2+y^2=\ln Cx^2$. **2.1.19.** $y+\ln|y|=\sin x-x\cos x+C$. **2.1.20.** $y=\ln(1+Ce^{-x})$. **2.1.21.** $y=-\frac{2}{C+x^2}$. **2.1.23.** $y=(x+1)^2$. **2.1.24.** $y=(4x+2)^2$. **2.1.25.** $y=1$. **2.1.26.** $\frac{x+y}{1-xy}=-3$. **2.1.28.** 200 м. **2.1.29.** ≈ 66 мин. **2.1.30.** а) $y=\frac{1}{x+1}$; б) $y^2-x^2=1$. **2.1.32.** $y'=-\frac{y}{x}$. **2.1.33.** а) $y=2\sin x+C$; б) $y=\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)x+C$, $k\in\mathbb{Z}$. **2.1.34.** а) $C=-1$; б) $C=3$. **2.1.35.** $f(x,y)=0$. **2.1.37.** $y=\ln x$. **2.1.41.** $2\sqrt{y}+\ln|y|-2\sqrt{x}=C$, $y=0$. **2.1.42.** $y=\log_3(C+3^x)$. **2.1.43.** $y=-1+C(x+1)$. **2.1.44.** $s=C\cos t$. **2.1.45.** $\frac{x^2}{2}-e^{-y}(y+1)=C$. **2.1.46.** $x+y=\ln(C(x+1)(y+1))$, $y=-1$. **2.1.47.** $y=5+Ce^{-x}$. **2.1.48.** $v=Ce^{2t^2}$. **2.1.49.** $y=Ce^{\frac{2x+\sin 2x}{4}}$.

2.1.50. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right| = C - 2\sin\frac{x}{2}$. **2.1.51.** $(1+e^x)(1+e^y) = C$.

2.1.52. $y\sin y - x\cos x + \cos y + \sin x = C$. **2.1.53.** $\operatorname{ctg}\frac{y-x}{2} = x + C$.

2.1.54. $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$. **2.1.55.** $\frac{\sqrt{(3+x^2)^3}}{2+y^2} = C$. **2.1.56.** $y = a + Ce^{\frac{1}{x}}$.

2.1.57. $y = C\sin x - a$. **2.1.58.** $y = \frac{C}{\cos x} - 1$. **2.1.59.** $y = C\sin^2 x - \frac{1}{2}$.

2.1.60. $y = 1 + C\frac{x}{x+1}$. **2.1.61.** $y - x + C = \ln x^2 + \ln|y|$.

2.1.62. $4\sqrt{x+1} + \frac{1}{\ln^2 y} = C$, $y = 1$. **2.1.63.** $2\sqrt{2-x^2} - \operatorname{arctg} y = C$.

2.1.64. $y = \frac{x}{x+1}$. **2.1.65.** $x^2 - 2y^2 = 2$. **2.1.66.** $1 + y^2 = \frac{2}{1-x^2}$.

2.1.67. $y = x^2 - 2$. **2.1.68.** $y = x$, $y = 2\pi - x$. **2.1.69.** $y^2 = (x+3)^3$.
2.1.70. $2^x - \operatorname{arctg} 2^y = 1 - \frac{\pi}{4}$. **2.1.71.** $y = \ln x$. **2.1.72.** $2y + 1 = 4\sin^2 x$.

2.1.73. $y = \frac{e^x + 8}{9}$. **2.1.74.** **а)** $y = 2x^3$; **б)** $y = -\frac{16}{16x - 33}$. **2.1.75.** **а)** $y = \frac{4}{x}$; **б)** $\sqrt{x} = 2y$. **2.1.76.** $y = Ce^{\frac{x}{2}}$. **2.1.77.** $y = \frac{2}{3-x}$ или $y = \frac{2}{1+x}$.

2.1.78. $y = C + \ln|x^2 - 1|$. **2.1.79.** ≈ 817 лет. **2.1.80.** $N = a\cdot 3^{\frac{t}{4}}$.

2.1.81. 0,2 км/час. **2.1.82.** 45°C. **2.1.83.** $x = m_1\cdot\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}}$ г.

2.1.84. 2 об/с; ≈ 118 с. **2.1.87.** $\approx 1{,}08$ кг. **2.1.88.** **а)** ≈ 35 с; **б)** ≈ 11 мин. (Подсчитав количество жидкости, вытекшей из сосуда за время Δt двумя способами, получим уравнение: $-S(h)\,dh = v(h)\,dt\cdot S$, где S — площадь отверстия, $S(h)$ — площадь поперечного сечения сосуда, h — уровень жидкости, $v(h)$ — скорость ее истечения, t — время.) **2.1.89.** $\frac{15}{11}$ м/с.

2.1.90. 200; $v = \frac{1}{\frac{k}{m}t + 0{,}1}$. **2.1.91.** $y = \ln\operatorname{tg}\left(C + \frac{1}{3}\sqrt{(x+1)}^3 - \frac{1}{3}\sqrt{(x-1)^3}\right)$, $x \geqslant 1$. **2.1.92.** **а)** $y = Ce^{\int\sin x^2\,dx}$; **б)** $5x + 10y + C = 3\ln|10x - 5y + 6|$; **в)** $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = C\left(\operatorname{tg}\frac{y}{2} + 1\right)\left(1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$; **г)** $y = 1$, $y = -1$, $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$; **д)** $4y - 6x + 1 = Ce^{-2x}$; **е)** $\operatorname{ctg}\frac{y-x}{2} = x + C$, $y - x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

§ 2. Однородные дифференциальные уравнения

2.2.2. $y^2 + 2xy = C$. **2.2.3.** $y^2e^{\frac{y}{x}} = Cx$. **2.2.4.** $y = 2x\operatorname{arctg} x$.

2.2.6. $y = 1 + \frac{x-1}{2}\ln|C(x-1)|$, $C \neq 0$. **2.2.8.** $x + y\ln Cy = 0$.

2.2.9. $(x-1)^2 + y^2 = 1$. **2.2.10.** $y = \frac{Cx^2}{2} - \frac{1}{2C}$. **2.2.11.** $y^2 = 2x^2\ln\frac{C}{x}$.

2.2.12. $e^{-\frac{y}{x}} + \ln Cx = 0$. **2.2.13.** $y = xe^{Cx+1}$. **2.2.14.** $y = x\ln^2 Cx$.

2.2.15. $\frac{t}{s-t} = \ln C(s-t)$. **2.2.16.** $x^2 - y^2 = Cx$. **2.2.17.** $y = x\ln^2\frac{C}{x}$.

2.2.18. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$. **2.2.19.** $\sin\frac{y}{x}+\ln x=C$. **2.2.20.** $x\sin\frac{y}{x}=C$.
2.2.21. $y=xe^{Cx}$. **2.2.22.** $y^2-x^2=Cy^3$. **2.2.23.** $e^{\frac{y}{x}}=\frac{x}{2-x}$.
2.2.24. $x^3+y^3=Cxy$. **2.2.25.** $y=x\ln x$. **2.2.26.** $y=x\ln ey$.
2.2.27. $\ln 2\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. **2.2.28.** $\ln\frac{x+y}{x}=Cx$. **2.2.29.** $xe^{\frac{x^2}{2y^2}}=C$.
2.2.30. $y=x\operatorname{tg}(\ln Cx)$. **2.2.31.** $y=x-\frac{x}{\ln ex}$. **2.2.32.** $y=-x$.
2.2.33. $\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0$. **2.2.34.** $y=ex$. **2.2.35.** $y+\sqrt{x^2+y^2}=1$.
2.2.36. $y=2x-x\ln x$. **2.2.37.** $y=x\ln\frac{x}{3}$. **2.2.38.** $(x-y)^2=Cy$.
2.2.39. **а)** $x-y+C=\ln|3x-4y+1|$; **б)** $(y-x)e^{\frac{2x-2}{y-x}}=C$, $y=x$.
2.2.40. $x^2=(x^2-y)\ln Cx$, $y=x^2$. **2.2.41.** **а)** $Cx=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$;
б) $y+\sqrt{2x^2+y^2}=Cx^5$; **в)** $\frac{y+2x}{y+5x}=Cx$. **2.2.42.** $y^2=2Cx+C^2$, кривые (сечения) — параболы, поверхность зеркала — параболоид вращения.
2.2.43. $\alpha-\beta=\alpha\beta$.

§ 3. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли

2.3.2. $y=(x+C)e^{x^2}$. **2.3.3.** $y=x^2+\frac{C}{x}$. **2.3.4.** $x=Ce^{\frac{1}{y}}-2$, $y=0$.
2.3.5. $y=\frac{7(x+1)^2}{C-(x+1)^7}$. **2.3.7.** $y=e^x-x-1$. **2.3.8.** $y=Ce^{-2x}+e^x$.
2.3.9. $y=\frac{x^3+C}{x^2+1}$. **2.3.10.** $x=y^4+Cy^2$, $y=0$. **2.3.11.** $x=\frac{\ln y+C}{y}$, $y=0$.
2.3.12. $y=\frac{2}{\ln x+Cx+1}$. **2.3.13.** $y=\frac{1}{\sqrt{Ce^{2x^2}+1}}$, $y=0$.
2.3.14. $y=Ce^{-\sin x}+2\sin x-2$. **2.3.15.** $y=x^3+\frac{C}{x}$. **2.3.16.** $y^2(2x+C)=e^{x^2}$, $y=0$. **2.3.17.** $y=\frac{\sqrt[3]{3x+C}}{x}$. **2.3.18.** $x^2=\frac{y}{C-\cos y}$, $y=0$.
2.3.19. $y=e^x\left(C+\ln x+\frac{x^2}{2}\right)$. **2.3.20.** $y=\sqrt{1-x^2}(2\arcsin x+C)$.
2.3.21. $y=(x+C)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **2.3.22.** $y=\frac{1}{2}x^3$. **2.3.23.** $y=2\sin x-\cos x$.
2.3.24. $x=e^{\frac{1}{y}}$. **2.3.25.** $y=\frac{2x}{x^2-3}$. **2.3.26.** $y=\left(\frac{C+x\operatorname{tg}x+\ln\cos x}{x}\right)^2$, $y=0$.
2.3.27. $x=Cy^2+\ln y^2-y+1$, $y=0$. **2.3.28.** $y=e^{-x}(1+\operatorname{arctg}x)$.
2.3.29. $y=4-4\cos t+e^{1-\cos t}$. **2.3.30.** $r=\frac{e^\varphi+2\alpha^2-e^\alpha}{\varphi}$.
2.3.31. $x=y^2-2+e^{-\frac{y^2}{2}}$. **2.3.32.** $y=\frac{1}{x^2}\left(\frac{3\sqrt{x^7}+11}{14}\right)^4$, $y=\frac{1}{x^2}\left(\frac{3\sqrt{x^7}-17}{14}\right)^4$. **2.3.33.** $C_1+C_2=1$. **2.3.34.** $v=\frac{gm}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$.

2.3.35. $y = \dfrac{2x}{2x-1}$ — гипербола. **2.3.36. а)** $I = \dfrac{kt}{R} + \dfrac{kL}{R^2}\left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1\right)$;

б) $I = \dfrac{A}{R^2 + \omega^2 L^2}\left(R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t + \omega L e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

2.3.37. $y = Ce^{-\varphi(x)} + \varphi(x) - 1$. **2.3.38. а)** $e^y = \dfrac{C}{x^2 + Cx}$, обозначить $e^y = z$;

б) $y = 2e^x - 1$, продифференцировать, сделать проверку$\Rightarrow$ $C = 2$.

2.3.39. $y = x + 2e^{x^2}$. **2.3.40.** $x = \left(\operatorname{tg} y + \dfrac{1}{y}\ln|\cos y|\right)^2$.

2.3.41. $\sin y = Ce^{-x} + x - 1$, подстановка $\sin y = z$. **2.3.42.** $x = \cos^2 y - 2e^{-2y}$.

2.3.43. $x = \dfrac{64}{7}y^3 + \dfrac{C}{\sqrt{y}}$, $y = 0$. **2.3.44.** $y = 2e^{-x}$. **2.3.45.** $xy = 4 + Cy^2$.

2.3.46. $y^2 = 4x + 4(1 - e^x)$. **2.3.47.** $-\dfrac{3}{x}$, $-\dfrac{3}{x}$. **2.3.49.** Нет. **2.3.50.** $x^2 + y^2 = R^2$.

§ 4. Уравнения в полных дифференциалах

2.4.3. $x^2 - xy = C$. **2.4.4.** $e^{-y}x + 2y = C$. **2.4.6.** $x^2 + \sin^2 y = Cx$, $t(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

2.4.7. $\dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{5}{3}x^3y^2 + y^3 = C$. **2.4.8.** $\dfrac{x^2}{2}\cos 2y - 3x = C$. **2.4.9.** $x^2 + y + e^{xy} = 2$.

2.4.10. $\sqrt{x^2 + y^2} + xy = 4$. **2.4.11.** $x^3 + y^3 + 3x^2y + 3x - 3y = C$.

2.4.12. $x\sin(x + y) = C$. **2.4.13.** $x^3 + x^3\ln y - y^2 = C$.

2.4.14. $x^3y - \cos x - siny = C$. **2.4.15.** $x^3 + xy^2 + xy + e^y = 1$.

2.4.16. $x^3 + 3x^2y - y^3 + 1 = 0$. **2.4.17.** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = C$.

2.4.18. $x^2 - x + \dfrac{y}{x} - y^2 = C$. **2.4.19.** $x^2 + ye^{\frac{x}{y}} = C$.

2.4.20. $\sin\dfrac{y}{x} - \cos\dfrac{x}{y} + x - \dfrac{1}{y} = C$. **2.4.21.** $x\sin y - y\cos x + \ln xy = C$.

2.4.22. $\dfrac{x^2}{2}e^{y^2} + \operatorname{tg} y - y = C$. **2.4.23.** $y\operatorname{sh} x + x\operatorname{sh} y = C$. **2.4.24.** $xy - \ln y = C$,

$t(y) = \dfrac{1}{y}$. **2.4.25.** $\dfrac{x}{\sin y} + x^3 = C$, $t = \dfrac{1}{\sin y}$. **2.4.26.** $\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P - Q}$ должно быть функцией от $x + y$. **2.4.27. а)** $x^2 + y^2 = C$; **б)** $xy = C$, т. к. $d(xy) = 0$.

§ 5. Уравнения Лагранжа и Клеро

2.5.2. $y = Cx + C - C^2$, $y = \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$. **2.5.3.** $y = Cx - 3C^3$, особое решение $9y \pm 2x^{\frac{3}{2}} = 0$. **2.5.5.** $y = \left(\sqrt{x+1} + C\right)^2$, $y = 0$. **2.5.6.** $y = \dfrac{x^2 - C^2}{2C}$.

2.5.8. $\begin{cases} x = \ln p - \arcsin p + C, \\ y = p + \sqrt{1 - p^2}. \end{cases}$ **2.5.9.** $y = Cx - e^C$, $y = x\ln x - x$.

2.5.10. $y = Cx^2 + \dfrac{1}{C}$, $y = \pm 2x$. **2.5.11.** $\begin{cases} x = (p+1)e^p + C, \\ y = p^2e^p, \end{cases}$ $y = 0$.

2.5.12. $\begin{cases} y = xp^2 - p, \\ x = \dfrac{p - \ln p + C}{(p-1)^2}. \end{cases}$ **2.5.13.** $y = Cx + C + \sqrt{C}$, $y = -\dfrac{1}{4(x+1)}$.

2.5.14. $y = Cx - \ln C$, $y = \ln x + 1$. **2.5.15.** $y = Cx + \dfrac{1}{C}$, $y^2 = 4x$.

§ 6. Интегрирование дифференциальных уравнений высших порядков

2.6.2. $y = -\dfrac{1}{16}\sin 4x + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + C_1x + C_2$.

2.6.3. $y = \dfrac{1}{25}e^{5x} - \cos x - \dfrac{1}{10}x^5 + C_1x + C_2$.

2.6.4. $y = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^{x^2}\,dx + \dfrac{3^{-x}}{\ln^2 3} + C_1x + C_2$.

2.6.5. $y = \dfrac{5}{4}x^2 - \dfrac{\cos 2x}{2} - \dfrac{\cos 4x}{32} + \cos x + \dfrac{4}{15}\sqrt{(x+2)^5} + C_1x + C_2$.

2.6.7. $y = (x^2 + 3x + 1)e^x + C_1x + C_2$, $y_ч = (x^2 + 3x + 1)e^x$.

2.6.8. $y = (x^2 + x - 2)\cos 2x + C_1x + C_2$, $y_ч = (x^2 + x - 2)\cos 2x - x + 2$.

2.6.9. $y = (x+3)\ln x + x\sin x + C_1x + C_2$,

$y_ч = (x+3)\ln x + x\sin x - (4 + \sin 1 + \cos 1)x + 5 + \cos 1$.

2.6.10. $y = (x^3 + x^2 - 2x + 1)e^{2x} - x\cos 3x + C_1x + C_2$,

$y_ч = (x^3 + x^2 - 2x + 1)e^{2x} - x\cos 3x + 2x$. **2.6.12.** $y = \dfrac{x^5}{5} + C_1x^3 + C_2$.

2.6.13. $y = C_1(x+1)^2 + x + C_2$. **2.6.14.** $y = \dfrac{1}{x} + C_1\ln x + C_2$.

2.6.15. $y = C_1\sin x - x - \dfrac{1}{2}\sin 2x + C_2$. **2.6.16.** $y = (x-1)e^x + C_1x^2 + C_2$.

2.6.17. $C_1x(\ln x - 1) + C_2$. **2.6.18.** $y = -x - C_1\cos x + C_2$.

2.6.19. $y = -\dfrac{x^2}{4} + C_1\ln x + C_2$. **2.6.20.** $y = \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{x}{4} + C_1\,\mathrm{arctg}\,x + C_2$.

2.6.23. $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2$. **2.6.24.** $y = \dfrac{C_1}{2}\left(e^{\frac{x+C_2}{C_1}} + e^{-\frac{x+C_2}{C_1}}\right)$.

2.6.25. $(x - C_1)^2 = 4C_2(y - C_2)$. **2.6.26.** $y\cos^2(x + C_1) = C_2$.

2.6.27. $y = \pm\arcsin e^{x+C_1} + C_2$ и $y = C$. **2.6.28.** $y = x$.

2.6.29. $y = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$. **2.6.30.** $y = \left(\dfrac{x}{3} + 1\right)^3$. **2.6.31.** $y = \dfrac{x}{1-x}$.

2.6.33. $y = C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}$. **2.6.34.** $y\cdot\cos^2(x + C_1) = C_2$.

2.6.36. $y = \dfrac{1}{16}\cos 2x + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$.

2.6.37. $y = \dfrac{1}{b^9}e^{bx} + C_1x^8 + C_2x^7 + \ldots + C_8x + C_9$.

2.6.38. $\dfrac{1}{10}x^5 + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

2.6.39. $y = -\dfrac{\sin 3x}{27} + 3\sin x - \dfrac{x^4}{24} + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

2.6.40. $y = -\dfrac{1}{32}\left(\dfrac{1}{64}\sin 8x + \dfrac{1}{27}\sin 6x + \dfrac{1}{8}\sin 4x + \sin 2x\right) + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

2.6.41. $y = \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + C_1x^2 + C_2x + C_3$, $y_ч = \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$.
2.6.42. $y = -32\cos\frac{x}{2} + C_1x^4 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + c_5$,
$y_ч = -32\cos\frac{x}{2} + x^3 + x + 33$. **2.6.43.** $y = -\frac{1}{(x+2)^2} + C_1x^2 + C_2x + C_3$,
$C_1 = -\frac{1}{8}$, $C_2 = \frac{7}{4}$, $C_3 = \frac{1}{4}$.
2.6.45. $y = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{8}x^2 + C_1(x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)) + C_2x + C_3$.
2.6.46. $-C_1\ln|x| - \frac{1}{2x} + C_2x + C_3$.
2.6.47. $y = -\frac{1}{2}\ln|x| - C_1(x\ln|x| - 1) + C_2x^2 + C_3x + C_4$.
2.6.48. $y = -C_1\cos x + C_2x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\cos 2x + C_3$.
2.6.49. $y = C_1x^3 + C_2x + C_3 + (x-2)e^x$.
2.6.50. $y = \frac{1}{4}C_1\sin 2x + \frac{1}{6}(1+2C_1)x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$.
2.6.53. $y = -\sin(x + C_1) + C_2x + C_3$. **2.6.54.** $x = C_1y^2 + C_2y + C_3$.
2.6.55. $y = \frac{1}{12}(x^3 + 6x^2) + C_1x\ln|x| + C_2x + C_3$.
2.6.56. $\begin{cases} x + C_1 = \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{3}{4t^2} \\ y + C_2 = \frac{1}{4}t + \frac{3}{4t^3}, \end{cases} \quad t = y''$.
2.6.57. $y = C_2\left(xe^{C_1x} - \frac{1}{C_1}e^{C_1x}\right) + C_3$. *Указание.* Положить $y = e^{\int p\,dx}$.
2.6.58. $y = \frac{4}{(x-2)^2}$. **2.6.59.** $\begin{cases} x = 1 + t(2\ln t - 1) \\ y = t^2\ln t, \end{cases} \quad t = y''$.
2.6.60. $y = C_3e^{x\left(\frac{1}{2}\ln^2 x + C_1\ln x + C_2\right)}$. *Указание.* Положить $y = e^{\int p\,dx}$.
2.6.61. $y = (1 + C_1^2)\ln|x + C_1| - C_1x + C_2$. **2.6.62.** $y = (C_1x + C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1} + C_2$.
2.6.63. $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1x\ln|x| + C_2x + C_3$. **2.6.64.** $y = x^3 + 3x$.
2.6.65. $y = \frac{1}{2}x^2$. **2.6.66.** $y = \frac{1}{2}x^2$. **2.6.67.** $x = C_1y^2 - y\ln y + C_2$.
2.6.68. $y = \frac{1}{3}(C_1 - 2x)^{3/2} + C_2x + C_3$. **2.6.69.** $y = (C_1e^x + 1)x + C_2$.
2.6.70. $x = -\frac{3}{2}(y+2)^{2/3}$. **2.6.71.** $y = e^x$. **2.6.72.** $y = \frac{1}{\cos^2 x}$.
2.6.73. $y = \frac{(C_1^2 + 1 + x)^2}{2} + \frac{4}{3}C_1(x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2$, особое решение $y = C$.
2.6.76. $x^2 + y^2 + C_1x + C_2y + C_3 = 0$. **2.6.77.** $2(C_1y - 1)^{3/2} = 3C_1x + C_2$.
2.6.78. $\ln y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. **2.6.79.** $x = C_1 + \ln\left|\frac{y - C_2}{y + C_2}\right|$. **2.6.80.** $y = \frac{1}{2}(1 + x^2)$.
2.6.81. $y = C_1\frac{x^2}{2} + (C_1 - C_1^2)x + C_2$, особое решение $y = \frac{1}{12}(x+1)^2 + C$.
2.6.82. $y = \frac{1}{2}x\ln|x| + C_1\ln|x - 1| + C_2x + C_3$.

2.6.83. $y = \frac{3}{7}(x+1)^{7/3} - \frac{3}{4}C_1(x+C_1)^{4/3} + C_2$.

2.6.84. $y = C_2 - \frac{1}{2}\sqrt{1-C_1^2}x^2 + \frac{C_1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}C_1 \arcsin x$.

§ 7. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка

2.7.2. Независимы. **2.7.3.** Независимы. **2.7.4.** Независимы.
2.7.5. Независимы. **2.7.6.** Независимы. **2.7.7.** Зависимы. **2.7.8.** Зависимы.
2.7.9. Зависимы. **2.7.11.** $y'' + y = 0$. **2.7.12.** $y'' - y = 0$. **2.7.13.** $y'' = 0$.
2.7.14. $y'' - 2y' + y = 0$. **2.7.15.** $y'' - 3y' + 2y = 0$. **2.7.16.** $y'' - 4y' + 4y = 0$.
2.7.17. $y'' + 4y = 0$. **2.7.19.** $y_{oo} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. **2.7.20.** $y_{oo} = C_1e^{x} + C_2e^{-\frac{7}{2}x}$.
2.7.21. $y_{oo} = C_1e^{(-2+\sqrt{7})x} + C_2e^{(-2-\sqrt{7})x}$. **2.7.22.** $y_{oo} = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{2}{3}x}$.
2.7.23. $y_{oo} = C_1 + C_2e^{-25x}$. **2.7.24.** $y_{oo} = C_1 + C_2e^{\frac{9}{4}x}$.
2.7.26. $y_{oo} = (C_1 + C_2x)e^{3x}$. **2.7.27.** $y_{oo} = (C_1 + C_2x)e^{2x}$.
2.7.28. $y_{oo} = (C_1 + C_2x)e^{\frac{3}{2}x}$. **2.7.29.** $y_{oo} = (C_1 + C_2x)e^{-\frac{2}{3}x}$.
2.7.31. $y_{oo} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. **2.7.32.** $y_{oo} = C_1\cos\frac{3}{2}x + C_2\sin\frac{3}{2}x$.
2.7.33. $y_{oo} = \left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}$.
2.7.34. $y_{oo} = \left(C_1\cos\frac{5}{2}x + C_2\sin\frac{5}{2}x\right)e^{\frac{x}{2}}$.
2.7.35. $y_{oo} = \left(C_1\cos\frac{\sqrt{31}}{4}x + C_2\sin\frac{\sqrt{31}}{4}x\right)e^{\frac{3}{4}x}$.
2.7.36. $y_{oo} = \left(C_1\cos\frac{\sqrt{31}}{10}x + C_2\sin\frac{\sqrt{31}}{10}x\right)e^{\frac{3}{10}x}$. **2.7.38.** $y_ч = 4e^{x} + 2e^{3x}$.
2.7.39. $y_ч = 9 - 2e^{-4x}$. **2.7.40.** $y_ч = 2xe^{3x}$. **2.7.41.** $y_ч = (2+x)e^{-\frac{1}{2}x}$.
2.7.42. $y_ч = 4e^{x} + 2e^{3x}$. **2.7.44.** $y_{он} = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + \frac{5}{3}e^{-x}$.
2.7.45. $y_{он} = (C_1 + C_2x)e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$.
2.7.46. $y_{он} = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{15}{4}$.
2.7.47. $y_{он} = (C_1\cos x + C_2\sin x)e^{x} + x + 1$. **2.7.48.** $y_{он} = C_1e^{x} + C_2e^{-5x} - \frac{1}{5}$.
2.7.49. $y_{он} = C_1e^{x} + C_2e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}$.
2.7.51. $y_{он} = C_1e^{x} + C_2e^{-4x} + \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x\right)e^{x}$.
2.7.52. $y_{он} = (C_1 + C_2x)e^{x} + \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{x}$.
2.7.53. $y_{он} = \left(C_1 + C_2x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)e^{x}$.
2.7.54. $y_{он} = C_1e^{-x} + C_2e^{-\frac{x}{2}} + (x^2 + 3x)e^{-x}$.
2.7.55. $y_{он} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + (2x^2 + 3x)e^{-2x}$.
2.7.56. $y_{он} = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{-2x}$.

2.7.58. $y_{\text{он}} = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x} + \frac{5}{74}\sin x + \frac{7}{74}\cos x$. *Указание.* $y_{\text{ч}} = A\sin x + B\cos x$

2.7.59. $y_{\text{он}} = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + 5\sin x - 2\cos x$. *Указание.* $y_{\text{ч}} = A\sin x + B\cos x$.

2.7.60. $y_{\text{он}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \left(\frac{1}{20}\sin 2x + \frac{1}{10}\cos x\right) e^{2x}$.

Указание. $y_{\text{ч}} = e^{2x}(A\sin 2x + B\cos 2x)$.

2.7.61. $y_{\text{он}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} + \frac{3}{5}\cos 2x + \frac{1}{5}\sin 2x$.
Указание. $y_{\text{ч}} = A\cos 2x + B\sin 2x$.

2.7.62. $y_{\text{он}} = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \left(\frac{6}{25}x + \frac{57}{125}\right)\sin x - \left(\frac{8}{25}x + \frac{1}{125}\right)\cos x$.

2.7.63. $y_{\text{он}} = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} + (x\sin x + \cos x)e^{x}$.
Указание. $y_{\text{ч}} = [(Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x]e^{x}$.

2.7.65. $y_{\text{он}} = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x + \frac{1}{10}x\sin 5x$.

Указание. $y_{\text{ч}} = [A\cos 5x + B\sin 5x]x$. **2.7.66.** $y_{\text{он}} = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x^2\sin x$

Указание. $y_{\text{ч}} = [(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]x$.

2.7.67. $y_{\text{он}} = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x$.

2.7.68. $y_{\text{он}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - \frac{13}{72}x\cos 3x - \frac{1}{12}x^2\sin 3x$.

2.7.69. $y_{\text{он}} = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{x} + \frac{x}{4}e^{x}\sin 2x$.

Указание. $y_{\text{ч}} = x(A\cos 2x + B\sin 2x)e^{x}$.

2.7.70. $y_{\text{он}} = \left(C_1\cos\frac{4}{5}x + C_2\sin\frac{4}{5}x\right)e^{\frac{3}{5}x} - \frac{1}{8}xe^{\frac{3}{5}x}\cos\frac{4}{5}x$.

2.7.72. $y_{\text{он}} = (C_1 + C_2 x)e^{x} + x^2 + 3x + 7 - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}(x+1)\sin x$.

2.7.73. $y_{\text{он}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{18}x - \frac{65}{108} + x\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)e^{-3x}$.

2.7.74. $y_{\text{он}} = (C_1\cos x + C_2\sin x)e^{-3x} + x\cos 3x + \frac{1}{2}(x\cos x + x^2\sin x)e^{-3x}$.

2.7.75. $y_{\text{он}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \left(\frac{1}{18}x - \frac{5}{54}\right)e^{-3x} + 7x^2$.

2.7.76. $y_{\text{он}} = (C_1 + C_2 x)e^{x} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}x^2 e^{x} - \frac{1}{8}e^{-x}$.

2.7.78. $y_{\text{он}} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}\ln\frac{e^{x} - 1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x}(e^{x} - \ln(e^{x} - 1))$.

2.7.79. $y_{\text{он}} = C_1 e^{x} + C_2 xe^{x} + x(\ln|x| - 1)e^{x}$.

2.7.80. $y_{\text{он}} = C_1 e^{3x} + C_2 xe^{3x} - xe^{3x} + xe^{3x}\ln|x|$.

2.7.81. $y_{\text{он}} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \cos 2x\ln|\cos x| + \left(x - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x\right)\sin 2x$.

2.7.82. $y_{\text{он}} = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + 2$.

2.7.83. $y_{\text{он}} = C_1 + C_2 e^{x} + \frac{1}{2}e^{x}(e^{x}\sqrt{1 - e^{2x}} + \arcsin e^{x}) - \frac{1}{3}\sqrt{(1 - e^{2x})^3}$.

2.7.84. $y_{\text{он}} = (C_1 + C_2 x)e^{x} + e^{x}(x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{x^2 + 1})$. **2.7.86.** $y = (2x - 2)e^{x}$.

2.7.87. $y = \cos x + 4\sin x - 2x\cos x$. **2.7.88.** $y = 2e^{-x} + 3e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}$.

2.7.89. $y = e^{-3x} + \left(4x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x\right)e^{x}$. **2.7.90.** $y = xe^{-2x} + (2x - 1)e^{2x}$.

2.7.91. $y = xe^x + x^2 + 2$. **2.7.92.** $y = \frac{6}{13}e^{-2x} + \frac{4}{13}\sin 3x - \frac{6}{13}\cos 3x$.
2.7.93. $y = \cos 3x + (x+1)\sin 3x$.
2.7.94. $y = (1+e^x)\ln(1+e^x) + e^x(3 - \ln 2 - x) - (x + 2 + \ln 2)$.
2.7.95. $y = 3\cos\frac{x}{2} + 3\sin\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **2.7.97.** $y = C_1x^2 + C_2x^{-3}$.
2.7.98. $y = \frac{C_1}{x} + C_2\frac{\ln x}{x}$. **2.7.99.** $y = C_1 + C_2\ln x$.
2.7.101. $y = C_1(2x+1) + C_2(2x+1)\ln(2x+1)$.
2.7.102. $y = C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x$. **2.7.103.** $y = \frac{C_1}{x} + C_2x^3$.
2.7.104. $y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}$. **2.7.107.** *Указание.* Использовать идею предыдущего примера. Если $C_1\operatorname{arctg} x + C_2\operatorname{arctg} 2x + C_3\operatorname{arctg} 3x \equiv 0$, то
$\frac{C_1}{1+x^2} + \frac{2C_2}{1+4x^2} + \frac{3C_3}{1+9x^2} \equiv 0$. **2.7.108.** *Указание.* Если многочлен степени n
$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$ имеет более чем $n+1$ корень, то
$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. **2.7.109.** *Указание.* Если предполагать, что
$\alpha_1e^{k_1x} + \alpha_2e^{k_2x} + \alpha_3e^{k_3x} \equiv 0$, где, например, $\alpha_1 \neq 0$, то
$1 + \beta_2e^{(k_2-k_1)x} + \beta_3e^{(k_3-k_1)x} \equiv 0$ ($\beta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $\beta_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}$, $k_2 - k_1 \neq 0$, $k_3 - k_1 \neq 0$), а после дифференцирования $(k_2 - k_1)\beta_2e^{(k_2-k_1)x} + (k_3 - k_1)\beta_3e^{(k_3-k_1)x} \equiv 0$.
Ясно, что если предполагать $\beta_2 = \beta_3 = 0$, то из предыдущего равенства получили бы $1 = 0$. Поэтому можно сказать, например, $\beta_2 \neq 0$. А тогда из последнего равенства после деления на $(k_2 - k_1)\beta_2e^{(k_2-k_1)x}$ получим
$1 + \gamma e^{\delta x} \equiv 0$, а после дифференцирования получим $\gamma\delta e^{\delta x} \equiv 0$, что невозможно, иначе из предыдущего опять следует $1 = 0$. **2.7.110.** *Указание.* Использовать идею предыдущего примера, полагая $e^x = t$.
2.7.111. *Указание.* Тригонометрический многочлен степени n
$a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n\cos nx = 0$ имеет на $[0, 2\pi]$ не более чем $2n$ корней.
2.7.112. $\arcsin x + \arccos x - \frac{\pi}{2} \equiv 0$. **2.7.113.** $\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arcctg} 2x - \frac{\pi}{2} \equiv 0$.
2.7.114. $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos 2x + 0\cdot\sin 2x \equiv 0$.
2.7.115. $\sin 3\alpha - 3\sin\alpha + 4\sin^3\alpha + 0\cdot 1 \equiv 0$.
2.7.116. $3\cos\alpha - 4\cos^3\alpha + \cos 3\alpha + 0\cdot 5 \equiv 0$.
2.7.118. $e^x\sin^2 x + e^x\cos^2 x - e^x + 0\cdot e^{-2x} \equiv 0$. **2.7.119.** *Указание.* Составим дифференциальное уравнение второго порядка с общим решением
$y = C_1\sin x + C_2\sin 2x$. Для этого из системы

$$\left\{\begin{array}{l} C_1\cos x + 2C_2\cos 2x = y' \\ -C_1\sin x - 4C_2\sin 2x = y'' \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} 2\sin 2x \\ + \\ \cos 2x \end{array}\right| \begin{array}{c} \sin x \\ + \\ \cos x \end{array}$$

находим

$$C_1 = \frac{2y'\sin 2x + y''\cos 2x}{2\cos x\sin 2x - \sin x\cos 2x}, \quad C_2 = -\frac{y'\sin x + y''\cos x}{2(2\cos x\sin 2x - \sin x\cos 2x)}.$$

Подставляя эти значения в выражение для y, приходим к дифференциальному уравнению второго порядка с переменными

коэффициентами. **2.7.121.** *Указание.* Пусть $y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x}$ — общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка. Тогда $y' = C_1 - \dfrac{C_2}{x^2}$, $y'' = \dfrac{2C_2}{x^3}$. Отсюда $C_2 = \dfrac{x^3 y''}{2}$, $C_1 = y' + \dfrac{xy''}{2}$. После подстановки в общее решение получаем искомое уравнение $x^2y'' + xy' - y = 0$ с переменными коэффициентами (это уравнение Эйлера).
2.7.131. *Указание.* Пусть $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^x$ — общее решение искомого ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Решая систему

$$\begin{cases} 2C_1e^{2x} - 3C_2e^{-3x} + C_3e^x = y', \\ 4C_1e^{2x} + 9C_2e^{-3x} + C_3e^x = y'', \\ 8C_1e^{2x} - 27C_2e^{-3x} + C_3e^x = y''' \end{cases}$$

методом Крамера, находим $\Delta = \begin{vmatrix} 2e^{2x} & -3e^{-3x} & e^x \\ 4e^{2x} & 9e^{-3x} & e^x \\ 8e^{2x} & -27e^{-3x} & e^x \end{vmatrix} = -120$,

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y' & -3e^{-3x} & e^x \\ y'' & 9e^{-3x} & e^x \\ y''' & -27e^{-3x} & e^x \end{vmatrix} = -3e^{-2x}(-12y' + 8y'' + 4y''')$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2e^{2x} & y' & e^x \\ 4e^{2x} & y'' & e^x \\ 8e^{2x} & y''' & e^x \end{vmatrix} = 2e^{3x}(3y' - 2y'' + y''')$,

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2e^{2x} & -3e^{-3x} & y' \\ 4e^{2x} & 9e^{-3x} & y'' \\ 8e^{2x} & -27e^{-3x} & y''' \end{vmatrix} = 6e^x(-30y' + 5y'' + 5y''')$. Найдем отсюда значения C_1, C_2 и C_3 и подставим их в выражение для y, приходим к дифференциальному уравнению $y''' - 7y' + 6y = 0$. **2.7.132.** $y''' - 4y'' + 3y' = 0$.
2.7.133. $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$. **2.7.134.** $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$.
2.7.135. $y^{IV} - 6y''' + 12y'' - 10y' + 3y = 0$.
2.7.136. $y^{IV} - 2y''' + 10y'' - 18y' + 9y = 0$. **2.7.137.** $x^2y'' + xy' - y = 0$.
2.7.138. $(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$. **2.7.139.** $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$.
2.7.140. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 12x$. **2.7.141.** $(x+1)^2y''' - 12y' = 0$.
2.7.142. $x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x$. **2.7.143.** $x^2y'' - xy' + y = 2x$.
2.7.144. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2x + 2$. **2.7.145.** $y_{oo} = C_1e^x + C_2e^{3x}$.
2.7.146. $y_{oo} = (C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)e^{-2x}$. **2.7.147.** $y_{oo} = C_1 + C_2e^{-\frac{2}{3}x}$.
2.7.148. $y_{oo} = (C_1 + C_2x)e^{-\frac{3}{2}x}$. **2.7.149.** $y_{oo} = C_1\cos\dfrac{x}{\sqrt{5}} + C_2\sin\dfrac{x}{\sqrt{5}}$.
2.7.150. $y_{oo} = C_1 + C_2e^{-\frac{x}{5}}$. **2.7.151.** $y_{oo} = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}$.
2.7.152. $y_{oo} = C_1 + (C_2\cos 3x + C_3\sin 3x)e^{-2x}$. *Указание.* Характеристическое уравнение $k^3 + 4k^2 + 13k = 0$ имеет три корня $k_1 = 0$, $k_2 = 2 - 3i$ и $k_3 = 2 + 3i$.
2.7.153. $y_{oo} = C_1 + (C_2 + C_3x)e^{-x}$. **2.7.154.** $y_{oo} = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + C_3e^x$.
2.7.155. $y_{oo} = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$. **2.7.156.** $y_{oo} =$
$= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + C_2\sin\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_3\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + C_4\sin\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)$.

Указание. Характеристическое уравнение $k^4+1=0$ имеет четыре корня $k=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{e^{\pi i}}=e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i}$, $k=0,1,2,3$. $k_1=e^{\frac{\pi}{4}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $k_2=e^{\frac{3\pi}{4}i}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $k_3=e^{\frac{5\pi}{4}i}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $k_4=e^{\frac{7\pi}{4}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$. Линейно независимыми решениями исходного однородного уравнения являются $e^{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x$ и $e^{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x$, а их линейная комбинация с произвольными постоянными составляет общее решение уравнения.

2.7.157. $y_{\text{оо}}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-\frac{5}{4}x}\cos\frac{\sqrt{31}}{4}x+C_3e^{-\frac{5}{4}x}\sin\frac{\sqrt{31}}{4}x$. *Указание.* Составим характеристическое уравнение $2k^3+9k^2+17k+14=0$. Один корень $k_1=-2$: $-16+36-34+14=0$ (обнаруживается подбором). Поскольку $2k^3+9k^2+17k+14=(k+2)(2k^2+5k+7)$, то другие корни: $k_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{31}i}{4}$. Частные независимые решения соответствующего однородного дифференциального уравнения имеют вид $y_1=e^{-2x}$, $y_2=e^{-\frac{5}{4}x}\cos\frac{\sqrt{31}}{4}x$, $y_3=e^{-\frac{5}{4}x}\sin\frac{\sqrt{31}}{4}x$. **2.7.158.** $y_{\text{оо}}=C_1+C_2x+C_1\cos x+C_2\sin x$.

Указание. Характеристическое уравнение $k^4+k^2=0$ имеет корни $k_{1,2}=0$ и $k_3=i$, $k_4=-i$. Поэтому фундаментальной системой решений однородного уравнения являются функции $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=\cos x$, $y_4=\sin x$.

2.7.159. $y_{\text{он}}=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x-x^2$.

2.7.160. $y_{\text{он}}=C_1+C_2e^{-x}-\left(2x+\frac{5}{2}\right)e^{-2x}$.

2.7.161. $y_{\text{он}}=C_1+C_2e^{-x}+\left(\frac{9}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x\right)e^{-2x}$.

2.7.162. $y_{\text{он}}=C_1+C_2e^{-x}-(x+3)\cos x-(x-1)\sin x$.

2.7.163. $y_{\text{он}}=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}e^{-x}$.

2.7.164. $y_{\text{он}}=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+x^4-4x^3+12x^2$.

2.7.165. $y_{\text{он}}=C_1e^x+(C_2+C_3x)e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

2.7.166. $y_{\text{он}}=C_1e^x+C_2e^{2x}+\left(\frac{1}{2}x^2-x+1\right)e^{3x}$.

2.7.167. $y_{\text{он}}=e^x(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)+\frac{e^{-x}}{41}(5\cos x-4\sin x)$.

2.7.168. $y_{\text{он}}=\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{5x}{2}+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{20}\sin 2x-\frac{1}{10}\cos 2x+C_1+C_2e^{-x}$.

2.7.169. $y_{\text{он}}=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}x\cos 2x-\frac{1}{16}x^2\sin 2x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

2.7.170. $y_{\text{он}}=\frac{1}{4}x\cos x+\frac{1}{4}x^2\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x$.

2.7.171. $y_{\text{он}}=\frac{1}{3}\cos 3x+C_1e^x\cos 3x+C_2e^x\sin 3x$.

2.7.172. $y_{\text{он}}=\frac{1}{20}\cos x-\frac{3}{20}\sin x+\frac{7}{260}\cos 3x+\frac{9}{260}\sin 3x+C_1e^x+C_2e^{2x}$.

2.7.173. $y_{\text{он}}=(2x+6)\sin 3x+(x+5)\cos 3x+C_1e^{2x}\cos x+C_2e^{2x}\sin x$.

2.7.174. $y=(\cos x-2\sin x)e^{2x}+(x+1)^2e^x$.

2.7.175. $y = (1-3x)e^{3x} + \frac{x^2}{9} + \frac{x}{27} + \frac{1}{3}$.

2.7.176. $y = 2\pi\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + x(\sin 2x - \cos 2x)$.

2.7.177. $y = -(\pi\cos x + (\pi + 1 - 2x)\sin x)e^x$.

2.7.178. $e^x(0{,}16\cos 3x + 0{,}28\sin 3x) + x^2 + 2{,}2x + 0{,}84$.

2.7.179. $y = (1+x)e^{-\frac{3}{2}x} + 2e^{-\frac{5}{2}x}$. **2.7.180.** $y = e^x(e^x - x^2 - x + 1) - 2$.

2.7.181. $y_{\text{он}} = C_1\cos x + C_2\sin x + \sin x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

2.7.182. $y_{\text{он}} = (C_1 + C_2x)e^{-x} + xe^{-x}\ln|x|$.

2.7.183. $y_{\text{он}} = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|$.

2.7.184. $y_{\text{он}} = C_1e^{\sqrt{2}x} + C_2e^{-\sqrt{2}x} + e^{x^2}$. **2.7.185.** $y_{\text{он}} = C_1e^{\sqrt{6}x} + C_2e^{-\sqrt{6}x} + xe^{x^2}$.

2.7.186. $y_{\text{он}} = C_1\sin x + C_2\cos x - \sqrt{\cos 2x}$. **2.7.187.** $y_1 = x$, $y_2 = |x|$.

2.7.188. *Указание.* Использовать определитель Вронского.

2.7.189. $p^2 - 4q < 0$. **2.7.190.** $f_1(x) = \begin{cases}\sin^2 x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi,\\ 0, & \pi < x \leqslant 2\pi;\end{cases}$

$f_2(x) = \begin{cases}0, & 0 \leqslant x \leqslant \pi,\\ (x-\pi)^2, & \pi < x \leqslant 2\pi;\end{cases}$ $[a,b] = [0, 2\pi]$.

2.7.191. $f_1(x) = \begin{cases}\sin^3 \pi x, & -\pi \leqslant x \leqslant -1,\\ 0, & -1 < x \leqslant \pi;\end{cases}$ $f_2(x) = \begin{cases}0, & 1 \leqslant |x|\pi,\\ \cos^2\frac{\pi}{2}x, & -1 < x < 1;\end{cases}$

$f_3(x) = \begin{cases}0, & -\pi \leqslant x \leqslant 1\\ (x-1)^2, & 1 < x \leqslant \pi;\end{cases}$ $[a,b] = [-\pi,-1]\cup[-1,1]\cup[1,\pi]$.

2.7.192. $\cos 4x - 4\cos 2x + 3 - 8\sin^4 x \equiv 0$.

2.7.193. $\cos 4x + 4\cos 2x + 3 - 8\cos^4 x \equiv 0$.

2.7.194. $-5\ln x + \ln x^2 + \ln x^3 + 0\cdot\ln^2 x + 0\cdot\ln^3 x \equiv 0$, $x > 0$.

2.7.195. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin x \equiv 0$.

2.7.196. $y_{\text{ч}} = e^x + 2\cos x + 3\sin x$. **2.7.197.** $y = e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x}$.

2.7.198. $y_{\text{он}} = C_1e^x + C_2x - x^2 - 1$. **2.7.199.** $y = C_1\cos x + C_2x\cos x - \sin x\cos x$.

2.7.200. $y = (C_1 + C_2x)\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + (C_3 + C_4x)\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$.

2.7.201. $y = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x + x(C_4\cos 2x + C_5\sin 2x)$.

2.7.202. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^{3x}(C_4 + C_5x)$.

2.7.203. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + (C_3 + C_4x)e^{-2x}$.

2.7.204. $y = \left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$.

2.7.205. $y = (C_1 + C_2x)e^x + (C_3 + C_4x)\cos x + (C_5 + C_6x)\sin x$.

2.7.206. $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + x^2$. **2.7.207.** $y = \cos x + 2\sin x + e^{-x} - 3e^x + 2xe^x$.

2.7.208. $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. **2.7.209.** $y = \frac{5}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{3x}$. **2.7.210.** $y = C_1x + \frac{C_2}{x}$.

2.7.211. $y = C_1 + C_2x^2 + C_3x^4$. **2.7.212.** $y = \frac{C_1}{(x+2)^3} + C_2(x+2)$.

2.7.213. $y = C_1 + C_2\ln x + C_3x^3$.

2.8.3. $\begin{cases} x = -C_2e^{-2t} + \frac{2}{3}C_3e^{3t}, \\ y = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + C_3e^{3t}, \\ z = -C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + C_3e^{3t}. \end{cases}$ **2.8.4.** $\begin{cases} x = \frac{1}{2}e^t(2C_1 + C_2 + 2C_2e^t), \\ y = e^t(C_1 + C_2t); \end{cases}$

$\begin{cases} x_ч = \frac{e^t}{2}\left(\frac{10}{3} - \frac{4}{3}e^t\right), \\ y_ч = 2e^t\left(1 - \frac{1}{3}t\right). \end{cases}$

2.8.5. $\begin{cases} x = C_1e^{(-1+\sqrt{15})t} + C_2e^{(-1-\sqrt{15})t} + \frac{2}{11}e^t + \frac{1}{6}e^{2t}, \\ y = (-4+\sqrt{15})C_1e^{(-1+\sqrt{15})t} - (4-\sqrt{15})C_2e^{(-1-\sqrt{15})t} - \frac{1}{11}e^t - \frac{7}{6}e^{2t}. \end{cases}$

2.8.6. $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-2t}, \\ y = C_1e^t + C_3e^{-2t}, \\ z = C_1e^t - (C_2 + C_3)e^{-2t}. \end{cases}$ **2.8.7.** $\begin{cases} x_{оо} = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}, \\ y_{оо} = C_1e^{-t} + 3C_2e^{-3t} + \cos t. \end{cases}$

2.8.8. $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{5t}, \\ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}. \end{cases}$ **2.8.9.** $\begin{cases} x = C_1 + 3C_2e^{2t}, \\ y = -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t}, \\ z = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}. \end{cases}$

2.8.10. $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t} + \frac{1}{2}t(e^t - e^{-t}), \\ y = C_1e^t - C_2e^{-t} + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) + \frac{t}{2}(e^t + e^{-t}). \end{cases}$

2.8.13. $\begin{cases} C_1x^2 = 2t + C_2, \\ y^2 = C_1(2t + C_2). \end{cases}$ **2.8.14.** $\begin{cases} y^2 = \dfrac{(C_1 + C_2 - x)^2}{2(C_2 - x)}, \\ z^2 = \dfrac{(C_1 - C_2 + x)^2}{2(C_2 - x)}. \end{cases}$

2.8.15. $\begin{cases} x^2 = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}, \\ y^2 = C_1e^{2t} - C_2e^{-2t}. \end{cases}$ **2.8.16.** $\begin{cases} y = x - e^x, \\ z = e^{-x}. \end{cases}$

2.8.20. $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t, \\ y = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t. \end{cases}$ **2.8.21.** $\begin{cases} y = C_1e^{\frac{x^2}{2}}, \\ z = C_2e^x. \end{cases}$

2.8.22. $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^t + C_3te^t, \\ y = C_2e^t + C_3(t-2)e^t, \\ z = C_1e^{2t} + C_3(t-1)e^t. \end{cases}$ **2.8.23.** $\begin{cases} y = x + \dfrac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}, \\ z = C_2e^{C_1x}. \end{cases}$

2.8.24. $\begin{cases} \frac{z}{y} = C_1, \\ zy^2 - \frac{3}{2}x^2 = C_2. \end{cases}$ **2.8.25.** $\begin{cases} y = C_1 + C_2x + 2\sin x, \\ z = -2C_1 - C_2(2x+1) - 3\sin x - 2\cos x. \end{cases}$

2.8.26. $\begin{cases} x = \ln|C_3(C_1t + C_2)|, \\ y = \ln|C_3(C_1t + C_2)| - C_1, \\ z = (C_1 + 1)t + C_2. \end{cases}$ **2.8.27.** $\begin{cases} z - 2y = C_1, \\ 2\sqrt{z - x - y} + y = C_2. \end{cases}$

2.8.33. $\begin{cases} x = C_1e^t \qquad\qquad + C_2e^{9t}, \\ y = \qquad C_3e^{2t} + \dfrac{4}{7}C_2e^{9t}, \\ z = -C_1e^t - 2C_3e^{2t} - \dfrac{13}{7}C_2e^{9t}. \end{cases}$

2.8.34. $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2\sin t + C_3\cos t, \\ y = t - C_1e^t + C_2\cos t - C_3\sin t, \\ z = 1 + C_2\sin t + C_3\cos t. \end{cases}$ **2.8.35.** $\begin{cases} y = C_2x, \\ x^2 + y^2 = C_1x - t^2. \end{cases}$

2.8.36. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t + \dfrac{C_2}{t^2}, \\ y = C_1e^t - \dfrac{t}{3} - \dfrac{C_2}{t^2}. \end{cases}$

Глава 3. Кратные интегралы

§ 1. Двойной интеграл. Свойства и методы вычисления

3.1.3. $(-2\sqrt{2}+1)4\pi < I < (2\sqrt{2}+1)4\pi$. **3.1.4.** $-\pi\sqrt{3} < J < \pi\sqrt{3}$.
3.1.5. $-8 < I < \frac{2}{3}$. **3.1.6.** $-\frac{\pi}{2} < I < 4\pi$. **3.1.9.** $\frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2}$. **3.1.10.** $\frac{1}{2}$. **3.1.11.** $4\frac{2}{3}$. *Указание.* При вычислениях внутреннего интеграла переменную внешнего интеграла надо считать фиксированной (постоянной):
$\int\limits_0^2 dy\left(\frac{x^3}{3} + 2yx\right)\Big|_0^1 = \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{3} + 2y\right) dy = 4\frac{2}{3}$. **3.1.12.** $\ln\frac{25}{24}$. **3.1.13.** 50,4.

3.1.16. 1. **3.1.17.** $\ln\frac{4}{3}$. **3.1.18.** $\frac{\pi}{6}$. **3.1.19.** $\frac{1}{2}\ln\frac{77}{65}$. **3.1.21.** $\frac{35}{8}$. **3.1.22.** 3π.

3.1.23. π. **3.1.24.** $\frac{32}{9}a^3$. **3.1.27.** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} f\,dy$.

3.1.28. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f\,dy$. **3.1.29.** $\int\limits_x^3 dy \int\limits_{-y}^{y} f\,dx$.

3.1.30. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} dx \int\limits_{-x}^{x} f\,dy + \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f\,dy$. **3.1.32.** 3. **3.1.33.** $12\frac{2}{3}$.

3.1.34. $\frac{2}{3}R$. **3.1.35.** 0. **3.1.36.** $-4\pi < I < 4\pi$. **3.1.37.** $0 < I < 486$.
3.1.38. $4 < I < 8(5-2\sqrt{2})$. **3.1.39.** $4\pi < I < 22\pi$. **3.1.40.** Отрицательный.

3.1.41. Отрицательный. **3.1.42.** Положительный.

3.1.43. $\int\limits_0^5 dx \int\limits_0^x f\,dy = \int\limits_0^5 dy \int\limits_y^5 f\,dx$. **3.1.44.** $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-x-2}^{2x+1} f\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-x-2}^{-7x+10} f\,dy$.

3.1.45. $\int\limits_1^4 dy \int\limits_{\frac{5y-14}{3}}^{\frac{4y+2}{3}} f\,dx$. **3.1.46.** $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f\,dy = \int\limits_1^5 dy \int\limits_{2-\sqrt{6y-y^2-5}}^{2+\sqrt{6y-y^2-5}} f\,dx$.

3.1.47. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f\,dx$. **3.1.48.** $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{y+4} f\,dx + \int\limits_3^8 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{10-y} f\,dx$.

3.1.49. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/2}^{y} f\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{y/2}^{2} f\,dx$. **3.1.50.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f\,dx$.

3.1.51. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f\,dx$. **3.1.52.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{e^y}^{e} f\,dx$.

3.1.53. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f\,dx$.

3.1.54. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f\,dx - \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f\,dx$. **3.1.55.** $\int\limits_0^{48} dy \int\limits_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f\,dx$.

3.1.56. $\int\limits_0^a dy \int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f\,dx + \int\limits_0^a dy \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f\,dx + \int\limits_0^{2\sqrt{2}a} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f\,dx$.

3.1.57. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/3}^{y/2} f\,dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_{y/3}^{1} f\,dx$. **3.1.58.** $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f\,dy$.

3.1.59. $\int\limits_0^a dy \int\limits_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f\,dx + \int\limits_{a/2}^{a} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f\,dx$.

3.1.60. $\int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_0^{\sqrt{2x}} f\,dy + \int\limits_{1/2}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{1} f\,dy + \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} f\,dy$.

3.1.61. $\int\limits_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} dy \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} f\,dx + \int\limits_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{a} dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f\,dx$. **3.1.62.** $\pi - 2$. **3.1.63.** $-\frac{\pi}{16}$.

3.1.64. $\frac{752}{5}$. **3.1.65.** 0,5. **3.1.66.** $\frac{4}{3}$. **3.1.67.** 2,4. **3.1.68.** 7. **3.1.69.** 2,25.
3.1.70. $\frac{1}{24}$. **3.1.71.** $\frac{5}{12}$. **3.1.72.** $(e-1)^2$. **3.1.73.** 0,25. **3.1.74.** $\frac{7}{12}$. **3.1.75.** $-\frac{4}{\pi^2}$.

3.1.79. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f\,dx$. **3.1.80.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y^3}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f\,dx$.

3.1.81. $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{-y}^{4} f\,dx + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f\,dx$. **3.1.82.** $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x-1}^{\arccos x} f\,dy$.

3.1.83. $\int\limits_0^{\frac{27}{16}} dy \int\limits_{\frac{3-\sqrt{9-4y}}{2}}^{\frac{4}{3}y} f\,dx + \int\limits_{\frac{9}{4}}^{\frac{27}{16}} dy \int\limits_{\frac{3-\sqrt{9-4y}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{9-4y}}{2}} f\,dx = \int\limits_0^{\frac{9}{4}} dx \int\limits_{\frac{3}{4}x}^{-x^2+3x} f\,dy$.

3.1.84. $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_{-1}^{1+\sin x} f\,dy = \int\limits_1^0 dy \int\limits_0^{\pi+\arcsin(y-1)} f\,dx +$

$+ \int\limits_2^1 dy \int\limits_{\arcsin(y-1)}^{\pi+\arcsin(y-1)} f\,dx + \int\limits_1^0 dy \int\limits_{2\pi+\arcsin(y-1)}^{2\pi} f\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_0^{2\pi} f\,dx.$

3.1.85. $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} f\,dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} f\,dx + \int\limits_0^{a\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} f\,dx$.

3.1.86. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{-\sqrt{ax-x^2}} f\,dy + \int\limits_a^{2a} dx \int\limits_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{0} f\,dy =$

$= \int\limits_{-a}^{-\frac{a}{2}} dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f\,dx + \int\limits_0^{-\frac{a}{2}} dy \int\limits_{\frac{a+\sqrt{a^2-4y^2}}{2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f\,dx + \int\limits_0^{-\frac{a}{2}} dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{a-\sqrt{a^2-4y^2}}{2}} f\,dx.$

3.1.87. $\frac{208}{15}$. **3.1.88.** $\frac{4}{3}$. **3.1.89.** $-\frac{3}{2}$. **3.1.90.** $\frac{121}{486}$. **3.1.91.** $\frac{\pi a}{2}$. **3.1.92.** $\frac{13}{3}$.
3.1.93. $40\pi < I < 184\pi$. **3.1.94.** $138{,}24 < I < 384$. **3.1.95.** $5 < I < 12$.
3.1.96. $-2(\sqrt{2}+1)\pi < I < 2(\sqrt{2}-1)\pi$. **3.1.97.** Подынтегральная функция не непрерывна при $y=0$. **3.1.98.** Подынтегральная функция не непрерывна в точке $(0,0)$. **3.1.99.** $I < \frac{2}{3}$.

§ 2. Замена переменных в двойном интеграле

3.2.3. -8. **3.2.4.** 12. **3.2.5.** $\frac{2}{9}\left(q^{3/2}-p^{3/2}\right)\ln\frac{b}{a}$. *Указание.* Использовать формулы перехода к криволинейным координатам $y^2 = ux$, $xy = v$, т. е.

$x = \left(\dfrac{v^2}{u}\right)^{1/3}$, $y = (uv)^{1/3}$, $|J| = -\dfrac{1}{3u}$, $|J(u,v)| = \dfrac{1}{3u}$. Новая область интегрирования G — прямоугольник, а исходный интеграл свести к повторному $\dfrac{1}{3}\int\limits_a^b \dfrac{du}{u}\int\limits_p^q \sqrt{v}\,dv$. **3.2.6.** $543\frac{11}{15}$. **3.2.8.** $\frac{2}{3}\pi a^3$. **3.2.9.** $\frac{2}{3}\pi$.

3.2.10. $-6\pi^2$. **3.2.12.** $\frac{2}{9}a^3$. **3.2.13.** $\frac{128}{3}\pi$. **3.2.14.** $\frac{\pi}{6}a^3$. **3.2.15.** $\frac{45}{64}\pi a^4$.

3.2.17. $\frac{\pi}{3}a^3$. **3.2.18.** $\frac{\pi}{6}a^3$. **3.2.19.** $\left(\frac{\pi}{6} - \frac{8\sqrt{2}-10}{9}\right)a^3$. **3.2.20.** $\frac{2}{3}\pi ab$.

Указание. Перейти к обобщенным полярным (эллиптическим) координатам $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$. При этом $J = abr$.

3.2.21. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr.$

3.2.22. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{1/\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr$. **3.2.23.** $\frac{4}{3}a^4$. **3.2.24.** $\frac{112}{9}$.

3.2.25. 0,25. **3.2.26.** 0,45. **3.2.27.** $0{,}75\pi$. **3.2.28.** $1{,}5\pi R^4$. **3.2.29.** $0{,}625\pi a^2$.

3.2.30. $\frac{r^2}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$. **3.2.31.** $\frac{a^3}{12}$. **3.2.32.** 24π. **3.2.33.** $\frac{\pi^2}{16}$. **3.2.34.** a^2.

3.2.40. $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_a^{a\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr.$

3.2.41. $\displaystyle\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}} d\varphi \int\limits_0^{b\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr + \int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr.$

3.2.42. $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\operatorname{cosec}\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr$. **3.2.43.** $\displaystyle\int\limits_a^b u\,du \int\limits_\alpha^\beta f(u, uv)\,dv.$

3.2.44. $$\frac{1}{2}\left[\int\limits_0^1 du \int\limits_{-u}^{u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)dv + \int\limits_1^2 du \int\limits_{u-2}^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)dv\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int\limits_{-1}^0 dv \int\limits_{-v}^{2+v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)du + \int\limits_0^1 dv \int\limits_0^{2-v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)du\right].$$

3.2.45. $\displaystyle\sqrt{3}\int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}\cos^2\varphi\sin\varphi} f(r\cos\varphi, \sqrt{3}r\sin\varphi)\,r\,dr.$

3.2.46. $\displaystyle\frac{1}{3}\int\limits_a^b \frac{du}{u}\int\limits_p^q f\left(\sqrt[3]{\frac{v}{u}}, \sqrt[3]{uv^2}\right)dv$. **3.2.47.** $\displaystyle ab\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_1^4 f\left(\sqrt{R^2-r^2}\right)r\,dr.$

3.2.48. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\sec\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\operatorname{cosec}\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr =$

$= \int\limits_0^1 r\, dr \int\limits_0^{\pi/2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi + \int\limits_1^{\sqrt{2}} r\, dr \int\limits_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi.$

3.2.49. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^{1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr =$

$= \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} r\, dr \int\limits_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi.$

3.2.50. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\sec\varphi} rf(r)\, dr = \frac{\pi}{12}\int\limits_0^{r\sqrt{2}} rf(r)\, dr + \int\limits_{r\sqrt{2}}^{4}\left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{2}{r}\right) rf(r)\, dr.$

3.2.51. $4\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 v \cos^3 v\, dv \int\limits_0^a uf(u\cos^4 v, u\sin^4 v)\, du.$ **3.2.52.** $\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right).$

3.2.53. $\frac{ab}{70}$. **3.2.54.** $\frac{9}{16}\pi$.

§ 3. Применение двойного интеграла

3.3.4. $\frac{13}{3}$. **3.3.5.** $\frac{15}{2} - 8\ln 2$. **3.3.6.** $\frac{a^2}{3}$. **3.3.7.** $\frac{8a^2}{3} - \frac{\pi a^2}{2}$. **3.3.8.** $\frac{16}{3}\sqrt{15}$.
3.3.9. $\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{8}$. **3.3.10.** $\frac{5\pi a^2}{8}$. **3.3.11.** $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$. **3.3.13.** $S = 3\pi$.
Указание. $\begin{cases} \dfrac{x+y-1}{2} = u, \\ \dfrac{x-y+3}{3} = v, \end{cases}$ $\begin{cases} x = u + \frac{3}{2}v - 1, \\ y = u - \frac{3}{2}v + 2, \end{cases}$ $|J| = 3$. **3.3.14.** $\frac{208}{169}\pi$.
3.3.16. 6. **3.3.17.** $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$. **3.3.18.** $\frac{2}{3}$. **3.3.19.** $\frac{\pi+2}{4}(b^2 - a^2)$. **3.3.20.** πab.
3.3.21. $(a^2 - b^2)\ln\frac{m}{n}$. **3.3.24.** $\frac{9\pi}{2}$. **3.3.26.** $\frac{abc}{6}$. **3.3.27.** $\frac{1}{6}$. **3.3.28.** $\frac{\pi r^4}{4a}$.
3.3.29. $\frac{88}{105}$. **3.3.30.** $\frac{a^3}{18}$. **3.3.31.** $\frac{abc}{3}$. **3.3.35.** $\frac{r^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$.
3.3.36. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$. **3.3.37.** $\frac{112}{9}\pi a^2$. **3.3.38.** $\frac{20}{9} - \frac{\pi}{3}$.
Указание. Переход к полярным координатам приводит к интегралу

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{1+r^2}\, r\, dr = \frac{5}{9} - \frac{\pi}{12}$. **3.3.39.** $\pi\sqrt{2}$.

3.3.40. $\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1 + \frac{7}{4}\ln 3\right)$. **3.3.42.** 3π. **3.3.44.** 1. **3.3.45.** $\frac{\pi}{12}$.

3.3.46. 2. **3.3.47.** $\frac{45}{64}\pi a^4$. **3.3.48.** $\frac{2\sqrt{2}}{15}a^4$. **3.3.49.** $\frac{e-1}{2}$.

Указание. Использовать замену переменных $x = u(1-v)$, $y = uv$.

3.3.50. $\frac{a^2}{12}(3\pi - 2)$. **3.3.52.** $M_0(3; 4{,}8)$. **3.3.53.** $M_0\left(\frac{2a}{5}, \frac{a}{2}\right)$. **3.3.54.** $M_0\left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$

3.3.55. $M_0\left(0, \frac{256}{315\pi}\right)$. **3.3.56.** $\frac{125}{6}$. **3.3.57.** $\frac{4}{3}a^2$. **3.3.58.** $ab[2\sqrt{3} - \ln(2+\sqrt{3})]$.

3.3.59. $\frac{4}{3}p^2$. **3.3.60.** $\frac{28a^2}{5}$. **3.3.61.** $a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. **3.3.62.** $\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3.3.63. 10π. **3.3.64.** 45. **3.3.65.** $\frac{\pi abc^2}{2}$. **3.3.66.** $49\frac{7}{24}$. **3.3.67.** 7,5. **3.3.68.** $\frac{160}{3}$.

3.3.69. $\frac{41}{162}a^4$. **3.3.70.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **3.3.71.** а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{8}{3}$, $\frac{11}{6}$; в) $x_c = 2$, $y_c = \frac{11}{8}$.

3.3.72. $\frac{9}{20}$. **3.3.73.** $\frac{67}{60}C$, $\frac{1273}{210}C$, $\frac{603}{84}C$. **3.3.74.** $m = 8$, $M_x = M_y = \frac{28}{3}$,

$x_c = y_c = \frac{7}{6}$. **3.3.75.** $4(m-n)R^2$. **3.3.76.** $4a^2$. **3.3.77.** $8a^2 \arcsin\frac{b}{a}$.

3.3.78. $x_c = \frac{5}{6}a$, $y_c = 0$. **3.3.79.** $\frac{1}{2}\pi\sigma R^2$. **3.3.80.** $M_x = \frac{4}{3}a^3$, $M_y = \frac{5}{8}\pi a^3$.

3.3.81. $x_c = \frac{2}{5}a$, $y_c = \frac{a}{2}$. **3.3.82.** $\frac{a^2b}{6}$. **3.3.83.** $M_x = \frac{\pi}{24}$, $M_y = 1 - \frac{\pi^2}{12}$.

3.3.84. $J_x = 4$, $J_y = 4$. **3.3.85.** $\frac{1}{3}(b-a)(\beta-\alpha)$. **3.3.86.** $\frac{1}{3}(\beta-\alpha)\ln\frac{b}{a}$.

3.3.87. $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$. **3.3.88.** $\frac{1}{4}a^2(8-\pi)$. **3.3.89.** $\frac{ab}{12}$. *Указание.* Заменить $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = u$, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = v$. **3.3.90.** $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3} - 5)$. **3.3.91.** $\frac{32}{9}a^3$. **3.3.92.** $\frac{3\sqrt{3}-2}{2}$.

3.3.93. $\frac{\pi a^3}{3}$. **3.3.94.** $\frac{4}{3}\pi a^3(\sqrt{2} - 1)$. **3.3.95.** $8a^2$. **3.3.96.** $a^2\sqrt{2}$.

3.3.97. $\frac{1}{3}\pi a^2(3\sqrt{3} - 1)$. **3.3.98.** $J_x = \frac{1}{12}$, $J_y = \frac{7}{12}$. **3.3.99.** $J_x = \frac{21}{32}\pi a^4$, $J_y = \frac{49}{32}\pi a^4$, $J_0 = \frac{35}{16}\pi a^4$. **3.3.100.** $J_x = \frac{\pi ab^3}{4}$, $J_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$, $J_0 = \frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2)$.

3.3.101. $\frac{\pi a^4}{8}$. **3.3.102.** $\frac{2R^3}{3}$.

§ 4. Тройной интеграл. Свойства, вычисление, применение

3.4.2. $\frac{3}{2}$. **3.4.3.** $\frac{1}{144}$. **3.4.4.** $242\frac{2}{3}$. **3.4.5.** $\frac{1}{2}\ln\left(2 - \frac{5}{8}\right)$. **3.4.6.** 0. **3.4.7.** $\frac{1}{48}$.

3.4.9. πR^3. **3.4.10.** $\frac{8}{9}a^2$. **3.4.11.** $\frac{8}{3}r^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$. **3.4.13.** $\frac{3}{35}$. **3.4.14.** $\frac{7}{24}$.

3.4.15. $\frac{\pi a^3}{6}$. **3.4.16.** $\frac{(3\pi-4)a^3}{12}$. **3.4.17.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **3.4.19.** $\frac{3}{35}$. **3.4.20.** $\frac{8}{3}(3\pi - 4)$.

3.4.21. $4{,}5a^2\pi$. **3.4.22.** $\frac{5\pi}{2}(3 - \sqrt{5})$. **3.4.24.** $M_0\left(\frac{4}{3}, 0, 0\right)$. **3.4.25.** $M_0\left(0, 0, \frac{15}{4}\right)$.

3.4.26. $M_0\left(2, 2, \frac{35}{6}\right)$. **3.4.27.** $M_0\left(3, \frac{21}{8}, \frac{9}{4}\right)$. **3.4.29.** $\frac{\pi R^2 H}{12}(3R^2 + 4H^2)$.

3.4.30. $\frac{\pi R^2 H}{60}(2H^2 + 3R^2)$. **3.4.31.** $I_{xy} = 25$; $I_{yz} = 9$; $I_{xz} = 16$.

3.4.33. $\frac{kabc}{2}(a+b+c)$. **3.4.34.** 162π. **3.4.35.** $\frac{\pi h^4}{4}$. **3.4.36.** $\frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 1)$.

3.4.37. $\frac{7}{24}$. **3.4.38.** $\frac{2}{3}(3\pi-4)a^2$. **3.4.39.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **3.4.40.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **3.4.41.** 16.
3.4.42. $\frac{4R^5}{15a^3}$. **3.4.43.** $12\frac{4}{21}$. **3.4.44.** 3π. **3.4.45.** 5π. **3.4.46.** 276π. **3.4.47.** 28.
3.4.48. 18. **3.4.49.** $\frac{19}{24}\pi$. **3.4.50.** $\frac{16}{3}\pi$. **3.4.51.** $\frac{4}{15}\pi ah$. **3.4.52.** $\frac{8}{21}\pi\sqrt{R^7}$.
3.4.53. $\frac{8}{9}a^2$. **3.4.54.** $\frac{1}{105}$. **3.4.55.** $e-2$. **3.4.56.** 10. **3.4.57.** 2. **3.4.58.** $5-e^{-4}$.
3.4.59. $\frac{1}{2}acb(a+b+c)$. **3.4.60.** π. **3.4.61.** $\frac{a^3h}{6}$. **3.4.62.** 2. **3.4.63.** $\frac{2\pi}{3}$.
3.4.64. $\frac{49a^3}{864}$. **3.4.65.** $\frac{32}{9}a^2h$. **3.4.66.** πabc. **3.4.67.** $M_0\left(\frac{6}{5},\frac{12}{5},\frac{8}{5}\right)$.
3.4.68. $M_0\left(\frac{18}{7},\frac{15\sqrt{6}}{6},\frac{12}{7}\right)$. **3.4.69.** $M_0\left(0,0,\frac{5a}{83}(6\sqrt{3}+5)\right)$.
3.4.70. $M_0\left(0,0,\frac{3}{8}R(1+\cos\alpha)\right)$. **3.4.71.** $\frac{M}{3}(b^2+c^2)$, $\frac{M}{3}(a^2+c^2)$, $\frac{M}{3}(a^2+b^2)$, $\frac{M}{12}(a^2+b^2+c^2)$. **3.4.72.** $\frac{7}{5}MR^2$. **3.4.73.** $\frac{M}{5}(b^2+c^2)$, $\frac{M}{5}(a^2+c^2)$, $\frac{M}{5}(a^2+b^2)$.
3.4.74. $M_{xz}=M_{yz}=0$, $M_{xy}=\frac{9\pi}{2}$, $m=\frac{9\pi}{2}$, $M_0(0,0,1)$. **3.4.75.** $4(4-3\ln 3)$.
3.4.76. $\frac{\pi}{8}$. **3.4.77.** $\frac{\pi}{2}$. **3.4.78.** $\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}$. **3.4.79.** $\frac{1}{2}$. **3.4.80.** $\frac{19}{6}\pi$, $\frac{15}{2}\pi$. **3.4.81.** $\frac{a^3}{360}$.
3.4.82. $e^2-e^{-2}-2$. **3.4.83.** $\frac{2}{15}$. **3.4.84.** $\frac{1}{364}$. **3.4.85.** $\frac{4\pi abc}{15}\left(\frac{a^2}{p^2}+\frac{b^2}{q^2}+\frac{c^2}{r^2}\right)$.
3.4.86. $\frac{4}{3}\ln 2$. **3.4.87.** $\frac{1}{3}\pi a^3$. **3.4.88.** $\frac{4}{21}\pi a^3$. **3.4.89.** $\frac{64}{105}\pi a^3$. **3.4.90.** $\frac{\pi^2a^3}{6}$.
3.4.91. $J_{xy}=\frac{7}{2}\pi abc^3$, $J_{xz}=\frac{4}{3}\pi ab^3c$, $J_{yz}=\frac{4}{3}\pi a^3bc$.
3.4.92. $J_{xy}=\frac{2abc^3}{225}(15\pi-16)$, $J_{yz}=\frac{2a^3bc}{1575}(105\pi-92)$, $J_{xz}=\frac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272)$. **3.4.93.** $\frac{8}{21}abh\left(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{3}\right)$. **3.4.94.** $\frac{8}{15}ha^4$.
3.4.95. $M_0\left(0,0,\frac{3}{4}c\right)$. **3.4.96.** $M_0\left(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a,\frac{7}{30}a^2\right)$. **3.4.97.** $\frac{55+9\sqrt{3}}{65}c^3$.

Глава 4. Криволинейные и поверхностные интегралы

§ 1. Криволинейный интеграл первого рода

4.1.5. 0. **4.1.6.** $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. **4.1.7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{3}{2}$. **4.1.8.** $\sqrt{5}\ln 2$. **4.1.9.** $\frac{256}{15}a^3$.
4.1.10. $\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2b^2)$. **4.1.11.** $a^2\sqrt{2}$. **4.1.12.** $2\pi a^{2n+1}$.
4.1.13. $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. **4.1.14.** $\frac{p^2}{3}(5\sqrt{5}-1)$. **4.1.18.** $x_0=b-a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}}$, $y_0=\frac{h}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}$. **4.1.19.** $x_0=\frac{4a}{3}$, $y_0=\frac{4a}{3}$. **4.1.21.** $8+\frac{50}{3}\arcsin\frac{3}{5}$.
4.1.22. $2b\left(b+\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$.

4.1.23. $\sqrt{a^2+b^2}\left(\pi\sqrt{a^2+4\pi b^2}+\frac{a^2}{2b}\ln\frac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi b^2}}{a}\right)$.

4.1.24. $2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}$. **4.1.25.** $\frac{\pi}{4}$. **4.1.26.** R^2. **4.1.27.** $\frac{11}{3}$. **4.1.28.** $\frac{16}{27}(10\sqrt{10}-1)$.

4.1.29. 24. **4.1.30.** $\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)$. **4.1.31.** $\frac{335}{27}$. **4.1.32.** $\frac{3}{2}\pi a$. **4.1.33.** $\frac{a}{2}(e^{\frac{4}{a}}-e^{-\frac{4}{a}})$.

4.1.34. $\ln(1+\sqrt{2})$. **4.1.35.** $\left(\frac{5a}{8},0\right)$. **4.1.36.** $\left(0,\frac{2a}{5}\right)$. **4.1.37.** $\left(\frac{a}{5},\frac{a}{5}\right)$.

4.1.38. $\left(0,a\frac{e^4+4e^2-1}{4e(e^2-1)}\right)$. **4.1.39.** $\frac{a^2}{3}\left[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1\right]$.

4.1.40. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}$. **4.1.41.** $\frac{1}{54}(56\sqrt{7}-1)$. **4.1.42.** $a\sqrt{3}$. **4.1.43.** $\left(\frac{5a}{6},0\right)$.

4.1.44. $x_c=-\frac{a}{5}\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$, $y_c=\frac{a}{5}\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$. **4.1.45.** $1+\sqrt{2}$. **4.1.46.** $2\pi a^2$.

4.1.47. $\frac{1}{6}(\sqrt{8}-1)$. **4.1.48.** $\frac{\pi}{16}-\frac{\ln 2}{2}$. **4.1.49.** $\frac{ab(a^2+b^2+ab)}{3(a+b)}$. **4.1.50.** $\frac{\pi}{a}$.

4.1.51. $\frac{\pi a^2}{2}$. **4.1.52.** $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **4.1.53.** $\frac{1}{12}\left[(R^2+4)^{3/2}-8\right]$. **4.1.54.** $a^{\frac{7}{3}}$.

4.1.55. $a^2(2-\sqrt{2})$. **4.1.56.** a^2. **4.1.57.** 6. **4.1.58.** $\frac{1}{3}\left[(\pi^2+2)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}\right]$.

4.1.59. $p^2(2\sqrt{2}-1)$. **4.1.60.** $\frac{a}{8}\left[(3\sqrt{3}-1)+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$. **4.1.61.** $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$.

4.1.62. $\frac{2Jm}{a}$. **4.1.63.** $\frac{8mJ\sqrt{2}}{a}$. **4.1.64.** $\frac{2\pi mJR^2}{(h^2+R^2)^{3/2}}$ при $R=h\sqrt{2}$.

4.1.65. $\frac{2\pi mJa}{b^2}$, где a и b — полуоси эллипса. **4.1.66.** $\frac{2\pi mJ}{p}$.

4.1.67. $\frac{ab}{3}\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. *Указание.* $S=\int\limits_0^a x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}\,dx$

4.1.68. $\frac{1}{3p}\left(\sqrt{(p^2+y_0^2)^3}-p^3\right)$. **4.1.69.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}(b^3-a^3)$. **4.1.70.** $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\pi}{4}$.

4.1.71. $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-3\sqrt{3})$. **4.1.72.** $\frac{256}{15}a^2$.

§ 2. Криволинейный интеграл второго рода

4.2.2. 1) 269; **2)** 395; **3)** 143; **4)** 311; **5)** не выполняется. **4.2.3. 1)** 128; **2)** 134; **3)** 122; **4)** 126. **4.2.4. 1)** $\frac{4}{3}$; **2)** 0; **3)** $\frac{12}{5}$; **4)** -4; **5)** 4.

4.2.6. $\frac{3R\sqrt[3]{R}\pi}{16}$. **4.2.7.** π. **4.2.8.** $\frac{ab}{2}$. **4.2.9.** $\pi(a^2-b^2)$. **4.2.11.** 30π.

4.2.12. $250\pi\sqrt{5}$. **4.2.13.** $-\frac{158}{3}$. **4.2.14.** πa^2. **4.2.16.** -1. **4.2.17.** 3. **4.2.18.** -37.

4.2.20. 1) $\frac{22}{3}$; **2)** 10; **3)** -10; **4)** $-\frac{35}{3}$. *Указание.* **2)** $x=4-y^2$; **3)** $y=2-\frac{1}{8}x^2$; **4)** $x=4\cos t$, $y=2\sin t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. **4.2.21.** 8. **4.2.22.** 12.

4.2.23. 2. **4.2.24.** $\frac{3}{2}$. **4.2.26.** 62. **4.2.27.** 1. **4.2.28.** $\frac{1}{4}+\ln 2$. **4.2.29.** 56. **4.2.30.** $2\pi a(a+b)$. **4.2.31.** $-\pi R^2\cos\alpha$. **4.2.32.** -2. **4.2.33.** $abc-1$. **4.2.34.** $5\sqrt{2}$. **4.2.36.** $-\frac{4}{3}$. **4.2.37.** $\frac{x^3+y^3}{3}$. **4.2.38.** $(x^2-y^2)^2$. **4.2.39.** $\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}$. **4.2.40.** $\frac{\sqrt{x^2+y^2}+1}{y}$. **4.2.41.** $\ln|x-y|+\frac{y}{x-y}+\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}$. **4.2.42.** 0. **4.2.43.** 0. **4.2.44.** $-\frac{\pi a^3}{8}$. **4.2.45.** -4. **4.2.46.** $\frac{2a^5}{5}$. **4.2.48.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **4.2.49.** $6\pi a^2$. **4.2.50.** $\frac{3}{2}a^2$. *Указание.* Положить $y=tx$. **4.2.51.** $\frac{a^2}{60}$. **4.2.52.** $\frac{1}{210}$. **4.2.53.** $2a^2$. *Указание.* Положить $y=x\operatorname{tg}t$. **4.2.54.** $\frac{1}{30}$. *Указание.* Положить $y=xt^2$. **4.2.56.** 1008. **4.2.57.** 252π. **4.2.58.** 48. **4.2.59.** 12π. **4.2.60.** **а)** 28; **б)** 30; **в)** 16; **г)** 26; **д)** $28\frac{2}{3}$. **4.2.61.** **а)** 814,5; **б)** 702. **4.2.62.** **а)** $-\frac{1}{2}$; **б)** 2; **в)** 10; **г)** $-19\frac{1}{3}$. **4.2.63.** **а)** 28; **б)** 22. **4.2.64.** 0. **4.2.65.** $2\pi ab$. **4.2.66.** 0. **4.2.67.** $\ln 2$. **4.2.68.** $3a^2$. **4.2.69.** $-6\pi a^2$. **4.2.70.** $U=xy+C$. **4.2.71.** $U=x^3y-\frac{1}{3}y^3+\sin x+C$. **4.2.72.** $U=\sqrt{x^2+y^2}+C$. **4.2.73.** $U=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+C$. **4.2.74.** $U=x^3+2xy^2+3xz+y^2-yz-2z+C$. **4.2.75.** $U=x^2yz-3xy^2z+4x^2y^2+2x+y+3z+C$. **4.2.76.** $U=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+C$. **4.2.77.** **а)** $\frac{4}{3}$; **б)** $\frac{17}{12}$. **4.2.78.** **а)** $\frac{a^2-b^2}{2}$; **б)** 0. **4.2.79.** 62. **4.2.80.** 1. **4.2.81.** $\frac{1}{4}+\ln 2$. **4.2.82.** $1+\sqrt{2}$. **4.2.83.** 0. **4.2.84.** $73\frac{10}{3}$. **4.2.85.** 0. **4.2.86.** $\ln 10$. **4.2.87.** 0. **4.2.88.** $1-\frac{\pi}{4}$. **4.2.89.** 8. **4.2.90.** 12. **4.2.91.** $-\frac{3}{2}$. **4.2.92.** 9. **4.2.93.** $\pi+1$. **4.2.95.** $\ln(x^2+y^2)+C$. **4.2.96.** $\ln\operatorname{tg}\frac{y}{x}+C$. **4.2.97.** $\frac{2x+3y}{x-y}+C$. **4.2.98.** $\frac{1}{35}$. **4.2.99.** -4.

§ 3. Поверхностный интеграл

4.3.2. $\sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$. **4.3.3.** $4\sqrt{61}$. **4.3.6.** $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$. **4.3.8.** $\frac{112}{9}\pi$. **4.3.10.** 0. **4.3.11.** $\frac{4}{3}abc$. **4.3.12.** $\frac{\pi a^4}{2}$. **4.3.13.** $\frac{12}{5}\pi a^5$. **4.3.14.** 0. **4.3.16.** $\frac{7}{2}\pi R^4$. **4.3.17.** $\frac{\pi R^2H}{3}$. **4.3.18.** $\frac{\pi R^2H}{4}$. **4.3.19.** $\frac{\pi R^4}{8}$. **4.3.20.** 0. **4.3.22.** 9. **4.3.23.** $\frac{3}{4}$. **4.3.24.** $\frac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)}a$. **4.3.25.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}h^4$. **4.3.26.** $\frac{5}{9}-\frac{\pi}{12}$. **4.3.27.** $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **4.3.28.** $\frac{4}{3}\pi R^4$. **4.3.29.** $\frac{\pi a(3a^2+2b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{12}$. **4.3.30.** $x_c=y_c=\frac{a}{2\sqrt{2}}$, $r_c=\frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1)$. **4.3.31.** $40a^2$. **4.3.32.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **4.3.33.** $\pi R\left(R(R+H)^2+\frac{2}{3}R^3\right)$.

4.3.34. $\frac{a^2\alpha}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **4.3.35.** $2a^2(\pi-2)$. **4.3.36.** $4a\pi(a-\sqrt{a^2-b^2})$.

4.3.37. $\frac{2\pi a^2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **4.3.38.** $\frac{7\pi\sqrt{2}a^3}{2}$. **4.3.39.** 0. **4.3.40.** $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$.

4.3.41. $\pi^2(a\sqrt{1+a^2}+\ln a+\sqrt{1+a^2})$. **4.3.42.** $\frac{\pi}{2}a^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$. **4.3.43.** $\frac{64\sqrt{2}a^4}{15}$.

4.3.44. $\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$.

Глава 5. Теория поля

§ 1. Скалярные и векторные поля. Поверхность уровня. Векторные линии

5.1.2. (yz, xz, xy). **5.1.3.** $(2x, 2y, -2z)$. **5.1.4.** $(ye^{xy}, xe^{xy}-z^2, -2yz)$.

5.1.5. $\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)$. **5.1.6.** $(1,-12,-5)$.

5.1.7. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **5.1.8.** $(1,1,-2)$. **5.1.9.** $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, 0\right)$. **5.1.11.** В точках окружности: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$. **5.1.12.** $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. **5.1.13. а)** На оси Ox; **б)** на плоскости yOz; **в)** на плоскости $x-y+z=0$; **г)** в точках прямой, проходящей через начало координат с направляющим вектором $\boldsymbol{\ell}(1,-3,2)$; **д)** в точке $O(0,0,0)$; **е)** в точках сферы $x^2+y^2+z^2=4$.

5.1.14. а) Равнобочные гиперболы $y=\frac{k}{x}$, кроме того, объединение двух координатных осей, образующих отдельную линию уровня; **б)** окружности $x^2+y^2=R^2$; **в)** прямые $x+y=C$, причем $|C|\leqslant 1$.

5.1.15. а) Концентрические сферы с центром в начале координат; **б)** ось Oz и круговые цилиндры с осью симметрии— осью аппликат; **в)** ось Oz без точки $O(0,0,0)$ и круговые конусы $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{c^2}=z^2$ без точек $O(0,0,0)$.

5.1.16. а) Сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$; **б)** поверхность уровня — это объединение сфер $x^2+y^2+z^2=R_1^2$, $x^2+y^2+z^2=R_2^2$, ..., где $\{R_i\}$ — множество корней уравнения $f(t)=c$ при фиксированном c. **5.1.18.** $y=Cx$.

5.1.19. $x^2-y^2=C$. **5.1.20.** $x^2+y^2=C$. **5.1.21.** Прямые с направляющим вектором $\boldsymbol{\ell}(a,b,c)$. **5.1.22.** Прямые, получающиеся при пересечении плоскостей $x-y=C_1(y-z)$ с плоскостями $x-y=C_2(z-x)$.

Указание. Интегрируемые комбинации имеют вид:

$\frac{d(x-y)}{y-x}=\frac{d(y-z)}{z-y}=\frac{d(z-x)}{x-z}$. **5.1.23.** Винтовые линии, параметрические уравнения которых $\begin{cases} x=C_1\cos t+C_2\sin t, \\ y=C_1\sin t-C_2\cos t, \\ z=at+C_3. \end{cases}$ *Указание.* Составьте и решите нормальную систему дифференциальных уравнений.

5.1.27. $(u\cdot\varphi'(u)+\varphi(u))\cdot\mathbf{grad}\,u$. **5.1.31.** $f'(r)\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}$. **5.1.32.** $\mathbf{c}$.

5.1.34. $\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\ell}} = -\dfrac{1}{r^2}$. *Указание.* Используйте задачу 5.1.31. **5.1.35.** Эллипсоиды $\dfrac{x^2}{ta^2} + \dfrac{y^2}{tb^2} + \dfrac{z^2}{tc^2} = 1$ $(t > 0)$ и точка $O(0,0,0)$. **5.1.36.** Цилиндры $x^2 + y^2 = R^2$.
5.1.38. $\arccos \dfrac{4}{3\sqrt{10}}$. **5.1.39.** В точках, лежащих на конусе $x^2 = y^2 + z^2$.
5.1.40. Сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. **5.1.41.** *Указание.* Рассмотрите градиенты этих полей. **5.1.42.** Линии пересечения гиперболических цилиндров: $x^2 - y^2 = c_1$ и $x^2 - z^2 = C_2$. **5.1.43.** Прямые, общие уравнения которых: $\begin{cases} x = C_1 y, \\ y = C_2 z. \end{cases}$ **5.1.44.** **0.** **5.1.45.** Да. Например, если $U = V + C$. **5.1.46.** Нет. Например, у полей $U = x^2 + y^2 + z^2$ и $V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ один и тот же набор поверхностей уровня. **5.1.47.** Нет. **5.1.48.** Да. Например, если $\mathbf{F}_1 = C \cdot \mathbf{F}_2$, где C — константа. **5.1.49.** Например, $U = x + y + z$ и $V = x + y - 2z$.
5.1.50. Вдоль лучей, исходящих из начала координат. **5.1.51.** Пересечение плоскостей $mx + ny + lz = C_1$ со сферами $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.
Указание. Интегрируемыми комбинациями являются $m\,dx + n\,dy + l\,dz = 0$ и $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$. **5.1.52.** $\dfrac{1}{|\mathbf{grad}\, V|} \cdot \mathbf{grad}\, U \cdot \mathbf{grad}\, V$. **5.1.53.** Они перпендикулярны в точках их пересечения. **5.1.54.** Нет.

§ 2. Дивергенция и ротор векторного поля. Оператор Гамильтона

5.2.2. $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, $\mathbf{rot}\, \mathbf{F} = \mathbf{0}$. **5.2.3.** $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3$, $\mathbf{rot}\, \mathbf{F} = \mathbf{0}$. **5.2.4.** $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, $\mathbf{rot}\, \mathbf{F} = \mathbf{0}$. **5.2.5.** $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, $\mathbf{rot}\, \mathbf{F} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$.
5.2.6. $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2(xy + yz + xy)$, $\mathbf{rot}\, \mathbf{F} = -y^2 \cdot \mathbf{i} - z^2 \cdot \mathbf{j} - x^2 \cdot \mathbf{k}$.
5.2.7. $\operatorname{div} \mathbf{grad}\, U = U''_{xx} + U''_{yy} + U''_{zz} = \Delta U$, $\mathbf{rot}\, \mathbf{grad}\, U = \mathbf{0}$. **5.2.9.** $4r$.
5.2.10. $3f(r) + r \cdot f'(r)$. **5.2.14.** $\operatorname{div}(U \cdot \mathbf{grad}\, V) = \mathbf{grad}\, U \cdot \mathbf{grad}\, V + U \cdot \Delta V$.
5.2.19. $\frac{1}{r}(\mathbf{r} \times \mathbf{c})$. **5.2.20.** $(-1, -1, -1)$. **5.2.21.** $(2x + 1, z^2, 2yz)$.
5.2.23. **а)** $\nabla \cdot (\nabla U)$; **б)** $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$; **в)** $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$; **г)** $\nabla \times (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}))$.
5.2.24. *Указание.* Воспользуйтесь результатами задач 5.2.7 и 5.2.18.
5.2.25. *Указание.* Сравните с задачами 5.1.25, 5.2.12, 5.2.16.
5.2.26. *Указание.* Сравните с уже доказанными свойствами градиента скалярного поля и дивергенции и ротора векторного поля. **5.2.27.** $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, $\mathbf{rot}\, \mathbf{F} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. **5.2.28.** $\operatorname{div} \mathbf{F} = x + y + z$, $\mathbf{rot}\, \mathbf{F} = -y \cdot \mathbf{i} - z \cdot \mathbf{j} - x \cdot \mathbf{k}$.
5.2.29. $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$, $\mathbf{rot}\, \mathbf{F} = (1 - 2z) \cdot \mathbf{i} + (1 - 2x) \cdot \mathbf{j} - (1 - 2y) \cdot \mathbf{k}$.
5.2.30. $\operatorname{div} \mathbf{F} = -\left(\dfrac{zy}{x^2} + \dfrac{xz}{y^2} + \dfrac{xy}{z^2}\right)$,
$\mathbf{rot}\, \mathbf{F} = \frac{x}{zy}(y - z) \cdot \mathbf{i} + \frac{y}{zx}(z - x) \cdot \mathbf{j} - \frac{z}{xy}(x - y) \cdot \mathbf{k}$. **5.2.31.** π. **5.2.32.** 2.
5.2.33. На плоскости $z = y$. **5.2.34.** Вдоль прямых, проходящих через начало координат, с направляющими векторами $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$ и $(1, -1, -1)$. **5.2.35.** Вдоль прямой, проходящей через начало координат, с направляющим вектором $\boldsymbol{\ell}(1, 1, 1)$. **5.2.36.** 0. **5.2.37.** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. **5.2.38.** $4\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}$.
5.2.39. $2\mathbf{c}$. **5.2.40.** $\mathbf{a} \times \mathbf{r}$. **5.2.41.** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. **5.2.43.** $\operatorname{div} \mathbf{F} = \dfrac{f'(r)}{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c})$,

$\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \dfrac{f'(r)}{r}(\mathbf{r}\times\mathbf{c})$. **5.2.44.** *Указание.* Воспользуйтесь задачей 5.2.10.

5.2.45. $f''(r) + \frac{2}{r}\cdot f'(r)$; $f(r) = C_2 - \dfrac{C_1}{r}$.

5.2.46. $2f(r)\cdot\mathbf{c} + \dfrac{f'(r)}{r}[\mathbf{c}\cdot(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})]$. **5.2.49.** $\nabla\mathbf{F} = \dfrac{1}{r^2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{c})$;

$\nabla\times\mathbf{F} = \dfrac{1}{r^2}(\mathbf{r}\times\mathbf{c})$; $\nabla^2\mathbf{F} = \dfrac{1}{r^2}\mathbf{c}$.

§ 3. Поток векторного поля

5.3.2. 1. **5.3.3.** 0. **5.3.4.** $\frac{1}{2}$. **5.3.5.** $2\pi R^3$. **5.3.6.** 0. **5.3.7.** 0. **5.3.8.** $\dfrac{3}{16}\pi R^4$. **5.3.12.** $\pi R^2 H$. **5.3.13.** $\dfrac{1}{12}$. **5.3.14.** $\dfrac{1}{24}$. **5.3.15.** 2. **5.3.16.** 8π. **5.3.17.** 0. **5.3.19.** $-3\pi R^2$. **5.3.20.** $\dfrac{4\pi}{5}$. *Указание.* При вычислении тройного интеграла перейти к сферическим координатам. **5.3.21.** $\pi R^2 H$. **5.3.22.** -1. **5.3.23.** 0. **5.3.24.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **5.3.25.** $\frac{2}{3}$. **5.3.26.** 36π. **5.3.27.** 0. *Указание.* Показать, что $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 0$. **5.3.28.** $\sqrt{2}$. **5.3.29.** $-\dfrac{2\pi}{3}$. **5.3.30.** 0. **5.3.31.** 12. **5.3.32.** -12. **5.3.35.** 0. **5.3.36.** $\frac{\pi}{5}$. **5.3.37.** **а)** $\dfrac{12\pi}{5}R^2$; **б)** $\frac{\pi}{5}$. *Указание.* Воспользоваться формулой Гаусса–Остроградского. **5.3.38.** $0{,}8\pi abc$. *Указание.* Воспользоваться формулой Гаусса–Остроградского; перейти к эллиптическим координатам. **5.3.40.** *Указание.* Воспользуйтесь равенством $\dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{grad}\,U\cdot\mathbf{n}$ и формулой Гаусса–Остроградского. **5.3.41.** *Указание.* Воспользоваться формулой Гаусса–Остроградского и задачей 5.2.11.

§ 4. Циркуляция векторного поля

5.4.3. π. **5.4.4.** 1. **5.4.5.** 24. **5.4.6.** $\frac{7}{2}$. **5.4.7.** $2\pi a$. **5.4.8.** 0. **5.4.9.** -24. **5.4.10.** 4π. **5.4.12.** 0. **5.4.13.** $-2\pi R^2$. **5.4.14.** $-2\pi R^2$. **5.4.15.** $-\dfrac{1}{20}$. **5.4.16.** $-\frac{1}{2}$. **5.4.18.** 0. **5.4.19.** 0. **5.4.20.** $\frac{3}{2}$. **5.4.21.** **а)** 2π; **б)** 0. **5.4.22.** $\frac{3}{2}$. **5.4.24.** 0. *Указание.* Вычисление потока свести к вычислению потока через круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$, расположенный в плоскости xOy. **5.4.25.** π. **5.4.26.** $2\omega\pi$. **5.4.27.** 5. **5.4.28.** 12π. **5.4.30.** **а)** 2π или -2π в зависимости от направления; **б)** 0. **5.4.32.** $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **5.4.33.** $\dfrac{35}{2}$. **5.4.34.** 0. *Указание.* Воспользуйтесь задачей 5.2.7 **5.4.35.** **а)** Внутренность тора; **б)** шар без внутренней точки; **в)** внутренность тора без внутренней точки. **5.4.36.** Нет, это верно, только если Ω — поверхностно односвязная область (см. задачу 5.4.21 *а*). **5.4.37.** Нет, они могут отличаться знаком, даже если поле $\mathbf{F}$ непрерывно дифференцируемо.

§ 5. Потенциальные и соленоидальные поля

5.5.2. Да. **5.5.3.** Нет. **5.5.4.** Нет. **5.5.5.** Нет. **5.5.6.** Да.
5.5.7. $U = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) + C$. **5.5.8.** $U = xyz + C$.
5.5.9. $U = zx + yz - x^2 - y^2 + C$. **5.5.10.** $U = xy^2z^3 + yz^2 + z + C$.
5.5.11. $U = x^2y^3 - \cos(x^2y) + C$. **5.5.13.** *Указание.* Воспользуйтесь задачей 5.5.12 и теоремой Стокса. **5.5.14.** 0. **5.5.15.** 0. **5.5.17.** 8. **5.5.18.** 2. **5.5.19.** Да. **5.5.20.** Да. **5.5.21.** Да. **5.5.22.** Нет. **5.5.23.** а) Нет; б) да. **5.5.24.** а) Да; б) нет. **5.5.25.** 0. **5.5.26.** Да. **5.5.27.** Нет. **5.5.28.** Нет. **5.5.29.** $U = x^2yz + xy^2z + xyz^2 + C$. **5.5.30.** $U = 3x^2y - 2yz - x^2 + z$. **5.5.31.** Да. **5.5.32.** Нет. **5.5.33.** Да. **5.5.34.** -2. **5.5.35.** 1. **5.5.36.** $\frac{343}{3}$. **5.5.37.** 0. **5.5.40.** а) $\mathbf{F}(1,1,1) = \mathbf{grad}\,(x+y+z) = \mathbf{rot}\,(z,x,y)$; б) $\mathbf{F}(x,y,z)$; в) $\mathbf{F}(z,x,y)$; г) $\mathbf{F}(x,z,0)$. **5.5.43.** Да. **5.5.44.** $U = \int\limits_{r_0}^{r} f(r)r\,dr$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 5.1.31 и получите уравнение $U' = r \cdot f(r)$. **5.5.45.** Обратное не верно, $\mathbf{c}(1,0,-1)$, $\mathbf{F}(z,x,y)$; $\mathbf{F}$— не потенциально, но $\mathbf{c} \times \mathbf{F} = x\mathbf{i} - (z+y)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ — соленоидально. **5.5.46.** Нет; этому условию не удовлетворяют поля $\mathbf{F}_1 = \mathbf{r}$ и $\mathbf{F}_2(1,1,1)$. **5.5.47.** Нет; этому условию не удовлетворяют поля $\mathbf{F}_1(1,1,1)$ и $\mathbf{F}_2(z,x,y)$. **5.5.49.** Нет; рассмотрите $\mathbf{F}_1(z,x,y)$, $\mathbf{F}_2(1,1,1)$.

Глава 6. Теория вероятностей

§ 1. Элементы комбинаторики

6.1.3. 3360. **6.1.4.** 372. **6.1.5.** 216. **6.1.6.** 84. **6.1.7.** 12. **6.1.8.** 34. **6.1.11.** 27 216 **6.1.12.** 60. **6.1.13.** 32 760. **6.1.16.** 5040; 210. **6.1.17.** 48; 72. **6.1.18.** а) 720; б) 60; в) 6; г) 3. **6.1.19.** 576. **6.1.23.** 35. **6.1.24.** 8. **6.1.25.** а) 21; б) 4620; в) 420; г) 792. **6.1.26.** 255. **6.1.27.** 25 225 200. **6.1.28.** 1260. **6.1.33.** 512. **6.1.34.** 729. **6.1.35.** 126; 6; 15. **6.1.36.** 56. **6.1.37.** 1260. **6.1.38.** 420; 210. **6.1.39.** 6561. **6.1.40.** а) 24; б) 60. **6.1.41.** 112 500. **6.1.42.** 380. **6.1.43.** 729. **6.1.44.** а) 48; б) 100; в) 60; г) 12. **6.1.45.** 172 800. **6.1.46.** 18. **6.1.47.** 2520. **6.1.48.** 1 036 800. **6.1.49.** 70 560. **6.1.50.** 125. **6.1.51.** 371. **6.1.52.** $\frac{36!}{(9!)^4}$. **6.1.53.** 96. **6.1.54.** 7920. **6.1.55.** 240. **6.1.56.** 572. **6.1.57.** 729. **6.1.58.** 11 880. **6.1.59.** а) 7; б) 462. **6.1.60.** 277 200. **6.1.61.** 96. **6.1.62.** 12 348. **6.1.63.** 62; 20. **6.1.64.** 570. **6.1.65.** 512. **6.1.66.** 30. **6.1.67.** 28 800. **6.1.68.** 190. **6.1.69.** 15 368. **6.1.70.** 19. **6.1.71.** 512. **6.1.72.** $\frac{15!}{2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3}$. **6.1.73.** 46 080. **6.1.74.** 126.

§ 2. Случайные события. Действия над событиями

6.2.3. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$; $A_1 = \{2,4,6\}$; $A_2 = \{4,5,6\}$; $A_3 = \{\varnothing\}$.
6.2.4. а) $\Omega = \{$П,Н,В$\}$; б) $\Omega = \{$ГГГ, ГГР, ГРГ, ГРР, РРР, РРГ, РГР, РГГ$\}$;

в) $\Omega = \{n:\ 0 \leqslant n \leqslant N,\ n \in \mathbb{Z}\}$, N — число студентов в группе.
6.2.5. Несовместимые: A_3 и A_4, A_5 и A_6; совместимые: A_1 и A_2, A_7 и A_8.
6.2.6. а) Да; **б)** нет; **в)** да; **г)** да. **6.2.9. а)** Желтая или белая роза; **б)** красная или желтая роза; **в)** $\varnothing$; **г)** белая роза; **д)** любой цветок; **е)** белая роза. **6.2.10. а)** $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$; **б)**

$$\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3+A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3+\overline{A}_1\cdot A_2\cdot A_3+A_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3+A_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3 =$$
$$= \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 = A_1 + A_2 + A_3 - A_1 A_2 A_3 = \overline{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3}.$$

6.2.11. а) $A + B = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 12\} = \Omega$; **б)** $A \cdot D = \{1, 3, 5\}$; **в)** $\overline{C - D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; **г)** $\overline{A \cdot B} - C = \{1, 2, 3\}$; **д)** $\overline{A \cdot \overline{D}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$; **е)** $\overline{A} \cdot \overline{B} = \varnothing$. **6.2.12. а)** $\overline{A}\overline{B}C$; **б)** ABC; **в)** $A + B + C$; **г)** $AB + AC + BC = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$; **д)** $\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$; **е)** $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; **ж)** $\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} = A + B + C - ABC$. **6.2.13. а)** D; **б)** C; **в)** $\varnothing$; **г)** $\varnothing$. **6.2.14. а)** $\{3, 4\}$; **б)** $\{2, 5\}$; **в)** $\{5\}$. **6.2.15.** $B = A_1 + A_2 + A_3$; $\overline{B} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$. **6.2.16.** $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$; $\overline{B} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$. **6.2.20.** $A \cdot B$.
6.2.21. $A + \overline{A} \cdot B + \overline{A + B} = \ldots = \Omega$; $A \cdot \overline{A}B = \varnothing$; $A \cdot (\overline{A + B}) = \varnothing$; $\overline{A} \cdot B \cdot (\overline{A + B}) = \varnothing$. **6.2.22. а)** $\varnothing$; **б)** $A + B$; **в)** Ω. **6.2.24.** A; B; $B + C$.
6.2.25. а) неверно; **б)** верно; **в)** неверно. **6.2.26.** нет. **6.2.27. а)** да, если $A = \varnothing$, $B = \Omega$; **б)** нет. **6.2.28. а)** $\Omega = \{$Г, РГ, РРГ, РРР$\}$; **б)** $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \text{Р},\ \text{Г}\}$. **6.2.29.** $\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4)\}$, где a_i принимает любое значение из множества $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$; пространство Ω содержит $\overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 1000$ элементов.
6.2.30. а) $\Omega = \{12, 13, 14, 23, 24, 34, 21, 31, 41, 32, 42, 43\}$; **б)** $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.
6.2.31. а) невыигрыш; **б)** все промахи; **в)** хотя бы один промах; **г)** более двух попаданий; **д)** не старше. **6.2.32. а)** Y; **б)** $X + Y + Z$. **6.2.35. а)** $\varnothing$; **б)** $A + B$; **в)** $AB + AC + BC$. **6.2.37. а)** $A = A_1 \cdot A_3 + A_2 \cdot A_4$; **б)** $A = A_1(A_2 + A_3) + (A_4 + A_5)$, $\overline{A} = (\overline{A}_1 + \overline{A}_2\overline{A}_3) \cdot \overline{A}_4 \cdot \overline{A}_5$.
6.2.39. $\Omega_1 = \{6,\ 7,\ \ldots,\ 10,\ \text{В},\ \text{Д},\ \text{К},\ \text{Т}\}$, $\Omega_2 = \{\text{П}, \text{Ч}, \text{Т}, \text{Б}\}$, $\Omega_3 = \{\overline{\text{К}},\ \text{К}\}$, $\Omega_2 = \{\omega_1, \omega_2\}\ldots$, где В — валет, Д — дама,...; П — пики, Ч — черви,...; К — картинка; ω_1 — красной масти, ω_2 — черной масти. **6.2.40.** 8 ($\varnothing \in \Omega$).
6.2.41. 8; $A = \{$ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ$\}$; $B = \{$ГГР, ГРГ, РГГ$\}$. **6.2.42. а)** Нет; **б)** да; **в)** нет. **6.2.43. а)** $A \subseteq B \cdot C$; **б)** $B \subseteq A$, $C \subseteq A$.
6.2.44. $B = A_1 \cdot (A_2 + A_3 + A_4) \cdot A_5$; $\overline{B} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + \overline{A}_5$.
6.2.45. $B = (A_1 + A_4) \cdot A_3 \cdot (A_2 + A_5)$. **6.2.47. а)** $X = A$; **б)** $X = \overline{C}$.
6.2.48. а) верно, если $A = \Omega$; **б)** верно, если $A = \varnothing$; **в)** $A = B$. **6.2.49.** $AB = \varnothing$.

§ 3. Вероятность случайного события

6.3.4. а) $\frac{7}{12}$; **б)** $\frac{1}{6}$; **в)** $\frac{5}{12}$; **г)** $\frac{11}{36}$. **6.3.5.** $1 \cdot 10^{-8}$. **6.3.6.** $\frac{1}{60}$. **6.3.7.** $\frac{2}{7}$.
6.3.8. а) $\frac{1}{4}$; **б)** $\frac{5}{28}$. **6.3.9.** $\frac{1}{2}$. **6.3.10.** $\approx 0{,}21 \cdot 10^{-2}$; $\approx 0{,}39$. **6.3.11. а)** $\approx 0{,}41$; **б)** $\approx 0{,}44$; **в)** $\approx 0{,}14$. **6.3.12. а)** $\frac{1}{64}$; **б)** $\frac{1}{512}$; **в)** $\frac{21}{32}$. **6.3.13.** $\frac{1}{66}$. **6.3.17.** $1 - \frac{l}{L}$.

6.3.18. $\approx 0{,}41$. **6.3.19.** $\frac{1}{9}$. **6.3.20.** $\frac{1}{6}$. **6.3.21.** $\approx 0{,}1$. **6.3.22.** 0,6. **6.3.23.** $\approx 0{,}37$.
6.3.30. 6. **6.3.31.** $\approx 0{,}33$. **6.3.32.** **а)** $\approx 0{,}0002$; **б)** $\approx 0{,}69$; **в)** $\approx 0{,}21$. **6.3.33.** $\frac{6}{7}$.
6.3.34. $\approx 0{,}21$. **6.3.35.** **а)** $\frac{1}{5}$; **б)** $\frac{4}{45}$. **6.3.36.** **а)** 0,125; **б)** 0,875.
6.3.37. **а)** $\frac{365!}{365^{30}\cdot 335!}$; **б)** $\frac{1}{365^{29}}$; **в)** $\frac{1}{365^{30}}$; **г)** 0; **д)** $\frac{1}{12^{30}}$; **е)** $\frac{30!}{365^{30}}$.
6.3.38. $\approx 0{,}94$. **6.3.39.** **а)** $\approx 0{,}13$; **б)** ≈ 0. **6.3.40.** $\frac{1}{3}$. **6.3.41.** $\frac{1}{n(n-1)}$.
6.3.42. $\frac{1}{45\,360}$. **6.3.43.** $\approx 0{,}077$. **6.3.44.** **а)** $\approx 0{,}02$; **б)** $\approx 0{,}35$. **6.3.45.** $\frac{9}{13}$.
6.3.46. $\frac{21}{190}$. **6.3.47.** **а)** $\frac{49}{1140}$; **б)** $\frac{26}{95}$. **6.3.48.** **а)** $\frac{1}{58\,905}$; $\frac{992}{19\,635}$; **б)** $\frac{1}{6561}$; $\frac{128}{2187}$.
6.3.49. 0,64. **6.3.50.** $\approx 0{,}6$. **6.3.51.** $\frac{7}{16}$. **6.3.52.** $\frac{15}{32}$. **6.3.53.** 0 при $r \geqslant \frac{a\sqrt{3}}{6}$;
$\left(1 - \frac{2\sqrt{3}\cdot r}{a}\right)^2$ при $0 < r < \frac{a\sqrt{3}}{6}$. **6.3.54.** $\frac{1}{4}$. **6.3.56.** $\approx 0{,}015$. **6.3.57.** $\frac{n-1}{2\cdot n}$.
6.3.58. $\frac{n\cdot n!}{2\cdot n^n}$. **6.3.59.** $\approx 0{,}0001$. **6.3.60.** $\approx 0{,}2$. **6.3.61.** $\frac{3}{4}$. **6.3.62.** $\frac{1}{6}$.

6.3.63. $\approx 0{,}03$. **6.3.64.** $\begin{cases} \frac{\pi a^2}{4}, \text{ при } 0 < a \leqslant 1; \\ \sqrt{a^2-1} + a^2\left(\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{a}\right), \text{ при } 1 < a \leqslant \sqrt{2}; \\ 1, \text{ при } a > \sqrt{2}. \end{cases}$

6.3.65. $\frac{139}{1152}$. **6.3.66.** $\frac{2l}{\pi L}$. **6.3.67.** 0,25. **6.3.68.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **6.3.69.** 0,6.

§ 4. Условная вероятность

6.4.2. $\frac{7}{16}$. **6.4.3.** $\frac{19}{27}$; 0. **6.4.4.** $\frac{1}{6}$. **6.4.5.** $\frac{2}{3}$. **6.4.8.** **а)** да; **б)** нет. **6.4.9.** нет.
6.4.10. *Указание*. Использовать формулы $A = AB + A\overline{B}$;
$\overline{A} = \overline{A}(B+\overline{B}) = \overline{A}B + \overline{A}\overline{B}$. **6.4.11.** $P(A_1) = P(A_2) = P(A_2 \mid A_1) = \frac{a}{a+b}$,
$P(A_1\cdot A_2) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2$, $P(A_1 \mid A_2) = \frac{a}{a+b}$, зависимы, совместимы.
6.4.14. $\approx 0{,}69$. **6.4.15.** $\frac{1}{110}$. **6.4.16.** $\approx 0{,}11$. **6.4.17.** 0,79. **6.4.21.** **а)** 0,48;
б) 0,32; **в)** 0,44; **г)** 0,92. **6.4.22.** $\frac{5}{11}$. **6.4.23.** $\frac{1}{3}$. **6.4.24.** 0,999. **6.4.25.** 0,127.
6.4.26. **а)** $\approx 0{,}33$; **б)** ≈ 1. **6.4.27.** **а)** 0,25; **б)** 0,9744. **6.4.28.** 0,5. **6.4.29.** $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}$.
6.4.30. $\frac{1}{3}$. **6.4.31.** да. **6.4.32.** 0; $\frac{2}{3}$. **6.4.33.** $\frac{1}{2}$. **6.4.34.** $\approx 0{,}98$. **6.4.35.** $\approx 0{,}47$.
6.4.36. $\approx 0{,}43$. **6.4.37.** **а)** 0,375; **б)** 0,46; **в)** 0,18. **6.4.38.** **а)** $\approx 0{,}77$; **б)** $\approx 0{,}99$.
6.4.39. **а)** $\approx 0{,}19$; **б)** $\approx 0{,}56$; **в)** $\approx 0{,}70$. **6.4.40.** 0,1924. **6.4.41.** **а)** $\approx 0{,}28$;
б) $\approx 0{,}011$. **6.4.42.** **а)** $\frac{2}{3}$; **б)** $\frac{6}{11}$. **6.4.43.** Без возвращения: **а)** $\frac{1}{5040}$, **б)** 0; с возвращением: **а)** 10^{-4}, **б)** 10^{-4}. **6.4.44.** 0,8. **6.4.45.** **а)** $\frac{1}{4}$; **б)** $\frac{1}{4}$; **в)** $\frac{1}{4}$.

6.4.46. а) $\approx 0{,}86$; б) $\approx 0{,}13$. **6.4.47.** $n \geqslant 9$. **6.4.48.** а) $\frac{1}{128}$; б) $\frac{127}{128}$.
6.4.49. а) $\frac{1}{180}$; б) $\frac{1}{360}$; в) $\frac{1}{360}$. **6.4.50.** Не найдет. **6.4.51.** 0,82. **6.4.52.** 0,625.
6.4.54. Не всегда. **6.4.55.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{3}$. **6.4.56.** а) да; б) да. **6.4.58.** а) $\frac{1}{945}$;
б) $\frac{8}{63}$. **6.4.59.** $\frac{5}{12}$. **6.4.60.** 0,5. **6.4.62.** Зависимы. **6.4.63.** $n \geqslant \frac{\lg(1-p_1)}{\lg(1-p)}$.
6.4.64. $\frac{3}{5}$. **6.4.65.** $1 - \big(p_5(1-q_1q_2)(1-q_3q_4) + q_5(p_1p_3 + p_2p_4 - p_1p_2p_3p_4)\big)$.

§ 5. Формула полной вероятности. Формула Бейеса

6.5.3. $\frac{29}{70}$. **6.5.4.** $P_1 = 0{,}8 = P_2$. **6.5.5.** $\frac{25}{48}$. **6.5.6.** 0,6448. **6.5.7.** 0,915. **6.5.10.** $\frac{1}{7}$.
6.5.11. $\frac{304}{305} \approx 0{,}997$; $\approx 0{,}9998$. **6.5.12.** 0,48. **6.5.13.** $\frac{5}{11}$. **6.5.14.** 0,108; $\frac{4}{9} \approx 0{,}44$.
6.5.15. а) $\frac{7}{13} \approx 0{,}54$; б) $\frac{6}{13} \approx 0{,}46$. **6.5.16.** $\frac{4}{7}$. **6.5.17.** $\approx 0{,}5$; $\approx 0{,}009$.
6.5.18. 0,3. **6.5.19.** $\frac{47}{12\,000}$. **6.5.20.** $\frac{b}{a}$. **6.5.21.** 0,8402. **6.5.22.** $\frac{31}{84}$. **6.5.23.** 0,334.
6.5.24. 0,16. **6.5.25.** 0,946. **6.5.26.** $0{,}7p_1 + 0{,}3p_2$. **6.5.27.** 0,0445.
6.5.28. $\frac{8}{15} \approx 0{,}53$. **6.5.29.** $\approx 0{,}59$. **6.5.30.** $\approx 0{,}230$. **6.5.31.** Первая. **6.5.32.** $\frac{7}{18}$.
6.5.33. а) 0,41; б) 0,619. **6.5.34.** $\frac{5}{36}$. **6.5.35.** 0,043. **6.5.36.** $\frac{49}{60} \approx 0{,}817$.
6.5.37. а) $\frac{4}{495}$; б) $\frac{18}{55}$. **6.5.38.** $\approx 0{,}07$. **6.5.39.** $\left(\frac{c_1}{1+c_1} + \frac{c_2}{1+c_2} + \frac{c_3}{1+c_3}\right) \cdot \frac{1}{3}$.

§ 6. Схема испытаний Бернулли

6.6.4. 0,027; 0,189; 0,441; 0,343. **6.6.5.** $\approx 0{,}055$. **6.6.6.** 7. **6.6.7.** $\approx 0{,}528$.
6.6.8. $\approx 0{,}64$. **6.6.9.** $\frac{25}{32}$. **6.6.10.** а) $\approx 0{,}324$; б) 4. **6.6.11.** а) $\approx 0{,}007$; б) 1;
в) $\approx 0{,}41$. **6.6.12.** а) $\approx 0{,}383$; б) $\approx 0{,}853$. **6.6.13.** а) одну из двух; б) не менее четырех из восьми. **6.6.14.** 29. **6.6.15.** $\approx 0{,}20$. **6.6.16.** а) $\frac{8}{3^{11}}$; б) $\approx 0{,}181$.
6.6.17. $\approx 0{,}121$. **6.6.18.** а) $\approx 0{,}430$; б) $\approx 0{,}149$. **6.6.19.** а) $\approx 0{,}32$; б) $\approx 0{,}394$;
в) $\approx 0{,}168$. **6.6.20.** $\approx 0{,}902$. **6.6.21.** $\approx 0{,}038$. **6.6.22.** $\approx 0{,}08$. **6.6.23.** $\approx 0{,}35$.
6.6.24. $29 \leqslant n \leqslant 35$. **6.6.25.** а) $\approx 0{,}35$; б) $\approx 0{,}05$.
6.6.26. $(n-m+1) \cdot p^m \cdot q^{n-m}$. **6.6.27.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{8}$. **6.6.28.** $\frac{1}{2^{2n-m}} \cdot C_{2n-m}^{n}$.
6.6.29. $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$. **6.6.30.** 0,135. **6.6.31.** $\approx 0{,}001$.

§ 7. Приближенные формулы в схеме Бернулли

6.7.3. а) $\approx 0{,}168$; б) $\approx 0{,}423$ ($e^{-3} \approx 0{,}0498$). **6.7.4.** а) $\approx 0{,}162$; б) $\approx 0{,}998$ ($e^{-6} \approx 0{,}0025$). **6.7.5.** а) $\approx 0{,}09$; б) $\approx 0{,}270$; в) $e^{-2} \approx 0{,}135$. **6.7.6.** а) $\approx 0{,}784$; б) $\approx 0{,}342$ ($e^{-4} \approx 0{,}0183$). **6.7.9.** 10 из 80. **6.7.10.** $\approx 0{,}016$. **6.7.11.** $\approx 0{,}023$.
6.7.12. $\approx 0{,}056$. **6.7.15.** а) $\approx 0{,}002$; б) $\approx 0{,}5$. **6.7.16.** $\approx 0{,}91$. **6.7.17.** 133.

6.7.18. $\approx 0{,}993$. **6.7.19.** $\approx 0{,}865$. **6.7.20.** $\approx 0{,}762$. **6.7.21. а)** $\approx 3{,}8 \cdot 10^{-5}$; **б)** $\approx 0{,}865$. **6.7.22.** $\approx 0{,}012$ ($e^{-3} \approx 0{,}0498$). **6.7.23.** $\approx 0{,}95$. **6.7.24. а)** $\approx 0{,}097$; **б)** $\approx 0{,}76$. **6.7.25.** $\approx 0{,}001$. **6.7.26.** $\approx 0{,}944$. **6.7.27. а)** $\approx 0{,}025$; **б)** $\approx 0{,}206$. **6.7.28. а)** $\approx 0{,}019$; **б)** ≈ 1; **в)** $\approx 0{,}938$. **6.7.29.** $15 \leqslant m \leqslant 45$. **6.7.30.** $\approx 0{,}0029$; $\approx 0{,}0031$; $\approx 0{,}00012$. **6.7.31.** $\approx 0{,}503$. **6.7.32.** да. **6.7.33.** $n \geqslant 29$. **6.7.34.** 82. **6.7.35.** 392. **6.7.36. а)** $207 \leqslant m \leqslant 273$; **б)** 753.

§ 8. Дискретные случайные величины

6.8.3.

z_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

6.8.4.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,04	0,26	0,46	0,24

6.8.5.

x_i	1	2	3	...
p_i	0,98	$0{,}02 \cdot 0{,}98$	$0{,}02^2 \cdot 0{,}98$	...

; $1{,}57 \cdot 10^{-7}$;

x_i	1	2	3
p_i	0,98	0,0196	0,0004

; 0. **6.8.6.**

x_i	0	1	2
p_i	0,09	0,42	0,49

6.8.9.

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$

6.8.10. а)

x_i	0	1
p_i	0,3	0,7

; 0,7 и 0;

б)

x_i	1	3	6	8
p_i	0,2	0,15	0,45	0,2

; 0,2 и 0,8.

6.8.11. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1{,}1, \\ 0{,}1, & 1{,}1 < x \leqslant 1{,}4, \\ 0{,}3, & 1{,}4 < x \leqslant 1{,}7, \\ 0{,}6, & 1{,}7 < x \leqslant 2{,}0, \\ 0{,}9, & 2{,}0 < x \leqslant 2{,}3, \\ 1, & 2{,}3 < x; \end{cases}$ 0,7 и 0,9.

6.8.12. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 0{,}25, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}75, & 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x. \end{cases}$ **6.8.15. а)**

y_i	0	1	3	5
p_i	0,25	0,50	0,20	0,05

6.8.16.

y_i	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

; $F(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{1}{8}, & -\frac{\sqrt{2}}{2} < y \leqslant 0, \\ \frac{3}{8}, & 0 < y \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{3}{4}, & \frac{\sqrt{2}}{2} < y \leqslant 1, \\ 1, & 1 < y. \end{cases}$

6.8.17.

z_i	2	3	4
p_i	0,12	0,46	0,42

;

w_i	0	2	3
p_i	0,30	0,28	0,42

;

$P\{(Z<4)\mid(Z>2)\}=\dfrac{23}{44}$. **6.8.18. а)** $C=0{,}05$; **б)** 0,2. **6.8.19. б)**

x_i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

6.8.20.

x_i	1	2	3	4
p_i	0,4	0,24	0,144	$0{,}6^3=0{,}216$

6.8.21.

x_i	5	4	3	2	1	0
p_i	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$

6.8.22.

x_i	1	2	...	7
p_i	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	...	$\frac{1}{7}$

6.8.23.

x_i	0	1	2	...	1500
p_i	e^{-3}	$\frac{3\cdot e^{-3}}{1!}$	$\frac{3^2\cdot e^{-3}}{2!}$	...	$\frac{3^{1500}\cdot e^{-3}}{1500!}$

; $\approx 0{,}353$.

6.8.24.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,491	0,421	0,084	0,004

6.8.25. $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 0{,}04, & 0<x\leqslant 1,\\ 0{,}30, & 1<x\leqslant 2,\\ 0{,}76, & 2<x\leqslant 3,\\ 1, & 3<x.\end{cases}$

6.8.26. $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 0{,}09, & 0<x\leqslant 1,\\ 0{,}51, & 1<x\leqslant 2,\\ 1, & 2<x.\end{cases}$ **6.8.27.** $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{7}, & 0<x\leqslant 1,\\ \frac{2}{7}, & 1<x\leqslant 2,\\ \frac{3}{7}, & 2<x\leqslant 3,\\ & \dots\\ 1, & 7<x.\end{cases}$

6.8.28.

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

; $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 0{,}25, & 0<x\leqslant 1,\\ 0{,}75, & 1<x\leqslant 2,\\ 1, & 2<x.\end{cases}$

6.8.29. а)

z_i	2	4	6	8	12
p_i	0,18	0,24	0,30	0,08	0,20

;

б)

x_i+y_i	3	4	5	6	7
p_i	0,18	0,12	0,42	0,08	0,20

; $P\{X+Y>5\}=0{,}28$;

в) $P\{(X+Y>5)\mid(X=2)\}=0{,}4$.

6.8.30.

w_i	-4	-3	-2	-1	0
p_i	0,08	0,22	0,34	0,24	0,12

; 0,7.

6.8.31. $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \dfrac{1}{3}, & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < y \leqslant 0, \\ \dfrac{2}{3}, & 0 < y \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ 1, & \dfrac{\sqrt{3}}{2} < y. \end{cases}$

6.8.32.

x_i	2	3	4	5	...	N	...
p_i	p^2	$2p^2q$	$3p^2q^2$	$4p^2q^3$	...	$(N-1)p^2q^{N-2}$	...

$q^N + Npq^{N-1}$. **6.8.33.**

z_i	1	2	3
p_i	0,3	0,5	0,2

6.8.34. Все, кроме b_n.

6.8.35. а) $c = 2$; **б)** $\frac{1}{21}$. **6.8.36. а)** Нет; **б)** нет; **в)** нет; **г)** да; **д)** да; **е)** нет.

6.8.37. Нет. **6.8.38.** Нет. **6.8.39.**

y_i	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
p_i	$\frac{1}{2^{4k}}$	$\frac{1}{2^{2k-1}}$	$\frac{1}{2^{4k-2}}$

, где $k = 1, 2, 3, \ldots$

§ 9. Непрерывные случайные величины

6.9.2. $k = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}; \frac{5}{6}$. **6.9.3. а)** $a = \frac{1}{2}, c = 1$;

б) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\sin x, & x \in [-\pi, 0]; \\ 0, & \text{в остальных случаях}; \end{cases}$ **в)** $p_1 = \frac{1}{4}$; $p_2 = 0$.

6.9.4. $A = 4, B = 16; P(C) \approx 0{,}118$. **6.9.8.** $b = \frac{50}{841}$;

$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{25x^2}{841}, & 0 \leqslant x < 5{,}8, \\ 1, & 5{,}8 \leqslant x; \end{cases}$ **а)** $\approx 0{,}324$; **б)** $\approx 0{,}676$. **6.9.9.** $a = \frac{2}{\pi}$;

$F(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} e^x$, $x \in \mathbb{R}$. **6.9.10. а)** $\frac{1}{\pi}$;

б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2}, & -2 < x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2; \end{cases}$ **в)** $p = \frac{1}{3}$. **6.9.11.** Вероятнее в

(1,6; 1,8). **6.9.12.** $A = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \\ \dfrac{-x^2}{2} + \dfrac{1}{3}, & -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \leqslant x < 0, \\ x^2 + \dfrac{1}{3}, & 0 \leqslant x < \sqrt{\dfrac{2}{3}}, \\ 1, & \sqrt{\dfrac{2}{3}} \leqslant x; \end{cases}$ $p = 1$.

6.9.13. $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1,\\ 0{,}5x+0{,}5, & -1<x\leqslant 0,\\ -\dfrac{x-3}{6}, & 0<x\leqslant 3,\\ 0, & 3<x.\end{cases}$

6.9.14. **а)** $f(x)=\begin{cases}3^x\ln 3, & \text{при } x\leqslant 0,\\ 0, & \text{при } x>0;\end{cases}$ **б)** $\frac{2}{3}$.

6.9.15. $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 0{,}125x, & 0<x\leqslant 4,\\ 0{,}5, & 4<x\leqslant 5,\\ 0{,}5x-2, & 5<x\leqslant 6,\\ 1, & 6<x.\end{cases}$ **6.9.16.** **а)** $a=1$, $b=0$;

б) $f(x)=\begin{cases}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right), & x\in\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right],\\ 0, & x\notin\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right];\end{cases}$ **в)** $p=0{,}5$. **6.9.17.** **а)** 1; **в)** $\frac{9}{16}$.

6.9.18. **а)** $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{\pi}$; **б)** $f(x)=\dfrac{2}{\pi(4+x^2)}$, $x\in\mathbb{R}$. **6.9.19.** $\frac{1}{e}$. **6.9.20.** $A=1$,

$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-x}(x+1), & x\geqslant 0.\end{cases}$ **6.9.21.** $A=\frac{3}{40}$;

$F(x)=\begin{cases}0, & x<-4,\\ \dfrac{3}{5}-\dfrac{3x^2}{80}, & -4\leqslant x<0,\\ \dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{20}\sqrt{x^3}, & 0\leqslant x<4,\\ 1, & 4\leqslant x;\end{cases}$ $p=\frac{7}{16}$.

6.9.22. $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -\dfrac{2}{\sqrt{5}},\\ \dfrac{1}{5}-\dfrac{x^2}{4}, & -\dfrac{2}{\sqrt{5}}<x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{5}+\dfrac{x^2}{4}, & 0<x\leqslant\dfrac{4}{\sqrt{5}},\\ 1, & \dfrac{4}{\sqrt{5}}<x;\end{cases}$ $p=\frac{69}{80}$. **6.9.23.** Нет. **6.9.24.** **а)** Да;

б) нет; **в)** нет; **г)** нет; **д)** да. **6.9.25.** **а)** $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$;

б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right), & x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3}{4}\pi\right],\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$ **6.9.26.** **а)** $a=-1$, $b=4$,

$c=-3$; **б)** $P(A)=0$, $P(B)=1$, $P(E)=\frac{3}{4}$. **6.9.27.** $A=\frac{\lambda}{2}$,

$F(x)=\begin{cases}0{,}5e^{\lambda x}, & x\leqslant 0,\\ 1-0{,}5e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$ **6.9.28.** $p\approx 0{,}816$;

$f(x)=\begin{cases}0, & x<\sqrt{3}, x>2,\\ \dfrac{3x^5-2x^3}{15}, & \sqrt{3}\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

6.9.29. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t+2)^2}{18}}\, dt = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x+2}{3}\right)$, где

$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$. **6.9.30.** $A = 1$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ \frac{(x+1)^2}{2}, & -1 < x \leqslant 0, \\ 1 - \frac{(x-1)^2}{2}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x; \end{cases}$

$p = \frac{3}{4}$.

§ 10. Числовые характеристики случайных величин

6.10.3. $\frac{7}{24}$; $\frac{67}{24}$; $\frac{575}{576}$; $\frac{5\sqrt{23}}{24}$; $\frac{3}{8}$. **6.10.4.** 1,3; 2,5; 0,81; 0,9. **6.10.5.** 1,8; $0{,}6\sqrt{2}$. **6.10.6.** 7. **6.10.9.** 77. **6.10.10.** a; $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. **6.10.11.** 0,5. **6.10.12.** $P\{X = 3\} = 0{,}3$; $P\{X = 2\} = 0{,}1$. **6.10.13.** $\alpha_1 = 3$; $\alpha_2 = 10$; $\alpha_3 = 35{,}4$; $\alpha_4 = 130$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1$; $\mu_3 = -0{,}6$; $\mu_4 = 2{,}2$. **6.10.15.** $\frac{8}{3}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **6.10.16.** $\frac{1}{\lambda}$; $\frac{1}{\lambda^2}$; $\frac{1}{\lambda}$. **6.10.17.** $\frac{3}{4}$; 1. **6.10.18.** 0; 50; $5\sqrt{2}$. **6.10.19.** $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi^2}{4} - 2$. **6.10.21.** 0; 0; $x_{0,25} = -a$; $x_{0,5} = 0$; $x_{0,75} = a$. **6.10.22.** $M(X) = \frac{195}{76} \approx 2{,}57$; $M_0(X) = 3$; $M_e(X) = \sqrt[3]{\frac{35}{2}} \approx 2{,}60$.

6.10.23. 2; $\sqrt[3]{4}$; $\frac{3}{2}$; $\sqrt[3]{2}$. **6.10.24.**

x_i	-1	5
p_i	0,4	0,6

6.10.25. 2,5; 1,25.

6.10.26. $1\frac{1}{49}$; $1\frac{51}{2500}$. **6.10.27.** 0,75; 0,4375; $\approx 0{,}66$. **6.10.28.** а) 0,7 и 0,21; б) 6,0475 и $\approx 2{,}46$. **6.10.29.** 1,73; 3,109; 0,1161; $\approx 1{,}353$. **6.10.30.** $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{\sqrt{2}+2}{8}$.

6.10.31. 3,3; 1,82; 0,45; 1,5876. **6.10.32.** 0,32. **6.10.33.**

x_i	-3	-1	1	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

; $M(X) = 0$; $D(X) = 3$. **6.10.34.** $A = -0{,}6$; $E = -0{,}8$. **6.10.35.** $\alpha_1 = M(X) = 3$, $\alpha_2 = M(X^2) = \frac{19}{2}$, $\alpha_3 = M(X^3) = \frac{317}{10}$; $D(X) = \frac{1}{2}$. **6.10.36.** $\gamma = 2$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$.

6.10.37. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}$. **6.10.38.** $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **6.10.39.** а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{1}{18}$; в) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

6.10.40. а) $-\frac{1}{\ln 3}$; б) $\frac{1}{\ln^2 3}$; в) 0. **6.10.41.** а) 2; б) 2; в) $\sqrt{2}$. **6.10.42.** а) 0; б) 0; б) 0; г) 0. **6.10.43.** 0; 0. **6.10.44.** 5; $\frac{25}{3}$; 5; 2,5; 5; 7,5. **6.10.45.** 4. **6.10.46.** 0,601; $\approx 0{,}432$; 0; $\approx 0{,}724$. **6.10.47.** 6,16; 11,3344; 292,69; $-0{,}722$. **6.10.48.** $\frac{2}{p}$.

6.10.49. np; npq. **6.10.53.** $\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$; $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$; $\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4$. **6.10.54.** $M(X) = a$; $D(X) = 2\sigma^2$. **6.10.55.** $\frac{2}{\pi}$; 0;

$\frac{1}{4}$. **6.10.56.** $M(X) \approx 1{,}88$; $\alpha_2 \approx 3{,}55$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}02$. **6.10.57.** $A = \frac{10}{3}$; $M(X) = \frac{35}{9}$; $D(X) = \frac{275}{81} \approx 3{,}40$. **6.10.58.** Не существует.

§ 11. Важнейшие распределения случайных величин

6.11.2. 2; 1,8. **6.11.3.** 0,63. **6.11.4.** 200. **6.11.6.** 0,324; 0,569. **6.11.7.** 2; $\approx 0{,}323$. **6.11.8.** 4; $\approx 0{,}433$; $e^{-4} \approx 0{,}0183$. **6.11.10.** а) $M(X) = 3{,}439$; б) $M(X) = 10$. **6.11.11.** 2,8525; $\approx 0{,}225$. **6.11.12.** $\approx 0{,}08$. **6.11.15.** 0,4.

6.11.16. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \dfrac{x+1}{6}, & -1 \leqslant x \leqslant 5, \\ 1, & 5 < x. \end{cases}$ **6.11.17.** а) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in [4,7], \\ 0, & x \notin [4,7]; \end{cases}$

б) 5,5; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 0,27. **6.11.18.** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x \in [-2,6], \\ 0, & x \notin [-2,6]; \end{cases}$ $M(X) = 2$, $D(X) = \frac{16}{3}$.

6.11.20. $F(t) = 1 - e^{-0{,}2t}$; $M(T) = 5$; $D(T) = 25$; $\approx 0{,}451$.

6.11.21. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-0{,}4x}, & x \geqslant 0; \end{cases}$ $\sigma(X) = \frac{5}{2}$; $p \approx 0{,}77$. **6.11.22.** $333\frac{1}{3}$; $\approx 0{,}30$. **6.11.23.** $\approx 0{,}95$. **6.11.26.** $\approx 0{,}067$. **6.11.27.** $C \approx 0{,}4578$; $M(X) = -\frac{1}{3}$; $D(X) = \frac{1}{4}$; $F(x) = 0{,}5 + \Phi_0\left(2x + \frac{2}{3}\right)$; $p = 0{,}4772$. **6.11.28.** 64.

6.11.29. $F(x) = 0{,}5 + \Phi_0\left(\frac{x - 175}{10}\right)$; $p = 0{,}029$. **6.11.30.** 4,2; 1,26. **6.11.31.** 8.

6.11.32. 288; $\frac{2}{3}$. **6.11.33.** 2; $\approx 1{,}37$. **6.11.34.** 40; 8. **6.11.35.** 2,1; $\approx 0{,}79$.

6.11.36. 4,3. **6.11.37.** 2; $\approx 1{,}41$. **6.11.38.** 2. **6.11.39.** а) 2; 2; б) $\approx 3{,}8 \cdot 10^{-5}$. **6.11.40.** а) $\approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}$; б) $\approx 0{,}017$. **6.11.41.** 0,0384. **6.11.42.** 3,3616.

6.11.43. $\frac{29}{52}$. **6.11.44.** а) 10, 90, $\approx 9{,}49$; б) 0,271.

6.11.45. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30} & \text{при} \quad x \in [0;30], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0;30]; \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{x}{30}, & 0 < x \leqslant 30, \\ 1, & 30 < x; \end{cases}$

$M(X) = 15$; $D(X) = 75$; $p = 0{,}4$. **6.11.46.** $M(XY) = 1$; $D(XY) = \frac{4}{9}$. **6.11.47.** a; $\frac{16}{27}$. **6.11.48.** а) 0,4; б) 0,4; в) 0,05. **6.11.49.** $\lambda = 4$; $M(X) = 0{,}25$; $D(X) = 0{,}0625$; $p \approx 0{,}632$. **6.11.50.** $M(X) = 0{,}2$; $p \approx 0{,}98$.

6.11.51. $p = 0{,}1084 \approx 0{,}19$ ($\lambda = 0{,}0029$). **6.11.52.** а) $\approx 0{,}4065$; б) $\approx 0{,}4637$; в) $\approx 0{,}5935$. **6.11.53.** а) 196 и 14; б) $\approx 0{,}51$. **6.11.54.** 31,5. **6.11.55.** $\approx 0{,}805$. **6.11.56.** $\approx 0{,}954$. **6.11.57.** $M(X) \approx 12$; $D(X) \approx 16$. **6.11.58.** а) $\approx 0{,}159$; б) $\approx 0{,}136$; в) $\approx 0{,}683$. **6.11.59.** $\approx 19{,}7\%$. **6.11.60.** $7{,}2 \cdot 10^{-5}$.

6.11.61. $A = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$, $E = \frac{1 - 6pq}{npq}$. **6.11.62.** $M\left(\frac{n_A}{n}\right) = p$; $D\left(\frac{n_A}{n}\right) = \frac{pq}{n}$.

6.11.66. $M(X) = 5$. **6.11.68.** $\mu_4 = \frac{(b-a)^4}{80}$; $E(X) = -1{,}2$. **6.11.69.** а) $\mu_3 = \frac{2}{\lambda^3}$;

$\mu_4 = \dfrac{9}{\lambda^4}$; **б)** $A(X) = 2$; $E(X) = 6$. **6.11.71.** 4. **6.11.72.** $\mu_2 = \sigma^2$; $\mu_3 = 0$; $\mu_4 = 3\sigma^4$. **6.11.73.** a, a. **6.11.74.** $F(x) = 0{,}5 + \Phi_0\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$.
6.11.75. а) $\sigma \approx 0{,}4292$; **б)** 1,1842. **6.11.76.** $p = 0{,}6826$. **6.11.77.** $a = 15{,}39$, $\sigma = 3{,}26$. **6.11.78.** -7.

§ 12. Системы случайных величин

6.12.2. а) 0,2; **б)**

x_i	1	2	3
p_i	0,35	0,29	0,36

;

y_i	1	2	3	4
p_i	0,25	0,25	0,20	0,30

;

в) 0,25; 0,29. **6.12.3. а)** $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 0{,}3 & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$

б) $F(x, y) =$

при	$y \leqslant 0$	$0 < y \leqslant 1$	$y > 1$
$x \leqslant 0$	0	0	0
$0 < x \leqslant 1$	0	0,12	0,30
$1 < x$	0	0,40	1

в) 0,72.

6.12.4.

$X\backslash Y$	0	1
0	0	0,25
1	0,75	0

;

$F(x, y) =$

при	$y \leqslant 0$	$0 < y \leqslant 1$	$1 < y$
$x \leqslant 0$	0	0	0
$0 < x \leqslant 1$	0	0	0,25
$1 < x$	0	0,75	1

6.12.6.

x_i	1	2	2,5
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

;

y_i	1	1,5	2
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

; независимы; $\frac{5}{8}$. **6.12.7.** Зависимы.

6.12.8.

$X\backslash Y$	8	9	10
8	0,02	0,03	0,05
9	0,06	0,09	0,15
10	0,12	0,18	0,30

;

$F(x, y) =$

$X\backslash Y$	$y \leqslant 8$	$8 < y \leqslant 9$	$9 < y \leqslant 10$	$10 < y$
$x \leqslant 8$	0	0	0	0
$8 < x \leqslant 9$	0	0,02	0,05	0,10
$9 < x \leqslant 10$	0	0,08	0,20	0,40
$10 < x$	0	0,20	0,50	1

; 0,08.

6.12.10. а)

y_i	-2	-1	0	1
$P_{X=-1}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$

; **б)**

x_i	-1	0	1
$P_{Y=-2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0

;

в)

x_i	-1	0	1
$P_{X=0}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

6.12.11. а)

y_i	10	20	30
$P_{X=100}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$

;

б)

x_i	50	100
$P_{Y=20}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$

; они зависимы. **6.12.13.** 0,7; 0,6; 0,21; 0,24; $\approx 0{,}46$; $\approx 0{,}49$. **6.12.14.** $1\frac{3}{8}$; $\frac{11}{64}$; $\frac{\sqrt{11}}{8}$. **6.12.16.** **а)** 0,52; **б)** $\frac{19}{35}$; **в)** 0,58; **г)** 0,9. **6.12.17.** $-\frac{3}{7}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{3}{4}$. **6.12.19.** 0; 0. **6.12.20.** $-\frac{1}{4}$; $-\frac{9}{16}$; $\frac{9}{16}$; $\frac{255}{256}$; $\frac{7}{64}$; $\frac{7\cdot\sqrt{205}}{765} \approx 0{,}15$. **6.12.23.** **а)** $c = 24$; **б)** $f_1(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$,

$f_2(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases}$; **в)** $F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 3x^4 - 8x^3 + 6x^2, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x; \end{cases}$

$F_2(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ 3y^4 - 8y^3 + 6y^2, & 0 < y \leqslant 1, \\ 1, & 1 < y; \end{cases}$ **г)** $\frac{5}{16}$ **6.12.24.** **а)** $c = \frac{1}{\pi^2}$;

б) $F(x,y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{3}x\right)\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$; **в)** $f_1(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{3}\left(\frac{1}{3} + x^2\right)}$,

$f_2(y) = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi(3+y^2)}$; **г)** $\frac{5}{8}$. **6.12.26.** Зависимы.

6.12.28. **а)** $f(x,y) = \begin{cases} 12e^{-(3x+4y)}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & x < 0,\ y < 0; \end{cases}$

б) $F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & x < 0,\ y < 0. \end{cases}$

6.12.30. $f(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{2y}{(1-x)^2}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y<1, \\ 0, & \text{в остальных случаях}; \end{cases}$

$f(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(1-y)^2}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y<1, \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$

6.12.31. $f_1(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leqslant x < 0, \\ 1-x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x < -1,\ x > 1; \end{cases}$ $f_2(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & y < 0,\ y > 1; \end{cases}$

$f(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, & -1 < x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{1-x}, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \leqslant -1,\ x \geqslant 1; \end{cases}$ $f(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2y}, & 0 < y \leqslant 1, \\ 0, & 0 \geqslant y,\ y > 1; \end{cases}$ X и Y зависимы. **6.12.34.** **а)** 0; $\frac{2}{3}$; **б)** $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{18}$; **в)** 0. **6.12.35.** $c = 24$; **а)** $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{5}$; **б)** $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{25}$; **в)** $-\frac{2}{75}$; **г)** $-\frac{2}{3}$. **6.12.36.** **а)** $r_{XY} = -0{,}2$; **б)** $f_1(x) = \frac{1}{2}$; $f_2(y) = \frac{1}{2}$; $f(x \mid y) = \frac{1}{2}(1 - xy^3) = f(y \mid x)$; **в)** $M(Y \mid X = x) = -\frac{1}{5}x$.

6.12.37. а) $\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & x < 0,\ y < 0; \end{cases}$ б) $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$; в) $M(X) = \dfrac{1}{\lambda_1}$, $M(Y) = \dfrac{1}{\lambda_2}$. **6.12.38.** а)

$X\backslash Y$	0	1
0	0,02	0,18
1	0,08	0,72

; б)

x_i	0	1
p_i	0,2	0,8

;

y_i	0	1
p_i	0,1	0,9

; $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 0{,}2, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x; \end{cases}$ $F(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ 0{,}1, & 0 < y \leqslant 1, \\ 1, & 1 < y. \end{cases}$

в) $F(x, y) =$

при	$y \leqslant 0$	$0 < y \leqslant 1$	$1 < y$
$x \leqslant 0$	0	0	0
$0 < x \leqslant 1$	0	0,02	0,20
$1 < x$	0	0,10	1

6.12.39.

$X\backslash Y$	−4	1	8
−2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

;

y_i	−4	1	8
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$

; $\frac{5}{12}$.

6.12.40.

$X\backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

; $\frac{1}{2}$. **6.12.41.** Независимы; $\frac{2}{3}$.

6.12.42. а)

y_i	1	1,5	2
$P_{X=2,5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

; б) $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{12}$.

6.12.43. а)

y_i	−1	0	1
p_i	0,2	0,5	0,3

; б)

y_i	−1	0	1
$P_{X=0}$	0,25	0,50	0,25

; в) 0,75.

6.12.44.

$X\backslash Y$	0	1
0	$\frac{28}{45}$	$\frac{8}{45}$
1	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

; а) $\frac{8}{45}$; б) $\frac{8}{9}$, $\frac{1}{9}$. **6.12.45.** $\frac{13}{6}$; $\frac{11}{36}$; $\frac{\sqrt{11}}{6}$.

6.12.46. $M(X) = 70$, $M(Y) = 21{,}5$; $D(X) = 600$, $D(Y) = 62{,}75$; $\sigma(X) \approx 24{,}5$, $\sigma(Y) \approx 7{,}92$. **6.12.47.** 0. **6.12.48.** $K_{XY} = 45$; $r_{XY} \approx 0{,}23$. **6.12.49.** $D = 0{,}02$; зависимы; $M(X) = 1{,}95$; $M(Y) = 5{,}4$; $D(X) = 0{,}5675$; $D(Y) = 0{,}84$; $\sigma(X) \approx 0{,}75$; $\sigma(Y) \approx 0{,}92$; $K_{XY} = 0{,}08$; $r_{XY} \approx 0{,}12$. **6.12.50.** а) $c = \frac{1}{2}$; б) $f_1(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$, $f_2(y) = \frac{1}{2}(\sin y + \cos y)$; в) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}32$.

6.12.51. а) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{12\pi}, & \text{внутри эллипса}, \\ 0, & \text{вне эллипса}; \end{cases}$

б) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8\pi} \cdot \sqrt{16 - x^2}, & x \in [-4, 4], \\ 0, & x \notin [-4, 4]; \end{cases}$ $f_2(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{9\pi}\sqrt{9 - y^2}, & y \in [-3, 3], \\ 0, & y \notin [-3, 3]; \end{cases}$

в) $P(A) = \frac{1}{6\pi}$. **6.12.52.** а) $c = 1$;

б) $F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-y})(1-e^{-x}), & x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, y < 0; \end{cases}$ в) $P(A) = 0$; $P(B) \approx 0{,}2$.

6.12.53. а) $c = \frac{2}{3}$; б) $f_1(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{3}, & -2 < x \leqslant 0, \\ \frac{2-2x}{3}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x \leqslant -2, x > 1; \end{cases}$

в) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2, \\ \frac{(x+2)^2}{6}, & -2 < x \leqslant 0, \\ 1 - \frac{1}{3}(1-x)^2, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x; \end{cases}$ г) $\frac{1}{3}$.

6.12.54. а) $f_1(x) = f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$,

$f_2(y) = f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases}$; б) $\frac{1}{3}$. Нет. **6.12.55.** $c = \frac{34}{3}$;

$f_1(x) = \frac{34}{15}x(1-x^{15})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $f_2(y) = \frac{17}{3}y^4\sqrt[3]{y^2}$, $y \in [-1,0]$;

$f(x \mid y) = \begin{cases} 2xy^{-\frac{2}{3}} & \text{в } D, \\ 0, & \text{вне } D. \end{cases}$ **6.12.56.** $f(x \mid y) = \frac{3}{8\sqrt{9-y^2}}$, $y \in (-3;3)$;

$f(y \mid x) = \frac{2}{3\sqrt{16-x^2}}$, $x \in (-4;4)$. **6.12.57.** $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$; $f_2(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-4y^2}$;

$f(y \mid x) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}-4xy-8y^2}$; $f(x \mid y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2-4xy-4y^2}$.

6.12.58. а) $M(X) = M(Y) = \frac{\pi}{4}$; б) $D(X) = D(Y) = \frac{1}{16}(\pi^2 + 8\pi - 32)$;

в) $K_{XY} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{16} \approx -0{,}05$; г) $\frac{8\pi - 16 - \pi^2}{\pi^2 + 8\pi - 32} \approx -0{,}25$. **6.12.59.** а) $r_{XY} = 0$

$(M(X) = 0,\ M(Y) = -\frac{3}{7})$;

б) $f_1(x) = \begin{cases} 30x^2(x+1)^3, & x \in (-1;0), \\ -30x^2(x-1)^3, & x \in (0;1), \\ 0, & \text{в остальных случаях}; \end{cases}$

в) $f(y \mid x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{(x+1)^3}, & -1 < x < 0,\ -1 < y < 0; \\ -\frac{3y^2}{(x-1)^3}, & 0 < x < 1,\ -1 < y < 0, \\ 0, & \text{вне области } D. \end{cases}$

6.12.60. $F(x,y)$:

при	$y \leqslant -2$	$-2 < y \leqslant 0$	$0 < y \leqslant 4$	$4 < y$
$x \leqslant 10$	0	0	0	0
$0 < x \leqslant 10$	0	0,15	0,20	0,20
$10 < x \leqslant 20$	0	0,25	0,50	0,60
$20 < x$	0	0,30	0,65	1

;

y_i	-2	0	4
$p_{X=20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$

; величины X и Y зависимы.

6.12.61.

$X\backslash Y$	0	1	2
0	0	0	$\frac{3}{28}$
1	0	$\frac{15}{28}$	0
2	$\frac{5}{14}$	0	0

; **а)** 0; **б)** $D(X) = D(Y) = \frac{45}{112}$; **в)** $r_{XY} = -1$.

6.12.62. **а)** 0; **б)** 16. **6.12.63.** $r_{XY} = -\dfrac{D(X)}{D(X)} = -1$.

6.12.64. **а)** $F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0,\ y \leqslant 0, \\ \sin x \sin y, & 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 < y \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \sin x, & 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2},\ y > \frac{\pi}{2}, \\ \sin y, & 0 < y \leqslant \frac{\pi}{2},\ x > \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{2},\ y > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

б) $f_X(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right); \end{cases}$ **в)** $p = \dfrac{5 - 2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}72$.

6.12.65. **а)** $f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & x < 0,\ y < 0; \end{cases}$ **б)** $p = F(1,1) \approx 0{,}40$.

6.12.66. **а)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$; **б)** $f(x,y) = \begin{cases} 0{,}5 \sin(x+y), & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

6.12.67. **а)** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D; \end{cases}$ **б)** $f_X(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 < x < 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1,\ x < -1; \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} 1 + y, & -1 < y < 0, \\ 1 - y, & 0 < y < 1, \\ 0, & y < -1,\ y > 1; \end{cases}$ X и Y зависимы. **6.12.68.** $a > 0$, $c > 0$, b — любое. **6.12.69.** **а)** $f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$; **б)** $e^{-2} - e^{-4{,}5} \approx 0{,}12$.

6.12.70. $-1 - \sqrt{3}$. **6.12.71.** $r = 0$.

§ 13. Функции случайных величин

6.13.2. а)

y_i	0	1	2	3	4
p_i	0,20	0,15	0,25	0,30	0,10

; б) 1,95; $\approx 1{,}65$; $\approx 1{,}28$.

6.13.3. а)

y_i	0	2	3
p_i	0,4	0,4	0,2

;

Z	-6	-2	2	4
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

; б) 1,4; 1,44; 1,2; 0; 9,6. **6.13.6.** а) $g(y) = \begin{cases} \dfrac{\cos\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}, & y \in \left(0; \dfrac{\pi^2}{4}\right), \\ 0, & y \notin \left(0; \dfrac{\pi^2}{4}\right); \end{cases}$ б) $M(Y) = \dfrac{\pi^2 - 8}{4}$,

$D(Y) = 20 - 2\pi^2$. **6.13.7.** $g(y) = f(e^y)e^y$; $G(y) = F(e^y)$

6.13.8. $g(y) = \begin{cases} 3(2-y)^2, & y \in [1,2], \\ 0, & y \notin [1,2]. \end{cases}$ **6.13.9.** $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ y, & 0 < y \leqslant 1, \\ 1, & 1 < y; \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y \leqslant 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

6.13.10. а) $g(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y} - 2\sqrt{\pi}}{4\pi\sqrt{y}}, & y \in [4\pi; 16\pi], \\ 0, & y \notin [4\pi; 16\pi]; \end{cases}$ б) $\dfrac{34}{3}\pi$; $\dfrac{412\pi^2}{45}$.

6.13.11. $M(Y) = 8{,}5$; $D(Y) = \dfrac{457}{28}$; $g(y) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{y-1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$, $y \in [3; 17]$.

6.13.13. а)

z_{1i}	1	4	5	8	10	13
p_i	0,20	0,30	0,15	0,20	0,10	0,05

;

б)

z_{2i}	0	1	3	4	5	8
p_i	0,20	0,20	0,15	0,30	0,05	0,10

;

в)

z_{3i}	1	4	$\sqrt{17}$	$4\sqrt{2}$	$\sqrt{82}$	$\sqrt{97}$
p_i	0,20	0,30	0,15	0,20	0,10	0,05

6.13.14.

z_i	2	3	...	m	...
p_i	$0{,}7^2$	$2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3$	...	$(m-1) \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^{m-2}$	...

6.13.16. $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant -1, \\ \dfrac{(z+1)^2}{2}, & -1 < z \leqslant 0, \\ \dfrac{-z^2 + 2z + 1}{2}, & 0 < z \leqslant 1, \\ 1, & 1 < z; \end{cases}$

$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant -1 \text{ или } z > 1, \\ 1 + z, & -1 < z \leqslant 0, \\ 1 - z, & 0 < z \leqslant 1. \end{cases}$ **6.13.17.** $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ 2z - z^2, & 0 < z \leqslant 1, \\ 1, & 1 < z; \end{cases}$

$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0 \text{ или } z \geqslant 1, \\ 2(1 - z), & 0 < z < 1. \end{cases}$

6.13.19. $f_{X+Y}(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, z > 4, \\ \frac{1}{4}z, & 0 < z \leqslant 2, \\ 1 - \frac{1}{4}z, & 2 < z \leqslant 4. \end{cases}$ **6.13.20.** $f_{X+Y}(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$;

$M(Z) = 0$; $D(Z) = 2$; $X + Y = Z \sim N(0; \sqrt{2})$.

6.13.22. $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ \dfrac{z^2}{2}, & 0 < z \leqslant 1, \\ 1 - \dfrac{(2-z)^2}{2}, & 1 < z \leqslant 2, \\ 1, & 2 < z; \end{cases}$ $f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \ z \geqslant 2, \\ z, & 0 < z < 1, \\ 2 - z, & 1 \leqslant z < 2. \end{cases}$

6.13.23. $f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ 0{,}5 \cdot (1 - e^{-0{,}3z}), & 0 < z < 2, \\ 0{,}5 \cdot (e^{0{,}6} - 1)e^{-0{,}3z}, & 2 \leqslant z. \end{cases}$

Указание. $f(z) = \int\limits_0^z 0{,}3e^{-0{,}3x} \cdot f_2(z - x)\,dx$, $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ z - 2 \leqslant x \leqslant z. \end{cases}$

6.13.24. а)

x_i	-1	0	2
p_i	0,45	0,36	0,19

;

y_i	-2	-1	0	1
p_i	0,1	0,4	0,4	0,1

;

б)

z_i	-8	2	7
p_i	0,19	0,36	0,45

;

w_i	0	1	2	9
p_i	0,1	0,4	0,4	0,1

; **в)** $M(Z) = 2{,}35$;

$D(Z) \approx 30{,}13$; $M(W) = 2{,}1$; $D(W) = 5{,}69$. **6.13.25.** $M(X) \approx 1{,}42$; $D(Y) \approx 0{,}78$.

6.13.26. а) $g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & y \in (-1;1), \\ 0, & y \notin (-1;1); \end{cases}$ **б)** $M(Y) = 0$; $D(Y) = \frac{1}{2}$.

6.13.27. а) $F_Y(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(1 - y)$; $f_Y(y) = \dfrac{1}{\pi(1 + (1-y)^2)}$;

б) $F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt[3]{y}$; $f_Y(y) = \dfrac{1}{3\pi(y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}})}$; $\left(F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)$.

6.13.28. а) $g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\pi}, & y \in [3 - 3\pi; 3 + 3\pi], \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$

б) $g(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & y \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right); \end{cases}$ **в)** $g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi y\sqrt{-\ln y}}, & y \in (e^{-\frac{\pi^2}{4}}, 1), \\ 0, & y \notin (e^{-\frac{\pi^2}{4}}, 1). \end{cases}$

6.13.29. а) $g(y) = f(-y)$, $y \in \mathbb{R}$; **б)** $g(y) = f(y - 10)$, $y \in \mathbb{R}$;

в) $g(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y}))$, $y > 0$;

г) $g(y) = \begin{cases} \sec^2 y \cdot f(\operatorname{tg} y), & y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & y \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$ **6.13.30. а)** $F_Y(y) = F_X\left(\dfrac{y-3}{2}\right)$;

б) $F_Y(y) = 1 - F_X(-\ln y)$, $y > 0$; **в)** $F_Y(y) = F_X(\sqrt[3]{y})$.

6.13.31. а) $g(y) = \dfrac{1}{y^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2y^2}}$, $y \neq 0$;

б) $g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{(y+1)^2}{2}} + e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}\right), & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0; \end{cases}$

в) $g(y) = \dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{50}}, y \in \mathbb{R}$. **6.13.32.** $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & y \in [0,4], \\ 0, & y \notin [0,4], \end{cases}$

$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ \frac{1}{4}y, & 0 < y \leqslant 4, \\ 1, & 4 < y; \end{cases}$ $M(Y) = 2$; $D(Y) = \frac{4}{3}$; $f_Z(z) = \begin{cases} 1, & z \in [0,1], \\ 0, & z \notin [0,1]; \end{cases}$

$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ z, & 0 < z \leqslant 1, \\ 1, & z > 1. \end{cases}$ *Указание.* $F_Z(z)$ и $f_Z(z)$ можно найти так:

Способ 1. $F_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{|X - 1| < z\} = P\{1 - z < X < z + 1\}$; если $z \leqslant 0$, то $F_Z(z) = 0$; если $0 < z \leqslant 1$, то $F_Z(z) = \int\limits_{1-z}^{1+z} \frac{1}{2}\,dt = z$; если $z > 1$, то

$F_Z(z) = \int\limits_{1-z}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{2} \frac{1}{2}\,dt + \int\limits_{2}^{1+z} 0\,dt = 1$. Итак, $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ z, & 0 < z \leqslant 1, \\ 1, & z > 1; \end{cases}$

$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ 1, & 0 < z \leqslant 1, \\ 0, & z > 1. \end{cases}$

Способ 2.

$$F_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{1 - z < X < z + 1\} = P\{X < z + 1\} - P\{X < 1 - z\} = \\ = F_X(1 + z) - F_X(1 - z).$$

Но $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & 2 < x \end{cases}$ и

$F_X(x) = \left[\begin{cases} 0, & x \leqslant a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leqslant b, \\ 1, & b < x \end{cases}\right] = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x. \end{cases}$ Поэтому

$F_Z(z) = \begin{cases} 0, \\ \dfrac{1+z}{2} - \dfrac{1-z}{2}, \\ 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ z, & 0 < z \leqslant 1, \\ 1, & 1 < z; \end{cases}$ и дифференцируя $F_Z(z)$,

находим $f_Z(z)$.

Способ 3. Найдем сначала $f_Z(z)$. Имеем: $x_1 = \psi_1(z) = 1 + z$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ и $x_2 = \psi_2(z) = 1 - z$, $0 \leqslant z \leqslant 1$; $|x_1'| = |x_2'| = 1$; поэтому

$$f_Z(z) = \left[\sum_{i=1}^{2} f(\psi_i(z)) \cdot |\psi_i'(z)|\right] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1, \text{ т. е.}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1, & z \in [0,1], \\ 0, & z \notin [0,1]; \end{cases} \text{ следовательно,}$$

$$F_Z(z) = \left[\int_{-\infty}^{z} f(x)\,dx\right] = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ z, & 0 < z \leqslant 1, \\ 1, & 1 < z. \end{cases}$$

6.13.33.

$x_i + y_i$	16	17	18	19	20
p_i	0,02	0,09	0,26	0,33	0,30

6.13.34. $F_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ \dfrac{2t + t^2}{6}, & 0 < t \leqslant 1, \\ 1 - \dfrac{1}{3t} - \dfrac{1}{6t^2}, & 1 < t; \end{cases}$ $f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ \dfrac{t+1}{3}, & 0 < t \leqslant 1, \\ \dfrac{t+1}{3t^3}, & 1 < t. \end{cases}$

6.13.35. $f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} z, & 0 < z \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\pi}, & 1 < z \leqslant \pi, \\ \dfrac{1}{\pi}(\pi - z + 1), & \pi < z \leqslant \pi + 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

6.13.36. $f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} z}, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0; \end{cases}$ $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\frac{z}{2}}, & z > 0. \end{cases}$

6.13.37. $F_Z(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{6z}, & z \leqslant -1, \\ \dfrac{2+z}{6}, & -1 < z \leqslant 2, \\ 1 - \dfrac{2}{3z}, & 2 < z; \end{cases}$ $f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{6z^2}, & z \leqslant -1, \\ \dfrac{1}{6}, & -1 < z \leqslant 2, \\ \dfrac{2}{3z^2}, & 2 < z. \end{cases}$

6.13.38. $F_{XY}(S) = S(1 - \ln S)$; $f_{XY}(S) = -\ln S, 0 < S < 1$.

6.13.39. $F_Z(z) = P\{\max\{X, Y\} < z\} = P\{X < z, Y < z\}$, т. е. чтобы максимальная из величин X, Y была меньше z, необходимо, чтобы каждая из них была меньше z. $F_Z(z) = \begin{cases} z^2, & z \in [0,1], \\ 0, & z \notin [0,1]; \end{cases}$ $f_Z(z) = \begin{cases} 2z, & z \in [0,1], \\ 0, & z \notin [0,1]. \end{cases}$

6.13.40. $f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 2, \\ \dfrac{z^2 - 2z}{8}, & 2 < z \leqslant 3, \\ \dfrac{2z - 3}{8}, & 3 < z \leqslant 4, \\ \dfrac{5 + 4z - z^2}{8}, & 4 < z \leqslant 5, \\ 0, & 5 < z. \end{cases}$

Указание. $f(z) = \int\limits_0^z \frac{1}{4} x \cdot f_Z(z - x)\,dx$, $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ z - 2 \leqslant x \leqslant z - 1 \end{cases}$.

6.13.41. $f_T(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 z} - e^{-\lambda_1 z}\right), & z > 0. \end{cases}$

Указание. $f(z) = \int\limits_0^z \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2(z-x)}\,dx$, $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant z, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$.

6.13.42. а) $M(Z) = 20$. *Указание.* $f(z) = \begin{cases} 0{,}1^2 \cdot e^{-0{,}1z} \cdot z, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0; \end{cases}$

б) $M(Z) = 1$. *Указание.* $f(z) = \begin{cases} z, & 0 < z \leqslant 1, \\ 2 - z, & 1 < z \leqslant 2, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

6.13.43. $M(Y) = ka + b$; $\sigma(Y) = |k|\sigma$. **6.13.44.** $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & 0 \leqslant y \leqslant 1; \\ \frac{1}{3}, & 1 < y \leqslant 2; \\ 0, & y < 0,\ y > 2. \end{cases}$

6.13.45. $F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\dfrac{\sqrt{y+9}}{4}\right) - F_X\left(-\dfrac{\sqrt{y+9}}{4}\right), & y > -9, \\ 0, & y \leqslant -9; \end{cases}$

$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - F_X\left(\frac{1}{3}\ln\frac{1}{z}\right), & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0. \end{cases}$ **6.13.46.** $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{(y-6)^2}, & y \geqslant 8, \\ 0, & y < 8; \end{cases}$

$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}}, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0. \end{cases}$ **6.13.47.** а) Нет; б) да.

6.13.48. $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ \dfrac{z}{2\pi}, & 0 < z \leqslant \pi, \\ 1 - \dfrac{\pi}{2z}, & \pi < z; \end{cases}$ $f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{2\pi}, & 0 \leqslant z \leqslant \pi, \\ \dfrac{\pi}{2z^2}, & \pi < z. \end{cases}$

6.13.49. $f_Z(z) = \begin{cases} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0, \end{cases}$ (распределение Рэлея);

$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{z^2}{2}}, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0. \end{cases}$ **6.13.50.** $f(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant -2, z > 2, \\ \dfrac{z+2}{4}, & -2 < z \leqslant 0, \\ \dfrac{2-z}{4}, & 0 < z \leqslant 2; \end{cases}$

$F(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant -2, \\ \frac{1}{8}(z+2)^2, & -2 < z \leqslant 0, \\ 2 - \frac{1}{8}(2-z)^2, & 0 < z \leqslant 2, \\ 1, & 2 < z. \end{cases}$

$$6.13.51.\ f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0,\ z > 11, \\ \dfrac{z}{24}, & 0 < z \leqslant 3, \\ \dfrac{1}{8}, & 3 < z \leqslant 8, \\ \dfrac{11-z}{24}, & 8 < z \leqslant 11. \end{cases}$$

§ 14. Предельные теоремы теории вероятностей

6.14.2. $p \geqslant \frac{1}{3}$. **6.14.3.** 0,7; $p \geqslant 0{,}33$. **6.14.5.** а) $p \geqslant 0$; б) $p \geqslant \frac{8}{9} \approx 0{,}89$; в) $p \geqslant \frac{80}{81} \approx 0{,}99$. **6.14.6.** а) $p = 1 - e^{-6}$; б) $p \geqslant \frac{17}{18}$. **6.14.7.** $p \geqslant \frac{1549}{1600} \approx 0{,}97$. **6.14.8.** $p \leqslant 0{,}1584$. **6.14.9.** $p \geqslant \frac{2}{7}$. **6.14.10.** а) $p \leqslant 0{,}8$; б) $p \geqslant 0{,}25$. **6.14.12.** $p \geqslant 0{,}71$. **6.14.13.** $p \geqslant \frac{7}{12} \approx 0{,}6$. **6.14.14.** $p \geqslant 0{,}9808$. **6.14.16.** $p \geqslant \frac{3}{8}$. **6.14.17.** а) нет; б) да; в) нет. **6.14.18.** $n \geqslant 320$. **6.14.20.** $p \approx 0{,}9474$. **6.14.21.** $f_Y(y) \approx \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-60)^2}{8}}$; $P(A) \approx 0{,}971$. **6.14.22.** а) $p \approx 0{,}499$; б) $p \approx 0{,}841$. **6.14.23.** $(-0{,}0251; 0{,}0251)$. **6.14.24.** а) $P\{X \geqslant 30\} \leqslant \frac{2}{3}$; б) $P\{|X - 20| < 8\} \geqslant 0{,}74$. **6.14.25.** $p \geqslant 0{,}75$; $P\{|X - 50| < 10\} \approx 0{,}954$. **6.14.26.** $p \geqslant \frac{7}{9}$; $p = \frac{35}{36}$. **6.14.27.** $p \geqslant \frac{15}{16}$. **6.14.28.** $P(A) \geqslant \frac{7}{16}$; $P(B) \geqslant \frac{2}{3}$. **6.14.29.** а) $p \geqslant 0{,}936$; б) $p \geqslant \frac{43}{45}$. **6.14.30.** $p \geqslant \frac{7}{9}$. **6.14.31.** а) $n \geqslant 250$; б) $n \geqslant 1250$. **6.14.32.** $P\{0 < X < 6\} \geqslant \frac{2}{3}$. **6.14.33.** $n \geqslant 300$. **6.14.34.** Да. **6.14.35.** а) $p \approx 0{,}326$; б) $p \approx 1$. **6.14.36.** $p \approx 0{,}89$. **6.14.37.** $p \approx 0{,}847$. **6.14.38.** $n \leqslant 761$. **6.14.39.** $p \approx 0{,}034$. **6.14.40.** $p \geqslant \frac{8}{9}$; а) $\approx 0{,}982$; б) 1; в) $\approx 0{,}997$. **6.14.41.** а) $P\{X \geqslant 400\} \leqslant \frac{7}{8}$; б) $P\{|X - 350| < 25\} \geqslant \frac{8}{15}$. **6.14.42.** $n \leqslant 200$. **6.14.43.** $p \geqslant 0{,}5$. **6.14.44.** Да. **6.14.46.** 0,5. **6.14.47.** Неограниченно возрастает.

Глава 7. Теория функций комплексного переменного

§ 1. Основные элементарные функции комплексного переменного

7.1.2. $u = x$, $v = y$. **7.1.3.** $u = -y$, $v = x$. **7.1.4.** $u = x^2 - y^2$, $v = -2xy$. **7.1.5.** $u = x^2 - y^2 - 2x$, $v = 2xy - 2y + 1$. **7.1.6.** $u = x^3 - 3xy^2$, $v = 3x^2y - y^3$. **7.1.7.** $u = x$, $v = y$. **7.1.8.** $u = 2x$, $v = 0$. **7.1.9.** $u = \frac{x + y - 1}{x^2 + (y-1)^2}$, $v = \frac{x - y + 1}{x^2 + (y-1)^2}$. **7.1.10.** $u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $v = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$.

7.1.11. $u = x - \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v = y + \dfrac{y}{x^2+y^2}$. **7.1.12.** $u = e^x \cos y$, $v = -e^x \sin y$.
7.1.13. $u = e^y \cos x$, $v = -e^y \sin x$. **7.1.14.** $u = \operatorname{sh} x \cos y$, $v = \operatorname{ch} x \sin y$.
7.1.15. $u = \sin 2x \operatorname{ch} 2y$, $v = -\cos 2x \operatorname{sh} 2y$. **7.1.16.** $u = \cos x \operatorname{ch} y$, $v = -\sin x \sin y$.

7.1.17. $u = -\arg z = (-1) \cdot \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} & \text{при } x > 0, \\ \operatorname{sign}(y) \cdot \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} & \text{при } x < 0, \\ \operatorname{sign}(y) \cdot \dfrac{\pi}{2} & \text{при } x = 0, \end{cases}$

$v = \dfrac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$. **7.1.18.** $u = \ln(x^2+y^2)$, $v = 2 \arg z$ (см. ответ предыдущей задачи). **7.1.19.** $u = \operatorname{sh} x \cos(y+1)$, $v = \operatorname{ch} x \sin(y+1)$. **7.1.21.** $|f(z)| = r$, $\operatorname{Arg} f(z) = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **7.1.22.** $|f(z)| = 1$, $\operatorname{Arg} f(z) = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
7.1.23. $|f(z)| = r^3$, $\operatorname{Arg} f(z) = 3\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **7.1.24.** $|f(z)| = r^n$, $\operatorname{Arg} f(z) = n\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **7.1.25.** $|f(z)| = \dfrac{1}{r^5}$, $\operatorname{Arg} f(z) = -5\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.1.28. $f(z) = iz$. **7.1.29.** $f(z) = z^2$. **7.1.30.** $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}}$.
7.1.31. $f(z) = \cos z = \operatorname{ch} iz$. **7.1.35.** $f(z_1) = f(z_2) = -1 - 17i$.
7.1.36. $f(z_1) = 0{,}5 - 2{,}5i$, $f(z_2) = 0$.

7.1.37. $f(z_1) = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \dfrac{\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$f(z_2) = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \dfrac{\pi}{2} + i \sin \dfrac{\pi}{2} = i$.

7.1.38. $f(z_1) = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$f(z_2) = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos \dfrac{\pi}{4} - i \sin \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

7.1.39. $f(z_1) = e \cdot \cos 1 - i \cdot e \cdot \sin 1$, $f(z_2) = 2$. **7.1.40.** $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = i\dfrac{4}{3}$.
7.1.41. $f(z_1) = -i\dfrac{\pi}{2}$, $f(z_2) = i\dfrac{\pi}{2}$. **7.1.42.** $f(z_1) = \operatorname{ch} 1$, $f(z_2) = \operatorname{ch} 2\pi$.
7.1.43. $u = -2xy$, $v = x^2 - y^2$. **7.1.44.** $u = x - 3xy^2 - 1$, $v = -3x^2y + y^3 + 2$.
7.1.45. $u = x^2 - y^2$, $v = -2xy$. **7.1.46.** $u = \dfrac{x(x+1) + y(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}$,

$v = \dfrac{x - y + 1}{x^2 + (y-1)^2}$. **7.1.47.** $u = x\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, $v = y\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.
7.1.48. $u = -\sin x \operatorname{sh}(y+1)$, $v = \cos x \operatorname{ch}(y+1)$.
7.1.49. $u = -\operatorname{sh}(2xy) \cdot \cos(x^2 - y^2)$, $v = \operatorname{ch}(2xy) \sin(x^2 - y^2)$.

7.1.50. $u = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $v = -e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \sin \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

7.1.51. $u = \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}$, $v = \dfrac{\operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}$. **7.1.52.** $|f(z)| = \alpha r$, $\operatorname{Arg} f(z) = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **7.1.53.** $|f(z)| = \rho r$, $\operatorname{Arg} f(z) = \varphi + \theta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
7.1.54. $|f(z)| = \dfrac{1}{r^n}$, $\operatorname{Arg} f(z) = -n\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **7.1.55.** $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$.

7.1.56. $f(z) = (\bar{z})^3$. **7.1.57.** $f(z) = \dfrac{1}{z} + z$. **7.1.58.** $0{,}4 - 0{,}2i$. **7.1.59.** $6 - 8i$.

7.1.60. $\dfrac{1}{64}$. **7.1.61.** $2 \operatorname{sh} 2$. **7.1.62.** $\cos 2 \operatorname{sh} 2 + i \sin 2 \operatorname{ch} 2$. **7.1.63.** **а)** Да; **б)** да;

в) нет; г) да. **7.1.64.** Да. **7.1.65.** $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **7.1.66.** Да, например, $z = i \ln 2$. **7.1.67.** Да. Рассмотреть $\lim\limits_{y \to \infty} \sin(iy)$. **7.1.68.** $\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **7.1.69.** **а)** Нет ($f(z) = z$ и $f(z) = \bar{z}$); **б)** да ($f(z) = z$).

§ 2. Аналитические функции

7.2.5. $f'(z)$ не существует $\forall z \in \mathbb{C}$. **7.2.6.** $f'(z) = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$. **7.2.7.** $f'(z) = 2iz - 3$, $\forall z \in \mathbb{C}$. **7.2.8.** $f'(z) = 0$, при $z = 0$; $f'(z)$ не существует при $z \neq 0$. **7.2.9.** $f'(z) = 6z^5$, $\forall z \in \mathbb{C}$. **7.2.10.** $f'(z) = -\dfrac{3}{z^4}$, $\forall z \neq 0$. **7.2.11.** $f'(z) = \frac{2}{z}$, $\forall z \neq 0$. **7.2.12.** $f'(z) = \frac{2}{z}$, $\forall z \neq 0$. **7.2.13.** $f'(z) = \operatorname{sh} z$, $\forall z \in \mathbb{C}$. **7.2.14.** $f'(z) = 0$, при $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{N}$; $f'(z)$ не существует в остальных точках. **7.2.15.** $f'(z) = \cos(z + 2i)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. **7.2.16.** $f'(z) = -i \sin(iz)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. **7.2.20.** $\Delta u = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $v(x, y) = y + C$; $f(z) = z + iC$, $C \in \mathbb{R}$. **7.2.21.** $\Delta v = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $u(x, y) = 2xy + C$; $f(z) = -iz^2 - 2i + C$, $C \in \mathbb{R}$. **7.2.22.** $\Delta v \neq 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; аналитической функции $f(z) = f(x + iy)$ не существует. **7.2.23.** $\Delta v = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $u(x, y) = 3x^2 y - y^3 + 7x + C$; $f(z) = -iz^3 + 7z + C$, $C \in \mathbb{R}$. **7.2.24.** $\Delta u = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $v = \operatorname{sh} x \sin y + C$; $f(z) = \operatorname{ch} z + iC$, $C \in \mathbb{R}$. **7.2.25.** $\Delta u \neq 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; аналитической функции $f(z) = f(x + iy)$ не существует. **7.2.26.** $\Delta v = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $u = \dfrac{y}{x^2 + y^2} + C$; $f(z) = \frac{i}{z} + C$, $C \in \mathbb{R}$. **7.2.27.** $\Delta v = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $u = -\sin 2x \operatorname{ch} 2y - 3y$; $f(z) = -\sin 2z + 3iz + C$, $C \in \mathbb{R}$. **7.2.28.** $\Delta u = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $v = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C$; $f(z) = \ln(z^2) + iC$, $C \in \mathbb{R}$. **7.2.29.** $\Delta v = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $(y \neq 0)$; $u = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 2x + C$; $f(z) = -\ln(iz) + 2z + C$, $C \in \mathbb{R}$. **7.2.30.** $f'(z)$ не существует $\forall z \in \mathbb{C}$. **7.2.31.** $f'(z)$ не существует $\forall z \in \mathbb{C}$. **7.2.32.** $f'(z) = \frac{1}{z}$, $\forall z \neq 0$. **7.2.33.** $f'(z)$ не существует $\forall z \in \mathbb{C}$. **7.2.34.** $f'(z) = 3e^{3z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. **7.2.35.** $f'(z) = 0$ при $z = i\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $(k \in \mathbb{Z})$; $f'(z)$ не существует в остальных точках. **7.2.37.** $\Delta u = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $v(x, y) = 2xy - x + C$; $f(z) = z^2 - iz + 1 + iC$, $C \in \mathbb{R}$. **7.2.38.** $\Delta u = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$; $v(x, y) = e^{-y} \sin x - y + C$; $f(z) = e^{iz} - z + iC$, $C \in \mathbb{R}$. **7.2.39.** $\Delta u = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $v(x, y) = \dfrac{x}{2(x^2 + y^2)} + 2xy + C$; $f(z) = \dfrac{i}{2z} + z^2 + iC$, $C \in \mathbb{R}$. **7.2.40.** $\Delta u = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $v(x, y) = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + C$; $f(z) = -\dfrac{1}{z^2} + iC$, $C \in \mathbb{R}$. **7.2.41.** Да. **7.2.42.** Нет. **7.2.43.** **а)** да; **б)** да; **в)** да; **г)** нет; **д)** нет. **7.2.44.** Нет. **7.2.45.** **а)** $f_1 = f_2 + Ci$; **б)** $f_1 = f_2 + C + Di$; **в)** $f_1 = Cf_2 + Di$ $(C, D \in \mathbb{R})$.

§ 3. Интегрирование функций комплексного переменного

7.3.8. 0. **7.3.9.** **а)** 0; **б)** 0,5$(1+i)$; **в)** $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i$. **7.3.10.** **а)** $1-i$; **б)** $1-\frac{4}{3}i$.
7.3.11. **а)** -2; **б)** 0; **в)** $2\sqrt{2}(1-i)$. **7.3.12.** $2\pi i$. **7.3.13.** $\frac{2}{3}(1+i)$. **7.3.14.** $-\frac{i}{6}$.
7.3.15. $-2+i$. **7.3.16.** $-\frac{29}{30}-3i$. **7.3.17.** $-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}i$. **7.3.18.** $-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$.
7.3.19. $-2-i$. **7.3.20.** $-3+3i$.
7.3.21. $\cos 1+\sin 1-e\cdot\sin 1+i(\sin 1-\cos 1+e\cdot\cos 1)$. **7.3.22.** $1-\frac{\pi}{2}+i$.
7.3.23. $i(1-\operatorname{sh}1)$. **7.3.24.** $-\operatorname{sh}\pi$. **7.3.27.** $\frac{65}{4}$. **7.3.28.** 0. **7.3.29.** $\frac{\sqrt{13}}{2}(3+2i)$.
7.3.30. 0. **7.3.31.** $\frac{4}{3}(\sqrt{3}+i)$. **7.3.32.** $\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i$. **7.3.33.** $\frac{4}{7}+3i$. **7.3.34.** -9π.
7.3.35. $-(e^{\pi}+1)i$. **7.3.36.** $\frac{1}{4}(\sin 2\operatorname{ch}2-2\cos 2\operatorname{ch}2-2\sin 2\operatorname{sh}2-\sin 6+6\cos 6)+$ $+\frac{i}{4}(\cos 2\operatorname{sh}2-2\cos 2\operatorname{ch}2+2\sin 2\operatorname{sh}2)$. **7.3.38.** 0. **7.3.40.** **а)** $-2\pi i$; **б)** $-\pi i$; **в)** $-\pi i$. **7.3.41.** **а)** 0; **б)** $-2\pi i$. **7.3.42.** **а)** $-2\pi i$; **б)** 0. **7.3.43.** **а)** 0; **б)** $2\pi i$.
7.3.44. **а)** 0; **б)** 0. **7.3.45.** **а)** 0; **б)** 0. **7.3.46.** **а)** πi; **б)** $-\pi i$; **в)** 0. **7.3.47.** **а)** $\frac{3}{8}\pi$; **б)** $-\frac{3}{8}\pi$; **в)** 0. **7.3.48.** **а)** $\frac{3}{8}\pi i$; **б)** $-\frac{3}{8}\pi i$; **в)** 0. **7.3.49.** Интегралы существуют или не существуют одновременно $\int\limits_{l_1} f(z)\,dz=-\int\limits_{l_2} f(z)\,dz$. **7.3.50.** Значение интеграла — чисто мнимое число или 0. **7.3.51.** Нет. **7.3.53.** $2\pi i$.
7.3.54. **а)** нет. **б)** нет. **7.3.55.** Да.

§ 4. Ряды Лорана. Изолированные особые точки

7.4.5. **а)** $\frac{1}{z}-\frac{z}{2!}+\frac{z^3}{4!}-\ldots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n-1}$, $0<|z|<+\infty$ (весь ряд есть главная часть); **б)** $\frac{1}{z}-\frac{z}{2!}+\frac{z^3}{4!}-\ldots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n-1}$, $0<|z|<+\infty$ (весь ряд есть правильная часть). **7.4.6.** **а)** $z^2-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^6}{5!}-\ldots=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}z^{2n}$,
$0<|z|<+\infty$ (весь ряд есть правильная часть);
б) $z^2-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^6}{5!}-\ldots=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}z^{2n}$, $0<|z|<+\infty$ (весь ряд есть главная часть).
7.4.7. **а)** $1+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(z+1)^n}=\sum\limits_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}(z+1)^n$,
$0<|z+1|<+\infty$ (1 — правильная часть, $\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}+\ldots$ — главная часть);
б) $1+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(z+1)^n}=\sum\limits_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}(z+1)^n$,

$0 < |z+1| < +\infty$ (весь ряд есть правильная часть).

7.4.8. **а)** $e^3 + \dfrac{e^3}{z+1} + \dfrac{e^3}{2!} \cdot \dfrac{1}{(z+1)^2} + \ldots + \dfrac{e^3}{n!} \cdot \dfrac{1}{(z+1)^n} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^3}{n!} \cdot \dfrac{1}{(z+1)^n} =$

$= \sum\limits_{n=-\infty}^{0} \dfrac{e^3}{(-n)!}(z+1)^n$, $0 < |z+1| < +\infty$ (весь ряд есть правильная часть);

б) $e^3 + \dfrac{e^3}{z+1} + \dfrac{e^3}{2!} \cdot \dfrac{1}{(z+1)^2} + \ldots + \dfrac{e^3}{n!} \cdot \dfrac{1}{(z+1)^n} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^3}{n!} \cdot \dfrac{1}{(z+1)^n} =$

$= \sum\limits_{n=-\infty}^{0} \dfrac{e^3}{(-n)!}(z+1)^n$, $0 < |z+1| < +\infty$ (весь ряд есть правильная часть).

7.4.9. **а)** $\sin 2 + \cos 2 \cdot z - \dfrac{\sin 2}{2!} z^2 - \dfrac{\cos 2}{3!} z^3 + \ldots + \dfrac{(-1)^n \sin 2}{(2n)!} \cdot z^{2n} +$

$+ \dfrac{(-1)^n \cos 2}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} C_k z^k$, $\left(C_{2n} = \dfrac{(-1)^n \sin 2}{(2n)!}\right.$, $n = 0, 1, 2, \ldots;$

$C_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n \cos 2}{(2n+1)!}$, $\left. n = 0, 1, 2, \ldots\right)$, $0 < |z| < +\infty$ (весь ряд есть правильная часть); **б)** $\sin 2 + \cos 2 \cdot z - \dfrac{\sin 2}{2!} z^2 - \dfrac{\cos 2}{3!} z^3 + \ldots + \dfrac{(-1)^n \sin 2}{(2n)!} \cdot z^{2n} +$

$+ \dfrac{(-1)^n \cos 2}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} C_k z^k$, $\left(C_{2n} = \dfrac{(-1)^n \sin 2}{(2n)!}\right.$, $n = 0, 1, 2, \ldots;$

$C_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n \cos 2}{(2n+1)!}$, $\left. n = 0, 1, 2, \ldots\right)$, $0 < |z| < +\infty$ (весь ряд есть правильная часть). **7.4.10.** $\cos 3 + \sin 3 \cdot \dfrac{1}{z+3} - \dfrac{\cos 3}{2!} \cdot \dfrac{1}{(z+3)^2} - \dfrac{\sin 3}{3!} \cdot \dfrac{1}{(z+3)^3} + \ldots$

$\ldots + \dfrac{(-1)^n \cos 3}{(2n)!} \cdot \dfrac{1}{(z+3)^{2n}} + \dfrac{(-1)^n \sin 3}{(2n+1)!} \cdot \dfrac{1}{(z+3)^{2n+1}} + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} C_k \cdot \dfrac{1}{(z+3)^k}$

$\left(C_{2n} = \dfrac{(-1)^n \cos 3}{(2n)!}\right.$, $n = 0, 1, 2, \ldots;$ $C_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n \sin 3}{(2n+1)!}$, $\left. n = 0, 1, 2, \ldots\right)$,

$0 < |z+3| < +\infty$ (весь ряд есть правильная часть). **7.4.11.** **а)** $\dfrac{2}{z-1}$ (весь ряд есть главная часть); **б)** $\dfrac{2}{z-1}$ (весь ряд есть правильная часть).

7.4.12. **а)** $\dfrac{3+2i}{(z+i)^2}$ (весь ряд есть главная часть); **б)** $\dfrac{3+2i}{(z+i)^2}$ (весь ряд есть правильная часть). **7.4.13.** $1 + \dfrac{1}{z-1}$. **7.4.14.** $\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1+2i}{(z-1)^2}$ (весь ряд есть главная часть). **7.4.15.** При $0 \leqslant |z-1| < 1$:

$1 - (z-1) + (z-1)^2 - \ldots + (-1)^n (z-1)^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n$ (весь ряд есть правильная часть), при $1 < |z-1| < +\infty$:

$\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{(z-1)^3} - \ldots = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(z-1)^n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n-1} (z-1)^n.$

7.4.16. **а)** При $0 \leqslant |z| < 1$: $-2i + 2z + 2iz^2 - \ldots - 2i^{n+1} z^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-2) i^{n+1} z^n$

(весь ряд есть правильная часть), при $1 < |z| < +\infty$:

$$\frac{2}{z} - \frac{2i}{z^2} - \frac{2}{z^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot i^{n-1}}{z^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot i^{n-1}}{z^n} =$$

$= \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \dfrac{(-1)^{n-1}\cdot 2}{i^{n+1}} \cdot z^n$; **б)** при $1 < |z| < +\infty$:

$$\frac{2}{z} - \frac{2i}{z^2} - \frac{2}{z^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot i^{n-1}}{z^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot i^{n-1}}{z^n} =$$

$= \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \dfrac{(-1)^{n-1}\cdot 2}{i^{n+1}} \cdot z^n$ (весь ряд есть правильная часть). **7.4.17.** При $0 \leqslant |z+1| < 2$:

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(z+1) - \frac{1}{2^3}(z+1)^2 - \ldots - \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n - \ldots = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(z+1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} \cdot z^n$$

(весь ряд есть правильная часть); при $2 < |z+1| < +\infty$:

$$(z+1) + \frac{1}{z+1} + \frac{2}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{(z+1)^n} + \ldots =$$

$= (z+1) + \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \dfrac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n + (z+1)$. **7.4.18.** При $0 \leqslant |z-1| < 2$:

$$-\frac{3}{2} - \frac{5}{2^2}(z-1) - \frac{5}{2^3}(z-1)^2 - \ldots - \frac{5}{2^{n+1}}(z-1)^n - \ldots = -\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-5}{2^{n+1}} \cdot (z-1)^n$$

(весь ряд есть правильная часть); при $2 < |z-1| < +\infty$:

$$1 + \frac{5}{z-1} + \frac{5\cdot 2}{(z-1)^2} + \ldots + \frac{5\cdot 2^{n-1}}{(z-1)^n} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5\cdot 2^{n-1}}{(z-1)^n} =$$

$= \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \dfrac{5}{2^{n+1}}(z-1)^n + 1$. **7.4.19. а)** При $0 < |z-1| < 3$:

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1} + \frac{4}{9} - \frac{4}{3^3} + \ldots + \frac{4\cdot(-1)^n}{3^{n+2}} \cdot (z-1)^n + \ldots =$$

$= -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{z-1} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{4\cdot(-1)^n}{3^{n+2}}(z-1)^n$; при $3 < |z-1| < +\infty$:

$$\frac{1}{z-1} - \frac{4}{(z-1)^2} + \frac{4\cdot 3}{(z-1)^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot 4\cdot 3^{n-2}}{(z-1)^n} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{z-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot 4\cdot 3^{n-2}}{(z-1)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{4\cdot(-1)^{n-1}}{3^{n+2}} \cdot (z-1)^n + (z-1)^{-1};$$

б) При $0 < |z+2| < 3$:

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z+2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3^3}(z+2) + \ldots + \frac{1}{3^{n+2}}(z+2)^n + \ldots = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+2}}(z+2)^n;$$

при $3 < |z+2| < +\infty$: $\dfrac{1}{z+2} - \dfrac{1}{(z+2)^3} - \dfrac{3}{(z+2)^3} - \ldots - \dfrac{3^{n-2}}{(z+2)^n} - \ldots =$

$= \dfrac{1}{z+2} + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} -\dfrac{3^{n-2}}{(z+2)^n} = \sum\limits_{n=-\infty}^{-2} -\dfrac{1}{3^{n+2}}(z+2)^n + (z+2)^{-1}$. **7.4.20.** При

$0 \leqslant |z| < 1$: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}z + \dfrac{7}{8}z^2 + \ldots + \dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n$ (весь ряд есть правильная часть);

при $1 < |z| < 2$:

$$-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \ldots - \frac{z^4}{2^{n+1}} - \ldots = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)\cdot z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)}{2^{n+1}}\cdot z^n;$$

при $2 < |z| < +\infty$: $\frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \ldots + (2^{n-1}-1)\cdot\frac{1}{z^n} + \ldots = \sum_{n=2}^{+\infty}(2^{n-1}-1)\cdot\frac{1}{z^n} =$
$= \sum_{n=-\infty}^{-2}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right)\cdot\frac{1}{z^n}$. **7.4.21.** При $0 \leqslant |z+1| < 1$:
$\frac{3}{2} - \frac{15}{12}(z+1) + \frac{25}{24}(z+1)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n+1}} + 4\cdot(-1)^n\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot(z+1)^n + \ldots =$
$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n\cdot 4\right)\cdot(z+1)^n$, (весь ряд есть правильная часть); при
$1 < |z+1| < 2$: $\ldots + \frac{4}{3}\cdot(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(z+1)^n} + \ldots + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(z+1)^3} - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(z+1)^2} +$
$+ \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{z+1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2}(z+1) + \ldots + \frac{1}{3\cdot 2^{n+1}}(z+1)^n + \ldots =$
$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{4}{3}\cdot(-1)^{n-1}\cdot(z+1)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3\cdot 2^{n+1}}(z+1)^n$; при
$2 < |z+1| < +\infty$:

$$\ldots + \frac{1}{3}(4\cdot(-1)^{n-1} - 2^{n-1}) + \ldots - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(z+1)^4} + 0\cdot\frac{1}{(z+1)^3} - 2\cdot\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3}\left(4\cdot(-1)^{n-1} - 2^{n-1}\right)\cdot\frac{1}{(z+1)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{3}\left(4\cdot(-1)^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\cdot(z+1)^n.$$

7.4.26. 2 — устранимая особая точка; ∞ — полюс 1-го порядка. **7.4.27.** $2i$ — устранимая особая точка; ∞ — полюс 1-го порядка. **7.4.28.** $-i$ — полюс 1-го порядка; ∞ — устранимая особая точка. **7.4.29.** 1 — полюс 1-го порядка; -2 — полюс 2-го порядка; ∞ — устранимая особая точка. **7.4.30.** 1 — существенно особая точка; -1 — существенно особая точка; ∞ — устранимая особая точка. **7.4.31.** 0 — существенно особая точка; ∞ — устранимая особая точка. **7.4.32.** 0 — устранимая особая точка; πk — полюс 1-го порядка, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$; ∞ — неизолированная особая точка. **7.4.33.** 0 — полюс 3-го порядка; ∞ — существенно особая точка; *Указание*. Рассмотреть две последовательности точек $\{z_k^{(1)} = 2\pi k, \quad k = 1, 2, \ldots\}$ и $\{z_k^{(2)} = \pi + 2\pi k, \quad k = 1, 2, \ldots\}$. **7.4.34.** i — полюс 1-го порядка; $-i$ — полюс 1-го порядка; 0 — существенно особая точка; ∞ — устранимая особая точка. **7.4.35.** 2 — полюс 2-го порядка; -2 — полюс 2-го порядка; 1 — существенно особая точка; ∞ — устранимая особая точка. **7.4.36.** 0 — устранимая особая точка; ∞ — существенно особая точка. **7.4.37.** -1 — существенно особая точка; $\frac{1}{\pi k} - 1$ — полюс 1-го порядка, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; ∞ — полюс 4-го порядка. **7.4.38.** 0 — существенно особая точка; ∞ — существенно особая

точка. **7.4.39.** **а)** При $0 < |z| < +\infty$:
$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{4!}z^2 + \ldots + \frac{1}{(n+2)!}z^n + \ldots = \sum\limits_{n=-2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!}z^n$; **б)** при $0 < |z| < +\infty$: $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{4!}z^2 + \ldots + \frac{1}{(n+2)!}z^n + \ldots = \sum\limits_{n=-2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!}z^n$.
7.4.40. При $0 < |z - i| < +\infty$:

$$\ldots + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{i}{n!}\right) \cdot \frac{1}{(z+i)} + \ldots + \left(\frac{1}{3!} + \frac{i}{2!}\right) \cdot \frac{1}{(z-i)^2} + \left(\frac{1}{2!} + i\right) \cdot \frac{1}{z-i} +$$
$$+ (1+i) + (z-i) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{i}{n!}\right) \cdot \frac{1}{(z-i)^n} + (1+i) + (z-i).$$

7.4.41. При $0 < |z+2| < +\infty$:

$$\ldots \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \cos 1 \cdot \frac{1}{(z+2)^{4n}} + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \sin 1 \cdot \frac{1}{(z+2)^{4n-2}} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{5!} \cdot \cos 1 \cdot \frac{1}{(z+2)^8} + \frac{1}{4!} \cdot \sin 1 \cdot \frac{1}{(z+2)^6} - \frac{1}{2!} \cdot \sin 1 \cdot \frac{1}{(z+2)^2} + \cos 1 + \sin 1 \cdot (z+2)^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \cdot \frac{1}{(z+2)^k} + \cos 1 + \sin 1 \cdot (z+2)^2,$$

$(C_{4n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cos 1$, $n = 1, 2, \ldots$; $C_{4n-2} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sin 1$, $n = 1, 2, \ldots$; $C_{2n+1} = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots)$. **7.4.42.** **а)** При $0 < |z-2| < +\infty$: $1 + \frac{2+2i}{z-2}$; **б)** при $0 < |z-2| < +\infty$: $1 + \frac{2+2i}{z-2}$. **7.4.43.** При $0 < |z+2i| < +\infty$:
$\frac{1}{(z+2i)^2} - \frac{4i}{(z+2i)^3}$. **7.4.44.** При $0 < |z-i| < 1$:
$(2+3i) - (2+3i)(z-i) + (2+3i)(z-i)^2 + \ldots + (-1)^n(2+3i)(z-i)^n + \ldots =$
$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n(2+3i)(z-i)^n$; при $1 < |z-i| < +\infty$:

$$\frac{2+3i}{z-i} - \frac{2+3i}{(z-i)^2} + \frac{2+3i}{(z-i)^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(2+3i)}{(z-i)^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2+3i)}{(z-i)^n} =$$

$= \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{n-1}(2+3i)(z-i)^n$ (весь ряд есть главная часть). **7.4.45.** При $2 < |z| < +\infty$: $\ldots + \frac{1}{3}(1 + (-1)^n 2^{n-1}) \cdot \frac{1}{z^n} + \ldots + \frac{3}{z^4} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} =$
$= \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3}(1 + (-1)^n \cdot 2^{n-1}) \cdot 1z^n = \sum\limits_{n=-\infty}^{-2} \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) \cdot z^n$ (весь ряд есть главная часть). **7.4.46.** При $0 \leqslant |z-i| < \sqrt{2}$:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{4}{i+2} - \frac{1}{i-1}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{4}{(i+2)^2} + \frac{1}{(i-1)^2}\right)(z-i) +$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{(i+2)^3}-\frac{1}{(i-1)^3}\right)(z-i)^2+\ldots$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^n\cdot 4}{(i+2)^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{(i-1)^{n+1}}\right)(z-i)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^n\cdot 4}{(i+2)^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{(i-1)^{n+1}}\right)(z-i)^n$$

(весь ряд есть главная часть); при $\sqrt{2}\leqslant|z-i|<\sqrt{5}$:

$$\ldots\frac{(-1)^n(i-1)^{n-1}}{3}\cdot\frac{1}{(z-i)^n}+\ldots-\frac{(i-1)^2}{3}\cdot\frac{1}{(z-i)^3}\cdot\frac{1}{(z-i)^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-i}+$$

$$+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{i+2}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(i+2)^2}\cdot(z-i)+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(i+2)^3}(z-i)^2+\ldots+\frac{4}{3}\frac{(-1)^n}{(i+2)^{n+1}}(z-i)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(i-1)^{n-1}}{3}\cdot\frac{1}{(z-i)^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{(i+2)^{n+1}}(z-i)^n=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n}{3(i-1)^{n+1}}(z-i)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{3}\frac{(-1)^n}{(i+2)^{n+1}}(z-i)^n;$$

при $\sqrt{5}<|z-i|<+\infty$:

$$\ldots+\frac{1}{3}[4\cdot(-1)^{n-1}(i+2)^{n-1}+(-1)^n(i-1)^{n-1}]\cdot\frac{1}{(z-i)^n}+\ldots-(3+i)\cdot\frac{1}{(z-i)^2}+\frac{1}{z-i}=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3}[4\cdot(-1)^{n-1}(i+2)^{n-1}+(-1)^n(i-1)^{n-1}]\cdot\frac{1}{(z-i)^n}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{4\cdot(-1)^{n-1}}{(i+2)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(i-1)^{n+1}}\right]\cdot(z-i)^n.$$

7.4.47. -2 — полюс 1-го порядка; ∞ — устранимая особая точка. **7.4.48.** i — полюс 2-го порядка; -3 — полюс 3-го порядка. **7.4.49.** 2 — существенно особая точка; ∞ — существенно особая точка. **7.4.50.** ∞ — существенно особая точка. **7.4.51.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$ — полюс 1-го порядка ($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$); ∞ — неизолированная особая точка. **7.4.52.** 0 — устранимая особая точка; πk — полюс 1-го порядка ($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$); ∞ — неизолированная особая точка. **7.4.53.** **а)** да; **б)** да; **в)** да; **г)** да. **7.4.54.** **а)** полюс; **б)** существенно особая точка; **в)** устранимая особая точка. **7.4.55.** **а)** $c'_n=c_{n-1}$; **б)** $c'_n=c_{n-3}$; **в)** $c'_n=c_{n+1}$; **г)** $c'_n=c_{n+m}$. **7.4.56.** **а)** $1<|z|<3$; **б)** $|z|=1$; **в)** $\varnothing$. **7.4.57.** **а)** устранимая особая точка; **б)** полюс; **в)** существенно особая точка; **г)** существенно особая точка; **д)** полюс порядка $\max(n;m)$. **7.4.58.** **а)** да; **б)** да; **в)** нет; **г)** да; **д)** да; **е)** да; **ж)** нет. **7.4.59.** **а)** полюс $(k-1)$-го порядка

при $k \neq 1$, устранимая особая точка при $k = 1$; **б)** полюс $(k-3)$-го порядка при $k > 3$, устранимая особая точка при $k \leqslant 3$; **в)** полюс $(k+1)$-го порядка; **г)** полюс $(k+5)$-го порядка. **7.4.60.** Устранимая особая точка.
7.4.61. Устранимая особая точка. **7.4.62.** *Указание.* Рассмотреть функцию $(z-z_0)f(z)$. **7.4.63.** *Указание.* Рассмотреть функцию $(z-z_0)^{m+1}\cdot f(z)$.
7.4.64. *Указание.* Рассмотреть разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$.

§ 5. Вычеты

7.5.5. 2 — полюс 1-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{2} f(z) = 3$; $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = -3$. **7.5.6.** πi — полюс 1-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{\pi i} f(z) = -1$; $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = 1$. **7.5.7.** $\frac{1}{2}$ — полюс 1-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{\frac{1}{2}} f(z) = -\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{2}+3\right)$; $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{1}{2}+3\right)$. **7.5.8.** $-i$ — полюс 2-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{-i} f(z) = -2i$; $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = 2i$. **7.5.9.** $-\frac{i}{2}$ — полюс 2-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{-\frac{i}{2}} f(z) = -\frac{1}{2}e^{-i} = \frac{1}{2}(i\sin 1 - \cos 1)$; $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = \frac{1}{2}e^{-i} = \frac{1}{2}(\cos 1 - i\sin 1)$.
7.5.10. 1 — полюс 3-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{1} f(z) = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 1$; $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = -\frac{1}{2}\operatorname{ch} 1$.
7.5.11. -1 — полюс 1-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{-1} f(z) = \dfrac{2}{1+2i} = \dfrac{2-4i}{5}$; $2i$ — полюс 1-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{2i} f(z) = \dfrac{2i-1}{1+2i} = \dfrac{3+4i}{5}$; $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = -1$. **7.5.12.** $-3i$ — полюс 1-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{-3i} f(z) = \dfrac{3i}{(3i+2)^2} = \dfrac{36+15i}{169}$; -2 — полюс 2-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{-2} f(z) = -\dfrac{36+15i}{169}$; $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = 0$. **7.5.13.** 0 — полюс 2-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{0} f(z) = -\dfrac{3}{\pi^2}$; $\dfrac{\pi}{3}$ — полюс 1-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{\frac{\pi}{3}} f(z) = \operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = \dfrac{3}{2\pi^2}$.
7.5.14. 0 — полюс 3-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{0} f(z) = 1$; 1 — полюс 1-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{1} f(z) = -\dfrac{1}{2}$; -1 — полюс 1-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{-1} f(z) = \dfrac{1}{2}$; $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = -1$.
7.5.15. 0 — полюс 3-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{0} f(z) = \dfrac{2}{729}$; 3 — полюс 2-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{3} f(z) = -\dfrac{1}{729}$; -3 — полюс 2-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{-3} f(z) = -\dfrac{1}{729}$; $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = 0$.
7.5.16. $\dfrac{\pi}{2}$ — устранимая особая точка, $\operatorname*{res}\limits_{\frac{\pi}{2}} f(z) = \operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = 0$. **7.5.17.** 0 — полюс 1-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{0} f(z) = 1$; $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = -1$. **7.5.18.** 0 — полюс 2-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{0} f(z) = \operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = 0$. **7.5.19.** $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ — полюсы 1-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{\frac{\pi}{2}+2\pi k} f(z) = -1$ $(k \in \mathbb{Z})$; $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ — полюсы 1-го порядка, $\operatorname*{res}\limits_{-\frac{\pi}{2}+2\pi k} f(z) = 1$ $(k \in \mathbb{Z})$; ∞ — неизолированная особая точка. **7.5.20.** 0 — устранимая особая

точка, $\operatorname*{res}_{0} f(z) = 0$; πk — полюсы 1-го порядка,

$\operatorname*{res}_{\pi k} f(z) = \begin{cases} \pi k, & k \text{ — четное}, \\ -\pi k, & k \text{ — нечетное}, \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$; ∞ — неизолированная особая точка. **7.5.21.** 0 — существенно особая точка, $\operatorname*{res}_{0} f(z) = 1$; $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -1$.

7.5.22. 0 — существенно особая точка, $\operatorname*{res}_{0} f(z) = -\frac{1}{2}$; $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{2}$.

7.5.25. а) $\frac{2\pi i}{3}$; **б)** $-\frac{2\pi i}{3}$; **в)** 0. **7.5.26.** $-\frac{\pi i}{2}$. **7.5.27.** $\frac{\pi}{2}i$ — полюс 1-го порядка, $\operatorname*{res}_{\frac{\pi}{2}i} f(z) = \sin(\pi i) = i \operatorname{sh} \pi$; $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -i \operatorname{sh} \pi$. **7.5.28.** $-\frac{\pi}{2}$ — полюс 2-го порядка, $\operatorname*{res}_{-\frac{\pi}{2}} f(z) = -\frac{3}{4}$; $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \frac{3}{4}$. **7.5.29.** $-\pi i$ — полюс 3-го порядка,

$\operatorname*{res}_{-\pi i} f(z) = 2\cos(2\pi i) - 2\pi i \sin(2\pi i) = 2 \operatorname{ch} 2\pi - 2\pi \operatorname{sh} 2\pi$;

$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 2\pi \operatorname{sh} 2\pi - 2 \operatorname{ch} 2\pi$. **7.5.30.** -2 — полюс 5-го порядка,

$\operatorname*{res}_{-2} f(z) = \frac{27}{8} \cos 6$; $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\frac{27}{8} \cos 6$. **7.5.31.** 0 — полюс 2-го порядка,

$\operatorname*{res}_{0} f(z) = \frac{1 - 8i}{16}$; $4i$ — полюс 1-го порядка, $\operatorname*{res}_{4i} f(z) = -\frac{1}{16} e^{-8i}$;

$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{16}\left(e^{-8i} + 8i - 1\right)$. **7.5.32.** 1 — полюс 3-го порядка, $\operatorname*{res}_{1} f(z) = \frac{3}{16}$;

-1 — полюс 3-го порядка, $\operatorname*{res}_{-1} f(z) = -\frac{3}{16}$; $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0$. **7.5.33.** 1 — полюс n-го порядка, $\operatorname*{res}_{1} f(z) = \begin{cases} 1, & n = 1, 2; \\ 0, & n = 3, 4, 5, \ldots; \end{cases}$ $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -2$. **7.5.34.** 0 — полюс 2-го порядка, $\operatorname*{res}_{0} f(z) = \frac{1}{2}$; $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\frac{1}{2}$. **7.5.35.** $k\pi$ — полюсы 2-го порядка,

$\operatorname*{res}_{k\pi} f(z) = \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0$ $(k \in \mathbb{Z})$. **7.5.36.** 0 — существенно особая точка,

$\operatorname*{res}_{0} f(z) = \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0$. **7.5.37. а)** $\frac{\pi i}{4}$; **б)** 0. **7.5.38. а)** $\frac{3\pi i}{8}$; **б)** $-\frac{3\pi i}{8}$; **в)** 0.

7.5.39. а) 0; **б)** 0. **7.5.40.** $\frac{\pi i}{60}$. **7.5.41. а)** да; **б)** нет; **в)** нет. **7.5.42.** Нет.

7.5.43. Да. **7.5.46.** $-\frac{4}{5}$. **7.5.47.** $\operatorname*{res}_{0} f(z) = \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0$;

$\operatorname*{res}_{z_k} f(z) = -\frac{z_k}{4}\left(\cos\sqrt{2} + \operatorname{ch}\sqrt{2}\right)$, где $z_k = e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Глава 8. Операционное исчисление

§ 1. Оригинал изображения. Преобразование Лапласа. Нахождение изображений

8.1.2. Да. **8.1.3.** Да. **8.1.4.** Да. **8.1.5.** Да. **8.1.6.** Нет. **8.1.7.** Да. **8.1.8.** Нет. **8.1.9.** Да. **8.1.10.** Нет. **8.1.11.** Да. **8.1.12.** Да. **8.1.13.** Нет. **8.1.15.** $\frac{2}{p}$.

8.1.16. $\frac{1}{p-2}$. **8.1.17.** $\frac{p}{p^2+16}$. **8.1.18.** $\frac{1}{p^2}$. **8.1.19.** $\frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-p}$.

8.1.20. $\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}e^{-p}-\frac{1}{p}e^{-2p}$. **8.1.21.** $\frac{e^{1-p}}{p-1}$. **8.1.23.** $\frac{3}{p+1}+\frac{p-1}{(p-1)^2+9}$.

8.1.24. $\frac{8}{p^2-4}-\frac{2}{p^3}$. **8.1.25.** $\frac{1}{(p-2)^2}-\frac{3}{(p^2+9}$. **8.1.26.** $\frac{1}{p+\ln 2}+\frac{1}{p}$.

8.1.27. $\frac{1}{e(p-1)^2}+\frac{2}{e^2(p-1)^3}$. **8.1.28.** $\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

8.1.29. $\frac{1}{2}\left[\frac{p}{p^2+4}+\frac{p}{p^2+16}\right]$. **8.1.30.** $\frac{1}{2}\left[\frac{p}{p^2+4}-\frac{p}{p^2+36}\right]-\frac{2p}{(p^2+1)^2}$.

8.1.31. $\frac{p^2-2p+3}{(p-1)(p^2-2p+5)}$. **8.1.33.** $\frac{(p-2)^2-9}{[(p-2)^2+9]^2}$. **8.1.34.** $\frac{2}{(p-1)^2-1}$.

8.1.35. $\frac{(p-4)^2+2}{(p-4)[(p-4)^2+4]}$. **8.1.36.** $\frac{4(p+1)}{[(p+1)^2+4]^2}$. **8.1.38.** $\frac{6e^{-3p}}{p^4}$.

8.1.39. $\frac{e^{-2p}}{p-2}$. **8.1.40.** $\frac{pe^{-\frac{p}{2}}}{p^2-4}$. **8.1.41.** $\frac{6pe^{-3p}}{(p^2+9)^2}$. **8.1.43.** $\frac{1}{p}\left(2-e^{-p}-e^{-2p}\right)$.

8.1.44. $\frac{1}{p^2}\left(1-e^{-p}\right)^2$. **8.1.45.** $\frac{1+e^{-p\pi}}{p^2+1}$. **8.1.46.** $\frac{e^{-p}-e^{-2p}}{p^2}$. **8.1.47.** $\frac{1}{p(1-e^p)}$.

8.1.49. $\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1+e^{-p\pi}}{1-e^{-p\pi}}$. **8.1.50.** $\frac{(e^p+1)^2}{p(e^{2p}-1)}$. **8.1.51.** $\frac{1-e^{-p}}{p^2(1+e^{-p})}$.

8.1.53. $\frac{2p^3-24p}{(p^2+4)^3}$. **8.1.54.** $\frac{24p(p^2-1)}{(p^2+1)^4}$. **8.1.55.** $\frac{6p}{(p^2-9)^2}$. **8.1.56.** $\frac{p^2+4}{(p^2-4)^2}$.

8.1.57. $\frac{2p-2}{(p^2-2p+2)^2}$. **8.1.59.** $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p$. **8.1.60.** $\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$. **8.1.61.** $\ln\frac{p}{p-2}$.

8.1.62. $\frac{1}{2}\ln\frac{p^2+1}{p^2+9}$. **8.1.64.** $\frac{4}{(p^2+4)^2}$. **8.1.65.** $\frac{p^2-9}{p(p^2+9)^2}$. **8.1.66.** $\frac{2}{p(p-2)^3}$.

8.1.67. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p^3}+\frac{p^2-4}{p(p^2+4)^2}\right]$. **8.1.68.** $\frac{4p-4}{p(p^2-2p+5)^2}$.

8.1.69. $\frac{3}{p+\ln 5}-\frac{2}{(p+\ln 3)^2}$. **8.1.70.** $\frac{3}{(p-1)^2+36}-\frac{1}{(p-1)^2+4}$.

8.1.71. $\frac{(p-2)^2-9}{[(p-2)^2+9]^2}$. **8.1.72.** $\frac{1}{2(p+1)}-\frac{p+1}{2(p^2+2p+5)}$.

8.1.73. $e^{-p}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}\right)$. **8.1.74.** $\frac{2e^{-2p}}{p^2+4}$. **8.1.75.** $\frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$. **8.1.76.** $\frac{12p^2+16}{(p^2-4)^3}$.

8.1.77. $\frac{6}{(p-\ln 4)^4}$. **8.1.78.** $\operatorname{arctg} p-\operatorname{arctg}\frac{p}{3}$. **8.1.79.** $\ln\frac{p-2}{p-1}$.

8.1.80. $\frac{1}{2p^3}-\frac{p^2-16}{2(p^2+16)^2}$. **8.1.81.** $\frac{3!}{p(p-1)^4}$. **8.1.82.** $\frac{p^2-6p-7}{p(p^2-6p+25)^2}$.

8.1.83. $\frac{1}{1-e^{-p}+e^{-2p}}$. **8.1.84.** $\frac{1}{p^2+1}\left(p+\frac{2e^{\frac{\pi}{2}p}}{e^{\pi p}-1}\right)$.

8.1.85. $\frac{e^{2\pi p}-2e^{\frac{3\pi}{2}p}+2e^{\frac{\pi}{2}p}-1}{p^2(e^{2\pi p}-1)}$. **8.1.86.** $\frac{e^p}{p(e^p-1)}$. **8.1.87.** $\frac{2e^p-2-2p-p^2}{p^3(e^p-1)}$.

8.1.88. Нет, т. к. $F(p)$ имеет полюсы в точках $p = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ и, следовательно, не может быть аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s$ для всех s.
8.1.89. **1)** да; **2)** необязательно. **8.1.90.** Не обязательно; например, $f(t) = g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ — оригиналы, а $f(t)g(t) = \dfrac{1}{t}$ — нет.

§ 2. Свертка функций. Отыскание оригинала по изображению

8.2.2. $3 + \frac{5}{2}t^2 + 7e^{-t}$. **8.2.3.** $\frac{1}{6}e^{-3t}t^4 - \frac{4}{3}e^{4t}t^3$. **8.2.4.** $3\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t$.
8.2.5. $5\operatorname{ch} 2t - \frac{3}{2}\operatorname{sh} 2t$. **8.2.6.** $e^{-t}(\cos t - \sin t)$. **8.2.7.** $e^{-2t}\left(\frac{11}{2}\sin 2t - 4\cos 2t\right)$.
8.2.8. $3e^{-3(t-1)}\chi(t-1)$. **8.2.9.** $(t-1)e^{2t-2}\chi(t-1) + (t-2)e^{2t-4}\chi(t-2)$.
8.2.10. $4e^{9-3t}\sin(t-3)\chi(t-3)$.
8.2.11. $e^{5-5t}\left[\cos 2(t-1) - \frac{5}{2}\sin 2(t-1)\right]\chi(t-1) -$
$- 3e^{20-5t}\left[\cos 2(t-4) - \frac{5}{2}\sin 2(t-4)\right]\chi(t-4)$. **8.2.13.** $t + t^2$. **8.2.14.** $e^t + 2e^{2t}$.
8.2.15. $3e^t - 1$. **8.2.16.** $te^t - t$. **8.2.17.** $e^t + e^{-t} + \sin t$. **8.2.18.** $1 + 2e^{-2t} + 3e^{3t}$.
8.2.19. $\frac{1}{2}t^2 + t + e^t$. **8.2.20.** $1 + e^t\sin 2t + 2e^t\cos 2t$.
8.2.21. $te^{-3t} - 3t^2e^{-3t} + \frac{3}{2}t^3e^{-3t}$. **8.2.22.** $\cos t + \sin 2t$.
8.2.23. $\frac{1}{9}(e^{-2t} - e^t + 3te^t)$. **8.2.24.** $e^t(1 - t^2)$. **8.2.25.** $\frac{1}{4}te^t + \frac{3}{4}te^{-t}$.
8.2.26. $e^{2t} + te^{2t} + e^{-2t} - 2te^{-2t}$. **8.2.27.** $t\sin t + \sin t$.
8.2.28. $e^t(\sin t + 2\cos t + 3t\cos t)$. **8.2.29.** $\left[\operatorname{sh}(t-3) + \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2t-6)\right]\chi(t-3)$.
8.2.30. $\frac{1}{6}(t-1)^2e^{2-2t}\left[3 - 4(t-1) + (t-1)^2\right]\chi(t-1)$. **8.2.32.** $2t$. **8.2.33.** $\frac{1}{2}t^2$.
8.2.34. $t\sin t$. **8.2.35.** $e^{2t} - e^t$. **8.2.36.** $1 - \cos t$. **8.2.37.** $\dfrac{2}{(p^2+1)(p^2+4)}$.
8.2.38. $\dfrac{2}{p^4 - 3p^3}$. **8.2.39.** $\dfrac{6}{p^3(p^2+1)}$. **8.2.40.** $\dfrac{p}{p^4 - 2p^2 + 1}$. **8.2.41.** $e^t - 1$; $\dfrac{1}{p^2 - p}$. **8.2.42.** $\frac{1}{2}\left(e^{5t} - e^{3t}\right)$; $\dfrac{1}{(p-3)(p-5)}$. **8.2.43.** $\frac{1}{2}\left(e^t - \cos t - \sin t\right)$; $\dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$. **8.2.44.** $\frac{1}{4}\left(1 + 2t - 2t^2 - \cos 2t - \sin 2t\right)$; $\dfrac{2p-4}{p^5 + 4p^3}$.
8.2.45. $2 + t - 2e^t + te^t$; $\dfrac{1}{p^2(p-1)^2}$. **8.2.46.** $\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t$; $\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$.
8.2.47. $2 - 2\cos t - t\sin t$; $\dfrac{2}{p(p^2+1)^2}$. **8.2.48.** $(t-1)\chi(t-1)$.
8.2.49. $(t-3)e^{t-3}\chi(t-3)$. **8.2.51.** $\frac{3}{16}\sin 2t - \frac{3}{8}t\cos 2t$. **8.2.52.** $\frac{1}{2}\left(\sin t + t\cos t\right)$.
8.2.53. $\frac{1}{2}e^t(\sin t - t\cos t)$. **8.2.54.** $\frac{1}{24}(3\sin t - \sin 3t)$. **8.2.56.** $\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$.
8.2.57. $\frac{1}{4}\left(1 + 2t - 2t^2 - \cos 2t\sin 2t\right)$. **8.2.58.** $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$. **8.2.59.** 4.
8.2.61. $\frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$. **8.2.62.** $\frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t$.

8.2.63. $\frac{1}{2}t\sin t$. **8.2.64.** $\frac{1}{12}\left(e^{-2t}+3e^{2t}-4e^{t}\right)$. **8.2.65.** $\frac{1}{6}\left(4e^{3t}-9e^{2t}+6e^{t}-1\right)$.
8.2.66. $\frac{1}{2}(\operatorname{sh}t-\cos t)$. **8.2.67.** $5+\frac{1}{2}t^3+e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$. **8.2.68.** te^t-e^{2t}.
8.2.69. $t(\cos t+2\sin t)$. **8.2.70.** $t\cos t-t$. **8.2.71.** $t-t^2+3\sin t$.
8.2.72. $[\operatorname{sh}(t-3)-\sin(t-3)]\chi(t-3)$. **8.2.73.** $e^t(t\cos 2t+\sin 2t)$.
8.2.74. $\cos(t-1)\cdot\chi(t-1)+\cos(t-2)\chi(t-2)$. **8.2.75.** $\frac{1}{3}\left[e^{3(t-\frac{1}{2})}-1\right]\chi\left(t-\frac{1}{2}\right)$.
8.2.76. $\frac{1}{6}t^3$. **8.2.77.** $3(e^t-1)$. **8.2.78.** te^t. **8.2.79.** $\frac{1}{5}(\sin 2t-\sin 3t)$.
8.2.80. $6+4t+t^2-6e^t+2te^t$. **8.2.81.** $\frac{1}{6}(t-1)^3\cdot\chi(t-1)$.
8.2.82. $\frac{1}{2}\left(\sin\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)-\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\cdot\chi\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)$. **8.2.84.** а) нет; б) нет. **8.2.86.** Нет. Например, $1*t^2=2t*t$. **8.2.87.** $\cos t$. **8.2.88.** $t^2\sin t$.
8.2.89. $f(t)=\begin{cases}\sin t, & 2k\pi<t\leqslant(2k+1)\pi,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$ *Указание*. Представить дробь $\frac{1}{1-e^{-\pi p}}$ в виде геометрической прогрессии.

§ 3. Приложения операционного исчисления

8.3.3. $2e^{-3t}$. **8.3.4.** $e^{4t}+t$. **8.3.5.** $\sin t+\cos t-e^{-t}$. **8.3.6.** $2e^t+e^{-5t}$.
8.3.7. $e^{3t}-te^{3t}$. **8.3.8.** $3\sin 2t+\cos 2t$. **8.3.9.** $e^{-2t}-\frac{1}{2}$. **8.3.10.** $e^{2t}-e^{5t}+\sin t$.
8.3.11. $3e^{2t}+t+1$. **8.3.12.** $te^{-t}+t$. **8.3.13.** $\frac{3}{25}-\frac{1}{5}t-\frac{3}{25}e^t\cos 2t+\frac{4}{25}e^t\sin 2t$.
8.3.14. $\frac{1}{2}\left(1-e^t\cos t+e^t\sin t\right)$. **8.3.15.** te^t+3e^t+1. **8.3.16.** $1-2\cos t$.
8.3.17. $-\frac{1}{4}e^t-\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin t$. **8.3.18.** $t\operatorname{ch}t$. **8.3.19.** $te^{-t}+2e^{-t}+t-2$.
8.3.20. $e^{-t}\cos 3t-e^{-t}\sin 3t+\sin 3t$. **8.3.21.** $1+2t+e^{-t}$.
8.3.22. $4+2\sin t-3\cos t$. **8.3.23.** $e^t-te^t+\frac{1}{2}t^2e^t$. **8.3.24.** $e^t-e^{-t}-2t$.
8.3.25. $1+e^t\sin t$. **8.3.26.** $\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin t$. **8.3.27.** $te^t+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}e^t-\frac{1}{12}e^{-3t}$.
8.3.28. $3e^t-2\sin t-t^3$. **8.3.29.** $e^t+te^{-t}+t\sin t$. **8.3.30.** $\operatorname{ch}t-\frac{1}{2}t^2-1$.
8.3.31. $c_1e^t+c_2e^{-t}$. **8.3.32.** $c_1e^{-t}+c_2te^{-t}+1$. **8.3.33.** $c_1e^t+c_2e^{-2t}+te^t$.
8.3.34. $e^t(c_1\cos t+c_2\sin t)+t^2+t$. **8.3.35.** $c_1+c_2\sin t+c_3\cos t+2t$.
8.3.37. $\chi(t-1)-e^{1-t}\chi(t-1)$.
8.3.38. $\left(e^t-1-t^2\right)\chi(t)-\left(e^{t-1}-1-(t-1)^2\right)\chi(t-1)$.
8.3.39. $\chi(t)+\chi(t-1)-\cos(t-1)\chi(t-1)$. **8.3.40.** $\frac{1}{4}\left[\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\chi(t)-\right.$ $\left.-(2t-2-\sin(2t-2))\chi(t-1)+\left(t-2-\frac{1}{2}\sin(2t-4)\right)\chi(t-2)\right]$.
8.3.41. $(\operatorname{sh}t-t)\chi(t)-(\operatorname{sh}(t-1)-t+1)\chi(t-1)$. **8.3.43.** $2+t^4$. **8.3.44.** 1.
8.3.45. te^{-t}. **8.3.47.** $x(t)=e^t$, $y(t)=-e^t$. **8.3.48.** $x(t)=\frac{6}{5}e^{5t}-\frac{1}{5}e^{-5t}$, $y(t)=\frac{3}{5}e^{5t}+\frac{2}{5}e^{-5t}$. **8.3.49.** $x(t)=t$, $y(t)=t-1$. **8.3.50.** $x(t)=e^t$, $y(t)=0$,

$z(t) = -e^t$. **8.3.51.** $x(t) = 1$, $y(t) = t$, $z(t) = t^2$. **8.3.52.** $x(t) = te^t$, $y(t) = e^t$.
8.3.53. $x(t) = \frac{1}{3}\left(e^t + 2\cos 2t + \sin 2t\right)$, $y(t) = \frac{2}{3}\left(e^t - \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)$.
8.3.55. $x(t) = \cos t - \sin t$. **8.3.56.** $x(t) = 1$. **8.3.57.** $x(t) = 2t + \frac{1}{3}t^3$.
8.3.58. $x(t) = 2te^t + t^2e^t$. **8.3.59.** $x(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \operatorname{ch} t)$.
8.3.60. $x(t) = \frac{2}{5}e^{2t} + \frac{3}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t$.
8.3.61. $x(t) = \frac{1}{3}te^t - \frac{2}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}} \cdot \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$. **8.3.62.** $x(t) = \frac{2}{3}\operatorname{sh} t + \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin(t\sqrt{2})$.
8.3.63. $x(t) = e^t$. **8.3.64.** $x(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x + \cos x)$. **8.3.65.** $x(t) = x - \frac{1}{6}x^3$.
8.3.66. $x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$. **8.3.67.** $x(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{5}{12}e^{-3t} - \frac{2}{3}$.
8.3.68. $x(t) = e^t + 1$. **8.3.69.** $x(t) = t^2 - 4t + 6 - 5e^{-t} - te^{-t}$.
8.3.70. $x(t) = \frac{1}{2}t\sin t - \cos t + \sin t$. **8.3.71.** $x(t) = 4 + \sin t$.
8.3.72. $x(t) = 1 - 2\cos t$. **8.3.73.** $x(t) = e^t - te^t + \frac{t^2}{2}e^t - 1$.
8.3.74. $x(t) = 4t + 3 - 2e^t$. **8.3.75.** $x(t) = \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t + \frac{1}{10}e^{2t} - \frac{1}{2}$.
8.3.76. $x(t) = \cos t + \sin t + e^t - e^{-t} - 1$. **8.3.77.** $x(t) = 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$.
8.3.78. $x(t) = t + (t-1)\chi(t-1)$. **8.3.79.** $x(t) = c_1 + c_2e^{4t} - \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16}t$.
8.3.80. $x(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + t^2 + t$. **8.3.81.** $x(t) = c_1\sin t + c_2\cos t + t\sin t$.
8.3.82. $x(t) = c_1 + c_2t + c_3e^t + te^t$.
8.3.83. $x(t) = (c_1 + c_2t)e^{2t} + (c_3 + c_4t)e^{-2t} + \frac{1}{25}\cos t$. **8.3.84.** $x(t) = 1$.
8.3.85. $x(t) = 1 - \frac{x^2}{2}$. **8.3.86.** $x(t) = \pm\sin t$.
8.3.87. $x(t) = \frac{1}{3}\left(e^t - e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.
8.3.88. $x(t) = 2 + t - e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. **8.3.89.** $x(t) = \frac{1}{3}(4 - \cos t\sqrt{3})$.
8.3.90. $x(t) = \sin t$. **8.3.91.** $x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$. **8.3.92.** $x(t) = t$, $y(t) = 2$.
8.3.93. $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$. **8.3.94.** $x(t) = t^2 - 1$, $y(t) = t - 1$.
8.3.95. $x(t) = e^t$, $y(t) = e^t + 1$, $z(t) = 1$. **8.3.96.** $x(t) = 2 - e^{-t}$, $y(t) = 2 - e^{-t}$, $z(t) = 2e^{-t} - 2$. **8.3.97.** $x(t) = e^t$, $y(t) = 2e^t + 1$, $z(t) = 2 - e^t$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Значение функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Сотые доли x									
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	1714	1692	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1540	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1181	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
	Десятые доли x									
2,	0540	0440	0355	0283	0224	0175	0136	0104	0079	0060
3,	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0030	0020

Приложение 2. Значение функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Сотые доли x									
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
	Десятые доли x									
2,	4773	4821	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	4981
3,	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	5000^8

По вопросам оптовых закупок обращаться:
тел./факс: (095) 785-15-30, e-mail: trade@airis.ru
Адрес: Москва, пр. Мира, 106

Наш сайт: www.airis.ru

Вы можете приобрести наши книги
с 11^{00} до 17^{30}, кроме субботы, воскресенья,
в киоске по адресу: пр. Мира, д. 106, тел.: 785-15-30

Адрес редакции: 129626, Москва, а/я 66

Издательство «Айрис-пресс» приглашает к сотрудничеству авторов образовательной и развивающей литературы.
По всем вопросам обращаться
по тел.: (095) 785-15-33, e-mail: editor@airis.ru

Учебное издание

Лунгу Константин Никитович
Норин Владимир Павлович
Письменный Дмитрий Трофимович
Шевченко Юрий Алексеевич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
2 курс

Издание третье, исправленное

Ведущий редактор *В. В. Черноруцкий*
Художественный редактор *А. М. Драговой*
Иллюстрации *Н. Г. Рысьева, А. Ю. Терская*
Технический редактор *С. С. Коломеец*
Верстка *Е. Г. Иванов*
Корректор *З. А. Тихонова*

Подписано в печать 11.07.05. Формат 60×90/16. Печать офсетная.
Печ. л. 37. Усл.-печ. л. 37. Тираж 5000 экз. Заказ № 1696.

ООО «Издательство "Айрис-пресс"»
113184, Москва, ул. Б. Полянка, д. 50, стр. 3.

ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР».
170040, г. Тверь, пр. 50 лет Октября, 46.