Б.В. Соболь, Н.Т. Мишняков,
В.М. Поркшеян

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Высшее образование

Б. В. Соболь, Н. Т. Мишняков,
В. М. Поркшеян

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Издание третье, исправленное

Ростов-на-Дону
Феникс
2006

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
КТК 11
С 54

Рецензент: профессор, доктор физико-математических наук С. Б. Климентов

Соболь Б. В.

С 54 Практикум по высшей математике / Б. В. Соболь, Н. Т. Мишняков, В. М. Поркшеян. — Изд. 3-е. — Ростов н/Д: Феникс, 2006. — 640 с. — (Высшее образование).

ISBN 5-222-09617-3

В книгу вошли все разделы стандартного курса высшей математики для широкого спектра специальностей высших учебных заведений.

Каждая глава (соответствующий раздел курса) содержит справочный материал, а также основные теоретические положения, необходимые для решения задач. Отличительной особенностью данного издания является большое количество задач с решениями, что позволяет использовать его не только для аудиторных занятий, но и для самостоятельной работы студентов. Задачи представлены по темам, систематизированы по методам решения. Завершают каждую главу наборы заданий для самостоятельного решения, снабженные ответами.

Полнота изложения материала и относительная компактность данного издания позволяют рекомендовать его преподавателям и студентам высших учебных заведений, а также слушателям институтов повышения квалификации, желающим систематизировать свои знания и навыки по этому предмету.

ISBN 5-222-09617-3

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

Предисловие

В настоящее время в нашей стране издается огромное количество учебников и сборников задач, отражающих различные разделы курса высшей математики. Часть из них – рекомендованы Министерством образования Российской Федерации и являются базовыми для студентов соответствующих специальностей. Существует также ряд изданий, в которых наряду с наборами задач содержится справочный материал по различным разделам курса. Между тем, как показывает опыт, значительные трудности у студентов вызывает именно овладение практическими навыками решения задач. Это обусловлено, в значительной степени, тем, что эти издания, в силу своей направленности, не могут содержать достаточное количество примеров, иллюстрирующих те или иные методы решения задач.

Решение этой проблемы, как правило, наши коллеги находят в каждом вузе путем издания многочисленных методических разработок по каждому разделу. С нашей точки зрения, эффективность такого подхода не всегда достаточно высока по ряду причин. Во-первых, это – ограниченность объема каждого из этих изданий, материал в них всегда излагается крайне конспективно; во-вторых, такие методические разработки, к сожалению, не всегда достаточно тщательно рецензируются и бывают не вполне проработаны с методической точки зрения. Наконец, как показывает опыт, они не всегда бывают легко доступны для студентов.

По своему содержанию Практикум по высшей математике отвечает всем современным требованиям, предъявляемым к выпускникам широкого спектра специальностей высших учебных заведений России по этой дисциплине, и включает все разделы, указанные в соответствующих Государственных образовательных стандартах.

Материал Практикума предоставляет возможность студентам самостоятельно освоить основные положения курса высшей математики, приобрести и закрепить практические навыки решения задач. Особенно полезен Практикум может быть для студентов, обучающихся по заочной форме обучения, а также в активно развивающейся в последние годы системе дистанционного образования.

Вместе с этим, по мнению авторов, наиболее эффективный результат может быть достигнут, если использовать книгу постоянно, как для аудиторных занятий, так и для самостоятельной работы.

Несколько слов о том, как работать с этой книгой.

Прежде, чем приступать к изучению методов решения задач, необходимо повторить основные определения и теоремы, относящиеся к данному разделу, постараться понять и запомнить наиболее часто используемые формулы.

После этого переходите к изучению разобранных примеров. Некоторые типовые задачи и методы рассмотрены в книге как в общем виде, так и на примерах. Весьма полезно изучить и то и другое. Это поможет вам не только отработать навыки решения задач (иногда отчасти формально!), но и лучше понять и усвоить теоретический материал.

Внимательно прочитайте условие. Постарайтесь продумать ход решения задачи самостоятельно. При необходимости, просмотрите внимательно предложенное решение, постарайтесь его осмыслить. Теперь можно пытаться воспроизвести решение разобранной задачи. Если вам удалось разобрать, таким образом, определенный тип задач или метод решения, переходите к задачам для самостоятельного решения.

Желаем вам успеха!

1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Линейные операции над векторами

Понятие вектора

Определение 1. *Вектором* называется направленный отрезок (или, что то же, упорядоченная пара точек).

Обозначают: $\overrightarrow{AB}$ (точка A – начало вектора, точка B – конец вектора) или одной буквой – $\vec{a}$.

Определение 2. *Длиной вектора (модулем)* называется расстояние между началом и концом вектора. Длина вектора обозначается $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение 3. *Нулевым вектором* называется вектор, у которого начало и конец совпадают. Обозначают: $\vec{0}$.

Определение 4. *Единичным вектором* называется вектор, длина которого равна единице.

Единичный вектор, имеющий одинаковое направление с данным вектором $\vec{a}$, называется ортом вектора $\vec{a}$ и обозначается обычно символом $\overrightarrow{a_0}$.

Определение 5. Векторы называются *коллинеарными,* если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Определение 6. Векторы называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и одинаковое направление.

Линейные операции над векторами

Определение 7. *Линейными операциями над векторами* называются сложение векторов и умножение вектора на число.

Определение 8. *Суммой* $\vec{a}+\vec{b}$ *двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (правило треугольника). В случае неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно вместо правила треугольника использовать правило параллелограмма: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отложены от общего начала и на них построен параллелограмм, то сумма $\vec{a}+\vec{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущего из общего начала $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Определение 9. *Разностью* $\vec{a} - \vec{b}$ *двух векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ составляет вектор $\vec{a}$. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отложены от общего начала, то их разность есть вектор, исходящий из конца вектора $\vec{b}$ («вычитаемого») к концу вектора $\vec{a}$ («уменьшаемого»).

Определение 10. Два коллинеарных вектора равной длины, направленные в противоположные стороны, называются *противоположными*. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

Замечание.

1. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно рассматривать как сумму векторов $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

2. Сложение многих векторов производится при помощи последовательного применения правила треугольника (правило многоугольника).

Определение 11. *Произведением* вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|\vec{b}| = |\alpha|\,|\vec{a}|$;

б) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

в) векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ направлены одинаково, если $\alpha > 0$, и противоположно, если $\alpha < 0$ (если же $\alpha = 0$, то $\vec{b} = \vec{0}$).

Произведение вектора $\vec{a}$ на число α обозначают $\alpha\vec{a}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число обладают следующими свойствами:

1) сложение векторов ассоциативно, т. е. для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ выполняется равенство:
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c};$$
2) сложение векторов коммутативно, т. е. для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство:
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$$
3) прибавление нулевого вектора к любому вектору $\vec{a}$ не меняет последнего:
$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a};$$
4) для любого вектора $\vec{a}$ существует противоположный вектор $-\vec{a}$, такой что
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0};$$

5) умножение вектора на действительное число ассоциативно, т. е. для любых чисел α и β и любого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство:
$$(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a});$$
6) умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению чисел, т. е. для любых чисел α и β и любого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство:
$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a};$$
7) умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению векторов, т. е. для любых векторов α и β и любого числа α выполняется равенство:
$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b};$$
8) умножение вектора на единицу не меняет этого вектора:
$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

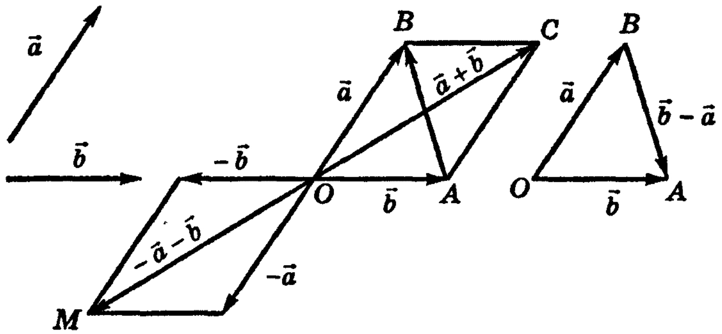
Теорема 1 *(о коллинеарных векторах)*. Если $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ – два коллинеарных вектора, причем вектор $\overrightarrow{e_1}$ – ненулевой, то существует единственное число x такое, что
$$\overrightarrow{e_2} = x\,\overrightarrow{e_1}.$$

В частности, ненулевой вектор $\vec{a}$ и его орт $\overrightarrow{a_0}$ связаны равенством:
$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \overrightarrow{a_0}.$$

Сформулированные свойства линейных операций позволяют преобразовать выражения, составленные из векторов, по обычным правилам алгебры: можно раскрыть скобки, приводить подобные члены, переносить некоторые члены в другую часть равенства с противоположным знаком и т. д.

Пример 1. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов:
а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $\vec{b} - \vec{a}$; г) $-\vec{a} - \vec{b}$.

Решение. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложим их от общего начала и построим указанные векторы либо по правилу параллелограмма, либо по правилу треугольника.



Ответ: а) $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC}$; б) $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}$;

в) $\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$; г) $-\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OM}$.

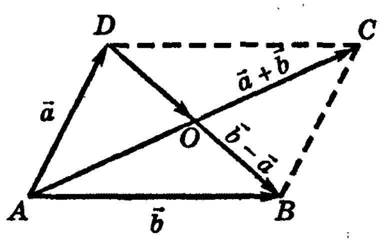
Пример 2. Доказать равенства:

а) $\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$;

б) $\vec{a}-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

и выяснить, каков их геометрический смысл.

Решение. а) В левой части равенства раскроем скобки, приведем подобные члены, получим вектор в правой части. Поясним это равенство геометрически. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложим их от общего начала и построим параллелограмм и его диагонали, получим:



По правилу построения разности двух векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$, получим $\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{a}$. Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то

$$\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right).$$

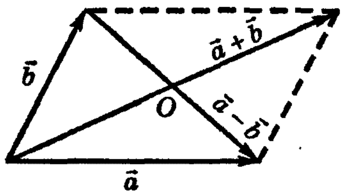
Тогда $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}$ или $\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$.

б) Аналогично объясняется второе равенство.
Равенства доказаны.

Пример 3. Дано: $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ и $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Вычислить $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Решение. Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и на них построен параллелограмм. Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ – диагонали параллелограмма, $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$ –длины его диагоналей. Известна теорема: сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон параллелограмма. Поэтому:

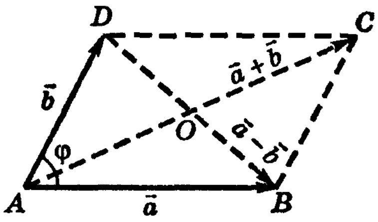
$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$, и $24^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(13^2 + 19^2)$.



Отсюда $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 484$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$. ($|\vec{a} - \vec{b}| > 0$).
Ответ: 22.

Пример 4. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы имели место следующие соотношения:
а) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; б) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$; в) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$.

Решение. На векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построим параллелограмм.



Обозначим угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через φ, тогда $\angle A = \varphi$, $\angle B = \pi - \varphi$. По теореме косинусов:

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \varphi$,
$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \varphi$.

Если $\varphi < \dfrac{\pi}{2}$, то очевидно, что $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$, если $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, т. е. $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $ABCD$ – прямоугольник, $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$ и $|a + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, если $\varphi > \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos \varphi < 0$ и $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$.

Ответ: если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то справедливо равенство а);

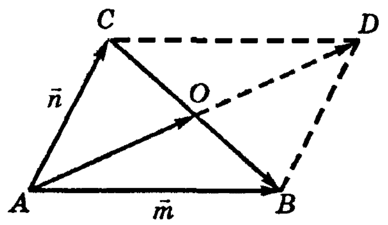
если $\varphi < \frac{\pi}{2}$, то справедливо равенство б);

если $\varphi > \frac{\pi}{2}$, то справедливо равенство в).

Пример 5. В треугольнике ABC вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ и вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$. Построить каждый из следующих векторов:

а) $\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$; б) $\frac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$; в) $\frac{\vec{n}-\vec{m}}{2}$; г) $-\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$.

Решение.



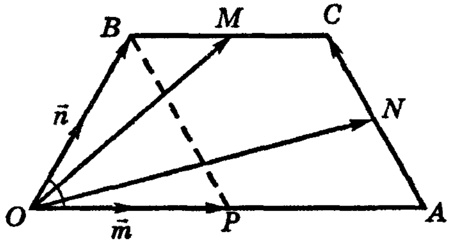
По правилу параллелограмма сложение двух векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ получаем: $\overrightarrow{AD} = \vec{m} + \vec{n}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AO} = \frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$.

По правилу нахождения разности двух векторов: $\overrightarrow{CB} = \vec{m} - \vec{n}$ и $\overrightarrow{OB} = \frac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$. Векторы, противоположные построенным векторам, есть: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DO} = -\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$ и $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OC} = \frac{\vec{n}-\vec{m}}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2} = \overrightarrow{AO}$; б) $\frac{\vec{m}-\vec{n}}{2} = \overrightarrow{OB}$; в) $\frac{\vec{n}-\vec{m}}{2} = \overrightarrow{BO}$; г) $-\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2} = \overrightarrow{OA}$.

Пример 6. В равнобедренной трапеции $OACB$ угол $\angle BOA = 60°$, $OB = BC = CA = 2$, M и N – середины сторон BC и AC. Выразить векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{MN}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы направлений $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

Решение.



По правилу треугольника сложения двух векторов имеем:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = 2\vec{n} - 2\vec{m} = 2(\vec{n} - \vec{m});$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = 2\vec{n} + \vec{m};$

$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = 2\vec{n} + 2\vec{m} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} =$

$= 2\vec{n} + 2\vec{m} - \frac{2}{2}(\vec{n} - \vec{m}) = 3\vec{m} + \vec{n},$

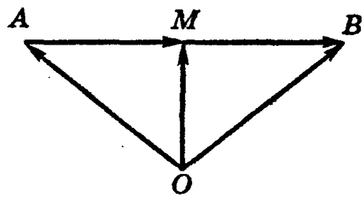
$\overrightarrow{ON} = 3\vec{m} + \vec{n};$ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} =$
$= 3\vec{m} + \vec{n} - 2\vec{n} - \vec{m} = 2\vec{m} - \vec{n}.$

Ответ: $\overrightarrow{AC} = 2(\vec{n} - \vec{m});$ $\overrightarrow{OM} = 2\vec{n} + \vec{m};$

$\overrightarrow{ON} = 3\vec{m} + \vec{n},$ $\overrightarrow{MN} = 2\vec{m} - \vec{n}.$

Пример 7. Доказать, что если M – середина отрезка AB и O – произвольная точка пространства, то выполняется равенство: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. (*)

Решение.



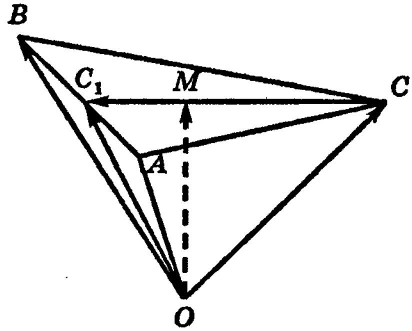
Согласно условию задачи имеем: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. По правилу нахождения разности двух векторов имеем:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{MB} =$
$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$.

Тогда $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$, $2 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. Равенство доказано.

Пример 8. M – точка пересечения медиан треугольника ABC, O – произвольная точка пространства. Доказать равенство: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. (**)

Решение.



Пусть CC_1 – медиана треугольника ABC. По свойству медиан $\overrightarrow{MC_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1}$. Применяя к векторам $\overrightarrow{MC_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ формулу вычитания векторов, получим:

$\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC})$, отсюда: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC_1}$.

Но $\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, тогда $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

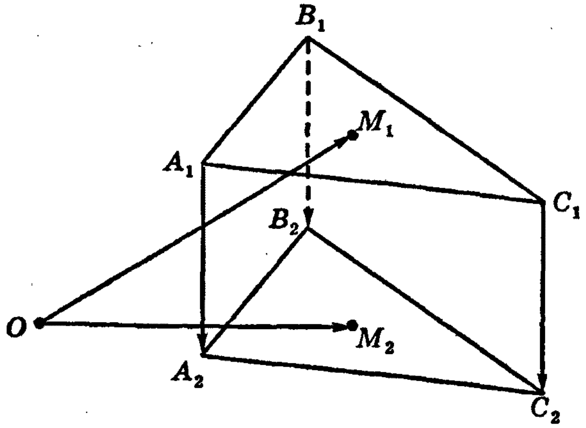
Окончательно, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Равенство доказано.

Пример 9. Даны два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Выразить вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, соединяющий точки пересечения медиан этих треугольников через векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$.

Решение.

Применим формулу для точки пересечения медиан треугольника (центра тяжести):

$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1})$,



$$\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2}).$$

Тогда $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}[(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}) +$
$+ (\overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OB_1}) + (\overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OC_1})] =$
$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}).$

Ответ: $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}).$

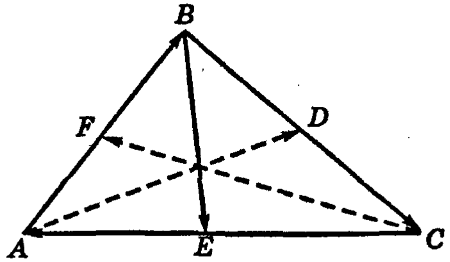
Пример 10. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ – медианы треугольника ABC.

Доказать, что равенство $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

Решение.

Так как точка D – середина отрезка BC, то по правилу треугольника находим:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$



Аналогично, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Сложим равенства, получим

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Следствие.

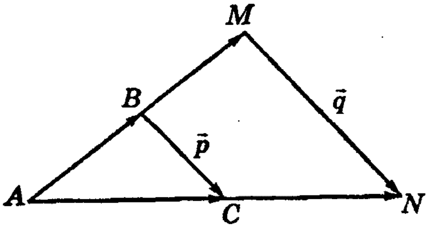
1) Необходимым и достаточным условием того, что три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют треугольник, является равенство нулю суммы этих векторов: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

2) Отсюда следует, что если мы построим сумму векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$ по правилу многоугольника, то получим треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны медианам треугольника ABC.

Пример 11. В треугольнике ABC: $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AN} = \beta \cdot \overrightarrow{AC}$.

а) При каком соотношении между α и β векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны?

б) Пусть α и β таковы, что векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ не коллинеарны. Полагая $\overrightarrow{BC} = \vec{p}$ и $\overrightarrow{MN} = \vec{q}$, выразить векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ через $\vec{p}$ и $\vec{q}$.



Решение.

а) Так как по условию $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AN} = \beta \cdot \overrightarrow{AC}$, то $\dfrac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \alpha$, $\dfrac{|\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \beta$. Отсюда следует, что если $\alpha = \beta$, то треугольники ABC и AMN подобны, а векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны.

б) Пусть векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ не коллинеарны, тогда из AMN:

$\vec{q} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \beta \cdot \overrightarrow{AC} - \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$. С другой стороны, из ΔABC: $\vec{p} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Получим систему уравнений: $- \left\{\begin{array}{l} \beta \cdot \overrightarrow{AC} - \alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{q} \\ \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{p} \end{array}\right| \cdot \beta$

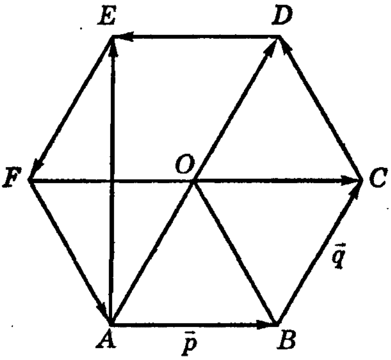
Отсюда: $\overrightarrow{AB} = \dfrac{\beta}{\alpha-\beta}\cdot\vec{p} - \dfrac{1}{\alpha-\beta}\cdot\vec{q}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \vec{p}$.

$$\overrightarrow{AC} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\vec{p} - \frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\vec{q}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AB} = \dfrac{\beta}{\alpha-\beta}\cdot\vec{p} - \dfrac{1}{\alpha-\beta}\cdot\vec{q}$,

$$\overrightarrow{AC} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\vec{p} - \frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\vec{q}.$$

Пример 12. $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, причем $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{q}$. Выразить через $\vec{p}$ и $\vec{q}$ векторы $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AE}$.



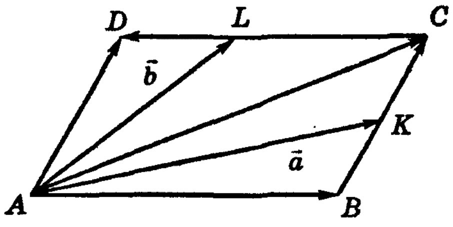
Решение. Так как $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC} = \vec{q}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \vec{p}$, то $\overrightarrow{CD} = \vec{q} - \vec{p}$. $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{DE}| = |\overrightarrow{AB}|$ и так как векторы $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{AB}$ противоположно направлены, то $\overrightarrow{DE} = -\vec{p}$. Вектор $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{BC}$, $|\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{BC}|$, но векторы $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{BC}$ противоположно направлены, поэтому $\overrightarrow{EF} = -\vec{q}$. $\overrightarrow{FA} \parallel \overrightarrow{CD}$, $|\overrightarrow{FA}| = |\overrightarrow{CD}|$, но векторы $\overrightarrow{FA}$ и $\overrightarrow{CD}$ противоположно направлены, поэтому $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{CD} = -(\vec{q} - \vec{p}) = \vec{p} - \vec{q}$, $\overrightarrow{FA} = \vec{p} - \vec{q}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{p} + \vec{q}$ (по правилу треугольника). Вектор $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$, $|\overrightarrow{AD}| = 2\,|\overrightarrow{BC}|$; $\overrightarrow{AD} = 2\cdot\overrightarrow{BC} = 2\,\vec{q}$. Вектор $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}$, поэтому $\overrightarrow{AE} = -(-\vec{q} + \vec{p} - \vec{q}) = -\vec{p} + 2\,\vec{q}$,

$\overrightarrow{AE} = -\vec{p} + 2\,\vec{q}$.

Ответ: $\overrightarrow{CD} = \vec{q} - \vec{p}$, $\overrightarrow{DE} = -\vec{p}$, $\overrightarrow{EF} = -\vec{p}$, $\overrightarrow{FA} = \vec{p} - \vec{q}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{p} + \vec{q}$, $\overrightarrow{AD} = 2\,\vec{q}$, $\overrightarrow{AE} = -\vec{p} + 2\,\vec{q}$.

Пример 13. Точки K и L служат серединами сторон $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AL} = \vec{b}$.

Решение.



$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} =$

$= -\overrightarrow{CD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

$\vec{b} = \overrightarrow{BC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ (по правилу треугольника).

$$\text{Поэтому} + \begin{cases} \vec{a} = -\overrightarrow{CD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} \; \Big| \cdot (-2) \\ \vec{b} = \overrightarrow{BC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} \end{cases}$$

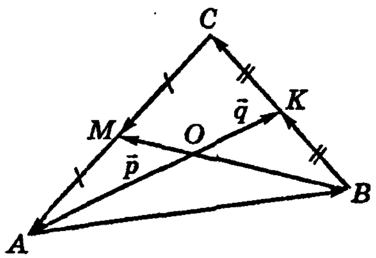
$\vec{b} - 2\vec{a} = 2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, $\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CD} = \vec{b} - 2\vec{a}$,

$\overrightarrow{CD} = \dfrac{2\vec{b} - 4\vec{a}}{3}$. Так как $\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \dfrac{1}{2}\dfrac{2\vec{b} - 4\vec{a}}{3} = \vec{b} + \dfrac{2\vec{b} - 2\vec{a}}{3} = \dfrac{4\vec{b} - 2\vec{a}}{3}$.

Ответ: $\overrightarrow{BC} = \dfrac{4\vec{b} - 2\vec{a}}{3}$, $\overrightarrow{CD} = \dfrac{2\vec{b} - 4\vec{a}}{3}$.

Пример 14. $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{BM}$ медианы треугольника ABC. Выразить через $\vec{p} = \overrightarrow{AK}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{BM}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.

Решение.



Из ABC получаем: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{BO} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \dfrac{2}{3}\vec{q}$; $\overrightarrow{AO} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{3}\vec{p}$.

Поэтому $\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\vec{q} = \frac{2}{3}\vec{p}$; $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\vec{p} - \vec{q})$.

Из ABK получаем: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{p}$;

$\left(\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$;

$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{p} - \overrightarrow{AB} = \vec{p} - \frac{2}{3}(\vec{p} - \vec{q})$. Умножим это равенство на 2, получим $\overrightarrow{BC} = 2\vec{p} - \frac{4}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q} = \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q}$; $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q}$.

Из ΔBCM получаем: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM}$. Но $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BM} = \vec{q}$, поэтому $\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \vec{q}$,

$\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \vec{q} - \overrightarrow{BC} = \vec{q} - \frac{2}{3}\vec{p} - \frac{4}{3}\vec{q}$; $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{3}\vec{q} - \frac{2}{3}\vec{p}$,

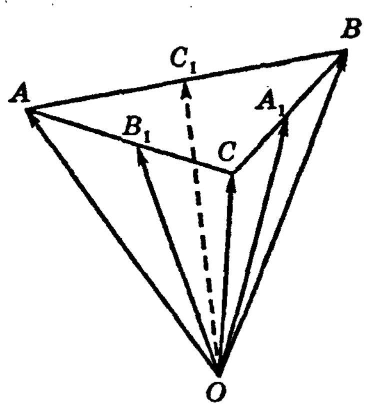
$\overrightarrow{CA} = -\frac{4}{3}\vec{p} - \frac{2}{3}\vec{q}$.

Ответ: $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\vec{p} - \vec{q})$, $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q}$,

$\overrightarrow{CA} = -\frac{4}{3}\vec{p} - \frac{2}{3}\vec{q}$.

Пример 15. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 являются серединами сторон BC, AC, AB.

Докажите, что при любом выборе точки O выполняется равенство: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.



Решение.

Воспользуемся формулой для середины отрезка (*)

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

Равенство доказано.

Пример 16. Три силы $\vec{M}$, $\vec{N}$ и $\vec{P}$, приложенные к одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Определить величину их равнодействующей $\vec{R}$, если известно, что $|\vec{M}| = 2$ Н, $|\vec{N}| = 10$ Н и $|\vec{P}| = 11$ Н.

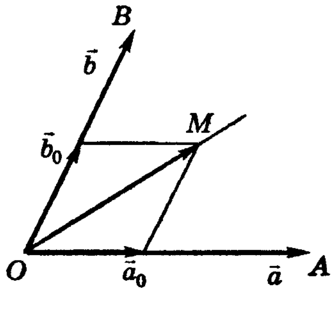
Решение. По правилу параллелепипеда сложения векторов имеем $\vec{R} = \vec{M} + \vec{N} + \vec{P}$ и

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{M}|^2 + |\vec{N}|^2 + |\vec{P}|^2} = \sqrt{4+100+121} = \sqrt{225} = 15.$$

Ответ: 15 Н.

Пример 17. Из точки O выходят два вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Найти какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB.

Решение. Известно, что диагонали ромба являются и биссектрисами углов. Построим ромб следующим образом. Найдем орты вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$: $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ и $\overrightarrow{b_0} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ и на них построим ромб.



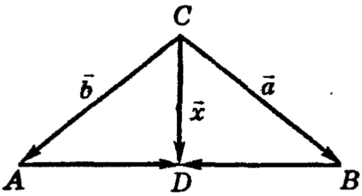
Тогда вектор $\vec{c} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ является вектором, идущим из точки O по биссектрисе угла AOB.

Ответ: $\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Пример 18. На стороне AB треугольника ABC взята точка D так, что прямая CD – биссектриса угла при вершине C. Выразите через $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ следующие векторы: $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$.

Решение. По свойству биссектрисы угла треугольника имеем:

$$\frac{|\vec b|}{|\vec a|}=\left|\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}\right|, \text{ или } |\overrightarrow{AD}|=\frac{|\vec b|}{|\vec a|}|\overrightarrow{BD}|.$$



Так как векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BD}$ коллинеарны, но имеют противоположные направления, то $\overrightarrow{AD}=-\frac{|\vec b|}{|\vec a|}\overrightarrow{BD}$. Обозначим вектор $\overrightarrow{CD}$ через $\vec x$ и по правилу нахождения разности векторов найдем: $\overrightarrow{AD}=\vec x-\vec b$, $\overrightarrow{BD}=\vec x-\vec a$. Так как $\overrightarrow{AD}=\frac{|\vec b|}{|\vec a|}\overrightarrow{BD}$, то $\vec x-\vec b=-\frac{|\vec b|}{|\vec a|}(\vec x-\vec a)$, $\vec x-\vec b=-\frac{|\vec b|}{|\vec a|}\vec x+\frac{|\vec b|}{|\vec a|}\vec a$. Отсюда $\vec x\left(1+\left|\frac{\vec b}{\vec a}\right|\right)=\vec b+\frac{|\vec b|}{|\vec a|}\vec a$ и $\vec x=$ $=\overrightarrow{CD}=\frac{|\vec b|\vec a+|\vec a|\vec b}{|\vec a|+|\vec b|}$. Тогда $\overrightarrow{AD}=\vec x-\vec b=\frac{|\vec b|\vec a+|\vec a|\vec b}{|\vec a|+|\vec b|}-$ $-\vec b=\frac{|\vec b|\vec a+|\vec a|\vec b-|\vec a|\vec b-\vec b|\vec b|}{|\vec a|+|\vec b|}==\frac{|\vec b|\vec a-|\vec b|\vec b}{|\vec a|+|\vec b|}$. Аналогично,

$$\overrightarrow{BD}=\vec x-\vec a=\frac{|\vec b|\vec a+|\vec a|\vec b}{|\vec a|+|\vec b|}-\vec a=\frac{|\vec b|\vec a+|\vec a|\vec b-|\vec a|\vec a-\vec a|\vec b|}{|\vec a|+|\vec b|}=$$

$$=\frac{-|\vec a|\vec a+|\vec a|\vec b}{|\vec a|+|\vec b|}=\frac{|\vec a|}{|\vec a|+|\vec b|}(-\vec a+\vec b).$$

Ответ: $\overrightarrow{CD}=\frac{|\vec b|\vec a+|\vec a|\vec b}{|\vec a|+|\vec b|}$, $\overrightarrow{AD}=\frac{|\vec b|}{|\vec a|+|\vec b|}(\vec a-\vec b)$,

$$\overrightarrow{BD}=\frac{|\vec a|}{|\vec a|+|\vec b|}(-\vec a+\vec b).$$

Задания для самостоятельного решения

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны (ортогональны), причем $|\vec{a}| = 5$ и $|\vec{b}| = 12$.
Определить $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

2. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ заданы векторы, совпадающие с его сторонами: $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{p}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{q}$ и $\overrightarrow{EA} = \vec{r}$. Построить векторы:

а) $\vec{m} + 2\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{r}$; б) $2\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} - 3\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$.

3. Точка O является центром тяжести ABC. Доказать, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$.

4. В треугольнике ABC: $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{CM}$. Полагая $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, выразить векторы $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BN}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5. В параллелограмме $ABCD$ обозначены: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$, где M – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющие равные длины, отложены от общего начала. Докажите, что вектор $\vec{a} + \vec{b}$, если его отложить от того же начала, будет направлен по биссектрисе угла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

7. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо неравенство $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$. В каком случае левая часть равна правой?

8. В трапеции $ABCD$ отношение основания $\overrightarrow{AD}$ к основанию $\overrightarrow{BC}$ равно λ. Полагая $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

9. $ABCDEF$ – правильный шестиугольник, причем $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{q}$. Выразить через $\vec{p}$ и $\vec{q}$ векторы $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AE}$.

10. Векторы $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ответы:

1. $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=13$.

4. $\overrightarrow{AN}=\alpha\cdot\beta\,\vec{a}+(1-\beta)\,\vec{b}$, $\overrightarrow{BN}=(\alpha\beta-1)\,\vec{a}+(1-\beta)\,\vec{b}$.

5. $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$, $\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}$.

8. $\overrightarrow{AB}=\dfrac{\lambda\vec{a}-\vec{b}}{1+\lambda}$, $\overrightarrow{BC}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{1+\lambda}$, $\overrightarrow{CD}=\dfrac{\lambda\vec{b}-\vec{a}}{1+\lambda}$ и $\overrightarrow{DA}=-\dfrac{\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}{1+\lambda}$.

9. $\overrightarrow{CD}=\vec{q}-\vec{p}$, $\overrightarrow{DE}=-\vec{p}$, $\overrightarrow{EF}=-\vec{q}$, $\overrightarrow{FA}=\vec{p}-\vec{q}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{p}+\vec{q}$, $\overrightarrow{AD}=2\vec{q}$, $\overrightarrow{AE}=2\vec{q}-\vec{p}$.

10. $\overrightarrow{AB}=\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{BC}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{CD}=\dfrac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$, $\overrightarrow{DA}=-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.

1.2. Линейная комбинация векторов

Векторный базис на плоскости и в пространстве

Определение 1. *Линейной комбинацией векторов* $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ называется сумма произведений этих векторов на какие-нибудь числа α_1, α_2, α_3:

$$\alpha_1\overrightarrow{e_1}+\alpha_2\overrightarrow{e_2}+\alpha_3\overrightarrow{e_3}.$$

Определение 2. *Векторным базисом* в данной плоскости называется любая пара неколлинеарных векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ этой плоскости.

Вектор $\overrightarrow{e_1}$ называют при этом первым базисным вектором, вектор $\overrightarrow{e_2}$ – вторым.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ – векторный базис в плоскости, тогда любой вектор $\vec{a}$ этой плоскости может быть представлен, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации базисных векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$:

$$\vec{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}. \qquad (*)$$

Определение 3. Равенство (*) называют *разложением вектора $\vec{a}$ по базису* $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, а числа x и y – *координатами вектора $\vec{a}$ в базисе* $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ (или *относительно базиса* $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$). Если заранее ясно, о каком базисе идет речь, то пишут кратко: $\vec{a} = \{x, y\}$. Из определения координат вектора относительно базиса следует, что равные векторы имеют соответственно равные координаты.

Два и более векторов в пространстве называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости или лежат в этой плоскости.

Определение 4. *Векторным базисом* в пространстве называют любые три некомпланарных вектора $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$.

Вектор $\overrightarrow{e_1}$ называют при этом первым базисным вектором, $\overrightarrow{e_2}$ – вторым, $\overrightarrow{e_3}$ – третьим.

Замечание. 1. Три вектора $\overrightarrow{e_1} = \{e_{11}; e_{12}; e_{13}\}$, $\overrightarrow{e_2} = \{e_{21}; e_{22}; e_{23}\}$ и $\overrightarrow{e_3} = \{e_{31}; e_{32}; e_{33}\}$ образуют базис пространства, если определитель, составленный из их координат, отличен от нуля: $\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \neq 0$.

2. Основные положения теории определителей и способы их вычисления рассмотрены в разделе 3 «Линейная алгебра».

Теорема 2. Пусть $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ – векторный базис в пространстве. Тогда любой вектор $\vec{a}$ в пространстве может быть представлен, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации базисных векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$:

$$\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}. \qquad (**)$$

Определение 5. Равенство (**) называют *разложением вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$*, а числа x, y, z – координатами (компонентами) вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$.

Если заранее ясно, о каком базисе идет речь, то пишут кратко: $\vec{a} = \{x;\ y;\ z\}$.

Определение 6. Базис $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ называется *ортонормированным*, если векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ попарно перпендикулярны и имеют единичную длину. В этом случае приняты обозначения $\vec{e_1} = \vec{i}$, $\vec{e_2} = \vec{j}$, $\vec{e_3} = \vec{k}$.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Теорема 3. Пусть на плоскости выбран векторный базис $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и относительно него векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = \{x_1;\ y_1\}$, $\vec{b} = \{x_2;\ y_2\}$.

Тогда $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + y_1;\ x_2 + y_2\}$, $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - y_1;\ x_2 - y_2\}$, т. е. при сложении или вычитании векторов складываются или вычитаются их одноименные координаты; $\alpha \cdot \vec{a} = \{\alpha \cdot x_1;\ \alpha \cdot y_1\}$, т. е. при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Условие коллинеарности двух векторов

Теорема 4. Вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ в том и только в том случае, когда координаты вектора $\vec{b}$ пропорциональны соответственным координатам вектора $\vec{a}$, т. е.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

Линейные операции над векторами, заданными своими координатами в пространстве, производятся аналогично.

Пример 1. Пусть даны векторы $\vec{a} = \{1;\ 2;\ -1\}$, $\vec{b} = \{3;\ 2;\ 1\}$, $\vec{c} = \{1;\ 0;\ 1)$ в некотором векторном базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$. Найти координаты линейной комбинации $2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$.

Решение. Введем обозначение для линейной комбинации $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + (-4)\vec{c}$.

Коэффициенты линейной комбинации $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = -4$. Запишем данное векторное равенство в координатной форме $\vec{d} = \{x, y, z\} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-4)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что каждая координата линейной комбинации векторов равна такой же линейной комбинации одноименных координат, т. е.

$x = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + (-4) \cdot 1 = 7,$

$y = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 0 = 10,$

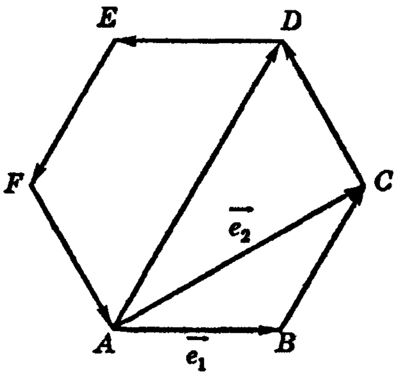
$z = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 = -3.$

Координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ будут: $\vec{d} = \{7; 10; -3\}$.

Ответ: $\vec{d} = \{7; 10; -3\}$.

Пример 2. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$.

Решение.



Так как векторы на плоскости $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ по условию не коллинеарны, то они являются, по определению, базисом. Обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{e_1}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{e_2}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ так: $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \vec{e_1} + 0 \cdot \vec{e_2} = \{1; 0\}$.

По правилу нахождения разности векторов вектор $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$; $\overrightarrow{BC} = \{-1; 1\}$.

Вектор $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, но $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$, причем, по условию, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$. Тогда $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}) - \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_1} = -2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$; $\overrightarrow{CD} = \{-2; 1\}$.

Аналогично, $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{e_1} = \{-1; 0\}$, $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BC} = (-1)\{-1; 1\} = \{1; -1\}$.

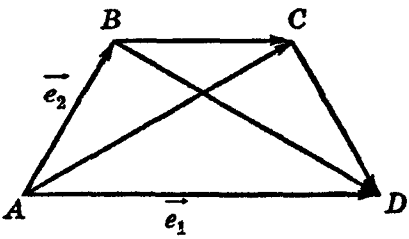
$\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{CD} = -\{-2; 1\} = (-1)\{-2; 1\} = \{2; -1\}$.

Ответ: $\overrightarrow{AB} = \{1; 0\}$, $\overrightarrow{BC} = \{-1; 1\}$, $\overrightarrow{CD} = \{-2; 1\}$, $\overrightarrow{DE} = \{-1; 0\}$, $\overrightarrow{EF} = \{1; -1\}$, $\overrightarrow{FA} = \{2; -1\}$ в базисе $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AC}$.

Пример 3. В трапеции $ABCD$ отношение основания BC к основанию AD равно λ. Принимая за базис векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$, найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$.

Решение.

По условию $\left|\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AD}}\right| = \lambda$. Так как векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны и одинаково направлены, то $\overrightarrow{BC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AD}$.



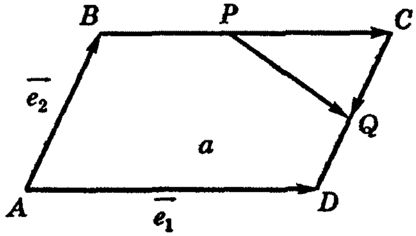
Векторы $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{e_2}$ не коллинеарны, значит, они образуют базис на плоскости. Представим каждый искомый вектор в виде линейных комбинаций векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$. Так $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{e_2} = 0 \cdot \overrightarrow{e_1} + 1 \cdot \overrightarrow{e_2} = \{0; 1\}$, $\overrightarrow{BC} = \lambda \cdot \overrightarrow{e_1} = \lambda \cdot \{1; 0\} = \{\lambda; 0\}$. По правилу многоугольника:

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - \lambda\cdot\overrightarrow{e_1} = (1-\lambda)\overrightarrow{e_1} + (-1)\overrightarrow{e_2} = \{1-\lambda; -1\}$. Далее, $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{e_1} = (-1)\{1; 0\} = \{-1; 0\}$. По правилу треугольника:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{e_2} + \lambda\cdot\overrightarrow{e_1} = \lambda\cdot\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} = \{\lambda; 1\}.$$

И, наконец, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = 1\cdot\overrightarrow{e_1} + (-1)\overrightarrow{e_2} = \{1; -1\}$.

Ответ: $\overrightarrow{AB} = \{0; 1\}$, $\overrightarrow{BC} = \{\lambda; 0\}$, $\overrightarrow{CD} = \{1-\lambda; -1\}$, $\overrightarrow{DA} = \{-1; 0\}$, $\overrightarrow{AC} = \{\lambda; 1\}$, $\overrightarrow{BD} = \{1; -1\}$ в базисе $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{e_2}$.



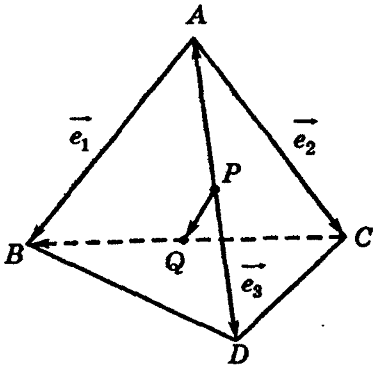
Пример 4. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки P и Q – середины сторон BC и CD соответственно. Найти координаты вектора $\overrightarrow{PQ}$, если за базисные вектора приняты $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AB}$.

Решение.

Имеем $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{e_2}$.

Значит, $\overrightarrow{PQ} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$.

Ответ: $\overrightarrow{PQ} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$.



Пример 5. Дана пирамида с вершинами A, B, C, D. Точки P и Q – середины ребер AD и BC соответственно. Найти координаты вектора $\overrightarrow{PQ}$ в базисе $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{AD}$.

Решение.

Так как векторы $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{e_3}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{e_2}$ не коллинеарны, то они, действительно, образуют базис в пространстве. По правилу многоугольника имеем:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} =$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{e_2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{e_3} =$$

$$= \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}.$$

Ответ: $\overrightarrow{PQ} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$.

Пример 6. Проверить, что векторы $\vec{a} = \{-1; 3\}$ и $\vec{b} = \{2; 2\}$ на плоскости не коллинеарны, и разложить вектор $\vec{c} = \{7; -5\}$ по базису $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Проверить для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ условие коллинеарности. Так как $-\frac{1}{2} \neq \frac{3}{2}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Следовательно, они образуют базис на плоскости. Пусть $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. В координатной форме будет линейная система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 7 = x\cdot(-1) + y\cdot 2 \\ -5 = x\cdot 3 + y\cdot 2 \end{cases}$$

Решив ее, находим $x = -3$, $y = 2$. Итак, $\vec{c} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$.
Ответ: $\vec{c} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$.

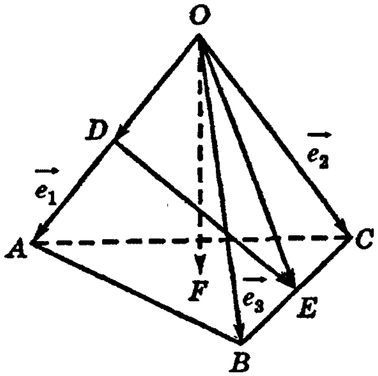
Пример 7. Задан тетраэдр $OABC$. В базисе из ребер $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ найти координаты:

а) вектора $\overrightarrow{DE}$, где D и E – середины ребер $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BC}$;

б) вектора $\overrightarrow{OF}$, где F – точка пересечения медиан основания.

Решение.

а) Векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ не коллинеарны, поэтому они образуют базис в пространстве. Обозначим $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{e_1}$,



$\overrightarrow{OB} = \vec{e_2}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{e_3}$. По правилу построения разности двух векторов из треугольника ODE находим: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}$. Но $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ по формуле (*), тогда $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_3}$ – линейная комбинация векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$. Поэтому $\overrightarrow{DE} = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$.

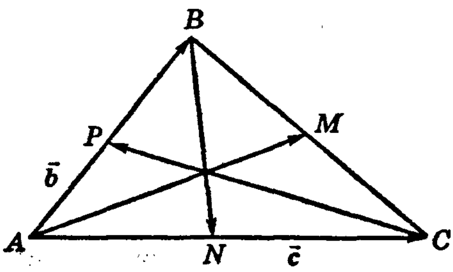
б) Так как точка F – точка пересечения медиан треугольника ABC, а точка O лежит вне плоскости этого треугольника, то по формуле (**) получаем:

$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}\vec{e_1} + \frac{1}{3}\vec{e_2} + \frac{1}{3}\vec{e_3}$ – линейная комбинация базисных векторов.

Следовательно, $\overrightarrow{OF} = \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$ в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$.

Ответ: а) $\overrightarrow{DE} = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$; б) $\overrightarrow{OF} = \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$.

Пример 8. Принимая в качестве базиса векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC, определить разложение векторов, приложенных в вершинах треугольника и совпадающих с его медианами.



Решение.

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\vec{б}+\vec{c})=\frac{1}{2}\vec{б}+\frac{1}{2}\vec{c}=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\};$$

$$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{б}=-\vec{б}+\frac{1}{2}\vec{c}=$$

$$=\left\{-1;\frac{1}{2}\right\};\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\vec{б}-\vec{c}=\left\{\frac{1}{2};-1\right\}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AM}=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$; $\overrightarrow{BN}=\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$; $\overrightarrow{CP}=\left\{\frac{1}{2};-1\right\}$.

Пример 9. Даны три вектора $\vec{a}=\{3;-1\}$, $\vec{б}=\{1;-2\}$, $\vec{c}=\{-1;7\}$. Определить разложение вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{б}+$ $+\vec{c}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{б}$.

Решение. а) найдем координаты вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{б}+\vec{c}=$ $=\{3;4\}$;

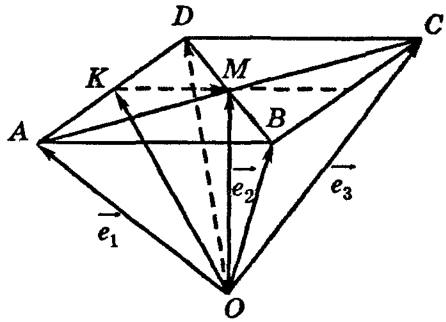
б) проверим, образуют ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{б}$ базис на плоскости. Если они образуют базис, то должны быть не коллинеарными, т. е. одноименные координаты не пропорциональны $\frac{3}{1}\neq\frac{-1}{-2}$. Представим вектор $\vec{p}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{б}$: $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{б}$. В координатной форме получим линейную алгебраическую систему двух уравнений с двумя неизвестными: $x\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, или $\begin{cases}3x+y=3\\-x-2y=4\end{cases}$. Решив систему, получаем $x=2$, $y=-3$. Следовательно, $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{б}$.

Ответ: $\vec{p}=\{2;-3\}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{б}$.

Пример 10. Вне плоскости параллелограмма $ABCD$ взята точка O. В базисе из векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ найти координаты:

а) вектора $\overrightarrow{OM}$, где M – точка пересечения диагоналей параллелограмма;

б) вектора $\overrightarrow{OK}$, где K – середина стороны AD.
Решение.



Обозначим $\overrightarrow{OA} = \vec{e_1}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{e_2}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{e_3}$. Так как $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ не коллинеарны, то они образуют базис в пространстве.

а) Выразим вектор $\overrightarrow{OM}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$.
По формуле (*) имеем из треугольника OAC:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\vec{e_2}.$$

Значит, $\overrightarrow{OM} = \left\{\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right\}$ в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$.

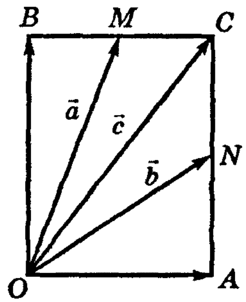
б) $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{KM}$. Но $\overrightarrow{OM} = \left\{\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right\}$,

$\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{e_2} - \vec{e_1})$, тогда

$$\overrightarrow{OK} = \left\{\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right\} - \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right\} = \left\{1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}.$$

Ответ: $\overrightarrow{OM} = \left\{\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right\}$, $\overrightarrow{OK} = \left\{1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$.

Пример 11. В прямоугольнике $OACB$ точки M и N – середины сторон BC и AC. Разложить вектор $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ по базису $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{ON} = \vec{b}$.
Решение.
Так как точки M и N – середины сторон соответственно BC и AC, то



$$+\begin{array}{l}\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\\ \overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\end{array}$$

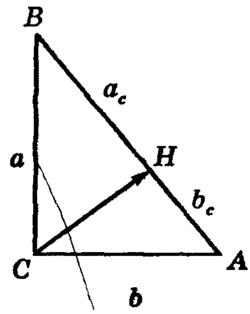
$$\vec{a}+\vec{b}=\frac{1}{2}[2\vec{c}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})],$$

или $\vec{a}+\vec{b}=\dfrac{1}{2}(2\vec{c}+\vec{c})$, $\dfrac{3}{2}\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

Отсюда c = $\dfrac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$.

Ответ: $\vec{c}=\left\{\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right\}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Пример 12. В прямоугольном треугольнике ABC опущен перпендикуляр CH на гипотенузу AB. Выразить вектор $\overrightarrow{CH}$ через векторы и длины катетов $|\overrightarrow{BC}|=\vec{a}$ и $|\overrightarrow{CA}|=\vec{b}$.
Решение.
Из элементарной геометрии известно,



что $\dfrac{b_c}{a_c}=\dfrac{b^2}{a^2}$. Тогда, приняв $\lambda=\dfrac{b^2}{a^2}$, получим

$$\overrightarrow{CH}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{CA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{CB}=$$

$$=\frac{a^2\overrightarrow{CA}+b^2\overrightarrow{CB}}{a^2+b^2}.$$

Ответ: $\overrightarrow{CH}=\dfrac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CA}+\dfrac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CB}$.

Пример 13. Показать, что тройка векторов $\overrightarrow{e_1}$ (1, 0, 0), $\overrightarrow{e_2}$ (1, 1, 0), $\overrightarrow{e_3}$ (1, 1, 1) образуют базис в множестве всех векторов пространства. Вычислить координаты вектора $\vec{a}=-2\vec{i}-\vec{k}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ и написать соответствующее разложение по базису.

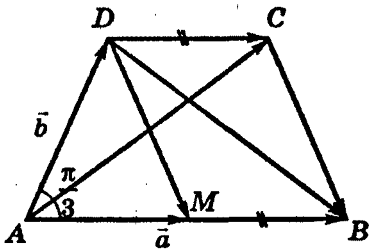
Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=1\neq 0.\quad \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$x=-2,\ y=1,\ z=-1.$

Ответ: $\vec a=-2\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}$.

Пример 14. $ABCD$ – равнобочная трапеция, $\overrightarrow{AB}=\vec a$ – основание, $\overrightarrow{AD}=\vec b$ – боковая сторона, угол между $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равен $\dfrac{\pi}{3}$. Выразить через $\vec a$ и $\vec b$ векторы $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$.



Решение.

Проведем $AM\,||\,DC$, получим равносторонний треугольник ADM. Следовательно, $|\overrightarrow{AM}|=|\vec b|$. Найдем $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}$.

Вектор $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{a_0}\cdot|\vec b|=\dfrac{\vec a}{|\vec a|}|\vec b|$

и $\overrightarrow{CB}=\dfrac{\vec a}{|\vec a|}|\vec b|-\vec b$; $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\vec a-\dfrac{\vec a}{|\vec a|}|\vec b|=\vec a\left(1-\dfrac{|\vec b|}{|\vec a|}\right)$;

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\vec a-\frac{\vec a}{|\vec a|}|\vec b|+\vec b=\vec a+\vec b-\frac{|\vec b|}{|\vec a|}\vec a=$$

$$=\vec a\left(1-\frac{|\vec b|}{|\vec a|}\right)+\vec b;\quad \overrightarrow{DB}=\vec a-\vec b.$$

Ответ: $\overrightarrow{DC}=\left(1-\dfrac{|\vec b|}{|\vec a|}\right)\vec a$, $\overrightarrow{CB}=\dfrac{|\vec b|}{|\vec a|}\vec a-\vec b$,

$$\overrightarrow{AC} = \left(1 - \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right)\vec{a} + \vec{b},\ \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Общая (аффинная) декартова система координат

Определение 7. Пусть O – некоторая фиксированная точка, которую будем называть *началом*. Если M – произвольная точка, то вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M по отношению к началу, коротко, радиус–вектор точки M.

Декартовы (аффинные) координаты на прямой

Пусть дана в пространстве некоторая прямая l. Выберем начало O лежащим на этой прямой. Кроме того, выберем на прямой l ненулевой вектор $\vec{e}$, который будем называть базисным.

Определение 8. Пусть точка M лежит на прямой l. Так как векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\vec{e}$ коллинеарны, то $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}$, где x – некоторое число. Это число назовем *координатой* точки M на прямой.

Начало O имеет координату нуль, все остальные точки M на прямой имеют положительные или отрицательные координаты, в зависимости от того, совпадают ли направления векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\vec{e}$ или же они противоположны. Прямую l, на которой введены координаты, будем называть осью координат или осью OX.

Введение координат на прямой приводит к тому, что каждой точке M на прямой соответствует единственное число x, и наоборот, существует единственная точка M, для которой это число является координатой.

Декартовы (аффинные) координаты на плоскости

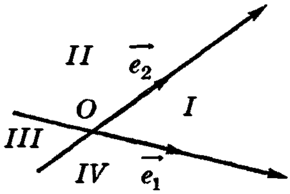
Выберем на плоскости начало O и два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, образующих некоторый базис. Очевидно, что длины векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ могут быть различны.

2. Зак. 6

Определение 9. Совокупность $\{0;\ \vec{e_1};\ \vec{e_2}\}$ точки O и векторного базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ называют *декартовой (аффинной) системой* на плоскости.

Две прямые, проходящие через O и параллельные соответственно векторам $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ называют осями координат. Первую из них обычно называют осью абсцисс и обозначают Ox, вторую – осью ординат и обозначают Oy.

Будем всегда изображать $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ лежащими на соответствующих осях координат.



Определение 10. *Координатами точки М* на плоскости относительно декартовой (аффинной) системы координат $\{0;\ \vec{e_1};\ \vec{e_2}\}$ называют координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ по базису $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$, тогда числа x и y будут координатами M относительно декартовой (аффинной) системы координат $\{0;\ \vec{e_1};\ \vec{e_2}\}$. Координату x называют *абсциссой* точки M, координату y – *ординатой* точки M.

Итак, если выбрана система координат, $\{0;\ \vec{e_1};\ \vec{e_2}\}$ на плоскости, то каждой точке M плоскости соответствует упорядоченная пара чисел x, y. Обратно: любой упорядоченной паре чисел x и y соответствует единственная точка M на плоскости: эта точка является концом вектора $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$.

Введение системы координат лежит в основе метода аналитической геометрии, сущность которой состоит в том, чтобы уметь сводить любую геометрическую задачу к задачам арифметики или алгебры.

Определение 11. *Координатами вектора* $\vec{a}$ на плоскости относительно декартовой системы координат $\{0;\ \vec{e_1};\ \vec{e_2}\}$ называют координаты этого вектора в базисе $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$.

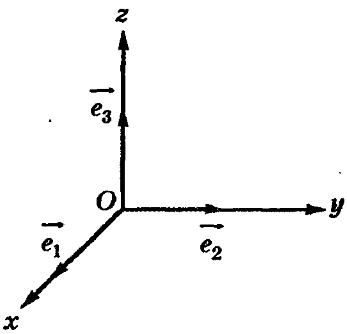
Чтобы найти координаты вектора $\vec{a}$, надо разложить его по базису $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$: $\vec{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$, где коэффициенты x, y и будут координатами вектора $\vec{a}$ относительно декартовой системы $\{0;\ \overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2}\}$.

Декартова (аффинная) система координат в пространстве

Пусть в пространстве зафиксирована некоторая точка O (начало) и выбран векторный базис $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$.

Определение 12. Совокупность $\{0;\ \overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2};\ \overrightarrow{e_3}\}$ называют *декартовой системой координат* в пространстве.

Определение 13. Три прямые, проходящие через O и параллельные соответственно векторам $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$, называют *осями координат* и обозначают соответственно Ox, Oy, Oz. Мы будем всегда изображать векторы $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ лежащими на соответственных осях.



Определение 14. *Координатами точки M* в пространстве относительно декартовой системы координат $\{0;\ \overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2};\ \overrightarrow{e_3}\}$ называют координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ в этой системе.

Иначе говоря, координаты точки M – это такие три числа x, y, z, что $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$. Как и в случае плоскости, x, y соответственно абсцисса и ордината точки M; третью координату z называют аппликатой точки M.

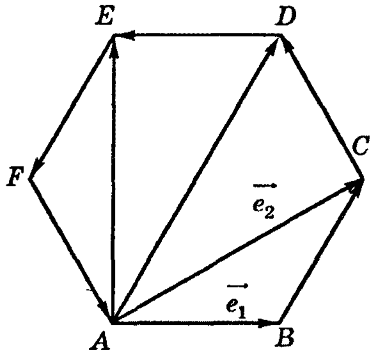
Введение в пространстве декартовой системы координат позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между точками M пространства и упорядоченными тройками чисел x, y, z.

Определение 15. *Координатами вектора $\vec{a}$* в пространстве относительно декартовой системы координат

$\{0; \vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}\}$ называют координаты этого вектора в базисе $\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}$.

Пример 15. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за начало аффинной системы координат вершину A, а за базис – векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, найти в этой системе координаты вершин шестиугольника.

Решение. Обозначим $\overrightarrow{AB} = \vec{e_1}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{e_2}$. Очевидно, что $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ неколлинеарные векторы, поэтому их можно принять за базис. Тогда по условию: $A(0;\ 0)$ и $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \vec{e_1} + 0 \cdot \vec{e_2} = \{1;\ 0\}$; $B(1;0)$; $\overrightarrow{AC} = \vec{e_2} = 0 \cdot \vec{e_1} + 1 \cdot \vec{e_2} = \{0;\ 1\}$ и $C(0;\ 1)$. Далее $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} = 2(\vec{e_2} - \vec{e_1}) = -2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} = \{-2;\ 2\}$ и $D(-2;\ 2)$; $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = -2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_1} = -3\vec{e_1} + 2\vec{e_2} = \{-3;\ 2\}$ и $E(-3;\ 2)$;

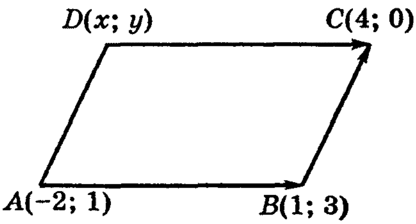


$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = -2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_2} = -2\vec{e_1} + \vec{e_2} = \{-2;\ 1\}$ и $F(-2;\ 1)$.

Ответ: $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(0;\ 1)$, $D(-2;\ 2)$, $E(-3;\ 2)$, $F(-2;\ 1)$.

Пример 16. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(-2;\ 1)$, $B(1;\ 3)$, $C(4;\ 0)$. Найти четвертую его координату D. Система координат аффинная.
Решение.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны, значит, равны их координаты (коэффициенты линейной комбинации): $\overrightarrow{AB} = \{3;\ 2\}$,

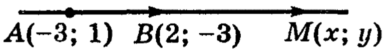


$\overrightarrow{DC} = \{4 - x; -y\}$; $\begin{cases} 4 - x = 3 & x = 1 \\ -y = 2 & y = -2 \end{cases}$. Значит, $D(1; -2)$.

Ответ: $D(1; -2)$.

Пример 17. Даны две точки $A(-3; 1)$ и $B(2; -3)$. На прямой AB найти точку M так, чтобы она была расположена по ту же сторону от точки A, что и точка B, и чтобы отрезок AM был втрое больше отрезка AB (система координат аффинная).

Решение.

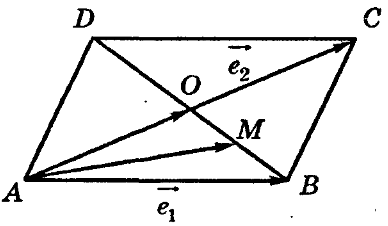


По условию $|AM| = 3|AB|$, поэтому $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$. Так как векторы $\overrightarrow{AM}$ и $3\overrightarrow{AB}$ равны, то и их координаты равны. Отсюда $\overrightarrow{AB} = \{5; -4\}$, $\overrightarrow{AM} = \{x + 3; y - 1\}$ и $\{x + 3; y - 1\} = 3\{5; -4\}$, $x + 3 = 15$, $y - 1 = -12$; $x = 12$, $y = -11$.

Ответ: $M(12; -11)$.

Пример 18. Дан параллелограмм $ABCD$, диагонали которого AC и BD пересекаются в точке O. Принимая за начало аффинной системы координат точку A, а за базисвекторы $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_2$, найти в этой системе координаты точки M, делящей OB пополам.

Решение.



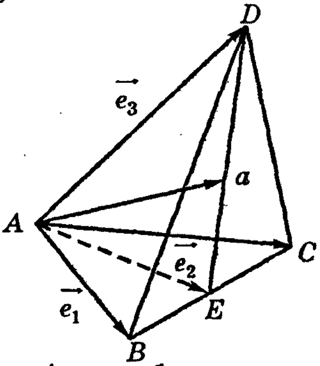
По условию точка A – начало координат, значит $A(0; 0)$. Тогда $B(1; 0)$, $C(0; 1)$. По формуле (*) (пример 7; п. 1.1)

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{4}\vec{e}_2.$$

Тогда точка M имеет аффинные координаты $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

Ответ: $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

Пример 19. Дан тетраэдр $ABCD$, точка M – середина DE (E – середина BC). Принимая за начало аффинной системы координат вершину A, а за базис – векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{e_1}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{e_2}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{e_3}$, найти в этой системе координаты точки M.



Решение.

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}),$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + AD\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\vec{e_1} + \frac{1}{4}\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_3}.$$

Следовательно, имеем $M\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

Ответ: $M\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

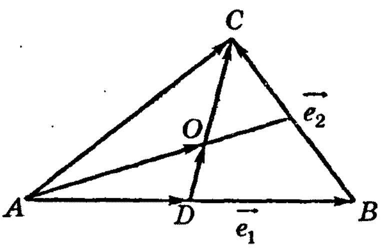
Пример 20. Дан треугольник ABC; O – точка пересечения его медиан. Принимая за начало аффинной системы координат вершину A, а за базис – векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{e_1}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{e_2}$, найти в этой системе координат точки O.

Решение.

По условию $A(0; 0)$, D – середина AB. Тогда

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) =$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}).$$



Но $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

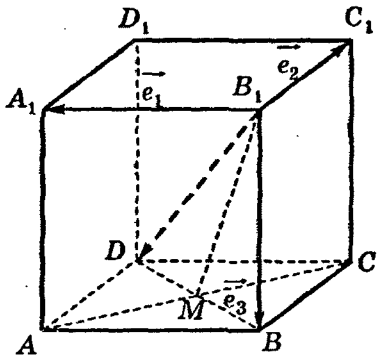
Поэтому $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$;

$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\vec{e_1}+\frac{1}{3}\vec{e_2}$.

Ответ: $O\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Пример 21. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $\overrightarrow{B_1A_1}=\vec{e_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{e_2}$, $\overrightarrow{B_1B}=\vec{e_3}$. Принимая вершину B_1 за начало аффинной системы координат, а за базис – векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, найти в этой системе координат координаты точки M – точки пересечения диагоналей основания $ABCD$.

Решение.



$\overrightarrow{B_1M}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1D}+\overrightarrow{B_1B})$. Но $\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1B}$ (по правилу параллелепипеда сложение трех векторов). Следовательно, $\overrightarrow{B_1M}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1B})=\frac{1}{2}\vec{e_1}+\frac{1}{2}\vec{e_2}+\vec{e_3}$.

Ответ: $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

Линейная зависимость. Понятие базиса

Определение 16. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ называют *линейно зависимыми*, если существуют числа λ_1, λ_2, ..., λ_k, среди которых есть по крайней мере одно, не равное нулю, такие, что

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+...,+\lambda_k\vec{a}_k=\vec{0}. \qquad (***)$$

Это определение линейной зависимости векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ эквивалентно такому: векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ линейно зависимы, если один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных (или разложить по остальным).

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ называются линейно зависимыми, если равенство (***) возможно в единственном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$.

Понятие линейной зависимости играет большую роль в линейной алгебре. В векторной алгебре линейная зависимость имеет простой геометрический смысл.

1) Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы, и наоборот, два неколлинеарных вектора линейно независимы.
2) Три компланарных вектора линейно зависимы, и наоборот, три некомпланарных вектора линейно независимы.
3) Каждые четыре вектора линейно зависимы.

Определение 17. Три линейно независимых вектора $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ называются *базисом пространства*, т. е. любой вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде некоторой линейной комбинации векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$.

Определение 18. Два лежащих в плоскости линейно независимых вектора $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ называются *базисом плоскости*, т. е. любой лежащий в этой плоскости вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$.

Пример 22. Разложить вектор $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем неколлинеарным векторам $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{r} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Решение.

а) Покажем, что векторы неколлинеарны. В этом случае тройки коэффициентов их линейных комбинаций должны быть линейно независимы, т. е. определитель, составленный из коэффициентов линейных комбинаций, должен быть не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 7 = -10 \neq 0.$$

(Определитель вычислен разложением по элементам первого столбца).

б) Решим систему уравнений относительно $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\begin{cases} \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = \vec{p} \\ \vec{a} - \vec{b} = \vec{q} \\ 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{r}. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим систему двух уравнений относительно $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\begin{cases} 2\vec{b} - 2\vec{c} = \vec{p} - \vec{q} \\ 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{r}. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое.

Отсюда $\vec{c} = \dfrac{\vec{q} - \vec{p} + \vec{r}}{5}$, $\vec{b} = \dfrac{3\vec{p} - 3\vec{q} + 2\vec{r}}{10}$,

$\vec{a} = \dfrac{3\vec{p} + 7\vec{q} + 2\vec{r}}{10}$ и

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \frac{4\vec{p} + 6\vec{q} + 6\vec{r}}{10} = \frac{2}{5}\vec{p} + \frac{3}{5}\vec{q} + \frac{3}{5}\vec{r}.$$

Ответ: $\vec{s} = \left\{\dfrac{2}{5}; \dfrac{3}{5}; \dfrac{3}{5}\right\}$ в базисе $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

Пример 23. Доказать, что для любых трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любых трех чисел α, β, γ векторы $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$, $\gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}$, $\beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$ линейно зависимы.

Решение. Если три линейные комбинации линейно зависимы, то определитель, составленный из их коэффициентов, должен быть равен нулю. Проверим это.

$$\begin{vmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & \gamma & -\alpha \\ -\gamma & 0 & \beta \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \gamma & -\alpha \\ 0 & \beta \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 0 & -\alpha \\ -\gamma & \beta \end{vmatrix} =$$

$= \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma = 0.$

(Определитель вычислен разложением по элементам первой строки.)

Утверждение доказано.

Пример 24. Даны три вектора $\vec{a} = \{1; 2\}$, $\vec{b} = \{-5; -1\}$, $\vec{c} = \{-1; 3\}$. Найти координаты линейных комбинаций $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$, $16\vec{a} + 5\vec{b} - 9\vec{c}$.

Решение. $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = 2\{1; 2\} + 3\{-5; -1\} - \{-1; 3\} = \{2 - 15 + 1; 4 - 3 - 3\} = \{-12; -2\}$.

$16\vec{a} + 5\vec{b} - 9\vec{c} = 16\{1; 2\} + 5\{-5; -1\} - 9\{-1; 3\} = \{16 - 25 + 9; 32 - 5 - 27\} = \{0; 0\} = \vec{0}$.

Таким образом, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно зависимы, так как существуют коэффициенты линейной комбинации, не равные нулю, такие, что $16\vec{a} + 5\vec{b} - 9\vec{c} = \vec{0}$.

Ответ: $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = \{-12; -2\}$, $16\vec{a} + 5\vec{b} - 9\vec{c} = \{0; 0\}$.

Пример 25. Даны три вектора $\vec{a} = \{1; 3\}$, $\vec{b} = \{2; -1\}$, $\vec{c} = \{-4; 1\}$. Найти числа α, β такие, что $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \vec{c} = 0$.

Решение. Линейной комбинации векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ соответствует такие же линейные комбинации их одноименных координат, т. е. $\alpha\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} = 0$, или

$\begin{cases}\alpha + 2\beta - 4 = 0\\ 3\alpha - \beta + 1 = 0.\end{cases}$ Получим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных α, β.

$$+\begin{cases}\alpha + 2\beta = 4\\ 3\alpha - \beta = -1\end{cases}\Bigg| \cdot 2$$

$$7\alpha = 2, \qquad \alpha = \frac{2}{7};\ \beta = 3\alpha + 1 = \frac{6}{7} + 1 = \frac{13}{7}.$$

Итак, действительно векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно зависимы.

Ответ: $\alpha = \frac{2}{7}$; $\beta = \frac{13}{7}$.

Пример 26. Проверить, что векторы $\vec{a} = \{-5; -1\}$, $\vec{b} = \{-1; 3\}$ образуют базис на плоскости. Найти координаты векторов $\vec{c} = \{-1; 2\}$, $\vec{d} = \{2; -6\}$ в этом базисе.

Решение.

а) Векторы образуют базис на плоскости, если они неколлинеарны, т. е. их одноименные координаты не пропорциональны. Действительно, $\frac{-5}{-1} \neq \frac{-1}{3}$. Следовательно, данные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости.

б) Найдем координаты вектора $\vec{c} = \{-1; 2\}$, в этом базисе:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \text{ или } \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$+\begin{cases} 5\alpha + \beta = 1 \\ -\alpha + 3\beta = 2 \end{cases}\Bigg| \cdot 5$$

$$16\beta = 11; \qquad \beta = \frac{11}{16}, \text{ тогда } \alpha = \frac{1}{16}.$$

в) Найдем координаты вектора $\vec{d} = \{2; -6\}$ в этом базисе

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \text{ или } \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$+\begin{cases} 5\alpha + \beta = -2 \\ -\alpha + 3\beta = -6 \end{cases}\Bigg| \cdot 5$$

$16\beta = -32$; $\beta = -2$, $\alpha = 0$.

Ответ: $\vec{c} = \left\{\frac{1}{16}; \frac{11}{16}\right\}$, $\vec{d} = \{0; 2\}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Даны три вектора $\vec{p} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{q} = \{-1; 1; 2\}$, $\vec{r} = \{2; 1; -3\}$. Найти разложение вектора $\vec{c} = \{11; -6; 5\}$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

2. Даны векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ – медиана треугольника OAB. Разложить вектор $\vec{a}$ по базису $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

3. В тетраэдре $OABC$ точки K, L, M, N, P, Q – середины ребер OA, OB, OC, AB, AC, BC соответственно, S – точка пересечения медиан треугольника ABC. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, найти в этом базисе координаты:

1) векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$;

2) векторов $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{KQ}$;

3) векторов $\overrightarrow{OS}$ и $\overrightarrow{KS}$.

4. Точки M и N – середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Разложить вектор $\overrightarrow{DC}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$.

5. Дан куб $ABCDEFGH$. Разложить вектор $\overrightarrow{AK}$, где K – центр грани $DHGC$, по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$.

6. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = \{2; -3\}$, $\vec{q} = \{1; 2\}$. Найти разложение вектора $\vec{a} = \{9; 4\}$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$.

7. На плоскости даны три вектора $\vec{a} = \{3; -2\}$, $\vec{b} = \{-2; 1\}$ и $\vec{c} = \{7; -4\}$. Определить разложение каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

8. Принимая в качестве базиса векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC, определить разложение векторов, приложенных в вершинах треугольника и совпадающих с его медианами.

9. Даны четыре вектора $\vec{a} = \{3; 0; -2\}$, $\vec{b} = \{1; 2; -5\}$, $\vec{c} = \{-1; 1; 1\}$, $\vec{d} = \{8; 4; 1\}$. Найти координаты векторов – линейных комбинаций: $-5\vec{a} + \vec{b} - 6\vec{c} + \vec{d}$, $3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$.

10. Даны четыре вектора $\vec{a} = \{4; 1; -1\}$, $\vec{b} = \{3; -1; 0\}$, $\vec{c} = \{-1; 1; 1\}$, $\vec{d} = \{-1; 3; 4\}$. Найти числа α, β, γ такие, что $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \vec{d} = 0$.

11. Проверить, что векторы $\vec{a} = \{4; 1; -1\}$, $\vec{b} = \{1; 2; 5\}$, $\vec{c} = \{-1; 1; 1\}$ образуют базис в пространстве. Найти координаты векторов $\vec{l} = \{4; 4; -5\}$, $\vec{m} = \{2; 4; -10\}$, $\vec{n} = \{0; 3; -4\}$ в этом базисе.

12. (Задача об отрезке, разделенном в заданном отношении.) Пусть точка C, лежащая на отрезке AB, делит этот отрезок в отношении λ, т. е. $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \lambda$. Выразить вектор $\overrightarrow{OC}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ $(\lambda \neq -1)$.

13. Даны две точки $A(1; 2; 3)$, $B(7; 2; 5)$. На прямой AB найти такую точку M, чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и чтобы отрезок AM был вдвое длиннее отрезка AB. Система координат аффинная.

14. Вершина A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ принята за начало координат, а векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ – за базисные векторы. Найти в этой системе координаты всех вершин параллелепипеда.

15. Вершина O тетраэдра $OABCD$ принята за начало координат, а векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ – за базисные векторы. Найти в этой (аффинной) системе координаты точек пересечения медиан граней тетраэдра.

Ответы:

1. $\vec{c} = \{2; -3; 1\}$ в базисе $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$;
2. $\vec{a} = -\vec{b} + 2\vec{c}$;

3 1) $\overrightarrow{AB} = \{-1; 1; 0\}$, $\overrightarrow{BC} = \{0; -1; 1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-1; 0; 1\}$;

2) $\overrightarrow{KL} = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right\}$, $\overrightarrow{PQ} = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right\}$,

$\overrightarrow{NC} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right\}$, $\overrightarrow{MP} = \left\{\frac{1}{2}; 0; 0\right\}$,

$\overrightarrow{KQ} = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$;

3) $\overrightarrow{OS} = \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$, и $\overrightarrow{KS} = \left\{-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$.

4. $\overrightarrow{DC} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

5. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.
6. $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$.

7. $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

8. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$, где M, N и P – середины сторон треугольника ABC.
9. (0; 0; 0), (1; −7; −3).
10. $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = -4$.
11. $\vec{l} = \{1; 1; 1\}$, $\vec{m} = \{0; 2; 0\}$, $\vec{n} = \{0; 1; 1\}$.

12. $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}$.
13. $M(-11; 2; -1\}$.
14. $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A_1(0; 0; 1)$, $B_1(1; 0; 1)$, $C_1(1; 1; 1)$, $D_1(0; 1; 1)$.

15. $\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right\}$ для грани AOB; $\left\{0; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$ для грани BOC;

$\left\{\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}\right\}$ для грани COA; $\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$ для грани ABC.

1.3. Прямоугольная декартова система координат

Среди декартовых систем координат простейшей является прямоугольная декартова система координат.

Определение 1. Декартова система координат $\{0;\ \overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2}\}$ на плоскости называется *прямоугольной*, если $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ – ортогональные единичные векторы.

Аналогично определяется прямоугольная декартова система координат $\{0;\ \overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2};\ \overrightarrow{e_3}\}$ в пространстве; в этом случае векторы $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ также являются взаимно перпендикулярными и единичными. Базисные векторы $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ прямоугольной декартовой системы координат на плоскости обозначают обычно $\vec{i}$, $\vec{j}$, базисные векторы $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ прямоугольной декартовой системы координат обозначают $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Соответственно разложение радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ по базису записывают в виде

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (для плоскости);

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (для пространства).

В первом случае точка M имеет координаты x, y, во втором случае – координаты x, y, z.

Определение 2. *Проекцией* вектора $\vec{a}$ на единичный вектор $\vec{e}$ называется число $\text{пр}_{\vec{e}}\vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi$, где $\varphi = (\vec{a}, \vec{e})$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{e}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$.

Координаты x, y, z вектора $\vec{a}$, полученные как коэффициенты линейной комбинации базисных векторов, в прямоугольном базисе совпадают с проекцией вектора $\vec{a}$ на базисные орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ соответственно, а длина вектора $\vec{a}$ равна $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Определение 3. Числа $\cos\alpha = \cos(\vec{a}, \vec{i}) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\cos\beta = \cos(\vec{a}, \vec{j}) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\cos\gamma = \cos(\vec{a}, \vec{k}) =$

$= \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$.

Направляющие косинусы вектора совпадают с координатами (проекциями) его орта $\vec{a}_0 = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ и между собой связаны соотношением $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Отметим, что базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называют ортонормированным, так как $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$ $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.

Пример 1. Заданы векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Найти:

а) координаты вектора $\overrightarrow{a_0}$;

б) координаты вектора $\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$;

в) разложение вектора $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ по базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$;

г) $\text{пр}_{\vec{j}}(\vec{a} - \vec{b})$.

Решение.

а) Так как $\overrightarrow{a_0} = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$, то найдем сначала длину вектора $\vec{a}$ по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$:

$|\vec{a}| = \sqrt{4+0+9} = \sqrt{13}$. Тогда $\overrightarrow{a_0} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}\{2;\ 3;\ 0\} = \left\{\dfrac{2}{\sqrt{13}}; \dfrac{3}{\sqrt{13}}; 0\right\}$.

б) Вычислим координаты вектора $\vec{d} = \vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} = \{2;\ 3;\ 0\} - \dfrac{1}{2}\{0;\ -3;\ -2\} + \{1;\ 1;\ -1\} = \left\{3; \dfrac{11}{2}; 0\right\}$.

$\vec{d} = \left\{3; \dfrac{11}{2}; 0\right\}$.

в) $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = \{2;\ 3;\ 0\} + \{0;\ -3;\ -2\} - 2\{1;\ 1;\ -1\} = \{0;\ -2;\ 0\} = -2\vec{j}$; $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = -2\vec{j}$.

г) $\text{пр}_j(\vec{a}-\vec{b})$; $\vec{a}-\vec{b} = \{2;\ 3;\ 0\} - \{0;\ -3;\ -2\} = \{2;\ 6;\ 2\}$;
$\text{пр}_j(\vec{a}-\vec{b}) = 6$.

Ответ: $\overrightarrow{a_0} = \left\{\dfrac{2}{\sqrt{13}}; \dfrac{3}{\sqrt{13}};\ 0\right\}$;

б) $\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} = \left\{3; \dfrac{11}{2};\ 0\right\}$;

в) $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = -2\vec{j}$; г) $\text{пр}_j(\vec{a}-\vec{b}) = 6$.

Замечание. Если известны координаты точек $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то проекции X, Y, Z на оси координат вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ могут быть получены по формулам $X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$, $Z = z_2 - z_1$, а расстояние d между данными точками определяется формулой:

$$\vec{d} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\text{, или}$$

$$\vec{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Если точка $M(x,\ y,\ z)$ лежит на прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и дано отношение $\lambda = \dfrac{|M_1M|}{|MM_2|}$, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, то координаты точки M определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (*)$$

Пример 2. Дано разложение вектора $\vec{c}$ по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$: $\vec{c} = 16\vec{i} - 15\vec{i} + 12k$. Определить разложение по этому же базису вектора $\vec{d}$, параллельному вектору $\vec{c}$ и противоположного с ним направления, при условии, что $|\vec{d}| = 75$.

Решение. Так как векторы $\vec{d}$ и $\vec{c}$ по условию коллинеарны, то они удовлетворяют условию: $\vec{d} = \lambda\vec{c}$, $\lambda < 0$. По условию $|\vec{d}| = 75$, из равенства

$|\vec{d}| = |\lambda|\,|\vec{c}| = |\lambda|\ \sqrt{16^2 + 15^2 + 12^2} = |\lambda|\sqrt{625} = |\lambda|\ 25$;
$|\lambda|\ 25 = 75$; $|\lambda| = 3$. Окончательно, $\lambda = -3$.
Ответ: $\vec{d} = -48\vec{i} + 45\vec{j} - 36\vec{k}$.

Пример 3. Два вектора $\vec{a} = \{2;\ -3;\ 6\}$ и $\vec{b} = \{-1;\ 2;\ -2\}$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\vec{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при условии, что $|\vec{c}| = 3\sqrt{42}$.

Решение. В примере (№ 18, п. 1.1) мы нашли формулу для вектора, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Это вектор $\vec{c} = \lambda\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$, $\lambda > 0$. Найдем орты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\overrightarrow{b_0} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Для этого вычислим $|\vec{a}| = \sqrt{4+9+36} = 7$, $|\vec{b}| = \sqrt{1+4+4} = 3$. Тогда

$$\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{7}\{2; -3; 6\} = \left\{\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right\}, \ \overrightarrow{b_0} = \frac{1}{3}\{-1; 2; -2\} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right\} \text{ и}$$

$$\overrightarrow{a_0} + \overrightarrow{b_0} = \left\{\frac{2}{7} - \frac{1}{3}; -\frac{3}{7} + \frac{2}{3}; \frac{6}{7} - \frac{2}{3}\right\} = \left\{\frac{-1}{21}; \frac{5}{21}; \frac{4}{21}\right\}.$$

$$|\vec{c}| = \lambda\sqrt{\frac{1}{21^2} + \frac{25}{21^2} + \frac{16}{21^2}} = \frac{\lambda}{21}\sqrt{42}.$$

По условию $|\vec{c}| = 3\sqrt{42}$, поэтому $\frac{\lambda}{21}\sqrt{42} = 3\sqrt{42}$; $\lambda = 63$.

Таким образом, $\vec{c} = 63\left\{\frac{-1}{21}; \frac{5}{21}; \frac{4}{21}\right\} = \{-3; 15; 12\}$; $\vec{c} = \{-3; 15; 12\}$.

Ответ: $\vec{c} = \{-3; 15; 12\}$.

Пример 4. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{p} = 3\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}$, если $\vec{a} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$.

Решение. Найдем разложение вектора $\vec{p}$ по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$: $\vec{p} = 3(4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}) - 5(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) + (2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}) = 9\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}$.

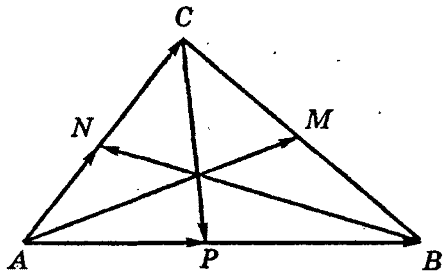
Найдем длину вектора $\vec{p}$: $|\vec{p}| = \sqrt{9^2 + 8^2 + 3^2} = \sqrt{154}$. Тогда орт вектора $\vec{p}$ – вектор $\vec{p}_0 = \frac{9}{\sqrt{154}}\vec{i} + \frac{8}{\sqrt{154}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{154}}\vec{k}$.

Известно, что координаты орта вектора есть его направляющие косинусы. Следовательно, $\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{154}}$, $\cos\beta =$ $= \frac{8}{\sqrt{154}}$, $\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{154}}$.

Ответ: $|\vec{p}| = \sqrt{154}$, $\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{154}}$,

$$\cos\beta = \frac{8}{\sqrt{154}},\ \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{154}}.$$

Пример 5. Векторы $\overrightarrow{AB} = \{2; 6; -4\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{4; 2; -2\}$ совпадают со сторонами треугольника ABC. Определите координаты векторов, приложенных к вершинам треугольника и совпадающих с его медианами AM, BN, CP.



Решение. Известно, что $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) =$ $= \frac{1}{2}\{6; 8; -6\} = \{3; 4; -3\}$, $\overrightarrow{AM} = \{3; 4; -3\}$. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP}$; $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\{4; 2; -2\} + \{1; 3; -2\} =$ $= \{-3; 1; 0\}$; $\overrightarrow{CP} = \{3; 1; 0\}$. Наконец, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\{4; 2; -2\} - \{2; 6; -4\} =$ $= \{0; -5; 3\}$; $\overrightarrow{BN} = \{0; -5; 3\}$.

Ответ: $\overrightarrow{AM} = \{3; 4; -3\}$, $\overrightarrow{BN} = \{0; -5; 3\}$, $\overrightarrow{CP} = \{3; 1; 0\}$.

Пример 6. Вектор составляет с осями Ox и Oz углы $\alpha =$ $= 120°$ и $\gamma = 45°$. Какой угол он составляет с осью Oy?

Решение. Так как направляющие косинусы вектора удовлетворяют равенству $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, то

$$\cos^2 120 + \cos^2\beta + \cos^2 45 = 1,\ \cos^2 60 + \cos^2\beta + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\frac{1}{4} + \cos^2\beta + \frac{1}{2} = 1,\ \cos^2\beta = \frac{1}{4},\ \cos\beta = \pm\frac{1}{2}.$$

Отсюда $\beta = 60°$ или $\beta = 120°$.

Ответ: $60°$ или $120°$.

Пример 7. Определить, при каких значениях α, β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны.

Решение. Из условия коллинеарности двух векторов следуют равенства: $\dfrac{-2}{\alpha} = \dfrac{3}{-6} = \dfrac{\beta}{2}$.

Тогда $\dfrac{-2}{\alpha} = \dfrac{3}{-6}$; $\alpha = 4$, $\dfrac{3}{-6} = \dfrac{\beta}{2}$; $\beta = -1$.

Ответ: $\alpha = 4$, $\beta = -1$.

Пример 8. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, образующий с ортом $\vec{j}$ острый угол и имеющий длину $|\vec{x}| = 15$.

Решение. По условию $\vec{x}$ коллинеарен $\vec{a}$, следовательно, $\vec{x} = \lambda\vec{a}$ и $\cos\beta > 0$, $\beta < \dfrac{\pi}{2}$. Пусть $\vec{x} = \{x; y; z\}$, тогда $\{x; y; z\} = \lambda\{1; -2; -2\}$ и чтобы выполнялось условие $y > 0$, надо положить $\lambda < 0$. Кроме того, $x = \lambda$, $y = -2\lambda$, $z = -2\lambda$; $|\vec{x}| = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2} = |\lambda|\sqrt{9} = -3\lambda$. По условию $|\vec{x}| = 15$, следовательно, $-3\lambda = 15$; $\lambda = -5$. Искомый вектор есть $\vec{x} = -5\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$.

Ответ: $\vec{x} = -5\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$.

Пример 9. Отрезок AB, где $A(7; 1)$, $B(4; -5)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

Решение. Формулы (*) в координатной форме имеют вид: $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $\lambda \neq -1$. Пусть P – точка деления, ближайшая к A. Тогда $\lambda = \dfrac{1}{2}$, и координаты точки P таковы:

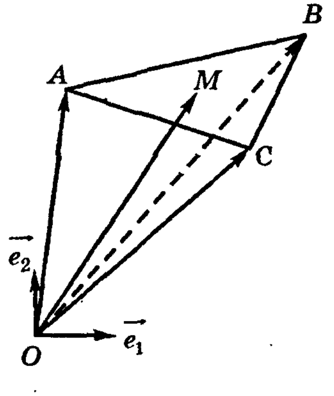
$$x=\frac{7+\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}}=\frac{18}{3}=6;\ y=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot(-5)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{-3}{3}=-1\quad P(6;-1).$$

Для второй точки деления Q имеем $\lambda=\frac{2}{1}=2$; следовательно, $x=\frac{7+2\cdot 4}{3}=5$, $y=\frac{1+2\cdot(-5)}{3}=-3$. $Q(5;-3)$. Таким образом точки деления $P(6;-1)$, $Q(5;-3)$.

Ответ: $P(6;-1)$, $Q(5;-3)$.

Пример 10. Даны вершины однородной треугольной пластинки $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$. Определить координаты ее центра тяжести.

Решение. Центр тяжести находится в точке пересечения медиан. Возьмем систему координат $\{0;\ \vec{e_1};\ \vec{e_2}\}$.



Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ по формуле (**) (стр. 12) равен

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

Поэтому $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$,

$$y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

Ответ: $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

Пример 11. Заданы две вершины $A(1;\ 0;\ -1)$, $B(2;\ 2;\ 1)$ и $E(-1;\ 2;\ 1)$ – точка пересечения медиан треугольника ABC. Найти координаты вершины C.

Решение. Так как E – точка пересечения медиан треугольника ABC, то верно равенство: $\overrightarrow{OE}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$.

В координатной форме получим, считая, что точка имеет координаты $C(x,\ y,\ z)$:

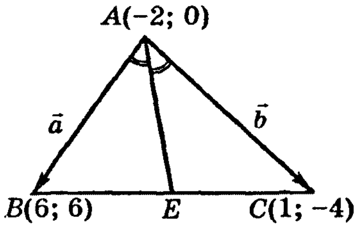
$-1 = \dfrac{1+2+x}{3}$, $x = -6$; $2 = \dfrac{0+2+y}{3}$, $y = 4$;

$1 = \dfrac{-1+1+z}{3}$, $z = 3$. Получим $C(-6; 4; 3)$.

Ответ: $C(-6; 4; 3)$.

Пример 12. В треугольнике с вершинами $A(-2; 0)$, $B(6; 6)$ и $C(1; -4)$ определить длину биссектрисы AE.

1) Найдем координаты точки E как точки, делящей отрезок BC в отношении



$$\lambda = \frac{BE}{EC} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}.$$

$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \{8; 6\}$, $|\vec{a}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$; $\overrightarrow{AC} = \vec{b} = \{3; -4\}$, $|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Тогда $\lambda = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = 2$.

Координаты точки, делящей отрезок BC в отношении $\lambda = 2$, будут $x = \dfrac{6 + 2\cdot 1}{1+2} = \dfrac{8}{3}$, $y = \dfrac{6 + 2\cdot(-4)}{1+2} = -\dfrac{2}{3}$, $E\left(\dfrac{8}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$.

2) Находим длину $|\overrightarrow{AE}|$: $\overrightarrow{AE} = \left\{\dfrac{8}{3} - (-2); \left(-\dfrac{2}{3}\right) - 0\right\} = \left\{\dfrac{14}{3}; -\dfrac{2}{3}\right\} = \dfrac{2}{3}\cdot\{7; -1\}$ и

$$|\overrightarrow{AE}| = \frac{2}{3}\sqrt{7^2 + (-1)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{50} = \frac{10}{3}\sqrt{2}.$$

Ответ: $|\overrightarrow{AE}| = \dfrac{10}{3}\sqrt{2}$.

Пример 13. Найти точку, симметричную точке $A(-2; 0; 7)$ относительно точки $B(5; -1; 2)$.

Решение. Если C – искомая точка, то B – середина отрезка AC. Поэтому, обозначив координаты точки C через

x, y, z имеем: $5 = \dfrac{-2+x}{2}$, $-1 = \dfrac{0+y}{2}$, $2 = \dfrac{7+z}{2}$, откуда $x = 12$, $y = -2$, $z = -3$.

Ответ: $C(12; -2; -3)$.

Пример 14. Найти расстояние между концами векторов $\vec{a} = \{2; 1; 8\}$ и $\vec{b} = \{-2; 2; 3\}$, если векторы отложены от начала координат.

Решение. Так как по условию векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отложены от начала координат, то это есть радиус-векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поэтому, по определению координат точки в декартовой системе координат, мы имеем две точки $M_1(2; 1; 8)$ и $M_2(-2; 2; 3)$. По формуле расстояния между точками

$$d = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-1)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{16+1+25} = \sqrt{42}.$$

Ответ: $d = \sqrt{42}$.

Пример 15. Показать, что точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы. Тогда определитель, составленный из координат, должен быть равен нулю. Вычислим определитель: $\overrightarrow{AB} = \{-1; -1; 6\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-2; 0; 2\}$, $\overrightarrow{AD} = \{1; -1; 4\}$,

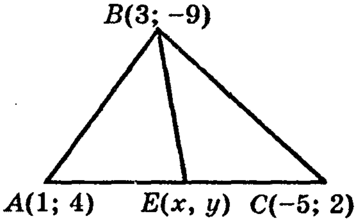
$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 2 - 2 + 12 = 0.$$

Следовательно, данные точки лежат в одной плоскости.

Ответ: точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Пример 16. Даны вершины треугольника $A(1; 4)$, $B(3; -9)$, $C(-5; 2)$. Определить длину его медианы, проведенной из вершины B.

Решение.



1) Найдем координаты точки E как середины отрезка AC:

$x = \dfrac{1+(-5)}{2} = -2$, $y = \dfrac{4+2}{2} = 3$,

$E(-2, 3)$.

2) Найдем расстояние между точками B и E:

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y+9)^2} = \sqrt{(-2-3)^2 + (3+9)^2} =$$

$$= \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13.$$

Ответ: 13.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти орт вектора $\vec{a} = \{6; -2; -3\}$.

2. Найти орт вектора $\vec{a} = \{3; 4; -12\}$.

3. Определить модули суммы и разности векторов $\vec{a} = \{3; -5; 8\}$ и $\vec{b} = \{-1; 1; -4\}$.

4. Найти вектор $\vec{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\vec{a} = 7\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, если $|\vec{x}| = 5\sqrt{6}$.

5. Найти координату z вектора $\vec{a}$, если $x(\vec{a}) = 3$, $y(\vec{a}) = -9$ и $|\vec{a}| = 12$.

6. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \{12; -15; -16\}$.

7. Дан модуль вектора $|\vec{a}| = 2$ и углы $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$. Вычислить проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

8. Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$. Вычислить его координаты при условии, что $|\vec{a}| = 2$.

9. Проверить, что четыре точки $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$ служат вершинами трапеции.

10. Найти вектор $\vec{x}$, образующий с ортом $\vec{j}$ угол 60°, а с ортом $\vec{k}$ – угол 120°, если $|\vec{x}| = 5\sqrt{2}$.

11. Заданы векторы $\vec{a} = \{1; 5; 3\}$, $\vec{b} = \{6; -4; -2\}$, $\vec{c} = \{0; -5; 7\}$, $\vec{d} = \{-20; 27; -35\}$. Требуется подобрать числа α, β, γ так, чтобы векторы $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{c}$ образовали замкнутую ломаную линию, если «начало» каждого последующего совместить с «концом» предыдущего.

12. Точки $A(4; 2)$, $B(7; -2)$ и $C(1; 6)$ являются вершинами треугольника, сделанного из однородной проволоки. Определить центр тяжести этого треугольника.

13. Даны вершины треугольника $A(1; -1; -3)$, $B(2; 1; -2)$ и $C(-5; 2; -6)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

14. Даны вершины треугольника $A(2; -5)$, $B(1; -2)$ и $C(4; 7)$. Найти точку пересечения со стороной AC биссектрисы его внутреннего угла B.

15. Даны вершины треугольника $A(1; -3)$, $B(3; -5)$ и $C(-5; 7)$. Определить координаты середин его сторон.

16. Вычислить площадь правильного треугольника, две вершины которого – $A(-3; 2)$, $B(1; 6)$.

17. Даны точки $A(0; 0)$, $B(3; -4)$, $C(-3; 4)$, $D(-2; 2)$ и $E(10; -3)$. Определить расстояние d между точками 1) A и B; 2) B и C; 3) A и C; 4) C и D; 5) A и D; 6) D и E.

18. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = \{2; -3\}$, $\vec{q} = \{1; 2\}$. Найти разложение вектора $\vec{a} = \{9; 4\}$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$.

Ответы:

1. $\overrightarrow{a_0} = \left\{\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}\right\}$;

2. $\overrightarrow{a_0} = \left\{\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\right\}$;

3. $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 14$;

4. $\vec{x} = \frac{5}{3}(\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k})$;

5. $z = \pm 3\sqrt{6}$;

6. $\cos\alpha = \frac{12}{25}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\gamma = -\frac{16}{25}$;

7. $x = \sqrt{2}$, $y = 1$, $z = -1$;

8. $\vec{a} = \{1; -1; \sqrt{2}\}$ или $\vec{a} = \{1; -1; -\sqrt{2}\}$;

10. $\vec{x} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$;

11. $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$;

12. $(4; 2)$;

13. $|\overrightarrow{AE}| = \frac{3}{4}\sqrt{10}$;

14. $\left(\frac{5}{2}; -2\right)$;

15. Середины сторон AB и AC соответственно: $(-1; 1)$, $(-2; 2)$.

16. $8\sqrt{3}$;

17. 1) 5; 2) 10; 3) 5; 4) $\sqrt{5}$; 5) $2\sqrt{2}$; 6) 13;

18. $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$.

1.4. Скалярное произведение векторов

Рассмотрим следующую задачу. Материальная точка массой 1 под действием постоянной по величине и направлению силы $\vec{F}$ переместилась вдоль прямой из точки P в точку Q. Какая при этом совершилась работа? Как известно из курса физики, работа равна произведению силы на перемещение и на косинус угла между направлениями силы и перемещения. Применяя векторные обозначения, можно записать: $A = |\vec{F}||\overrightarrow{PQ}|\cos(\vec{F}, \overrightarrow{PQ})$, где A – совершенная работа.

Определение 1. *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a}\hat{,}\vec{b})$.

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен нулю, то их скалярное произведение принимают равным нулю. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a}\cdot\vec{b})$. Итак,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно выразить также формулой $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\ \text{пр}_a\vec{b}$ или $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\ \text{пр}_b\vec{a}$. Здесь $\text{пр}_b\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$ – проекция вектора $\vec{a}$ на ось вектора $\vec{b}$.

Из определения следует, что $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$, если φ – острый угол; $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$, если угол φ – тупой; $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны (ортогональны), $\vec{a} = 0$, или $\vec{b} = 0$.

Отметим еще факт. Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на себя называют скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}^2$. Так как в этом случае угол $\varphi = 0$, то

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2,$$

т. е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины. Отсюда следует, что $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})}$.

Свойства скалярного произведения

1. Скалярное умножение коммутативно, т. е. для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство
$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\vec{a}).$$
2. $(\vec{a}\cdot\vec{a}) = |\vec{a}|^2$, $\vec{a}$ – ненулевой вектор, и $(\vec{a}\cdot\vec{a}) = 0$, если $\vec{a}$ – нулевой вектор.

3. Скалярное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители ортогональны или хотя бы один из них равен нуль-вектору.

4. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в ортогональном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$, то их скалярное произведение может быть вычислено по формуле
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$
Отсюда следует необходимое и достаточное условие ортогональности векторов:
$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow ((\vec{a}\cdot\vec{b}) = 0) \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$

5. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справедливо равенство $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивность операции сложения относительно операции умножения векторов).

6. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любого числа k справедливо равенство
$$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$
(Ассоциативность по отношению к умножению вектора на число.)

7. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два ненулевых вектора, φ – угол между ними. Из определения скалярного произведения следует:
$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|},$$
или в координатах,
$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

8. Пусть в пространстве дана некоторая ось l, единичный вектор $\vec{e}$, который составляет с координатными осями углы α, β, γ. Тогда проекция произвольного вектора $\vec{a} = \{x, y, z\}$ на эту ось определяется формулой
$$\text{пр}_{\vec{e}}\vec{a} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Пример 1. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$ на ось l, образующую с координатными осями равные острые углы.

Решение.

Направляющие косинусы оси l таковы: $\cos\alpha = \cos\beta =$ $= \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Следовательно, $\text{пр}_l\vec{a} = 1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $\text{пр}_l\vec{a} = 2\sqrt{3}$.

Пример 2. Даны векторы $\vec{a} = \{1, 2, -1\}$, $\vec{b} = \{2, -1, 3\}$. Найти $\text{пр}_a\vec{b}$.

Решение.

Так как $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,\text{пр}_a\vec{b}$,

$$\text{пр}_a\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ответ: $= -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Пример 3. Дано: $|\vec{a}_1| = 3$, $|\vec{a}_2| = 4$, $(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Вычислить: а) $\vec{a}_1^{\,2} = \vec{a}_1\cdot\vec{a}_1$; б) $(3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2)\cdot(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2)$; в) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)^2$.

Решение.

а) $\vec{a}_1^{\,2} = |\vec{a}_1|^2 = 9$;

б) $(3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2)\cdot(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2) = 3\,\vec{a}_1^{\,2} - 2(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_1) +$ $+ 6(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2) - 4\,\vec{a}_2^{\,2} = 3\,|\vec{a}_1|^2 + 4|\vec{a}_2||\vec{a}_1|\cos\dfrac{2\pi}{3} -$ $- 4\,|\vec{a}_2|^2 = 3\cdot 9 + 4\cdot 3\cdot 4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 4\cdot 4^2 = 27 - 24 - 64 =$ $= -61$.

в) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1^{\,2} + 2(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2) + \vec{a}_2^{\,2} = |\vec{a}_1|^2 +$ $+ 2|\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos\dfrac{2\pi}{3} + 4\,|\vec{a}_2|^2 = 9 - 3\cdot 4 + 16 = 13$.

Ответ: а) 9; б) −61; в) 13.

Пример 4. Дано: $|\vec{a}_1| = 3$, $|\vec{a}_2| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a}_1 + \alpha\vec{a}_2$ и $\vec{a}_1 - \alpha\vec{a}_2$ будут перпендикулярны.

Решение.

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow ((\vec{a}\,\vec{b}) = 0)$ (условие отрогональности векторов). Следовательно,

$(\vec{a}_1 + \alpha\vec{a}_2)\cdot(\vec{a}_1 - \alpha\vec{a}_2) = 0,\ \vec{a}_1{}^2 - \alpha^2\vec{a}_2{}^2 = 0,$

$$|\vec{a}_1|^2 - \alpha^2|\vec{a}_2|^2 = 0;\ \alpha^2 = \frac{\left|\overrightarrow{a_1}\right|^2}{\left|\overrightarrow{a_2}\right|^2} = \frac{9}{25},\ \alpha = \pm\frac{3}{5}.$$

Ответ: $\pm\frac{3}{5}$.

Пример 5. Доказать справедливость тождества $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$ и выяснить его геометрический смысл.

Решение.

$(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2(\vec{a}\,\vec{b}) + \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2(\vec{a}\,\vec{b}) + \vec{b}^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$. Так как $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ диагонали параллелограмма, то тождество означает следующий факт: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Пример 6. Вычислить длину вектора $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – взаимно перпендикулярные векторы.

Решение.

$$|\vec{p}| = \sqrt{(\vec{p}\cdot\vec{p})} =$$

$$= \sqrt{(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})} = \sqrt{\alpha^2|\vec{a}|^2 + \beta^2|\vec{b}|^2 + \gamma^2|\vec{c}|^2}.$$

Ответ: $|\vec{p}| = \sqrt{\alpha^2|\vec{a}|^2 + \beta^2|\vec{b}|^2 + \gamma^2|\vec{c}|^2}$.

Пример 7. Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, зная, что $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – перпендикулярные орты.

Решение.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})} = \sqrt{(3\vec{m} - 4\vec{n})^2} =$$

$$= \sqrt{9\vec{m}^2 - 24(\vec{m}\cdot\vec{n}) + 16\vec{n}^2} = \sqrt{9|\vec{m}|^2 - 24(\vec{m}\cdot\vec{n}) + 16|\vec{n}|^2} =$$

$= \sqrt{9+16} = 5$, так как $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$,

$\vec{m} \perp \vec{n} \Leftrightarrow (\vec{m}\cdot\vec{n}) = 0$.

Ответ: $|\vec{a}| = 5$.

Пример 8. Чему равна сумма $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$, если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – три орта, удовлетворяющие условию: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$.

Решение.

Равенство $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ скалярно умножим последовательно на $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, получим

$\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a}=0$, отсюда $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$;

$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{b}=0$, отсюда $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{b}=-1$;

$\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c}=0$, отсюда $\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-1$.

Сложим три равенства: $2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=-3$ и

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{3}{2}.$$

Ответ: $-\dfrac{3}{2}$.

Пример 9. В плоскости (xOy) найти вектор $\vec{p}$, перпендикулярный $\vec{q}=\{5;-3;4\}$ и имеющий одинаковую с ним длину.

Решение.

$$|\vec{q}|=\sqrt{5^2+(-3)^2+4^2}=\sqrt{25+9+16}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

Возьмем $\vec{p}=\{x;y;0\}$ и вычислим скалярное произведение $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ (по условию), или $5x-3y=0$. Кроме того,

$$|\vec{p}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{50}.$$

Получаем систему уравнений $\begin{cases}5x-3y=0,\\ x^2+y^2=50;\end{cases}$ $y=\dfrac{5}{3}x$;

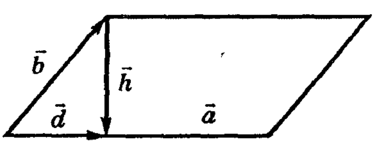
$$x^2+\frac{25}{9}x^2=50;\ \frac{34x^2}{9}=50;\ x^2=\frac{50\cdot 9}{34};$$

$$x=\pm\frac{5\cdot 3}{\sqrt{17}}=\frac{15}{\sqrt{17}},\ y=\pm\frac{25}{\sqrt{17}},\ z=0.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{15}{\sqrt{17}};\dfrac{25}{\sqrt{17}};0\right\}$, $\left\{-\dfrac{15}{\sqrt{17}};-\dfrac{25}{\sqrt{17}};0\right\}$.

Пример 10. Зная векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, на которых построен параллелограмм, выразить через них вектор, совпадающий с высотой параллелограмма, перпендикулярной к стороне $\vec{a}$.

Решение.



Очевидно, $\vec{h} = \vec{d} - \vec{b} = \lambda\vec{a} - \vec{b}$. По условию, $(\vec{h}\cdot\vec{a}) = 0$, $(\lambda\vec{a} - \vec{b})\cdot\vec{a} = 0$, $\lambda\vec{a}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b}) = 0$. Отсюда $\lambda = \dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}$ и $\vec{h} = \dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a} - \vec{b}$.

Ответ: $\vec{h} = \dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a} - \vec{b}$.

Пример 11. Дано: $\vec{a} = \{-1; 2; -2\}$, $\vec{b} = \{3; 5; -1\}$. Пусть на этих векторах построен параллелограмм.

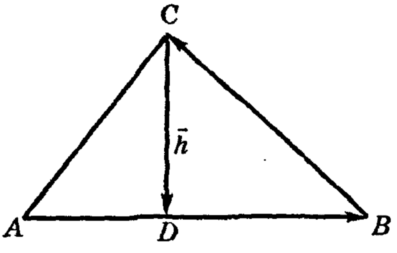
Найти координаты вектора, совпадающего с высотой параллелограмма, перпендикулярной к стороне $\vec{a}$.

Решение.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 9$, $|\vec{a}| = 3$, $\vec{h} = 3\vec{a} - \vec{b} = \{-6; 1; -5\}$.

Ответ: $\vec{h} = \{-6; 1; -5\}$.

Пример 12. Зная две стороны треугольника $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{i} + 5\vec{j}$, вычислить длину высоты $\overrightarrow{CD}$ при условии, что $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – ортогональные орты.



Решение.

Чтобы применить формулу примера 10, надо взять векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BA} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \vec{i} + 5\vec{j}$. Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b} = -3 + 20 = 17$, $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ и $\lambda = \dfrac{17}{25}$,

$$\vec{h} = \frac{17}{25}\vec{a} - \vec{b} = \frac{17}{25}\cdot\{-3; 4\} - \{1; 5\} = \left\{-\frac{51}{25}; \frac{68}{25}\right\} - \{1; 5\} = \left\{-\frac{76}{25}; \frac{57}{25}\right\},$$

$$|\vec{h}| = \frac{1}{25} = \sqrt{76^2 + 57^2} = \frac{96}{25} = \frac{19\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{38}{10} = 3{,}8.$$

Ответ: $|\vec{h}| = 3{,}8$.

Пример 13. Доказать, что вектор $\vec{p} = \vec{b} \cdot (\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a}\,\vec{b})$ ортогонален вектору $\vec{a}$.

Решение.

Вектор $\vec{p} = \vec{b} \cdot (\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a}\,\vec{b})$ скалярно умножим на вектор $\vec{a}$, получим:

$\vec{p}\,\vec{a} = (\vec{a}\,\vec{b})\,(\vec{a}\,\vec{c}) - (\vec{c}\,\vec{a})\,(\vec{a}\,\vec{b}) =$

$= (\vec{a}\,\vec{b})\,(\vec{a}\,\vec{c}) - (\vec{a}\,\vec{b})\,(\vec{a}\,\vec{c}) = 0.$

Утверждение доказано.

Пример 14. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$; зная, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, вычислить угол α между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$.

Решение.

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|\,|\vec{a}-\vec{b}|}.$$

Вычислим $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}\vec{b}) + |\vec{b}|^2} =$

$$= \sqrt{3 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{6} + 1} = \sqrt{4 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{7}.$$

Аналогично, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}\vec{b}) + |\vec{b}|^2} =$

$$= \sqrt{4 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1.$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{\sqrt{7}\cdot 1} = \frac{3-1}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Ответ: $= \alpha = \arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right)$.

Пример 15. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F} = \{3; -5; 2\}$, когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора $\vec{S} = \{2; -5; -7\}$.

Решение.

$A = (\vec{F}\cdot\vec{S}) = 3\cdot 2 + (-5)\cdot(-5) + 2\cdot(-7) = 6 + 25 - 14 = 17.$

Ответ: $A = 17$.

Пример 16. Даны три силы $\vec{M} = \{3;\ -4;\ 2\}$, $\vec{N} = \{2;\ 3;\ -5\}$ и $\vec{P} = \{-3;\ -2;\ 4\}$, приложенные к одной точке.

Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_1(5;\ 3;\ -7)$ в положение $M_2(4;\ -1;\ -4)$.

Решение.

$$\vec{R} = \vec{M} + \vec{N} + \vec{P} = \{2;\ -3;\ 1\},\ \overrightarrow{M_1M_2} = \{-1;\ -4;\ 3\}.$$

$$A = \vec{R}\cdot\overrightarrow{M_1M_2} = 2\cdot(-1) + (-3)(-4) + 13 = -2 + 12 + 3 = 13.$$

Ответ: $A = 13$.

Пример 17. Даны вершины треугольника $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$ и $C(3;\ -2;\ 1)$.

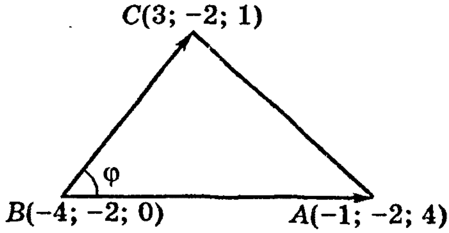
Определить его внутренний угол при вершине B.

Решение.

Внутренний угол при вершине B – это угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Обозначим его через φ.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|},$$



$\overrightarrow{BA} = \{3;\ 0;\ 4\}$, $\overrightarrow{BC} = \{7;\ 0;\ 1\}$, $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$ и

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{50}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 21 + 4 = 25$, тогда

$$\cos\varphi = \frac{25}{5\sqrt{50}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \varphi = 45^\circ.$$

Ответ: 45°.

Пример 18. Даны две точки $M(-5;\ 7;\ -6)$, $N(7;\ -9;\ 9)$. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = \{1;\ -3;\ 1\}$ на вектор $\overrightarrow{MN}$.

Решение.

Воспользуемся формулой $\text{пр}_{\overrightarrow{MN}}\vec{a} = \dfrac{\left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{MN}\right)}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}$. Найдем

$\overrightarrow{MN} = \{12;\ -16;\ 15\}$, $(\vec{a}\cdot\overrightarrow{MN}) = 12 + 48 + 15 = 75$,

$$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{12^2 + (-16)^2 + 15^2} = \sqrt{144 + 256 + 225} = \sqrt{625} =$$

$$= 25 \text{ и } \text{пр}_{MN}\vec{a} = \frac{75}{25} = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 19. Вектор $\vec{X}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5k$, образует с осью Oy тупой угол.

Найти его координаты, зная, что $|\vec{X}| = 14$.

Решение.

Обозначим $\vec{X} = \{x, y, z\}$. По условию $\vec{X} \cdot \vec{a} = 0$, $\vec{X} \cdot \vec{b} = 0$,

$|\vec{X}| = 14$, угол $(\vec{X}, \vec{j}) > \dfrac{\pi}{2}$, поэтому $y < 0$,

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0, \\ 18x - 22y - 5z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14^2; \end{cases} \text{ или } \left.\begin{cases} 3\dfrac{x}{z} + 2\dfrac{y}{z} = -2, \\ 18\dfrac{x}{z} - 22\dfrac{y}{z} = 5, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 196; \end{cases}\right| \begin{matrix} \cdot 11 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$+\begin{cases} 33\dfrac{x}{z} + 22\dfrac{y}{z} = -22, \\ 18\dfrac{x}{z} - 22\dfrac{y}{z} = 5. \end{cases}$$

$$51\frac{x}{z} = -17; \qquad x = -\frac{z}{3}; \ \frac{y}{z} = -\frac{1}{2}; \ y = -\frac{1}{2}z.$$

Подставим найденные выражения для x и y в третье уравнение.

$$\frac{z^2}{9} + \frac{z^2}{4} + z^2 = 196; \ z^2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + 1\right) = 196; \ \frac{49}{36}z^2 = 196;$$

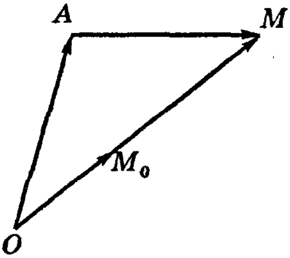
$z = \pm 12$; $y = -\dfrac{1}{2}z$ и $y < 0$, $z = 12$.

$y = -6$, $x = -4$.

Ответ: $\vec{X} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k}$.

Пример 20. Найти точку M, отстоящую от точки $A(-4; 0;1)$ на расстоянии 9, зная направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{OM}$: $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{2}{3}$ $\cos\gamma = \frac{1}{3}$.

Решение.



По условию $\overrightarrow{OM_0} = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\}$,

значит, $\overrightarrow{OM} = \lambda\{2; -2; 1\} = \{2\lambda; -2\lambda; \lambda\}$, $\lambda > 0$.

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \{2\lambda + 4; -2\lambda; \lambda - 1\}$.

Так как $\left|\overrightarrow{AM}\right| = 9$, то $(2\lambda + 4)^2 +$
$+ 4\lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 81$;

$4\lambda^2 + 16\lambda + 16 + 4\lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 81$;

$9\lambda^2 + 14\lambda - 64 = 0$,

$$\lambda = \frac{-7 \pm \sqrt{79 + 9 \cdot 64}}{9} = \frac{-7 \pm \sqrt{625}}{9} = \frac{-7 \pm 25}{9}.$$

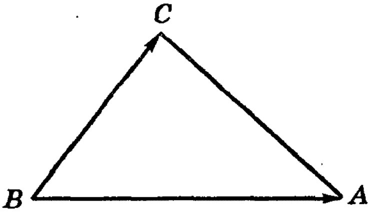
Так как, по условию, $\lambda > 0$, то $\lambda = 2$.

$\overrightarrow{OM} = \{4; -4; 2\}$ – координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, а значит, точки M.

Ответ: $M(4; -4; 2)$.

Пример 21. Вершины треугольника находятся в точках $A(2; -1; 3)$, $B(4; 0; 1)$, $C(-10; 5; 3)$. Найти направляющие косинусы биссектрисы угла ABC.

Решение.



Найдем векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и их орты: $\overrightarrow{BA} = \{-2; -1; 2\}$, $\overrightarrow{BC} = \{-14; 5; 2\}$.

$\left|\overrightarrow{BA}\right| = 3$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 15$.

$$(\overrightarrow{BA})_0 = \left\{-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}, \ (\overrightarrow{BC})_0 = \left\{-\frac{14}{15}; \frac{5}{15}; \frac{2}{15}\right\},$$

$$\vec{c} = \lambda(\overrightarrow{BA}_0 + \overrightarrow{BC}_0) =$$

$$= \lambda\left\{-\frac{2}{3} - \frac{14}{15}; -\frac{1}{3} + \frac{5}{15}; \frac{2}{3} + \frac{2}{15}\right\} = \lambda\left\{\frac{-24}{15}; 0; \frac{12}{15}\right\} =$$

$= \lambda\left\{\frac{-12}{15}; 0; \frac{6}{15}\right\} = \{-2; 0; 1\}$; $|\vec{c}| = \sqrt{5}$, если $\lambda = \frac{15}{6}$.

Тогда $\vec{c_0} = \left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}; 0; \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$.

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Пример 22. Луч образует с осями Ox и Oy углы, соответственно равные $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$, с осью Oz – тупой угол. Найти этот угол.

Решение.

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$;

$\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\gamma = 1$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2\gamma = 1$;

$\cos^2\gamma = \frac{1}{4}$; $\cos\gamma = \pm\frac{1}{2}$.

Так как $\gamma > \frac{\pi}{2}$, $\cos\gamma < 0$, то $\gamma = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

Пример 23. Вычислить координаты вектора, длина которого равна 8, зная, что он образует с осью Ox угол $\frac{\pi}{4}$, с осью Oz – угол $\frac{\pi}{3}$, а с осью Oy – острый угол.

Решение.

$\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\beta + \cos^2\frac{\pi}{3} = 1$; $\cos^2\beta = \frac{1}{4}$.

Так как β – острый угол, $\cos\beta = \frac{1}{2}$, $\beta = 60°$.

($X = |\vec{a}|\cos\alpha$, $Y = |\vec{a}|\cos\beta$, $Z = |\vec{a}|\cos\gamma$).

$X = 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$, $Y = 4$, $Z = 4$.

Ответ: $\{4\sqrt{2}; 4, 4\}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Раскрыть скобки в выражении $(\vec{a}+\vec{b})^2$ и выяснить геометрический смысл полученной формулы.

2. Даны три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Зная, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$ и $|\vec{c}|=4$, вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

3. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60°. Зная, что $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$ и $|\vec{c}|=6$, определить модуль вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

4. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a}+\vec{b}$ был ортогонален вектору $\vec{a}-\vec{b}$?

5. Доказать, что вектор $\vec{p}=\vec{b}-\dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}$ ортогонален вектору $\vec{a}$.

6. Даны векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC. Найти разложение по базису $\vec{b}, \vec{c}$ вектора, приложенного к вершине B этого треугольника и совпадающего с его высотой BD.

7. Даны векторы $\vec{a}=\{4; -2; -4\}$, $\vec{b}=\{6; -3; 2\}$, вычислить:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\sqrt{\vec{a}^2}$; 3) $\sqrt{\vec{b}^2}$; 4) $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+2\vec{b})$;
5) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 6) $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

8. Дан равносторонний треугольник ABC, длины которого равны 1. Вычислить выражение

$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB})$.

9. В треугольнике ABC даны длины его сторон: $|\overrightarrow{BC}|=5$, $|\overrightarrow{CA}|=6$, $|\overrightarrow{AB}|=7$. Найти скалярные произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

10. В треугольнике ABC проведены медианы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$. Вычислить $(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE})+(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF})$.

11. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если
1) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $(\vec{a},\vec{b})=45°$;
2) $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=7$, $(\vec{a},\vec{b})=120°$;
3) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $(\vec{a},\vec{b})=90°$;
4) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены;
5) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены.

12. Вычислить выражение $|\vec{a}|^2-\sqrt{3}(\vec{a}\cdot\vec{b})+5|\vec{b}|^2$, если:
1) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $(\vec{a},\vec{b})=30°$;

2) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 150°$.

13. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами:

1) $\vec{a} = \{4; -1\}$, $\vec{b} = \{-1; -7\}$;

2) $\vec{a} = \{2; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -3\}$;

3) $\vec{a} = \{1; 2\}$, $\vec{b} = \{-4; 2\}$.

14. Найти расстояние между точками A и B, заданными своими координатами:

1) $A(4; -2; 3)$, $B(4; 5; 2)$; 2) $A(-3; 1; -1)$, $B(-1; 1; -1)$;

3) $A(3; -3; -7)$, $B(1; -4; -5)$.

15. Даны три вектора: $\vec{a} = \{1; -1; 1\}$, $\vec{b} = \{5; 1; 1\}$, $\vec{c} = \{0; 3; -2\}$. Вычислить:

1) $\vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$;

2) $|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$;

3) $(\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) - |\vec{a}|^2 \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$.

16. Найти угол между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, заданными своими координатами:

1) $\vec{a} = \{1; -1; 1\}$, $\vec{b} = \{5; 1; 1\}$;

2) $\vec{a} = \{1; -1; 1\}$, $\vec{b} = \{-2; 2; -2\}$.

17. Из одной точки отложены три вектора $\vec{a} = \{0; -3; 4\}$, $\vec{b} = \{4; 1; -8\}$ и $\vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ имеет длину 1 и делит пополам угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вычислить координаты вектора $\vec{c}$.

18. Даны два вектора $\vec{a} = \{3; -1\}$, $\vec{b} = \{-1; 1\}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющей системе уравнений $(\vec{x} \cdot \vec{a}) = 13$, $(\vec{x} \cdot \vec{b}) = -3$.

19. Даны вектор $\vec{a} = \{1; -2; 3\}$ и точка $A(2, 4, 5)$. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, перпендикулярного вектору $\vec{a}$, если известно, что точка B принадлежит оси Ox.

20. Даны вектор $\vec{a} = \{-4; 2\}$ и точка $A(3, 5)$. Найти скалярное произведение $\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB}$, если известно, что точка B принадлежит оси Ox, и векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}$ коллинеарны.

21. Даны вектор $\vec{a} = \{1; -9; 3\}$ и точка $A(3, 0, 5)$. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, перпендикулярного вектору $\vec{a}$, если известно, что точка B принадлежит оси Oz.

22. Даны векторы $\vec{a} = \{2; 2; 1\}$ и $\vec{b} = \{6; 3; 2\}$. Найти $\text{пр}_{a}\vec{b}$ и $\text{пр}_{b}\vec{a}$.

23. Даны вершины треугольника $A(1; 2)$, $B(3; 4)$ и $C(6; 2)$. Определить его внутренний угол при вершине A.

24. Найти значение α, при которых следующие векторы взаимно перпендикулярны:

а) $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + \alpha\vec{j} - 7\vec{k}$;

б) $\vec{a} = \{\alpha; -3; 2\}$ и $\vec{b} = \{1; 2; -\alpha\}$.

25. Векторы $\overrightarrow{AB} = \{5; 2\}$, $\overrightarrow{BC} = \{2; 4\}$, $\overrightarrow{CA} = \{-7; 2\}$ служат сторонами треугольника ABC. Вычислить длину медианы AM и высоты AD.

26. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \{4; 3; 1\}$.

27. Найти направляющие косинусы $\overrightarrow{AB}$, если $A(1; 0; 1)$, $B(1; 2; 3)$.

28. Найти длину равнодействующей силы $\vec{F} = \{1; 1; 2\}$, $\vec{P} = \vec{i} - \vec{j}$.

29. Даны вершины параллелограмма $A(1; -2; 3)$, $B(3; 2; 1)$, $C(6; 4; 4)$. Найти его четвертую вершину.

30. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F} = \{1; 4; -3\}$, когда точка ее приложения перемещается из $C(4; 0; 5)$ в $D(1; 2; 3)$.

31. Под действием силы $\vec{F} = \{5; 2; 1\}$ точка переместилась из $C(3; 0; 3\}$ в $D(-1; 2; 1)$. Найти работу силы $\vec{F}$.

32. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1; -2)$, $B(5; -4)$, $C(-2; 0)$. Найти вектор параллельный биссектрисе угла A.

33. Даны точки $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$, $C(0; 1; -5)$. Вычислить:

1) $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) \cdot (2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$;

2) $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$; 3) $\sqrt{\overrightarrow{AC}^2}$;

4) найти координаты векторов $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})$.

Ответы:

1. Теорема косинусов; **2.** -13; **3.** $|\vec{p}| = 10$; **4.** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; **6.** $\overrightarrow{BD} = \dfrac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{c} - \vec{b}$; **7.** 1) 22; 2) 6; 3) 7; 4) -200; 5) 129; 6) 41; **8.** $-\dfrac{3}{2}$; **9.** -19; **10.** 0; **11.** 1) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$; 2) -21; 3) 0; 4) 5; **12.** 1) 6; 2) 38; **13.** 1) 3; 2) -1; 3) 0; **14.** 1) $5\sqrt{2}$; 2) 2; 3) 3. **15.** 1) $\{-25; -20; 5\}$; 2) 11; 3) -38; **16.** 1) $\arccos\dfrac{5}{9}$; 2) 180°; **17.** $\dfrac{1}{15}\{10; -11; 2\}$; **18.** $\{5; 2\}$; **19.** $3\sqrt{10}$; **20.** -50. **21.** $\sqrt{10}$; **22.** $\dfrac{20}{3}$ и $\dfrac{20}{7}$;

23. 45°; **24.** а) $\alpha = 4$; б) $\alpha = -6$; **25.** $AM = 6$; $AD = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$;

26. $\cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{26}}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{26}}$, $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$; **27.** $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; **28.** $2\sqrt{3}$; **29.** (4; 0; 6); **30.** $A = 11$; **31.** $A = -18$; **32.** $\overrightarrow{AM} = \{-1;\ 5\}$; **33.** 1) -524; 2) 13; 3) 3; 4) $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC} = \{-70;\ 70;\ -350\}$ и $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}) = \{-78;\ 104;\ -312\}$.

1.5. Векторное произведение векторов

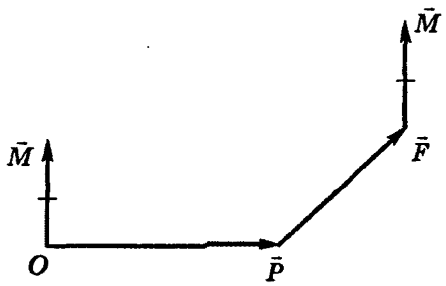
Определение 1. *Векторным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют третий вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$;
2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;
3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a} \times \vec{b}]$.

Если хотя бы один из сомножителей равен $\vec{0}$, то векторное произведение по определению есть нулевой вектор.

Понятие векторного произведения родилось в механике. Если вектор $\vec{b} = \vec{F}$ изображает приложенную в некоторой точке P силу, а вектор $\vec{a}$ идет из некоторой точки O в точку P, то вектор $\vec{M} = [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{c}$ представляет собой момент силы $\vec{F}$ относительно точки O.



Геометрический смысл векторного произведения

1. Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.
2. Длина (модуль) векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ равна площади S параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е.
$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin \varphi,\ \varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Алгебраические свойства векторного произведения

Векторное умножение обладает следующими четырьмя свойствами:

1) $[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$ (свойство антикоммутативности);
2) $[(\alpha\vec{a}) \times \vec{b}] = \alpha[\vec{a} \times \vec{b}]$ (свойство ассоциативности относительно числового множителя);
3) $[(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] = [(\vec{a} \times \vec{c})] + [\vec{b} \times \vec{c}]$ (свойство дистрибутивности относительно суммы векторов);
4) $[(\vec{a} \times \vec{a})] = \vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$.

Если $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ – векторы, заданные своими координатами в прямоугольном базисе, то разложение векторного произведения $[\vec{a} \times \vec{b}]$ в том же базисе имеет вид:

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k},$$

или $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 1. Доказать, что $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{b}$, и выяснить геометрическое значение этого тождества.

Решение.

$(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{b} \times \vec{a}) - (\vec{b} \times \vec{b})$. Так как $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$, $\vec{b} \times \vec{a} = -[\vec{a} \times \vec{b}]$, то получаем $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2[\vec{a} \times \vec{b}]$ и $|(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})| = 2|(\vec{a} \times \vec{b})|$. Это с геометрической точки зрения означает: площадь параллелограмма, построенного на диагоналях данного параллелограмма, вдвое больше площади данного параллелограмма.

Пример 2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 1$ и $|\vec{b}| = 2$, вычислить:

1) $[\vec{a} \times \vec{b}]^2$; 2) $[(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})]^2$; 3) $(\vec{a} + 2\vec{b})] \times (3\vec{a} - \vec{b})]^2$.

Решение.

1) По определению скалярного произведения имеем:
$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot [\vec{a} \times \vec{b}] = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 \cos 0° = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 =$

$$= \left[|\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\frac{2\pi}{3}\right]^2 = \left[1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2 = 3.$$

2) $[(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})]^2 = [(2\vec{a} \times \vec{a}) + (\vec{b} \times \vec{a}) + 4(\vec{a} \times \vec{b}) + 2(\vec{b} \times \vec{b})]^2 = [2 \cdot 0 - [\vec{a} \times \vec{b}] + 4(\vec{a} \times \vec{b}) + 2 \cdot 0]^2 = |3(\vec{a} \times \vec{b})|^2 = 9|[\vec{a} \times \vec{b}]|^2 = 9 \cdot 3 = 27.$

3) $[(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})]^2 = [(\vec{a} \times 3\vec{a}) + 9(\vec{b} \times \vec{a}) - (\vec{a} \times \vec{b}) - 3(\vec{b} \times \vec{b})]^2 = [-9(\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{a} \times \vec{b})]^2 = [=10(\vec{a} \times \vec{b})]^2 = 100\,|[\vec{a} \times \vec{b}]|^2 = 300.$

Ответ: 1) 3; 2) 27; 3) 300.

Пример 3. Даны векторы $\vec{a} = \{3; -1; -2\}$ и $\vec{b} = \{1; 2; -1\}$. Найти координаты векторных произведений:

1) $[\vec{a} \times \vec{b}]$; 2) $[(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}]$; 3) $[(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})]$.

Решение.

$$1)\ \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k},\ \vec{a} \times \vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k} = \{5; 1; 7\}.$$

2) $[(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}] = (2\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times \vec{b} = 2(\vec{a} \times \vec{b}) = 2\{5; 1; 7\} = \{10; 2; 14\}.$

3) $[(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})] = 4(\vec{a} \times \vec{a}) - 2(\vec{b} \times \vec{a}) + 2(\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{b} \times \vec{b}) = 4(\vec{a} \times \vec{b}) = 4\{5; 1; 7\} = \{20; 4; 28\}.$

Ответ: 1) $\{5; 1; 7\}$; 2) $\{10; 2; 14\}$; $\{20; 4; 28\}$.

Пример 4. Даны вершины треугольника $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$ и $C(1; 3; -1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Решение.

Находим $|\overrightarrow{AC}|$ и $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

$\overrightarrow{AC} = \{0; 4; -3\}$, $\overrightarrow{AB} = \{4; -5; 0\}$,

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 25 = 5;$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}.$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}| =$$

$$= \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \sqrt{625} = 25.$$

Тогда длина искомой высоты $h = \dfrac{25}{5} = 5.$

Ответ: 5.

Пример 5. Даны точки $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

Решение.

Находим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = (3 - 1)\vec{i} + (0 - 2)\vec{j} + (-3 - 0)\vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} = \{2; -2; -3\};$

$\overrightarrow{AC} = (5 - 1)\vec{i} + (2 - 2)\vec{j} + (6 - 0)\vec{k} = 4\vec{i} + 6\vec{k} = \{4; 0; 6\}.$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |-3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}| =$$

$$= 2\sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 2^2} = 2\sqrt{9 + 36 + 4} = 2 \cdot 7 = 14 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: 14.

Пример 6. Сила $\vec{P} = \{2; 2; 9\}$ приложена к точке $A(4; 2; -3)$. Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки $C(2; 4; 0)$.

Решение.

$\vec{M} = \overrightarrow{CA} \times \vec{P}$, поэтому найдем координаты $\overrightarrow{CA}$ и $\vec{M}$:

$\overrightarrow{CA} = \{2; -2; -3\}$,

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k} = 4(-3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k})$.

Величина $\vec{M}$ – это его модуль:

$$|\vec{M}| = 4\sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 2^2} = 4\sqrt{49} = 28.$$

Найдем орт вектора $\vec{M}$: $\overrightarrow{M_0} = -\frac{3}{7}\vec{i} - \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}$.

Ответ: 28; $\cos\alpha = -\frac{3}{7}$, $\cos\beta = -\frac{6}{7}$, $\cos\gamma = \frac{2}{7}$.

Пример 7. Даны три силы $\vec{F}_1 = \{2; -1; -3\}$, $\vec{F}_2 = \{3; 2; -1\}$ и $\vec{F}_3 = \{-4; 1; 3\}$, приложенные к точке $C(-1; 4; -2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2; 3; -1)$.

Решение.

а) Найдем координаты вектора $\vec{R}$ – равнодействующей сил $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$:

$\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \{2; -1; -3\} + \{3; 2; -1\} + \{-4; 1; 3\} = \{1; 2; -1\}$.

б) Найдем момент силы $\vec{R}$ относительно точки A.

$\overrightarrow{AC} = \{-3; 1; -1\}$;

$$\vec{M} = \overrightarrow{AC} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k},$$

$$|\vec{M}| = \sqrt{1 + 16 + 49} = \sqrt{66}.$$

Значит, $\overrightarrow{M_0} = \frac{1}{\sqrt{66}}\vec{i} - \frac{4}{\sqrt{66}}\vec{j} - \frac{7}{\sqrt{66}}\vec{k}$.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{66}},\ \cos\beta = -\frac{4}{\sqrt{66}},\ \cos\gamma = -\frac{7}{\sqrt{66}}.$$

Ответ: $|\vec{M}| = \sqrt{66}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{66}}$, $\cos\beta = -\frac{4}{\sqrt{66}}$, $\cos\gamma = -\frac{7}{\sqrt{66}}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами.

1) $\vec{a} = \{3; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{2; -3; -5\}$;
2) $\vec{a} = \{2; -1; 1\}$, $\vec{b} = \{-4; 2; -2\}$;
3) $\vec{a} = \{6; 1; 0\}$, $\vec{b} = \{3; -2; 0\}$.

2. Упростить выражения:

1) $[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})]$; 2) $[(\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}) \times (-\vec{a} + 2\vec{b} - 5\vec{c})]$.

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. При каких значениях λ коллинеарны векторы $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ и $3\vec{a} + \lambda\vec{b}$?

4. На векторах $\vec{a} = \{2; 3; 1\}$ и $\vec{b} = \{-1; 1; 2\}$, отложенных от одной точки, построен треугольник. Найти:

1) площадь этого треугольника;
2) длины трех его высот.

5. Раскрыть скобки и упростить выражения:

1) $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$;
2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times c + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a}$;
3) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b})$;
4) $2\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j} \times (\vec{i} \times \vec{k}) + 4\vec{k} \times (\vec{i} \times \vec{j})$.

6. Даны точки $A\ (2; -1; 2)$, $B\ (1; 2; -1)$ и $C\ (3; 2; 1)$. Найти координаты векторных произведений:

1) $[\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}]$; 2) $[(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}) \times \overrightarrow{CB}]$.

7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить:

1) $|[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})]|$; 2) $|[(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})]|$.

8. Даны векторы $\vec{a} = \{3; -1; -2\}$ и $\vec{b} = \{1; 2; -1\}$.
Найти координаты векторных произведений:
1) $[\vec{a} \times \vec{b}]$; 2) $[(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}]$; 3) $[(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})]$.

9. Даны точки $A\ (1; 2; 0)$, $B\ (3; 0; -3)$ и $C\ (5; 2; 6)$.
Вычислить площадь треугольника ABC.

10. Вектор x, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = \{4; -2; -3\}$ и $\vec{b} = \{0; 1; 3\}$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}| = 26$, найти его координаты.

11. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, вычислить:

1) $[\vec{a} \times \vec{b}]^2$; 2) $[(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})]^2$; 3) $[(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})]^2$.

12. Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a} = \{2, -2; 1\}$ и $\vec{b} = \{2; 3; 6\}$.

13. Даны вершины треугольника A (1; −1; 2), B (5; −6; 2) и C (1; 3; −1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

14. Сила $\vec{f} = \{3; 2; -4\}$ приложена к точке A (2; −1; 1). Определить момент этой силы относительно начала координат.

15. Сила $\vec{P} = \{2; -4; 5\}$ приложена к точке M_0 (4; −2; 3). Определить момент этой силы относительно точки A (3; 2; −1).

16. Сила $\vec{Q} = \{3; 4; -2\}$ приложена к точке C (2; −1; −2). Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

17. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A (0; 1), B (4; 5) и C (6; −1).

18. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

19. Найти площадь треугольника с вершинами A (−1; 2; 3), B (2; 1; 4) и C (0; −3; 4).

20. Определить, при каких значениях α и β вектор $\alpha\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ будет коллинеарен вектору $[\vec{a} \times \vec{b}]$, если $\vec{a} = \{3; -1; 1\}$, $\vec{b} = \{1; 2; 0\}$.

21. Вычислить площадь треугольника с вершинами A (7; 3; 4), B (1; 0; 6), C (4; 5; −2).

Ответы:

1. 1) {11; 19; −7}; 2) {−1; 6; 8}; 3) {0; 0; −15}; **2.** 1) $-2[\vec{a} \times \vec{b}]$; 2) $[\vec{a} \times \vec{b}] + 4[\vec{b} \times \vec{c}] + \frac{1}{2}[\vec{a} \times \vec{c}]$; **3.** $\lambda = \pm\sqrt{2}$; **4.** 1) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sqrt{\frac{3}{14}}, \frac{5}{\sqrt{2}}, 5\sqrt{\frac{3}{14}}$; **5.** 1) $-2\vec{i} + 2\vec{k} = \{-2; 0; 2\}$; 2) $2[\vec{a} \times \vec{c}]$; 3) $[\vec{a} \times \vec{c}]$; 4) 3; **6.** 1) {6; −4; −6}; 2) {−12; 8; 12}; **7.** 1) 24; 2) 60; **8.** 1) {5; 1; 7}; 2) {10; 2; 14}; 3) {20; 4; 28}; **9.** 14 кв. ед.; **10.** $\vec{X} = \{-6; -24; 8\}$; **11.** 1) 3; 2) 27; 3) 300; **12.** $\sin\varphi = \frac{5\sqrt{17}}{21}$;

13. 5; **14.** {2; 11; 7}; **15.** {–4; 3; 4}; **16.** 15; $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\cos\beta = -\dfrac{2}{15}$, $\cos\gamma = \dfrac{11}{15}$; **17.** 16; **18.** $S = \sqrt{6}$; **19.** $S = 3\sqrt{6}$; **20.** $\alpha = -6$, $\beta = 2$; **21.** 24,5.

1.6. Смешанное произведение векторов

Определение 1. *Смешанным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, т. е. $[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c}$.

Свойства смешанного произведения

1. $[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]$.

В силу этого свойства смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ обозначают просто $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2. Циклическое свойство:

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = [\vec{b} \times \vec{c}] \cdot \vec{a} = [\vec{c} \times \vec{a}] \cdot \vec{b}.$$

3. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в ортогональном базисе заданы своими координатами

$$\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\},\ \vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\},\ \vec{c} = \{x_3;\ y_3;\ z_3\},$$

то смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения

1) Абсолютная величина смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ численно равна *объему V_1 параллелепипеда,* построенного на этих векторах, т. е. $V_1 = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. Кроме того, $V_2 = \dfrac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, V_2 – объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

2) *Условие компланарности трех векторов.* Необходимым и достаточным условием компланарности векто-

ров $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения, т. е. ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарны) $\Leftrightarrow$ ($\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$).

В координатной форме условие компланарности имеет вид:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 1. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, заданных своими координатами:

1) $\vec{a} = \{1; -1; 1\}$ $\vec{b} = \{7; 3; -5\}$; $\vec{c} = \{-2; 2; -2\}$;
2) $\vec{a} = \{3; 5; 1\}$ $\vec{b} = \{4; 0; -1\}$; $\vec{c} = \{2; 1; 1\}$;
3) $\vec{a} = \{2; 1; 0\}$ $\vec{b} = \{3; 4; -1\}$; $\vec{c} = \{-1; -3; 1\}$;
4) $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$ $\vec{b} = \{5; -2; 1\}$; $\vec{c} = \{2; 1; -2\}$.

Решение.

$$1)\ \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 24 + 20 = 0.$$

Геометрическое значение этого результата: данные векторы компланарны (п. 2, п. 3, п. 4 – самостоятельно).

Пример 2. Проверим, компланарны ли векторы, заданные своими координатами в произвольном базисе:

а) $\vec{a} = \{2; 3; 5\}$, $\vec{b} = \{7; 1; -1\}$, $\vec{c} = \{3; -5; -11\}$;
б) $\vec{a} = \{2; 0; 1\}$, $\vec{b} = \{5; 3; -3\}$, $\vec{c} = \{3; 3; 10\}$.

Решение. Условие компланарности векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ есть ($\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$).

$$1)\ \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & -11 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -11 \end{vmatrix} +$$

$$+ 5 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2(-16) - 3(-74) + 5(-38) = -32 + 222 - 190 = 0.$$

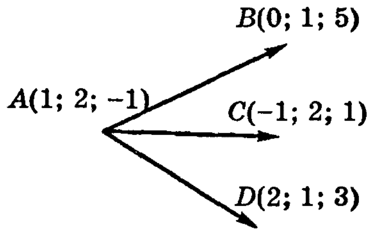
Данные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

$$2)\ \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 39 + 6 > 0.$$

Данные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны.

Ответ: а) компланарны;
б) не компланарны.

Пример 3. Доказать, что четыре точки $A\ (1;\ 2;\ -1)$, $B\ (0;\ 1;\ 5)$, $C\ (-1;\ 2;\ 1)$, $D\ (2;\ 1;\ 3)$ лежат в одной плоскости.



Решение.

Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ имеют координаты: $\overrightarrow{AB} = \{-1;\ -1;\ 6\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-2;\ 0;\ 2\}$, $\overrightarrow{AD} = \{1;\ -1;\ 4\}$. Если эти векторы компланарны, то их смешанное произведение равно нулю:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 6 + 12 \neq 0.$$

Значит, точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

Ответ: точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

Пример 4. Найти длину высоты треугольной пирамиды $ABCD$, опущенной из вершины D на грань ABC. $A\ (2;\ 2;\ 2)$, $B\ (4;\ 3;\ 3)$, $C\ (4;\ 5;\ 4)$, $D\ (5;\ 5;\ 6)$.

Решение. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, совпадающие с ребрами пирамиды, отложенные от вершины A: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Находим смешанное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$ Так как объем пирамиды

равен $\frac{1}{6}$ части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, то $V = \dfrac{7}{6}$ (куб. ед.). С другой стороны, $V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{3}\, S_{\text{осн}} \cdot H$, отсюда $H = \dfrac{3V}{S\text{осн.}}$. Найдем $S_{\text{осн.}} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k};\ |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}.$$

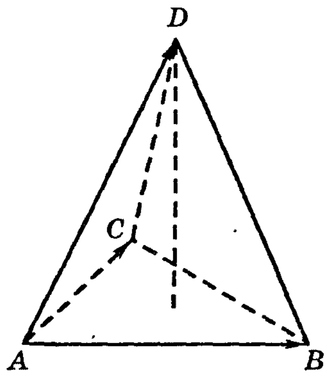
$$S_{\text{осн}} = \sqrt{21}.$$

$$\text{Тогда } H = \frac{3 \cdot V}{S_{\text{осн}}} = \frac{3 \cdot \frac{7}{6}}{\sqrt{21}} = \frac{7}{2\sqrt{21}} = \frac{7\sqrt{21}}{2 \cdot 21} = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

Ответ: $H = \dfrac{\sqrt{21}}{6}$.

Пример 5. Дана пирамида с вершинами A (2; 0; 0), B (0; 3; 0), C (0; 0; 6) и D (2; 3; 8). Вычислить ее объем и высоту, опущенную на грань ABC.

Решение.



Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, совпадающие с ребрами пирамиды, отложенные от вершины A: $\overrightarrow{AB} = \{-2; 3; 0\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-2; 0; 6\}$, $\overrightarrow{AD} = \{0; 3; 8\}$. Находим смешанное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} =$$

$= 36 + 48 = 84$. Так как объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$ части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, то $V_{пир} = \frac{84}{6} = 14$ (куб. ед.)

С другой стороны, $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$ и $H = \frac{3 \cdot V}{S_{осн}}$. Найдем $S_{осн} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$;

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= 18\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k} = 6(3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$ и

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 6\sqrt{9+4+1} = 6\sqrt{14}; \ S_{осн.} = \frac{6\sqrt{14}}{2} = 3\sqrt{14}.$$

Отсюда $H = \frac{3 \cdot V}{S_{осн}} = \frac{3 \cdot 14}{3\sqrt{14}} = \sqrt{14}$.

Ответ: $V = 14$, $H = \sqrt{14}$.

Пример 6. Показать, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарны.

Решение.

Составляем смешанное произведение этих векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = -(-18 + 48) - 3(12 - 12) + 2(24 - 9) = 0.$$

Так как смешанное произведение оказалось равным нулю, то, следовательно, векторы компланарны.

Ответ: векторы компланарны.

Пример 7. Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$.

Решение.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot 4\cdot\left|\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\right| =$$

$= 14$ (куб. ед.).

(При вычислении определителя мы пользовались разложением его по элементам третьего столбца).

Ответ: 14.

Задания для самостоятельного решения

1. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если:
а) $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{c} = \{1, 9, -11\}$;
б) $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{2; 1; 2\}$, $\vec{c} = \{3, -1, -2\}$;
а) $\vec{a} = \{2; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$, $\vec{c} = \{3, -4, 7\}$.

2. Даны вершины тетраэдра: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

3. Объем тетраэдра равен $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

4. Доказать, что четыре точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

5. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ образуют правую тройку, взаимно перпендикулярны и $|\vec{a}_1| = 4$, $|\vec{a}_2| = 2$, $|\vec{a}_3| = 3$. Вычислить $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

6. Заданы векторы $\vec{a}_1 = \{1, -1, 3\}$, $\vec{a}_2 = \{-2, 2, 1\}$, $\vec{a}_3 = \{3, -2, 5\}$. Вычислить $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$. Какова ориентация троек: а) $(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3)$; б) $(\vec{a}_2\vec{a}_1\vec{a}_3)$; в) $(\vec{a}_1\vec{a}_3\vec{a}_2)$?

7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(2; -3; 5)$, $B(0; 2; 1)$, $C(-2; -2; 3)$, $D(3; 2; 4)$.

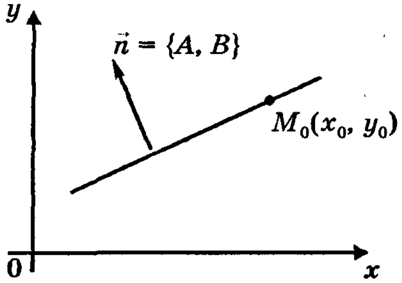
8. Доказать тождество $(\vec{a} + \vec{b})\,(\vec{b} + \vec{c})\,(\vec{c} + \vec{a}) = 2\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Ответы:

1. а) да; б) нет; в) да; 2. 11; 3. $D(0; 8; 0)$; 5. 24; 6. -7; а) левая; б) правая; в) правая; 7. 6.

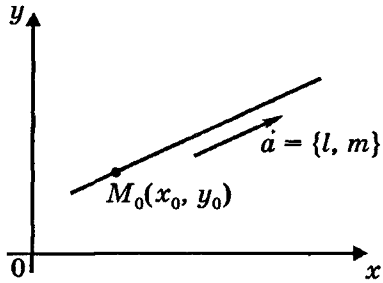
2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2.1. Прямая на плоскости



1) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно *нормальному вектору* $\vec{n} = \{A, B\}$;

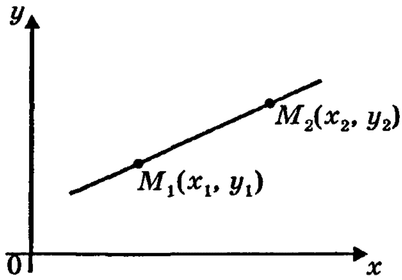
2) $Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой;



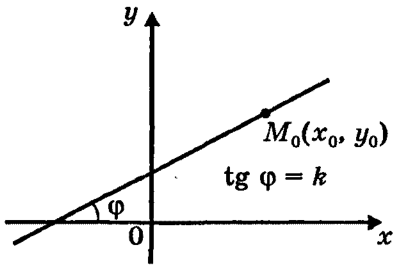
3) $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ *параллельно направляющему вектору* $\vec{a} = \{l, m\}$ (*каноническое* уравнение прямой);

4) $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt; \end{cases}$ $t \in R$ – *параметрические* уравнения прямой;

5) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой *в отрезках*, где a и b – величины направленных отрезков, отсекаемых на координатных осях Ox и Oy соответственно;



6) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$;



7) $y - y_0 = k(x - x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, k – угловой коэффициент прямой, равный тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox;

8) $y = kx + b$ – уравнение прямой с *угловым коэффициентом* k; b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy;

9) $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$ – тангенс острого угла между двумя прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$;

10) $k_1 = k_2$ и $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ – *условия параллельности* и *перпендикулярности* двух прямых $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$;

11) $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ – *расстояние* от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$;

12) $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $\lambda \neq -1$ – координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении λ, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$;

13) $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ – координаты середины отрезка M_1M_2, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

14) $\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ – уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

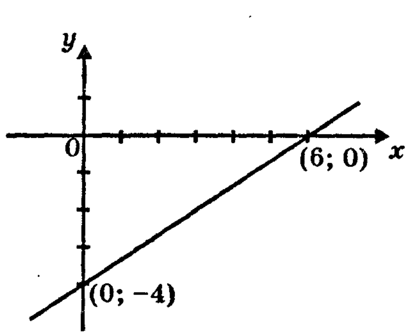
Пример 1. Определить, какие из точек $M_1(3; 1)$, $M_2(2; 3)$, $M_3(6; 3)$, $M_4(-3; -3)$, $M_5(3; -1)$, $M_6(-2; 1)$ лежат на прямой L: $2x - 3y - 3 = 0$ и какие не лежат на ней.

Решение. Для того, чтобы определить, какие из точек лежат на данной прямой и какие не лежат на ней, надо подставить координаты данных точек в уравнение; если получим верное равенство, то точки лежат на прямой, в противном случае – нет.

$M_1(3; 1)$: $2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 3 = 0$, $M_1 \in L$;
$M_2(2; 3)$: $2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - 3 \neq 0$, $M_2 \notin L$;
$M_3(6; 3)$: $2 \cdot 6 - 3 \cdot 3 - 3 = 0$, $M_3 \in L$;
$M_4(-3; -3)$: $2\,(-3) - 3\,(-3) - 3 = 0$, $M_4 \in L$;
$M_5(3; -1)$: $2 \cdot 3 - 3\,(-1) - 3 \neq 0$, $M_5 \notin L$;
$M_6(-2; 1)$: $2\,(-2) - 3 \cdot 1 - 3 \neq 0$, $M_6 \notin L$.

Ответ: точки M_1, M_3 и M_4 лежат на данной прямой; точки M_2, M_5 и M_6 не лежат на ней.

Пример 2. Определить точки пересечения прямой $2x - 3y - 12 = 0$ с координатными осями и построить эту прямую на чертеже.



Решение. Пусть $x = 0$, $y = -4$, $(0; -4)$;
$y = 0$, $x = 6$, $(6; 0)$

Уравнение прямой в отрезках имеет вид:

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{-4}=1.$$

Ответ: (6; 0) и (0; −4).

Пример 3. Найти точку пересечения двух прямых $3x-4y-29=0$, $2x+5y+19=0$.

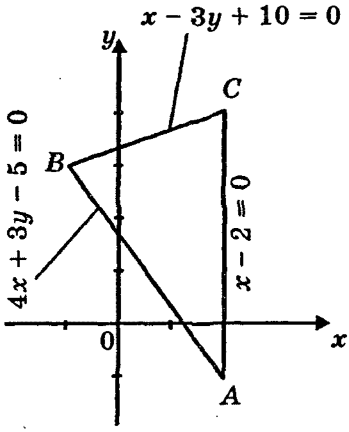
Решение. Так как точка $M\ (x;\ y)$ лежит на обеих прямых, то координаты этой точки должны удовлетворять системе уравнений

$$-\begin{cases}3x-4y-29=0 & \cdot 2\\ 2x+5y+19=0 & \cdot 3\end{cases}$$

$$-23y=115; \qquad y=-5,\ x=3.$$

Ответ: $M(3;\ -5)$.

Пример 4. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC даны соответственно уравнениями $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Определить координаты его вершин.



Решение.

Найдем точку B пересечения сторон AB и BC треугольника ABC.

$$\begin{matrix}(AB)\\(BC)\end{matrix}+\begin{cases}4x+3y-5=0,\\ x-3y+10=0;\end{cases}$$

$$5x+5=0,\ x=-1.$$

$$\begin{cases}x=-1,\\ 3y=x+10;\end{cases} \quad \begin{cases}x=-1,\\ y=3.\end{cases}$$

Точка $B(-1;\ 3)$.

Найдем точку A пересечения сторон AB и AC данного треугольника.

$$\begin{matrix}(AB)\\(AC)\end{matrix}+\begin{cases}4x+3y-5=0,\\ x-2=0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3y=-4x+5,\\ x=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}3y=-3,\\ x=2;\end{cases} \quad \begin{cases}y=-1,\\ x=2.\end{cases}$$

Точка $A\ (2;\ -1)$.

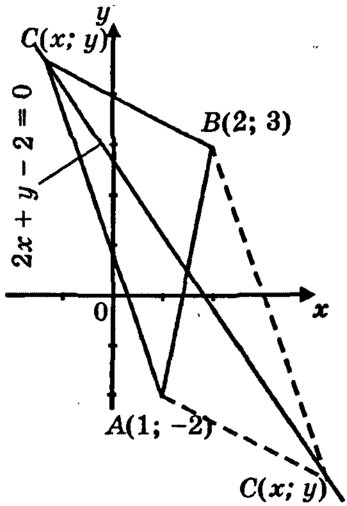
Найдем точку C пересечения сторон AC и BC данного треугольника.

$$\begin{matrix}(AC)\\(BC)\end{matrix} + \begin{cases}x-2=0,\\ x-3y+10=0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2,\\ 3y=x+10;\end{cases} \begin{cases}x=2,\\ 3y=12;\end{cases}$$ точка $C(2;\ 4)$.

Ответ: $A(2;\ -1)$, $B(-1;\ 3)$, $C(2;\ 4)$.

Пример 5. Площадь треугольника $S = 8$ кв. ед.; две его вершины есть точки $A(1;\ -2)$ и $B(2;\ 3)$, а третья вершина C лежит на прямой $2x + y - 2 = 0$.

Определить координаты вершины C.



Решение.

Очевидно, что задача имеет два решения. Найдем их. По условию $S_{\Delta ABC} = 8$, иначе,

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = 8.$$

Вычислим векторное произведение векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BA} = \{-1;\ -5\}$, $\overrightarrow{BC} = \{x-2,\ y-3\}$ и

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x-2 & y-3 & 0\\ 1 & 5 & 0\end{vmatrix} = \vec{k}\cdot\begin{vmatrix}x-2 & y-3\\ 1 & 5\end{vmatrix} =$$

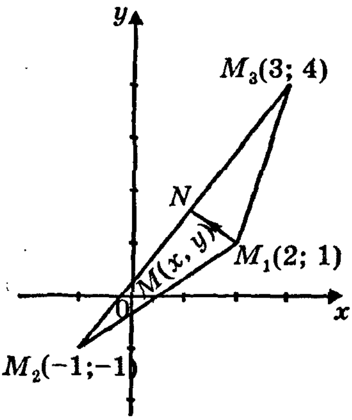
$= \vec{k}(5(x-2)-(y-3))$. Тогда $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|5x - y - 7| = 8$; $|5x - y - 7| = 16$, $5x - y - 7 = \pm 16$.

Получаем для нахождения координат точки C две системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}5x - y - 7 = 16,\\ 2x + y - 2 = 0;\end{cases} \Rightarrow C_1\left(\frac{25}{7};\ -\frac{36}{7}\right),\ C_2(-1;\ 4).$$

Ответ: $C_1\left(\dfrac{25}{7};\ -\dfrac{36}{7}\right)$, $C_2(-1;\ 4)$.

Пример 6. Даны вершины треугольника $M_1(2;\ 1)$, $M_2(-1;\ -1)$ и $M_3(3;\ 4)$. Составить уравнения его высот.

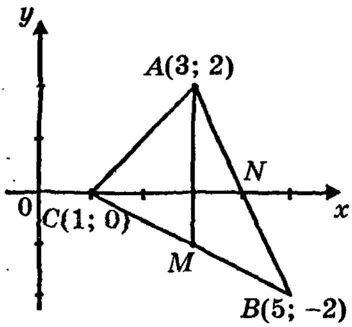


Решение.

Пусть M_1N – высота треугольника $M_1M_2M_3$. Рассмотрим два вектора $\overrightarrow{M_2M_3} = \{4;\ 5\}$ и $\overrightarrow{M_1M} = \{x-2,\ y-1\}$. По условию эти векторы ортогональны. Значит, $(\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_2M_3}) = 0$, $4(x-2) + 5(y-1) = 0$, $4x + 5y - 13 = 0$. Аналогично находим остальные высоты треугольника.

Ответ: $4x + 5y - 13 = 0$, $3x + 2y - 17 = 0$, $x + 3y + 4 = 0$.

Пример 7. Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами $A(3;\ 2)$, $B(5;\ -2)$, $C(1;\ 0)$.



Решение.

1) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две данные точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$$

$$AB:\ \frac{x-3}{5-3} = \frac{y-2}{-2-2},$$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-4},\ (x-3)(-2) =$$

$= y - 2$, $-2x + 6 = y - 2$, $2x + y - 8 = 0$.

Найдем уравнение медианы AM. Для этого найдем координаты точки M – середины отрезка BC:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ x = \frac{5+1}{2} = 3,$$

$$y = \frac{-2+0}{2} = -1,\ M(3;\ -1).\ \text{Уравнение } AM:$$

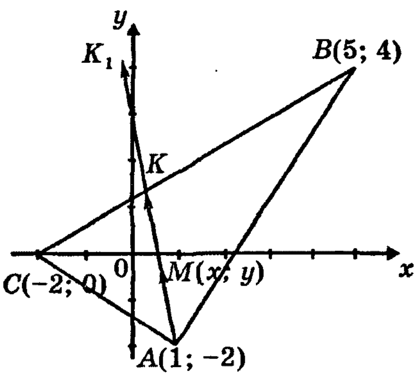
$$\frac{x-3}{3-3} = \frac{y-2}{-1-2};\ \frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{-3};\ \Rightarrow\ x = 3 \text{ – уравнение}$$

медианы, проведенной из вершины A.

2) Найдем уравнения CB и CN; $N(x;\ y)$, где $x = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y = \frac{y_A + y_B}{2}$; $x = \frac{5+3}{2} = 4$, $y = \frac{2-2}{2} = 0$, $N\ (4;\ 0)$. Тогда BC: $\frac{x-5}{1-5} = \frac{y+2}{0+2}$, $\frac{x-5}{-4} = \frac{y+2}{2}$, $x - 5 + 2\ (y + 2) = 0$; $x + 2y - 1 = 0$; BC: $x + 2y - 1 = 0$. CN: $\frac{x-1}{4-1} = \frac{y+0}{0+0}$; $y = 0$.

Ответ: AB: $2x + y - 8 = 0$; AM: $x - 3 = 0$;
BC: $x + 2y - 1 = 0$; CN: $y = 0$;
CA: $x - y - 1 = 0$; BF: $x + y - 3 = 0$.

Пример 8. Даны вершины треугольника $A(1;\ -2)$, $B(5;\ 4)$ и $C(-2;\ 0)$. Составить уравнения биссектрис его внутреннего и внешнего углов при вершине A.



Решение.

1-й способ.

$\overrightarrow{AC} = \{-3;\ 2\}$,

$\overrightarrow{AM} = \{x - 1;\ y + 2\}$,

$\overrightarrow{AB} = \{4;\ 6\}$.

$$\cos\ (MAC) = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(x-1)\cdot(-3) + (y+2)\cdot 2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}\sqrt{(-3)^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{-3x + 3 + 2y + 4}{\sqrt{13}\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}}.$$

$$\cos\ (BAM) = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{(x-1)\cdot 4 + (y+2)\cdot 6}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}\sqrt{16 + 36}} =$$

$$= \frac{4x - 4 + 6y + 12}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}\sqrt{52}}.$$

Но $\cos\ (MAC) = \cos\ (BAM)$, поэтому

$$\frac{-3x+3+2y+4}{\sqrt{13}\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}}=\frac{4x-4+6y+12}{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}\sqrt{52}};$$

$-3x + 2y + 7 = 2x + 3y + 4$; $5x + y - 3 = 0$; (AM) – уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине A.

2-й способ.

$\dfrac{|CK|}{|KB|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{52}}=\dfrac{1}{2}=\lambda$. Точка K делит сторону BC треугольника в отношении $\lambda=\dfrac{1}{2}$. Найдем координаты точки K по формулам $x_K=\dfrac{x_C+\lambda x_B}{1+\lambda}$, $y_K=\dfrac{y_C+\lambda y_B}{1+\lambda}$; или

$$x_K=\frac{-2+\frac{1}{2}\cdot 5}{1+\frac{1}{2}}=\frac{-2+\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3},\ y_K=\frac{0+\frac{1}{2}\cdot 4}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}.$$

Получили $K\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right)$. Найдем вектор $\overrightarrow{AK}=\left\{-\dfrac{2}{3};\dfrac{10}{3}\right\}$. Вектор $\overrightarrow{AK_1}$, коллинеарный $\overrightarrow{AK}$, будет: $\overrightarrow{AK_1}=\{-1;\ 5\}$. Вектор биссектрисы $\overrightarrow{AM}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AK_1}$, поэтому $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{5}$; $5x+y-3=0$ (AM).

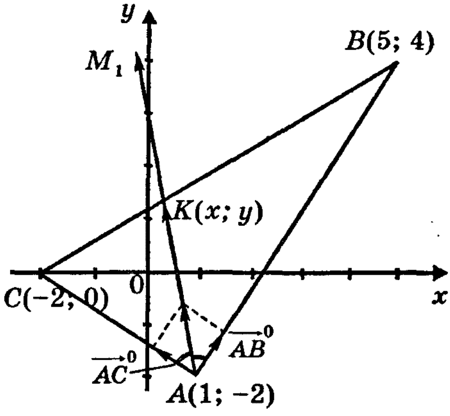
3-й способ.

Найдем орты $\overrightarrow{AB^0}$ и $\overrightarrow{AC^0}$:

$$\overrightarrow{AB^0}=\left\{\frac{4}{\sqrt{52}};\frac{6}{\sqrt{52}}\right\}=\left\{\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}}\right\},$$

$$\overrightarrow{AC^0}=\left\{-\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right\}.$$

Тогда вектор, коллинеарный биссектрисе внутреннего угла A, будет: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB^0} + \overrightarrow{AC^0} = \left\{-\frac{1}{\sqrt{13}}; \frac{5}{\sqrt{13}}\right\}$ или вектор $\overrightarrow{AM_1} = \{-1; 5\}$ (длиннее вектора $\overrightarrow{AM}$ в $\sqrt{13}$). Так как $\overrightarrow{AK} \parallel \overrightarrow{AM_1}$, то по условию коллинеарности:



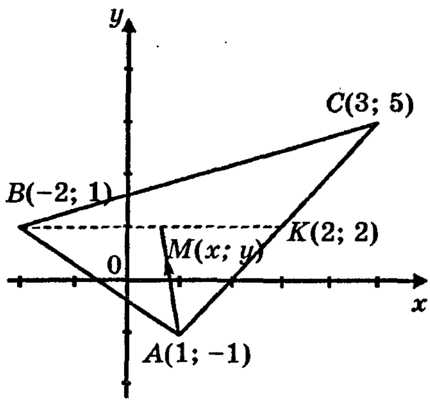
$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{5}$; $5x - 5 = -y - 2$; $5x + y - 3 = 0$ – уравнение биссектрисы внутреннего угла A.

Биссектриса внешнего угла при вершине A будет перпендикулярна биссектрисе внутреннего угла при той же вершине. Ее уравнение будет: $x - 5y + c = 0$. Подставим в это уравнение координаты точки A, получим значение c: $1 + 10 + c = 0$, $c = -11$. Вторая биссектриса угла A есть $x - 5y - 11 = 0$.

Ответ: $5x + y - 3 = 0$ – биссектриса внутреннего угла, $x - 5y - 11 = 0$ – биссектриса внешнего угла.

Пример 9. Даны вершины треугольника $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$ и $C(3; 5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

Решение.



По условию $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BK}$, следовательно, $(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BK}) = 0$. $\overrightarrow{AM} = \{x - 1; y + 1\}$, $\overrightarrow{BK} = \{4; 1\}$. Тогда искомое уравнение будет: $4(x - 1) + (y + 1) = 0$, $4x + y - 3 = 0$ (AD).

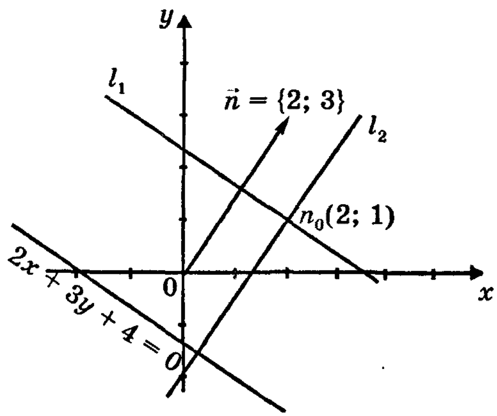
Ответ: $4x + y - 3 = 0$.

Пример 10. Дана прямая $5x + 3y - 3 = 0$.

Определить угловой коэффициент «k» прямой:

а) параллельной данной прямой;

б) перпендикулярной данной прямой.



Решение. $3y = -5x + 3$;

$y = -\frac{5}{3}x + 1$; $k_1 = -\frac{5}{3}$.

а) Угловой коэффициент любой прямой, параллельной данной, равен $k_2 = -\frac{5}{3}$; $(k_1 = k_2)$;

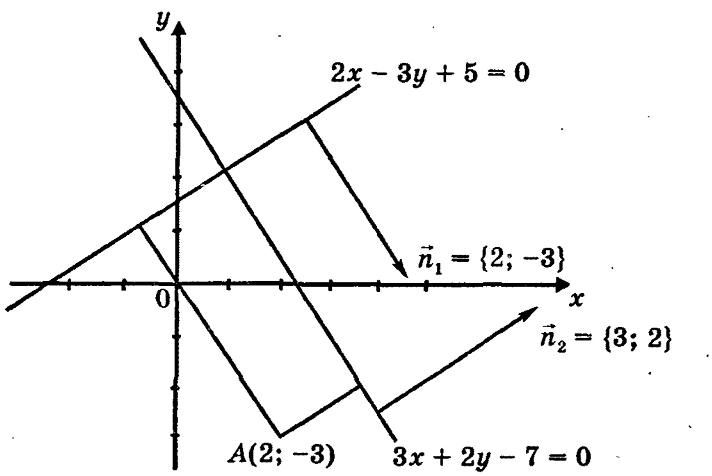
б) Угловой коэффициент любой прямой, перпендикулярной данной, $- k_2 = \frac{3}{5}$, $\left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right)$.

Ответ: а) $k_2 = -\frac{5}{3}$; б) $k_2 = \frac{3}{5}$.

Пример 11. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$:

а) параллельно данной прямой;

б) перпендикулярно данной прямой.



Решение.

1-й способ.

Нормальный вектор данной прямой $\vec{n} = \{2; 3\}$.

а) Поэтому уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{2; 3\}$ будет:

$(x - 2) \cdot 2 + (y - 1) \cdot 3 = 0$, $2x + 3y - 7 = 0$.

б) Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(2; 1)$ параллельно вектору $\vec{n}$ (перпендикулярно данной прямой), будет:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3};\ 3x - 6 = 2y - 2;\ 3x - 2y - 4 = 0.$$

2-й способ.

Представим уравнение данной прямой, как уравнение с угловым коэффициентом. $y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3}$; $k_1 = -\dfrac{2}{3}$.

а) Тогда уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(2; 1)$ параллельно данной прямой, будет: $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$ или $y - 1 = -\dfrac{2}{3}(x - 2)$; $3y - 3 = -2x + 4$; $2x + 3y - 7 = 0$.

б) Так как угловой коэффициент прямой, перпендикулярной данной, равен $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$, то уравнение искомой прямой будет: $y - y_0 = -\dfrac{1}{k_1}(x - x_0)$ или $y - 1 = \dfrac{3}{2}(x - 2)$, $2y - 2 = 3x - 6$, $3x - 2y - 4 = 0$.

Ответ: а) $2x + 3y - 7 = 0$; б) $3x - 2y - 4 = 0$.

Пример 12. Даны уравнения сторон прямоугольника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ и одна из его вершин $A(2; -3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

Решение.

а) Проверим, лежит ли точка $A(2; -3)$ на заданных сторонах.

$2 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) + 5 = 18 \neq 0$, $A \notin CD$,

$3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) - 7 = -7 \neq 0$, $A \notin CB$.

По условию нормальный вектор прямой CD есть нормальный вектор и прямой AB. Поэтому AB: $(x - 2) \cdot 2 +$

$+ (-3) \cdot (y + 3) = 0$, $2x - 3y - 13 = 0$ (AB). Аналогично, $3 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y + 3) = 0$, $3x + 2y = 0$ (AD).

Ответ: $3x + 2y = 0$, $2x - 3y - 13 = 0$.

Пример 13. Определить угол φ между двумя прямыми: $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$.

Решение. За угол между прямыми возьмем угол между их нормальными векторами: $\vec{n}_1 = \{5; -1\}$, $\vec{n}_2 = \{3; 2\}$.

Тогда $\cos\varphi = \dfrac{(\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{15-2}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = \dfrac{13}{\sqrt{2}\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

отсюда $\varphi = 45°$.

Ответ: $\varphi = 45°$.

Пример 14. Установить, перпендикулярны ли прямые $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$?

Решение.

$3x - y + 5 = 0$, $\overrightarrow{n_1} = \{3; -1\}$;

$x + 3y - 1 = 0$, $\overrightarrow{n_2} = \{1; 3\}$.

Если $(\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}) = 0$, то прямые перпендикулярны.

$3 \cdot 1 + (-1)\, 3 = 0$ (верно).

Ответ: прямые перпендикулярны.

Пример 15. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y - 65 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$.

Вычислить его площадь.

Решение.

Нормальный вектор данных прямых один и тот же, следовательно, прямые параллельны. Найдем расстояние между этими прямыми. Для этого возьмем на прямой $5x - 12y - 65 = 0$, например, точку $(13; 0)$ и найдем расстояние от этой точки до прямой $5x - 12y + 26 = 0$.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{65 + 26}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{91}{\sqrt{169}} = \frac{91}{13} = 7.$$

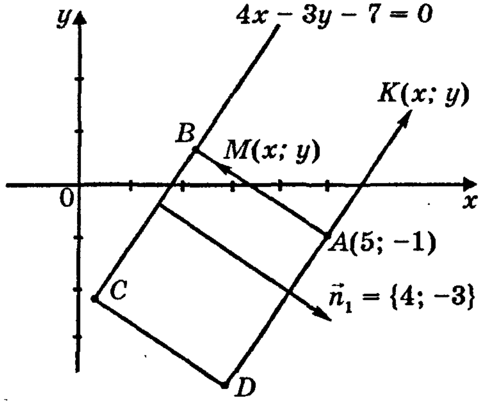
Так как площадь квадрата равна $S = a^2 = d^2$, то $S = 7 \cdot 7 = 49$.

Ответ: 49.

Пример 16. Точка $A\,(5; -1)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $4x - 3y - 7 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат остальные стороны этого квадрата.

Решение.

Уравнение AB – это уравнение прямой, проходящей через точку $A(5;\ -1)$ параллельно вектору $\overrightarrow{n_1}$:



$\overrightarrow{AM} = \{x - 5;\ y + 1\}$,

$\overrightarrow{n_1} = \{4;\ -3\}$. Так как $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{n_1}$, то по условию коллинеарности двух векторов имеем: $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y+1}{-3}$; $-3x + 15 = 4y + 4$; $3x + 4y - 11 = 0$ (AB).

Векторы $\overrightarrow{AK} = \{x - 5;\ y + 1\}$ и $\overrightarrow{n_1} = \{4;\ -3\}$ ортогональны.

Следовательно, $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0$, $4(x - 5) + (-3)(y + 1) = 0$, $4x - 3y - 23 = 0$ (AD).

По условию дан квадрат, поэтому $|AB| = |AD|$. Найдем $|AB|$:

$$d = |AB| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4(+5) + (-3)(-1) - 7|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} =$$

$$= \frac{20 + 3 - 7}{5} = \frac{16}{5}.$$

Пусть точка D имеет координаты $D(x,\ y)$. Тогда $d = |\overrightarrow{AD}| = \dfrac{|3x + 4y - 11|}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{16}{5}$; $|3x + 4y - 11| = 16$; $3x + 4y - 11 = \pm 16$. Отсюда CD: $3x + 4y - 27 = 0$ или $3x + 4y + 5 = 0$.

Ответ: условию задачи удовлетворяют два квадрата; остальные стороны одного из них лежат на прямых: $3x + 4y - 11 = 0$, $4x - 3y - 23 = 0$, $3x + 4y - 27 = 0$; остальные стороны другого – на прямых: $3x + 4y - 11 = 0$, $4x - 3y - 23 = 0$, $3x + 4y + 5 = 0$.

Пример 17. Составить уравнение биссектрис углов между прямыми $3x - 4y + 7$, $5x + 12y - 1 = 0$.

Решение.

Точка $M(x; y)$ лежит на одной из биссектрис углов, образованных данными прямыми тогда и только тогда, когда расстояние d_1 и d_2 от этой точки M до данных прямых равны между собой: $d_1 = d_2$, т. е. $\frac{|3x-4y+7|}{5} = \frac{|5x+12y-1|}{13}$. Значит, уравнение одной из биссектрис имеет вид: $\frac{3x-4y+7}{5} = \frac{5x+12y-1}{13}$, а уравнение другой $\frac{3x-4y+7}{5} = -\frac{5x+12y-1}{13}$ или $7x - 56y + 48 = 0$, $32x + 4y + 43 = 0$.

Ответ: $7x - 56y + 48 = 0$, $32x + 4y + 43 = 0$.

Пример 18. Составить уравнение биссектрисы того угла между двумя прямыми $x + y + 2 = 0$, $x + 7y + 3 = 0$, в котором лежит точка $A(2; -1)$.

Решение.

Подставляя координаты точки A в левые части уравнения прямых, получим $2 + 7(-1) + 3 < 0$, $2 - 1 + 2 > 0$. Значит, точка A лежит в тех полуплоскостях от данных прямых, для координат точек которых $x + y + 2 > 0$, $x + 7y + 3 < 0$. Искомая биссектриса проходит, следовательно, в тех областях, для координат точек которых функции $x + y + 2$ и $x + 7y + 3$ имеют разные знаки. Значит, уравнение искомой биссектрисы: $\frac{x+y+2}{\sqrt{2}} = -\frac{x+7y+3}{\sqrt{50}}$, или $6x + 12y + 13 = 0$.

Ответ: $6x + 12y + 13 = 0$.

Пример 19. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A треугольника, стороны которого BC, CA и AB заданы соответственно уравнениями:

$x - y = 0$, (BC)

$x + y = 0$, (CA)

$x + 2y + 1 = 0$ (AB).

Решение.

Решая данные уравнения попарно, находим вершины треугольника $A(1; -1)$, $B\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, $C(0, 0)$. Подставляя координаты точки C в уравнение AB, получим $0 + 2 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$. Подставляя координаты точки B в уравнение прямой AC, получим $-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} < 0$. Значит, для координат всех точек, лежащих внутри внутреннего угла A треугольника ABC, имеем $x + 2y + 1 > 0$, $x + y < 0$, а потому искомая биссектриса проходит в тех областях, на которые плоскость делится прямыми AB и AC, для которых функции $x + 2y + 1$ и $x + y$ имеют разные знаки. Поэтому искомое уравнение имеет вид $\frac{x+y}{\sqrt{2}} = -\frac{x+2y+1}{\sqrt{5}}$, или

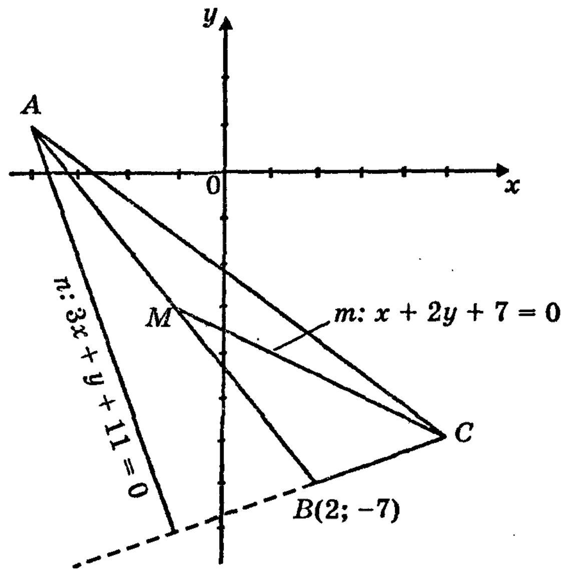
$$(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \cdot x + (\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) \cdot y + \sqrt{2} = 0.$$

Ответ: $(\sqrt{2} + \sqrt{5})\, x + (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})\, y + \sqrt{2} = 0$.

Пример 20. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $B(2; -7)$, а также уравнение высоты $3x + y + 11 = 0$ и медианы $x + 2y + 7 = 0$, проведенных из различных вершин.

Решение.

1) По условию $3x + y + 11 = 0$ есть уравнение высоты треугольника, значит, ее нормальный вектор $\vec{n} = \{3; 1\}$ является направляющим вектором стороны BC.



$(\overrightarrow{BC} \,||\, \vec{n}) \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+7}{1}$; $x - 3y - 23 = 0$ (BC).

2) Обозначим координаты вершины A через x_1, y_1: $A(x_1;\ y_1)$. Так как $M(x;\ y)$ середина отрезка AB, то $x = \dfrac{x_1+2}{2}$, $y = \dfrac{y_1-7}{2}$. Так как точка $M(x;\ y)$ лежит на медиане, то ее координаты удовлетворяют уравнению $x + 2y + 7 = 0$. Кроме того, точка A лежит на высоте h: $3x + y + 1 = 0$, значит, координаты точки $A(x_1;\ y_1)$ удовлетворяют этому уравнению. Получаем линейную алгебраическую систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$\begin{cases} x_1 + 2y_1 + 2 = 0, \\ 3x_1 + y_1 + 11 = 0. \end{cases}$ Отсюда находим $x_1 = -4$, $y_1 = 1$, $A(-4;\ 1)$.

3) Найдем уравнение стороны AB треугольника как уравнение прямой, проходящей через $B(2;\ -7)$ параллельно вектору $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = \{6;\ -8\}$;

$\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+7}{-8}$; $4x + 3y + 13 = 0$ (AB).

4) Найдем координаты вершины C как точки пересечения прямых (BC) и (m):

$\begin{cases} x + 2y + 7 = 0, \\ x - 3y - 23 = 0; \end{cases}$ отсюда $C(5;\ -6)$.

5) Уравнение стороны AC как уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

$A(-4;\ 1)$ и $C(5;\ -6)$; $\dfrac{x+4}{5+4} = \dfrac{y-1}{-6-1}$; $-7x - 28 = 9y - 9$; $7x + 9y + 19 = 0$ (AC).

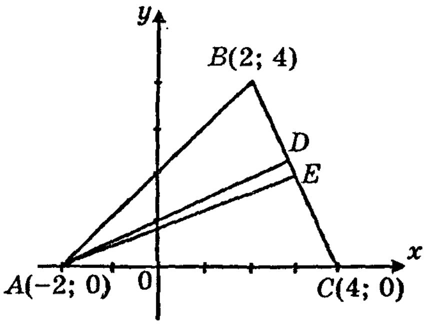
Ответ: (BC) $x - 3y - 23 = 0$, (AB) $4x + 3y + 13 = 0$, (AC) $7x + 9y + 19 = 0$.

Пример 21. Дан треугольник с вершинами $A(-2;\ 0)$, $B(2;\ 4)$, $C(4;\ 0)$. Написать уравнения медианы AE, высоты AD и найти длину медианы AE.

Решение.

1) Найдем уравнение высоты AD как прямой, проходящей через точку $A(-2;\ 0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BC} = \{2;\ -4\}$; $2 \cdot (x + 2) + (-4) \cdot (y - 0) = 0$, $2x - 4y + 4 = 0$, $x - 2y + 2 = 0$ (AD).

2) Найдем уравнение медианы AE как прямой, проходящей через две точки A и E. Координаты точки E найдем как координаты середины отрезка CB:



$$x = \frac{x_C + x_B}{2},\ y = \frac{y_C + y_B}{2};$$

$$x = \frac{4+2}{2} = 3,\ y = \frac{0+4}{2} = 2;$$

$E(3;\,2)$. Уравнение AE: $\frac{x+2}{3+2} = \frac{y-0}{2-0}$; $2x + 4 = 5y$; $2x - 5y + 4 = 0$ (AE).

3) Наконец, найдем длину медианы AE:

$$|AE| = \sqrt{(x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2};$$

$$|AE| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29},\ |AE| = \sqrt{29}.$$

Ответ: (AD) $x - 2y + 2 = 0$, (AE) $2x - 5y + 4 = 0$,

$$|AE| = \sqrt{29}.$$

Пример 22. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$ и $8x + 4y + 9 = 0$ и параллельной прямой $x + 3y = 0$.

Решение.

1-й способ.

1) Найдем координаты точки M пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$ и $8x + 4y + 9 = 0$:

$$+\begin{cases} 5x - y + 1 = 0 \\ 8x + 4y + 9 = 0 \end{cases}\Bigg|\begin{matrix}\cdot 4 \\ \\ \end{matrix}$$

$$28x = -49;\ x = -\frac{49}{28} = -\frac{7}{4};\ x = -\frac{7}{4},\ y = \frac{5}{4};\ M\left(-\frac{7}{4};\,\frac{5}{4}\right).$$

2) Прямая $x + 3y = 0$ имеет нормальный вектор $\vec{n} = \{1;\,3\}$. Так как уравнение искомой прямой имеет тот же нормальный вектор, то $\left(x + \frac{7}{4}\right)\cdot 1 + \left(y - \frac{5}{4}\right)\cdot 3 = 0$,

$4x + 7 + 12y - 15 = 0$, $4x + 12y - 8 = 0$, $x + 3y - 2 = 0$.

2-й способ.

Будем искать уравнение искомой прямой в виде: $5x - y + 10 + \lambda(8x + 4y + 9) = 0$ или $x(5 + 8\lambda) + y(4\lambda - 1) + (9\lambda + 10) = 0$. Так как эта прямая параллельна прямой $x + 3y = 0$, то их нормальные векторы коллинеарны: $\overrightarrow{n_1} = \{5 + 8\lambda;\ 4\lambda - 1\}$, $\overrightarrow{n_2} = \{1; 3\}$; $(\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}) \Leftrightarrow \dfrac{5+8\lambda}{1} = \dfrac{4\lambda - 1}{3}$,

$15 + 24\lambda = 4\lambda - 1$; $20\lambda = -16$; $\lambda = -\dfrac{4}{5}$, тогда уравнение искомой прямой будет:

$$x\left(5 - \frac{32}{5}\right) + y\left(-\frac{16}{5} - 1\right) + \left(\frac{36}{5} + 10\right) = 0,$$

$-7x - 21y + 14 = 0$, $x + 3y - 2 = 0$.

Ответ: $x + 3y - 2 = 0$.

Пример 23. Найти уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $x + 2y - 5 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$, перпендикулярно к прямой $2x + 3y + 7 = 0$.

Решение. Возьмем уравнение искомой прямой в виде: $\alpha(x + 2y - 5) + \beta(3x - 2y + 1) = 0$, $x(\alpha + 3\beta) + y(2\alpha - 2\beta) + (\beta - 5\alpha) = 0$.

Ее нормальный вектор $\overrightarrow{n_1} = \{\alpha + 3\beta\ ;\ 2\alpha + 2\beta\}$ ортогонален нормальному вектору $\overrightarrow{n_2} = \{2; 3\}$ прямой $2x + 3y + 7 = 0$. Так как $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$, то $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$, или $2(\alpha + 3\beta) + 3(2\alpha - 2\beta) = 0$, $2\alpha + 6\alpha = 0$, $\alpha = 0$. Тогда уравнение искомой прямой будет: $3x - 2y + 1 = 0$.

Ответ: $3x - 2y + 1 = 0$.

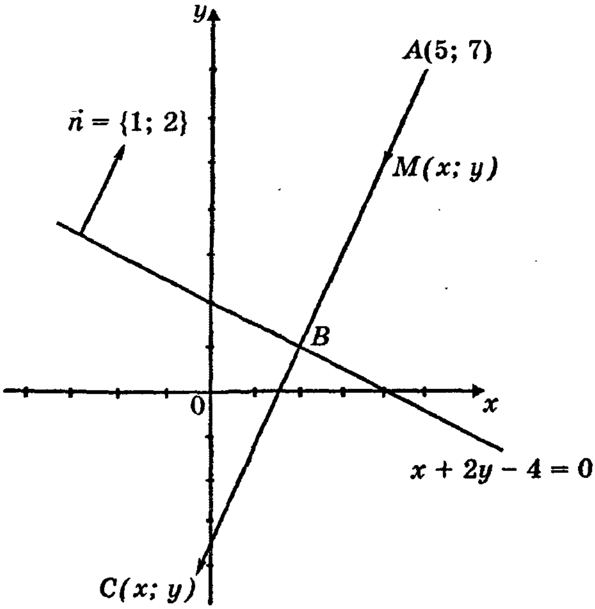
Пример 24. Даны прямая $x + 2y - 4 = 0$ и точка $A(5; 7)$. Найти:

1) проекцию B точки A на данную прямую;

2) точку, симметричную точке A относительно данной прямой.

Решение.

1) Чтобы найти проекцию B точки A на прямую $x + 2y - 4 = 0$, найдем пересечение прямой, проходящей через точку $A\,(5; 7)$, перпендикулярно данной прямой. Нормальный вектор прямой $x + 2y - 4 = 0$ есть $\vec{n} = \{1; 2\}$, он



будет коллинеарен искомой прямой, $\overrightarrow{AM} = \{x - 5; y - 7\}$.

Так как $\overrightarrow{AM} \parallel \vec{n}$, то $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-7}{2}$ и $2x - y - 3 = 0$.

Найдем точку пересечения прямых $x + 2y - 4 = 0$, $2x - y - 3 = 0$.

$$+\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}\Bigg|\begin{matrix} \\ \cdot 2 \end{matrix}$$

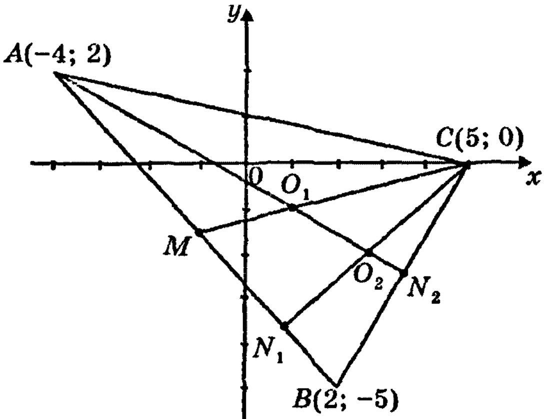
$5x = 10$, $\quad x = 2$, $y = 1$. Точка – $B(2; 1)$.

2) Найдем точку $C(x, y)$, симметричную точке $A(5; 7)$ относительно прямой $x + 2y - 4 = 0$. Так как точка B есть середина отрезка AC, то $x_B = \dfrac{x_C + x_A}{2}$, $y_B = \dfrac{y_C + y_A}{2}$;

$2 = \dfrac{5 + x}{2}$, $1 = \dfrac{7 + y}{2}$; $x = -1$, $y = -5$, $C(-1; -5)$.

Ответ: $B(2; 1)$, $C(-1; -5)$.

Пример 25. Найти точку пересечения медиан и точку пересечения высот треугольника, вершины которого $A(-4; 2)$, $B(2; -5)$ и $C(5; 0)$.



Решение.

1) Найдем точку O_1 пересечения медиан треугольника. Сначала найдем координаты точки M – середины отрезка AB. $x_M = \dfrac{-4+2}{2} = -1$, $y_M = \dfrac{2-5}{2} = -\dfrac{3}{2}$; $M\left(-1; -\dfrac{3}{2}\right)$.

Точка O_1 делит медиану C_M в отношении $\lambda = \dfrac{|CO_1|}{|O_1M|} = \dfrac{2}{1} = 2$.

Поэтому $x_{O_1} = \dfrac{x_C + \lambda x_M}{1+\lambda}$, $y_{O_1} = \dfrac{y_C + \lambda y_M}{1+\lambda}$;

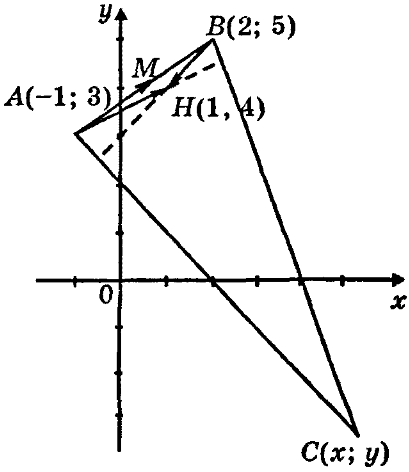
$$x_{O_1} = \frac{5+2\cdot(-1)}{1+2} = 1,\quad y_{O_1} = \frac{0+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{1+2} = -1;\ O_1(1; -1).$$

2) Найдем точку O_2 пересечения высот треугольника. Для этого найдем уравнения высот CN_1 и AN_2: $\overrightarrow{BC} = \{3; 5\}$, $\overrightarrow{AB} = \{6; -7\}$. Тогда высота CN_1: $(x-5)6 + (-7)y = 0$, $6x - 7y - 30 = 0$; высота AN_2: $(x+4)3 + 5(y-2) = 0$, $3x + 5y + 2 = 0$. Пересечение высот:

$$-\begin{cases} 6x - 7y - 30 = 0 \\ 3x + 5y + 2 = 0 \quad \Big|\cdot 2 \end{cases}$$

$$-17y = 34; \qquad y = -2,\ x = \frac{8}{3};\ O_2\left(\frac{8}{3}; -2\right).$$

Ответ: $O_1(1; -1)$, $O_2\left(\dfrac{8}{3}; -2\right)$.



Пример 26. Даны координаты двух вершин треугольника $A(-1;\,3)$, $B(2;\,5)$ и точка пересечения высот $H(1;\,4)$. Найти координаты третьей вершины треугольника и составить уравнения его сторон.

Решение.

Так как точка H – точка пересечения высот треугольника, то вектор $\overrightarrow{BH}$ ортогонален вектору $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BH} = \{-1;\,-1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{x+1,\,y-3\}$; $\overrightarrow{AH} = \{2;\,1\}$, $\overrightarrow{BC} = \{x-2;\,y-5\}$.

Найдем уравнение стороны AC: $(\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0) \Leftrightarrow (x+1)(-1)+(y-3)(-1)=0$, $x+1+y-3=0$, $x+y-2=0$ (AC). Найдем уравнение стороны BC: $(\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH} = 0) \Leftrightarrow (x-2)\cdot 2+(y-5)\cdot 1 = 0$, $2x+y-9=0$ (BC).

Найдем координаты вершины C треугольника:

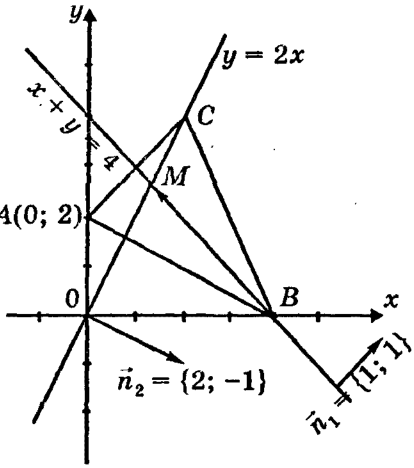
$$\begin{cases} x+y-2=0, \\ 2x+y-9=0; \end{cases} \Rightarrow x=7,\ y=-5;\ C(7;\,-5).$$

Уравнение стороны AB: $\overrightarrow{AB} = \{3;\,2\}$, $\overrightarrow{AM} = \{x+1;\,y+3\}$.

Так как $\overrightarrow{AM} \,||\, \overrightarrow{AB}$, то $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-3}{2}$; $2x+2=3y-9$; $2x-3y+11=0$ (AB).

Ответ: $(7;\,-5)$, $2x-3y+11=0$, $2x+y-9=0$, $x+y-2=0$.

Пример 27. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(0;\,2)$ и уравнения высот (BM) $x+y=4$ и (CM) $y=2x$, где M – точка пересечения высот.



Решение.

Найдем уравнение стороны AC треугольника ABC как уравнение прямой, проходящей через точку $A(0;\ 2)$ параллельно вектору $\overrightarrow{n_1} = \{1;\ 1\}$.

$\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-2}{1}$; $y = x + 2$ (AC).

Уравнение стороны AB:

$\dfrac{x-0}{2} = \dfrac{y-2}{-1}$; $x + 2y - 4 = 0$ (AB). Чтобы найти уравнение стороны BC треугольника, найдем координаты точки C и B – вершин этого треугольника.

$$\begin{cases} y = x + 2, (AC) \\ y = 2x; \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = 4,\ C(2;\ 4),$$

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x + 2y = 4; \end{cases} \Rightarrow y = 0,\ x = 4,\ B(4;\ 0).$$

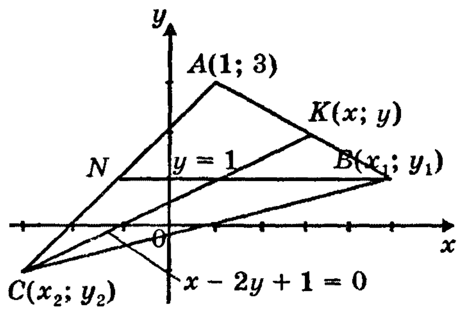
Уравнение BC: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{-4}$; $x - 2 = \dfrac{y-4}{-2}$;

$2x + y - 8 = 0$.

Ответ: $x - y + 2 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$, $2x + y - 8 = 0$.

Пример 28. Написать уравнение сторон треугольника ABC, если задана его вершина $A(1;\ 3)$ и уравнение двух медиан $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$.

Решение.



Пусть B имеет координаты $(x_1;\ y_1)$.

Так как точка K по условию есть середина отрезка AB, то ее координаты равны $\dfrac{x_A + x_B}{2}$, $\dfrac{y_A + y_B}{2}$ и удовлетворяют уравнению $x - 2y + 1 = 0$: $\dfrac{1 + x_1}{2}$ –

$-2\cdot\dfrac{3+y_1}{2}+1=0$. Кроме того, координаты точки $B(x_1;\,y_1)$ удовлетворяют уравнению $y-1=0$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно x_1, y_1:

$$\begin{cases}\dfrac{1+x_1}{2}-(3+y_1)+1=0,\\ y_1-1=0;\end{cases}\quad \begin{cases}1+x_1-6-2y_1+2=0,\\ y_1=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1-2y_1-3=0,\\ y_1=1;\end{cases}\Rightarrow\ \begin{matrix}x_1=5\\ y_1=1\end{matrix},\ B(5;\,1).$$

Аналогично найдем координаты точки $C(x_2;\,y_2)$:

$$x_N=\frac{x_C+x_A}{2},\ x_N=\frac{y_C+y_A}{2},\ \begin{cases}\dfrac{y_2+3}{2}-1=0,\\ x_2-2y_2+1=0;\end{cases}\ \begin{matrix}y_2=-1\\ x_2=-3\end{matrix},$$

$C(-3;\,-1)$.

Уравнение AB: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$; $\dfrac{x-1}{5-1}=\dfrac{y-3}{1-3}$;

$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}$; $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}$; $x+2y-7=0$ (AB).

Уравнение BC: $\dfrac{x-5}{-3-5}=\dfrac{y-1}{-1-1}$; $\dfrac{x-5}{8}=\dfrac{y-1}{2}$;

$\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-1}{1}$; $x-5=4y-4$; $x-4y-1=0$ (BC).

Уравнение AC: $\dfrac{x-1}{-3-1}=\dfrac{y-3}{-1-3}$; $x-1=y-3$;

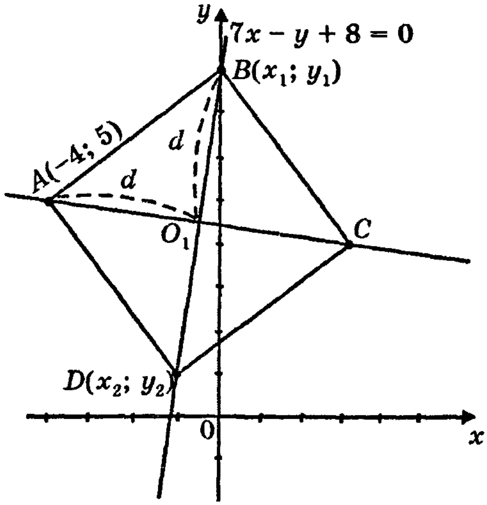
$x-y+2=0$ (AC).

Ответ: (AC) $x-y+2=0$, (BC) $x-4y-1=0$,
(AB) $x+2y-7=0$.

Пример 29. Точка $A(-4;\,5)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x-y+8=0$. Составить уравнение сторон и второй диагонали этого квадрата.

Решение.

1) Найдем уравнение второй диагонали AC. Так как $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}$, то нормальный вектор $\vec{n}=\{7;\,-1\}$ диагонали



DB будет направляющим вектором прямой AC. Поэтому AC:

$$\frac{x+4}{7} = \frac{y-5}{-1};\ x + 4 = -7y + 35;\ x + 7y - 31 = 0\ (AC).$$

2) Расстояние d от точки A до прямой DB равно:

$$d = \frac{|-4 \cdot 7 - 5 + 8|}{\sqrt{50}} = \frac{25}{\sqrt{50}}.$$

Расстояние d от точки $B(x_1;\ y_1)$ до прямой AC равно:

$\dfrac{25}{\sqrt{50}} = \dfrac{|x_1 + 7y_1 - 31|}{\sqrt{50}}$. Получаем две линейные алгебраические системы уравнений для нахождения координат точки $B(x_1;\ y_1)$. А так как точка D симметрична точке B относительно прямой AC, то получим одновременно и координаты точки D.

$$\begin{cases} \dfrac{25}{\sqrt{50}} = \pm\dfrac{x_1 + 7y_1 - 31}{\sqrt{50}}, \\ 7x_1 - y_1 + 8 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 + 7y_1 - 56 = 0, \\ 7x_1 - y_1 + 8 = 0; \end{cases} \Rightarrow B(0;\ 8) \\ \begin{cases} x_1 + 7y_1 - 6 = 0, \\ 7x_1 - y_1 + 8 = 0; \end{cases} \Rightarrow D(-1;\ 1). \end{array}\right.$$

3) Найдем уравнения сторон квадрата как уравнения прямых, проходящих через две точки: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

AB: $\dfrac{x+4}{4} = \dfrac{y-5}{8-5}$; $3x + 12 = 4y - 20$; $3x - 4y + 32 = 0$ (AB).

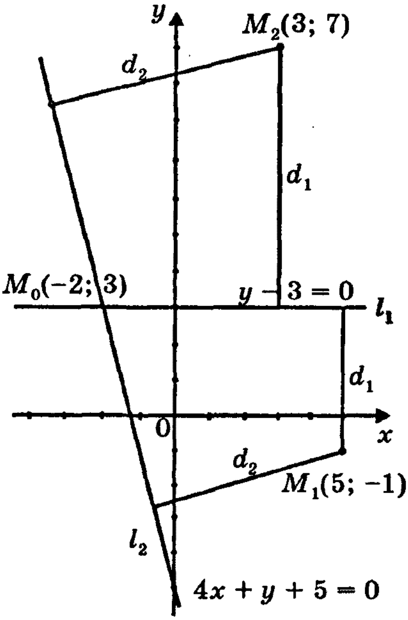
DC: $3x - 4y + c = 0$. Подставим в это уравнение координаты точки $D(-1;\ 1)$, получим $-3 - 4 + c = 0$, $c = 7$, $3x - 4y + 7 = 0$ (DC).

AD: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{-4}$; $-4x - 4 = 3y - 3$, $4x + 3y + 1 = 0$ (AD).

BC: $4x + 3y + c = 0$. Подставим в это уравнение координаты точки $B(0;\ 8)$: $24 + c = 0$, $c = -24$, $4x - 3y - 24 = 0$ (BC).

Ответ: уравнения сторон квадрата: $4x + 3y + 1 = 0$, $3x - 4y + 32 = 0$, $4x + 3y - 24 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$; уравнение его второй диагонали: $x + 7y - 31 = 0$.

Пример 30. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;\ 3)$ на одинаковых расстояниях от точек $M_1(5;\ -1)$ и $M_2(3;\ 7)$.



Решение.

Напишем уравнение искомой прямой l как уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 в данном направлении k: $y - 3 = k(x + 2)$, или $kx - y + (2k + 3) = 0$.

Найдем расстояние от точек M_1 и M_2 до прямой l и искомых прямых (очевидно, что существует два решения):

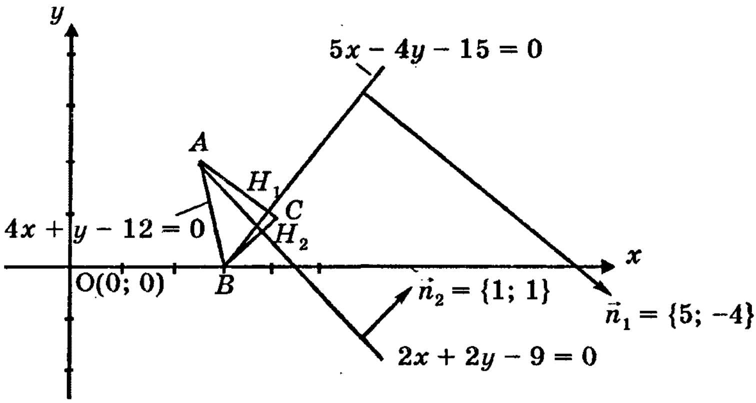
$$d = \frac{|5k + 1 + (2k + 3)|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|3k - 7 + (2k + 3)|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Отсюда получаем: $7k + 4 = \pm(5k - 4)$, или

$\left[\begin{array}{l} 7k + 4 = 5k - 4, \\ 7k + 4 = 4 - 5k; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -4, \\ k_2 = 0. \end{array}\right.$ Следовательно, получим две искомые прямые: $y - 3 = 0$, $y - 3 = -4x - 8$, $4x + y + 5 = 0$.

Ответ: $y = 3$, $4x + y + 5 = 0$.

Пример 31. В треугольнике ABC известны: сторона AB, заданная уравнением $4x + y - 12 = 0$; высота BH_1, за-



данная уравнением $5x - 4y - 15 = 0$; и высота AH_2, заданная уравнением $2x + 2y - 9 = 0$.

Найти вершину C этого треугольника.

Решение.

1) Найдем координаты вершины A и уравнение стороны AC данного треугольника.

$$A:\ \begin{cases} 4x + y - 12 = 0, \\ 2x + 2y - 9 = 0; \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{5}{2}; 2\right).$$

$$AC:\ \frac{x - \frac{5}{2}}{5} = \frac{y - 2}{-4};\ 4x + 5y - 20 = 0\ (AC).$$

2) Найдем координаты вершины B и уравнение стороны BC.

$$B:\ \begin{cases} 4x + y - 12 = 0, \\ 5x - 4y - 15 = 0; \end{cases} \Rightarrow B(3; 0).$$

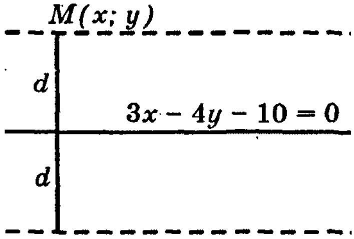
$$BC:\ \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 0}{1};\ y = x - 3\ (BC).$$

3) Найдем координаты вершины C.

$$C:\ \begin{cases} y = x - 3, \\ 4x + 5y - 20 = 0; \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{35}{9}; \frac{8}{9}\right).$$

Ответ: $C\left(\frac{35}{9}; \frac{8}{9}\right)$.

Пример 32. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $3x - 4y - 10 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d = 3$.



Решение.

Возьмем на искомой прямой текущую точку $M(x;\ y)$, тогда $d = \dfrac{|3x - 4y - 10|}{5} = 3$, $3x - 4y - 10 = \pm 15$; $3x - 4y - 25 = 0$; $3x - 4y + 5 = 0$;

Ответ: $3x - 4y - 25 = 0$; $3x - 4y + 5 = 0$.

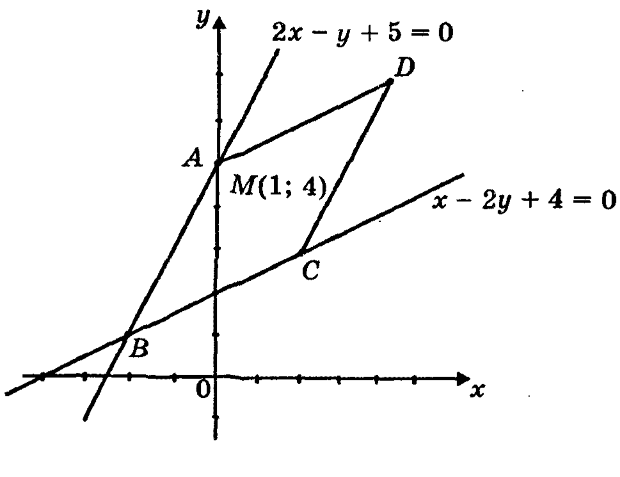
Пример 33. Стороны AB и BC параллелограмма заданы уравнениями $2x - y + 5 = 0$ и $x - 2y + 4 = 0$, диагонали его пересекаются в точке $M(1;\ 4)$. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма.

Решение.

1) Найдем координаты точки B: $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0, \\ x - 2y + 4 = 0; \end{cases} \Rightarrow$ $B(-2;\ 1)$.

2) Найдем координаты вершины D параллелограмма, зная координаты точки пересечения диагоналей $M(1;\ 4)$:

$\dfrac{x_B + x_D}{2} = 1$, $\dfrac{y_B + y_D}{2} = 4$ или $\dfrac{x_D - 2}{2} = 1$, $x_D = 4$; $\dfrac{y_D + 1}{2} = 4$, $y_D = 7$; $D(4\text{: } 7)$.



3) Уравнение стороны CD: $\begin{cases} 2x - y + c = 0, \\ D(4;\ 7); \end{cases} \Rightarrow$

$8 - 7 + c = 0,\ c = -1,\ 2x - y - 1 = 0\ (CD)$.

4) Уравнение стороны AD: $\begin{cases} x - 2y + c = 0, \\ D(4;\ 7); \end{cases} \Rightarrow$

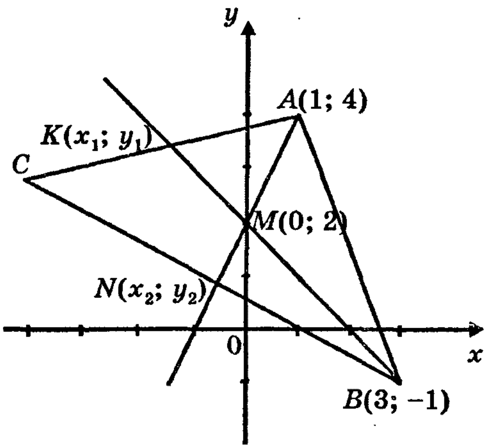
$4 - 14 + c = 0,\ c = 10,\ (AD)\ x - 2y + 10 = 0$.

Ответ: $(CD)\ 2x - y - 1 = 0,\ (AD)\ x - 2y + 10 = 0$.

Пример 34. Даны две вершины треугольника (3; –1) и (1; 4) и точка пересечения его медиан (0; 2). Найти координаты третьей вершины и составить уравнения его сторон.

Решение.

По условию точка M делит отрезок BK и отрезок AN в отношении $\lambda = 2$. Найдем координаты точки $K(x_1;\ y_1)$ и $N(x_2;\ y_2)$:



1) $\dfrac{x_B + \lambda x_K}{1+\lambda} = x_M$,

$\dfrac{y_B + \lambda y_K}{1+\lambda} = y_M$;

$\dfrac{3 + 2x_1}{3} = 0,\ x_1 = -\dfrac{3}{2}$;

$\dfrac{-1 + 2y_1}{3} = 2,\ y_1 = \dfrac{7}{2}$;

$K\left(-\dfrac{3}{2};\ \dfrac{7}{2}\right)$.

2) $\dfrac{x_A + \lambda x_N}{1+\lambda} = x_M$, $\dfrac{y_A + \lambda y_N}{1+\lambda} = y_M$; $\dfrac{1 + 2\cdot x_2}{3} = 0$

$x_2 = -\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{4 + 2y_2}{3} = 2,\ y_1 = 1$; $N\left(-\dfrac{1}{2};\ 1\right)$.

3) Найдем уравнения сторон треугольника.

AB: $\dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y-4}{-1-4}$; $5x + 2y - 13 = 0\ (AB)$;

$$AC:\ \frac{x-1}{-\frac{3}{2}-1}=\frac{y-4}{\frac{2}{2}-4};\ x-5y+19=0\ (AC),\ \text{или}\ (AK);$$

$$BC:\ \frac{x-3}{-\frac{1}{2}-3}=\frac{y+1}{1+1};\ 4x+7y-5=0\ (BC),\ \text{или}\ (BN).$$

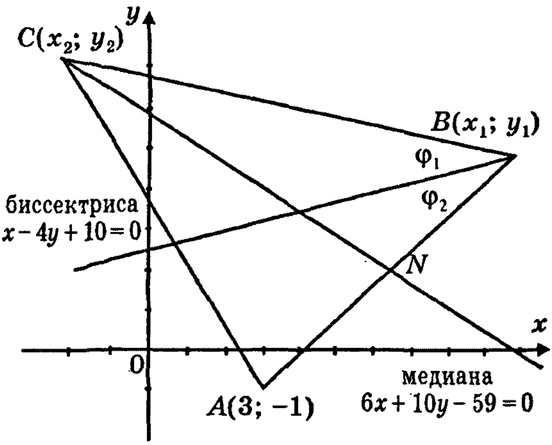
4) Найдем координаты вершины C треугольника.

$$C:\ \begin{cases}4x+7y-5=0,\\ x-5y+19=0;\end{cases}\Rightarrow C(-4;\ 3).$$

Ответ: $(-4;\ 3)$; $5x+2y-13=0$; $x-5y+19=0$; $4x+7y-5=0$.

Пример 35. Составить уравнения сторон треугольника, *зная одну его вершину:* $A(3;\ -1)$*, а также уравнение* биссектрисы $x-4y+10=0$ и медианы $6x+10y-59=0$, проведенных из различных вершин.

Решение.



1) Найдем координаты вершины B треугольника следующим образом: с одной стороны, точка B лежит на биссектрисе угла B. Значит, координаты x_1, y_1 удовлетворяют уравнению биссектрисы: $x_1-4y_1+10=0$.

С другой стороны, выразим координаты точки N как середины отрезка AB через x_1, y_1. Координаты точки N удовлетворяют уравнению медианы, получаем второе уравнение относительно x_1, y_1:

$$\frac{(3+x_1)}{2}\cdot 6+10\cdot\frac{-1+y_1}{2}-59=0.$$

Итак, решая систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4y_1 + 10 = 0, \\ \dfrac{x_1+3}{2}\cdot 6 + 10\cdot\dfrac{y_1-1}{2} - 59 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 - 4y_1 + 10 = 0, \\ 3x_1 + 5y_1 - 55 = 0; \end{cases}$$ получаем $x_1 = 10$, $y_1 = 5$, точку $B(10;\ 5)$.

2) Найдем уравнение стороны AB по известным координатам точек $A(3;\ -1)$ и $B(10;\ 5)$:

$$\frac{x-3}{7} = \frac{y+1}{6} \text{ или } 6x - 7y - 25 = 0\ (AB).$$

3) Так как угловой коэффициент k_1 уравнения AB есть $k_1 = \frac{6}{7}$, а угловой коэффициент k_2 уравнения биссектрисы – $k_2 = \frac{1}{4}$, то найдем $\operatorname{tg}\varphi_1$: $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$. $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{\frac{1}{4} - \frac{6}{7}}{1 + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$. Далее, точка $C(x_2;\ y_2)$ принадлежит прямой, проходящей через точку $B(10;\ 5)$ под данным углом φ_2 к биссектрисе угла.

Найдем угловой коэффициент прямой BC: $k_2 = \dfrac{y_2 - 5}{x_2 - 10}$, тогда угловой коэффициент биссектрисы обозначим $k_1 = \frac{1}{4}$ и $\operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$;

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\dfrac{y_2-5}{x_2-10} - \dfrac{1}{4}}{1 + \dfrac{y_2-5}{x_2-10}\cdot\dfrac{1}{4}} = -\frac{1}{2};$$

отсюда получаем $-2x_2 - 9y_2 + 65 = 0$.
Уравнение BC: $2x + 9y - 65 = 0$ (BC).

4) Найдем координаты точки C:

$$\begin{cases}2x+9y-65=0\\ 6x+10y-59=0\end{cases}\Rightarrow C\left(-\frac{7}{8};8\right).$$

5) Наконец, AC: $\dfrac{x-x_A}{x_C-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_C-y_A}$; $\dfrac{x-3}{-\frac{7}{2}-3}=\dfrac{y+1}{8+1}$,

или $18x+13y-41=0$ (AC).

Ответ: $2x+9y-65=0$, $6x-7y-25=0$, $18x+13y-41=0$.

Пример 36. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 4)$ и удаленной от начала координат на расстояние $d=2$.

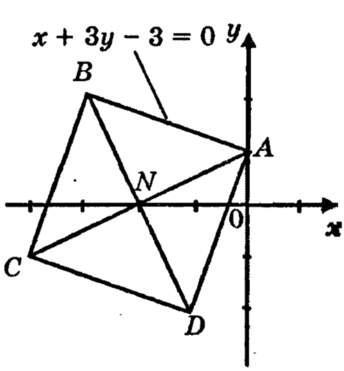
Решение.

Уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 4)$, запишем в виде:

$A(x-2)+B(y-4)=0$. Если $B=0$, то имеем $x=2$; если $B\neq 0$, то $y-4-k(x-2)=0$, где $k=-\dfrac{A}{B}$, $-kx+y+2k-4=0$. По условию $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $2=\dfrac{|2k-4|}{\sqrt{k^2+1}}$; $\sqrt{k^2+1}=|k-2|$; $(x_0=0,\ y_0=0)$; $k^2+1=k^2-4k+4$; $-4k+3=0$, $k=\dfrac{3}{4}$; $y-4-\dfrac{3}{4}(x-2)$; $3x-4y+10=0$.

Ответ: $3x-4y+10=0$, $x=2$.

Пример 37. Известны уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-3=0$ и точка пересечения диагоналей $N(-2;\ 0)$. Написать уравнения остальных его сторон.



Решение.

Составим уравнения диагоналей квадрата, проходящих через точку $N(-2;\ 0)$ под углом 45° к прямой $x+3y-3=0$.

Уравнение искомой диагонали запишем как уравнение с угловым коэффициентом: $y=k(x+2)$.

Угловой коэффициент прямой $x + 3y - 3 = 0$ равен $k_2 = -\frac{1}{3}$.

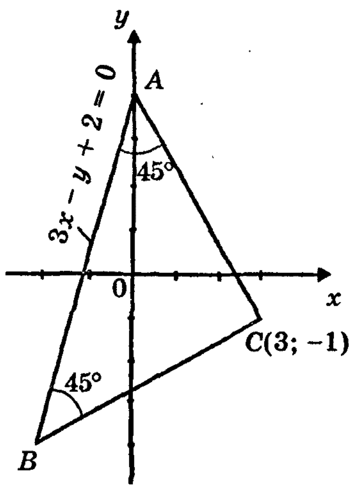
Тогда $\operatorname{tg} 45^\circ = \dfrac{\left|k + \frac{1}{3}\right|}{1 - \frac{k}{3}}$; $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$; $\left|k + \frac{1}{3}\right| = 1 - \frac{k}{3}$;

$|3k + 1| = 3 - k$; $k = -2$; $k = +\frac{1}{2}$. Таким образом, найдены диагонали квадрата: $y = \frac{1}{2}(x + 2)$, $y = -2(x + 2)$.

Далее по известной стороне и диагонали квадрата найдем точку $B(-3;\ 2)$. Затем, зная координаты точки B и точки N, найдем координаты точки C. Далее, применяя уравнение прямой, проходящей через данную точку, параллельно (перпендикулярно) данному вектору, найдем уравнения остальных сторон квадрата.

Ответ: DC: $x + 3y + 7 = 0$; AD: $3x - y + 1 = 0$;
BC: $3x - y + 11 = 0$.

Пример 38. Найти вершины прямоугольного равнобедренного треугольника, если даны вершина прямого угла $C(3;\ 1)$ и уравнение гипотенузы $3x - y + 2 = 0$.



Решение.

Найдем уравнения катетов треугольника как уравнения прямых, проходящих через точку $C\ (3;\ -1)$ под углом 45° к гипотенузе.

1) $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{|k_2 - k_1|}{1 + k_1 k_2}$; $k_1 = 3$, $k_2 = k$.

Тогда $\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \dfrac{|k - 3|}{1 + 3k}$;

$|k - 3| = \pm(1 + 3k)$;

$k = -2$, $k = \frac{1}{2}$.

2) $y = k(x - x_0) + y_0$; $k = -2$; $y = -2(x - 3) - 1$, $y = -2x + 5$ (уравнение одного катета треугольника).

$k = \frac{1}{2}$; $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 3)$; $2y + 2 = x - 3$; $x - 2y - 5 = 0$ (уравнение другого катета треугольника).

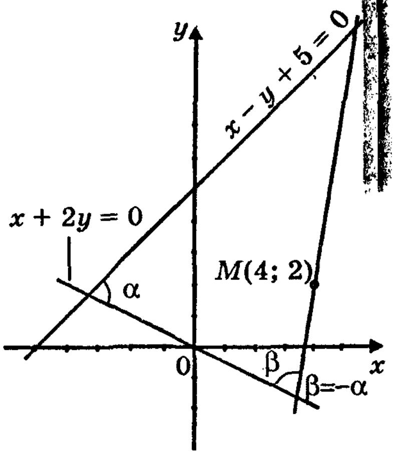
3) Найдем вершины A и B треугольника.

$$\begin{cases} 3x - y + 2 = 0, \\ y = -2x + 5 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}; \frac{19}{5}\right).$$

$$\begin{cases} 3x - y + 2 = 0, \\ x - 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{9}{5}; -\frac{17}{5}\right).$$

Ответ: $\left(\frac{3}{5}; \frac{19}{5}\right), \left(-\frac{9}{5}; -\frac{17}{5}\right)$.

Пример 39. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $x + 2y = 0$, а одной из боковых сторон – $x - y + 5 = 0$. Составить уравнение другой боковой стороны, зная, что она проходит через точку M (4; 2).



Решение. Угловой коэффициент стороны основания $k_1 = -\frac{1}{2}$. Угловой коэффициент данной боковой стороны $k_2 = 1$. Тангенс угла от основания до данной боковой стороны

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Тангенс угла β от основания до искомой боковой стороны равен тангенсу угла от основания до данной боковой стороны, но имеет противоположный знак. Следовательно, $\operatorname{tg}\beta = -3$; с другой стороны, $\operatorname{tg}\beta = \frac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3}$, где k_3 – угловой коэффициент другой боковой стороны. Так как

$\operatorname{tg}\beta = -3$, $k_1 = -1/2$, то $-3 = \dfrac{k_3 + \dfrac{1}{2}}{1 - \dfrac{1}{2}\cdot k_3}$; отсюда $k_3 = 7$. Уравнение искомой боковой стороны: $y - 2 = 7(x - 4)$, или $7x - y - 26 = 0$.

Ответ: $7x - y - 26 = 0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 расположены на прямой $2x - 2y - 6 = 0$; их абсциссы соответственно равны числам: 4, 0, 2, -2 и 6. Определить ординаты этих точек.

2. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC даны соответственно уравнениям $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Определить координаты его вершин.

3. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок b и составляющей с осью Ox угол $\varphi = 45°$.

4. Преобразовать уравнение $3x - 4y + 12 = 0$ к уравнению в отрезках.

5. Найти угол между прямой $y = -4x + 1$ и прямой $5x - 3y - 7 = 0$.

6. Доказать, что прямые $3x - 4y + 12 = 0$ и $8x + 6y - 9 = 0$ перпендикулярны. Постройте каждую данную прямую по точкам пересечения их с осями координат.

7. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3; 2)$, $M_2(4; -1)$.

8. Даны вершины треугольника $A\,(2; 5)$, $B\,(-3; 1)$, $C\,(4; -2)$. Найти уравнение высоты треугольника, опущенной из вершины A.

9. Найти точку пересечения прямых $2x - y - 3 = 0$, $4x + 3y - 11 = 0$.

10. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + 3y - 8 = 0$ и $x - 4y + 5 = 0$ и через точку $M_1(-2; 3)$.

11. Дан треугольник ABC с вершинами в точках $A(1; 5)$, $B(2; 0)$, $C(3; 1)$. Составить уравнения стороны AC, высоты CK и медианы BM, проведенной из вершины B.

12. Дан треугольник ABC с вершинами в точках $A(3; -5)$, $B(2; 1)$, $C(0; 5)$. Составить уравнения стороны AB, высоты BD и медианы AM.

13. Даны вершины треугольника $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$ и $C(3; 5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

14. Даны вершины треугольника $A(-1; 2)$, $B(5; 4)$ и $C(-2; 0)$. Составить уравнение биссектрисы его внутреннего угла A.

15. Определить угол φ между двумя прямыми: $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$.

16. Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны:

а) $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$;
б) $3x - 4y + 1 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$;
в) $6x - 15y + 7 = 0$, $10x + 4y - 3 = 0$;
г) $9x - 12y + 5 = 0$, $8x + 6y - 13 = 0$;
д) $7x - 2y + 1 = 0$, $4x + 6y + 17 = 0$;
в) $5x - 7y + 3 = 0$, $3x + 2y - 5 = 0$.

17. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$:

а) параллельно данной прямой;

б) перпендикулярно к данной прямой.

18. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $7x + y - 15 = 0$. Найти вершины прямоугольника.

19. Найти проекцию точки $P(+6, -4)$ на прямую $4x - 5y - 3 = 0$.

20. Найти точку Q, симметричную точке $P(-5; 13)$ относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.

21. Даны две точки: $P(2; 3)$ и $Q(-1; 0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно вектору $\overrightarrow{PQ}$.

22. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $A(5; -4)$, $B(-1; 3)$, $C(-3, -2)$ параллельно противоположным сторонам.

23. Даны вершины треугольника $A(2; -2)$, $B(3; -5)$ и $C(5; 7)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине A.

24. Доказать, что в следующих случаях две данные прямые параллельны:

а) $3x + 5y - 4 = 0$, $6x + 10y + 7 = 0$;
б) $2x - 4y + 3 = 0$, $x - 2y = 0$;
в) $2x - 1 = 0$, $x + 3 = 0$;
г) $y + 3 = 0$, $5y - 7 = 0$.

25. Точка $A(2; -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь этого квадрата.

26. Площадь треугольника $S = 1{,}5$ кв. ед. Две его вершины есть точки $A(2; -3)$ и $B(3; -2)$; центр тяжести этого треугольника лежит на прямой $3x - y - 8 = 0$. Определить координаты третьей вершины C.

27. Дана прямая $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. Найти расстояние d от этой прямой до начала координат.

28. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1; 0)$, $B(2; 3)$ и $C(3; 1)$. Вычислить длину высоты BD, опущенной из вершины B, и длину отрезка AD.

29. Точка $A(5; -1)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $4x - 3y - 7 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат остальные стороны этого квадрата.

30. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(-2; 3)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(5; -1)$ и $B(3; 7)$.

31. Вычислить расстояние d между параллельными прямыми: $3x - 4y - 10 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$.

32. Дано уравнение стороны ромба $x + 3y - 8 = 0$ и уравнение его диагонали $2x + y + 4 = 0$. Написать уравнения остальных сторон ромба, зная, что точка $(-9; -1)$ лежит на стороне ромба, параллельной данной.

Ответы:

2. $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 4)$; 3. $y = x + 2$;

4. $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$; 5. $\varphi = 135^\circ$; 7. $3x + y - 11 = 0$;

8. $7x - 3y + 1 = 0$; 9. $(2; 1)$; 10. $5x + 13y - 29 = 0$;

11. AC: $2x + y - 7 = 0$; CK: $x - 5y + 2 = 0$; BM: $x = 2$;

12. AB: $6x + y - 13 = 0$; BD: $3x - 10y + 4 = 0$; AM: $x - y + 2 = 0$;

13. $4x + y - 3 = 0$; 14. $5x + y - 3 = 0$; 15. $\varphi = 45^\circ$;

16. перпендикулярны а), в) и г);

17. а) $2x + 3y - 7 = 0$; б) $3x - 2y - 4 = 0$;

18. $(2; 1)$, $(4; 2)$; $(-1; 7)$, $(1; 8)$; 19. $(+2; +1)$;

20. $Q(11; -11)$; 21. $x + y + 1 = 0$;

22. $5x - 2y - 33 = 0$, $x + 4y - 11 = 0$, $7x + 6y + 33 = 0$;

23. $x - 5 = 0$; 25. 5 кв. ед.; 26. $C_1(1; -1)$ или $C_2(-2; -10)$;

27. $d = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$; **28.** $BD = \sqrt{5}$, $AD = \sqrt{5}$;

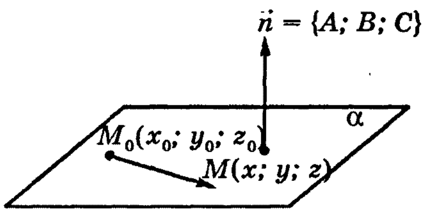
29. условию задачи удовлетворяют два квадрата; остальные стороны одного из них лежат на прямых: $3x + 4y - 11 = 0$; $4x - 3y - 23 = 0$; $3x + 4y - 27 = 0$; остальные стороны другого – на прямых: $3x + 4y - 11 = 0$; $4x - 3y - 23 = 0$; $3x + 4y + 5 = 0$;

30. $4x + y + 5 = 0$; **31.** $d = 2{,}5$;

32. $x + 3y + 12 = 0$, $3x - y - 4 = 0$, $3x - y - 16 = 0$.

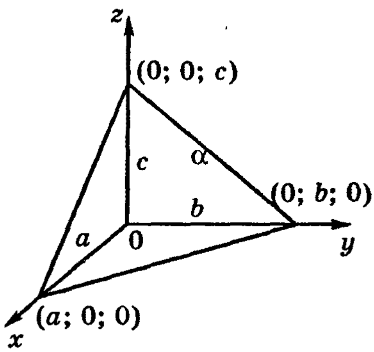
2.2. Плоскость

1) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – *уравнение плоскости*, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n} = \{A; B; C\}$.

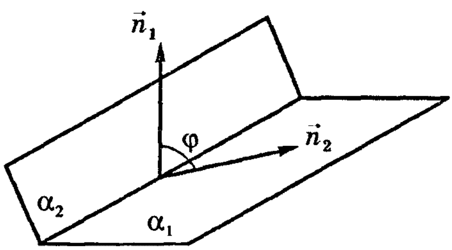


2) $Ax + By + Cz + D = 0$ – *общее уравнение плоскости*, $\vec{n} = \{A, B, C\}$ – нормальный вектор этой плоскости.

3) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ – *уравнение плоскости* в отрезках, где a, b, c – величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью α на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно;



4) Пусть даны две плоскости α_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\overrightarrow{n_1} = \{A, B, C\}$,



α_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$,

$\vec{n_2} = \{A; B; C\}$.

В качестве *угла* φ *между плоскостями* α_1 и α_2 принимают угол между их нормальными векторами:

$\cos\varphi = \dfrac{(\vec{n_1}\cdot\vec{n_2})}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|}$ или в координатной форме

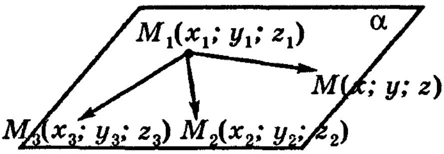
$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

5) *Условие перпендикулярности* двух плоскостей α_1 и α_2: $(\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}) = 0$ или в координатной форме:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

6) *Условие параллельности* двух плоскостей α_1 и α_2:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$



7) Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$:

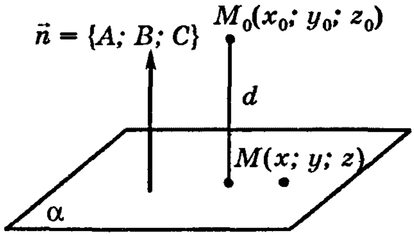
$\left(\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0$ или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

8) Если плоскость α задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – некоторая точка пространства, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

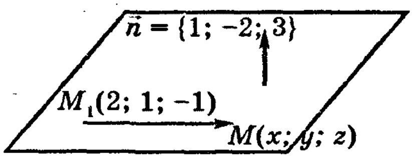
есть формула *расстояния* от точки M_0 до плоскости α.



9) Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, называется *пучком плоскостей.*

Если $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ есть уравнения двух различных непараллельных плоскостей, пересечением которых служит некоторая прямая L, а числа α, β – любые не равные одновременно нулю, то $\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ есть уравнение плоскости, проходящей через прямую L. Более того, какова бы ни была проходящая через прямую L плоскость, она может быть определена из пучка плоскостей при определенных значениях α, β.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2;\ 1;\ -1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = \{1;\ -2;\ 3\}$.



Решение.

Для вывода уравнения плоскости возьмем на этой плоскости точку $M(x;\ y;\ z)$ с текущими координатами. Получим вектор $\overrightarrow{M_1M} = \{x - 2;\ y - 1;\ z + 1\}$. По условию

$(\overrightarrow{M_1M} \perp \vec{n}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{n}) = 0 \Leftrightarrow (x - 2) \cdot 1 + $
$+ (y - 1) \cdot (-2) + (z + 1) \cdot 3 = 0.$

Ответ: $x - 2y + 3z + 3 = 0.$

Пример 2. Даны две точки $M_1(3;\ -1;\ 2)$ и $M(4;\ -2;\ -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение.

По условию вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ является нормальным вектором искомой плоскости $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{n} = \{1;\ -1;\ -3\}$. Уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}$ есть $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, или

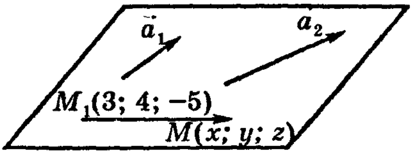
$1 \cdot (x - 3) + (-1) \cdot (y + 1) + (-3) \cdot (z - 2) = 0,$

$x - y - 3z + 2 = 0.$

Ответ: $x - y - 3z + 2 = 0$.

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;\ 4;\ -5)$ параллельно двум векторам $\overrightarrow{a_1} = \{3;\ 1;\ -1\}$ и $\overrightarrow{a_2} = \{1;\ -2;\ 1\}$.

Решение.



Отложим векторы $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ в плоскости, проходящей через точку M_1, и возьмем на искомой плоскости точку $M(x;\ y;\ z)$ с текущими координатами.

Получим, что три вектора $\overrightarrow{M_1M} = \{x - 3;\ y - 4;\ z + 5\}$, $\overrightarrow{a_1} = \{3;\ 1;\ -1\}$, $\overrightarrow{a_2} = \{1;\ -2;\ 1\}$ лежат в одной плоскости, т. е. они компланарны.

Условие компланарности есть равенство нулю определителя, составленного из координат этих векторов.

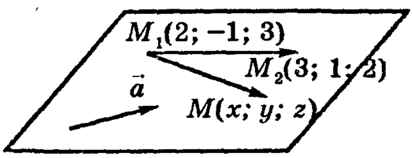
$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ (x-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (y-4)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (z+5)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,\ x + 4y + 7z + 16 = 0.$$

Ответ: $x + 4y + 7z + 16 = 0$.

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;\ -1;\ 3)$ и $M_2(3;\ 1;\ 2)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{3;\ -1;\ 4\}$.

Решение.



Отложим вектор $\vec{a}$ и точку $M(x;\ y;\ z)$ с текущими координатами в плоскости, проходящей через точки M_1, M_2. Получим компланарные векторы $\overrightarrow{M_1M} = \{x - 2;\ y + 1;\ z - 3\}$,

$\overrightarrow{M_1M_2} = \{1; 2; -1\}$, $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$. Следовательно, по условию компланарности трех векторов будем иметь:

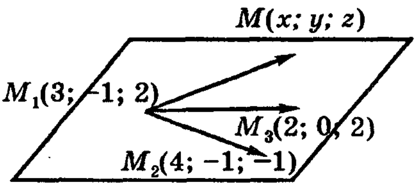
$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 7(x-2) - 7(y+1) - 7(x-3),$$

$x - y - z = 0.$

Ответ: $x - y - z = 0$.

Пример 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$ и $M_3(2; 0; 2)$.

Решение.



Возьмем на плоскости точку с текущими координатами $M(x; y; z)$, будем иметь векторы $\overrightarrow{M_1M} = \{x-3; y+1; z-2\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{1; 0; -3\}$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \{-1; 1; 0\}$. Эти векторы по условию компланарны. Следовательно, равен нулю определитель, составленный из координат этих векторов:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 3x + 3y + z - 8 = 0.$$

Ответ: $3x + 3y + z - 8 = 0$.

Пример 6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3; -2; 7)$ параллельно плоскости $2x - 3z + 5 = 0$.

Решение.

Так как искомая плоскость и данная – параллельны, то у них общий нормальный вектор. Таким образом, получим: через данную точку M_1 провести плоскость, перпендикулярную данному вектору $\vec{n} = \{2; 0; -3\}$.

$A(x - x_0) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z) = 0$,

$2(x - 3) + (-3)(z + 7) = 0$, $2x - 3z - 27 = 0$.

Ответ: $2x - 3z - 27 = 0$.

Пример 7. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям: $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$.

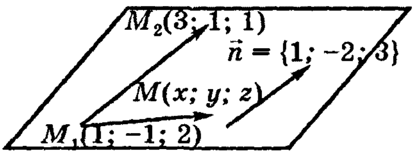
Решение.

Так как искомая плоскость перпендикулярна плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $x + 2y + z = 0$, то нормальные векторы $\overrightarrow{n_1} = \{2; -1; 3\}$ и $\overrightarrow{n_2} = \{1; 2; 1\}$ и вектор $\overrightarrow{OM} = \{x; y; z\}$ (M – точка с текущими координатами) – компланарны. Следовательно, $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, или $7x - y - 5z = 0$.

Ответ: $7x - y - 5z = 0$.

Пример 8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(1; -1; -2)$ и $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно к плоскости $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Решение.



Так как искомая плоскость перпендикулярна плоскости $x - 2y + 3z - 5 = 0$, то нормальный вектор $\vec{n} = \{1; -2; 3\}$ отложим в плоскости точек M_1, M_2. Возьмем на искомой плоскости еще точку $M(x; y; z)$ с текущими координатами, получим векторы:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - 1; y + 1; z + 2\}, \ \overrightarrow{M_1M_2} = \{2; 2; 3\}.$$

Три вектора $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{n}$ – компланарны, поэтому $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ или $4x - y - 2z = 0$.

Ответ: $4x - y - 2z = 0$.

Пример 9. Составить уравнение плоскости, которая проходит через ось Oy и точку $M_2(1; 4; 3)$

Решение.

Так как плоскость проходит через ось Oy, то ее уравнение можно взять в виде $z = kx$. Плоскость $z = kx$ проходит через точку $M_2(1; 4; 3)$, значит, координаты точки удовлетворяют уравнению. Получаем: $z = kx$, $-3 = k \cdot 1$, $k = -3$, $3x + z = 0$.

Ответ: $3x + z = 0$.

Пример 10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(7; 2; -3)$ и $M_2(5; 6; -4)$ параллельно оси Ox.

Решение.

Уравнение плоскости, параллельной оси Ox, имеет вид: $By + Cz + D = 0$ (коэффициенты B, C, D отличны от нуля).

Запишем это уравнение так: $\frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z + 1 = 0$. Так как эта плоскость проходит через точки M_1 и M_2, то координаты этих точек удовлетворяют искомому уравнению, получаем линейную алгебраическую систему уравнений:

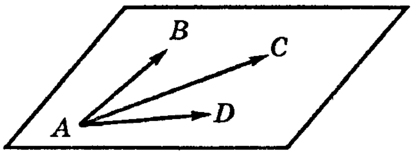
$$\begin{cases} \frac{B}{D}\cdot 2 - 3\cdot\frac{C}{D} + 1 = 0, \\ \frac{B}{D}\cdot 6 - 4\cdot\frac{C}{D} + 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \frac{B}{D} = \frac{1}{10}.$$

Тогда $\frac{1}{10}y + \frac{2}{5}z + 1 = 0$ или $y + 4z + 10 = 0$.

Ответ: $y + 4z + 10 = 0$.

Пример 11. Докажите, что четыре точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

Решение.



Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Если они компланарны, то данные точки лежат в одной плоскости. $\overrightarrow{AB} = \{-1; -1; 6\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-2; 0; 2\}$, $\overrightarrow{AD} = \{1; -1; 4\}$. Тогда

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= -2 - 10 + 12 = 0.$

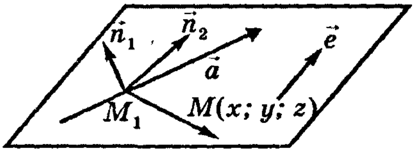
Ответ: данные точки лежат в одной плоскости.

Пример 12. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(4; 3; 2)$ и отсекает на координатных осях положительные отрезки одинаковой длины.
Решение.

Уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. По условию $a=b=c>0$. Тогда уравнение плоскости можно записать $x+y+z=a$. Так как точка $M_1(4; 3; 2)$ лежит в этой плоскости, то ее координаты удовлетворяют уравнению: $4+3+2=a$, $a=9$. Следовательно, $x+y+z=9$.

Ответ: $x+y+z=9$.

Пример 13. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $2x-y+3z-5=0$, $x+2y-z+2=0$ параллельно вектору $\vec{e}=\{2; -1; -2\}$.
Решение.



Векторы $\overrightarrow{n_1}=\{2; -1; 3\}$, $\overrightarrow{n_2}=\{1; 2; -1\}$ – нормальные векторы данных плоскостей. Найдем их векторное произведение

$$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-5\vec{i}+5\vec{j}-5\vec{k}=5\cdot\{-1; 1; 1\}.$$

В качестве направляющего вектора прямой пересечения плоскостей примем вектор $\vec{a}=\{-1; 1; 1\}$.

Возьмем какую-нибудь точку на этой прямой, например, $M_1(x; y; 0)$, тогда

$$\begin{cases} z=0,\\ 2x-y-5=0,\\ x+2y+2=0; \end{cases} \Leftrightarrow M_1\left(\frac{8}{5}; -\frac{9}{5}; 0\right).$$

Так как векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\vec{a}$, $\vec{e}$ компланарны, то

$$\begin{vmatrix} x-\frac{8}{5} & y+\frac{9}{5} & z\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 5x+5z-8=0.$$

Ответ: $5x+5z-8=0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(2;\ 1;\ -1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = \{5;\ 0;\ -3\}$.

2. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\vec{n} = \{5;\ 0;\ -3\}$.

3. Даны две точки $M_1(3;\ -1;\ 2)$ и $M_2(4;\ -2;\ -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

4. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку M_0, параллельно векторам $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$, если:

а) $M_0(1;\ 1;\ 1)$, $\overrightarrow{a_1} = \{0;\ 1;\ 2\}$, $\overrightarrow{a_2} = \{-1;\ 0;\ 1\}$;

б) $M_0(0;\ 1;\ 2)$, $\overrightarrow{a_1} = \{2;\ 0;\ 1\}$, $\overrightarrow{a_2} = \{1;\ 1;\ 0\}$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 параллельно вектору $\vec{a}$, если:

а) $M_1(1;\ 2;\ 0)$, $M_2(2;\ 1;\ 1)$, $\vec{a} = \{3;\ 0;\ 1\}$;

б) $M_1(1;\ 1;\ 1)$, $M_2(2;\ 3;\ -1)$, $\vec{a} = \{0;\ -1;\ 2\}$.

6. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1, M_2 и M_3, если:

а) $M_1(1;\ 2;\ 0)$, $M_2(2;\ 1;\ 1)$, $M_3(3;\ 0;\ 1)$;

б) $M_1(1;\ 1;\ 1)$, $M_2(0;\ -1;\ 2)$, $M_3(2;\ 3;\ -1)$.

7. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

а) $2x - 3y - 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;

б) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$;

в) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$.

8. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

а) $3x - y - 2z - 7 = 0$, $x + 9y - 3z + 2 = 0$;

б) $2x + 3y - z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$;

в) $2x - 5z + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$.

9. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(3;\ -2;\ -7)$ параллельно плоскости $2x - 3z + 5 = 0$.

10. Составить уравнение плоскости, которая проходит через две точки $M_1(1;\ -1;\ -2)$ и $M_2(3;\ 1;\ 1)$ перпендикулярно к плоскости $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

11. Преобразовать следующие уравнения плоскостей к уравнениям в отрезках:

а) $2x - 3y + 5z - 15 = 0$, б) $2x + 3y + 6 = 0$,
в) $2x + 15 = 0$.

12. Найти двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:

а) $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$, $x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$; б) $3y - z = 0$, $2y + z = 0$,
в) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$.

13. Две грани куба лежат на плоскостях $2x - 2y + z - 1 = 0$, $2x - 2y + z + 5 = 0$. Вычислить объем этого куба.

14. В каждом из следующих случаев вычислить расстояние между параллельными плоскостями:

а) $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $x - 2y - 2z - 6 = 0$, б) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, $4x - 6y + 12z - 21 = 0$,
в) $2x - y + 2z + 9 = 0$, $4x - 2y + 4z - 21 = 0$.

15. В пучке плоскостей $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ найти плоскость, которая: а) проходит через точку $M_1(1; -2; 3)$; б) параллельна оси Ox; в) параллельна оси Oy; г) параллельна оси Oz.

Ответы:

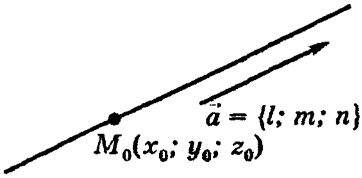
1. $x - 2y + 3z + 3 = 0$; **2.** $5x - 3z = 0$;
3. $x - y - 3z + 2 = 0$;
4. а) $x - 2y - z = 0$; б) $-x + y + 2z - 5 = 0$;
5. а) $-x + 2y - 3z = 0$; б) $2x - 2y - z + 1 = 0$;
6. а) $x + y - 3 = 0$; б) $2x - y - 1 = 0$;
7. а) и в) определяют параллельные плоскости;
8. а) и б) определяют перпендикулярные плоскости;
9. $2x - 3z - 27 = 0$;
10. $4x - y - 2z - 9 = 0$;

11. а) $\frac{x}{7{,}5} + \frac{y}{-5} + \frac{z}{3} = 1$; б) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$; в) $\frac{x}{-7{,}5} = 1$;

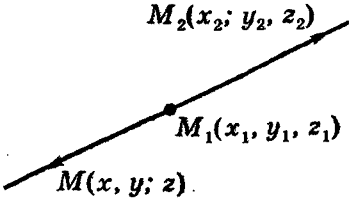
12. $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}$;
13. 8 куб. ед.; **14.** а) $d = 2$; б) $d = 3{,}5$; $d = 6{,}5$;
15. а) $2x + 15y + 7z + 7 = 0$; б) $9y + 3z + 5 = 0$;
в) $3x + 3z - 2 = 0$; г) $3x - 9y - 7 = 0$.

2.3. Прямая и плоскость в пространстве

1) $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ – *канонические уравнения* прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{a}=\{l;\, m;\, n\}$;



2) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$;



3) уравнения $\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt; \end{cases}$

$t\in R$ есть ***параметрические уравнения прямой*** в пространстве.

4) Пусть даны две прямые, заданные каноническими уравнениями

$$L_1\colon\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$L_2\colon\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

За *угол* φ *между прямыми* принимают угол между их направляющими векторами

$\overrightarrow{a_1}=\{l_1;\, m_1;\, n_1\}$, $\overrightarrow{a_2}=\{l_2;\, m_2;\, n_2\}$:

$\cos\varphi=\dfrac{(\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2})}{\left|\overrightarrow{a_1}\right|\left|\overrightarrow{a_2}\right|}$, или в координатной форме

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

5) $l_{12}+m_1m_2+n_1n_2=0$ – *условие перпендикулярности* двух прямых L_1 и L_2.

6) $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ – *условие параллельности* двух прямых L_1 и L_2 в пространстве.

7) *Общие уравнения прямой* в пространстве

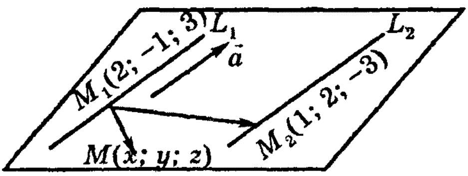
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0; \end{cases}$$

где коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2. В данном случае прямая задана как линия пересечения плоскостей.

Пример 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые:

$$L_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}, \quad L_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

Решение.



Обозначим точки, через которые проходят прямые L_1 и L_2 – $M_1(2; -1; 3)$, $M_2(1; 2; -3)$. Им соответствует вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1; 3; -6\}$. Возьмем на искомой плоскости точку $M(x; y; z)$ с текущими координатами, получим вектор $\overrightarrow{M_1M}=\{x-2;\ y+1;\ z-3\}$. Таким образом, три вектора $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и направляющий вектор прямой $\vec{a}=\{3; 2; -2\}$ компланарны. По условию компланарности трех векторов имеем

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0 \text{ или } 6x-20y-11z+1=0.$$

Ответ: $6x-20y-11z+1=0$.

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 5x - y - 2z - 3 = 0, \\ 3x - 2y - 5z + 2 = 0, \end{cases}$$ перпендикулярно плоскости $x + 19y - 7z - 11 = 0$, $\vec{n} = \{1; 19; -7\}$.

Решение.

$\overrightarrow{n_1} = \{5; -1; -2\}$, $\overrightarrow{n_2} = \{3; -2; -5\}$. Данная прямая действительно перпендикулярна данной плоскости:

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \vec{n} = 5 + (-1)19 + (-2)(-7) = 0,$$

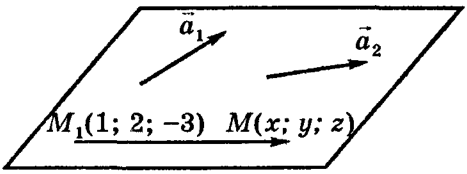
$$\overrightarrow{n_2} \cdot \vec{n} = 3 - 38 + 35 = 0.$$

Следовательно, условию задачи будут удовлетворять все плоскости, принадлежащие пучку плоскостей, проходящих через эту прямую.

Ответ: $\alpha(5x - y - 2z - 3) + \beta(3x - 2y - 5z + 2) = 0$.

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1;\ 2;\ -3)$ параллельно прямым $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-7}{3}$, $\dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+3}{-1}$.

Решение.



Отложим в искомой плоскости точки $M_1(1;\ 2;\ -3)$, $M(x;\ y;\ z)$ и векторы $\overrightarrow{a_1} = \{2;\ -3;\ 3\}$, $\overrightarrow{a_2} = \{3;\ -2;\ -1\}$. Тогда три вектора $\overrightarrow{M_1M} = \{x - 1; y - 2; z + 3\}$, $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a_2}$ будут компланарны. По условию компланарности трех векторов будем иметь:

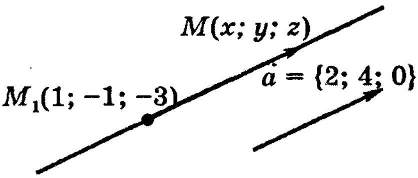
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ т. е. } 6x - 20y - 11z = 0.$$

Ответ: $6x - 20y - 11z = 0$.

Пример 4. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1;\ -1;\ -3)$ параллельно прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{0}$.

Решение.

Возьмем на искомой прямой точку $M(x;\ y;\ z)$ с текущими координатами, тогда векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{a}$ будут коллинеарны, т. е.



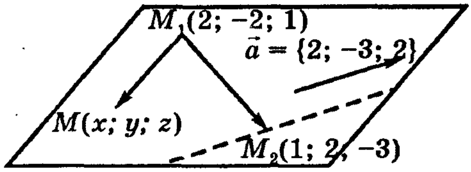
$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z+3}{0} = t$. Отсюда получаем $x = 2t + 1$, $y = 4t - 1$, $z = -3$.

Ответ: $x = 2t + 1$, $y = 4t - 1$, $z = -3$.

Пример 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2;\ -2;\ 1)$ и прямую $x = 2t + 1$, $y = -3t + 2$, $z = 2t - 3$.

Решение.

По уравнениям данной прямой находим точку прямой $M_2(1;\ 2;\ -3)$ и направляющий вектор прямой $\vec{a} = \{2;\ -3;\ 2\}$. Получаем три вектора, отложенные в искомой плоскости:



$\overrightarrow{M_1M} = \{x - 2;\ y + 2;\ z - 1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1;\ 4;\ -4\}$, $\vec{a} = \{2;\ -3;\ 2\}$.

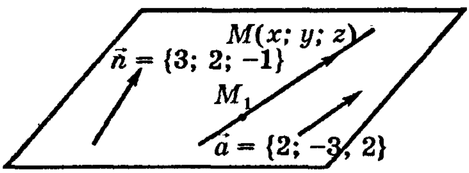
По условию компланарности трех векторов имеем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ т. е. } 4x + 6y + 5z - 1 = 0.$$

Ответ: $4x + 6y + 5z - 1 = 0$.

Пример 6. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x + 2y - z - 5 = 0$.

Решение.



Три вектора $\overrightarrow{M_1M}$, $\vec{a}$, $\vec{n}$ компланарны только тогда,

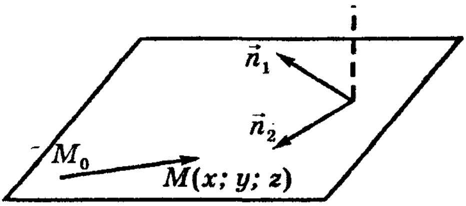
когда $\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, т. е. $x - 8y - 13z + 9 = 0$.

Ответ: $x - 8y - 13z + 9 = 0$.

Пример 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1; -2; 1)$ перпендикулярно прямой

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0, \\ x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

Решение.



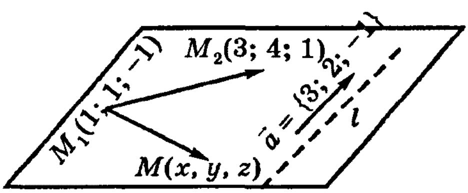
Так как искомая плоскость перпендикулярна прямой, заданной общими уравнениями, то нормальные векторы данных плоскостей можно отложить вместе с вектором $\overrightarrow{M_1M}$ в одной плоскости. Следовательно, векторы $\overrightarrow{M_1M} = \{x - 1; y + 2; z - 1\}$, $\overrightarrow{n_1} = \{1; -2; 1\}$, $\overrightarrow{n_2} = \{1; 1; -1\}$ компланарны. По условию компланарности трех векторов имеем:

$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, т. е. $x + 2y + 3z = 0$.

Ответ: $x + 2y + 3z = 0$.

Пример 8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 1; -1)$ и $M_2(3; 4; 1)$ параллельно прямой $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$ (l).

Решение.



Возьмем на искомой плоскости точку с текущими координатами, получим вектор $\overrightarrow{M_1M} = \{x - 1;\ y - 1;\ z + 1\}$.

Векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{a}$ компланарны. По условию компланарности трех векторов $\overrightarrow{M_1M_2} = \{2;\ 3;\ 2\}$, $\vec{a} = \{3;\ 2;\ -1\}$, $\overrightarrow{M_1M} = \{x-1;\ y-1;\ z+1\}$ имеем:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ т. е. } 7x - 8y + 5z + 6 = 0.$$

Ответ: $7x - 8y + 5z + 6 = 0$.

Пример 9. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(2;\ 3;\ 1)$ на плоскость $3x + y + 2z - 11 = 0$.

Решение.

Нормальный вектор $\vec{n} = \{3;\ 1;\ 2\}$ данной плоскости будет по условию направляющим вектором прямой, проходящей через точку $M_0(2;\ 3;\ 1)$.

Ее уравнение $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-1}{2}$.

Пример 10. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_1(3;\ 2;\ 1)$ на прямую $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+3}{1}$.

Решение.

Составим уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_1(3;\ 2;\ 1)$ перпендикулярно данной прямой (или перпендикулярно вектору $\vec{a} = \{2;\ 4;\ 1\}$ – направляющему вектору прямой):

$2 \cdot (x - 3) + 4 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 1) = 0$ или

$2x + 4y + z - 15 = 0$.

2) Составим уравнение плоскости, проходящей через данную точку и данную прямую. На данной прямой возьмем точку $M_2(0;\ 0;\ -3)$. Тогда надо найти вторую плоскость, проходящую через точки $M_1(3;\ 2;\ 1)$ и $M_2(0;\ 0;\ -3)$, и параллельную направляющему вектору данной прямой $\vec{a} = \{2;\ 4;\ 1\}$. Имеем $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-3;\ -2;\ -4\}$. Следовательно, уравнение второй плоскости

$$\begin{vmatrix} x & y & z+3 \\ -3 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 14x - 5y - 8z - 24 = 0.$$

Найденные плоскости пересекаются по прямой l, которая проходит через данную точку и перпендикулярна данной прямой, поэтому уравнения $\begin{cases} 2x + 4y + z - 15 = 0, \\ 14x - 5y - 8z - 24 = 0 \end{cases}$ и будут уравнениями прямой l – искомого перпендикуляра.

Ответ: $\begin{cases} 2x + 4y + z - 15 = 0, \\ 14x - 5y - 8z - 24 = 0. \end{cases}$

Пример 11. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-4;\ 3;\ 0)$ и параллельной прямой $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$

Решение.

Найдем направляющий вектор прямой $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$,

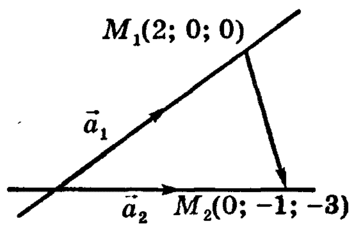
$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} = \{1;\ 3;\ 5\}$. Тогда уравнение искомой прямой есть $\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{5}$.

Ответ: $\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z}{5}$.

Пример 12. Найти прямую, проходящую через точку $M_0(-4;\ 3;\ 0)$ и перпендикулярную к прямым

$\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{1}$ и

$\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z+3}{-5}$.



Решение.

Вычислим направляющий вектор перпендикуляра к плоскости, проходящей через прямую параллельно другой прямой.

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 16\vec{j} + 14\vec{k}.$$

Тогда уравнение искомого перпендикуляра будет:

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y-3}{8} = \frac{z}{7}.$$

Ответ: $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-3}{8} = \dfrac{z}{7}$.

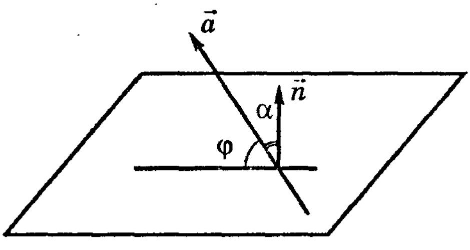
Пример 13. Заданы плоскость P: $x + y - z + 1 = 0$ и прямая L: $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$, причем $L \in P$.

Требуется найти:

а) угол между прямой и плоскостью;

б) координаты точек пересечения прямой и плоскости.

Решение.



а) $\cos(\vec{a}, \vec{n}) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$; $\vec{a} = \{0; 2; 1\}$,

$$\vec{n} = \{1; 1; -1\}, \sin\varphi = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{n})}{|\vec{a}|\,|\vec{n}|} = \frac{2-1}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}},$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

б) Найдем точку пересечения прямой и плоскости.

$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}=t$, или параметрически $x = 1$, $y = 2t$, $z = t - 1$.

Подставим параметрические уравнения прямой в уравнение плоскости, найдем значение t: $1 + 2t - t + 1 + 1 = 0$; $t = -3$. Тогда координаты точки пересечения прямой и плоскости будут: $x = 1$, $y = -6$, $z = -4$.

Ответ: а) $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{15}}$, б) $(1; -6; -4)$.

Пример 14. Определить косинус угла между прямыми:

$$\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0, \\ 2x + y - 2z - 4 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0, \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Найдем направляющие векторы данных прямых

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k},\ \vec{a} = \{2; -2; 1\}.$$

$$\overrightarrow{n_3} \times \overrightarrow{n_4} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -6 & -6 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -42\vec{i} - 21\vec{j} + 14\vec{k},\ \vec{a} = \{6; 3; -2\}.$$

$$\cos\varphi = \pm\frac{\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}}{|\overrightarrow{a_1}|\,|\overrightarrow{a_2}|} = \pm\frac{4}{21},\ \cos\varphi = \pm\frac{4}{21}.$$

Ответ: $\cos\varphi = \pm\frac{4}{21}$.

Пример 15. Найти проекцию точки $A(4; -3; 1)$ на плоскость $x + 2y - z = 3$.

Решение.

1) Найдем уравнение перпендикуляра, проходящего через точку $A(4; -3; 1)$, к плоскости $x + 2y - z - 3 = 0$.

Получим $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-1}=t$.

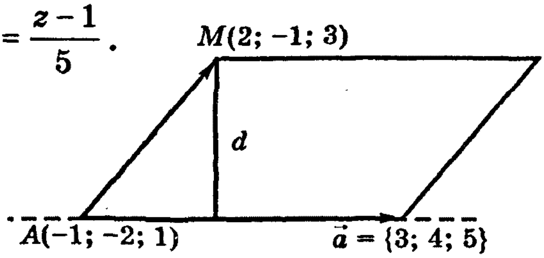
2) Найдем точку пересечения прямой и данной плоскости. Для этого подставим $x = t + 4$, $y = 2t - 3$, $z = -t + 1$ в уравнение плоскости. Будем иметь уравнение относительно параметра t: $t + 4 + 2(2t - 3) - (t + 1) - 3 = 0$; $6t = 6$; $t = 1$.

3) Подставляем найденное значение параметра $t = 1$ в параметрические уравнения прямой, получим $x_0 = 5$, $y_0 = -1$, $z_0 = 0$.

Ответ: (5; −1; 0).

Пример 16. Найдем расстояние точки $M(2; -1; 3)$ от прямой $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{5}$.

Решение.



$$d = \frac{\left|\vec{a} \times \overrightarrow{AM}\right|}{|\vec{a}|};\ \text{найдем}\ \vec{a} \times \overrightarrow{AM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\{\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}\},$$

$$\left|\vec{a} \times \overrightarrow{AM}\right| = 3\sqrt{19};\ |\vec{a}| = \sqrt{9 + 16 + 25} = 5\sqrt{2};$$

$$d = \frac{3\sqrt{19}}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{38}}{10};\ d = 0{,}3\sqrt{38}.$$

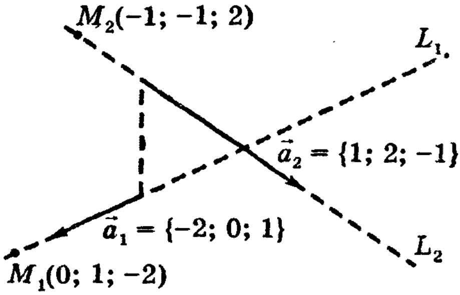
Ответ: $0{,}3\sqrt{38}$.

Пример 17. Заданы скрещивающиеся прямые L_1: $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z+2}{1}$ и L_2: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

Найти расстояние $d(L_1; L_2)$ между прямыми и написать уравнение общего перпендикуляра L к этим прямым.

Решение.

Найдем уравнение плоскости P, проходящей через прямую L_1, параллельную L_2.



Точка $M_1(0; 1; -2)$ лежит на прямой L_1 и, следовательно, принадлежит искомой плоскости P. В качестве нормального вектора к этой плоскости возьмем вектор

$$\vec{n} = [\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}.$$ Уравнение плоскости P: $-2x - (y-1) - 4(z+2) = 0$ или в общем виде $2x + y + 4z + 7 = 0$.

Расстояние $d(L_1, L_2)$ равно расстоянию от любой точки прямой L_2, например, точки $M_2(-1; -1; 2)$, до данной плоскости P.

$$d = \frac{|2x_0 + y_0 + 4z_0 + 7|}{\sqrt{4+1+16}} = \frac{|-2-1+8+7|}{\sqrt{21}} = \frac{12}{\sqrt{21}}.$$

2) Для того, чтобы составить уравнение общего перпендикуляра L, найдем уравнение плоскостей P_1 и P_2, проходящих через заданные прямые L_1 и L_2 соответственно и перпендикулярных плоскости P. Имеем: $M_1(0; 1; -2) \in P_1$ и $\overrightarrow{n_1} = [\overrightarrow{a_1} \times \vec{n}] = (\vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k}) \perp P_1$, откуда P_1: $x - 10y + 2z + 14 = 0$. Аналогично, $M_2(-1; -1; 2) \in P_2\,(\perp P)$ и $\overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{a_2} \times \vec{n}] = (-9\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}) \perp P_2$, откуда P_2: $3x - 2y - z + 3 = 0$. Так как $L = P_1 \cap P_2$, то $\begin{cases} x - 10y + 2z + 11 = 0, \\ 3x - 2y - z + 3 = 0; \end{cases}$ — общее уравнение прямой L.

Ответ: $d = \dfrac{12}{\sqrt{21}}$, $\begin{cases} x - 10y + 2z + 11 = 0, \\ 3x - 2y - z + 3 = 0. \end{cases}$

Пример 18. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1; 0)$ и пересекающей две прямые

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3} \text{ и } \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}.$$

Решение.

Искомую прямую можно рассматривать как прямую, по которой пересекаются две плоскости, проходящие через данную точку и одну из данных прямых.

Уравнения этих плоскостей:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ или}$$

$3y - z - 3 = 0$, $x - 3z - 2 = 0$ – искомые уравнения прямой.

Ответ: $3y - z - 3 = 0$, $x - 3z - 2 = 0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Даны две точки M (1; 3; 5) и K (7; 8; 9). Составить а) канонические и б) параметрические уравнения прямой, проходящей через данные точки M и K.

2. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2; 0; -3)$ параллельно:

а) вектору $\vec{a} = \{2; -3; 5\}$;

б) прямой $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$; в) оси Ox; г) оси Oy;

д) оси Oz.

3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки: а) (1; −2; 1), (3; 1; −1); б) (3; −1; 0), (1; 0; −3); в) (0; −2; 3), (3; −2; 1); г) (1; 2; −4), (−1; 2; −4).

4. Составить канонические уравнения следующих прямых:

а) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0. \end{cases}$

5. Доказать параллельность прямых:

а) $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0; \end{cases}$

б) $x = 2t + 5$, $y = -t + 2$, $z = t - 7$ и $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0, \\ x - y + z + 3 = 0; \end{cases}$ и $\begin{cases} x + 2y - 5z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3z - 9 = 0. \end{cases}$

6. Доказать перпендикулярность прямых:

а) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $\begin{cases}3x+y-5z+1=0,\\2x+3y-8z+3=0;\end{cases}$

б) $x=2t+1,\ y=3t-2,\ z=-6t+1$ и $\begin{cases}2x+y-4z+2=0,\\4x-y-5z+4=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+y-3z-1=0,\\2x-y-9z-2=0\end{cases}$ и $\begin{cases}2x+y+2z+5=0,\\2x-2y-z+2=0.\end{cases}$

7. Найти острый угол между прямыми:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}},\quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

8. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M_1(-1;\ 2;\ -3)$ перпендикулярно вектору $\vec{a}=\{6;\ -2;\ -3\}$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$.

9. Найти координаты точки K пересечения прямой:

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ с плоскостью: $2x+5y-3z=0$.

10. Вычислить расстояние d точки $P\,(1;\ -1;\ -2)$ от прямой $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-3}{-2},\quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

12. Найти точку Q, симметричную точке $P(3;\ -4;\ -6)$ относительно плоскости, проходящей через $M_1(-6;\ 1;\ -5)$, $M_2(7;\ -2;\ -1)$ и $M_3(10;\ -7;\ 1)$.

13. Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми в каждом из следующих случаев:

а) $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$; $\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$;

б) $x=2t-4,\ y=-t+4,\ z=-2t-1$;
$x=4t-5,\ y=-3t+5,\ z=-5t+5$;

в) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$; $x=6t+9,\ y=-2t,\ z=-t+2$.

Ответы:

1. а) $\dfrac{x-7}{6}=\dfrac{y-8}{5}=\dfrac{z-9}{4}$; б) $x=6t+7$, $y=5t+8$, $z=4t+9$;

2. а) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+3}{5}$; б) $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$;

в) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{0}$; г) $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{0}$;

д) $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{1}$;

3. а) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$; б) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{3}$;

в) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-3}{-2}$; г) $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+4}{0}$;

4. а) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z}{4}$; б) $\dfrac{x}{-5}=\dfrac{y+1}{12}=\dfrac{z-1}{13}$;

в) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{1}$; **7.** 60°;

8. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{6}$; **9.** $K\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{5}{7};\dfrac{9}{7}\right)$;

10. $d=7$; **11.** $6x-20y-11z+1=0$; **12.** $Q(1;-2;2)$;
13. а) 13; б) 3; в) 7.

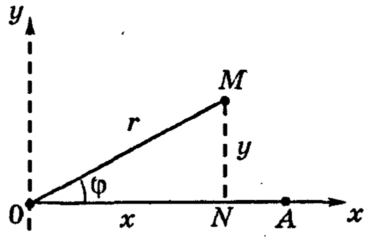
2.4. Полярная система координат

Определение 1. *Полярная система координат* определяется заданием некоторой точки O, называемой *полюсом*, луча OM, исходящего из этой точки, называемого *полярной осью*, и масштаба для измерения длин. При повороте луча OM вокруг точки O положительным обычно считается поворот против часовой стрелки.

Определение 2. *Полярными координатами* произвольной точки M (относительно заданной системы) называются числа $r=OM$ и $\varphi=\angle AOM$. Число r называется первой координатой, или полярным радиусом, число φ – второй координатой, или полярным углом точки M.

Значение полярного угла изменяется в пределах $-\pi < \varphi < +\pi$.

Зависимость между полярными координатами (r, φ) точки и прямоугольными координатами (x, y) той же точки, если полюс принят за начало координат, а полярная ось за ось Ox, выражается формулами:



$$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi$$

и, обратно, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$.

2.5. Линии второго порядка

Кривыми второго порядка называются линии, определяемые в декартовых координатах алгебраическими уравнениями *второй степени*. В частности, окружность, эллипс, гипербола и парабола являются такими линиями.

Этими четырьмя линиями и случаями их вырождения, когда уравнение второй степени определяет пустое множество (мнимая кривая), точку, прямую, пару прямых, исчерпываются все линии, определяемые алгебраическими уравнениями второй степени.

Окружность

Определение 1. *Окружностью* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (*центра*).

Если R – *радиус* окружности, а $C(a, b)$ – ее центр, то уравнение окружности имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (*)$$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение окружности (*) примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Взаимное расположение точки $M_1(x_1, y_1)$ и окружности $x^2 + y^2 = R^2$ определяется такими условиями:

если $x_1^2 + y_1^2 = R^2$, то точка M лежит на окружности;

если $x_1^2 + y_1^2 > R^2$, то точка M лежит вне окружности;

если $x_1^2 + y_1^2 < R^2$, то точка M лежит внутри окружности.

Пример 1. Написать уравнение окружности радиуса $R = 8$ с центром в точке $C(2; -5)$.

Решение.

Подставив значения координат точки C и значение радиуса в формулу (1), получим

$(x - 2)^2 + (y - (-5))^2 = 8^2$ или $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 8^2$.

Ответ: $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 8^2$.

Пример 2. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$ является уравнением окружности. Найти ее центр и радиус.

Решение.

Преобразуем левую часть данного уравнения, выделив полные квадраты относительно x и y:

$x^2 + 8x + 16 - 16 + y^2 - 4y + 4 - 4 - 5 = 0$, или

$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$. Это уравнение представляет собой уравнение окружности с центром $C(-4; 2)$ и радиусом, равным 5.

Ответ: $C(-4; 2)$, $R = 5$.

Пример 3. Найти координаты центра и радиус окружности $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$.

Решение.

Разделив уравнение на 2 и сгруппировав члены уравнения, получим $x^2 - 4x + y^2 + \frac{5}{2}y = 2$. Дополним выражения $x^2 - 4x$ и $y^2 + \frac{5}{2}y$ до полных квадратов, прибавив к первому двучлену 4 и ко второму – $\left(\frac{5}{4}\right)^2$, одновременно к правой части прибавляется сумма этих чисел:

$$(x^2 - 4x + 4) + \left(y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) = 2 + 4 + \frac{25}{16}, \text{ или}$$

$(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}$. Таким образом, координаты центра окружности $a=2$, $b=-\frac{5}{4}$, а радиус окружности $R=\frac{11}{4}$.

Ответ: $C\left(2;-\frac{5}{4}\right)$, $R=\frac{11}{4}$.

Пример 4. Показать, что уравнение $x^2+y^2+6x-6y+22=0$ не определяет никакой линии.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$(x^2+6x+9)+(y^2-6y+9)-9-9+22=0$,

$(x+3)^2+(y-3)^2=-4$.

Данное уравнение не определяет никакой линии. Такое уравнение называется уравнением мнимой окружности.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 5. Установить, как расположена точка $A(1;-2)$ относительно окружности $x^2+y^2=1$ – внутри, вне или на контуре.

Решение.

Подставим координаты точки $A(1;-2)$ в уравнение окружности, получим $1^2+(-2)^2=5>1$. Следовательно, точка A лежит вне окружности.

Ответ: точка A лежит вне окружности.

Пример 6. Установить, какую линию определяет следующее уравнение: $y=\sqrt{9-x^2}$.

Решение.

По определению арифметического корня четной степени $y\geq 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат: $y^2=9-x^2$, или $x^2+y^2=9$ – это уравнение окружности с центром в начале координат радиусом $R=3$. Но по условию $y\geq 0$. Значит, данное уравнение определяет полуокружность радиуса $R=3$ с центром в начале координат, расположенная в верхней полуплоскости.

Ответ: данное уравнение – полуокружность радиуса $R=3$ с центром $O(0;0)$, расположенная в верхней полуплоскости.

Пример 7. Окружность задана уравнением в декартовых прямоугольных координатах $x^2 + y^2 = x$. Составить уравнение этой окружности в полярных координатах при условии, что полярная ось совпадает с положительной полуосью Ox, а полюс – с началом координат.

Решение.

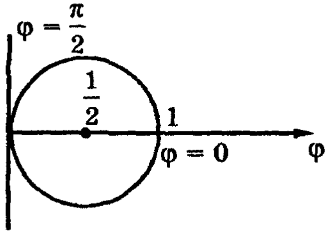
Связь полярной и декартовой прямоугольной системы координат определяется формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \quad -\pi < \varphi < +\pi.$$

Подставим x и y из этих формул в данное уравнение, получим $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho\cos\varphi$, или $\rho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \rho\cos\varphi$, или $\rho^2 = \rho\cos\varphi$ $(\rho > 0)$. Окончательно, уравнение данной окружности в полярной системе координат будет $\rho = \cos\varphi$.

Построим эту окружность.

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0



Функция $\cos\varphi$ – четная, поэтому кривая будет симметрична относительно полярной оси.

Получим окружность с центром $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ и $R = 1$.

Ответ: $\rho = \cos\varphi$.

Пример 8. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(7;\ 7)$ и $B(-2;\ 4)$, если ее центр лежит на прямой $2x - y - 2 = 0$.

Решение.

Уравнение окружности: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Так как точки A и B лежат на данной окружности, то координаты этих точек будут удовлетворять уравнениям:

$$\begin{cases} (7 - a)^2 + (7 - b)^2 = R^2, \\ (-2 - a)^2 + (4 - b)^2 = R^2, \\ 2a - b - 2 = 0; \end{cases}$$ (центр окружности по условию лежит на прямой).

Раскроем скобки:

$$\begin{cases} 49-14a+a^2+49-14b+b^2=R^2, \\ 4+4a+a^2+16-8b+b^2=R^2, \\ 2a-b-2=0. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\begin{cases} 18a+6b=78, \\ 2a-b=2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2a-b=2, \\ 3a+b=13. \end{cases}$$

Сложим эти уравнения, получим:
$5a = 15$, $a = 3$, тогда $b = 2a - 2 = 2 \cdot 3 - 2 = 4$.

Итак, $a = 3$, $b = 4$. Из второго уравнения первой систмы найдем $R = 5$.

Искомая окружности – $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

Ответ: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

Эллипс

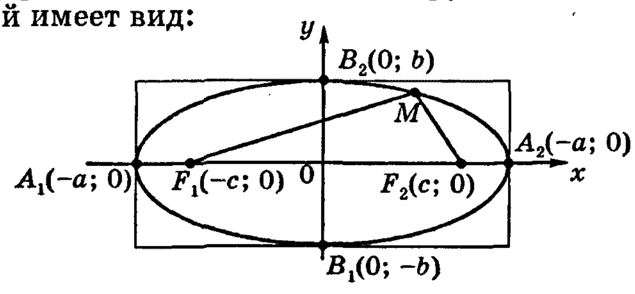
Определение 2. *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$.

Каноническое уравнение эллипса в прямоугольной системе координат $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $b^2 = a^2 - c^2$.

Определение 3. Величины a и b называются соответственно *большой* и *малой* полуосями эллипса ($a > b$). Фокусы эллипса расположены в точках $F_2(-c; 0)$, $F_1(+c; 0)$, точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ – *вершины* эллипса, оси координат Ox и Oy – оси симметрии, а начало координат $O(0, 0)$ – центр симметрии эллипса.

Определение 4. Число $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$ $(0 \le e \le 1)$ называется *эксцентриситетом* эллипса, он является мерой «сжатости» к оси Ox (при $e = 0$ эллипс является окружностью).

Форма кривой имеет вид:



$$MF_1 + MF_2 = 2a,\ F_1F_2 = 2c,\ a > c.$$

Уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M_0(x_0;\, y_0)$ имеет вид: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Пример 9. Найти каноническое уравнение эллипса, зная его большую полуось $a = 5$ и эксцентриситет $e = 0{,}6$.

Решение.

По условию $e = \frac{c}{a} = 0{,}6$. Следовательно, $c = a \cdot 0{,}6 = 5 \cdot 0{,}6 = 3$. Но тогда квадрат малой полуоси эллипса $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$. Таким образом, искомое каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Пример 10. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M_1(2;\, -3)$ и имеющего большую полуось $a = 4$.

Решение.

Каноническое уравнение эллипса при $a = 4$ имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (**)$$

Этому уравнению должны удовлетворять координаты точки $M_1(2;\, -3)$. Следовательно, $\frac{2^2}{16} + \frac{(-3)^2}{b^2} = 1$. Найдя отсюда $b^2 = 12$ и подставив его в уравнение (**), получим искомое каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Пример 11. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M\left(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ и $N\left(-2; \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$

Решение.

Пусть $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – искомое уравнение эллипса. Этому уравнению должны удовлетворять координаты точек. Следовательно,

$$\frac{25}{4a^2}+\frac{3}{8b^2}=1,\ \frac{4}{a^2}+\frac{3}{5b^2}=1.$$

Отсюда находим $a^2=10$, $b^2=1$. Итак, уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{10}+y^2=1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{10}+y^2=1.$

Пример 12. Составить уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ в точке (3; 1).

Решение.

Так как уравнение касательной прямой к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке $M_1(x_1; y_1)$ имеет вид: $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$, то искомое уравнение касательной к данной кривой будет: $\frac{3x}{12}+\frac{1\cdot y}{4}=1$.

Ответ: $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$, или $x+y-4=0$.

Пример 13. Дан эллипс $25x^2+144y^2=1$. Определить, лежит ли точка $A\left(1; \frac{1}{16}\right)$ на эллипсе, внутри или вне его.

Решение. Подставим координаты точки A в левую часть эллипса.

$$25 \cdot 1 + 144 \cdot \frac{1}{16^2} = 25 + \frac{144}{16^2} = 25 + \frac{9}{16} > 1.$$

Ответ: вне эллипса.

Пример 14. Написать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M(6; 0)$, если фокальное расстояние равно 4.

Решение. Подставим координаты точки $M(6; 0)$ в каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, получим $\frac{36}{a^2} = 1$, отсюда $a^2 = 36$. Найдем $b^2 = a^2 - c^2$, где c – половина фокального расстояния эллипса. По условию $c = 2$. Тогда $b^2 = 36 - 4 = 32$. Итак, искомым уравнением эллипса будет уравнение $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$.

Ответ: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$.

Пример 15. Доказать, что уравнение $64x^2 + 100y^2 - 6400 = 0$ является уравнением эллипса. Найти координаты фокусов и фокальное расстояние.

Решение. Разделив обе части уравнения на 6400, получим: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$. Это уравнение является каноническим уравнением эллипса. Из равенства $a^2 - c^2 = b^2$ следует, что $c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 64 = 36$ и $c = 6$. Фокусы эллипса будут находиться в точках $F_2(-6; 0)$ и $F_1(6; 0)$. Фокальное расстояние $2c = 12$.

Ответ: $F_1(6; 0)$, $F_2(-6; 0)$, $2c = 12$.

Пример 16. В эллипс $x^2 + 4y^2 = 4$ вписан правильный треугольник, одна из вершин которого совпадает с концом большой полуоси. Определить координаты двух других вершин треугольника.

Решение. Пусть одна из вершин правильного треугольника совпадает с левым концом большой полуоси. Так как каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$, то левым концом большой полуоси будет точка $A_2(-2, 0)$. Так как вписанный треугольник равносторонний, то сторона, расположенная в верхней полуплоскости, будет наклонена к положительному направлению оси Ox под углом 30°. Поэтому угловой коэффициент прямой, на которой лежит сторона треугольника, будет равен $k = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тогда уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$, проходящей через точку A_2 будет: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$.

Найдем точки пересечения этой прямой с эллипсом. Подставим в данное уравнение эллипса $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$:

$x^2 + 4 \cdot \frac{1}{3}(x+2)^2 = 4$, или $3x^2 + 4(x^2 + 4x + 4) = 12$, т.е. $7x^2 + 16x + 4 = 0$. Отсюда находим:

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-28}}{7} = \frac{-8 \pm 6}{7};\ x_1 = -2,\ x_2 = -\frac{2}{7};$$

$(A_2(-2; 0))$. Таким образом, абсцисса точек пересечения сторон треугольника равна $-\frac{2}{7}$. Найдем соответствующие ординаты этих точек. Подставим $x = -\frac{2}{7}$ в данное уравнение эллипса, получим

$$\frac{4}{49} + 4y^2 = 4,\ 4y^2 = 4\left(1 - \frac{1}{49}\right),\ y^2 = \frac{48}{49},\ y = \pm\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$ Итак, получим точки $M_1\left(-\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ и $M_2\left(-\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

Ответ: $M_1\left(-\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, $M_2\left(-\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

Замечание. Задача имеет два решения. Если за вершину равностороннего треугольника возьмем правый конец большой полуоси, то получим остальные вершины треугольника: $M_1\left(-\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, $M_2\left(-\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

Пример 17. Эллипс, симметричный относительно осей координат, фокусы которого находятся на оси Ox, проходит через точку $M(-4; \sqrt{21})$ и имеет эксцентриситет $e = \frac{3}{4}$. Написать уравнение эллипса.

Решение. Каноническое уравнение эллипса:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $c^2 = a^2 - b^2$. По условию: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$, т. е. $\frac{c^2}{a^2} = \frac{9}{16}$, или $c^2 = \frac{9}{16}a^2$, $a^2 - b^2 = \frac{9}{16}a^2$. Отсюда $\frac{7}{16}a^2 = b^2$.

Так как точка $M(-4; \sqrt{21})$ принадлежит эллипсу, то ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса: $\frac{16}{a^2} + \frac{21}{b^2} = 1$. Для нахождения величины a^2 подставим в это равенство $b^2 = \frac{7}{16}a^2$, получим $\frac{16}{a^2} + \frac{21 \cdot 16}{7a^2} = 1$, или $16 \cdot \frac{4}{a^2} = 1$, $a^2 = 4 \cdot 16 = 64$.

Найдем $b^2 = \frac{7}{16}a^2$, $b^2 = \frac{7}{16} \cdot 64 = 28$.

Итак, искомое уравнение эллипса есть $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$.

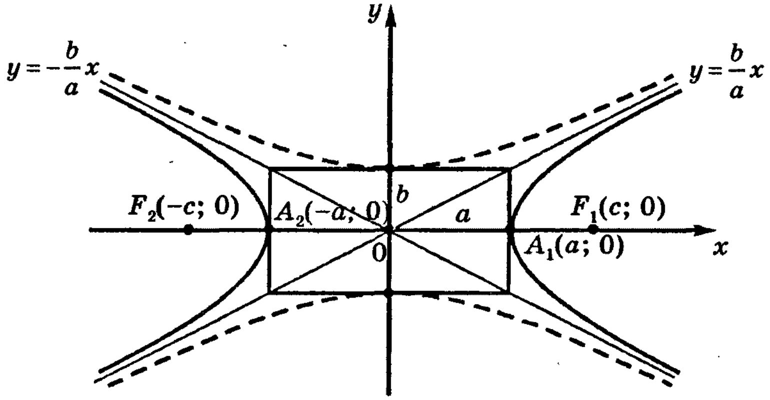
Ответ: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$.

Гипербола

Определение 5. *Гиперболой* называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$. *Каноническое уравнение гиперболы* в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $b^2=c^2-a^2$.

Расстояние между фокусами равно $2c$ $(c>a)$.

Форма кривой имеет вид:



$F_1(c;\ 0)$, $F_2(-c;\ 0)$ – *фокусы гиперболы*, $F_1F_2=2c$.

Величины a и b – *полуоси гиперболы.*

Оси координат являются осями симметрии гиперболы, ось Ox называется *действительной осью*, ось Oy – *мнимой осью* гиперболы, $O(0;\ 0)$ – центр симметрии гиперболы.

Точки $A_1(a;\ 0)$, $A_2(-a;\ 0)$ являются вершинами гиперболы.

Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются *асимптотами* гиперболы.

Число $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ $(e>1)$ является *эксцентриситетом* гиперболы.

Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ называется *сопряженной* с гиперболой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Уравнение *касательной* в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ к гиперболе дается уравнением $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

Пример 18. Написать каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(8\sqrt{5}\,;\,12)$, если фокальное расстояние гиперболы равно 20.

Решение.

По условию $2c = 20$, или $c = 10$. Запишем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

По условию точка $M(8\sqrt{5}\,;\,12)$ принадлежит гиперболе, следовательно, $\frac{320}{a^2} - \frac{144}{b^2} = 1$.

Второе уравнение для определения a^2 и b^2 дает соотношение $b^2 = c^2 - a^2 = 100 - a^2$.

Решив систему уравнений $\begin{cases} \frac{320}{a^2} - \frac{144}{b^2} = 1, \\ b^2 = 100 - a^2 \end{cases}$ относительно a^2 и b^2 ($a > 0$, $b > 0$), найдем $a^2 = 64$, $b^2 = 36$. Искомым уравнением будет уравнение $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Ответ: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Пример 19. Доказать, что уравнение $21x^2 - 43y^2 = 903$ является уравнением гиперболы. Найти координаты фокусов.

Решение.

Разделив обе части уравнения на 903, получим:

$$\frac{x^2}{43} - \frac{y^2}{21} = 1.$$

Это уравнение гиперболы, для которой $a^2 = 43$, $b^2 = 21$. Из соотношения $c^2 = a^2 + b^2$ находим $c^2 = 64$ и $c = 8$ ($c > 0$). Следовательно, фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(8; 0)$ и $F_2(-8; 0)$.

Ответ: $F_1(8; 0)$ и $F_2(-8; 0)$.

Пример 20. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояние между ее фокусами равно 26, а эксцентриситет равен $\frac{13}{12}$.

Решение.

По условию $2c = 26$ и $e = \frac{13}{12} = \frac{c}{a}$. Следовательно, большая полуось гиперболы $a = \frac{12}{13}c = \left(\frac{12}{13}\right)\cdot\left(\frac{26}{2}\right) = 12$. По формуле $c^2 - a^2 = b^2$ находим малую полуось гиперболы $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Уравнение гиперболы имеет следующий вид: $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Ответ: $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Пример 21. Гипербола, оси которой совпадают с осями координат, проходит через точки $M_1\left(-3; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $M_1(4; -2)$. Найти ее каноническое уравнение.

Решение.

Напишем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты точек $M_1\left(-3; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $M_1(4; -2)$.

Следовательно, $\frac{(-3)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2} = 1$ и $\frac{4^2}{a^2} - \frac{(-2)^2}{b^2} = 1$,

или $\frac{9}{a^2} - \frac{\frac{1}{2}}{b^2} = 1$ и $\frac{16}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$.

Отсюда находим $a^2 = 8$ и $b^2 = 4$ и подставляем их в каноническое уравнение гиперболы; окончательно получим

$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1.$

Ответ: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1.$

Пример 22. Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{3};\ \sqrt{2})$.

Решение.

Известно, $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$, или $c^2 = 2a^2$. Но $c^2 = a^2 + b^2$, следовательно, $a^2 + b^2 = 2a^2$, $a^2 = b^2$, т. е. гипербола равнобочная.

Другое равенство получим из условия нахождения точки M на гиперболе, т. е. $\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1$, или $\frac{3}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1$.

Поскольку $a^2 = b^2$, получим $\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{2})^2}{a^2} = 1$, т. е. $a^2 = 1$.

Таким образом, уравнение искомой гиперболы $x^2 - y^2 = 1$.

Ответ: $x^2 - y^2 = 1$.

Пример 23. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ в точке $M\left(3; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Решение.

Уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид: $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Поэтому уравнение искомой касательной есть

$\frac{3x}{4} - \frac{\sqrt{5}y}{2} = 1$, или $3x - 2\sqrt{5} - 4 = 0$.

Ответ: $3x - 2\sqrt{5} - 4 = 0$.

Пример 24. Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнение асимптот.

Решение.

Разделив обе части уравнение на 144, получим:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

1) Полуоси гиперболы $a = \sqrt{9} = 3$, $b = \sqrt{16} = 4$.

2) Так как $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, то $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Фокусы данной гиперболы есть $F_2(-5; 0)$ и $F_1(5; 0)$.

3) Эксцентриситет гиперболы $e = \frac{c}{a}$, значит, $e = \frac{5}{3}$.

4) Уравнения асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$. Поэтому $y = \pm\frac{4}{3}x$.

Ответ: 1) $a = 3$, $b = 4$; 2) $F_2(-5; 0)$, $F_1(5; 0)$; 3) $e = \frac{5}{3}$;

4) $y = \pm\frac{4}{3}x$.

Пример 25. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = +\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$; 2) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$.

Решение.

1) По свойству арифметического корня четной степени $y \geq 0$. Возведем данное уравнение в квадрат, получим $y^2 = \frac{4}{9}(x^2 - 9)$, или $9y^2 = 4x^2 - 36$, $4x^2 - 9y^2 = 36$. Разделив обе части этого уравнения на 36, получим: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

2) Очевидно, что в уравнении $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$, $y < 0$ для всех $x \in R$. Возведем данное уравнение в квадрат, получим $y^2 = 9(x^2 + 1)$, или $y^2 = 9x^2 + 9$, $9x^2 - y^2 = -9$. Разделим обе части этого уравнения на 9, получим $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = -1$. Полу-

чили ветвь гиперболы, расположенную в нижней полуплоскости. Заметим, гиперболы $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ и $x^2-\frac{y^2}{9}=-1$ сопряженные.

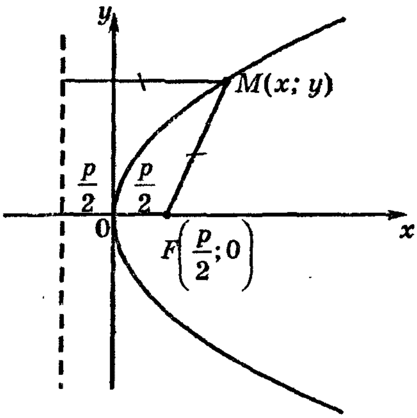
Ответ: 1) часть гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$, расположенная в верхней полуплоскости; 2) часть гиперболы $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{9}=-1$, расположенная в нижней полуплоскости.

Парабола

Определение 6. *Параболой* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой.*

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2=2px,\ p>0.$$



Определение 7. Число p называется *параметром* параболы. Начало координат $O(0;\ 0)$ – ее *вершина*, а ось Ox – *ось симметрии* параболы.

Точка $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ – *фокус* параболы, прямая $x=-\frac{p}{2}$ – *директриса* параболы.

Уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид $yy_0 = p(x + x_0)$.

Пример 26. Дана парабола $y^2 = 6x$. Составить уравнение ее директрисы и найти ее фокус.

Решение.

Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением параболы, видим, что $2p = 6$, $p = 3$. Так как уравнение директрисы имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$, а фокус – координаты $\frac{p}{2}$ и 0, то для рассматриваемого случая получим уравнение директрисы $x = -\frac{3}{2}$ и фокус $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Ответ: $x = -\frac{3}{2}$, $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Пример 27. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox, с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси Ox, равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 6.

Решение.

Так как известны длина хорды и расстояние ее от вершины, то, следовательно, известны координаты конца этой хорды – точки M, лежащей на параболе. Уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$; полагая в нем $x = 6$, $y = 8$, находим $8^2 = 2p \cdot 6$, откуда $2p = \frac{32}{3}$. Итак, уравнение искомой параболы $y^2 = \frac{32}{3}x$.

Ответ: $y^2 = \frac{32}{3}x$.

Пример 28. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $A(9; 6)$;

2) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $C(1; 1)$.

Решение.

1) Так как точка $A(9; 6)$ лежит на параболе $y^2 = 2px$, ее координаты должны удовлетворять уравнению параболы, а потому имеем $6^2 = 2p \cdot 9$, или $2p = 4$. Следовательно, искомое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 4x$.

Ответ: $y^2 = 4x$.

2) Так как парабола симметрична относительно оси Oy, то ее уравнение $-x^2 = +2py$. Точка $C(1; 1)$ лежит на данной параболе, значит, координаты этой точки удовлетворяют уравнению параболы: $1 = +2p \cdot 1$, или $2p = +1$;

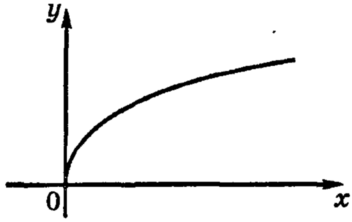
Следовательно, уравнение искомой параболы $x^2 = y$.

Ответ: $x^2 = y$.

Пример 29. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

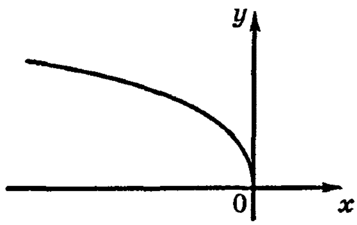
1) $y = +2\sqrt{x}$; 2) $y = +\sqrt{-x}$.

Решение. 1) Область определения функции $y = 2\sqrt{x}$ есть $x \geq 0$, при этом $y \geq 0$. Возведем обе части уравнения в квадрат, получим $y^2 = 4x$ и $y \geq 0$. Следовательно, это есть часть параболы $y^2 = 4x$, расположенная в первом координатном углу.



Ответ: часть параболы $y^2 = 4x$, расположенная в первом координатном углу.

2) Область определения функции $y = +\sqrt{-x}$ есть $-x \geq 0$, или $x \leq 0$. Кроме того, $\sqrt{x} \geq 0$, значит, $y \geq 0$. Возведем обе части уравнения $y = +\sqrt{-x}$ в квадрат, получим $y^2 = -x$ и $y \geq 0$. Следовательно, это есть часть параболы $y^2 = -x$, расположенная во втором координатном углу.



Ответ: часть параболы $y^2 = -x$, расположенная во втором координатном углу.

Пример 30. Дана парабола $y^2 = 3x$. Найти точки параболы, расстояние от которых до фокуса равно 1.

Решение.

Так как $2p = 3$, то $\frac{p}{2} = \frac{3}{4}$ и фокус параболы находится в точке $F\left(\frac{3}{4}; 0\right)$. Пусть $M(x; y)$ – искомая точка, принадлежащая параболе. Так как по условию расстояние от этой точки до фокуса равно единице, то для нахождения координат x и y нужно решить систему уравнений $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = 1$, $y^2 = 3x$.

Решая эту систему уравнений, получаем: $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = 1$, $x + \frac{3}{4} = 1$, $x = \frac{1}{4}$.

Тогда $y^2 = 3x = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ и $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом, существуют две точки, расстояние от которых до фокуса равно 1: $\left(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Пример 31. Написать уравнение касательной к параболе $y^2 = 8x$, параллельной прямой $2x + 2y - 3 = 0$.

Решение. Уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ есть уравнение $yy_0 = p(x + x_0)$.

Сравнивая уравнения $y^2 = 8x$ и $y^2 = 2px$, имеем $2p = 8$, или $p = 4$.

Тогда уравнение касательной примет вид $yy_0 = 4(x + x_0)$, или $yy_0 = 4x + 4x_0$, откуда $y = \frac{4}{y_0}x + 4\frac{x_0}{y_0}$.

Так как касательная параллельна прямой $2x + 2y - 3 = 0$, то их угловые коэффициенты равны, т. е.

$$y = -x + \frac{3}{2} \text{ и } y = \frac{4}{y_0}x + 4\frac{x_0}{y_0} \text{ и } k = -1 = \frac{4}{y_0}.$$

Отсюда находим $y_0 = -4$. Из уравнения параболы $y^2 = 8x$ найдем вторую координату точки касания $M_0(x_0, y_0)$:

$$(-4)^2 = 8x_0;\ x_0 = \frac{16}{8} = 2,\ M_0(2; -4).$$

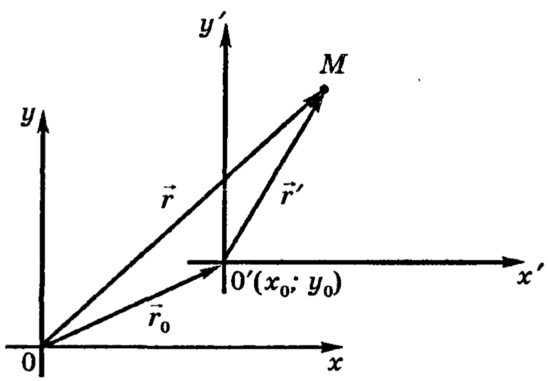
Тогда уравнение касательной будет $yy_0 = 4x + 4x_0$, или $y \cdot (-4) = 4x + 4 \cdot 2$, т. е. $y = -x - 2$, или $x + y + 2 = 0$.

Ответ: $x + y + 2 = 0$.

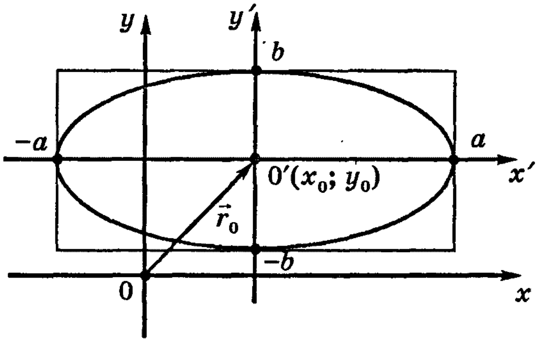
Уравнения кривых второго порядка в смещенной системе координат

Выведем формулы параллельного переноса осей координат в точку $M_0(x_0; y_0)$. Пусть система координат $x'O'y'$ получена из системы прямоугольных декартовых координат xOy параллельным переносом на вектор $\vec{r}_0 = \{x_0; y_0\}$.

По правилу треугольника для векторов $\vec{r}' = \{x'; y'\}$, $\vec{r}_0 = \{x_0; y_0\}$ и $\vec{r} = \{x; y\}$ имеем: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$, или в координатной форме: $\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0; \end{cases}$ – формулы перехода от координатной системы xOy к координатной системе $x'O'y'$.



Пусть эллипс имеет в качестве большой и малой осей соответственно $2a$ и $2b$.



Построить эллипс с осями $2a$ и $2b$ в новой системе координат; его каноническое уравнение будет

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Возвратимся к старой системе координат, получим

$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – уравнение эллипса с центром в точке $M_0(x_0;\ y_0)$, оси симметрии которого параллельны координатным осям Ox и Oy.

В результате очевидных преобразований имеем:

$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, где

$$A=\frac{1}{a^2},\ C=\frac{1}{b^2},\ D=-\frac{x_0}{a^2},\ E=-\frac{y_0}{b^2},\ F=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1.$$

Так как $A>0$, $C>0$, то для эллипса $AC>0$. Справедливо и обратное.

Аналогично, введем уравнение гиперболы в новой системе координат $x'O'y'$.

$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – уравнение гиперболы с центром в точке $M_0(x_0;\ y_0)$, оси симметрии которой параллельны координатным осям Ox и Oy. В развернутом виде:

$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, где

$$A=\frac{1}{a^2},\ C=-\frac{1}{b^2},\ D=-\frac{x_0}{a^2},\ E=\frac{y_0}{b^2},\ F=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1.$$

Очевидно, для гиперболы $AC < 0$. Справедливо и обратное.

Уравнение параболы в смещенной системе координат. Аналогично, получим $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Раскрывая скобки, получим $Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, где $C = 1$, $D = -2p$, $E = -2y_0$, $F = y_0^2 + 2px_0$.

Очевидно, для параболы $AC = 0$ (так как $A = 0$). Справедливо и обратное.

Если оси координат Ox и Oy поменять ролями, то получим уравнение параболы с осью симметрии Oy в виде: $Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$. И вновь, для параболы $AC = 0$ (так как $C = 0$).

Алгебраические кривые второго порядка

Определение 8. *Алгебраической кривой* второго порядка называется кривая L, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где не все коэффициенты A, B, C равны одновременно нулю (в противном случае L – прямая, т. е. алгебраическая кривая первого порядка).

Если $B = 0$, то уравнение примет вид

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

К такому виду можно привести исходное уравнение с помощью формул *поворота* осей координат на угол α

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

где α определяется равенством

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B}(B \neq 0).$$

Справедливо утверждение.

Если $AC - B^2 > 0$, то имеет место кривая эллиптического вида (эллипс, либо окружность, либо точка, либо мнимая кривая); если $AC - B^2 < 0$, то уравнение определяет кривую гиперболического типа (гипербола, сопряженная ей гипербола, либо пара пересекающихся действительных прямых);

если $AC - B^2 = 0$, то L является кривой параболического типа (парабола, либо пара действительных параллельных прямых, либо две совпадающие параллельные прямые, либо мнимая кривая).

Случаи, когда уравнение определяет пустое множество (мнимая кривая), точку, прямую, пару прямых называют случаями вырождения кривой, а перечисленные множества – вырожденными кривыми.

Если же кривая L – невырожденная, то для нее найдется такая декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение этой кривой имеет один из трех видов (каноническое уравнение):

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a \ge b > 0$ – окружность, эллипс,

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a > 0$, $b > 0$ – гипербола,

$y^2 = 2px$, $p > 0$ – парабола.

Пример 32. Упростить уравнение $x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y + 3 = 0$ и установить вид кривой.

Решение.

Повернем оси координат на угол α, найдя $\operatorname{ctg} 2\alpha$ по формуле $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{A-C}{2B}$. В данном случае $A = 1$, $C = 1$ и $B = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{1-1}{1} = 0$ и $2\alpha = 90^\circ$. Отсюда $\alpha = 45^\circ$. Так как $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, то формулы преобразования примут вид $x = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$.

Подставляя эти выражения x и y в данное уравнение, получим

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2-$$

$$-3\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)-6\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+3=0.$$

Произведя упрощения, будем иметь

$$3x'^2+y'^2-9\sqrt{2}\,x'-3\sqrt{2}\,y'+6=0.$$

Как и следовало ожидать, полученное уравнение не содержит члена с произведением переменных. Выделяя полные квадраты, придем к уравнению

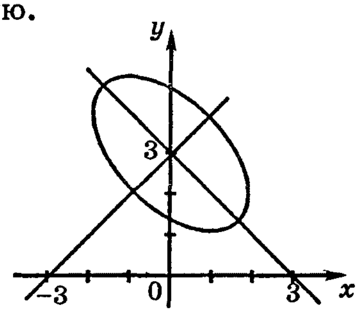
$$3\left(x'-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y'-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2=12 \text{ или}$$

$$\frac{\left(x'-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{4}+\frac{\left(y'-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{12}=1.$$

Таким образом, исходное уравнение представляет эллипс с полуосями 2 и $2\sqrt{3}$. Чтобы найти координаты центра этого эллипса в системе координат xOy, подставим координаты точки $O_1\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, именно,

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=0,\quad y=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=3.$$

Таким образом, центр эллипса имеет координаты (0; 3). Построим кривую.



Ответ: эллипс с центром $O'(0;\,3)$.

Пример 33. Упростить уравнение кривой $4x^2+9y^2+32x-54y+109=0$ и установить ее вид.

Решение.

Перепишем уравнение так:

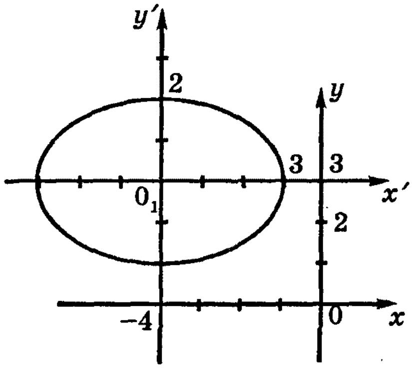
$4(x^2 + 8x) + 9(y^2 - 6y) = -\ 109.$

Дополняя выражения в скобках до полных квадратов, получим

$4(x^2 + 8x + 16) + 9(y^2 - 6x + 9) = 64 + 81 - 109$

или, после преобразований – $\dfrac{(x+4)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1.$

Получим уравнение эллипса с центром $O'(-4;\ 3)$ и полуосями $a = 3$ и $b = 2$.



Ответ: эллипс с центром $O'(-4;\ 3)$.

Пример 34. Упростить уравнение кривой

$4x^2 - 25y^2 - 24x + 50y - 89 = 0$ и установить ее вид.

Решение.

Перепишем уравнение так:

$4(x^2 - 6x) - 25(y^2 - 2y) = 89$

и каждую из скобок дополним до полного квадрата:

$4(x^2 - 6x + 9) - 25(y^2 - 2y + 1) = 89 + 36 - 25.$

После преобразований получим $\dfrac{(x-3)^2}{25} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1.$

Это уравнение гиперболы с центром в точке $(3;\ 1)$.

Ответ: гипербола с центром в $O'(3;\ 1)$.

Замечание. Так как в данном уравнении $A = 4$, $B = 0$, $C = -25$, то $AC - B^2 = 4 \cdot (-25) = -100 < 0$.

Следовательно, сразу можно было указать, что это кривая гиперболического типа.

Пример 35. Упростить уравнение кривой

$4y^2 + 8y - 2x - 1 = 0$ и установить ее вид.

Решение.

Разрешим уравнение относительно x

$x = 2y^2 + 4y - \frac{1}{2}$ и преобразуем его к виду:

$$x + \frac{5}{2} = 2(y+1)^2.$$

Это уравнение параболы, вершина которой находится в точке $\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$. Ось симметрии параболы параллельна оси ox; ветви параболы направлены вправо.

Ответ: парабола $x + \frac{5}{2} = 2(y+1)^2$.

Задания для самостоятельного решения

1. Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

а) центр окружности совпадает с началом координат и ее радиус $R = 3$;

б) центр окружности совпадает с точкой $C(2; -3)$ и ее радиус $R = 7$;

в) окружность проходит через начало координат и ее центр совпадает с точкой $C(6; -8)$;

г) окружность проходит через точку $A(2; 6)$ и ее центр совпадает с точкой $C(-1; 2)$;

д) центр окружности совпадает с началом координат и прямая $3x - 4y + 20 = 0$ является касательной к окружности;

е) точки $A(3; 2)$ и $B(-1; 6)$ являются концами одного из диаметров окружности;

ж) центр окружности совпадает с точкой $C(1; -1)$ и прямая $5x - 12y + 9 = 0$ является касательной к окружности;

з) окружность проходит через точки $A(3; 1)$ и $B(-1; 3)$, а ее центр лежит на прямой $3x - y - 2 = 0$;

и) окружность проходит через три точки: $A(1; 1)$, $B(1; -1)$ и $C(2; 0)$;

к) окружность проходит через три точки: $M_1(-1; 5)$, $M_2(-2; -2)$ и $M_3(5; 5)$.

2. Установить, как расположена точка $A(1; -2)$ относительно каждой из следующих окружностей – внутри, вне или на контуре:

а) $x^2 + y^2 = 5$; б) $x^2 + y^2 = 9$; в) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$; г) $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$.

3. Какие из нижеприведенных уравнений определяют окружности? Найти центр C и радиус R каждой из них:

а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$;
б) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$;
г) $x^2 + y^2 + x = 0$;
д) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$;
е) $x^2 + y^2 + y = 0$.

4. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $y = -\sqrt{25 - x^2}$; б) $x = -\sqrt{4 - y^2}$;

в) $x = +\sqrt{16 - y^2}$; г) $y = 15 + \sqrt{64 - x^2}$;

д) $y = 15 - \sqrt{64 - x^2}$; е) $y = -2 - \sqrt{9 - y^2}$;

ж) $y = -2 + \sqrt{9 - x^2}$.

5. Окружности заданы уравнениями в декартовых прямоугольных координатах:

а) $x^2 + y^2 = -3x$; б) $x^2 + y^2 = 5y$; в) $x^2 + y^2 = -y$;
г) $x^2 + y^2 = x + y$.

Составить уравнения этих окружностей в полярных координатах при условии, что полярная ось совпадает с положительной полуосью Ox, а полюс – с началом координат.

6. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$, найти его фокусы и эксцентриситет.

7. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что:

а) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$;

б) большая полуось $a = 6$, а эксцентриситет $e = 0{,}5$.

8. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки $M(2; \sqrt{3})$ и $B(0; 2)$. Написать его уравнение и найти расстояния точки M от фокусов.

9. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ в точке $(-3;\ 3)$.

10. Найти касательные к эллипсу $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$, проходящие через точку $(-3;\ 1)$.

11. Определить, какие из точек $A_1(-2;\ 3)$, $A_2(2;\ -2)$, $A_3(2;\ -4)$, $A_4(-1;\ 3)$, $A_5(-4;\ -3)$, $A_6(3;\ -1)$, $A_7(3;\ -2)$ лежат на эллипсе $8x^2+5y^2=77$, какие внутри и какие вне его.

12. Найти точки пересечения прямой $x+2y-7=0$ и эллипса $x^2+4y^2=25$.

13. Составить уравнение эллипса, зная что:

а) его большая ось равна 26, а фокусы – $F_1(-10;\ 0)$, $F_2(14;\ 0)$;

б) его малая ось равна 2 и фокусы – $F_1(-1;\ -1)$, $F_2(1;\ 1)$;

в) его фокусы – $F_1(-2;\ 3/2)$, $F_2(2;\ -3/2)$ и эксцентриситет $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. Найти область определения функции

$z=\sqrt{2-x^2-2y^2}$.

15. Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол:

а) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2}{16}-y^2=1$;

в) $x^2-4y^2=16$; г) $x^2-y^2=1$;

д) $4x^2-9y^2=25$; е) $25x^2-16y^2=1$;

ж) $9x^2-64y^2=1$.

16. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат, зная, что:

а) ее полуоси $a=6$, $b=18$; б) расстояние между фокусами $2c=10$ и эксцентриситет $e=\frac{5}{3}$;

в) уравнения асимптот $y=\pm\frac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48.

17. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

а) ее оси $2a = 10$ и $2b = 8$;

б) расстояние между фокусами $2c = 10$ и ось $2b = 8$;

в) расстояние между фокусами $2c = 10$ и эксцентриситет $e = \frac{3}{2}$;

г) ось $2a = 16$ и эксцентриситет $e = \frac{5}{4}$;

д) уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c = 20$.

18. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = -144$. Найти:

а) полуоси a и b; б) фокусы; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот.

19. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ и прямой $9x + 2y - 24 = 0$.

20. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:

а) точки $M_1(6; -1)$ и $M_2(-8; 2\sqrt{2})$ гиперболы;

б) точка $M_1(-5; 3)$ гиперболы и эксцентриситет $e = \sqrt{2}$;

в) точка $M_1\left(\frac{9}{2}; -1\right)$ гиперболы и уравнения асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$.

21. Определить эксцентриситет равносторонней гиперболы.

22. Построить следующие параболы и найти их параметры:

а) $y^2 = 6x$; б) $x^2 = 5y$; в) $y^2 = -4x$; г) $x^2 = -y$.

23. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что: а) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $B(-1; 3)$; б) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $D(4; -8)$.

24. Составить уравнение параболы, если дан фокус $F(-7; 0)$ и уравнение директрисы $x - 7 = 0$.

25. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты вершины A, величину параметра p и уравнение директрисы:

а) $y^2 = 4x - 8$; б) $y^2 = 4 - 6x$; в) $x^2 = 6y + 2$; г) $x^2 = 2 - y$.

26. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $y = -3\sqrt{-2x}$; б) $y = -2\sqrt{x}$; в) $x = +\sqrt{5y}$;

г) $x = -5\sqrt{-y}$.

27. Написать уравнение касательной к параболе $x^2 = 16y$, перпендикулярной к прямой $2x + 4y + 7 = 0$.

28. Из точки $A(5; 9)$ проведены касательные к параболе $y^2 = 5x$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

29. Найти точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$ и параболы $y^2 = 3x$.

30. Построить параболы:

а) $y = 2x^2 - 4x + 8$; б) $x^2 + 6x + y + 7 = 0$;
в) $y^2 + 8y - 2x + 22 = 0$; г) $2y^2 + 4y + x + 6 = 0$.

31. Построить кривые:

а) $x^2 + 4x + 4y^2 = 0$; б) $2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 1 = 0$;
в) $x^2 - 8x - 4y^2 = 0$; г) $y^2 - 6y - x^2 + 2x = 0$.

32. Составить простейшие уравнения, а также построить кривые, определяемые уравнениями:

а) $2xy - 4x - 2y + 3 = 0$;
б) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;
в) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 0$;
г) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$;
д) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
е) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 36x + 100 = 0$.

Ответы:

1. а) $x^2 + y^2 = 9$; б) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$; в) $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$; г) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$; д) $x^2 + y^2 = 16$; е) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$; ж) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$; з) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$; и) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$; к) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

2. а) на окружности; б) внутри окружности; в) на окружности; г) внутри окружности.

3. а) $C(1; -2)$, $R = 5$; б) уравнение не определяет кривой (мнимая окружность); в) уравнение определяет единственную точку $(-2; 1)$; г) $C\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $R = \frac{1}{2}$; д) уравнение не определяет никакой прямой; е) $C\left(0; -\frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{1}{2}$.

4. а) полуокружность радиуса $R = 5$ с центром в начале координат, расположенная в нижней полуплоскости;

б) полуокружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат, расположенная в левой полуплоскости;

в) полуокружность радиуса $R = 4$ с центром в начале координат, расположенная в правой полуплоскости;

г) полуокружность радиуса $R = 8$ с центром $C(0; 15)$, расположенная над прямой $y - 15 = 0$;

д) полуокружность радиуса $R = 8$ с центром $C(0; 15)$, расположенная под прямой $y - 15 = 0$;

е) полуокружность радиуса $R = 3$ с центром $C(-2; 0)$, расположенная влево от прямой $x + 2 = 0$;

ж) полуокружность радиуса $R = 3$ с центром $C(-2; 0)$, расположенная вправо от прямой $x + 2 = 0$.

5. а) $\rho = -3\cos\varphi$; б) $\rho = 5\sin\varphi$; г) $\rho = \cos\varphi + \sin\varphi$.

6. $a = 4$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{3}$; $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

7. а) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$;

8. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $r1 = 4 + \sqrt{3}$, $4 - \sqrt{3}$;

9. $x - 3y + 12 = 0$; **10**. $x + 3 = 0$ и $x - 6y + 9 = 0$;

11. Точки A_1 и A_6 лежат на эллипсе;

A_2 и A_4 – внутри эллипса;

A_3, A_5 и A_7 – внутри эллипса;

12. $\left(4; \frac{3}{2}\right)$, $(3; 2)$;

13. а) $\frac{(x-2)^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; б) $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3 = 0$; в) $68x^2 + 48xy + 82y^2 - 625 = 0$.

14. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}\le 1$ – эллипс и его внутренняя область.

15. а) $a=3,\ b=2$; б) $a=4,\ b=1$; в) $a=4,\ b=2$;

г) $a=1,\ b=1$; д) $a=\frac{5}{2},\ b=\frac{5}{3}$; е) $a=\frac{1}{5},\ b=\frac{1}{4}$;

ж) $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{8}$;

16. а) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{324}=-1$; б) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$;

в) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$;

17. а) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; в) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$;

г) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; д) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$;

18. $a=3,\ b=4$; б) $F_1(0;\ 5),\ F_2(0;\ -5)$; в) $e=\frac{5}{4}$; $y=\pm\frac{4}{3}x$.

19. 12 кв. ед.

20. а) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$; б) $x^2-y^2=16$; в) $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}$;

21. $y=\sqrt{2}$. **22.** а) $p=3$; б) $p=\frac{5}{2}$; в) $p=2$; г) $p=\frac{1}{2}$;

23. а) $y^2=-9x$; б) $x^2=-2y$; **24.** $y^2=-28x$;

25. а) $A(2;\ 0),\ p=2,\ x-1=0$; б) $A\left(\frac{2}{3};\ 0\right),\ p=3,\ 6x-$ $-13=0$; в) $A\left(0;\ -\frac{1}{3}\right),\ p=3,\ 6y+11=0$; г) $A(0;\ 2),\ p=\frac{1}{2}$, $4y-9$;

26. а) часть параболы $y^2=-18x$, расположенная в третьем координатном углу;

б) часть параболы $y^2=4x$, расположенная в четвертом координатном углу;

в) часть параболы $x^2=5y$, расположенная в первом координатном углу;

г) часть параболы $x^2 = -25y$, расположенная в третьем координатном углу;

27. $2x - y - 16 = 0$; **28.** $5x - 18y + 25 = 0$;

29. $(10;\ \sqrt{30})$, $(10;\ -\sqrt{30})$, $(2;\ \sqrt{6})$, $(2;\ -\sqrt{6})$.

30. а) $(x-1)^2 = \frac{1}{2}(y-6)$; б) $(x+3)^2 = -(y-2)$;

в) $(y+4)^2 = 2(x+2)$; г) $(y+1)^2 = -\frac{1}{2}(x+4)$;

31. а) $\frac{(x+2)^2}{4} + y^2 = 1$; эллипс с центром $C(-2;\ 0)$ и полуосями 2 и 1;

б) $\frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$; эллипс с центром $(2;\ 3)$ и полуосями $2\sqrt{2}$ и 4;

в) $\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$; гипербола с центром $(4;\ 0)$, действительная полуось равна 4, мнимая 2;

г) $(y-3)^2 - (x-1)^2 = 8$; равносторонняя гипербола с центром $(1;\ 3)$, полуоси равны $2\sqrt{2}$, действительная ось параллельна оси ординат;

32. а) $x^2 - y^2 = 1$; б) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; в) $y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x$;

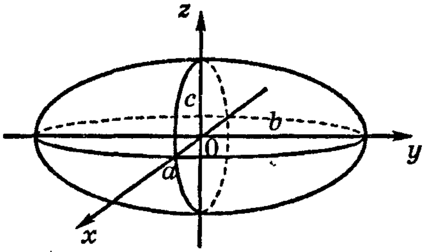
г) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; д) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$; е) $13y^2 - \frac{108}{\sqrt{13}}x = 0$.

(Всюду x, y означают координаты в окончательных осях.)

2.6. Канонические поверхности второго порядка

Трехосный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$



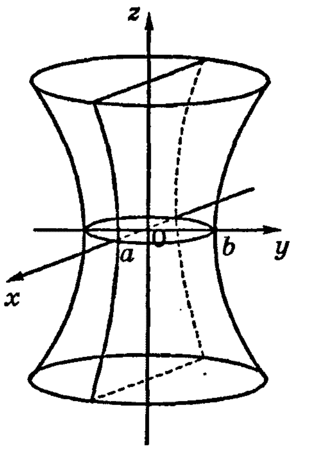
Если какие-нибудь две полуоси равны между собой, то получаем эллипсоид вращения.

Например, $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – *эллипсоид вращения*, Oz – ось вращения.

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=+1.$$

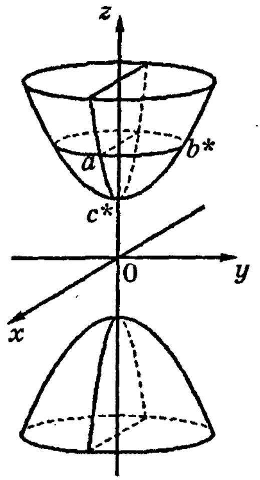
$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – *однополостный гиперболоид вращения*,
Oz – ось вращения.



Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

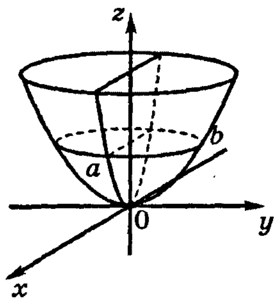
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ – *двуполостный гиперболоид вращения*,
Oz – ось вращения.



Эллиптический параболоид

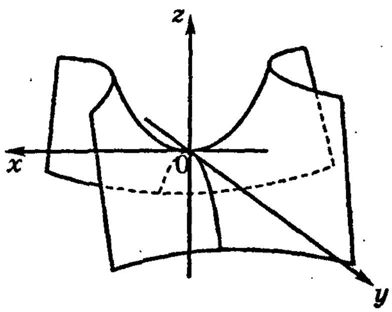
$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z,\ p>0,\ q>0.$$

$x^2+y^2=2p^2z$ – *параболоид вращения*, осью вращения служит ось Oz.



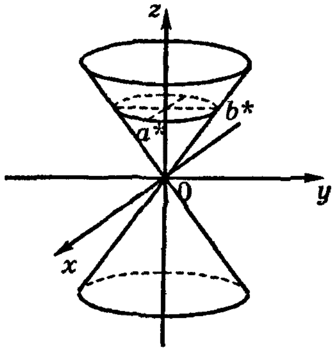
Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=2z\ ,\ p>0,\ q>0.$$



Конус второго порядка

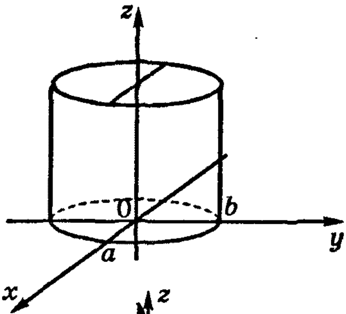
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$



Цилиндры второго порядка

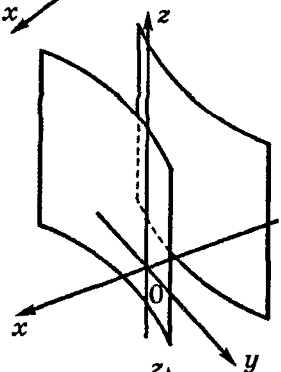
а) *эллиптический:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

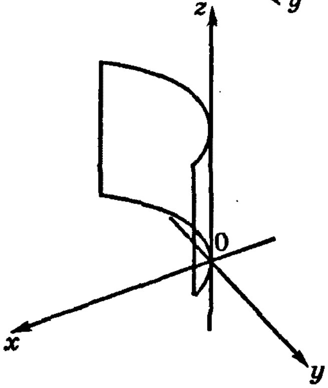


б) *гиперболический:*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$



в) *параболический:*
$y^2=2px,\ p>0.$



Одним из основных методов исследования формы поверхности по ее каноническому уравнению является метод сечений поверхности координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным.

$z = 0$ – плоскость xOy, $x = 0$ – плоскость yOz,

$y = 0$ – плоскость yOz, $z = h$ – плоскость, параллельная xOy, $x = h$ – плоскость параллельная yOz, $y = h$ – плоскость, параллельная xOz.

Пример 1. Построить тела, ограниченные поверхностями

а) $y = x^2$, $z = 0$, $z = 2$, $y = 1$.

Решение.

$y = x^2$ – это уравнение параболического цилиндра,

$z = 0$ – плоскость xOy,

$z = 2$ – плоскость, параллельная xOy и отсекающая на оси Oz отрезок, равный 2.

$y = 1$ – уравнение плоскости перпендикулярной оси Oy в точке (0; 1; 0).

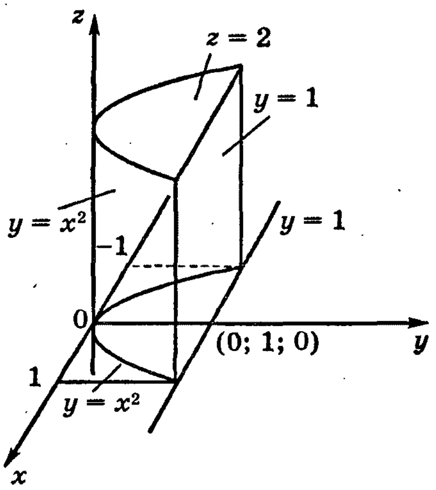
$\begin{cases} z = 0, \\ y = x^2 \end{cases}$ – парабола $y = x^2$ в плоскости xOy,

$\begin{cases} z = 2, \\ y = x^2 \end{cases}$ – парабола $y = x^2$ в плоскости $z = 2$.

Найдем в плоскости xOy пересечение параболы $y = x^2$ и прямой $y = 1$:

$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (-1; 1)$ и $(1; 1)$.

Построим параболический цилиндр $y = x^2$ и его сечения плоскостями $z = 0$, $z = 2$, $y = 1$, получим искомое тело.



б) $z = y^2 - x^2$, $z = 0$, $y = 2$.

Решение.

$z = y^2 - x^2$ – гиперболический параболоид.

Найдем линии пересечения его с плоскостью $z = 0$:

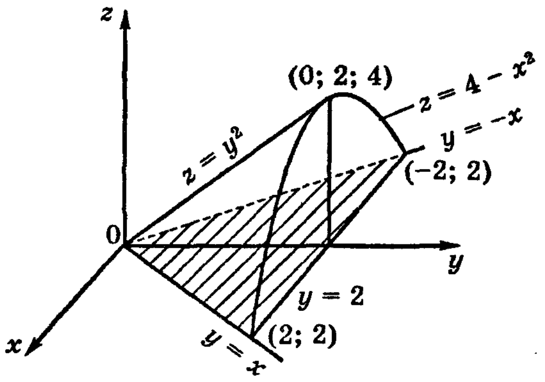
$\begin{cases} z = 0, \\ z = y^2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = \pm x$ – биссектрисы первого и второго координатных углов в плоскости xOy.

Найдем линию пересечения параболоида $z = y^2 - x^2$ с плоскостью $y = 2$:

$\begin{cases} y = 2, \\ z = y^2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow z = 4 - x^2.$

Получим в плоскости $y = 2$ параболу $z = 4 - x^2$ с вершиной в точке (0; 2; 4), ветви которой направлены вниз (относительно оси Oz).

Найдем линию пересечения гиперболического параболоида $z = y^2 - x^2$ с плоскостью yOz ($x = 0$); имеем в плоскости yOz параболу $z = y^2$ с осью симметрии Oz, ветви которой направлены вверх.



Получим искомое тело.

в) $z = 4 - x^2 - y^2$, $2z = 2 + x^2 + y^2$.

Решение.

$z = 4 - x^2 - y^2$ или $z - 4 = -(x^2 + y^2)$ – параболоид вращения с вершиной (0; 0; 4), направленный вниз.

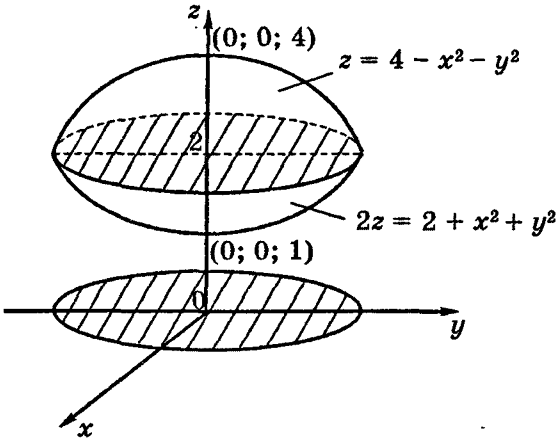
$2z - 2 = x^2 + y^2$ или $z - 1 = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$ – параболоид вращения с вершиной в точке (0; 0; 1).

Найдем линию пересечения этих поверхностей $\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2, \\ z = 2 + x^2 + y^2. \end{cases}$ Подставим $z = 4 - x^2 - y^2$ во второе уравнение системы (исключим z), получим $2(4 - x^2 - y^2) = 2 + x^2 + y^2$; $3x^2 + 3y^2 = 6$, т. е. $x^2 + y^2 = 2$.

Так как $x^2 + y^2 = 2$, то из первого уравнения системы найдем $z = 4 - (x^2 + y^2) = 4 - 2 = 2$.

Таким образом, линия пересечения данных поверхностей лежит в плоскости $z = 2$ и является окружностью $x^2 + y^2 = 2$.

Получим искомое тело.



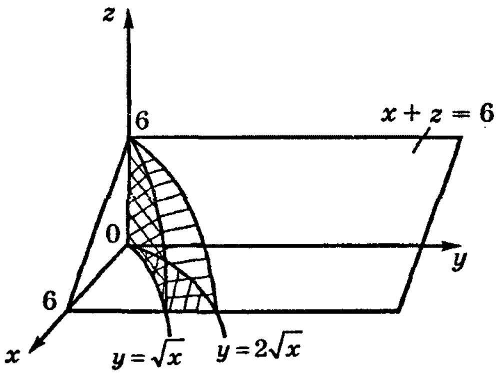
г) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$.

Решение.

$y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x \geq 0$ – цилиндрические поверхности, проходящие через ось Oz. В плоскости xOy – это графики квадратичных функций при $x \geq 0$.

$\frac{x}{6} + \frac{z}{6} = 1$ – плоскость, параллельная оси Oy, отсекающая на осях Ox и Oz отрезки 6 и 6. $z = 0$ – плоскость xOy.

Получим искомое тело.

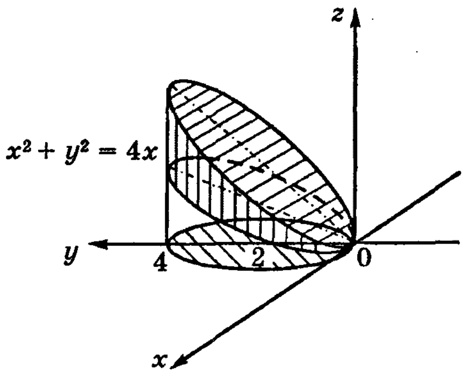


д) $x^2 + y^2 = 4x$, $z = x$, $z = 2x$.

Решение.

$x^2 + y^2 = 4x$ – уравнение цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна оси Oz. Преобразуем это уравнение к виду $(x^2 - 4x) + y^2 = 0$, $(x^2 - 4x + 4) + y^2 = 4$, $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ – это окружность в плоскости xOy с центром (2, 0) и радиусом $R = 2$. В пространстве – это прямой круговой цилиндр с основанием $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, $z = x$, $z = 2x$ – плоскости, проходящие через ось Oy перпендикулярно xOz и пересекающие цилиндр. Центр полученной окружности в плоскости xOy есть точка (2; 0), $R = 2$.

Построим тело, ограниченное данными поверхностями.



е) $4z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

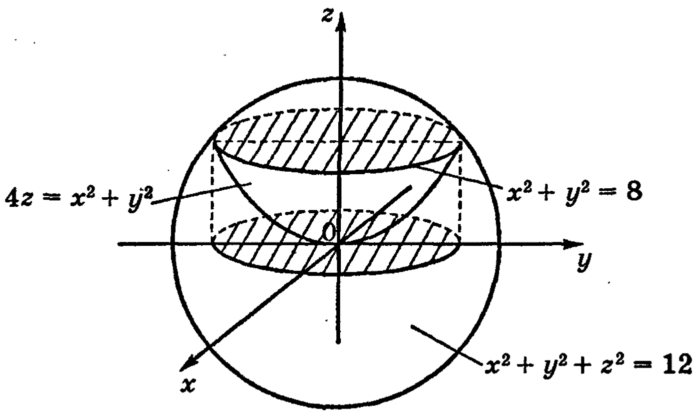
Решение.

$4z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения вокруг оси Oz, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ – сфера с центром в начале координат и $R = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Найдем линию пересечения данных поверхностей.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z^2 + z^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 4z. \end{cases}$$

Решениями уравнения $z^2 + 4z - 12 = 0$ являются $z_1 = -6$, $z_2 = 2$. По условию $z = 0$, следовательно, $z = 2$ – плоскость параллельная плоскости xOy. Подставляя $z = 2$ в уравнение $x^2 + y^2 = 4z$, получим $x^2 + y^2 = 8$. Линией пересечения данных поверхностей является окружность $x^2 + y^2 = 8$ в плоскости $z = 2$. Центр окружности $x^2 + y^2 = 8$ есть точка (0; 0; 2) и $R = 2\sqrt{2}$. Построим тело.



Задания для самостоятельного решения

1. Построить тела, ограниченные поверхностями:

а) $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$; $x = 0$; $y = 0$; $x + y - 3 = 0$;
б) $z = 4 - x^2$, $y = 5$, $y = 0$, $z = 0$;
в) $z = a^2 - x^2$, $x + y = a$, $y = 2x$, $y = 0$, $z = 0$;
г) $x^2 + y^2 + z^2 = a$, $x^2 + y^2 - ay = 0$;
д) $z = 4 - y^2$, $y = x^2$, $z = 0$;
е) $z = 4 - x^2 - y^2$, $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

2. Установить тип заданных поверхностей и построить их:

а) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{25} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{36} = 1$;
в) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$; г) $x^2 - y^2 = z^2$;
д) $x^2 + y^2 = 2az$, $a \neq 0$; е) $x^2 - y^2 = 2az$, $a \neq 0$;
ж) $2z = \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{2}$; з) $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 6z$;
и) $x^2 = 2az$, $a \neq 0$; к) $z = 2 + x^2 + y^2$;
л) $x^2 + y^2 - z^2 = 4$; м) $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$.

3. Найти точки пересечения поверхности и прямой:

а) $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ и $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-4}{-6} = \dfrac{z+2}{4}$;

б) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{4} = 1$ и $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+2}{4}$;

в) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = z$ и $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{-2}$.

Ответы:

2. а) эллипсоид; б) однополостный гиперболоид; в) двуполостный гиперболоид; г) конус; д) параболоид вращения; е) гиперболический параболоид; ж) эллиптический параболоид; з) гиперболический параболоид; и) параболический цилиндр; к) параболоид вращения с вершиной (0; 0; 2); л) однополостный гиперболоид вращения; м) двуполостный гиперболоид вращения;

3. а) $M_1(3; 4; -2)$ и $M_2(6; -2; 2)$; б) $M(4; -3; 2)$ прямая касается поверхности; в) прямая и поверхность не имеют общих точек.

3. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

3.1. Определители и матрицы

Определители

Определение 1. Матрицей размера 2×2 называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы из 2 строк и 2 столбцов. Обозначается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Числа, составляющие эту матрицу, называются ее элементами и обозначаются буквой с двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, а второй – номер столбца, в которых стоит данное число.

Определение 2. *Определителем (или детерминантом) второго порядка*, соответствующим данной матрице, называется число $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Определитель обозначают символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

По определению, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называются элементами определителя.

Свойства определителя второго порядка

1) Определитель не изменится, если все его строки заменить (транспортировать) соответствующими столбцами (равномерность строк и столбцов).
2) При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный.
3) Если элементы одной строки (столбца) умножить на одно и то же число λ, то новый определитель увеличится в λ раз.
4) Если к одной строке (столбцу) поэлементно прибавить другую строку (столбец), то новый определитель совпадает с исходным (не изменится).

Определение 3. Аналогично, если

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица размера 3×3 (3 строки, 3 столбца), то соответствующим ей определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ называются элементами определителя. Формула дает разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителей второго порядка.

Определение 4. Назовем *минором*, соответствующим данному элементу определителя третьего порядка, определитель второго порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Миноры будем обозначать заглавной буквой M с двумя индексами. Так, например, минор M_{12}, соответствующий элементу a_{12}, есть определитель $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Все свойства определителей второго порядка остаются справедливыми для определителей третьего порядка. Аналогично формуле, дающей разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки, можно получить разложение определителя по элементам любой строки или столбца.

Определение 5. Назовем *алгебраическим дополнением* элемента определителя его минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, в которых стоит элемент, четна, и со знаком минус, если эта сумма нечетна.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ik} обозначается через A_{ik}. Здесь i означает номер строки, а k – номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент.

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}.$$

Например, $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$, $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$, $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}$ и т. д.

Обозначим определитель через Δ, тогда получим следующие верные равенства:

$\Delta = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$,
$\Delta = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}$,
$\Delta = a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}$.

Это есть разложения определителя третьего порядка по элементам строк.

$\Delta = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}$,
$\Delta = a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32}$,
$\Delta = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33}$.

Это есть разложения определителя третьего порядка по элементам столбцов.

Понятие об определителях высших порядков

Определитель четвертого порядка есть число, которое находится следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Определители третьего порядка в правой части равенства являются минорами элементов a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ik} вычисляется по формуле $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$, тогда равенство можно переписать в виде:

$$\Delta = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + a_{14} A_{14}.$$

Эта формула дает разложение определителя четвертого порядка по элементам первой строки. Аналогично вычисляются определители более высоких порядков.

Все свойства определителей второго и третьего порядка остаются справедливыми для определителей любого порядка.

Пример 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5.$

Ответ: 5.

б) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

Ответ: 1.

в) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 =$

$= (a + b - a + b)(a + b + a - b) = 2a \cdot 2b = 4ab.$

Ответ: $4ab$.

г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$

$= 1 - 1 + 1 = 1.$

Второй способ. Воспользуемся свойством определителя и к первой строке прибавим третью, получим определитель третьего порядка и разложение по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ответ: 1.

д) $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ a & 0 \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ a & a \end{vmatrix} =$

$= -a(a \cdot 0 - a \cdot a) + a(a \cdot a - a \cdot a) + a(a \cdot a - a \cdot 0) =$

$= a^3 + a^3 = 2a^3.$

Ответ: $2a^3$.

е) $\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - y\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} +$

$+(z+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = x-1-y-(z+1) = x-y-z-2.$

Ответ: $x-y-z-2$.

ж) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$

Решение.

Воспользуемся свойствами определителя. Из второй третьей, четвертой строки вычтем первую строку, получим определитель и разложение его по элементам 1–го столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 19 \end{vmatrix} -$$

$$-2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 19 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = (95-81) - 2\cdot(2\cdot 19 - 3\cdot 9) +$$

$$+3\cdot(2\cdot 9 - 3\cdot 5) = 14 - 2\cdot 11 + 9 = 1.$$

Ответ: 1.

з) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$

Решение.

Из второй строки определителя вычтем первую строку, умноженную на 2; из третьей строки вычтем утроенную первую строку, из четвертой – вычтем первую строку, умноженную на 4. Получим нули в первом столбце. Тогда и разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)(-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 13 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -36 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot (18 + 20) = 304.$$

Ответ: 304.

Матрицы

Операции над матрицами

Определение 6. *Матрицей размера* $m \times n$ (или $(m \times n)$ – матрицей) называется прямоугольная таблица чисел a_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$, состоящая из m строк и n столбцов.

Определение 7. *Суммой* $A + B$ $(m \times n)$ – матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C(c_{ij})$ того же порядка, каждый элемент которой равен сумме соответственных элементов матриц A и B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,2, \dots , m$, $j = 1, 2, \dots , n$.

Определение 8. *Произведением* αA матрицы $A = (a_{ij})$ на действительное число α называется матрица $B = (b_{ij})$, получающаяся из матрицы A умножением всех ее элементов на α: $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = 1,2, \dots , m$, $j = 1, 2, \dots , n$.

Определение 9. *Произведением* AB $(m \times n)$ – матрицы $A = (a_{ij})$ на $(n \times k)$ – матрицу $B = (b_{ij})$ называется $(m \times k)$ – матрица $C(c_{ij})$, элемент которой c_{ij}, стоящий в i–й строке и j-м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и j–го столбца матрицы

B: $c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}$, $i = 1,2, \ldots , m$, $j = 1, 2, \ldots , k$.

Матрицы перемножить возможно тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Для матриц одинакового размера справедливы свойства следующих алгебраических операций:

1) $A + B = B + A$; 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

5) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

6) $A(BC) = (AB) \cdot C$;

7) $A(B + C) = AB + AC$.

Определение 10. *Нуль-матрицей* называется матрица O, все элементы которой равны нулю.

Определение 11. *Единичной матрицей E* называется квадратная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы равны нулю.

Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Справедливы равенства: $A + O = A$; $AE = EA = A$.

Обратная матрица

Определение 12. Квадратная матрица ($m = n$) называется *вырожденной* (особой), если ее определитель равен нулю, и невырожденной (неособенной) в противном случае.

Определение 13. Если A – невырожденная матрица, то существует, и притом единственная, матрица A^{-1} такая, что

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица того же размера, что и матрицы A и A^{-1}.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A.

Определение 14. Назовем матрицу A^* *присоединенной*, если она является транспонированной матрицей, составленной из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A.

Если матрица A – невырожденная, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*, \text{ где}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти сумму матриц A и B, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 3-3 & 5+4 & 7+0 \\ 1+2 & 4+1 & 2+3 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Вычислить матрицу $2A + 5B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$2A + 5B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 11 \\ 9 & 12 & 17 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 11 \\ 9 & 12 & 17 \end{pmatrix}$.

Пример 4. Найти произведение AB матрицы-строки

$A = (5\ 7\ -2)$ на матрицу $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$(5\ 7\ -2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$= (5{\cdot}2+7{\cdot}1+(-2)(-2) \quad 5{\cdot}3+7{\cdot}4+(-2){\cdot}3 \quad 5{\cdot}1+7{\cdot}2+(-2)(-1)) =$
$= (21\ 37\ 21).$

Ответ: матрица-строка размера (1×3) – $(21\ 37\ 21)$.

Замечание. (1×3) – матрица при умножении на (3×3) – матрицу дает (1×3) – матрицу.

Пример 5. Найти произведение AB, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ – (2×3) – матрица, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ – (3×1) – матрица.

Решение. При умножении (2×3) – матрицы на (3×1) матрицу получим (2×1) – матрицу.

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 3 + 7\cdot 2 + [-4]\cdot(-1) \\ 2\cdot 3 + 5\cdot 2 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 33 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Пример 6. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицы AB и BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) + 3\cdot(-2) & 2\cdot 2 + 3\cdot 3 \\ 5\cdot(-1) + (-7)\cdot(-2) & 5\cdot 2 + (-7)\cdot 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -8 & 13 \\ 9 & -11 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 2 + 2\cdot 5 & (-1)\cdot 3 + 2\cdot(-7) \\ (-2)\cdot 2 + 3\cdot 5 & (-2)\cdot 3 + 3\cdot(-7) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 8 & -17 \\ 11 & -27 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $AB=\begin{pmatrix}-8 & 13\\ 9 & -11\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}8 & -17\\ 11 & -27\end{pmatrix}$.

Замечание. Очевидно, $AB \neq BA$, т.е. произведение матриц не перестановочно.

Пример 7. Доказать, что матрица $A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 0 & -5\\ -18 & 1 & 24\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}$ является обратной для матрицы $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -6\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

Решение. $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -6\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0 & -5\\ -18 & 1 & 24\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot4+0\cdot(-18)+5\cdot(-3) & 4\cdot0+0\cdot1+5\cdot0 & 4\cdot(-5)+0\cdot24+5\cdot4\\ 0\cdot4+1\cdot(-18)+(-6)(-3) & 0\cdot0+1\cdot1+(-6)\cdot0 & 0\cdot(-5)+1\cdot24+(-6)\cdot4\\ 3\cdot4+0\cdot(-18)+4\cdot(-3) & 3\cdot0+0\cdot1+4\cdot0 & 3\cdot(-5)+0\cdot24+4\cdot4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Ответ: матрица A^{-1} является обратной матрице A.

Пример 8. Найти присоединенную матрицу для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение.

Присоединенная матрица является транспортированной матрицей из алгебраических дополнений данной матрицы.

$$A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Для данной матрицы $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 11;$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -17;$ $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10;$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -3;$ $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 21;$

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 6;$ $A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11;$ $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2.$

Итак, присоединенная матрица A^* равна

$$A^* = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^* = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$

Пример 9. Найти матрицу A^{-1}, обратную к матрице A примера 8.

Решение. Так как $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}A^*$, то найдем

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 3\cdot 11 - 17 + 20 = 36.$ Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{36}\begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$

Проверка. $A^{-1}\cdot A=\dfrac{1}{36}\begin{pmatrix}11 & -3 & 5\\ -17 & 21 & -11\\ -10 & 6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}=$

$=\dfrac{1}{36}\begin{pmatrix}36 & 0 & 0\\ 0 & 36 & 0\\ 0 & 0 & 36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$

Ответ: $A^{-1}=\dfrac{1}{36}\begin{pmatrix}11 & -3 & 5\\ -17 & 21 & -11\\ -10 & 6 & 2\end{pmatrix}.$

Ранг матрицы

Определение 15. Пусть в матрице размера $(m\times n)$ выбраны произвольно k строк и k столбцов ($k\le min\ (m,\ n)$). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется *минором* k-го порядка матрицы A.

Определение 16. Максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы A называется ее *рангом.*

Определение 17. Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие:

1) перестановка местами двух строк;

2) поэлементное умножение строки на не равное нулю число;

3) поэлементное прибавление одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на произвольное число λ;

4) вычеркивание нулевой строки.

Матрица имеет ступенчатый вид, если в каждой ее строке стоит нулей больше, чем в предыдущей. При этом учитываются лишь нули, стоящие в начале строки до первого ненулевого числа.

Теорема 1. Любую матрицу можно с помощью конечного числа элементарных преобразований привести к ступенчатому виду.

Теорема 2. Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк матрицы после приведения ее с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду.

Пример 10. Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Применяя элементарные преобразования строк матрицы, будем обозначать: $-1\cdot(2)$ – умножить вторую строку на (-1); $(2)-2(1)$ – вычтем из второй строки первую, умноженную на (2); $(2)\Leftrightarrow(5)$ – поменять строки вторую и пятую местами.

$$\sim\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{-1\cdot(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{(1)\Leftrightarrow(2)}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{(2)\Leftrightarrow(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{(3)-3(1)}{\overset{(2)-2(1)}{\sim}}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\begin{array}{c} -\frac{1}{11}(3) \\ \frac{1}{5}(4) \\ \frac{1}{2}(5) \end{array}}{\overset{-\frac{1}{5}(2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{(5)-(2)}{\overset{\begin{array}{c}(3)-(2)\\(4)-(2)\end{array}}{\sim}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = 2.$

Ответ: $r(A) = 2.$

Пример 11. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 7 & 10 \end{pmatrix} \overset{\substack{(2)+2(1)\\(3)-(1)}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{5}(3)}{\overset{\frac{1}{5}(2)}{\sim}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(3)-(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = 2.$

Ответ: $r(A) = 2.$

Пример 12. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \underset{(3)-(1)}{\overset{(2)-(1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \overset{(3)-2(1)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = 3$.

Ответ: $r(A) = 3$.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить определители.

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Указание: определитель ж) легко вычисляется с помощью разложения определителя по элементам второй строки или второго столбца.

з) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; к) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить $3A + 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Убедиться, что произведение матриц A и B некоммутативно:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, найти это произведение матриц.

6. Вычислить произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

8. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

9. Вычислить ранг матрицы.

а) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 15 \\ 5 & -3 & 2 & 15 \\ 10 & -11 & 5 & 36 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & 15 & -9 \\ 5 & 5 & -7 \end{pmatrix}$;

$$\text{в) } A=\begin{pmatrix}2&4&4&6\\4&2&5&7\\3&2&8&5\\2&8&7&3\end{pmatrix};\ \text{г) } A=\begin{pmatrix}1&2&-5&-3\\2&5&-6&-1\\5&12&-17&1\end{pmatrix}.$$

Ответы:

1. а) 5; б) $\cos(\alpha+\beta)$; в) 2; г) $2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}=\{2,-1,-1\}$;
д) $y-z-1=0$; е) 0; ж) -2; з) -14; и) 4; к) -117.

2. $\begin{pmatrix}2&5&-3\\-6&7&8\end{pmatrix}$; 3. а) $\begin{pmatrix}6&4\\4&1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-9&-10\\5&8\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}33\\15\end{pmatrix}$;
г) $\begin{pmatrix}27&20\\17&40\end{pmatrix}$.

4. $AB=\begin{pmatrix}20&20&4\\26&36&22\\15&26&-3\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}24&17&21\\24&6&30\\16&23&23\end{pmatrix}$, $AB\neq BA$.

5. $\begin{pmatrix}26\\45\\3\end{pmatrix}$. 6. $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. 7. $\begin{pmatrix}6&-8&3\\-4&7&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}&2&-\frac{1}{3}\\\frac{5}{3}&-1&-\frac{1}{3}\\-2&1&1\end{pmatrix}$. 9. а) $r(A)=3$; б) $r(A)=2$; в) $r(A)=3$;
г) $r(A)=2$.

3.2. Линейное (векторное) пространство

Определение 1. Совокупность n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заданных в определенном порядке, называется *n-мерным вектором*. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются координатами вектора.

Над n-мерными векторами вводятся следующие операции.

Сложение: если $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$.

Умножение на число: если λ – действительное число и $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор, то $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$.

Определение 2. Два вектора называются *равными*, если равны их соответствующие координаты

$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

Среди n-мерных векторов есть вектор, нейтральный относительно операции сложения. Это вектор с нулевыми координатами. Его называют нулевым вектором и обозначают через 0:

$$0 = (0, 0, \dots, 0).$$

Каждый вектор x имеет противоположный; его обозначают $-x$, причем

$$-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n).$$

Введенные операции сложения векторов и умножение вектора на число обладают восемью свойствами:

1) $x + y = y + x$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $x + 0 = 0$;
4) $x + (-x) = 0$;
5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
7) $(\lambda + \mu) = \lambda x + \mu x$;
8) $1 \cdot x = x$.

Определение 3. Множество всех n-мерных векторов, для которых установлены операции сложения и умножения на число, называется *n-мерным векторным (линейным) пространством* R_n.

Определение 4. Система n-мерных векторов $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ называется *линейно зависимой*, если найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, не равные одновременно нулю, такие, что

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_s x_s = 0.$$

В противном случае эта система называется *линейно независимой*.

Определение 5. Пусть Q – произвольное множество n-мерных векторов пространства R_n. Система векторов $B = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ называется *базисом* в Q, если выполняются следующие условия:

1) $e_k \in Q$, $k = 1, 2, ..., s$;

2) система $B = \{e_1, e_2, ... , e_s\}$ линейно независима;

3) для любого вектора $x \in Q$ найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, ... ,$ λ_s такие, что $x = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k e_k$.

Определение 6. Формула $x = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k e_k$ называется разложением вектора x по базису $B = (e_1, e_2, ... , e_s)$. Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, ... , \lambda_s$ однозначно определяются вектором x и называются координатами этого вектора в базисе B.

Справедливы следующие утверждения:

1) Всякая система векторов $Q \in R_n$ имеет по меньшей мере один базис; при этом все базисы этой системы состоят из одинакового числа векторов, называемого рангом системы Q, и обозначаются $r(Q)$.

2) Ранг всего пространства R_n равен n и называется размерностью этого пространства; при этом в качестве базиса R_n можно взять следующую систему:

$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$,
$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$,
$e_3 = (0, 0, 1, 0, ..., 0)$,
...
$e_n = (0, 0, 0, ... 0, 1)$.

Этот базис принято называть каноническим.

Зафиксируем произвольный базис $B = (e_1, e_2, ... , e_n)$ в пространстве R_n. Тогда всякому вектору x можно поставить во взаимно однозначное соответствие столбец его координат в этом базисе, т. е.

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

3.3. Системы линейных алгебраических уравнений

Системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases}$$

или в матричной форме, $AX = b$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$

– матрица системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных,

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов данной системы.

Правило Крамера

Если в системе $\det A \neq 0$, т. е. матрица A имеет обратную A^{-1}, то система имеет, и притом единственное, решение

$$X = A^{-1} \cdot b,$$

или $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

где Δ_i – определитель, получаемый из определителя Δ системы заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Пример 1. Решить систему уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение.

Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$

$= (-1)^{1+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$, $\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (2) + (1) = (3) +

+ (1) = $(-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 15$, $\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 15 + 2 = -5;$

$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ (2) + (1) = (3) + (1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} =$

$= (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 5.$

Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} = \dfrac{15}{5} = 3$; $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta} = \dfrac{-5}{5} = -1$;

$x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta} = \dfrac{+5}{5} = 1.$

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = = 1$.

Пример 2. Решить систему линейных алгебраических уравнений примера 1 матричным способом.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ – матрица системы уравнений,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец неизвестных,

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец свободных членов данной системы.

Так как в примере 1 вычислен определитель системы и он равен $det\, A = 5 \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.

Вычислим $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^*$, $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{12} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,\ A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Получили присоединенную матрицу

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ и решение системы найдем по формуле $X = A^{-1} \cdot b$, т. е.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5+18-8 \\ -15+6+4 \\ 5-12+12 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ Отсюда: $x_1 = 3,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$.

Ответ: $x_1 = 3,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$.

Произвольные системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера–Капелли

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \qquad (*)$$

или в матричной форме, $AX = b$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} \cdots a_{3n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы, размера $m \times n$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец неизвестных,

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец свободных членов данной системы.

Определение 1. *Решением системы* называется такая совокупность n чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, что при подстановке их во все уравнения системы вместо соответствующих неизвестных получаются числовые тождества.

Определение 2. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*; система, не имеющая ни одного решения – несовместной.

Определение 3. Система, имеющая единственное решение, называется *определенной*; система, имеющая более одного решения – *неопределенной.*

Определение 4. Две системы называются эквивалентными, если множества их решений совпадают.

Определение 5. Матрица $(A \mid b) = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{31}\ a_{32} \ldots a_{3n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} & b_m \end{array}\right)$,

получаемая из матрицы A системы добавлением столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей.*

Теорема 1. Для того, чтобы система (*) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы, т. е.

$r(A) = r(A \mid b)$.

Иначе, 1) $r(A) \neq r(A \mid b) \Leftrightarrow$ система несовместна,

2) $r(A) = r(A \mid b) \Leftrightarrow$ система совместна,

3) $r(A) = r(A \mid b) = n \Leftrightarrow$ система определенна,

4) $r(A) = r(A \mid b) < n \Leftrightarrow$ система неопределенна.

Алгоритм исследования произвольных система линейных уравнений методом Гаусса.

1) Сначала расширенная матрица $(A \mid b)$ приводится с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду (при этом одновременно приводится к ступенчатому виду и матрица A системы (*));

2) затем находятся числа $r(A)$, $r(A \mid b)$ и n (n – число неизвестных системы);

3) проводится исследование системы согласно теоремы Кронекера–Капелли.

Пример 3. Исследовать систему

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{(3)+(1)}{\overset{(2)+(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}(3)}{\overset{\frac{1}{6}(2)}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{(3)-(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

$r(A) = 2$, $r(A \mid b) = 2$, $n = 4$, $r(A) = r(A \mid b) = 2 < 4$.

Ответ: система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Пример 4. Исследовать систему $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$.

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{(1)\leftrightarrow(4)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{(3)+3(1)\\(4)-2(1)}}{\overset{(2)-3(1)}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \end{array}\right) \underset{-1\cdot(4)}{\overset{-\frac{1}{4}(2)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \end{array}\right) \underset{(4)-3(2)}{\overset{(3)-5(2)}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{(4)+(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \ r(A) = 3,$$

$r(A\,|\,b) = 4$, $r(A) \neq r(A\,|\,b)$.

Ответ: система несовместна.

Пример 5. Исследовать систему $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$.

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \underset{(3)-(1)}{\overset{(2)-5(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \overset{4(3)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 12 & 16 & 20 \end{array}\right) \overset{(3)-3(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 11 \end{array}\right).$$

$r(A) = 3$, $r(A\,|\,b) = 3$, $n = 3$.

Ответ: система совместна и имеет единственное решение.

Метод Гаусса

Определенные линейные алгебраические системы

Определение 6. Система является *определенной* тогда и только тогда, когда $r(A) = r(A \mid b) = n$. В этом случае имеем систему n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой не равен нулю. Значит, по формулам Крамера можно найти ее решение. Найдем же решение этой системы методом Гаусса. В этом случае матрица A после приведения ее к ступенчатому виду будет треугольной, т. е. количество строк у нее равняется количеству столбцов (так как $r(A) = n$ и ниже диагонали расположены нули). С помощью элементарных преобразований матрицу A можно привести к единичной матрице, тогда после черты в расширенной матрице будет расположено решение системы, т. е. приведем расширенную матрицу к виду $(E \mid X)$. Покажем это на примере 5.

Пример 6. Найти решение системы уравнений примера 5 методом Гаусса. Данную систему мы приведем к виду:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 11 \end{array}\right)$. С помощью элементарных преобразований приведем матрицу A к единичному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 11 \end{array}\right) \underset{\sim}{-\frac{1}{11}(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} (2)-9(3) \\ \sim \\ (1)+(3) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\frac{1}{4}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{(1)+(2)}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Следовательно, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

Проверка. Подставим эти значения неизвестных в систему примера 5.

$2-3-(-1)=0,\ 5\cdot 2-1\cdot 3+4\cdot(-1)=10-7=3,$
$1\cdot 2+2\cdot 3+3(-1)=8-3=5.$
Ответ: $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=-1.$

Пример 7. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} x_1+6x_2+3x_3=21, \\ 4x_1+8x_2+x_3=18, \\ 3x_1+5x_2+4x_3=33. \end{cases}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 4 & 8 & 1 & 18 \\ 3 & 5 & 4 & 33 \end{array}\right) \underset{(3)-3(1)}{\overset{(2)-4(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 0 & -16 & -11 & -66 \\ 0 & -13 & -5 & -30 \end{array}\right) \underset{-16(3)}{\overset{-(2)}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 0 & 16 & 11 & 66 \\ 0 & 208 & 80 & 480 \end{array}\right) \overset{(3)-13(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 0 & 16 & 11 & 66 \\ 0 & 0 & -63 & -378 \end{array}\right).$$

$r(A)=3,\ r(A\,|\,b)=3,\ n=3.$

Система совместна и определенна. Найдем ее решение.

$$\begin{cases} x_1+6x_2+3x_3=21, \\ \qquad 16x_2+11x_3=66, \\ \qquad\qquad 4x_3=378; \end{cases} \Big\uparrow \quad 16x_2+6\cdot 11=66,\ x_2=0;$$

$$x_1+18=21,\ x_1=3,\ x_3=\frac{378}{63}=6.$$

Ответ: $x_1=3,\ x_2=0;\ x_3=6.$

Пример 8. Выяснить, является ли система векторов $a_1=(2,-3,1)$, $a_2=(3,-1,5)$, $a_3=(1,-5,-3)$ линейно зависимой или линейно независимой. Найти ее ранг и какой-нибудь базис.

Решение.

Запишем матрицу A, вектор-столбцами которой являются a_1, a_2, a_3:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \overset{(1)\leftrightarrow(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -3 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{(3)-2(1)}{\overset{(2)+3(1)}{\sim}}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 0 & 14 & -14\\ 0 & -7 & 7\end{pmatrix}\underset{\frac{1}{7}(3)}{\overset{\frac{1}{14}(2)}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\overset{(3)+(2)}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.\ r(A) = 2 < 3.$$

Ответ: данная система векторов линейно зависима, векторы a_1 и a_2 образуют базис исходной системы.

Неопределенные линейные алгебраические системы

Если система имеет бесконечное множество решений, то все их перечислить невозможно. В этом случае строится общее решение системы.

Определение 7. *Общим решением* неопределенной системы называется такая система, эквивалентная исходной, в которой часть неизвестных, называемых зависимыми, выражена через остальные неизвестные, называемые независимыми.

Опишем способ нахождения общего решения системы, предполагая, что ее матрица уже приведена к ступенчатому виду.

Пусть дана система $\left(\begin{array}{ccccccc|c}1 & 8 & -4 & 0 & -2 & 4 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 7 & 4 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1\end{array}\right)$.

1) Сначала надо выделить неизвестные. которые будут зависимыми (остальные будут независимыми); для этого надо, обведя нули, нарисовать «лесенку», иллюстрирующую ступенчатый вид матрицы. Под теми столбцами, где начинаются «ступеньки» этой «лесенки» подписать неизвестные, соответствующие этим столбцам, и рядом написать букву «з». В данном примере это будет выглядеть так:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 8 & -4 & 0 & -2 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

x_1 – з x_3 – з x_5 – з x_6 – з

Выписанные неизвестные и будут считаться зависимыми.

2) Затем с помощью элементарных преобразований надо добиться, чтобы в столбцах, соответствующих зависимым неизвестным, осталось лишь одно ненулевое число. Делать это целесообразно двигаясь снизу вверх и справа налево. В данном примере получим таким образом матрицу

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} \boxed{1} & 8 & 0 & 14 & 0 & 0 & -19 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 7 & 0 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & -3 & 1 \end{array}\right).$$

3) Теперь надо систему из матричной формы записи перевести в обычную форму:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 14x_4 - 19x_7 = 3, \\ 2x_3 + 7x_4 - 16x_7 = 0, \\ 2x_5 + 9x_7 = 1, \\ 2x_6 - 3x_7 = 1. \end{cases}$$

4) Выражая в каждом уравнении зависимую неизвестную, получаем общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 8x_2 - 14x_4 + 19x_7, \\ x_3 = \dfrac{1}{2}(-7x_4 + 16x_7), \\ x_5 = \dfrac{1}{2}(1 - 9x_7), \\ x_6 = \dfrac{1}{2}(1 + 3x_7). \end{cases}$$

5) Теперь, придавая независимым неизвестным произвольные значения и вычисляя зависимые, можно найти частное решение системы и сделать проверку.

В этом примере положим $x_2 = 1$, $x_4 = 2$, $x_7 = 0$, тогда $x_1 = -33$, $x_3 = -7$, $x_5 = \frac{1}{2}$, $x_6 = \frac{1}{2}$.

Проверка. $-33 + 8 \cdot 1 - 4 \cdot (-7) - 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 0 = -33 + 8 + 28 - 1 + 2 = 4$; $2(-7) + 7 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 0 = -14 + 14 + 2 + 1 = 3$; $\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 2$; $2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 0 = 1$.

Замечание. Количество зависимых неизвестных должно равняться рангу матрицы.

Пример 9. Исследовать и решить систему

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} (2) - 2(1) \\ \sim \\ (4) - (1) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1)(2) \\ \sim \\ (3) + (2) \\ (4) + (2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2(1) - (2) \\ \sim \end{array}$$

$$x_1 - з \; x_2 - з$$

$r(A) = 2$, $r(A \mid b) = 2$, $n = 4$. Система совместна и неопределенна

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ или } \begin{cases} 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1; \end{cases} \text{ отсюда}$$

находим общее решение системы.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}x_3 + \dfrac{7}{4}x_4, \\ x_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, тогда $x_1 = \dfrac{3}{4}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – частное решение системы.

Проверка. Подставим координаты частного решения – вектора X в исходную систему уравнений:

$2 \cdot \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 2$, $4 \cdot \dfrac{3}{4} + 0 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 \cdot 0 - 7 \cdot 0 = 3$,

$0 \cdot \dfrac{3}{4} + 2 \cdot \dfrac{1}{2} - 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1$, $2 \cdot \dfrac{3}{4} + 3 \cdot \dfrac{1}{2} - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 3$. Верно.

Будем теперь обозначать независимые неизвестные $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$ – произвольные постоянные. Тогда общее решение системы будет иметь вид $\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}c_1 + \dfrac{7}{4}c_2, \\ x_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}c_1 - \dfrac{1}{2}c_2. \end{cases}$

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4}c_1 + \frac{7}{4}c_2 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Пример 10. Исследовать и решить систему (СЛАУ)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Решение.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{(1) \to (3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{3}(2) \\ \sim \\ \frac{1}{5}(3) \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

$r(A) = r(A\,|\,b) = 1$, $n = 3$, $r(A) < n$. Следовательно, система совместна неопределенна.

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1 = 1 - x_2 - x_3$. Положим $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, тогда $x_1 = 1$ и $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ – частное решение системы. Обозначим $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$, где c_1, c_2 – произвольные действительные постоянные. Тогда общее решение системы будет иметь вид
$$X = \begin{pmatrix} 1 - c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 - c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ – общее решение системы, c_1, c_2 – произвольные действительные постоянные,

$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ – частное решение системы.

Однородные линейные алгебраические системы

Определение 8. *Однородные линейные алгебраические системы* составлены из уравнений, у которых правые части равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0; \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – матрица системы,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – матрица–столбец неизвестных,}$$

Тогда матричная форма записи системы будет:

$$AX = 0.$$

Однородная система всегда совместна, так как имеет нулевое решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ или $X = 0$. Для существования ненулевого решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных, т. е. чтобы $r = r(A) < n$ (при $m = n$ это условие означает, что $\det A = 0$).

Определение 9. Пусть $Q \in R_n$ – множество всех решений однородной системы. Всякий базис в множестве Q состоит из $n - r$ векторов e_1, e_2, ..., e_{n-r}. Соответствующая ему в каноническом базисе система вектор–столбцов E_1, E_2, ..., E_{n-r} называется *фундаментальной системой решений.*

Общее решение однородной системы имеет вид:

$X = c_1E_1 + c_2E_2, + ... + c_{n-r}E_{n-r}$, где c_1, c_2, ..., c_{n-r} – произвольные постоянные.

Базисные решения E_1, E_2, ..., E_{n-r} могут быть получены с помощью элементарных преобразований матрицы системы приведением ее к ступенчатому виду, если независимым неизвестным придавать поочередно значение 1, полагая остальные равными нулю. Если задана неоднородная система $AX = b$, то ее общее решение может быть найдено как сумма общего решения соответствующей однородной системы $AX = 0$ и произвольного частного решения неоднородной системы.

Пример 11. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{(2)-(1)\\(3)-(1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \overset{(3)-2(2)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{2(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \overset{(1)+(2)}{\sim}$$

$x_1 - з$ $x_1 - з$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$ Общее решение системы.

$$\begin{cases} x_1 = x_4 - \dfrac{1}{2}x_3, \\ x_2 = \dfrac{3}{2}x_3. \end{cases}$$ Найдем фундаментальную систему решений. Так как $r(A) = 2$, $n = 4$, то независимых неизвестных будет $n - r = 2$, т. е. фундаментальная система будет состоять из двух векторов.

	x_3	x_4	x_1	x_2
E_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
E_2	0	1	1	0

Таким образом, $E_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – образуют фундаментальную систему решений. Общее решение системы есть $X = c_1E_1 + c_2E_2$.

Ответ: векторы E_1, E_2 образуют фундаментальную систему решений, общее решение системы будет $X = c_1E_1 + c_2E_2$, c_1, c_2 – произвольные постоянные,

$$E_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 12. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 9 & -3 \end{pmatrix} \underset{(2)-2(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \overset{5(1)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \overset{(1)-2(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}5x_1-3x_3=0,\\5x_2-x_3=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{5}x_3,\\[2mm] x_2=\dfrac{1}{5}x_3.\end{cases}$$

	x_3	x_1	x_2
E	5	3	1

$E_1=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$. Пространство решений данной системы одномерно и вектор E_1 образует его базис.

Ответ: общее решение системы есть c_1E_1, где $E_1=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$ образует базис пространства решений системы, c_1 – произвольная постоянная.

Пример 13. Найти общее решение неоднородной системы, используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной.

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1,\\x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0,\\3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2,\\4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3.\end{cases}$$

Решение.

Составим расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}2&1&-1&-1&1&1\\1&-1&1&1&-2&0\\3&3&-3&-3&4&2\\4&5&-5&-5&7&3\end{array}\right)\begin{array}{c}(1)\leftrightarrow(2)\\ \sim\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&1&1&-2&0\\2&1&-1&-1&1&1\\3&3&-3&-3&4&2\\4&5&-5&-5&7&3\end{array}\right)\begin{array}{c}(2)-2(1)\\(3)-3(1)\\ \sim\\(4)-4(1)\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 3 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{3}(4)}{\overset{\frac{1}{2}(3)}{\sim}}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right) \underset{(4)-(2)}{\overset{(3)-(2)}{\sim}}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right) \overset{3(1)+(2)}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

$r(A) = r(A\,|\,b) = 2,\ n = 5,\ n - r(A) = 3.$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_5 = 1, \\ 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}x_5, \\ x_2 = \dfrac{1}{3} + x_3 + x_4 - \dfrac{5}{3}x_5. \end{cases}$$

Получив общее решение неопределенной системы уравнений, найдем частное решение неоднородной системы уравнений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0

Таким образом, вектор $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – частное решение неоднородной линейной системы уравнений. Теперь надо в матрице решенной системы столбец свободных членов заменить нулевыми и найти общее решение однородной системы, а затем – фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы. Это будут векторы E_1, E_2, E_3.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_5 = 0, \\ 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_5, \\ x_2 = x_3 + x_4 - \frac{5}{3}x_5; \end{cases}$$ – общее решение однородной системы.

	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2
E_1	1	0	0	0	1
E_2	0	1	0	0	1
E_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: фундаментальная система решений однородной линейной системы уравнений есть

$$E_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{5}{3}\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$ Общее решение неоднородной линейной системы уравнений будет $X = X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, c_1, c_2, c_3 – произвольные действительные постоянные.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить систему уравнений по формулам Крамера и матричным способом.

а) $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=6,\\3x_1+x_2-2x_3=2,\\2x_1-x_2+x_3=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x_1+6x_2+3x_3=21,\\4x_1+8x_2+x_3=18,\\3x_1+5x_2+4x_3=33.\end{cases}$

2. Решить систему уравнений по формулам Крамера и матричным способом.

$\begin{cases}2x_1+3x_2=9,\\3x_1-4x_2=5.\end{cases}$

3. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases}3x_1-2x_2=2,\\4x_1-x_2=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x_3-2x_4=3,\\4x_3-x_4=4;\end{cases}$ в) $\begin{cases}3x_5-2x_6=5,\\4x_5-x_6=7.\end{cases}$

Указание. Записать все три системы в виде одного матричного уравнения.

$\begin{pmatrix}3&-2\\4&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1&x_3&x_5\\x_2&x_4&x_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&5\\1&4&7\end{pmatrix}$, т. е. в виде $AX = B$, или $X = A^{-1}\cdot B$.

4. Является система векторов линейно зависимой или нет?

а) $\begin{cases} a = (5, 6, -1), \\ b = (10, 12, -2); \end{cases}$ б) $\begin{cases} a = (4, -2, 1), \\ b = (2, -1, 3); \end{cases}$ в) $\begin{cases} a = (-1, 3), \\ b = (2, -4); \end{cases}$

г) $\begin{cases} a = (-2, 3, 1, 6), \\ b = (-4, 6, 2, 3). \end{cases}$

5. Проверить, что система векторов $\{a_1, a_2, a_3\}$ образует базис в R_3, и найти разложение вектора d в этом базисе, если:

а) $a_1 = (1, 2, 0)$, $a_2 = (3, 1, 1)$, $a_3 = (4, 3, 0)$; $d = (0, -6, 1)$.
б) $a_1 = (3, 0, 7)$, $a_2 = (3, 1, 5)$, $a_3 = (1, 0, 5)$; $d = (6, 2, 18)$.
в) $a_1 = (5, 1, 3)$, $a_2 = (4, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 3)$; $d = (7, 1, -2)$.

Замечание. Эти задачи решить методом Гаусса.

6. Найти методом Гаусса все решения системы

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2. \end{cases}$$

7. Исследовать систему уравнений с помощью теоремы Кронекера–Капелли.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right).$$

8. Исследовать системы уравнений с помощью теоремы Кронекера–Капелли и решить их.

а) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right);$ б) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right);$

в) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right);$ г) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right);$

д) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right)$.

9. Исследовать совместность и найти общее решение следующих систем:

а) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

10. Найти фундаментальную систему решений и общее решение следующих систем:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x \ = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

11. Найти общие решения неоднородных систем, используя фундаментальную систему решений соответствующих однородных:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

Ответы:

1. а) $x_1 = \frac{3}{14}$, $x_2 = -\frac{5}{2}$; $x_3 = -\frac{29}{14}$; б) $x_1 = 3$, $x_2 = 0$; $x_3 = 6$.

2. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

3. $x_1 = 0$, $x_2 = -1$; $x_3 = 1$, $x_4 = 0$; $x_5 = \frac{9}{5}$, $x_6 = \frac{1}{5}$.

4. а) да; б) нет; в) нет; г) нет;

5. а) $d = a_1 + a_2 - a_3$; б) $d = -a_1 + 2a_2 + 3a_3$;

в) $d = -\frac{3}{8}a_1 + \frac{5}{2}a_2 - \frac{9}{8}a_3$.

6. Система имеет бесконечное множество решений, каждое из которых может быть вычислено по формулам $x = 2z - 1$, $y = z + 1$, где численные значения z задаются произвольно.

7. Система несовместна.

8. а) система несовместна; б) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$; $x_3 = 1$, $x_4 = 1$; в) система несовместна; г) система совместна, имеет бесконечное множество решений $x_1 = 3 - x_3$, $x_2 = 3$; x_3 – произвольная постоянная; д) система совместна, имеет бесконечное множество решений: $z = 4 - 2x - y$, где x и y – произвольные постоянные.

9. а) $\begin{pmatrix} -1+2c_1 \\ 1+c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{11}+\frac{1}{11}c_1-\frac{9}{11}c_2 \\ \frac{10}{11}-\frac{5}{11}c_1+\frac{1}{11}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} c_1 \\ -13+3c_1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -\frac{6}{7}+\frac{8}{7}c_1 \\ \frac{1}{7}-\frac{13}{7}c_1 \\ \frac{15}{7}-\frac{6}{7}c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}+\frac{13}{3}c_1 \\ \frac{2}{3}-\frac{5}{3}c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 14+c_1 \\ -9-2c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} -4+3c_1-2c_2 \\ 3-2c_1+c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

10. а) фундаментальная система решений состоит из одного вектора $E_1 = \begin{pmatrix} \frac{41}{8} \\ -\frac{21}{8} \\ -\frac{3}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$, а общее решение системы есть c_1E_1, где c_1 – произвольная постоянная;

б) фундаментальная система решений –

$$E_1 = \begin{pmatrix} -\frac{19}{8} \\ -\frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы $X = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

в) $c_1E_1 + c_2E_2$, $E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

г) c_1E_1, $E_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

д) $c_1E_1 + c_2E_2$, $E_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. а) $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$,

$$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

б) $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4$,

$$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.4. Линейные операторы. Собственные числа и собственные векторы

Определение 1. *Линейным оператором* в линейном n-мерном пространстве R_n называется всякое отображение A: R_n ® R_n пространства R_n в себя, обладающее свойствами:

$$A(\lambda x) = \lambda Ax \text{ и } A(x + y) = Ax + Ay.$$

Пусть A – линейный оператор в R_n и $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ – некоторый фиксированный базис. Разложим векторы Ae_k, $k = 1, 2, ..., n$ по базису B:

$$Ae_k = a_{1k}e_1 + a_{2k}e_2 + ... + a_{nk}e_k,\ k = 1, 2, ..., n.$$

Тогда матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей оператора A в базисе B, причем

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, ..., Ae_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(Матрица состоит из вектор-столбцов Ae_k, $k = 1, 2, ..., n$.)

Определение 2. Пусть число λ и вектор $x \in R_n$, $x \neq 0$, таковы, что $Ax = \lambda x$.

Тогда число λ называется *собственным числом* линейного оператора A, а вектор x – *собственным вектором* этого оператора, соответствующим собственному числу λ.

В линейном n-мерном пространстве R_n это векторное равенство эквивалентно матричному $(A - \lambda E)X = 0$, $X \neq 0$.

Отсюда следует, что число λ есть собственное число оператора A в том и только в том случае, когда $det\,(A - \lambda E) = 0$, т. е. λ есть корень многочлена $\varphi(\lambda) = det\,(A - \lambda E)$, называемого характеристическим многочленом оператора A. Столбец координат X любого собственного вектора, соответствующего собственному числу λ, есть некоторое ненулевое решение соответствующей однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Пример 1. Вычислить собственные числа и собственные векторы матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

Составим характеристический многочлен и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4.$$

Вычислим координаты собственных векторов, соответствующих собственным числам λ_1 и λ_2:

1) $\lambda = 1$;

$$\begin{cases} (2-1)x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + (3-1)x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 0; \end{cases}$$

$x_1 = -2x_2$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Собственный вектор $X_1 = c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $\lambda = 4$; $\begin{cases} (2-4)x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + (3-4)x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0; \end{cases}$

$x_1 = x_2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Собственный вектор $X_2 = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c – произвольное постоянное число.

Ответ: $\lambda_1 = 1,\ X_1 = c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = 4,\ X_2 = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

Решение.

Характеристическое уравнение

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 7.$

1) $\lambda_1 = 1.$

$$\begin{cases} (3-1)x_1 + 2x_2 + 0\cdot x_3 = 0, \\ 2x_1 + (4-1)x_2 - 2x_3 = 0, \\ 0\cdot x_1 - 2x_2 + (5-1)x_3 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{(3)+(2)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{(1)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$x_1 + 2x_3 = 0,\ x_2 - 2x_3 = 0;\ x_1 = -2x_3,\ x_2 = 2x_3.$

$x_3 = -\dfrac{1}{2},\ x_2 = -1,\ x_1 = 1.$

Собственный вектор $X_1 = c\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$

2) $\lambda_2 = 4$.

$$\begin{cases}(3-4)x_1 + 2x_2 + 0\cdot x_3 = 0,\\ 2x_1 + 0\cdot x_2 - 2x_3 = 0,\\ -2x_2 + (5-4)x_3 = 0;\end{cases} \quad \begin{cases}-x_1 + 2x_2 = 0,\\ 2x_1 - 2x_3 = 0,\\ -2x_2 + x_3 = 0;\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \overset{(2)+(1)}{\sim} \begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \overset{(3)+(2)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \overset{(1)+(2)}{\sim} \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}. \; x_1 = x_3,\; 2x_2 = x_3.$$

$x_3 = 1,\ x_2 = \dfrac{1}{2},\ x_1 = 1;\ X_2 = c\cdot\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ – собственный вектор.

3) $\lambda = 7$.

$$\begin{cases}(3-7)x_1 + 2x_2 = 0,\\ 2x_1 + (4-7)x_2 - 2x_3 = 0,\\ 0\cdot x_1 - 2x_2 + (5-7)x_3 = 0;\end{cases} \quad \begin{cases}-4x_1 + 2x_2 = 0,\\ 2x_1 - 3x_3 - 2x_3 = 0,\\ -2x_2 - 2x_3 = 0;\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \overset{(2)+(1)}{\sim} \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \overset{-2\cdot(2)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \overset{(3)-(2)}{\sim} \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \overset{(1)-(2)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}2x_1 + x_3 = 0,\\ x_2 + x_3 = 0;\end{cases} \begin{cases}x_1 = -\dfrac{1}{2}x_3,\\ x_2 = -x_3;\end{cases} \quad x_3 = -1,\ x_2 = 1,\ x_1 = \frac{1}{2}.$$

Собственный вектор $X_3 = c \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda = 1,\ c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\lambda = 4,\ c\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 7,\ c\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти собственные числа и собственные векторы матриц.

а) $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

е) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответы:

1. а) $\lambda = 5,\ X_1 = c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\lambda = 20,\ X_2 = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $c \neq 0$;

б) $\lambda = 1,\ X_1 = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda = 13,\ X_2 = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $c \neq 0$;

в) $\lambda = 1,\ X_1 = c\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\ \lambda = 3,\ X_2 = c\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix};\ c \neq 0;$

г) $\lambda = -1,\ X = c\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix};\ c \neq 0;$

д) $\lambda = 2,\ X = c_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, c_1 и c_2 не равны одновременно нулю;

е) $\lambda = -1,\ X_1 = c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\ \lambda = 2,\ X_2 = c\begin{pmatrix}4\\1\\7\end{pmatrix};\ \lambda = -2,\ X_3 = c\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix};\ c \neq 0.$

4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

4.1. Алгебраическая форма записи комплексных чисел

Определение 1. *Комплексными числами* называются выражения вида

$$z = x + iy,$$

где x и y – произвольные действительные числа, i – мнимая единица, $i = \sqrt{-1}$ или $i^2 = -1$.

Определение 2. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Определение 3. *Суммой* комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

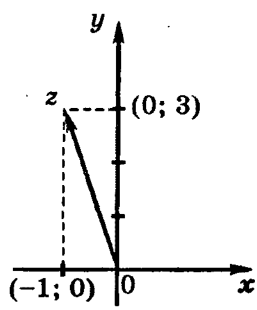
Определение 4. *Произведением* комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Определение 5. Число x называется *действительной частью* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается символом $\operatorname{Re} z$, т. е. $x = \operatorname{Re} z$.

Определение 6. Число y называется *мнимой частью* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается символом $\operatorname{Im} z$, т. е. $y = \operatorname{Im} z$.

Определение 7. Комплексное число $x - iy$ называется *сопряженным* с комплексным числом $z = x + iy$ и обозначается $\overline{z} = x - iy$, причем $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить на плоскости xOy в виде точки $M(x; y)$ с абсциссой x и ординатой y или радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$. Справедливо и обратное утверждение.



Пример 1. Найти значение комплексного числа z и изобразить на комплексной плоскости $z = 1 + 2i - \overline{(2 + i)}$.

Решение.

Так как $\overline{(2 + i)} = 2 - i$, то $z = 1 + 2i - (2 - i) = 1 + 2i - 2 + i = -1 + 3i$.

Ответ: $z = -1 + 3i$ – комплексное число в алгебраической форме записи.

Пример 2. Вычислить $z = (1 + 2i)(2 + i)$.

Решение.

Комплексные числа перемножаются как двучлены, причем i^2 заменяется на -1.

$z = (1 + 2i)(2 + i) = 2 + 4i + i + 2i^2 = 2 + 5i - 2 = 5i$.

Ответ: $5i$.

Пример 3. Разделить число $z_1 = 2 + 3i$ на число $z_2 = 1 + 4i$.

Решение.

Найти частное $\dfrac{z_1}{z_2}$ – это значит представить его в алгебраической форме. Для этого числитель и знаменатель дроби надо умножить на число, сопряженное знаменателю, т. е. на $\overline{z_2} = \overline{1+4i} = 1 - 4i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1+4i} = \frac{(2+3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{2+3i-8i-12i^2}{1+16} =$$

$$= \frac{14-5i}{17} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}i.$$

Ответ: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{14}{17} - \dfrac{5}{17}i$ – в алгебраической форме.

Пример 4. Выполнить операции и представить результат в алгебраической форме:

а) $z = (2i - i^2)^2 + (1 - 3i)^3$.

Решение.

Так как $i^2 = -1$, то $z = (2i + 1)^2 + (1 - 3i)^2 = (2i)^2 + 2 \cdot (2i) + 1 + 1 - 3(3i) + 3 \cdot (3i)^2 - (3i)^3 = -4 + 4i + 1 + 1 - 9i - 27 + 27i = -29 + 22i$.

Ответ: $z = -29 + 22i$.

б) $z = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

Решение.

Представим сначала дробь $\dfrac{1-i}{1+i}$ в алгебраической форме:

$$\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{1-i^2} = \frac{1-2i+i^2}{1+1} = \frac{1-2i-1}{2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Тогда $z = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = -i^3 = -i^2 \cdot i = i.$

Ответ: $z = i$.

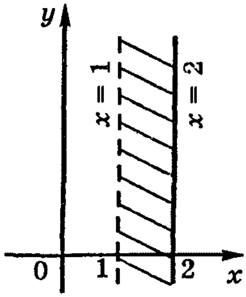
Пример 5. Какие множества точек плоскости задаются условиями:

а) $\mathrm{Re}\ z = 2$.

Решение.

Так как $\mathrm{Re}\ z = x$, то условие $\mathrm{Re}\ z = 2$ эквивалентно уравнению $x = 2$ и задает прямую, параллельную мнимой оси Oy.

Ответ: $\mathrm{Re}\ z = 2 \Leftrightarrow x = 2$.



б) $1 < \mathrm{Re}\ z \le 2$.

Так как $\mathrm{Re}\ z = x$, то условие $1 < \mathrm{Re}\ z \le 2$ эквивалентно условию $1 < x \le 2$. Получаем бесконечную вертикальную полосу между прямыми $x = 1$ и $x = 2$, включая и правую прямую $x = 2$.

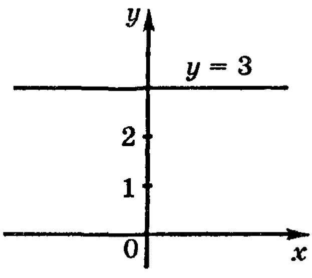
Ответ: $1 < x \le 2$.

в) $\mathrm{Im}\ z = 3$.

Решение.

Условие $\mathrm{Im}\ z = 3$ эквивалентно уравнению $y = 3$ и задает прямую, параллельную действительной оси Ox.

Ответ: прямая $y = 3$.



Пример 6. Вычислить $z_1\bar{z}_2$ и $\dfrac{\bar{z}_1^2}{z_2}$,

если $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + 2i$.

Решение.

Так как $\bar{z}_1 = \overline{3+2i} = 3 - 2i$, $\bar{z}_2 = \overline{2+2i} = 2 - 2i$, то

$$z_1\bar{z}_2 = (3 + 2i)(2 - 2i) = 2(3 + 2i)(1 - i) = 2(3 + 2i - 3i - 2i^2) = $$
$$= 2(3 - i + 2) = 2(5 - i) = 10 - 2i;$$

$$\frac{\bar{z}_1^2}{z_2} = \frac{(3-2i)^2}{2+2i} = \frac{9-12i+4i^2}{2(1+i)} = \frac{9-12i-4}{2(1+i)} = \frac{5-12i}{2(1+i)} =$$

$$= \frac{(5-12i)(1-i)}{2(1+i)(1-i)} = \frac{5-12i-5i+12i^2}{2\cdot 2} = \frac{-17i+5-12}{4} =$$

$= -\frac{7}{4} - \frac{17}{4}i.$

Ответ: $z_1\bar{z}_2 = 10 - 2i$, $\frac{\bar{z}_1^2}{z_2} = -\frac{7}{4} - \frac{17}{4}i.$

Пример 7. Найти действительные решения уравнения $(1 + i)x + (-2 + 5i)y = -4 + 17i.$

Решение.

Раскроем скобки в уравнении и представим левую часть уравнения в алгебраической форме. $x + ix - 2y + 5yi = -4 + 17i$, $(x - 2y) + i(x + 5y) = -4 + 17i$. По определению 2 равенства двух комплексных чисел получаем

$\begin{cases} x - 2y = -4, \\ x + 5y = 17 \end{cases}$ – система линейных алгебраических уравнений относительно x и y.

Из второго уравнения системы вычтем первое: $7y = 21$, $y = 3$. Из первого уравнения системы получаем $x = 2$.

Ответ: $x = 2$, $y = 3$.

Пример 8. Решить уравнение $x^2 + x + 11 = 0.$

Решение.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 44}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-43}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{43}}{2}i.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{43}}{2}i$, $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{43}}{2}i$ – комплексно сопряженные числа.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти сумму $z_1 + z_2$ и разность $z_1 - z_2$ чисел $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 - 2i$.

2. Умножить комплексное число $3 - 4i$ на -5.

3. Найти произведения комплексных чисел: а) $2 - 3i$ и $1 + 2i$; б) $3 + 5i$ и $4 - i$.

4. Найти а) $\frac{3 - i}{4 + 5i}$; б) $\left(\frac{\overline{1 - i\sqrt{3}}}{\sqrt{3} + i}\right)^2$; в) $(1 - i\sqrt{3})\overline{(\sqrt{3} + i)}$.

5. Найти действительные решения уравнения $12[(2x + i)(1 + i) + (x + y)(3 - 2i)] = 17 + 6i.$

6. Выполнить операции и представить результат в алгебраической форме:

а) $(1-i)^3-(1+i)^3$; б) $(1+2i)^2$.

7. Какие множества точек плоскости задаются условиями: а) $1 \le \operatorname{Re} z < 2$; $3 < \operatorname{Im} z \le 5$; б) $\operatorname{Im} z \ge 2$.

8. Найти значение комплексного числа z и изобразить на комплексной плоскости $z = \dfrac{(1+i)(3+i)}{3-i} - \dfrac{(1-i)(3-i)}{3+i}$.

9. Вычислить $i^5 + i^6 + i^7 + i^8$.

10. Найти действительную и мнимую части комплексного числа $z = \dfrac{2+3i}{1-5i} + i^4$.

11. Решить уравнение $x^2 + 2x + 3 = 0$.

Ответы:

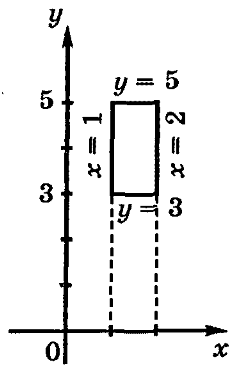
1. $z_1 + z_2 = 5 - i$, $z_1 - z_2 = -1 + 3i$;

2. $-15 + 20i$; **3.** а) $8 + i$; б) $17 + 17i$;

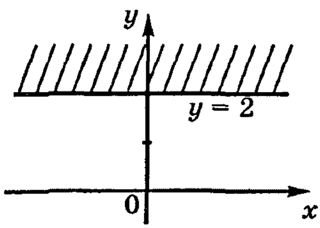
4. а) $\dfrac{7}{41} - \dfrac{19}{41}i$, б) $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, в) $-4i$;

5. $x = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{1}{4}$; **6.** а) $-4i$, б) $-3 + 4i$;

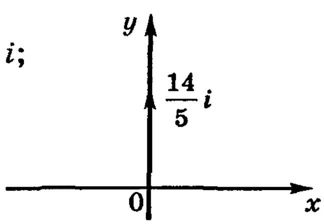
7. а) прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 3$, $y = 5$, причем первая и четвертая стороны включаются в этот прямоугольник;



б) полуплоскость, расположенная выше прямой $y = 2$, включая и саму эту прямую.



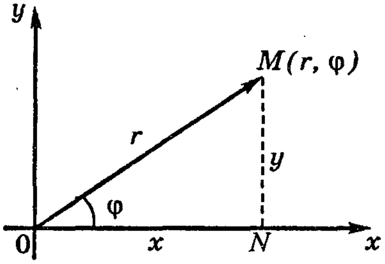
8. $z = \dfrac{14}{5}i$;



9. 0; **10.** $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}$;

11. $x_1 = -1 - \sqrt{2}\,i$, $x_2 = -1 + \sqrt{2}\,i$ – комплексно сопряженные числа.

4.2. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел



Из ΔOMN следует, что
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Тогда комплексное число $z = x + iy$ можно записать в тригонометрической форме
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Определение 1. Число $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается символом $|z|$, т. е. $|z| = r$.

Тогда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Модуль числа z равен расстоянию r точки M, изображающей это число, от начала координат.

Из равенств (1) получим систему уравнений

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (*)$$

для определения угла φ.

Определение 2. Всякое решение φ системы (*) уравнений называется *аргументом* комплексного числа $z = x + iy \neq 0$. Все аргументы числа z различаются на целые кратные 2π и обозначаются единым символом $\operatorname{Arg} z$.

Определение 3. *Главным значением* аргумента называется значение $\operatorname{Arg} z$, удовлетворяющее условию $0 \le \operatorname{Arg} z < 2\pi$ (или условию $-\pi < \operatorname{Arg} z \le \pi$) и обозначается символом $\arg z$. Таким образом,

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Пусть даны два комплексных числа
$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, тогда
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]$,

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} [\cos (\varphi_2 - \varphi_1) + i \sin (\varphi_2 - \varphi_1)]$$

Формула Муавра.

$[r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, где n – целое число.

Корень n-й степени из комплексного числа.

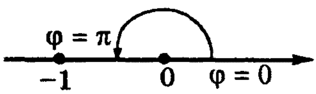
Если $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то корень n-й степени из данного числа определяется формулой

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

и имеет точно n различных значений.

Пример 1. Даны комплексные числа $z_1 = -1 + 3i$ и $z_2 = 5 + 2i$. Вычислить модули их произведения и частного.

Решение.



Так как $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, то вычислим отдельно $|z_1|$ и $|z_2|$:

$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, $|z_2| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

Тогда $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{29} = \sqrt{290}$.

Так как $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{10}{29}}$.

Ответ: $\sqrt{290}$, $\sqrt{\frac{10}{29}}$.

Пример 2. Найти модули и главные значения аргументов следующих чисел:

а) -1; б) $-2 + 2i$; в) $-2 - 2i$.

Решение.

а) Изобразим число -1 в полярной системе координат. Следовательно, $|-1| = 1 = r$, $\arg(-1) = \pi$.

б) $z = -2 + 2i$.

Решение.

Здесь $x = -2$, $y = 2$, значит, $r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

$\cos\varphi = \dfrac{x}{r} = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\varphi = \dfrac{y}{r} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, $|-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$, $\arg(-2 + 2i) = \dfrac{3\pi}{4}$.

в) $z = -2 - 2i$.

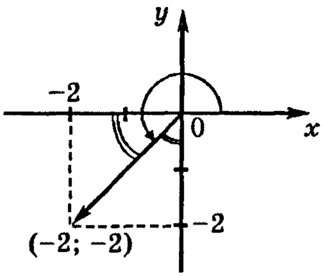
Решение.

$x = -2$, $y = -2$, $r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

$\cos\varphi = \dfrac{x}{r} = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sin\varphi = \dfrac{y}{r} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\arg z = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$.



Ответ: а) 1 и π; б) $2\sqrt{2}$ и $\dfrac{3\pi}{4}$; в) $2\sqrt{2}$ и $\dfrac{5\pi}{4}$.

Пример 3. Найти модуль и аргумент числа $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$.

Решение.

Так как $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, то $\left|\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3\right| = \left|\dfrac{1+i}{1-i}\right|^3 = \dfrac{|1+i|^3}{|1-i|^3}$. Вычислим $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$,

тогда $\left|\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3\right| = \dfrac{|1+i|^3}{|1-i|^3} = \dfrac{(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{2})^3} = 1$.

Если $z = z_1^n$, то $\arg z = n \arg z_1$.

Поэтому $\arg\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3 = 3\arg\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right) =$

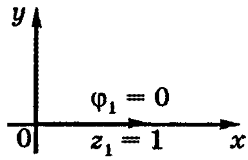
$= 3[\arg(1+i) - \arg(1-i)] = 3\left(\dfrac{\pi}{4} - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ: 1 и $\dfrac{3\pi}{2}$.

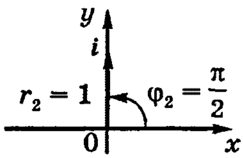
Пример 4. Представить в тригонометрической форме следующие числа:

а) $z_1 = 1$; б) $z_2 = i$; в) $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$; г) $z_4 = -2$; д) $z_5 = -2i$, взяв для аргумента главное значение.
Решение.

а) Для числа $z_1 = 1$ имеем $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ и $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 1$; для всех действительных положительных чисел $\arg z = 0$, следовательно, и $\varphi_1 = \arg z_1 = \arg 1 = 0$. Таким образом
$z_1 = 1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) =$
$= 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$.
Изобразим $z_1 = 1$ в виде вектора
Очевидно, $r_1 = 1$, $\varphi_1 = 0$.



б) Для числа $z_2 = i$ имеем $x_2 = 0$, $y_2 = 1$, $r_2 = 1$.
Геометрически:



Для всех чисто мнимых чисел с положительной мнимой частью $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$, следовательно, и $\varphi_2 = \arg z_2 =$ $= \arg i = \dfrac{\pi}{2}$.

Таким образом, $z_2 = i = 1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

в) Для числа $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$ имеем $x_3 = -1$, $y_3 = \sqrt{3}$, $r_3 =$ $= \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = 2$, а так как по формулам (3) $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2}$,

$\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то для z_3 аргумент $\varphi_3 = \arg z_3 = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ (точка z_3 принадлежит второму квадранту). Таким образом, $z_3 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

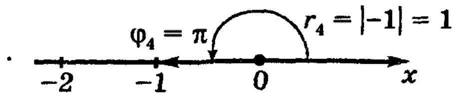
г) Для числа $z_4 = -2$ имеем $x_4 = -2$, $y_4 = 0$, $r_4 = 2$.

Для всех действительных отрицательных чисел $\arg = \pi$, следовательно, и $\varphi_4 = \arg z_4 = \arg(-2) = \pi$.

Таким образом,

$z_4 = -2 = +2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Геометрически:



д) Для числа $z_5 = -2i$ будет $x_5 = 0$, $y_5 = -2$, $r_5 = 2$. Для всех чисто мнимых чисел с отрицательной мнимой частью $\arg z = -\dfrac{\pi}{2}$, а потому и $\varphi_5 = \arg z_5 = \arg(-2i) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Следовательно, $z_5 = -2i = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$.

Ответ: а) $z_1 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$;

б) $z_2 = i = 1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$;

в) $z_3 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$;

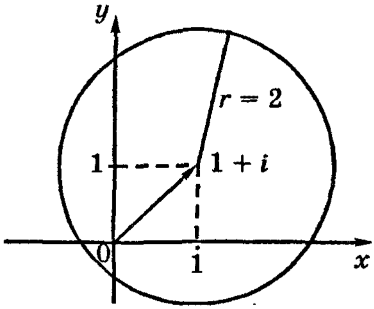
г) $z_4 = -2 = +2(\cos\pi + i\sin\pi)$;

д) $z_5 = -2i = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$.

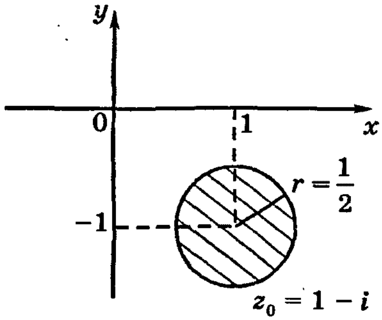
Пример 5. Какие множества точек плоскости z задаются условиями: а) $|z - (1 + i)| = 2$; б) $|z - (1 - i)| < \dfrac{1}{2}$?

Решение.

Вектор $z - (1 + i)$ имеет начало в точке $1 + i$ и конец в точке z, а потому $|z - (1 + i)|$, как длина этого вектора, есть расстояние между точками $1 + i$ и z. Поэтому условие $|z - (1 + i)| = 2$ определяет точки z, удаленные от точки $1 + i$ на расстояние 2. Все такие точки z заполняют окружность с центром в точке $1 + i$ и радиуса 2. Итак, условие $|z - (1 + i)| = 2$ определяет окружность с центром в точке $1 + i$ и радиуса 2.



б) Условие $|z - (1 - i)| = \frac{1}{2}$ определяет множество точек z, удаленных от точки $1 - i$ на расстояние, меньшее $\frac{1}{2}$. Все такие точки z заполняют круг с центром в точке $1 - i$ и радиуса $\frac{1}{2}$; ограничивающая круг окружность исключается.



Ответ: а) окружность с центром в точке $1 + i$ и радиуса 2; б) внутренние точки круга с центром в точке $1 - i$ и радиуса $\frac{1}{2}$.

Пример 6. Вычислить $(1 + i)^{10}$.

Решение.

Представим число $1 + i$ в тригонометрической форме и применим формулу Муавра.

Так как $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, то $(1 + i)^{10} =$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right) = 32\,i.$$

Ответ: $32\,i$.

Пример 7. Получить тригонометрические формулы для $\cos 2\varphi$ и $\sin 2\varphi$.

Решение.

При $r = 1$ формула Муавра имеет вид

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Пусть $n = 2$, тогда $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$ или $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi\, i = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$.

Отделяя в этом равенстве действительные и мнимые части, получим:

$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$.

Ответ: $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$.

Пример 8. Вычислить все значения $\sqrt[3]{1}$.

Решение.

Представим 1 в тригонометрической форме

$1 = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$.

Тогда $\sqrt[3]{1} = 1\cdot\left(\cos\dfrac{0+2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{0+2k\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$.

При $k = 0$ получаем $w_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$;

при $k = 1$, получаем $\sqrt[3]{1}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$;

при $k = 2$, получаем $\sqrt[3]{1}\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$;

Ответ: $\sqrt[3]{1}$ имеет ровно 3 значения: $w_0 = 1$;

$$w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;\ w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Пример 9. Решить уравнение $z^4 + 1 = 0$.

Решение.

$z^4 = -1$, $z = \sqrt[4]{-1}$. Так как $-1 = 1\cdot(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi))$, то

$$z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4},\ k = 0, 1, 2, 3.$$

При $k = 0$ получаем $z_0 = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

при $k = 1$ получаем $z_1 = \cos\dfrac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi+2\pi}{4} = \cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

при $k = 2$ получаем $z_2 = \cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{4} =$

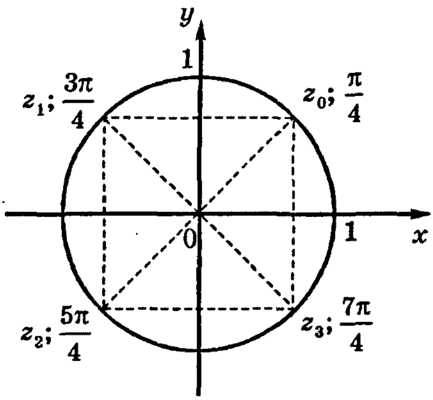
$= \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

при $k = 3$ получаем $z_3 =$

$= \cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+6\pi}{4} =$

$= \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} -$

$- i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Изобразим значения корня $\sqrt[4]{-1}$ геометрически.



Все значения $\sqrt[4]{-1}$ лежат на окружности радиуса $r = 1$ и являются вершинами квадрата, вписанного в окружность.

Ответ: $\sqrt[4]{-1}$ имеет следующие 4 значения:

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти модули и аргументы следующих чисел:

а) i; б) -3; в) $1 + i^{123}$; г) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\frac{1-i}{1+i}$; е) $(-4 + 3i)^3$;

ж) $\frac{(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^6}$.

2. Доказать $|\bar{z}| = |z|$, $z \cdot \bar{z} = |\bar{z}|^2$, $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$, $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$.

3. Представить в тригонометрической форме следующие числа : а) $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$; б) $z_2 = 1 + i$; в) $z_3 = 1 - \sqrt{3}\,i$; г) $z_4 = i$; д) $z_5 = 5$.

4. Какие множества точек плоскости z задаются условиями: а) $|z| = 2$; б) $1 < |z| \le 4$; в) $\arg z = \frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

5. Вычислить а) $(1+i)^{37}$; б) $(1-i)^8$.

6. Отделить действительную часть от мнимой в равенстве $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$.

Замечание. Воспользоваться формулами
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ и $i^2 = -1$.

7. Вычислить: а) $\sqrt{3+4i}$; б) $\sqrt[4]{1}$.

8. Решить уравнение $z^2 + 6z + 13 = 0$.

Ответы:

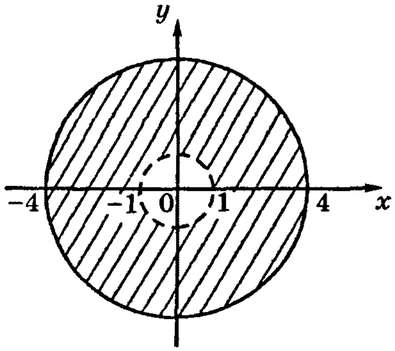
1. а) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$; б) $|z| = 3$, $\arg z = \pi$; в) $|z| = 2$, $\arg z = -\frac{\pi}{4}$; г) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$; д) $|z| = 1$, $\arg z = -\frac{\pi}{2}$; е) $|z| = 125$, $\arg z = -\frac{\pi}{2} + 3\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$; ж) $|z| = 1$, $\arg z = 0$ ($\arg z = 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$).

3. а) $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; б) $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;
в) $z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; г) $z_4 = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;
д) $z_5 = 5(\cos 0 + i\sin 0)$.

4. а) окружность радиуса 2 с центром в начале координат;

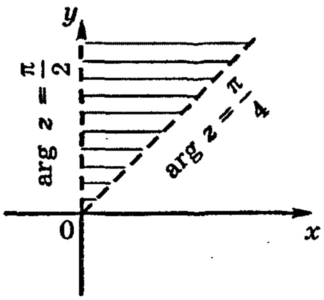
б) кольцо между концентрическими окружностями радиусов 1 и 4 с центром в начале координат, включая внешнюю окружность.

Геометрически:



в) биссектриса I координатного угла;

г) бесконечный сектор, заключенный между лучами $\arg z = \frac{\pi}{4}$ и $\arg z = \frac{\pi}{2}$, причем сами эти лучи исключаются.



5. а) $2^{18}(1 + i)$; б) 16.

6. $\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$, $\sin 3\varphi = -\sin^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi$.

7. а) $\pm(2 + i)$; б) $w_0 = 1$, $w_1 = i$, $w_2 = -1$, $w_3 = -i$;

8. $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = -3 + 2i$.

4.3. Показательная форма записи комплексных чисел

Представим комплексное число z в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

По формуле Эйлера $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$. Следовательно, всякое комплексное число z можно представить в форме, которая называется показательной:

$$z = re^{i\varphi}, \qquad (*)$$

где r – модуль комплексного числа, φ – аргумент комплексного числа.

Пример 1. Представить в показательной форме следующие числа: а) 1; б) i; в) -2; г) $-i$.

Решение.

а) $1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = e^{2k\pi i}$;

б) $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$;

в) $-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2\, e^{\pi i}$;

г) $-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

Пример 2. Из формулы (*) получаем формулу для извлечения корня n-й степени из числа z:

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Пример 3. Данные числа z_1 и z_2 представить в показательной форме и выполнить указанные действия над ними

$z_1 z_2$, $\dfrac{z_1^2}{z_2}$, если $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$, $z_2 = 3 - 3\sqrt{3}\,i$.

Решение.

Представим в показательной форме числа z_1 и z_2.

$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$, $x_1 = 2\sqrt{3}$, $y_1 = -2$,

$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{12+4} = 4.$

$\cos\varphi = \dfrac{x_1}{r} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin\varphi_1 = -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{6}.$$

Тогда $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$; $z_1 = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$. $z_2 = 3 - 3\sqrt{3}\,i$, $x_2 = 3$, $y_2 = -3\sqrt{3}$, $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{9+27} = 6.$

$\cos\varphi_2 = \dfrac{x_2}{r} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi_2 = -\dfrac{3\sqrt{3}}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{cases} \cos\varphi_2 = \dfrac{1}{2}, \\ \sin\varphi_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \Rightarrow \varphi_2 = -\frac{\pi}{3}.$$

Тогда $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} = 6e^{-\frac{\pi}{3}i}$.

Найдем $z_1 \cdot z_2 = 4\,e^{-\frac{\pi}{6}i} \cdot 6e^{-\frac{\pi}{3}i} = 24e^{-\frac{\pi}{2}i}$; $z_1 z_2 = 24e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

Найдем $\dfrac{z_1^2}{z_2} = \dfrac{\left(4e^{-\frac{\pi}{6}i}\right)^2}{6e^{-\frac{\pi}{3}i}} = \dfrac{16e^{-\frac{\pi}{3}i}}{6e^{-\frac{\pi}{3}i}} = \dfrac{8}{3}$; $\dfrac{z_1^2}{z_2} = \dfrac{8}{3}$.

Ответ: $z_1 z_2 = 24e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $\dfrac{z_1^2}{z_2} = \dfrac{8}{3}$.

Пример 4. Вычислить значения функции $w = e^z$, где

а) $z_1 = 1 + \dfrac{\pi}{4}i$; б) $z_2 = \dfrac{\pi}{2}i$; в) $z_3 = 1 + i$.

Решение.

а) $e^{1+\frac{\pi}{4}i} = e \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = e\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = e\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $e^{0+\frac{\pi}{2}i} = \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = i$;

в) $e^{1+i} = e(\cos 1 + i\sin 1) \approx 0{,}54 + i\,0{,}83$.

Ответ: а) $e\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) i, в) $0{,}54 + i\,0{,}83$.

Задания для самостоятельного решения

1. Представить в показательной форме следующие комплексные числа: а) $\dfrac{7+24i}{5}$; б) $5 - 12i$; в) $-3 - 4i$; г) $1 + i$; д) $1 - i$.

2. Данные числа z_1 и z_2 представить в показательной форме и выполнить указанные над ними действия

$z_1^2 \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\dfrac{z_2}{z_1}}$, если $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_2 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$.

3. Какая линия плоскости комплексного определяется уравнением $z = e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \le \pi$?

4. Вычислить значения функции $w = e^z$, где

а) $z_1 = 2 + i\dfrac{\pi}{3}$; б) $z_2 = 2\pi i$; в) $z_3 = \pi n i$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Ответы:

1. а) $5e^{i\operatorname{arctg}\frac{24}{7}}$; б) $13e^{i\operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)}$; в) $5e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi\right)}$.

2. $16e^{i\frac{7\pi}{4}}$, $2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

3. Окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

4. а) $e^2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) 1; в) $(-1)^n$, $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$.

5. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.1. Понятие функции одной переменной

Определение 1. Если каждому значению x числового множества X по правилу f соответствует единственное число множества Y, то говорят, что на числовом множестве X задана *функция* $y = f(x)$, $x \in X$.

В этом случае x называется *аргументом*, y – *значением функции*. Множество X называется *областью определения* функции, Y – *множеством значений* функции.

Часто задают это правило формулой; например, $y = 2x + 5$ или $y = \dfrac{x^2 + 7}{2x - 7}$. Указанный способ задания функции при помощи формулы называется аналитическим.

Определение 2. *Графиком функции* $y = f(x)$ называется множество точек плоскости, координаты x, y которых удовлетворяют соотношению $y = f(x)$.

Четность и нечетность

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если она обладает следующими двумя свойствами:

1) область определения этой функции симметрична относительно начала координат O;
2) для любого значения x, принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если:

1) область определения этой функции симметрична относительно точки O;
2) для любого значения x, принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной функции симметричен относительно начала координат $O(0; 0)$. Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется функцией общего вида.

Определение 5. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что для каждого значения x из области определения этой функции $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$. Число T называется периодом функции. Очевидно, что $f(x + nT) = f(x)$, где $n \in Z$.

Пример 1. Найти области определения следующих функций.

а) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-9}$.

Решение.

В данном примере – радикал четной степени, поэтому область определения задается системой неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq 9; \end{cases} \Rightarrow x \geq 9.$$

Ответ: $[9; +\infty)$.

б) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+14}{3x-1}}$.

Решение.

$$\frac{3x+14}{3x-1} \geq 0, \quad \frac{x+\frac{14}{3}}{x-\frac{1}{3}} \geq 0.$$ Методом интервалов находим

$$x > \frac{1}{3},\ x \leq -\frac{14}{3}.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{14}{3}\right] \cup \left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

в) $f(x) = \lg(x + 7) - \dfrac{1}{2}\lg(2x - 1)$.

Решение.

Область определения данной функции задается системой неравенств

$$\begin{cases} x + 7 > 0, \\ 2x - 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -7, \\ x > \dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

г) $f(x) = \log_{\frac{x-1}{x+5}} 0{,}3$.

Решение.

Область определения данной функции задается системой неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+5} > 0, \\ \dfrac{x-1}{x+5} \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5,\ x > 1, \\ x - 1 \neq x + 5; \end{cases} \begin{cases} x < -5, x > 1, \\ x - \text{любое}; \end{cases} \Leftrightarrow x < -5,\ x > 1.$$

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$.

д) $y = \lg(x-1) - \arcsin\dfrac{x}{3}$.

Решение.

Область определения данной функции задается системой неравенств

$$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ -1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ -3 \leq x \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 3.$$

Ответ: $(1; 3]$.

Пример 2. Выясните, является ли заданная функция четной или нечетной или не является ни четной, ни нечетной.

а) $y = \dfrac{x^2 \sin 3x}{x^6 + 1}$.

Решение.

Область определения функции – $(-\infty; +\infty)$ симметрична относительно начала координат;

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 \sin(-3x)}{(-x)^6 + 1} = -\frac{x^2 \sin 3x}{x^6 + 1} = -y(x).$$

Ответ: функция нечетна.

б) $y = x^3 - 2x^5$.

Решение.

Область определения функции – $(-\infty; +\infty)$;

$y(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^5 = -x^3 + 2x^5 = -(x^3 - 2x^5) = -y$.

Ответ: функция нечетна.

в) $y = \dfrac{3x\,\mathrm{tg}\,3x}{x^2+4}$.

Решение.

Область определения функции – $(-\infty; +\infty)$.

$$y(-x) = \frac{3\cdot(-x)\,\mathrm{tg}\,(-4x)}{(-x)^2+1} = \frac{3x\,\mathrm{tg}\,4x}{x^2+4} = y(x).$$

Ответ: функция четна.

г) $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

Решение.

Область определения функции найдем, решая неравенство методом интервалов:

$\dfrac{1-x}{1+x} > 0$ или $\dfrac{x-1}{x+1} < 0$. Отсюда $-1 < x < 1$.

Интервал $(-1; 1)$ симметричен относительно начала координат.

$$y(-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln\frac{1-x}{1+x} = -y(x).$$

Ответ: функция нечетна.

д) $y = (x+4)^2\cos 2x$.

Решение.

Область определения функции – интервал $(-\infty; +\infty)$;

$y(-x) = (4-x)^2\cos(-2x) = (x-4)^2\cos 2x = y_1(x)$.

Ответ: функция общего вида.

Пример 3. Найти наименьший период следующих функций.

а) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

Решение.

Область определения функции – вся числовая ось Ox, кроме точек $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. Следовательно, если точка x принадлежит области определения данной функции, то точки $x + 2\pi$, $x - 2\pi$ также принадлежат этой области определения;

$$f(x+2\pi) = \frac{\cos(x+2\pi)}{1+\sin(x+2\pi)} = \frac{\cos x}{1+\sin x} = f(x).$$

Ответ: наименьший период данной функции $T = 2\pi$.

б) $f(x) = |\sin x|$.

Решение.

Областью определения функции $f(x)$ является вся числовая ось Ox; для любого x точки $x + \pi$ и $x - \pi$ принадлежат этой области определения,

$f(x + \pi) = |\sin (x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$.

Ответ: данная функция является периодической с периодом π.

в) $f(x) = 3\sin x + \sin 2x$.

Решение.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что число π не является периодом данной функции.

Возьмем $T = 2\pi$, $f(x + 2\pi) = 3\sin (x + 2\pi) + \sin 2(x + 2\pi) = 3\sin x + \sin 2x = f(x)$.

Ответ: $T = 2\pi$ – наименьший положительный период данной функции.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти области определения следующих функций:

а) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3x+2}$; б) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$;

в) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x+1}$; г) $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$; д) $f(x) = \dfrac{x}{\cos \pi x}$.

2. Найти наименьший положительный период каждой из следующих функций:

а) $f(x) = \sin x \cdot \sin 3x$; б) $f(x) = \sin x + \sin 2x$;

в) $f(x) = \sin^2 x$.

3. Выясните, является ли заданная функция четной, нечетной или функцией общего вида:

а) $y = \dfrac{x^2}{x^4-1}$; б) $y = x^3 - 2x$; в) $\sqrt{x-1}$; г) $y = |x| + \cos x$;

д) $y = x + \operatorname{tg} 2x$; е) $y = x^2 + \sin x$.

Ответы:

1. а) $x_1 \neq -1$, $x_2 \neq -2$; б) $[-2; 0] \cup [2; \infty)$; в) $[-9; -1) \cup (-1; 9]$;

г) $x \neq k\pi$, $k \in Z$; д) $x \neq \dfrac{1}{2} + k$, $k \in Z$;

2. а) $T = 2\pi$; б) $T = 2\pi$; в) $T = \pi$.

3. а) четная; б) нечетная; в) общего вида; г) четная; д) нечетная; е) общего вида.

5.2. Предел числовой последовательности и его свойства

Определение 1. Конечное число a называется *пределом числовой последовательности* x_1; x_2; ... ; x_n; ... (или просто $\{x_n\}$), если для любого $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малого) существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n > N$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Определение 2. Числовая последовательность имеет *бесконечный предел*, если для любого $\varepsilon > 0$ (сколь угодно большого) существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n| > \varepsilon$ при всех $n > N$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Определение 4. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Теорема 1. Пусть существуют конечные пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

1) Если существует порядковый номер N, начиная с которого ($n > N$) выполняется условие $x_n < y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2) Если существует порядковый номер N, начиная с которого ($n > N$) выполняется условие $x_n = C$, C – const, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

В частности, $\lim\limits_{n\to\infty} C \cdot x_n = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, C – const.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, где $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$, $y_n \ne 0$.

Замечание. Операция $[a]$ означает выделение целой части числа a, не превышающей самого числа a. Например, $[5,43] = 5$; $[-5,43] = -6$; $[4] = 4$ и т. д.

Пример 1. Используя определение предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$.

Решение.

Покажем, что для произвольного сколь угодно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать порядковый номер N элемента последовательности $x_n=\dfrac{n+2}{2n+1}$, начиная с которого выполняется условие

$$\left|\frac{n+2}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,\ \text{или}\ \left|\frac{3}{4n+2}\right|<\varepsilon.$$

Так как $n > 0$ и $\dfrac{3}{4n+2}>0$, то $\left|\dfrac{3}{4n+2}\right|=\dfrac{3}{4n+2}$;

$$\frac{3}{4n+2}<\varepsilon \Leftrightarrow 4n+2>\frac{3}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}.$$

Следовательно, для всех $n > N$, $N=\left[\dfrac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right]$ выполняется условие $\left|\dfrac{n+2}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$, а это по определению предела числовой последовательности означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$.

Проанализируем полученный результат численно. В частности, при $\varepsilon = 0{,}01$ $N = 74$, т. е., начиная с x_{75}, все члены последовательности отличаются от $\dfrac{1}{2}$ меньше, чем на 0,01.

При $\varepsilon = 0{,}001$ $N = 749$, т. е., начиная с x_{750}, все члены последовательности отличаются от $\dfrac{1}{2}$ меньше, чем на 0,001.

Отметим, что при $\varepsilon \to 0$ $N \to \infty$.

Замечание. В дальнейшем будут использованы следующие очевидные соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} \infty, & p>0, \\ 1, & p=0, \\ 0, & p<0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \infty, & p<0, \\ 1, & p=0, \\ 0, & p>0. \end{cases}$$

В математическом анализе приняты следующие символические обозначения:

$$\frac{C}{\infty} = 0, \ \frac{C}{0} = \infty, \ C \neq 0, \ C - \text{const}.$$

Например, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\infty} = 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{-1} + n^{-2}} = \dfrac{1}{0} = \infty$.

Конечно, речь идет не о делении на ∞ или 0, а о делении на элементы бесконечно большой или бесконечно малой последовательностей.

Пример 2. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n^2 + n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 + n^{-2}}{n^{-3}}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n^2 + n} = \dfrac{2}{\infty} = 0.$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 + n^{-2}}{n^{-3}} = \dfrac{3}{0} = \infty.$

Ответ: а) 0 ; б) ∞.

Замечание. При вычислении некоторых пределов возникает ситуация, которую называют *неопределенностью.* Например, если $f(n) \to \infty$ и $g(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, то попытка произвести непосредственное вычисление предела $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)}$ приводит к неопределенности $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Аналогичным образом появляются неопределенности следующих типов: $\left(\dfrac{0}{0}\right)$; $(\infty - \infty)$; $(0 \cdot \infty)$; (1^{∞}) и т. п. Для того, чтобы раскрыть неопределенность, требуется применить тот или иной технический прием. В частности, неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ обычно исчезает после сокращения дроби на множитель, который определяет наибольшую скорость роста числителя или (на выбор) знаменателя.

Пример 3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n-4}{4n^3+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-3^n}{4\cdot 5^n+2^n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^4+2}-n}{5n+\sqrt[3]{2n^5+n-1}}$.

Решение.

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-4}{4n^3+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(4n+\frac{1}{n^2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{4n+\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{\infty}=0.$$

В этом варианте решения дробь сокращена на n^2, так как это старшая степень числителя. Возможен вариант решения с сокращением на n^3, как на старшую степень знаменателя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-4}{4n^3+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(4+\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{0}{4}=0.$$

$$\text{б) } \lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{4\cdot 5^n+2^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}{5^n\left(4+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{4+\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{1}{4}.$$

В данном выражении 5^n определяет максимальную скорость роста и числителя, и знаменателя.

в) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^4+2}-n}{5n+\sqrt[3]{2n^5}+n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sqrt{3+\frac{2}{n^4}}-n}{5n+n^{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{2+\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^5}}}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\sqrt{3+\frac{2}{n^4}}-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(\frac{5}{n}+\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\cdot\sqrt[3]{2+\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^5}}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{0}=\infty.$$

Ответ: а) 0; б) $\frac{1}{4}$; в) ∞.

Замечание. Часто для раскрытия неопределенностей, связанных с иррациональными выражениями, используют известные алгебраические формулы.

$$\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\cdot\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)=A-B;\ A\geq 0;\ B\geq 0.$$

$$\left(\sqrt[3]{A}\pm\sqrt[3]{B}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{A^2}\mp\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}\right)=A\pm B.$$

Пример 4. Найти пределы

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{2n^2+n}-\sqrt[3]{2n^2-n}\right)$.

Решение.

а) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{2}=1.$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{2n^3+n^2}-\sqrt[3]{2n^3-n^2}\right)=(\infty-\infty)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{2n^3+n^2}-\sqrt[3]{2n^3-n^2}\right)\left(\sqrt[3]{\left(2n^3+n^2\right)^2}+\sqrt[3]{\left(2n^3+n^2\right)\left(2n^3-n^2\right)}+\sqrt[3]{\left(2n^3-n^2\right)^2}\right)}{\sqrt[3]{\left(2n^3+n^2\right)^2}+\sqrt[3]{\left(2n^3+n^2\right)\left(2n^3-n^2\right)}+\sqrt[3]{\left(2n^3-n^2\right)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2n^3+n^2\right)-\left(2n^3-n^2\right)}{n^2\left(\sqrt[3]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}+\sqrt[3]{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2}\right)}=$$

$$=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{3}.$$

Ответ: а) 1; б) $\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

Замечательные пределы и их следствия

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\frac{1}{n}=(\infty\cdot 0)=1;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=(1^\infty)=e$, e – основание натурального логарифма; $e=2{,}7182818...$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)=(\infty\cdot 0)=\frac{1}{\ln a}$; $a>0$; $a\neq 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=(\infty\cdot 0)=\ln a$; $a>0$,

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=1;$$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right)=(\infty\cdot 0)=k;\ k\in R;$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(0^0\right)=1.$

О-символика

Определение 5. Если существует конечный не равный нулю предел отношения бесконечно малых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=k;\ 0<|k|<\infty$, то $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются последовательностями *одного порядка малости* при $n\to\infty$.

Обозначение: $x_n=o(y_n)$.

Определение 6. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$, то последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой *более высокого порядка*, чем $\{y_n\}$.

Обозначение: $x_n=O(y_n)$.

Определение 7. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$, то $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются *эквивалентными*.

Обозначение: $x_n\sim y_n$

Примеры эквивалентных бесконечно малых последовательностей при $n\to\infty$:

$$\sin\frac{1}{n}\sim\operatorname{tg}\frac{1}{n}\sim\arcsin\frac{1}{n}\sim\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n};\ 1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2};$$

$$\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n\ln a};\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n};\ a^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{\ln a}{n};$$

$$e^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n};\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\sim\frac{k}{n}.$$

Замечание. При расчете пределов числовых последовательностей можно заменять множители (и только множители!) на эквивалентные им выражения.

Пример 5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{n+1}{n^2+1}}{\sin\dfrac{2n-1}{n^2+2}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{1+\dfrac{2}{n}}-1}{\arcsin\dfrac{5}{n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\ln\dfrac{n^2+1}{n^2+4}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{n+1}{n^2+1}}{\sin\dfrac{2n-1}{n^2+2}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\left|\begin{array}{ll}\dfrac{n+1}{n^2+1}\to 0; & \operatorname{tg}\dfrac{n+1}{n^2+1}\sim\dfrac{n+1}{n^2+1}\\ \dfrac{2n-1}{n^2+2}\to 0; & \sin\dfrac{2n-1}{n^2+2}\sim\dfrac{2n-1}{n^2+2}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right):\left(\frac{2n-1}{n^2+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2+2)}{(n^2+1)(2n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}.$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{1+\dfrac{2}{n}}-1}{\arcsin\dfrac{5}{n}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$= \left| \begin{array}{ll} \dfrac{2}{n} \to 0; & \sqrt[4]{1+\dfrac{2}{n}} - 1 \sim \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{n} = \dfrac{1}{2n} \\ \dfrac{5}{n} \to 0; & \arcsin \dfrac{5}{n} \sim \dfrac{5}{n} \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} : \frac{5}{n} = \frac{1}{10}.$$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \ln \dfrac{n^2+1}{n^2+4} = (\infty \cdot 0) =$

$$= \left| \begin{array}{ll} \dfrac{n^2+1}{n^2+4} = \dfrac{n^2+4-3}{n^2+4} = 1 - \dfrac{3}{n^2+4}; & -\dfrac{3}{n^2+4} \to 0 \\ \ln \dfrac{n^2+1}{n^2+4} = \ln\left(1 - \dfrac{3}{n^2+4}\right) \sim -\dfrac{3}{n^2+4} & \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \left(\frac{-3}{n^2+4} \right) = -3 \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+4} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = -3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n^2}} =$$

$= -3.$

Ответ: а) $\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{1}{10}$; в) -3.

Задания для самостоятельного решения

1. Исходя из определения предела числовой последовательности, доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{5n-3}{n+4}$ стремится к 5. Найти значение порядкового номера n, начиная с которого элементы последовательности отличаются от 5 меньше чем на 10^{-4}.

2. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{2n^2+n-1}{4n^2+1}$ стремится к $\dfrac{1}{2}$.

Найти пределы:

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{50n^3 - 10n^2 + 1}{3n^2 + n + 100}$. **4.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n^2+n+5}+1}{2+\sqrt[4]{3n^4+1}}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^7+1}+n}{3n-\sqrt[3]{n^5+2}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1}\right)$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5e^n-1}{1-3e^n}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin^2\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}}{\ln\left(\dfrac{n+10}{n}\right)}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{3}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^4-1}$.

Ответы:

3. ∞; 4) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$; 5. 0; 6. 0; 7. $\dfrac{2}{3}$; 8. $-\dfrac{5}{3}$; 9. $\dfrac{1}{10}$; 10. $\dfrac{3}{4}$.

5.3. Предел функции

Определение 1. Конечное число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малого) существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$; $f(x) \to A\,\big|_{x\to a}$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ имеет *бесконечный предел* в точке $x = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ (сколь угодно большого) существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство: $|f(x)| > \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$; $f(x) \to \infty\,\big|_{x\to a}$.

Аналогично вводятся понятия конечного предела в бесконечно удаленной точке: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A < \infty$, и понятие бесконечного предела в бесконечно удаленной точке:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Определение 3. Функция называется бесконечно малой при $x \to a$ ($x \to \infty$), если $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x) = 0$.

Определение 4. Функция называется бесконечно большой при $x \to a$ ($x \to \infty$), если $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x) = \infty$.

Определение 5. Конечное число A называется *пределом слева* функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малого) существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < a - x < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$.

Определение 6. Конечное число А называется *пределом справа* функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малого) существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x - a < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$.

Пример 1. Доказать по определению предела функции, что $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x-4}{3-x} = 6$.

Решение.

Преобразуем выражение $\dfrac{5x-4}{3-x}$ к следующему виду:

$$\frac{5x-4}{3-x} = \frac{5((x-2)+2)-4}{3-((x-2)+2)} = \frac{5(x-2)+6}{1-(x-2)},$$

тогда $\dfrac{5x-4}{3-x} - 6 = \dfrac{11(x-2)}{1-(x-2)}$.

Оценим модуль этой разности при x близких к 2:

$$\left|\frac{5x-4}{3-x} - 6\right| = \left|\frac{11(x-2)}{1-(x-2)}\right| \le \frac{11|x-2|}{1-|x-2|}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное действительное число, тогда из условия $\dfrac{11|x-2|}{1-|x-2|} < \varepsilon$ получаем

$$11|x-2| < \varepsilon - \varepsilon\,|x-2|;\ |x-2| < \frac{\varepsilon}{11+\varepsilon};$$

обозначим $\frac{\varepsilon}{11+\varepsilon} = \delta$, тогда $0 < |x-2| < \delta$.

Таким образом, для всех значений x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x-2| < \delta,\ \delta = \frac{\varepsilon}{11+\varepsilon},$$

выполняется неравенство $\left|\frac{5x-4}{3-x} - 6\right| < \varepsilon$.

Поскольку ε – произвольное число, то по определению 1 это означает, что $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x-4}{3-x} = 6$.

В заключение отметим, что при $\varepsilon \to 0$ $\delta \to 0$; и наоборот, при $\delta \to 0$ $\varepsilon \to 0$.

Свойства пределов функций

Теорема 1. Если существуют конечные пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$, то

1) если существует окрестность точки $x = a$, в которой $f(x) = C$; C – const, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = C$;

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

$\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$, C – const.;

4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Теорема 2. Если существуют конечные пределы функций $f(y)$ в точке $y = b$ и $g(x)$ в точке $x = a$:

$\lim\limits_{x\to b} f(y) = B$; $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, $g(x) \neq b$ при $x \neq a$,

тогда предел сложной функции $f(g(x))$ в точке $x = a$ также существует и равен B.

Пример 2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-1}{x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+4}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x+4}$.

Решение.

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-1}{x+2}=\frac{3\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)^2-1}{\lim\limits_{x\to 1}x+2}=\frac{3-1}{1+2}=\frac{2}{3};$$

$$\text{б) } \lim_{x\to 3}\frac{x+4}{x^2-9}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}x+4}{\left(\lim\limits_{x\to 3}x\right)^2-9}=\frac{3+4}{0}=\infty;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x+4}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)^2-3\lim\limits_{x\to 1}x+2}{\lim\limits_{x\to 1}x+4}=\frac{1-3+2}{5}=0.$$

Ответ: а) $\frac{2}{3}$; б) ∞; в) 0.

Замечание. Обозначение ∞ является обобщением для $+\infty$ и $-\infty$. Если выбор знака является принципиальным, то это должно отражаться в условии задания. Необходимо также помнить о том, что выражение $\sqrt[2k]{f(x)}$ понимается исключительно как арифметический, т. е. неотрицательный корень, а поэтому, в частности, $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$.

Пример 3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-x^3+1}{x^6+1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x+1}+\sqrt{2x^3+1}}{5\cdot\sqrt[4]{x^6+x+2}-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x-1}{2^x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x-2}}$.

Решение.

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-x^3+1}{x^6+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6\left(\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^6}\right)}{x^6\left(1+\frac{1}{x^6}\right)}=\frac{0}{1}=0;$$

$$\text{б) } \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x+1}+\sqrt{2x^3+1}}{5\cdot\sqrt[4]{x^6+x+2}-x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{2+\frac{1}{x^3}}}{5\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^5}+\frac{2}{x^6}}-x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^3}}\right)}{x^{\frac{3}{2}}\left(5\cdot\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^5}+\frac{2}{x^6}}-\frac{1}{x^{1/2}}\right)} =$$

$$= \frac{0\cdot 1+\sqrt{2}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Условие положительности переменной x гарантирует существование выражения $\sqrt{2x^3+1}$. Это же обстоятельство учтено в преобразовании

$$\sqrt[4]{x^6+x+2} = x^{\frac{6}{4}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^5}+\frac{2}{x^6}} =$$

$$= |x|^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^5}+\frac{2}{x^6}} = x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^5}+\frac{2}{x^6}}.$$

в) Поведение показательной функции 2^x существенно зависит от знака бесконечно удаленной точки:

при $x\to+\infty$ $2^x\to+\infty$

при $x\to-\infty$ $2^x\to+0$.

в. 1) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x-1}{2^x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\left(1-\frac{1}{2^x}\right)}{2^x\left(1+\frac{1}{2^x}\right)} = 1;$$

в. 2) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x-1}{2^x+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

г) Поскольку $\sqrt{x^2+x-2} = |x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$, то рассмотрим два случая г. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+x-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}=$

$=\dfrac{1}{\infty}=0;$

г. 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+x-2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x\left(1-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}\right)}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}{x\cdot\left(-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}{-1+\dfrac{2}{x}}=\frac{2}{-1}=-2.$$

Ответ: а) 0; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$; в) 1 при $x\to+\infty$; -1 при $x\to-\infty$; г) 0 при $x\to+\infty$; -2 при $x\to-\infty$.

Замечание. Неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ при вычислении предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, как правило, означает, что $x=a$ является нулем функций $f(x)$ и $g(x)$. Это обстоятельство можно эффективно использовать для раскрытия неопределенности. В частности, если $f(x)$ и $g(x)$ – полиномы, то в соответствии с теоремой Безу их можно представить в виде $f(x)=(x-a)\cdot\tilde{f}(x)$; $g(x)=(x-a)\cdot\tilde{g}(x)$, где $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ – многочлены, получающиеся из исходных делением на $x-a$. И тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\tilde{f}(x)}{(x-a)\tilde{g}(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$.

Если неопределенность сохраняется, то эту процедуру можно повторять неоднократно.

Процедура деления многочленов уголком проводится аналогично делению чисел уголком. С той лишь разницей, что роль цифр, отвечающих за разряды числа, в многочленах играют степени переменной x. Чтобы аналогия была полной, советуем в случае деления неполных многочленов, т. е. с отсутствующими степенями x, восстанавливать эти степени с коэффициентом 0. В некотором смысле, деление многочленов даже проще, чем деление чисел, поскольку очередное слагаемое частного легко подбирается так, чтобы была «уничтожена» старшая из оставшихся степень делимого.

Пример 4. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^3+x-4}{x^2-1}$.

Решение.

При $x = 1$: $3x^3 + x - 4 = x^2 - 1 = 0$, т. е. имеет место неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Поделим $3x^3 + x - 4$ на $x - 1$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;3x^3+0x^2+x-4 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^3-3x^2} \qquad\qquad & 3x^2+3x+4 \\
-\;3x^2+x \qquad & \\
\underline{3x^2-3x} \qquad & \\
-\;4x-4 & \\
\underline{4x-4} & \\
0, &
\end{array}
$$

следовательно, $3x^3 + x - 4 = (x - 1)(3x^2 + 3x + 4)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^3+3x+4}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(3x^2+3x+4)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3x^2+3x+4}{x+1}=\frac{10}{2}=5.$$

Ответ: 5.

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}{x^2-4}$.

Решение.

Воспользуемся приемом домножения и деления исходной дроби на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(3x-2)-(x+2)}{(x^2-4)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2}{(x+2)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}\right)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Замечательные пределы и их следствия

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1^{\infty}) = e;\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{\ln a};\ a>0;\ a\neq 1;$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \ln a;\ a>0;\ a\neq 1;\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1;$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = k;\ k\in R;$

6) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = (0^0) = 1.$

Эквивалентные бесконечно малые функции

1) $\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim x$ при $x\to 0;$

$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x\to 0;$

2) $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$ при $x\to 0;\ \ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0;$

3) $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ при $x \to 0$; $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$;
4) $(1+x)^k - 1 \sim kx$ при $x \to 0$; $(1+x)^k \sim 1 + kx$ при $x \to 0$.

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg}^3 x - \sin^3 x}$.

Решение.

Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела,

$$\frac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg}^3 x - \sin^3 x} = \frac{(1-\cos x)^2}{\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - \sin^3 x} = \frac{(1-\cos x)^2 \cdot \cos^3 x}{\sin^3 x(1-\cos^3 x)} =$$

$$= \frac{(1-\cos x)^2 \cdot \cos^3 x}{\sin^3 x(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)} =$$

$$= \frac{(1-\cos x)\cdot \cos^3 x}{\sin^3 x \cdot (1+\cos x+\cos^2 x)}.$$

Воспользуемся эквивалентностью при $x \to 0$:

$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$; $\sin x \sim x$, тогда $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg}^3 x - \sin^3 x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2} \cdot \cos^3 x}{x^3 \cdot (1+\cos x+\cos^3 x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{6x} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Ответ: ∞.

Пример 7. Вычислить предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x\cdot\sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}}.$$

Решение.

Преобразуем исходное выражение:

$$\frac{\sqrt{1+x\cdot\sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+x\cdot\sin x} - \sqrt{\cos 2x}\right)\left(\sqrt{1+x\cdot\sin x} + \sqrt{\cos 2x}\right)}{\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2} \cdot \left(\sqrt{1+x\cdot\sin x} + \sqrt{\cos 2x}\right)} =$$

$$=\frac{1+x\cdot\sin x-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\cdot\left(\sqrt{1+x\cdot\sin x}+\sqrt{\cos 2x}\right)}=$$

$$=\frac{x\cdot\sin x+2\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\cdot\left(\sqrt{1+x\cdot\sin x}+\sqrt{\cos 2x}\right)}=$$

$$=\frac{\sin^2 x\left(\frac{x}{\sin x}+2\right)}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\cdot\left(\sqrt{1+x\cdot\sin x}+\sqrt{\cos 2x}\right)}.$$

Так как при $x\to 0$: $\sin x\sim x$; $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\cdot\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(2+\frac{x}{\sin x}\right)}{\frac{x^2}{4}\cdot 2}=6.$$

Ответ: 6.

Замечание. При расчете некоторых пределов удобно переходить к новой переменной

$$\lim_{x\to a}f(x)=\left|\begin{array}{l}x=g(t)\\ t=h(x)\\ t\to h(a)\end{array}\right|=\lim_{t\to h(a)}f(g(t)).$$

Пример 8. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{4}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=t\\ x=t+\frac{\pi}{4}\\ t\to 0\end{array}\right|=$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t - \sin t - \sin t - \cos t)}{t} = -\sqrt{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = -\sqrt{2}.$$

Ответ: $-\sqrt{2}$.

Пример 9. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + 4x - 1}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Решение.

а) Очевидно, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + 4x - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}} = 1,$$

следовательно, имеет место неопределенность (1^∞).

Воспользуемся вторым замечательным пределом, предварительно преобразовав исходное выражение:

$$\frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + 4x - 1} = 1 + \left(\frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + 4x - 1} - 1\right) =$$

$$= 1 + \frac{-5x + 2}{2x^2 + 4x - 1}.$$

Очевидно, что $\frac{-5x + 2}{2x^2 + 4x - 1} \to 0$ при $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + 4x - 1}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1 + \frac{-5x + 2}{2x^2 + 4x - 1}\right)^{\frac{2x^2 + 4x - 1}{-5x + 2}}\right)^{\frac{-5x + 2}{2x^2 + 4x - 1}\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-5x^2+2x}{2x^2+4x-1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-5+\frac{2}{x}}{2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}} = e^{-\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{e^3}.$$

б) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x} = (1^\infty) =$

$$= \lim_{x\to0}\left((1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{(\cos x-1)\cdot\operatorname{ctg} x} =$$

$$= \lim_{x\to0} e^{\frac{\cos x(\cos x-1)}{\sin x}} = \left|\begin{matrix}\cos x\sim1\\ \cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}\\ \sin x\sim x\\ \text{при } x\to0\end{matrix}\right| = \lim_{x\to0} e^{-\frac{x^2}{2\cdot x}} = e^0 = 1.$$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{e}}{e^3}$; б) 1.

Пример 10. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$.

Решение.

Преобразуем исходное выражение:

$$\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x} = \frac{e^{2\sin x\cdot\cos x}-e^{\sin x}}{x}$$

$$= e^{\sin x}\cdot\frac{e^{\sin x\cdot(2\cos x-1)}-1}{x}.$$

Так как $\sin x(2\cos x-1)\to0$ при $x\to0$, то $e^{\sin x(2\cos x-1)}-1\sim\sin x\cdot(2\cos x-1)\sim x\cdot(2\cos x-1)$:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to0} e^{\sin x}\cdot\frac{x(2\cos x-1)}{x} =$$

$$= e^{\sin 0}\cdot(2\cos 0-1) = 1.$$

Ответ: 1.

Задания для самостоятельного решения

Найти пределы

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-2}{x+10}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-1}{x^2-4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x-1}{5x^3+4}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^{2x}+1}{4-3^{2x}}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\sqrt{4x^3-1}-\sqrt[4]{x^2+1}}{\sqrt[5]{x^4+3}-3x}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-4x^2-5x+6}{x^3+x-2}$.

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+5}}{x^3-8}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg} x-\sin x}$.

11. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}x+1}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{\cos x}-1}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x-2}{3x^2+1}\right)^{3x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{\ln\cos x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2x^2}\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

Ответы:

1. $\dfrac{4}{13}$; 2. ∞; 3. 0; 4. $\dfrac{2}{5}$; 5. -5 при $x\to+\infty$; $\dfrac{1}{4}$ при $x\to-\infty$;
6. $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$; 7. 0 при $x\to+\infty$; $+\infty$ при $x\to-\infty$; 8. -1; 9. $\dfrac{\sqrt{11}}{132}$;
10. 0; 11. $\dfrac{1}{2}$; 12. 0; 13. $\dfrac{1}{e}$; 14. ∞; 15. 1.

5.4. Непрерывность функции в точке и на промежутке

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если она определена в некоторой двусторонней окрестности этой точки, включая и саму эту точку, и при этом

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a).$$

Функция называется *непрерывной на промежутке*, если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

Точки разрыва и их типы

Определение 2. Точка $x = a$ называется точкой *устранимого разрыва*, если в этой точке функция имеет равные между собой конечные пределы, но сама в этой точке либо принимает другое значение, либо вообще не определена.

Определение 3. Точка $x = a$ называется точкой *разрыва первого рода*, если в этой точке функция имеет конечные, но различные односторонние пределы. При этом разность

$$f(a + 0) - f(a - 0)$$

называется скачком функции в точке $x = a$.

Определение 4. Точка $x = a$ называется точкой *разрыва второго рода*, если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен ∞.

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $g(a) \neq 0$ также непрерывны в этой точке.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y = b$, $b = f(a)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке $x = a$.

Теорема 3. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Пример 1. Исследовать на непрерывность и разрывы

функцию $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2-1};\ x \neq \pm 1; \\ -\dfrac{1}{2}; \quad x = -1. \end{cases}$

Решение.

В силу теорем 1–3 функция $f(x)$ непрерывна во всех точках числовой оси, за исключением, быть может, точек $x = \pm 1$.

Рассмотрим эти точки отдельно.

1) $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x+1}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1-0}\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=-\frac{1}{2},$$

$$f(-1-0)=-\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x+1}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1+0}\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=-\frac{1}{2},$$

$$f(-1+0)=-\frac{1}{2}.$$

Поскольку по условию $f(-1)=-\frac{1}{2}$, то $x=-1$ – точка непрерывности.

2) $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1\mp 0}\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{2}{0}=\infty,$$

следовательно, $x = 1$ – точка разрыва 2-го рода.

Ответ: функция $f(x)$ непрерывна во всех точках числовой оси, кроме $x = 1$ – точки разрыва 2-го рода.

Пример 2. Исследовать на непрерывность и разрывы функцию $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$.

Решение.

Функция непрерывна всюду, за исключением точки $x = 0$, в которой она не определена.

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{2^{-\infty}-1}{2^{-\infty}+1}=-1;$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{2^{\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}}\right)}{2^{\frac{1}{x}}\left(1+\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}}\right)}=1.$$

Ответ: функция $f(x)$ непрерывна во всех точках числовой оси, кроме $x = 0$ – точки разрыва 1-го рода.

Пример 3. При каких значениях A и B функция

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \le -\frac{\pi}{2}, \\ A\sin x + B, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$ непрерывна?

Решение.

Функция $f(x)$ непрерывна при $x < -\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; $x > \frac{\pi}{2}$.

Исследуем точки $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

1) $x = -\frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}-0} -2\sin x = 2;$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} (A\sin x + B) = -A + B;$$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$, следовательно, условие непрерывности функции в точке $x = -\frac{\pi}{2}$ имеет вид: $-A + B = 2$.

2) $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} (Ax + B) = A + B;$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} \cos x = 0;$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, следовательно, $A + B = 0$.

Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} -A+B=2, \\ A+B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1, \\ B=1. \end{cases}$$

Искомая функция имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} -2\sin x, & x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ -\sin x+1, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x\ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $A=-1$; $B=1$.

Задания для самостоятельного решения

Исследовать функции на непрерывность и разрывы

1. $y=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ x^2-2x, & 0<x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$

2. $y=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+x-2}$.

3. $y=3^{x+\frac{1}{x}}$.

4. $y=3^{x+\frac{1}{x^2}}$.

5. $y=3^{x-\frac{1}{x^2}}$.

6. $y=[x]$.

7. При каких значениях параметров A и B функция

$$y=\begin{cases} \ln(x^2+1), & x\le 0, \\ A\sin x+B, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ -2, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

непрерывна?

Ответы:

1. $x=2$ – точка разрыва 1-го рода;
2. $x=1$ – точка устранимого разрыва; $x=-2$ – точка разрыва 2-го рода;
3. $x=0$ – точка разрыва 2-го рода;
4. $x=0$ – точка разрыва 2-го рода;

5. $x = 0$ – точка устранимого разрыва;

6. точки вида $x = n$, $n \in Z$, являются точками разрыва 1-го рода;

7. $A = -2$; $B = 0$.

5.5. Производная и дифференциал

Производная функции, заданной явно

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, включая и саму эту точку. Если существует конечный предел

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

то он называется *производной функции* $y = f(x)$ в точке $x = a$.

Обозначение: $y'(a)$; $f'(a)$; $\dfrac{dy(a)}{dx}$.

Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в односторонней окрестности точки $x = a$, включая и саму эту точку. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ или $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, то они называются соответственно *левосторонней и правосторонней производной* функции $y = f(x)$ в точке $x = a$.

Обозначение: $f_-'(a)$; $f_+'(a)$.

Определение 3. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, включая и саму эту точку. Если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty,$$

то говорят, что в точке $x = a$ функция имеет *бесконечную производную*.

Определение 4. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* a, если ее приращение в этой точке представимо в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$, где $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$; $\Delta x = x - a$, A – const; $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Линейная (главная) часть приращения $A\Delta x$ называется *дифференциалом функции* $f(x)$ в точке a.

Обозначение: $dy(a)$; $df(a)$; dy; df.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = a$ производную, то ее дифференциал равен $dy = f'(a)dx$.

Производные элементарных функций

1) $C' = 0$; C – const;
2) $(x^p)' = p \cdot x^{p-1}, p \in R$;
3) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$; $a > 0$, $a \neq 1$; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $x > 0$;
4) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; $a > 0$, $a \neq 1$; $(e^x)' = e^x$;
5) $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

$x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$; $x \neq \pi n$, $n \in Z$;

6) $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $|x| < 1$;

$(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

7) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$; $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, где $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$; $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$;

$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; $(\operatorname{cth} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Свойства производных и дифференциалов

Теорема 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то их алгебраическая сумма, произведение, отношение также дифференцируемы в точке x и при этом:

1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
2) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$; C – const;
3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$.

Следствие. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то их дифференциалы обладают следующими свойствами:

1) $d(f(x) \pm g(x)) = df(x) \pm dg(x)$;
$d(f(x) \pm C) = df(x)$, C – const;

2) $d(f(x) \cdot g(x)) = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x)$;
$d(C \cdot f(x)) = C \cdot df(x)$; C – const;

3) $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot dg(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$.

Производная сложной функции

Теорема 3. Пусть функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, а функция $z = f(y)$ дифференцируема в точке $b = g(a)$, тогда сложная функция $f(g(x))$ также дифференцируема в точке $x = a$, и при этом

$(f(g(a)))' = f_g'(b) \cdot g'(a)$.

Следствие.

$d(f(g(a))) = f_g'(b) \cdot dg(a) = f_g'(b) \cdot g'(a) \cdot dx$.

Производная обратной функции

Теорема 4. Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки $x = a$, и при этом $f'(a) \neq 0$, тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ также дифференцируема в точке $b = f(a)$, и при этом:

$$\frac{df^{-1}(b)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(a)}{dx}}.$$

Замечание. Для того, чтобы правильно продифференцировать функцию, необходимо понять ее структуру. Рекомендуем исходить из следующего правила: выбор формулы для расчета производной того или иного выражения определяется последней операцией в структуре этого выражения. Причем под операцией здесь понимается и сложная функция в том числе.

Пример 1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 2x^3 - \dfrac{4}{x} + \sqrt[4]{x^3} + 1$; б) $y = \sin x \cdot \log_{\sqrt{5}} x$;

в) $y = \dfrac{2^x + 1}{\cos x - 1}$.

Решение.

а) $\left(2x^3-\frac{4}{x}+\sqrt[4]{x^3}+1\right)'=\left(2x^3-4\cdot x^{-1}+x^{\frac{3}{4}}+1\right)'=$

$=(2x^3)'-(4x^{-1})'+\left(x^{\frac{3}{4}}\right)'+1'=2(x^3)'-4\cdot(x^{-1})'+$

$+\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{3}{4}-1}+0=2\cdot(3x^2)-4\cdot(-1)\cdot x^{-1-1}+\frac{3}{4}\cdot x^{-\frac{1}{4}}=$

$=6x^2+4x^{-2}+\frac{3}{4}\cdot x^{-\frac{1}{4}}=6x^2+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}.$

В списке табличных производных отсутствует производная иррационального выражения вида $\sqrt[n]{x^m}$ или $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$, поскольку эти выражения легко сводятся к степенным функциям $x^{\frac{m}{n}}$ или $x^{-\frac{m}{n}}$. Выражение $\frac{4}{x}$ формально можно рассматривать (и дифференцировать) как дробь, однако более рационально свести это выражение к степенной функции с числовым коэффициентом: $4\cdot x^{-1}$. Вообще, если в дробном выражении отсутствует переменная либо в числителе, либо в знаменателе, рекомендуем избегать дифференцирования этого выражения как дроби: $\frac{5}{x^2}=5\cdot x^{-2}$; $\frac{1}{\sin x-2}=(\sin x-2)^{-1}$; $\frac{3x^2+1}{5}=\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{5}$ и т. д.

б) $\left(\sin x\cdot\log_{\sqrt{5}}x\right)'=(\sin x)'\cdot\log_{\sqrt{5}}x+\sin x\cdot\left(\log_{\sqrt{5}}x\right)'=$

$=\cos x\cdot\log_{\sqrt{5}}x+\sin x\cdot\frac{1}{x\cdot\ln\sqrt{5}}=\cos x\cdot\log_{\sqrt{5}}x+\frac{2\sin x}{x\ln 5}.$

в) $\left(\frac{2^x+1}{\cos x-1}\right)'=\frac{(2^x+1)'\cdot(\cos x-1)-(2^x+1)\cdot(\cos x-1)'}{(\cos x-1)^2}=$

$=\frac{2^x\ln 2\,(\cos x-1)+(2^x+1)\cdot\sin x}{(\cos x-1)^2}.$

Ответ: а) $6x^2 + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$;

б) $\cos x \cdot \log_{\sqrt{5}} x + \dfrac{2\sin x}{x \cdot \ln 5}$;

в) $\dfrac{2^x \ln 2\,(\cos x - 1) + (2^x + 1)\cdot \sin x}{(\cos x - 1)^2}$.

Замечание. Наибольшую проблему при дифференцировании представляют сложные функции вида $y = f(g(x))$ (см. теорема 3). Чтобы избежать ошибок в этом случае, полезно выделять *«внешнюю» $f(t)$ и «внутреннюю» $g(x)$ функции.* Дифференцирование начинается с внешней функции, при этом внутренняя функция $g(x)$, сколь громоздко она бы не выглядела, играет роль простого аргумента. Производная внутренней функции находится по обычным правилам.

Пример 2. Найти производные следующих функций:

а) $y = \sin 3x$; б) $y = e^{-2x}$; в) $y = \ln \cos x$;

г) $y = 2^{\sqrt{1-x}}$; д) $y = \operatorname{tg}^3 \ln x$; е) $y = \operatorname{tg} \ln^3 x$.

Решение.

а) Функция $y = \sin 3x$ может рассматриваться как последовательное выполнение внутренней функции $t = 3x$ и внешней $y = \sin t$. Поэтому дифференцирование начинается именно с $\sin t$:

$(\sin 3x)' = \left|3x = t\right| = (\sin t)'_t \cdot t'_x = \cos t \cdot (3x)' = 3\cos t = 3\cos 3x$.

б) $(e^{-2x})' = \left|-2x = t\right| = (e^t)'_t \cdot t'_x = e^t \cdot (-2x)' = -2e^t = -2e^{-2x}$.

в) $(\ln \cos x)' = \left|\cos x = t\right| = (\ln t)'_t \cdot t'_x = \dfrac{1}{t}\cdot(\cos x)' =$

$= \dfrac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = -\operatorname{tg} x$.

г) $\left(2^{\sqrt{1-x}}\right)' = \left|\sqrt{1-x} = t\right| = (2^t)'_t \cdot t'_x =$

$= 2^t \cdot \ln 2 \cdot \left((1-x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \left|1 - x = p\right| = 2^t \cdot \ln 2 \cdot \left(p^{\frac{1}{2}}\right)'_p \cdot p'_x$

$$= 2^t \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot p^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x)' = -2^{\sqrt{1-x}} \ln 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{2^{\sqrt{1-x}} \ln 2}{2\sqrt{1-x}}.$$

В данном примере пришлось дважды применять теорему о производной сложной функции, так как внутренняя функция $(1-x)^{\frac{1}{2}}$, возникшая на первом этапе, также оказалась сложной функцией.

д) $(\operatorname{tg}^3 \ln x)' = ((\operatorname{tg} \ln x)^3)' = \left|\operatorname{tg} \ln x = t\right| = (t^3)'_t \cdot t'_x =$

$= 3t^2 \cdot (\operatorname{tg} \ln x)' = \left|\ln x = p\right| = 3t^2 \cdot (\operatorname{tg} p)'_p \cdot p'_x =$

$$= 3t^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 p} \cdot (\ln x)' = \frac{3t^2}{\cos^2 p} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3tg^2 \ln x}{\cos^2 \ln x} \cdot \frac{1}{x}.$$

е) $(\operatorname{tg} \ln^3 x)' = \left|\ln^3 x = t\right| = (\operatorname{tg} t)'_t \cdot t'_x =$

$$= \frac{1}{\cos^2 t} \cdot ((\ln x)^3)' = \left|\ln x = p\right| = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot (p^3)'_p \cdot (\ln x)'_x =$$

$$= \frac{3p^2}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3 \cdot \ln^2 x}{\cos^2 \ln^3 x} \cdot \frac{1}{x}.$$

Разумеется, после овладения процедурой дифференцирования сложных функций, нет необходимости в столь подробной записи, и можно вполне обойтись без введения переменных t, p и т. д.

Например, последняя выкладка могла бы выглядеть так:

$$(\operatorname{tg} \ln^3 x)' = \frac{1}{\cos^2 \ln^3 x} \cdot (\ln^3 x)' = \frac{1}{\cos^2 \ln^3 x} \cdot 3 \ln^2 x \cdot (\ln x)' =$$

$$= \frac{3 \ln^2 x}{x \cdot \cos^2 \ln^3 x}.$$

Ответ: а) $3 \cos 3x$; б) $-2\, e^{-2x}$; в) $-\operatorname{tg}\, x$; г) $-\frac{2^{\sqrt{1-x}} \ln 2}{2\sqrt{1-x}}$;

д) $\frac{3\, \operatorname{tg}^2 \ln x}{x \cdot \cos^2 \ln x}$; е) $\frac{3 \ln^2 x}{x \cdot \cos^2 \ln^3 x}$.

Замечание. Функции вида $y = f(x)^{g(x)}$, $f(x) > 0$ называют *степенно-показательными.* Существуют два способа дифференцирования этих функций.

1) Так как в соответствии с основным логарифмическим тождеством $f(x) = e^{\ln f(x)}$, то $f(x)^{g(x)} = (e^{\ln f(x)})^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$, и нахождение производной сводится к дифференцированию сложной функции:

$$(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x)\cdot\ln f(x)})' = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\cdot(g(x)\cdot\ln f(x))' =$$
$$= f(x)^{g(x)}\cdot(g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot(\ln f(x))') =$$
$$= f(x)^{g(x)}\cdot\left(g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

2) Второй способ связан с так называемой *логарифмической производной* функции, т. е. производной от логарифма этой функции:

$$\frac{d}{dx}\ln|y(x)| = \frac{y'(x)}{y(x)};\ y'(x) = y(x)\cdot\frac{d}{dx}\ln|y(x)|.$$

В частности, $(f(x)^{g(x)})' = (f(x)^{g(x)})\cdot(\ln(f(x)^{g(x)}))' =$ $= f(x)^{g(x)}\cdot(g(x)\cdot\ln(f(x))'$ и т. д.

Пример 3. Найти производные следующих функций:

а) $y = x^x$; б) $y = (\sin x)^{\cos x}$.

Решение.

а) $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\cdot\ln x}$, поэтому

$$(x^x)' = (e^{x\cdot\ln x})' = e^{x\cdot\ln x}\cdot(x\ln x)' =$$
$$= x^x\cdot(x'\ln x + x\cdot(\ln x)') = x^x(\ln x + 1).$$

б) Воспользуемся логарифмической производной функции:

$$(\ln(\sin x)^{\cos x}))' = (\cos x\cdot\ln\sin x)' = (\cos x)'\cdot\ln\sin x +$$
$$+\cos x\cdot(\ln\sin x)' = -\sin x\cdot\ln\sin x +$$
$$+\cos x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = -\sin x\cdot\ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}.$$

Следовательно, $((\sin x)^{\cos x})' =$

$$= (\sin x)^{\cos x}\cdot\left(-\sin x\cdot\ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right).$$

Ответ: а) $x^x(\ln x + 1)$;

б) $\left(-\sin x\cdot\ln\sin x + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)\cdot(\sin x)^{\cos x}$.

Пример 4. Докажите, что существует однозначная функция $x = x(y)$, определяемая уравнением $y = x^3 + 3x$, и найти ее производную.

Решение.

Условие существования обратной функции имеет вид: $y'(x) \neq 0$, $y' = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$; $y' > 0$, $x \in R$, что гарантирует существование обратной функции $x = x(y)$.

По теореме 4:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(x^3 + 3x)'} = \frac{1}{3x^2 + 3}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{3x^2 + 3}$.

Пример 5. Найти дифференциалы функций: а) $y = x^2e^{-x}$;

б) $y = \arcsin \dfrac{1}{x}$.

Решение.

а) По теореме 1: $dy = y'(x) \cdot dx$, следовательно, $dy = (x^2e^{-x})'dx = (2xe^{-x} - x^2e^{-x})dx = xe^{-x}(2 - x)dx$.

б) Аналогично,

$$dy = \left(\arcsin \frac{1}{x}\right)' dx;\ \frac{1}{x} = x^{-1};\ dy = \frac{1}{\sqrt{1 - x^{-2}}}(-x^{-2})dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}}\frac{1}{x^2}dx = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Ответ: а) $x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x)dx$; б) $-\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

Производные функций, заданных параметрически и неявно

Теорема 5. Система уравнений $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ \alpha < t < \beta; \end{cases}$ где $x(t)$ и $g(t)$ – дифференцируемые функции, и при этом $x'(t) \neq 0$, определяет однозначную функцию $y(x)$, производная которой имеет вид $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Теорема 6. Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению $F(x;\ y) = 0$, то производная $y' = y'(x)$ этой неявной функции имеет вид:

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Подробный комментарий выражений F'_x и F'_y относится к понятию частных производных функций двух переменных. При решении примеров попытаемся избежать этих понятий, рассматривая функцию $F(x;\ y) = 0$, как сложную функцию переменной x: $F(x;\ y(x)) = 0$.

Пример 6. Найти производные функций, заданных параметрически:

а) $x = a \cdot \cos t$; $y = b \cdot \sin t$; $a > 0$; $b > 0$;

б) $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$; $y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

Решение.

а) Воспользуемся теоремой 5:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t;\ t \neq \pi n,\ n \in Z.$$

б) Аналогично:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\left(\left(1-t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'}{\left(\left(1-t^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)'} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-t^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1-t^{\frac{1}{3}}\right)'}{\frac{1}{3}\left(1-t^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(1-t^{\frac{1}{2}}\right)'} =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{\left(1-t^{\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\right)}}{2\sqrt{1-t^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\sqrt[3]{\left(1-t^{\frac{1}{2}}\right)^2}}{\sqrt{1-t^{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[6]{t}};\ t \neq 0;\ t \neq 1.$$

Ответ: а) $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$; б) $\frac{\sqrt[3]{\left(1-t^{\frac{1}{2}}\right)^2}}{\sqrt{1-t^{\frac{1}{3}}}\cdot\sqrt[6]{t}}$.

Пример 7. Найти производные функций, заданных в неявном виде:

а) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$; б) $\sin(2x + y) = y$.

Решение.

а) Дифференцируем обе части исходного выражения, считая $y(x)$ – неизвестной функцией, зависящей от x:

$(x^2 + 2xy(x) - y^2(x))' = (2x)'$;

$2x + 2\cdot(y(x) + x\cdot y'(x)) - 2y(x)\cdot y'(x) = 2$;

$2xy' - 2y\cdot y' = 2 - 2x - 2y$;

$$y' = \frac{1-x-y}{x-y}.$$

б) $\sin(2x + y(x)) = y(x)$; $(\sin(2x + y(x))' = y'(x)$;

$\cos(2x + y)\cdot(2 + y') = y'$;

$y'\cdot\cos(2x + y) - y' = -2\cdot\cos(2x + y)$;

$$y' = \frac{2\cos(2x+y)}{1-\cos(2x+y)}.$$

Ответ: а) $\frac{1-x-y}{x-y}$; б) $\frac{2\cos(2x+y)}{1-\cos(2x+y)}$.

Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 5. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке и в каждой точке промежутка имеет производную $f'(x)$, тогда производная функции $f'(x)$, если она существует, называется *второй производной* функции $f(x)$.

Обозначение: $f''(x)$; $f^{(2)}(x)$.

Аналогично, вводятся производные $f^{(n)}(x)$ любого порядка.

Определение 6. Дифференциал от первого дифференциала в некоторой точке a называется *вторым дифференциалом* функции в этой точке.

Обозначение: $d^2y(a)$; $d^2f(a)$; d^2y; d^2f.

Аналогично, вводятся дифференциалы любого порядка: $d^ny = d(d^{n-1}y)$.

Если x – независимая переменная, то

$d^2y(a) = f''(a)\cdot dx^2$; $\qquad d^ny(a) = f^n(a)\cdot dx^n$, $n \in N$.

Производные высших порядков некоторых элементарных функций

1) $(x^p)^{(n)} = p \cdot (p-1) \cdot \ldots \cdot (p-n+1)x^{p-n};\ p \in R;$

2) $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n};\ x > 0;$

$(\log_a x)^{(n)} = \dfrac{1}{\ln a}(\ln x)^{(n)};\ a > 0;\ a \neq 1;\ x > 0.$

3) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a;\ a > 0;\ a \neq 1;\ (e^x)^{(n)} = e^x;$

4) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right);$

5) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right);$

6) $(\mathrm{ch}\, x)^{(2k)} = \mathrm{ch}\, x;\ (\mathrm{ch}\, x)^{(2k+1)} = \mathrm{sh}\, x;\ k \in N;$

7) $(\mathrm{sh}\, x)^{(2k)} = \mathrm{sh}\, x;\ (\mathrm{sh}\, x)^{(2k+1)} = \mathrm{ch}\, x;\ k \in N.$

Свойства производных и дифференциалов высших порядков

1) $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x);$

2) Формула Лейбница: $(f(x) \cdot g(x))^{(n)} =$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x);$ где $f^{(0)}(x) = f(x);\ g^{(0)}(x) = g(x);$

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!},\ m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m;\ 0! = 1;$

2′) $(C \cdot g(x))^{(n)} = C \cdot g^{(n)}(x);\ C$ – const.

Аналогичные соотношения для дифференциалов имеют вид:

1) $d^n(f(x) \pm g(x)) = d^n f(x) \pm d^n g(x);$

2) $d^n(f(x) \cdot g(x)) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot d^k f(x) \cdot d^{n-k} g(x);\ d^0 f(x) = f(x);$
$d^0 g(x) = g(x);$

2′) $d^n(C \cdot f(x)) = C \cdot d^n f(x);\ C$ – const.

Пример 8. Найти производные и дифференциалы второго порядка следующих функций: а) $y = e^{\sin x}$; б) $y = x^3 \cdot \ln x$.

Решение.

а) $y = e^{\sin x};\ y' = (e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = e^{\sin x} \cdot \cos x;$

$dy = e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx;$
$y'' = (y')' = (e^{\sin x} \cdot \cos x)' = (e^{\sin x})' \cdot \cos x +$
$+ e^{\sin x} \cdot (\cos x)' = (e^{\sin x}) \cdot (\sin x)' \cdot \cos x + e^{\sin x} \cdot (-\sin x) =$
$= e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x).$
$d^2y = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)\, dx^2.$

б) $y = x^3 \cdot \ln x;\ y' = (x^3 \cdot \ln x)' = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \dfrac{1}{x} =$
$= x^2 (3 \ln x + 1);$
$dy = x^2 (3 \ln x + 1) dx;$

$y'' = (y')' = 2x \cdot (3 \ln x + 1) + x^2 \cdot \dfrac{3}{x} = x (6 \ln x + 5);$
$d^2y = x(6 \ln x + 5)\, dx^2.$
Ответ: а) $e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x);\ e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)\, dx^2.$
б) $x (6 \ln x + 5);\ x(6 \ln x + 5)\, dx^2.$

Пример 9. Найти производную n-го порядка следующих функций:

а) $y = x^2e^x$; б) $y = x^2 \cdot \sin x$; в) $y = \dfrac{2}{x^2 - 1}$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой Лейбница, учитывая, что $(x^2)^{(n)} = 0$ при $n \geq 3$:

$$(x^2e^x)^{(n)} = C_n^0 \cdot x^2 \cdot (e^x)^{(n)} + C_n^1 \cdot (x^2)' \cdot (e^x)^{(n-1)} +$$
$$+ C_n^2 \cdot (x^2)'' \cdot (e^x)^{(n-2)};$$

$$C_n^0 = 1;\ C_n^1 = n;\ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2};\ (e^x)^{(n)} = (e^x)^{(n-1)} = (e^x)^{(n-2)} = e^x;$$

$$(x^2 e^x)^{(n)} = x^2 \cdot e^x + 2x \cdot n \cdot e^x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot e^x =$$
$$= e^x (x^2 + 2nx + n(n-1)).$$

б) Поскольку $(x^2)^{(n)} = 0$ при $n \geq 3$, то

$$(x^2 \cdot \sin x)^{(n)} = C_n^0 \cdot x^2 \cdot (\sin x)^{(n)} + C_n^1 \cdot (x^2)' \cdot (\sin x)^{(n-1)} +$$
$$+ C_n^2 \cdot (x^2)'' \cdot (\sin x)^{(n-2)};$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} n\right);\ (\sin x)^{(n-1)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right) =$$
$$= -\cos\left(x + \frac{\pi}{2} n\right);$$

$$(\sin x)^{(n-2)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}(n-2)\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right);$$

$$(x^2 \cdot \sin x)^{(n)} = (x^2 - n(n-1))\sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right) -$$

$$-\, 2nx \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right).$$

в) Разложим дробь на сумму простейших:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{2}{x^2-1}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}.$$

Так как $((x-1)^{-1})^{(n)} = (-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)\cdot(x-1)^{-1-n} =$

$$= \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}};$$

$((x+1)^{-1})^{(n)} = (-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)\cdot(x+1)^{-1-n} =$

$$= \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+1)^{n+1}},$$

то $\left(\dfrac{2}{x^2-1}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot n!\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right).$

Ответ: а) $e^x(x^2 + 2nx + n(n-1))$;

б) $(x^2 - n(n-1))\sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right) - 2nx\cdot\cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$;

в) $(-1)^n \cdot n!\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right).$

Производные высших порядков от функций, заданных параметрически и неявно

1. Если функция $y(x)$ задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

то $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Если существуют производные $x''(t)$ и $y''(t)$, то

$$y''(x) = (y'(x))'_x = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'_x = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'_t \cdot t'_x =$$

$$= \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{(x'(t))^3}.$$

Аналогичным образом можно рассчитать производные более высокого порядка.

2. Если функция $y(x)$ задана неявно $F(x; y) = 0$, то

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y},$$

следовательно, $y'(x) = f(x; y)$, где $f(x; y) = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$;

$$y''(x) = \frac{d}{dx} f(x; y(x)) = f'_x + f'_y \cdot y' = f'_x + f'_y \cdot f.$$

Аналогичным образом находятся производные более высокого порядка.

Пример 10. Найти производные до третьего порядка включительно функции $y(x)$, заданной параметрически: $\begin{cases} x(t) = 2t - t^3, \\ y(t) = 3t - t^3. \end{cases}$

Решение.

Находим первую производную:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 3t^2} = p(t),\ t \neq \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Строго говоря, здесь нет явно выраженной производной функции $y(x)$, а есть ее параметрическое представление:

$$\begin{cases} y'(t)=\dfrac{3-3t^2}{2-3t^2}, \\ x(t)=2t-t^3. \end{cases}$$

Поэтому вторая производная находится аналогично первой:

$$y''(x)=\frac{p'(t)}{x'(t)}=\left(\frac{3-3t^2}{2-3t^2}\right)'\cdot\frac{1}{(2t-t^3)'}=$$

$$=\frac{-6t\cdot(2-3t^2)-(3-3t^2)\cdot(-6t)}{(2-3t^2)^2\cdot(2-3t^2)}=$$

$$=\frac{-12t+18t^3+18t-18t^3}{(2-3t^2)^3}=\frac{6t}{(2-3t^2)^3},$$

т. е. получена вторая производная в параметрической форме

$$\begin{cases} y''(t)=\dfrac{6t}{(2-3t^2)^3}, \\ x(t)=2t-t^3. \end{cases}$$

Находим третью производную:

$$y'''(x)=\left(\frac{6t}{(2-3t^2)^3}\right)'\cdot\frac{1}{(2t-t^3)'}=$$

$$=\frac{6\cdot(2-3t^2)^3-6t\cdot3(2-3t^2)^2\cdot(-6t)}{(2-3t^2)^6\cdot(2-3t^2)}=$$

$$=\frac{12-18t^2+108t^2}{(2-3t^2)^5}=\frac{90t^2+12}{(2-3t^2)^5}.$$

Ответ: $y'=\dfrac{3-3t^2}{2-3t^2}$; $\quad y''=\dfrac{6t}{(2-3t^2)^3}$;

$$y'''=\frac{90t^2+12}{(2-3t^2)^5}.$$

Пример 11. Найти первую и вторую производные функции, заданной неявно, $e^{xy} + y - 3 = 0$.

Решение.

Дифференцируем обе части исходного выражения, рассматривая y как функцию от x:

$(e^{x \cdot y(x)} + y(x) - 3)' = 0;$

$e^{x \cdot y(x)} \cdot (x \cdot y(x))' + y'(x) = 0;$

$e^{x \cdot y} \cdot (y + x \cdot y') + y' = 0;$

$e^{x \cdot y} \cdot x \cdot y' + y' = -e^{x \cdot y} \cdot y;$

$y' = -\dfrac{e^{xy} \cdot y}{e^{xy} \cdot x + 1}$. Так как $e^{xy} = 3 - y$, то $y' = \dfrac{y^2 - 3y}{3x - xy + 1}$.

Находим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{y^2 - 3y}{3x - xy + 1}\right)' = \frac{(2y-3)\,y' \cdot (3x - xy + 1) - (y^2 - 3y) \cdot (3 - y - xy')}{(3x - xy + 1)^2} =$$

$$= \frac{(2y-3) \cdot (3x - xy + 1) \cdot \dfrac{y^2 - 3y}{3x - xy + 1} - (y^2 - 3y) \cdot \left(3 - y - \dfrac{x \cdot (y^2 - 3y)}{3x - xy + 1}\right)}{(3x - xy + 1)^2} =$$

$$= \frac{(2y-3)(y^2-3y)(3x-xy+1) - (y^2-3y) \cdot ((3-y)(3x-xy+1) - x(y^2-3y))}{(3x-xy+1)^3} =$$

$$= \frac{(y^2-3y)(12xy - 2xy^2 + 3y - 18x - 6)}{(3x - xy + 1)^3}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{y^2 - 3y}{3x - xy + 1}$; y'' – см. в тексте решения.

Задания для самостоятельного решения

Найти производные следующих функций

1. а) $y = 5x^2 - \dfrac{1}{x} - 3\sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{2\sqrt{x} + \sqrt[5]{x}}{x^2}$;

в) $y = \dfrac{\left(\sqrt[5]{x} - \sqrt{x}\right)^3}{x}$.

2. $y = 3x^2 \cdot \cos x - \dfrac{4 \sin x}{\sqrt{x}}$.

3. $y = \dfrac{\log_2 x - 1}{\log_5 x + 1}$. 4. $y = \operatorname{arctg} x \cdot \arcsin x$.

5. $y = \dfrac{5^x - \operatorname{tg} x}{5^x + \operatorname{ctg} x}$. 6. $y = (4 - 5x)^{10}$.

7. $y = e^{-\sqrt[3]{x}}$. 8. $y = \sin^3 x \cdot \cos^2 3x$.

9. $y = \sqrt[7]{\ln^2 x + 1}$. 10. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + k}\right)$.

11. $y = \operatorname{arctg}\left(3 - \sqrt{\cos x}\right)$. 12. $y = (\sin x)^{\sin x}$.

13. $y = (\arcsin x)^{\arccos x}$.

Найти производные функций, заданных параметрически:

14. $x = e^t$; $y = \operatorname{tg} t$;

15. $x = \sqrt[5]{1 - t^2}$, $y = \cos t$.

Найти производные функций, заданных неявно:

16. $x + y - e^{xy} = 0$.

17. $\sin(x^2 - y) - y^2 = 0$.

18. Доказать, что уравнение $y = x^5 + 3x$ определяет однозначную функцию $x = x(y)$ и найти ее производную.

Найти дифференциалы функций:

19. $y = \sqrt[4]{x^3} \cdot \ln(1 - 5x)$.

20. $y = \dfrac{\sin 3x + 1}{\cos 5x - 1}$.

Найти производные и дифференциалы второго порядка

21. $y = \arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

22. $y = 2^{-\operatorname{ctg} x}$.

Найти первую и вторую производные функций, заданных параметрически:

23. $x = t \sin t$; $y = 5^t$.

24. $x = t^{-\frac{3}{4}}$; $y = \log_3 t$.

Найти первую и вторую производные неявно заданных функций:

25. $\cos(x + y) - x + y = 0$.

26. $\ln(x + 2y) - y + 1 = 0$.

Ответы:

1. а) $10x+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$; б) $-3x^{-\frac{5}{2}}-\dfrac{9}{5}x^{-\frac{14}{5}}$;

в) $-\dfrac{2}{5}x^{-\frac{7}{5}}+\dfrac{9}{10}x^{-\frac{13}{10}}+\dfrac{3}{5}x^{-\frac{4}{5}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$;

2. $6x\cdot\cos x-3x^2\sin x-\dfrac{2(2x\cdot\cos x-\sin x)}{x}$;

3. $\dfrac{\ln 10}{\ln 2\cdot\ln 5\cdot x\cdot\log_5^2(5x)^2}$; 4. $\dfrac{\arcsin x}{1+x^2}+\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}}$;

5. $\dfrac{(5^x\cdot\ln 5-\cos^{-2}x)\cdot(5^x+\operatorname{ctg}x)-(5^x-\operatorname{tg}x)\cdot(5^x\cdot\ln 5-\sin^{-2}x)}{(5^x+\operatorname{ctg}x)^2}$;

6. $-50(4-5x)^9$; 7. $-\dfrac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$;

8. $3\sin^2 x\cdot\cos x\cdot\cos^2 3x-3\sin^3 x\cdot\sin 6x$;

9. $\dfrac{2\ln x}{7x\cdot\sqrt[7]{(\ln^2 x+1)^6}}$; 10. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+k}}$;

11. $-\dfrac{1}{2\sqrt{\cos x}\left(10-6\sqrt{\cos x}+\cos x\right)}$;

12. $(\sin x)^{\sin x}\cdot\cos x\cdot(\ln\sin x+1)$;

13. $(\arcsin x)^{\arccos x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\dfrac{\arccos x}{\arcsin x}-\ln\arcsin x\right)$;

14. $\dfrac{1}{e^t\cdot\cos^2 t}$; 15. $\dfrac{5}{2}\dfrac{\sin t\sqrt[5]{(1-t^2)^4}}{t}$;

16. $\dfrac{xy+y^2-1}{1-x^2-xy}$; 17. $\dfrac{2x\cdot\cos(x^2-y)}{\cos(x^2-y)+2y}$;

18. $\dfrac{1}{5x^4+3}$; 19. $\left(\dfrac{3\ln(1-5x)}{4\cdot\sqrt[4]{x}}-\dfrac{5\cdot\sqrt[4]{x^3}}{1-5x}\right)dx$;

20. $\dfrac{3\cos 2x-3\cos 3x+5\sin 5x+2\sin 3x\cdot\sin 5x}{(\cos 5x-1)^2}$;

21. $-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; $-\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; $\dfrac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$;

$\dfrac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}\,dx$;

22. $\dfrac{2^{-\text{ctg}x}}{\sin^2 x}\ln 2$; $\dfrac{2^{-\text{ctg}x}}{\sin^2 x}\ln 2\cdot dx$; $2^{-\text{ctg}\,x}\cdot\ln 2\cdot\dfrac{1-\sin 2x}{\sin^4 x}$;

$2^{-\text{ctg}\,x}\cdot\ln 2\cdot\dfrac{1-\sin 2x}{\sin^4 x}\,dx$;

23. $\dfrac{5^t\cdot\ln 5}{\sin t+t\cdot\cos t}$;

$\dfrac{5^t\cdot\ln 5(\ln 5\cdot(\sin t+t\cdot\cos t)-2\cos t+t\sin t)}{(\sin t+t\cdot\cos t)^3}$;

24. $-\dfrac{4}{3\ln 3}\sqrt[4]{t^3}$; $\dfrac{4}{3\ln 3}\sqrt{t^3}$;

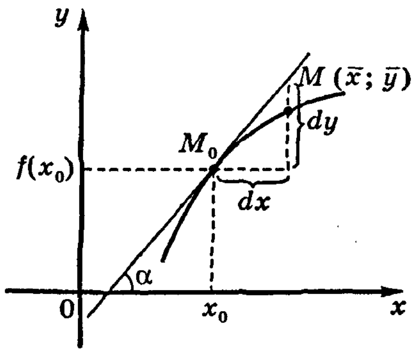
25. $\dfrac{1+\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)}$; $\dfrac{4\cos(x+y)}{(1-\sin(x+y))^3}$;

26. $\dfrac{1}{x+2y-2}$; $-\dfrac{x+2y}{(x+2y-2)^3}$.

5.6. Приложения производных и дифференциалов

Геометрический смысл производной и дифференциала

Определение 1. Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале (a, b) и непрерывна в точке $x_0\in(a; b)$. Пусть также $M(x_0; y_0)$, $y_0=f(x_0)$ – фиксированная точка графика функции $y=f(x)$; точка M $(\bar{x}; \bar{y})$, $\bar{y}=f(\bar{x})$ – подвижная точка графика. Предельное положение секущей M_0M, когда точка M по дуге графика функции стремится к точке M_0, называется *касательной* к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0.



Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее производная в этой точке равна тангенсу угла наклона касательной к оси Ox, а дифференциал равен приращению ординаты касательной

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

При этом уравнение касательной имеет вид:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную, то ее касательной является вертикальная прямая $x = x_0$.

Определение 2. *Углом между кривыми* $y = f(x)$ и $y = g(x)$ называется угол между касательными к графикам этих функций, проведенными в точке пересечения графиков.

В некоторых задачах возникает необходимость введения нормали к графику данной функции в данной точке. Под *нормалью к кривой* понимается прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания. Если $f'(x_0) \neq 0$, то уравнение нормали имеет вид:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Если же $f'(x_0) = 0$, то нормалью является вертикальная прямая $x = x_0$.

Пример 1. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3$ в точке с абсциссой 2.

Решение.

Так как $x_0 = 2$; $f(x_0) = 8$; $f'(x) = 3x^2$; $f'(2) = 12$, то

1) уравнение касательной $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ принимает вид: $y = 12 \cdot (x - 2) + 8$; $y = 12x - 16$;

2) уравнение нормали: $y = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$.

$$y = -\frac{1}{12}(x - 2) + 8; \quad y = -\frac{1}{12}x + 8\frac{1}{6}.$$

Ответ: $y = 12x - 16$; $y = -\dfrac{x}{12} + 8\dfrac{1}{6}$.

Пример 2. Под какими углами пересекаются параболы $y = x^2$ и $x = y^2$?

Решение.

1) Находим координаты точек пересечения парабол:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2; \end{cases} \begin{cases} y = x^2, \\ x = x^4; \end{cases} \begin{cases} y = x^2, \\ x = 0;\ x = 1; \end{cases} \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Тангенс острого угла между касательными определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|,$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты касательных, проведенных в точке пересечения графиков.

2) Рассмотрим точку (0; 0):

$k_1 = (x^2)'|_{x=0} = 2x|_{x=0} = 0;$

$$k_2 = (y'_x)|_{x=0} = \left.\left(\frac{1}{x'_y}\right)\right|_{y=0} = \left.\frac{1}{2y}\right|_{y=0} = \infty.$$

Следовательно, касательной к параболе $y = x^2$ в точке (0; 0) является ось Ox, а касательной к параболе $x = y^2$ является ось Oy. Таким образом, угол между касательными (и параболами) в начале координат – прямой: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

3) Рассмотрим точку (1; 1):

$$k_1 = 2x|_{x=1} = 2;\ k_2 = \left.\frac{1}{2y}\right|_{y=1} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + 1} \right| = \frac{3}{4};\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$.

Физический смысл производной и дифференциала

Задача 1. Пусть функция $y = f(x)$ описывает закон движения материальной точки, y – длина пройденного пути;

x – время, за которое этот путь пройден. Тогда производная функции пути по времени есть *мгновенная скорость* материальной точки в момент времени x:

$$v(x) = f'(x).$$

Поскольку $dy = f'(x)dx = v(x)dx$, то дифференциал функции пути равен расстоянию, которое прошла бы точка за бесконечно малый промежуток времени dx, если бы она двигалась равномерно со скоростью, равной величине мгновенной скорости в момент времени x.

Вторая производная функции пройденного пути также имеет простой смысл – это *мгновенное ускорение* точки в данный момент времени

$$a(x) = v'(x) = f''(x).$$

Задача 2. Пусть функция $y = f(x)$ описывает массу неоднородного стержня длины x, начало которого в точке $x = 0$. Тогда производная функции массы стержня по его длине x есть *линейная (погонная) плотность* стержня в данной точке:

$$\rho(x) = f'(x).$$

Если $\rho(x)$ – const, то стержень называется *однородным*.

Если стержень неоднороден, то величина $dy = \rho(x)dx$ равна массе однородного стержня длины dx с постоянной плотностью $\rho(x)$, равной плотности неоднородного стержня в данной точке.

Пример 3. Точка движется прямолинейно по закону $y(x) = 10 + 20x - 5x^2$. Найти скорость и ускорение точки а) для произвольного момента времени x; б) в момент времени $x = 2$.

Решение.

Поскольку $v(x) = y'(x)$, то $v(x) = 20 - 10x$.
Поскольку $a(x) = v'(x)$, то $a(x) = -10$.
В момент времени $x = 2$: $v(2) = 0$; $a(2) = -10$.
Ответ: $v(x) = 20 - 10x$; $a(x) = -10$; $v(2) = 0$; $a(2) = -10$.

Пример 4. Масса неоднородного одномерного стержня является функцией длины: $y = e^x - x - 1$. Найти плотность стержня в начальной точке ($x = 0$) и в конечной точке ($x = 1$).

Решение.

Поскольку $\rho(x) = y'(x)$, то $\rho(x) = e^x - 1$.
Следовательно, $\rho(0) = 0$; $\rho(1) = e - 1 \approx 1{,}718$.
Ответ: $\rho(0) = 0$; $\rho(1) = e - 1$.

Оценка малых приращений (приближенный расчет значений функции)

Поскольку полное приращение функции имеет вид $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$; $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, то при малых приращениях аргумента можно считать $\Delta y \approx dy$; $dy = f'(x)dx = f'(x) \cdot \Delta x$, или в развернутой форме:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

Наиболее эффективно эта формула применяется при удачном выборе x, т. е. в случаях, когда в этой точке наиболее просто находятся значения самой функции и ее производной, и при этом приращение аргумента Δx сравнительно мало.

Пример 5. Найти приближенные значения следующих выражений

а) $\sqrt[3]{1{,}02}$; б) $\sin 29°$; в) $\operatorname{arctg} 1{,}05$; г) $\lg 11$.

Решение.

а) Для вычисления $\sqrt[3]{1{,}02}$ используем функцию $y = \sqrt[3]{x}$ и рассмотрим ее в окрестности точки $x = 1$, при этом $\Delta x = 0{,}02$; $y(1) = 1$.

Так как $y'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, то $y'(1) = \dfrac{1}{3}$.

Следовательно, $\sqrt[3]{1{,}02} = y(1 + 0{,}02) \approx y(1) +$

$$+ y'(1) \cdot 0{,}02 = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}02 = 1\frac{1}{150} = 1{,}00(6) \approx 1{,}007.$$

б) Для вычисления $\sin 29°$ перейдем к радианной мере углов:

$$29° = \frac{29}{180}\pi = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}.$$

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ в окрестности точки $x = \dfrac{\pi}{6}$; при этом $\Delta x = -\dfrac{\pi}{180}$; $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$;

$$y'(x) = \cos x;\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

следовательно,

$$\sin 29° = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0{,}4849.$$

в) Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arctg} x$ в окрестности точки $x = 1$:

$$y(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4};\ y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};\ y'(1) = \frac{1}{2};$$

$\Delta x = 0{,}05$,
следовательно,

$$\operatorname{arctg} 1{,}05 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}05 \approx 0{,}8104.$$

г) Рассмотрим функцию $y = \lg(10 + x)$ в окрестности точки $x = 0$; тогда $\Delta x = 1$; $y(0) = \lg 10 = 1$; $y'(x) = \frac{1}{(10+x)\cdot\ln 10}$; $y'(0) = \frac{1}{10\cdot\ln 10}$, следовательно,

$$\lg 11 \approx 1 + \frac{1}{10\cdot\ln 10}\cdot 1 \approx 1{,}0434.$$

Ответ: а) 1,007 ; б) 0,4849; в) 0,8104; г) 1,0434.

Раскрытие неопределенностей по правилам Лопиталя

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

1) они дифференцируемы во всех точках интервала (a, b), причем $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$;

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$;

3) существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда предел отношения самих функций также существует, и он равен пределу отношения производных:

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

1) они дифференцируемы во всех точках интервала (a, b), причем $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$;

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$;

3) существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда предел отношения самих функций также существует, и он равен пределу отношения производных:

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теоремы 1 и 2 остаются справедливыми и для случая левосторонней ($x\to a-0$) и для случая двустороннего ($x\to a$) предела. Наконец, при некоторых изменениях теоремы 1 и 2 становятся справедливыми и при $x\to+\infty$, $x\to-\infty$.

Замечание. Часто при нахождении пределов функций формальная подстановка предельного значения аргумента в формулу, задающую эту функцию, приводит к выражениям вида $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 0^0; ∞^0; 1^∞. Как уже отмечалось ранее, такие конструкции принято называть неопределенностями, поскольку в этом случае нельзя не только указать конкретное значение предела непосредственно из условия, но даже нельзя судить о том, существует ли указанный предел вообще.

Ранее были показаны некоторые приемы раскрытия неопределенности. Правила Лопиталя существенно расширяют возможности избавления от неопределенностей, в первую очередь, вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Вместе с тем, простые алгебраические преобразования легко переводят конструкции типа $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 0^0; ∞^0; 1^∞ в лопиталевские.

При решении некоторых примеров приходится применять правило Лопиталя несколько раз.

Правило Лопиталя является эффективным приемом раскрытия неопределенностей, но не универсальным. Например, оно не может быть применено, в следующем примере:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x-\cos x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right),\text{ так как}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\cos x)'}{(x-\cos x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\ \text{– не существует,}$$

хотя, с другой стороны, используя уже известный нам прием, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x-\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{\cos x}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{\cos x}{x}\right)}=1.$$

Пример 6. Найти пределы следующих выражений:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^p}$; $p>0$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}$, $n\in N$, $a>1$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$;

е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$.

Решение.

$$а)\ \lim_{\substack{x\to+\infty\\p>0}}\frac{\ln x}{x^p}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^p)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{p\cdot x^{p-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{p\cdot x^p}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Данный результат показывает, что при $x\to+\infty$ логарифмическая функция растет медленнее, чем любая степенная функция с положительным показателем.

$$б)\ \lim_{\substack{x\to+\infty\\n\in N;a>1}}\frac{x^n}{a^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(a^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{a^x\cdot\ln a}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\frac{n}{\ln a}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^{n-1})'}{(a^x)'}=\frac{n}{\ln a}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{a^x\ln a}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\ldots=$$

$$=\frac{n!}{(\ln a)^n}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x}=0.$$

То есть при $x\to+\infty$ любая степенная функция с положительным показателем (случай $n\in N$ легко обобщается на случай $n\in R$; $n>0$) растет медленнее любой показательной функции с основанием большим 1.

$$в)\ \lim_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x\cdot\cos x-\sin x)'}{(x\cdot\sin x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\cdot\sin x-\cos x}{\sin x+x\cdot\cos x}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot\sin x}{\sin x + x\cdot\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-(\sin x + x\cdot\cos x)}{\cos x+\cos x - x\cdot\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

г) Воспользуемся основным логарифмическим тождеством: $x = e^{\ln x}$:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = (1^{\infty}) = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{1-x}}.$$

Рассмотрим отдельно

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

д) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = (\infty^0) = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\operatorname{tg} x\cdot\ln\frac{1}{|x|}} = \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{-\ln|x|}{\operatorname{ctg} x}}.$$

Рассмотрим $$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\ln|x|}{\operatorname{ctg} x}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -\lim_{x\to 0}\frac{(\ln|x|)'}{(\operatorname{ctg} x)'} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\sin x = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x} = e^0 = 1.$

е) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x-\operatorname{tg}x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot\cos^2 x}{(\cos^2 x - 1)} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot\cos^2 x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = -\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1+\cos x} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: а) 0; б) 0; в) 0; г) $\frac{1}{e}$; д) 1; е) $-\frac{1}{2}$.

Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$ и имеет в точке $x_0 \in (a; b)$ производные до порядка n включительно, тогда при $x \to x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n +$$

$$+ o((x - x_0)^n) \text{ или } f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Эту формулу называют *формулой Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано.* Если $x_0 = 0$, то получается *формула Маклорена:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k + o(x^n).$$

Формулы Маклорена для некоторых элементарных функций:

$$1)\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} +$$

$$+ o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$2)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});$$

$$3)\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + o(x^n);$$

$$4)\ \operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$$

5) $\operatorname{ch} x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});$

6) $(1+x)^p = 1 + \dfrac{p}{1!}x + \dfrac{p(p-1)}{2!}x^2 + \ldots +$

$+ \dfrac{p(p-1)\cdot \ldots \cdot (p-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) =$

$= 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{p(p-1)\cdot \ldots \cdot (p-k+1)}{k!}x^k + o(x^n);$

7) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n) =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k} + o(x^n).$

Формулы Тейлора и Маклорена имеют разнообразные приложения. Ограничимся применением их для раскрытия неопределенностей и приближенного расчета значений функций.

Пример 7. Разложить следующие функции по формулам Тейлора и Маклорена в окрестности заданных точек:

а) $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$; $x_0 = -1$; б) $y = \operatorname{tg} x$; $x_0 = 0$ (формула 3-го порядка); в) $y = e^{\sin x}$; $x_0 = 0$ (формула 3-го порядка).

Решение.

а) $y(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$; $\quad y(-1) = 8$;

$y'(x) = 3x^2 + 6x - 2$; $\quad y'(-1) = -5$;

$y''(x) = 6x + 6$; $\quad y''(-1) = 0$;

$y'''(x) = 6$; $\quad y'''(-1) = 6$;

$y^{(n)}(x) = 0,\ n \geq 4,$

следовательно,

$$x^3 + 3x^2 - 2x + 4 = 8 + \frac{(-5)}{1!}(x+1) + \frac{0}{2!}(x+1)^2 + \frac{6}{3!}(x+1)^3;$$

$x^3 + 3x^2 - 2x + 4 = 8 - 5(x+1) + (x+1)^3$;

б) $y(x) = \operatorname{tg} x$; $\quad y(0) = 0$;

$y'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\quad y'(0) = 1$;

$y''(x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$; $\quad y''(0) = 0$;

$$y'''(x) = 2\frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x}; \qquad y'''(0) = 2;$$

$$y^{(4)}(x) = 8\sin x\frac{2 + \sin^2 x}{\cos^5 x}; \qquad y^{(4)}(0) = 0;$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4).$$

в) $y = e^{\sin x}$; $x_0 = 0$.

Как и в предыдущих примерах, можно получить формулу Маклорена для данной функции формально, найдя все ее производные до требуемого порядка включительно. Однако более эффективным оказывается использование уже известных разложений. Так как при $x \to 0$ $\sin x \to 0$, то справедлива формула

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{6} + o(\sin^3 x).$$

Кроме того, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$ при $x \to 0$;

следовательно,

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^4).$$

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4).$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^4).$$

Ответ: а) $(x + 1)^3 - 5(x + 1) + 8$; б) $x + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^4)$;

в) $1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^4)$.

Замечание. Формулы Тейлора и Маклорена с удаленным остаточным членом можно рассматривать как приближенные формулы для расчета значений функций в окрестности заданных точек. Погрешность такого приближения определяется величиной отбрасываемого остаточного члена. В частности, для формулы Маклорена с остаточным членом $r_n(x)$ имеет место следующая оценка:

$$|r_n(x)| \le \frac{M \cdot x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где M – константа, ограничивающая по абсолютной величине $(n+1)$-ю производную исходной функции в рассматриваемой окрестности.

Пример 8. Вычислить значение $\sqrt{e}$ с точностью 0,001.

Решение.

Воспользуемся разложением функции $y = e^x$ по формуле Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x),$$

$$r_n(x) \le \frac{M \cdot x^{n+1}}{(n+1)!};\ M = \max(e^x).$$

Так как $x = \frac{1}{2}$, то $M = \sqrt{e}$; следовательно,

$$r_n(x) \le \frac{\sqrt{e} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} < 0{,}001.$$

Простой расчет показывает, что уже $n = 4$ обеспечивает требуемую точность, поэтому

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24} = \frac{633}{384} \approx 1{,}6484.$$

Для сравнения табличное значение $\sqrt{e} \approx 1{,}6487$.

Ответ: 1,6484.

Пример 9. Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}};\ \text{б) } \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Решение.

а) Воспользуемся следующими разложениями:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4);$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} - o(x^5)}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} - o(x^5)}{\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}\left(1 - \frac{x^2}{20} - o(x^2)\right)}{\frac{x^3}{6}\left(1 + \frac{x}{4} - o(x)\right)} = 1.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = (1^\infty) = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$.

Воспользуемся разложениями для $\sin x$ и для $\ln(1 + t)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{6} + o(x)\right) = 0.$$

Ответ: а) 1; б) 0.

Исследование функций. Промежутки монотонности и экстремумы функций

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на промежутке, если она определена во всех точках промежутка, и для любых двух точек x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, таких что $x_1 < x_2$, выполняется условие $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема 4 *(достаточное условие монотонности).* Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во всех точках интервала $(a; b)$. Если при этом $f'(x) > 0$, то функция возрастает на отрезке $[a; b]$; если $f'(x) < 0$, то функция убывает на отрезке $[a; b]$.

Строго говоря, утверждение теоремы сохраняется, если производная обращается в ноль или не существует в конечном числе точек, в которых, однако, сама функция определена.

Определение 4. Точка $x = x_0$, называется *точкой максимума (минимума)* функции $f(x)$, если существует двусторонняя окрестность этой точки, в которой функция определена и при этом $f(x) < f(x_0)$, $(f(x) > f(x_0))$, $x \neq x_0$.

Теорема 5 *(необходимые условия экстремума).* Если x_0 – точка экстремума функции, то либо производная в этой точке не существует, либо $f'(x_0) = 0$.

Обратное утверждение неверно.

Определение 5. Точки, в которых производная равна 0, называются *стационарными.* Точки, в которых производная равна 0 или не существует, называются *критическими.*

Теорема 6 *(достаточные условия экстремума).* Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой двусторонней окрестности точки x_0, включая и саму эту точку, и дифференцируема во всех точках этой окрестности, за исключением, быть может, самой точки x_0. Если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка максимума. Если же производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Теорема 7. Пусть функция дифференцируема в точке x_0 n раз $(n \geq 1)$, и при этом $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Если

1) n – четное число и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума;

2) n – четное число и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума;

3) n – нечетное число, то в точке x_0 экстремума нет.

Пример 10. Найти промежутки монотонности следующих функций:

а) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$; б) $y = x + \sin x$; в) $y = x^2 - \ln x^2$.

Решение.

а) Областью определения данной функции является вся числовая ось:

$$x \in R.$$

Расчет промежутков монотонности функции сводится к анализу знаков ее производной. Этот анализ обычно проводится методом интервалов.

$$y'(x)=\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{2\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2+2x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2};$$

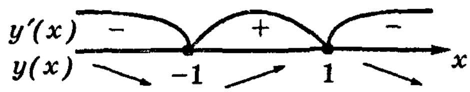
$$y'(x)=\frac{2(1-x)(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Находим критические точки:

1) $y'(x)=0$; $x_1=-1$; $x_2=1$;

2) $y'(x)$ – не существует; таких точек нет.

Следовательно, получаем следующую картину знаков производной:



Функция $y=\dfrac{2x}{x+x^2}$ убывает на промежутках $(-\infty;\ -1]$ и $[1;\ \infty)$ и возрастает на промежутке $[-1;\ 1]$.

б) Область определения функции: $x\in R$.

$$y'(x)=1+\cos x,$$

очевидно, что $y'(x)\geq 0$ при $x\in R$, следовательно, функция $y=x+\sin x$ является всюду возрастающей.

Отметим, что производная *обращается в ноль на бесконечном, но счетном* множестве точек, что гарантирует возрастание функции и в этих точках тоже.

в) Функция $y=x^2-\ln x^2$ определена на всей числовой оси, кроме точки $x=0$.

Исследуем производную данной функции:

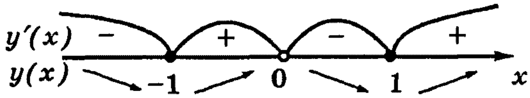
$$y'=2x-\frac{2x}{x^2}=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}.$$

Критические точки:

1) $y'(x)=0$; $x_1=-1$; $x_2=1$;

2) $y'(x)$ – не существует; $x=0$.

Строго говоря, $x=0$ не является критической точкой, поскольку она вообще не входит в область определения функции, но так как она влияет на распределение знаков производной, то пренебречь ею нельзя:



Функция $y = x^2 - \ln x^2$ убывает на промежутках $[-\infty; -1]$ и $(0; 1]$ и возрастает на промежутках $[-1; 0)$ и $[1; +\infty)$.

Ответ: а) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ возрастает на промежутке $[-1; 1]$; убывает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$;

б) $y = x + \sin x$ возрастает на всей числовой оси, $x \in R$;

в) $y = x^2 - \ln x^2$ возрастает на промежутках $[-1; 0)$ и $[1; +\infty)$, убывает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $(0; 1]$.

Пример 11. Найти экстремумы функций:

а) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$; б) $y = (x-5)^2 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}$;

в) $y = x - \ln(1 + x^2)$.

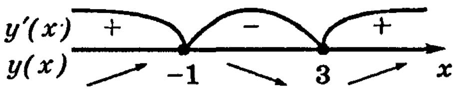
Решение.

а) Функция $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ определена при $x \in R$.

Производная имеет вид:

$y' = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x^2 - 2x - 3) = 6(x + 1)(x - 3)$.

Критическими (в данном случае – стационарными) являются точки $x = -1$ и $x = 3$.



Следовательно, точка $x = -1$ – точка максимума; $y_{max} = y(-1) = 17$; точка $x = 3$ – точка минимума; $y_{min} = y(3) = -47$.

б) Функция $y = (x-5)^2 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}$ определена при $x \in R$

Дифференцируем функцию:

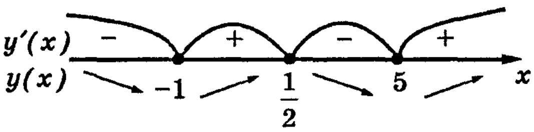
$$y' = 2(x-5)\cdot(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-5)^2 \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{4(x-5)(2x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}}.$$

Критические точки

1) $y' = 0$; $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = 5$;

2) y' – не существует; $x = -1$.



Точки $x = -1$ и $x = 5$ – точки минимума, $y_{min} = y(-1) =$

$= y(5) = 0$; точка $x = \dfrac{1}{2}$ – точка максимума;

$$y_{max} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{8}\sqrt[3]{18}.$$

в) Функция $y = x - \ln(1 + x^2)$ определена при $x \in R$;

$$y' = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$

Очевидно, что $y' \geq 0$, следовательно, точек экстремума нет.

Ответ: а) $y_{max} = y(-1) = 17$; $y_{min} = y(3) = -47$;

б) $y_{max} = y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{81}{8}\sqrt[3]{18}$; $y_{min} = y(-1) = y(5) = 0$;

в) экстремумов нет.

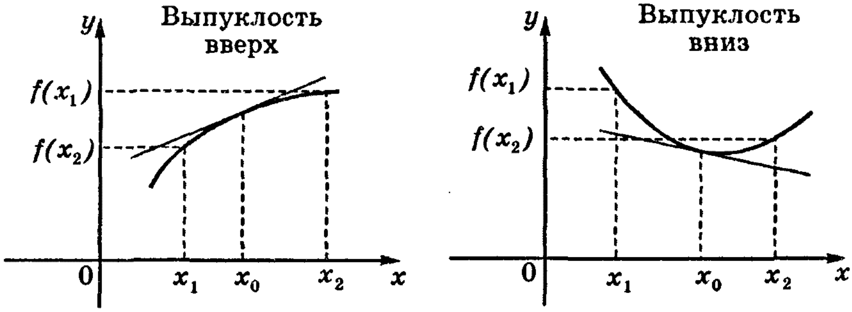
Промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции

Определение 6. Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх (выпуклой вниз)* на промежутке, если она определена во всех точках промежутка и для любых двух точек x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, таких, что $x_1 < x_2$, график функции на интервале $(x_1; x_2)$ располагается выше (ниже) хорды, проходящей через точки $(x_1; f(x_1))$ и $(x_2; f(x_2))$.

Если функция дифференцируема во всех точках промежутка, то она выпукла вверх, если ее график располагается ниже касательных, проведенных в любой точке этого промежутка (за исключением, разумеется, самой точки касания). Дифференцируемая функция выпукла вниз, если ее график располагается выше касательных, проведенных в любой точке этого промежутка.

Теорема 8 *(достаточное условие направлений выпуклости)*. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и дважды дифференцируема на интервале (a, b). Если при этом $f''(x) > 0$, то функция выпукла вниз на отрезке, если же $f''(x) < 0$, то функция выпукла вверх на отрезке.

11. Зак. 6



Утверждение теоремы сохраняется, если вторая производная обращается в ноль или не существует в конечном числе точек, в которых, однако, сама функция определена.

Определение 7. Точка $(x_0; f(x_0))$, в которой происходит смена направления выпуклости, называется *точкой перегиба* графика функции.

Теорема 9 *(необходимые условия точки перегиба).* Если x_0 – точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то либо вторая производная в этой точке не существует, либо $f''(x_0) = 0$.

Теорема 10 *(достаточные условия точки перегиба).* Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой двусторонней окрестности точки x_0, включая и саму эту точку, и дважды дифференцируема во всех точках этой окрестности, за исключением, быть может, самой точки x_0. Если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то точка x_0 является точкой перегиба графика функции.

Пример 12. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости графиков функций:

а) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$; б) $y = \ln(1 + x^2)$; в) $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

Решение.

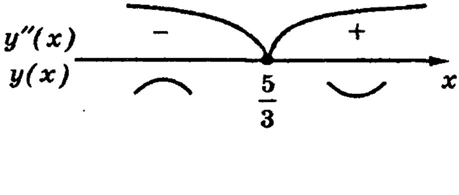
а) Функция $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$ определена и дважды дифференцируема при $x \in R$;

$y' = 3x^2 - 10x + 3$; $y'' = 6x - 10$.

Находим точки, в которых вторая производная обращается в ноль или не существует:

1) $y'' = 0$; $x = \dfrac{5}{3}$;

2) y'' – не существует; таких точек нет.



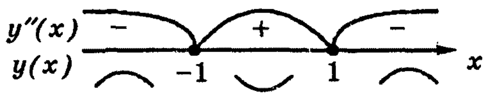
Функция выпукла вверх на промежутке $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$, выпукла вниз на промежутке $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Точка $x = \frac{5}{3}$ – точка перегиба; $y\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{250}{27}$.

б) Функция $y = \ln(1 + x^2)$ определена и дважды дифференцируема при $x \in R$;

$$y' = \frac{2x}{1+x^2};\ y'' = \frac{2\left(1+x^2\right)-(2x)^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Вторая производная всюду определена и обращается в ноль в точках $x = -1$; $x = 1$.



Функция выпукла вверх на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$; выпукла вниз на промежутке $[-1; 1]$.

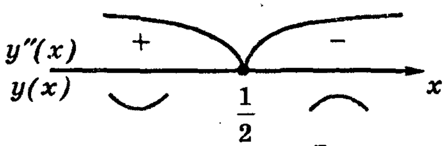
Точки $x = \pm 1$ – точки перегиба, при этом $y(\pm 1) = \ln 2$.

в) Функция $y = e^{\operatorname{arctg} x}$ определена при $x \in R$;

$$y' = e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2};$$

$$y'' = e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} - e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\left(1+x^2\right)^2}(1-2x).$$

Вторая производная всюду определена и обращается в ноль в точке $x = \frac{1}{2}$.



Функция выпукла вверх на промежутке $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$, выпукла вниз на промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

Точка $x = \frac{1}{2}$ – точка перегиба, при этом $y\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}$.

Ответ: а) функция выпукла вверх на промежутке $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$, выпукла вниз на промежутке $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$; точка $\left(\frac{5}{3}; -\frac{250}{27}\right)$ – точка перегиба;

б) функция выпукла вверх на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$; выпукла вниз на промежутке $[-1; 1]$; точки $(\pm 1; \ln 2)$ – точки перегиба;

в) функция выпукла вверх на промежутке $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$, выпукла вниз на промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$; точка перегиба $\left(\frac{1}{2}; e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}\right)$.

Асимптоты графика функции

Исследование функций на асимптоты не имеет прямого отношения к понятию производной и дифференциала. Но поскольку это исследование обычно проводится в рамках полного анализа функций (в том числе, и по первой и второй производной), то рассмотрим этот вопрос в данном разделе.

Определение 8. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, быть может, односторонней. Если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке x_0 равен бесконечности, то прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции.

Определение 9. Пусть функция $y = f(x)$ определена при $x > x_0$ $(x < x_0)$. Прямая $y = ax + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Если $a = 0$, то асимптоту называют *горизонтальной*. Как правило, вертикальные асимптоты находятся «на краях» области определения функции. Наклонные (горизонтальные) асимптоты находятся при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ по следующим формулам:

$$a = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x}; \; b = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} (f(x) - a \cdot x).$$

Пример 13. Найти асимптоты графиков функций:

а) $y = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$; б) $y = \dfrac{1}{x} + \operatorname{arctg} x$.

Решение.

а) Функция $\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$ определена на всей числовой оси, кроме точки $x = -1$.

1) Рассмотрим поведение функции в окрестности точки $x = -1$:

$$\lim_{x\to-1-0} \frac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty; \; \lim_{x\to-1+0} \frac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty,$$

следовательно, прямая $x = -1$ – вертикальная асимптота графика функции.

2) Рассмотрим поведение функции при $x \to +\infty$:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2 \cdot x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y(x) - a \cdot x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = -2.$$

Следовательно, прямая $y = x - 2$ – наклонная асимптота при $x \to +\infty$.

3) При $x \to -\infty$ аналогичный анализ приводит к той же асимптоте $y = x - 2$.

б) Функция $y = \dfrac{1}{x} + \operatorname{arctg} x$ определена на всей числовой оси, кроме точки $x = 0$.

1) Рассмотрим поведение функции в окрестности точки $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x\right) = -\infty; \quad \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x\right) = +\infty,$$

следовательно, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции.

2) Рассмотрим поведение функции при $x \to +\infty$:

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x}{x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\infty} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, прямая $y = \dfrac{\pi}{2}$ – горизонтальная асимптота графика функции.

3) Аналогично, при $x \to -\infty$ прямая $y = -\dfrac{\pi}{2}$ является горизонтальной асимптотой.

Ответ: а) $x = -1$; $y = x - 2$; б) $x = 0$; $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

Общая схема анализа свойств функции и построения ее графика

Рекомендуем следующую последовательность анализа свойств функции.

1) Область определения функции; область значений функции (если это возможно).

2) Промежутки положительных и отрицательных значений функции. Координаты точек пересечения с осями Ox и Oy.

3) Исследование функции на четность, нечетность.

4) Исследование функции на периодичность.

5) Исследование функции по первой производной:

– промежутки монотонности;

– точки экстремумов; экстремумы функции.

6) Исследование функции по второй производной:
– промежутки выпуклости вверх и выпуклости вниз;
– точки перегиба.

7) Анализ области непрерывности. Анализ точек разрыва. Асимптоты графика функции.

8) Расчет координат дополнительных точек (если это необходимо).

9) Построение графика функции.

Пример 14. Провести полное исследование и построить график функции $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-1}$.

Решение.

1) Функция $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-1}$ определена при всех $x \in R$.

Вопрос об области значений отложим до построения графика.

2) а) Пересечение с осью Ox: $\begin{cases} y = 0, \\ \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^2-1} \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} y=0, \\ 0=1, \end{cases} \to$ график функции ось Ox не пересекает.

б) Пересечение с осью Oy: $\begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$

в) Промежутки положительных значений функции:

$y > 0$; $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-1} > 0$; $\sqrt[3]{x^2} > \sqrt[3]{x^2-1}$; $x^2 > x^2 - 1$; $0 > -1$; $x \in R$.

График функции располагается выше оси Ox при всех x.

г) Промежутков отрицательных значений функция не имеет.

3) Сравним значения функции в точке x и точке $-x$:

$y(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-1}$; $y(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} - \sqrt[3]{(-x)^2-1} = y(x)$, следовательно, функция четная.

Напомним, что график четной функции симметричен относительно оси Oy.

4) Функция непериодична (см. пункт 5: существуют три точки экстремума, что невозможно в случае периодической функции).

5) Исследование по первой производной:

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} =$$

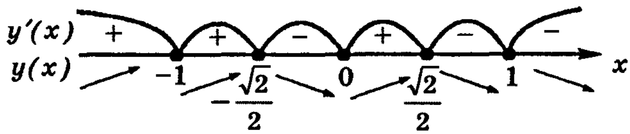
$$= \frac{2\left(\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - x\sqrt[3]{x}\right)}{3\sqrt[3]{x(x^2-1)^2}}.$$

Критические точки:

а) $y' = 0$; $\sqrt[3]{(x^2-1)^2} = \sqrt[3]{x^4}$; $(x^2-1)^2 = x^4$;

$-2x^2 + 1 = 0$; $x^2 = \frac{1}{2}$; $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) y' не существует; $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 1$.



Все критические точки на рисунке заштрихованы, так как во всех этих точках функция определена.

Функция возрастает на промежутках $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ и убывает на промежутках $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$; $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$.

Точки $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ – точки максимума; $y\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt[3]{4} \approx$ $\approx 1{,}59$.

Точка $x = 0$ – точка минимума; $y(0) = 1$.

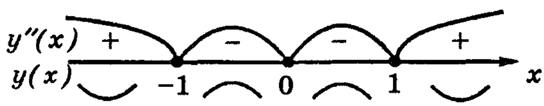
6) Исследование по второй производной:

$$y'' = \frac{2}{9}\frac{5x^3\cdot\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{(x^2-1)^2} - \sqrt[3]{x^4} - x^2\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - 4\cdot\sqrt[3]{x^4}\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{(x^2-1)\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\cdot\sqrt[3]{x^4}}.$$

Критические точки первой производной:

1) $y'' = 0$; можно показать, что таких точек нет;

2) y'' – не существует; $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 1$.



Функция выпукла вниз на промежутках $(-\infty; -1]$; $[1; +\infty)$, выпукла вверх на промежутках $[-1; 0]$; $[0; 1]$.

Точки $x = \pm 1$ – точки перегиба; $y(\pm 1) = 1$.

7) а) Функция определена на всей числовой оси и всюду непрерывна; точек разрыва нет, следовательно, нет и вертикальных асимптот.

б) Рассмотрим поведение функции при $x \to +\infty$:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} - (x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = 0;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-1}\right) = (\infty - \infty) =$$

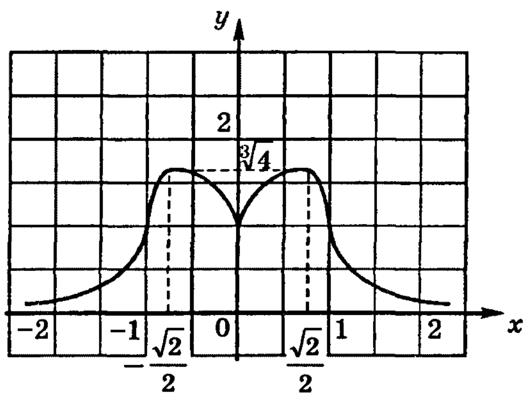
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - (x^2-1)}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^4 - x^2} + \sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Таким образом, прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$.

в) В силу четности функции прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой и при $x \to -\infty$.

8) Ограничимся расчетом дополнительных значений функции при $x = \pm 2$: $y(\pm 2) = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \approx 0{,}145$.

9) График функции имеет вид:



Возвращаясь к первому пункту исследования, отметим, что областью значений функции $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-1}$ является полуинтервал $(0; \sqrt[3]{4}\,]$.

Задача о наибольшем и наименьшем значениях функции на промежутке

Случай отрезка $[a; b]$.

Наибольшие и наименьшие значения функции, непрерывной на отрезке, достигаются либо в критических точках, либо на концах отрезка.

Достаточно найти все критические точки, принадлежащие отрезку, рассчитать значения функции в этих точках, а также в точках a и b, после чего выбрать наибольшее и наименьшее значения.

Случай интервала $(a; b)$.

В отличие от предыдущего пункта, в случае интервала не гарантируется существование наибольшего и наименьшего значений у функции. После расчета критических точек и значений функции в них, необходимо изучить поведение функции при $x \to a+0$ и $x \to b-0$. Сравнивая найденные значения, получают наибольшее и наименьшее значения функций или обосновывается факт отсутствия таких значений.

В случае бесконечных промежутков $(a; +\infty)$; $[a; +\infty)$; $(-\infty; a)$; $(-\infty; a]$; $(-\infty; +\infty)$ схемы решения аналогичны.

Пример 15. Найти наибольшие и наименьшие значения функций на промежутках:

а) $y = x^4 - 2x^2 + 5$; $[-2; 2]$; б) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$; $(0; 3)$;

в) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+x}$; $(0; 1]$.

Решение.

а) 1) Значения функции в граничных точках отрезка:
$y(\pm 2) = 16 - 8 + 5 = 13$.

2) Критические точки и значения функции в этих точках:
$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$;
$y' = 0$; $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 1$.
Все точки принадлежат отрезку $[-2; 2]$.
$y(0) = 5$; $y(\pm 1) = 4$.

3) Сравнивая значения $y(\pm 2)$; $y(0)$; $y(\pm 1)$, получаем
$y_{наиб} = y(\pm 2) = 13$;
$y_{наим} = y(\pm 1) = 4$.

б) 1) Находим предельные значения функции на границах интервала:

$$y(0+0) = \lim_{x \to 0+0} \left(x^2 - 2x\right)^{\frac{2}{3}} = 0;$$

$$y(3-0)=\lim_{x\to 3-0}\left(x^2-2x\right)^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{9}\approx 2{,}08.$$

Отметим, что этих значений в точках $x = 0$ и $x = 3$ функция не достигает, поскольку эти точки не принадлежат интервалу (0; 3).

2) Критические точки и значения функции в этих точках:

$$y'=\left(\left(x^2-2x\right)^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}\left(x^2-2x\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot(2x-2)=$$

$$=\frac{4(x-1)}{3\cdot\sqrt[3]{x^2-2x}};$$

$y' = 0$; $x = 1$;

y' – не существует; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

Точки $x = 1$; $x = 2$ попадают в интервал (0; 3);

точка $x = 0$ – не принадлежит интервалу.

$y(1) = 1$; $y(2) = 0$.

3) Сравнивая значения $y(1) = 1$; $y(2) = 0$; $y(0+0) = 0$; $y(3-0) = \sqrt[3]{9}$, получаем

$y_{\text{наим}} = y(2) = 0$;

$y_{\text{наиб}}$ – не существует.

в) 1) Находим предельное значение функции в точке $x = 0$ и граничное значение в точке $x = 1$:

$$y(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}7854;$$

$y(1) = \operatorname{arctg} 0 = 0$.

2) Критические точки и значения функции в этих точках:

$$y'=\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=$$

$$=\frac{-2}{(1+x)^2+(1-x)^2}.$$

Очевидно, что $y' < 0$ при $x \in (0; 1]$, т. е. функция является убывающей.

3) $y_{\text{наим}} = y(1) = 0$;

$y_{\text{наиб}}$ – не существует.

Ответ: а) $y_{наиб} = y(\pm 2) = 13$; $y_{наим} = y(\pm 1) = 4$; б) $y_{наиб}$ – не существует; $y_{наим} = y(2) = 0$; в) $y_{наиб}$ – не существует; $y_{наим} = y(1) = 0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Вывести уравнения касательной и нормали к кривой $y = e^{x^2}$ в точке с абсциссой а) 0; б) 1.

2. Вывести уравнения касательной и нормали к кривой $y = \operatorname{arctg} x$ в точке с абсциссой а) 0; б) 1.

3. Под каким углом пересекаются кривые $y = \sin x$ и $y = \cos x$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

4. Под каким углом пересекаются кривые $y = \ln(1 + x^2)$ и $y = \ln(1 - x^2)$?

5. Найти ускорение материальной точки, движущейся по закону $y(x) = \operatorname{tg} x$; $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ в момент времени, когда ее скорость равна 2.

6. Масса стержня задается функцией $y = 3x^3 + \sin x$. Какова плотность стержня в точках $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$?

7. Найти приближенные значения выражений а) $\cos 61^\circ$; б) $\arccos 0{,}54$.

8. Используя правила Лопиталя, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin 2x)}$;

в) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sin x}{\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$; г) $\lim\limits_{x \to 0+0} x^x$; д) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{ctg} x^{\operatorname{tg} x}$.

9. Разложить функции по формулам Тейлора и Маклорена в окрестности заданных точек:

а) $x^3 + 3x^2 + x - 6$; $x = -1$;

б) $\dfrac{1}{x}$; $x = -1$; в) $\operatorname{tg} x$; $x = 0$ (формула 2-го порядка).

10. Используя разложение в ряд Маклорена, найти $\cos 10^\circ$ с точностью до 0,001.

11. Вычислить пределы, используя разложения в ряды Тейлора и Маклорена:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+5x\sin x}{\ln(1+x^2)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{x^2}}{\sin^2 x}$.

12. Найти промежутки монотонности следующих функций:

а) $y = x + \cos x$; б) $y = x^2e^x$; в) $y = x - \ln(1 + x)$.

13. Найти экстремумы функций

а) $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$; б) $y = e^x \sin x$;

14. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

а) $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$; б) $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$; в) $y = e^{2x-x^2}$.

15. Найти асимптоты графиков функций:

а) $y = \dfrac{4x^3+x-1}{x^2-x+1}$; б) $y = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$.

16. Найти наибольшие и наименьшие значения функций на промежутках:

а) $y = \dfrac{x^2-x+1}{-x^2+x+1}$; $x \in [0; 1]$;

б) $y = 2\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}^2\, x$; $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ответы:

1. $y = 1$; $x = 0$; б) $y = e \cdot x$; $y = -\dfrac{x}{e} + e + \dfrac{1}{e}$;

2. а) $y = x$; $y = -x$; б) $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$; $y = -2x + \dfrac{\pi}{4} + 2$;

3. $\mathrm{arctg}\,(2\sqrt{2})$; **4.** 0; **5.** 4; **6.** 1; $\dfrac{9}{4}\pi^2$;

7. а) 0,4849; б) 1,00095; **8.** а) $-\dfrac{1}{4}$; б) 1; в) 0; г) 1; д) 1;

9. а) $(x + 1)^3 - 2(x + 1) - 5$; б) $-1 - (x + 1) - (x + 1)^2 - \ldots$

$- (x + 1)^n + (-1)^{n+1}\dfrac{(x+1)^{n+1}}{(-1+c(x+1))^{n+2}}$, $0 < c < 1$;

в) $x+\dfrac{x^3}{3}\cdot\dfrac{(1+2\sin^3 cx)}{\cos^4 cx}$, $0<c<1$;

10. 0,985; **11.** а) 5,5; б) $-0,5$;

12. а) всюду возрастает; б) возрастает при $x\le -2$ и $x\ge 0$; убывает при $-2\le x\le 0$; в) возрастает при $x\ge 0$; убывает при $-1<x\le 0$;

13. а) $y_{min}=y\left(\dfrac{7}{5}\right)=-\dfrac{1}{24}$;

б) $y_{min}=y\left(-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi n}$;

$y_{max}=y\left(\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}+2\pi n}$, $n\in Z$;

14. а) точек перегиба нет; функция выпукла вверх при $x<-1$; выпукла вниз при $x>-1$; б) точка перегиба (0; 0); в) точки перегиба: $\left(1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{e}\right)$; функция выпукла вниз при $x\le 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $x\ge 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; выпукла вверх при $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le x\le 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

15. а) вертикальных асимптот нет; $y=4x+4$ – наклонная асимптота при $x\to\pm\infty$; б) $x=0$ – вертикальная асимптота; $y=x$ – наклонная асимптота при $x\to\pm\infty$;

16. а) $y_{наиб}=y(0)=y(1)=1$; $y_{наим}=y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{5}$; б) $y_{наиб}=$ $=y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$; $y_{наим}$ – не существует.

6. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ: ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

6.1. Неопределенный интеграл

Понятие неопределенного интеграла

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке. Функция $y = F(x)$ называется *первообразной* функции $y = f(x)$, если она определена на этом промежутке, и в каждой точке промежутка выполняется условие

$$F'(x) = f(x).$$

Теорема 1. Все первообразные одной и той же функции отличаются на некоторую постоянную.

Определение 2. Множество всех первообразных функции $y = f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от этой функции.

Обозначение: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, C – const.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\int dF(x) = F(x) + C.$

2. $d\int f(x)\,dx = f(x)dx.$

3. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то функции $f_1(x) \pm f_2(x)$ также имеют первообразные, и при этом

$$\int \big(f(x_1) \pm f(x_2)\big)\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx.$$

4. Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то функция $k \cdot f(x)$ (k – const, $k \neq 0$) также имеет первообразную, и при этом

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

Табличные интегралы

1. $\int x^p dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C;\ p \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;\ x \neq 0.$

3. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;\ a > 0,\ a \neq 1;\ \int e^x\, dx = e^x + C;$

4. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C;$

$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C;$

$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;$

$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;\ x \neq \pi k,\ k \in Z;$

5. $\int \operatorname{sh} x \cdot dx = \operatorname{ch} x + C;\ \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2};$

$\int \operatorname{ch} x \cdot dx = \operatorname{sh} x + C;\ \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2};$

$\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth} x + C;\ \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},\ x \neq 0;$

$\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;\ \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$

6. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a} \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{a} + C;\ a \neq 0.$

7. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;\ x \neq \pm a.$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos \dfrac{x}{a} + C;\ |x| < |a|.$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

если подкоренное выражение имеет вид $x^2 - a^2$, то предполагается, что $|x| > |a|$.

Замечание. Строго говоря, формулы 1–9 справедливы лишь на промежутках, внутри которых подынтегральные функции определены. Если подынтегральная функция имеет точки разрыва, то нельзя говорить о едином представлении неопределенного интеграла от нее для всех промежутков, где функция существует. Например,

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + C_1, & x > 0, \\ \ln(-x) + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

Основные методы интегрирования

Метод разложения

Этот метод применяется для интегрирования функций $f(x)$, представляющих собой алгебраическую сумму нескольких функций $f_1(x)$; $f_2(x)$; ...; $f_n(x)$, первообразные которых заранее известны или могут быть легко получены. Тогда в соответствии со свойством 3 неопределенного интеграла получаем

$$\int f(x)\,dx = \int \left(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\right) dx =$$

$$= \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx.$$

Метод введения нового аргумента

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ определена и имеет первообразную $F(x)$ на промежутке X; пусть также функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на промежутке T, и определена сложная функция $f(\varphi(t))$. Тогда функция $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ также имеет первообразную на промежутке T, и при этом

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt = F(\varphi(t)) + C,\ C - \text{const}.$$

Главной проблемой при применении данного метода является то, что исходный интеграл $\int a(t) \cdot b(t) \cdot dt$ не содержит «подсказок» в виде заранее сформированных множителей $f(\varphi(t))$ и $\varphi'(t)$. Необходимо «увидеть» в одном из множителей $a(t)$ или $b(t)$ производную некоторой функции $\varphi(t)$, а второй множитель оформить как функцию с аргументом $\varphi(t)$, после чего процедура интегрирования принимает очевидный характер:

$$\int a(t)\cdot b(t)\cdot dt = \begin{vmatrix} b(t)=\varphi'(t) \\ a(t)=f(\varphi(t)) \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt =$$

$$= \left|\varphi(t)=x\right| = \int f(x)\cdot dx = F(x)+C = F(\varphi(t))+C.$$

Метод подстановки

Если функция $f(x)$ непрерывна, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема, то

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot dt.$$

В отличие от метода введения нового аргумента подстановка может проводиться совершенно формально. Однако эффективность метода подстановки существенно зависит от выбора функции $\varphi(t)$. Подстановка считается удачной, если вновь полученный интеграл проще исходного.

Отметим еще одну важную особенность метода подстановки. После проведения интегрирования по переменной t необходимо «вернуться» к переменной x, что возможно лишь при условии существования обратной функции $t=\varphi^{-1}(x)$. Следовательно, на промежутке, на котором выполняется интегрирование, функция $\varphi(t)$ должна быть строго монотонной.

Метод интегрирования по частям

Теорема 3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке, и интеграл $\int v\cdot du$ существует, то и интеграл $\int u\cdot dv$ также существует, и при этом

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du.$$

Интегрирование по частям можно считать результативным, если получающийся интеграл проще исходного. На практике применению этого метода предшествует некий анализ, поскольку реальный интеграл имеет вид $\int a(x)\cdot b(x)\cdot dx$, и, следовательно, есть альтернатива в выборе $u(x)$ и $dv(x)$. Рекомендуется в качестве $u(x)$ выбирать ту из функций $a(x)$ или $b(x)$, производная которой проще для интегрирования, чем сама функция; а в качестве $dv(x)$ выбирать тот множитель, который сравнительно легко интегрируется, тогда

$$\int a(x)\cdot b(x)\cdot dx = \begin{vmatrix} u=a(x) & du=a'(x)dx \\ dv=b(x)dx & v=\int b(x)dx=B(x) \end{vmatrix} =$$

$$= a(x)\cdot B(x) - \int B(x)\,a'(x)dx.$$

Например, в интегралах вида

$$\int x^n\cdot\begin{pmatrix}\sin ax\\ \cos ax\\ e^{ax}\end{pmatrix}dx$$

целесообразно в качестве $u(x)$ и $dv(x)$ принимать соответственно

$$u(x)=x^n,\ dv(x)=\begin{pmatrix}\sin ax\\ \cos ax\\ e^{ax}\end{pmatrix}dx,$$

поскольку это приводит к понижению степени множителя x^n на единицу. После n-кратного применения метода интегрирования по частям приходим к простым интегралам вида

$$\int\begin{pmatrix}\sin ax\\ \cos ax\\ e^{ax}\end{pmatrix}dx.$$

В интегралах вида $\int x^n\cdot\begin{pmatrix}\ln x\\ \arcsin x\\ \operatorname{arctg} x\end{pmatrix}dx$ в качестве $u(x)$ и $dv(x)$ принимают

$$u(x)=\begin{pmatrix}\ln x\\ \arcsin x\\ \operatorname{arctg} x\end{pmatrix},\ dv(x)=x^n\,dx.$$

Пример 1. Найти интегралы: а) $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}+5x\cdot\cos x-1}{x}dx$;

б) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$; в) $\int \operatorname{tg}^2 x\ dx$; г) $\int\frac{(1+x)^2dx}{x(1+x^2)}$.

Решение.

Для нахождения интегралов а) – г) воспользуемся методом разложения, который позволяет разбить исходный интеграл на алгебраическую сумму табличных интегралов.

а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + 5x \cdot \cos x - 1}{x} dx = \int \left(x^{-\frac{1}{3}} + 5\cos x - \frac{1}{x} \right) dx =$

$= \int x^{-\frac{1}{3}} \cdot dx + 5\int \cos x \cdot dx - \int \frac{dx}{x} = \frac{3 \cdot x^{\frac{2}{3}}}{2} + 5 \sin x - \ln|x| +$
$+ C$, C – const;

б) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx =$

$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x - \mathrm{tg}\, x + C;$

в) $\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} -$
$- \int dx = \mathrm{tg}\, x - x + C;$

г) $\int \frac{(1+x)^2 dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{1 + 2x + x^2}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{(1+x^2) + 2x}{x(1+x^2)} dx =$

$= \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} = \ln|x| + 2 \,\mathrm{arctg}\, x + C.$

Ответ: а) $\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + 5\sin x - \ln|x| + C$; б) $-\mathrm{ctg}\, x - \mathrm{tg}\, x + C$; в) $\mathrm{tg}\, x - x + C$; г) $\ln|x| + 2\,\mathrm{arctg}\, x + C$.

Пример 2. Найти интегралы: а) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\, dx$;

б) $\int \frac{\sin x \cdot dx}{\sqrt{\cos x}}$; в) $\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$; г) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$;

д) $\int \mathrm{tg} x\, dx$.

Решение.

Используем метод введения нового аргумента.

а) Поскольку $2xdx = d(x^2) = d(x^2+1)$, то

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,d(x^2+1) = \left|x^2+1 = t\right| = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

б) Так как $\sin x\,dx = -d(\cos x)$, то интеграл принимает вид:

$$\int \frac{\sin x \cdot dx}{\sqrt{\cos x}} = -\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{\cos x}} = \left|\cos x = t\right| = -\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= -2t^{\frac{1}{2}} + C = -2\sqrt{\cos x} + C.$$

в) Очевидно, что $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$, поэтому

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}\,dx}{x} = \int (\ln x)^{\frac{1}{2}}\,d(\ln x) = \left|\ln x = t\right| = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

г) $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{d(e^x)}{1+e^{2x}} = \left|e^x = t\right| = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C =$
$= \operatorname{arctg}(e^x) + C.$

д) $\displaystyle\int \operatorname{tg}x\,dx = \int \frac{\sin x \cdot dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \left|\cos x = t\right| =$

$$= -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Ответ: а) $\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$; б) $-2\sqrt{\cos x} + C$; в) $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} +$ $+ C$; г) $\operatorname{arctg}(e^x) + C$; д) $-\ln|\cos x| + C$.

Пример 3. Найти интегралы: а) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+a^2}$; г) $\displaystyle\int \frac{4x+3}{x^2+6x+10}\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$.

Решение.

Используем метод подстановки. Умение найти подходящую подстановку приходит по мере накопления опыта интегрирования. В некоторых случаях бывает довольно сложно сразу обнаружить замену, сводящую интеграл к табличному, или хотя бы упростить его. В качестве общей рекомендации можно посоветовать лишь следующее: заменять на новую переменную следует самые «тяжелые» конструкции под знаком интеграла. Например такие, которые вообще отсутствуют в подынтегральных выражениях табличных интегралов.

$$\text{а) } \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}} = \begin{vmatrix} \sqrt{x-1} = t \\ x = t^2+1 \\ dx = 2t\,dt \end{vmatrix} = \int \frac{(t^2+1)\cdot 2t\cdot dt}{t} =$$

$$= 2\int (t^2+1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3}+t\right) + C = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + C;$$

$$\text{б) } \int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} = \begin{vmatrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{vmatrix} = \int \frac{e^t\cdot 2t\cdot dt}{t} = 2e^t + C =$$

$$= 2e^{\sqrt{x}} + C;$$

$$\text{в) } \int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \begin{vmatrix} x^2+a^2 = t \\ x = (t-a^2)^{\frac{1}{2}} \\ dx = \frac{1}{2}(t-a^2)^{-\frac{1}{2}}dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{(t-a^2)^{\frac{1}{2}}\cdot \frac{1}{2}(t-a^2)^{-\frac{1}{2}}dt}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C.$$

Данное решение получено для значений $x \geq 0$:

$$x^2 + a^2 = t,\ x^2 = t - a^2;\ x = \sqrt{t-a^2} = (t-a^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Можно легко показать, что случай $x < 0$ приводит к тому же результату. В заключение покажем более экономную технику подстановки, которая не требует получения явного выражения для переменной x:

$$\int \frac{xdx}{x^2 + a^2} = \begin{vmatrix} x^2 + a^2 = t \\ d(x^2 + a^2) = dt \\ 2x\,dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln (x^2 + a^2) + C.$$

г) $\displaystyle\int \frac{4x + 3}{x^2 + 6x + 10}\, dx.$

Знаменатель дроби является квадратным трехчленом; выделим полный квадрат:

$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 9 + 1 = (x + 3)^2 + 1.$

$$\int \frac{4x + 3}{(x+3)^2 + 1}\, dx = \begin{vmatrix} x + 3 = t \\ x = t - 3 \\ dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{4(t - 3) + 3}{t^2 + 1}\, dt =$$

$$= \int \frac{4t - 9}{t^2 + 1}\, dt = 4\int \frac{tdt}{t^2 + 1} - 9\int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2\int \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} -$$

$$- 9 \operatorname{arctg} t = 2 \ln(t^2 + 1) - 9 \operatorname{arctg} t + C = 2 \ln(x^2 + 6x + 10) -$$

$$- 9\operatorname{arctg} (x + 3) + C.$$

д) $$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1 + x} = \begin{vmatrix} \operatorname{arctg} \sqrt{x} = t \\ \sqrt{x} = \operatorname{tg} t \\ x = \operatorname{tg}^2 t \\ 1 + x = \dfrac{1}{\cos^2 t} \\ dx = 2\operatorname{tg} t \dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{t}{\operatorname{tg} t} \cdot \frac{2\operatorname{tg} t \cdot \cos^2 t}{\cos^2 t}\, dt = \int 2t\, dt = t^2 + C =$$

$$= (\operatorname{arctg} \sqrt{x}\,)^2 + C.$$

Ответ: а) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2(x-1)^{\frac{1}{2}}+C$; б) $2e^{\sqrt{x}}+C$;

в) $\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C$; г) $2\ln(x^2+6x+10)-9\operatorname{arctg}(x+3)+$
$+C$; д) $(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,)^2+C$.

Пример 4. Найти интегралы: а) $\int x^3\cdot\ln x\cdot dx$;

б) $\int x\cdot\operatorname{arctg}x\cdot dx$; в) $\int \arccos x\cdot dx$; г) $\int e^x\cdot\sin x\cdot dx$;

д) $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx$.

Решение.

Применим интегрирование по частям.

а) $$\int x^3\cdot\ln x\cdot dx=\begin{vmatrix} u=\ln x & du=\frac{dx}{x} \\ dv=x^3dx & v=\frac{1}{4}x^4 \end{vmatrix}=\frac{1}{4}x^4\cdot\ln x-$$

$$-\int\frac{1}{4}x^3\,dx=\frac{1}{4}x^4\cdot\ln x-\frac{x^4}{16}+C;$$

б) $$\int x\cdot\operatorname{arctg}x\cdot dx=\begin{vmatrix} u=\operatorname{arctg}x & du=\frac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx & v=\frac{1}{2}x^2 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

Так как $\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}$, то

$$\int x\cdot\operatorname{arctg}x\cdot dx=\frac{1}{2}x^2\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

в) $\int \arccos x \cdot dx = \begin{vmatrix} u = \arccos x & du = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} =$

$= x \cdot \arccos x + \int \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Заметим, что $x\,dx = d\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}d(x^2) = \dfrac{1}{2}d(x^2-1) =$

$=-\dfrac{1}{2}d(1-x^2)$, следовательно,

$$\int \arccos x \cdot dx = x \cdot \arccos x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(1-x^2) =$$

$$= x \cdot \arccos x - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

г) $\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = \begin{vmatrix} u = \sin x & du = \cos x \cdot dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{vmatrix} =$

$= \sin x \cdot e^x - \int e^x \cdot \cos x \cdot dx = \begin{vmatrix} u = \cos x & du = -\sin x \cdot dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{vmatrix} =$

$= \sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x - \int e^x \sin x \cdot dx.$

Двукратное интегрирование по частям приводит к появлению исходного интеграла. Фактически, получено уравнение для нахождения интеграла:

$$\int e^x \sin x \cdot dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \cdot dx,$$

следовательно, $\int e^x \sin x \cdot dx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

д) $\int \sin \sqrt[3]{x}\, dx.$

Целесообразно ввести новую переменную: $t = \sqrt[3]{x}$:

$$\int \sin \sqrt[3]{x}\, dx = \begin{vmatrix} \sqrt[3]{x} = t \\ x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{vmatrix} = \int \sin t \cdot 3t^2 \cdot dt =$$

$$= 3\int t^2 \cdot \sin t \cdot dt = \begin{vmatrix} u = t^2 & du = 2tdt \\ dv = \sin tdt & v = -\cos t \end{vmatrix} =$$

$$= 3\left(-t^2 \cdot \cos t + 2\int t \cdot \cos t \cdot dt\right) = -3t^2 \cdot \cos t +$$

$$+ 6\int t \cdot \cos t \cdot dt = \begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ dv = \cos tdt & v = \sin t \end{vmatrix} = -3t^2 \cdot \cos t +$$

$$+ 6\left(t \cdot \sin t - \int \sin t \cdot dt\right) = -3t^2 \cdot \cos t + 6t \cdot \sin t + 6\cos t + C =$$

$$= -3\sqrt[3]{x^2} \cdot \cos\sqrt[3]{x} + 6 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sin\sqrt[3]{x} + 6\cos\sqrt[3]{x} + C.$$

Ответы:

а) $\frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{x^4}{16} + C$; б) $\frac{1}{2}x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x +$
$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$; в) $x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$;

г) $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$; д) $-3\sqrt[3]{x^2} \cdot \cos\sqrt[3]{x} +$
$+ 6 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sin\sqrt[3]{x} + 6\cos\sqrt[3]{x} + C$.

Интегрирование рациональных дробей

Определение 3. *Рациональной дробью* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется отношение двух многочленов, при этом дробь называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$.

Любая неправильная дробь может быть легко представлена в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби, для чего достаточно поделить $P(x)$ на $Q(x)$ уголком.

Теорема 4. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь, $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами. Если

$$Q(x) = (x-a_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_n)^{s_n} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot$$

$\cdot(x^2 + p_m x + q_m)^{t_m}$, где $p_i^2 - 4q_i < 0$, $i = 1; ...; m$; $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, то существуют действительные числа A_{ij}; $i = 1; ...; n$, $j = 1; ...; s_i$; B_{ij}; D_{ij}; $i = 1; ...; m$; $j = 1; ...; t_i$ такие, что исходная рациональная дробь может быть представлена в следующем виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{t_i}\frac{B_{ij}x + D_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}.$$

По сути теорема 4 утверждает, что любая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы так называемых *простейших (или элементарных)* дробей вида

$$\frac{A}{x-a};\ \frac{A}{(x-a)^i};\ \frac{Bx+D}{x^2+px+q};\ \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^i},$$

$i \geq 2$; $p^2 - 4q < 0$.

На практике указанное разложение осуществляется с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Интегрирование рациональных дробей, таким образом, сводится к интегрированию простейших дробей.

1. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}\,dx = A\cdot\ln|x-a| + C$;

2. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^i}\,dx = A\int(x-a)^{-i}dx = \frac{A}{1-i}\frac{1}{(x-a)^{i-1}} + C$;

$i \geq 2$;

3. $\displaystyle\int\frac{Bx+D}{x^2+px+q}\,dx = \int\frac{Bx+D}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dx =$

$$= \left|\begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t \\ x = t - \frac{p}{2} \\ q - \frac{p^2}{4} = a^2 \\ dx = dt \end{array}\right| = \int\frac{B\left(t - \frac{p}{2}\right) + D}{t^2 + a^2}\,dt =$$

$$= B\int\frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(D - \frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\left(D-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}=$$

$$=\frac{B}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{2D-Bp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+$$

$$+\frac{2D-Bp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a}+C.$$

Заметим, что первый этап преобразования связан с выделением полного квадрата в квадратном трехчлене:

$$x^2+px+q=x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4},$$

где $q-\frac{p^2}{4}>0$, и, следовательно, $q-\frac{p^2}{4}=a^2$.

4. $\int\frac{Bx+D}{\left(x^2+px+q\right)^i}dx.$

После аналогичных преобразований интеграл принимает вид:

$$\int\frac{Bx+D}{\left(x^2+px+q\right)^i}dx=\left|\begin{array}{l}x+\frac{p}{2}=t\\ q-\frac{p^2}{4}=a^2\\ dx=dt\end{array}\right|=$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^i}+\frac{2D-pB}{2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^i};$$

$$\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^i}=\frac{1}{(1-i)(t^2+a^2)^{i-1}}+C_1;$$

$$\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^i}=\left|\begin{array}{ll}u=\frac{1}{(t^2+a^2)^i} & du=-\frac{2itdt}{(t^2+a^2)^{i+1}}\\ dv=dt & v=t\end{array}\right|=$$

$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^i}+2i\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^{i+1}}.$$

Обозначая $I_i = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^i}$, легко получаем следующее *рекуррентное* соотношение: $I_{i+1} = \frac{t}{2ia^2(t^2 + a^2)^i} + \frac{2i-1}{2ia^2} I_i$; $i = 1; 2; \ldots$.

Поскольку $I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}$; то все последующие интегралы I_2, I_3, ... вычисляются по вышеприведенной формуле.

Пример 5. Найти интегралы: а) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$;

б) $\int \frac{(x^2 - 3x + 2)dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$; в) $\int \frac{dx}{x^3 + x}$; г) $\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx$.

Решение.

а) Дробь $\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}$ является неправильной; выделим целую часть:

$$
\begin{array}{r|l}
-\underline{\begin{array}{l} x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 8 \\ x^5 + 0x^4 - 4x^3 \end{array}} & \underline{x^3 + 0x^2 - 4x} \\
-\underline{\begin{array}{l} x^4 + 4x^3 + 0x^2 \\ x^4 + 0x^3 - 4x^2 \end{array}} & x^2 + x + 4 \\
-\underline{\begin{array}{l} 4x^3 + 4x^2 + 0x \\ 4x^3 + 0x^2 - 16x \end{array}} & \\
4x^2 + 16x - 8 &
\end{array}
$$

Таким образом, $\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}$.

Прежде чем приступить к интегрированию, необходимо разложить дробь $\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}$ на сумму простейших дробей. В силу теоремы 4 данная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Неизвестные коэффициенты A, B и C находятся следующим образом:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x^2-4)+B(x^2+2x)+C(x^2-2x)}{x(x-2)(x-2)}=$$

$$=\frac{x^2(A+B+C)+x(2B-2C)+(-4A)}{x(x-2)(x-2)}.$$

Сравнивая числители исходной дроби и дроби с неизвестными коэффициентами $4x^2+16x-8=(A+B+C)x^2+$ $+(2B-2C)x+(-4A)$, получаем систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными A, B, C:

$$\begin{cases}A+B+C=4,\\2B-2C=16,\\-4A=-8;\end{cases}\quad\begin{cases}B+C=2,\\B-C=8,\\A=2;\end{cases}\quad\begin{cases}B=5,\\C=-3,\\A=2.\end{cases}$$

Итак,

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

б) Разложим дробь $\dfrac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}$ на сумму простейших:

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}=$$

$$=\frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}.$$

Неизвестные коэффициенты A, B, C находим из системы:

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ 2A + B + C = -3, \\ A = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 2, \\ B = -1, \\ C = -6. \end{cases}$$

Итак, $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2} \right) dx =$

$= 2\ln|x| - \ln|x + 1| + \frac{6}{x+1} + C.$

в) Дробь $\frac{1}{x^3 + x}$ имеет следующее разложение на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{A(x^2+1) + (Bx + C)x}{x(x^2+1)} = \frac{x^2(A + B) + x \cdot C + A}{x(x^2+1)}.$$

Коэффициенты A, B, C находятся из следующей системы:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ C = 0, \\ A = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1, \\ B = -1, \\ C = 0. \end{cases}$$

Итак, $\int \frac{dx}{x^3 + x} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \ln|x| - \int \frac{xdx}{x^2+1} =$

$= \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$

г) Разложим дробь $\frac{x^3 + x - 1}{(x^2+2)^2}$ на сумму простейших:

$$\frac{x^3 + x - 1}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{(Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D}{(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{Ax^3 + x^2 B + x(2A + C) + 2B + D}{(x^2+2)^2};$$

$$\begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ 2A + C = 1, \\ 2B + D = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ C = -1, \\ D = -1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2+2)^2} dx = \int \left(\frac{x}{x^2+2} - \frac{x+1}{(x^2+2)^2} \right) dx =$$

$$= \int \frac{xdx}{x^2+2} - \int \frac{xdx}{(x^2+2)^2} - \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = L_1 - L_2 - L_3;$$

$$L_1 = \int \frac{xdx}{x^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+2) + C_1;$$

$$L_2 = \int \frac{xdx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2)}{(x^2+2)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+2} + C_2.$$

Для расчета L_3 рассмотрим табличный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C_3,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} = \int \frac{dx}{x^2+2} = \left| \begin{matrix} u = \dfrac{1}{x^2+2} & du = \dfrac{-2xdx}{(x^2+2)^2} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x}{x^2+2} + \int \frac{2x^2dx}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{x^2+2} + 2\int \frac{(x^2+2)-2}{(x^2+2)^2} dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+2} + 2\int \frac{dx}{(x^2+2)} - 4\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{x^2+2} +$$

$+ \sqrt{2} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{2}} - 4 \cdot L_3$; следовательно,

$$L_3 = \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C_3.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2+2)^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2) + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+2} -$$

$$-\frac{x}{4(x^2+2)}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Ответ: а) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-$

$-3\ln|x+2|+C$; б) $2\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{6}{x+1}+C$;

в) $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$;

г) $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

Интегрирование иррациональных выражений

Интегралы вида $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{s_1};\ldots;\left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{s_n}\right)dx,$ *где R – рациональная функция всех своих аргументов;* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & g \end{vmatrix} \neq 0.$

Обозначим m – общий знаменатель чисел s_1; s_2; ...; s_n, тогда $s_i=\frac{p_i}{m}$; $p_i\in Z$; $i=1, 2, \ldots, n$.

В результате замены $t^m=\frac{ax+b}{cx+g}$ получаем

$$t^m(cx+g)=ax+b;\ (a-c\cdot t^m)x=gt^m-b;\ x=\frac{gt^m-b}{a-ct^m};$$

$$dx=\frac{(ag-bc)mt^{m-1}}{(a-ct^m)^2}dt;\ \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{s_i}=t^{p_i}.$$

Исходный интеграл принимает вид

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{s_1};\ldots;\left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{s_n}\right)dx=$$

$$=\int R\left(\frac{g\cdot t^m-b}{a-ct^m};t^{p_1};\ldots;t^{p_n}\right)\cdot\frac{(ag-bc)mt^{m-1}}{(a-ct^m)^2}dt,$$

т. е. становится интегралом от рациональной дроби.

Интегралы вида $\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. *Подстановки Эйлера.*

При вычислении интегралов данного типа подынтегральная функция может быть приведена к рациональной дроби в результате одной из следующих замен :

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}\pm t$, где $a>0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm(x-x_1)t$, где $b^2-4ac\geq 0$, x_1 – корень уравнения $ax^2+bx+c=0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt$, $c>0$.

Часто при вычислении интегралов данного типа удается свести их к виду $\int R\left(t;\sqrt{\pm t^2\pm 1}\right)dt$, после чего эффективными оказываются тригонометрические $t=\sin u$; $t=\cos u$; $t=\operatorname{tg} u$ и гиперболические замены $t=\operatorname{sh} u$; $t=\operatorname{ch} u$; $t=\operatorname{th} u$.

Интегралы вида $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ *(дифференциальные биномы)*

1) Если p – целое число и s – знаменатель дроби $\frac{m+1}{n}$, то подстановка $z=x^{\frac{n}{s}}$ сводит интеграл к рациональной дроби.

2) Если $\frac{m+1}{n}$ – целое число; $p=\frac{r}{s}$, где r и s – целые числа, тогда применяется подстановка $z=\left(a+bx^n\right)^{\frac{1}{s}}$.

3) Если $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число; $p=\frac{r}{s}$, где r и s – целые числа, применима подстановка $z=\left(ax^{-n}+b\right)^{\frac{1}{s}}$.

Пример 6. Найти интеграл: $\int\frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

Решение.

В соответствии с теорией проведем замену $\sqrt[6]{x+1}=t$:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = \left| \begin{array}{l} (x+1)^{\frac{1}{6}} = t \\ (x+1)^{\frac{1}{2}} = t^3 \\ (x+1)^{\frac{1}{3}} = t^2 \\ x = t^6 - 1 \\ dx = 6t^5dt \end{array} \right| = \int \frac{(t^6-1)\cdot 6t^5dt}{t^3+t^2} =$$

$$= 6\int \frac{(t^6-1)t^3dt}{t+1} = 6\int \frac{(t^3-1)(t^3+1)t^3dt}{t+1} =$$

$$=6\int t^3(t^3-1)(t^2-t+1)\,dt =$$

$$=6\int (t^8-t^7+t^6-t^5+t^4-t^3)\,dt =$$

$$=\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}\right)+C =$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} - x - 1 +$$

$$+\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + C.$$

Ответ: $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} - x - 1 +$
$+ \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + C.$

Пример 7. Найти интегралы: а) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$;

б) $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

Решение.

а) Применим первую подстановку Эйлера:

$\sqrt{x^2+x+1} = x+t$, тогда $x^2+x+1 = x^2+2xt+t^2$,

$$x = -\frac{t^2-1}{2t-1};\ dx = -\frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}dt.$$

Получаем

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = -\int\frac{(2t^2-2t+2)dt}{(2t-1)^2\left(-\frac{2t^2-2}{2t-1}+t\right)} =$$

$$= -\int\frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)(2-t)}dt = \int\frac{2t^2-2t+2}{2t^2-5t+2}dt =$$

$$= \int\left(1+\frac{3t}{2t^2-5t+2}\right)dt.$$

Разложим дробь $\frac{3t}{(2t-1)(t-2)}$ на сумму простейших:

$$\frac{3t}{(2t-1)(t-2)} = \frac{A}{2t-1}+\frac{B}{t-2} =$$

$$= \frac{At-2A+2Bt-B}{(2t-1)(t-2)} = \frac{t(A+2B)+(-2A-B)}{(2t-1)(t-2)};$$

$$\begin{cases} A+2B=3, \\ -2A-B=0; \end{cases} \to \begin{cases} A=-1, \\ B=2; \end{cases}$$

$$\frac{3t}{(2t-1)(t-2)} = -\frac{1}{2t-1}+\frac{2}{t-2}.$$

Вернемся к интегрированию:

$$\int\left(1-\frac{1}{2t-1}+\frac{2}{t-2}\right)dt = t-\frac{1}{2}\ln|2t-1|+2\ln|t-2|+C,$$

где $t=\sqrt{x^2+x+1}-x$.

б) Применим первую подстановку Эйлера:

$\sqrt{x^2-2x+2} = x+t$, тогда $x^2-2x+2 = x^2+2xt+t^2$,

$$x = \frac{2-t^2}{2t+2};\ dx = \frac{-t^2-2t-2}{2(t+1)^2}dt.$$

Итак,

$$\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx = -\int\frac{2-t^2}{2t+2}\cdot\left(\frac{2-t^2}{2(t+1)}+t\right)\cdot\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}dt =$$

$$= \int \frac{t^2-2}{2(t+1)} \cdot \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)} \cdot \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{t^6+4t^5+6t^4-12t^2-16t-8}{(t+1)^4}\, dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{t^6+4t^5+6t^4-12t^2-16t-8}{t^4+4t^3+6t^2+4t+1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{t^6+4t^5+6t^4+4t^3+t^2-4t^3-13t^2-16t-8}{t^4+4t^3+6t^2+4t+1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(t^2 + \frac{-4t^3-13t^2-16t-8}{(t+1)^4} \right) dt.$$

Разложим дробь $\dfrac{-4t^3-13t^2-16t-8}{(t+1)^4}$ на сумму простейших:

$$\frac{-4t^3-13t^2-16t-8}{(t+1)^4} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{(t+1)^3} + \frac{D}{(t+1)^4} =$$

$$= \frac{A(t^3+3t^2+3t+1)+B(t^2+2t+1)+C(t+1)+D}{(t+1)^4} =$$

$$= \frac{t^3 A + t^2(3A+B) + t(3A+2B+C) + (A+B+C+D)}{(t+1)^4}$$

$$\begin{cases} A=-4, \\ 3A+B=-13, \\ 3A+2B+C=-16, \\ A+B+C+D=-8; \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-4, \\ B=-1, \\ C=-2, \\ D=-1. \end{cases}$$

Интеграл приобретает вид:

$$\frac{1}{8}\int \left(t^2 - \frac{4}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{2}{(t+1)^3} - \frac{1}{(t+1)^4} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3} - 4\ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(t+1)^3} \right) + C,$$

где $t = \sqrt{x^2-2x+2} - x$.

Отметим, что при вычислении данного интеграла можно было воспользоваться тригонометрической заменой

$$x - 1 = \operatorname{tg} t;\ x = 1 + \operatorname{tg} t;\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t},$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{(x-1)^2 + 1} = \frac{1}{\cos t},$$

получаем $\int x \cdot \sqrt{(x-1)^2 + 1}\,dx = \int (1 + \operatorname{tg} t) \cdot \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} =$

$$= \int \frac{dt}{\cos^3 t} + \int \frac{\sin t \cdot dt}{\cos^4 t} = I_1 + I_2;$$

$$I_2 = \int \frac{\sin t \cdot dt}{\cos^4 t} = -\int \cos^{-4} t \cdot d(\cos t) = \left|\cos t = z\right| =$$

$$= -\int z^{-4} dz = \frac{z^{-3}}{3} + C_1 = \frac{1}{3\cos^3 t} + C_1;$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \int \frac{\cos t \cdot dt}{\cos^4 t} = \int \frac{d(\sin t)}{(1 - \sin^2 t)^2} = \left|\sin t = z\right| =$$

$$= \int \frac{dz}{(1-z)^2 (1+z)^2}.$$

Ограничимся приведенными выкладками, поскольку дальнейшее вычисление интеграла I_1 не представляет никаких трудностей.

Ответ: а) $t - \frac{1}{2} \ln|2t - 1| + 2\ln|t - 2| + C$,

$t = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$;

б) $\frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3} - 4\ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(t+1)^3}\right) + C$,

$t = \sqrt{x^2 - 2x + 2} - x$.

Пример 8. Найти интегралы: а) $\int \sqrt{x} \cdot \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^4 dx$;

б) $\int \frac{\sqrt{1 - x^4}}{x^5} dx$; в) $\int x^2 \cdot (1 + x^4)^{\frac{1}{4}} \cdot dx$.

Решение.

Интегралы а) – в) представляют собой так называемые дифференциальные биномы: $\int x^m(a+bx^n)^p \cdot dx$.

Существуют три типа соотношений между параметрами m, n и p, при которых данные интегралы сводятся к интегрированию дробно-рациональных функций.

а) $\int \sqrt{x}\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4 dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^4 dx$; $m=\frac{1}{2}$; $n=\frac{1}{3}$; $p=4$.

В данном случае $p=4$ – целое, поэтому воспользуемся подстановкой $t=x^{\frac{n}{s}}$, где s – знаменатель дроби $\frac{m+1}{n}$.

Так как $n=\frac{1}{3}$ и $\frac{m+1}{n}=\frac{9}{2}$, то $s=2$ и, следовательно, $t=x^{\frac{1}{6}}$.

Интеграл принимает вид:

$$\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^4 dx = \left|\begin{matrix} t=x^{\frac{1}{6}} \\ x=t^6 \\ dx=6t^5dt\end{matrix}\right| = \int t^3\cdot(1+t^2)^4\cdot 6t^5\,dt =$$

$$=6\int t^8(1+t^2)^4\,dt = 6\int t^8(t^8+4t^6+6t^4+4t^2+1)\,dt =$$

$$=6\left(\frac{t^{17}}{17}+4\frac{t^{15}}{15}+6\frac{t^{13}}{13}+4\frac{t^{11}}{11}+\frac{t^9}{9}\right)+C=$$

$$=6\left(\frac{x^{\frac{17}{6}}}{17}+4\frac{x^{\frac{5}{2}}}{15}+6\frac{x^{\frac{13}{6}}}{13}+4\frac{x^{\frac{11}{6}}}{11}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{9}\right)+C.$$

б) $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx = \int x^{-5}\cdot\left(1-x^4\right)^{\frac{1}{2}} dx$; $m=-5$; $n=4$; $p=\frac{1}{2}$.

Поскольку $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-5+1}{4}=-1$ – целое, воспользуемся подстановкой

$t=\left(1-x^4\right)^{\frac{1}{2}}$:

$$\int x^{-5}\cdot\left(1-x^4\right)^{\frac{1}{2}}dx=\left|\begin{array}{l} t=\left(1-x^4\right)^{\frac{1}{2}} \\ x=\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{4}} \\ dx=-\dfrac{t}{2}\cdot\left(1-t^2\right)^{-\frac{3}{4}}dt \end{array}\right|=$$

$$=\int\left(1-t^2\right)^{-\frac{5}{4}}\cdot t\cdot\left(-\frac{t}{2}\right)\cdot\left(1-t^2\right)^{-\frac{3}{4}}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2dt}{(1-t^2)^2}=-\frac{1}{4}\int t\cdot d\left(\frac{1}{1-t^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{t}{1-t^2}-\int\frac{dt}{1-t^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{t}{1-t^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C,\ t=\sqrt{1-x^4}.$$

в) $\int x^2\cdot(1+x^4)^{\frac{1}{4}}\cdot dx;\ m=2;\ n=4;\ p=\dfrac{1}{4}$.

При данном соотношении параметров $\dfrac{m+1}{n}+p=$ $=\dfrac{2+1}{4}+\dfrac{1}{4}=1$ – целое, следовательно, необходима замена

$t=\left(x^{-4}+1\right)^{\frac{1}{4}}$:

$$\int x^2\cdot(1+x^4)^{\frac{1}{4}}\cdot dx=\left|\begin{array}{l} t=\left(x^{-4}+1\right)^{\frac{1}{4}} \\ x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}} \\ dx=-t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt \end{array}\right|=$$

$$= \int (t^4-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{t^4-1}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot (-t^3)(t^4-1)^{-\frac{5}{4}} dt =$$

$$= -\int \frac{t^4 dt}{(t^4-1)^2} = \frac{1}{4}\int t \cdot d\left(\frac{1}{t^4-1}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{t}{t^4-1} - \int \frac{dt}{t^4-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t}{t^4-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{t}{t^4-1} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{arctg} t + C, \text{ где } t = \sqrt[4]{1+x^{-4}}\ .$$

Ответ: а) $\frac{6}{17}x^{\frac{17}{6}} + \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{36}{13}x^{\frac{13}{6}} + \frac{24}{11}x^{\frac{11}{6}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$;

б) $\frac{1}{4}\frac{t}{t^2-1} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C,\ t = \sqrt{1-x^4}$;

в) $\frac{1}{4}\frac{t}{t^4-1} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{arctg} t + C,\ t = \sqrt[4]{1+x^{-4}}$.

Интегралы от тригонометрических функций

Интегралы вида $\int R(\sin x;\ \cos x)dx$.

При нахождении интегралов от тригонометрических функций применяются следующие подстановки:

$$t = \sin x;\ t = \cos x;\ t = \operatorname{tg} x.$$

Кроме того, существует так называемая *универсальная тригонометрическая замена* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, которая приводит к рациональной функции от t всегда, поскольку $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $x = 2\operatorname{arctg} t$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, и тогда

$$\int R(\sin x;\ \cos x)dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}\ .$$

Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \cdot dx$, *$m$, n – рациональные числа.*

Замены вида $t = \sin x$ или $t = \cos x$ сводят данный интеграл к ранее рассмотренному интегралу

$$\int t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dx.$$

В частности, если m или n нечетное целое число, то эффективны подстановки

$$t = \cos x;\ t = \sin x.$$

Если m и n – положительны и четны, то можно использовать формулы понижения степени: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Интегралы вида $\int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x\, dx$.

Эти интегралы легко приводятся к табличным после следующих преобразований:

$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x);$$

$$\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x);$$

$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x).$$

Интегралы вида $\int e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x \cdot dx$; $\int x^n e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x \cdot dx$, $n \in N$.

В результате повторного интегрирования по частям, получаем

$$I = \int e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x \cdot dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\beta\cdot\sin\beta x + \alpha\cdot\cos\beta x)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I, \text{ откуда}$$

$$I = \frac{e^{\alpha x}(\beta\cdot\sin\beta x + \alpha\cdot\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} + C.$$

Интеграл $\int x^n e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x \cdot dx$ в результате n-кратного интегрирования по частям сводится к интегралу $\int e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x \cdot dx$, рассмотренному ранее.

Замечание. При интегрировании тригонометрических выражений помимо стандартных подстановок существенную роль играют формулы, связывающие различные тригонометрические функции. К числу таких важнейших формул относятся следующие:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;\ 1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};\ 1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2};\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2};$$

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x};$$

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}};\ \cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}};\ \mathrm{tg}\,x = \frac{2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}};$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y));$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y));$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y));$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1.$$

Пример 9. Найти интегралы: а) $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x\, dx$;

б) $\int \frac{dx}{\cos x}$; в) $\int \frac{\cos x \cdot dx}{(1 - \cos x)^2}$; г) $\int \cos^6 x \cdot dx$; д) $\int \frac{dx}{4 - \sin x}$;

е) $\int \sqrt{1 + \sin x}\, dx$; ж) $\int e^x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x \cdot dx$.

Решение.

а) $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x\, dx = -\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\, d(\cos x) =$

$= -\int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x\, d(\cos x) = \left|\cos x = t\right| =$

$$=-\int(1-t^2)\cdot t^2\cdot dt=\int(t^4-t^2)\,dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+C=$$

$$=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

б) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x\cdot dx}{\cos^2 x}=\int\frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x}=\left|\sin x=t\right|=$

$$=\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$$

в) Воспользуемся универсальной тригонометрической заменой

$$\int\frac{\cos x\cdot dx}{(1-\cos x)^2}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t\\ x=2\operatorname{arctg}t\\ dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt\\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ (1-\cos x)^2=\dfrac{4t^4}{\left(1+t^2\right)^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{(1-t^2)\cdot(1+t^2)^2\cdot 2}{(1+t^2)\cdot 4t^4\cdot(1+t^2)}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(t^{-4}-t^{-2}\right)dt=-\frac{1}{6}t^{-3}+\frac{1}{2}t^{-1}+C=$$

$$=-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C;$$

г) $\displaystyle\int\cos^6 x\cdot dx.$

Преобразуем выражение $\cos^6 x$, используя формулы понижения степени:

$$\cos^6 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3=$$

$$=\frac{1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x}{8}=$$

$$= \frac{1+3\cos 2x+\frac{3}{2}(1+\cos 4x)}{8}+\frac{\cos 2x\cdot(1+\cos 4x)}{16}=$$

$$= \frac{5}{16}+\frac{7}{16}\cos 2x+\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{32}\cos 2x+\frac{1}{32}\cos 6x=$$

$$= \frac{5}{16}+\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{32}\cos 6x.$$

Следовательно,

$$\int \cos^6 x\cdot dx=\int\frac{5}{16}dx+\int\frac{15}{32}\cos 2x\cdot dx+$$

$$+\int\frac{3}{16}\cos 4x\cdot dx+\int\frac{1}{32}\cos 6x\cdot dx=\frac{5}{16}x+\frac{15}{32}\cdot\frac{\sin 2x}{2}+$$

$$+\frac{3}{16}\cdot\frac{\sin 4x}{4}+\frac{1}{32}\cdot\frac{\sin 6x}{6}+C=\frac{5}{16}x+\frac{15}{64}\sin 2x+$$

$$+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{192}\sin 6x+C.$$

д) Применим универсальную замену:

$$\int\frac{dx}{4-\sin x}=\left|\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \\ x=2\operatorname{arctg} t \\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(4-\frac{2t}{1+t^2}\right)}=$$

$$=\int\frac{2dt}{2(2t^2-t+2)}=\int\frac{dt}{2t^2-t+2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{2}t+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t-\frac{1}{4}\right)}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{t-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-1}{\sqrt{15}}\right)+C.$$

е) $\int\sqrt{1+\sin x}\,dx=\int\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}\,dx=$

$$=\int\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|dx=I.$$

Если $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\geq 0$, то $I=\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx=$

$$=-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}+C.$$

Если $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\leq 0$, то $I=-\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx=$

$$=2\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}+C.$$

ж) $\int e^x\cdot\sin 2x\cdot\cos 3x\cdot dx=\frac{1}{2}\int e^x(\sin 5x-\sin x)\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\int e^x\cdot\sin 5x\cdot dx-\frac{1}{2}\int e^x\cdot\sin x\cdot dx=\frac{1}{2}I_1-\frac{1}{2}I_2.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$I_1=\int e^x\cdot\sin 5x\cdot dx=\begin{vmatrix}u=e^x & du=e^x dx\\ dv=\sin 5x dx & v=-\dfrac{1}{5}\cos 5x\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{5}e^x\cdot\cos 5x+\frac{1}{5}\int e^x\cdot\cos 5x\,dx=$$

$$=\begin{vmatrix}u=e^x & du=e^x dx\\ dv=\cos 5x dx & v=\dfrac{1}{5}\sin 5x\end{vmatrix}=-\frac{1}{5}e^x\cdot\cos 5x+$$

$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^x\cdot\sin 5x-\frac{1}{5}\int e^x\cdot\sin 5x\cdot dx\right);$$

$$I_1 = -\frac{1}{5}e^x \cdot \cos 5x + \frac{1}{25}e^x \cdot \cos 5x - \frac{1}{25}I_1.$$

Следовательно, $I_1 = \frac{25}{26}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x\right)e^x + C_1 =$

$= \left(-\frac{5}{26}\cos 5x + \frac{1}{26}\sin 5x\right)e^x + C_1.$

Аналогично,

$$I_2 = \int e^x \cdot \sin x \cdot dx = \begin{vmatrix} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$= -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x \cdot dx =$

$= \begin{vmatrix} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{vmatrix} = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x -$

$- \int e^x \cdot \sin x \cdot dx;$

$I_2 = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - I_2.$

Следовательно, $I_2 = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C_2.$

Окончательно получаем

$$\int e^x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x \cdot dx = \left(-\frac{5}{52}\cos 5x + \frac{1}{52}\sin 5x\right)e^x -$$

$- \frac{1}{4}(\sin x - \cos x)e^x + C.$

Ответ: а) $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$; б) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$;

в) $-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C$;

г) $\frac{5}{16}x + \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{192}\sin 6x + C$;

д) $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{\sqrt{15}}\right) + C$;

е) $-2\cos\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{2}+C$, если $\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\ge 0$;

$2\cos\dfrac{x}{2}-2\sin\dfrac{x}{2}+C$, если $\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\le 0$;

ж) $\left(-\dfrac{5}{52}\cos 5x+\dfrac{1}{52}\sin 5x-\dfrac{1}{4}\sin x+\dfrac{1}{4}\cos x\right)e^x+C$.

Задания для самостоятельного решения

1. $\displaystyle\int\frac{(x-1)^3}{x^4}dx$

2. $\displaystyle\int\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^2}{x}dx$

3. $\displaystyle\int\frac{9+2x^2}{x^2(9+x^2)}dx$

4. $\displaystyle\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx$

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$

6. $\displaystyle\int\frac{dx}{4-5x}$

7. $\displaystyle\int\sqrt[3]{(1+3x)^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\cdot\ln x}$

9. $\displaystyle\int\frac{e^{\operatorname{tg}x}dx}{\cos^2 x}$

10. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}$

11. $\displaystyle\int\frac{dx}{5+2x^2}$

12. $\displaystyle\int\frac{dx}{3x^2-4}$

13. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+1}}$

14. $\displaystyle\int\frac{\cos x\cdot\sin x\cdot dx}{1+\sin^4 x}$

15. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+3}$

16. $\displaystyle\int\frac{2x-3}{x^2+4x+1}dx$

17. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$

18. $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x(1+e^{-x})}$

19. $\displaystyle\int e^{2x}\cdot\cos x\,dx$

20. $\displaystyle\int\ln x\,dx$

21. $\displaystyle\int\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$

22. $\displaystyle\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$

23. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 8x + 1}{x^2 - 6x + 8} dx$ 24. $\int \frac{2x^2 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2} dx$

25. $\int \frac{x^2 + 2}{(x-1)^3} dx$ 26. $\int \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^4 - 1} dx$

27. $\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx$ 28. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}}$ 30. $\int x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 3x + 1}\, dx$

31. $\int \sqrt{x^3 + x^4}\, dx$ 32. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[6]{1 + x^6}}$

33. $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot dx$

34. $\int \frac{dx}{\sin x}$ 35. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$

36. $\int e^x \cdot \sin^2 x\, dx$

Ответы:

1. $\ln|x| + \frac{3}{x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + C$; 2. $x + \frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$;

3. $-\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$; 4. $-x - \operatorname{ctg} x + C$;

5. $-2\operatorname{ctg} 2x + C$; 6. $-\frac{\ln|4-5x|}{5} + C$;

7. $\frac{1}{5}(1 + 3x)\sqrt[3]{(1+3x)^2} + C$; 8. $\ln|\ln x| + C$;

9. $e^{\operatorname{tg} x} + C$; 10. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{7}} + C$;

11. $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}} + C$; 12. $\frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \ln\left|\frac{\sqrt{3}x - 2}{\sqrt{3}x + 2}\right| + C$;

13. $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \ln\left(x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{5}}\right) + C$; 14. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin^2 x) + C$;

15. $2\sqrt{x}-6\ln(\sqrt{x}+3)+C$;

16. $\ln|x^2+4x+1|-\dfrac{7}{2\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|+C$;

17. $\arcsin\dfrac{2x+3}{5}+C$; 18. $-\ln(1+e^{-x})+C$;

19. $\dfrac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C$; 20. $x\cdot\ln x-x+C$;

21. $x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$;

22. $3\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot e^{\sqrt[3]{x}}+C$; 23. $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-4}{x-2}\right|+C$;

24. $\ln\left|\dfrac{x}{x+2}\right|-\dfrac{2}{x}+C$; 25. $\ln|x-1|-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{(x-1)^2}+C$;

26. $\dfrac{1}{2}\ln\left((x^2+1)\cdot\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right)+C$;

27. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2)-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{2-x}{4(x^2+2)}+C$;

28. $\ln\dfrac{|t^2-1|}{\sqrt{t^4+t^2+1}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2t^2+1}{\sqrt{3}}+C$, где $t=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

29. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+48\sqrt[12]{x}+3\ln(1+\sqrt[12]{x})+$

$+\dfrac{33}{2}\ln\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2\right)-\dfrac{171}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\cdot\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}}+C$;

30. $\dfrac{25}{512}\operatorname{sh}4z+\dfrac{5\sqrt{5}}{8}\operatorname{sh}^3 z+\dfrac{45}{64}\operatorname{sh}2z-\dfrac{205}{128}z+C$,

где $\operatorname{ch}z=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$.

31. $\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{\left(x+x^2\right)^3}-\dfrac{1+2x}{8}\cdot\sqrt{x+x^2}+\dfrac{1}{8}\ln\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|}\right)$;

32. $\dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)+\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{t^2+t+1}{t^2-t+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{t^2-1}{t\sqrt{3}}+C$,

где $t=\sqrt[6]{1+x^6}$;

33. $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}+C$;

34. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$; 35. $\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$;

36. $\frac{e^x}{10}(5-\cos 2x-2\sin 2x)+C$.

6.2. Определенный интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ определена во всех точках отрезка $[a; b]$. Произвольной конечной системой точек x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, таких что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

разбиваем отрезок $[a; b]$ на отрезки $[x_i, x_{i+1}]$; $i = 0, 1, \dots, n-1$.

На каждом из полученных отрезков произвольным образом выбираем точку c_{i+1}: $c_{i+1} \in [x_i; x_{i+1}]$, и рассчитываем значение функции $y = f(x)$ в этих точках.

Составляем так называемую *интегральную сумму*, соответствующую данной разбивке x_i и выбору точек c_{i+1}, $i = 0, 1, \dots, n-1$:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_{i+1})\cdot\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Обозначим через $\lambda = max\,|\Delta x_i|$, т. е. λ – длина наибольшего из отрезков $[x_i; x_{i+1}]$.

Определение 1. Если при $\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$ существует конечный предел интегральных сумм σ, то этот предел называется определенным интегралом функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sigma.$$

Определение 2. Если существует определенный интеграл функции $y = f(x)$ на некотором отрезке, то функция называется *интегрируемой* на этом отрезке.

К числу наиболее важных типов интегрируемых функций относятся непрерывные функции; ограниченные функции, имеющие конечное число точек разрыва; ограниченные монотонные функции.

Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b dx = b - a.$

2. Если функция интегрируема на отрезке, то она интегрируема и на любом отрезке, вложенном в него.

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на всем отрезке $[a, b]$, при этом

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то функции $f_1(x) \pm f_2(x)$ также интегрируемы на этом отрезке, при этом

$$\int\limits_a^b \big(f_1(x) \pm f_1(x)\big)dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $C \cdot f(x)$, где C – const, также интегрируема на этом отрезке, при этом

$$\int\limits_a^b C \cdot f(x)\,dx = C \cdot \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

6. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то функция $f_1(x) \cdot f_2(x)$ также интегрируема на этом отрезке.

7. Если функция $f(x)$ неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

Если при этом существует точка $x_0 \in [a, b]$, такая что $f(x_0) > 0$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0.$

8. $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$

9. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$, где $f(x)$ – интегрируема на отрезке $[a, b]$.

10. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке, при этом

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Теорема о среднем

Теорема 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и при этом

$$m \le f(x) \le M,\ x \in [a, b],$$

то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует точка $c \in [a, b]$, такая что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a).$$

Методы вычисления определенного интеграла

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $F(x)$ – ее произвольная первообразная на этом отрезке, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Эту формулу называют *формулой Ньютона–Лейбница.*

Теорема 3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, и при этом сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(x))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Эта формула называется *формулой замены переменной* или формулой *интегрирования подстановкой.* Очевидно, что ее можно использовать как слева направо, так и справа налево.

Теорема 4. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot du(x).$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям* для определенного интеграла.

Пример 1. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-(\ln x)^2}}$; б) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$;

в) $\displaystyle\int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$; г) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$.

Решение.

а) Так как $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$, то

$$\int_1^e \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int_1^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \arcsin(\ln x)\Big|_1^e =$$

$$= \arcsin(\ln e) - \arcsin(\ln 1) = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

б) Заметим, что $\dfrac{dx}{x^2} = -\,d\left(\dfrac{1}{x}\right)$, поэтому

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} = -\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2 = -\left(e^{\frac{1}{2}} - e^1\right) = e - \sqrt{e}.$$

в) Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене $8 + 2x - x^2 = 9 - (x-1)^2$, получаем

$$\int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \int_{-0,5}^1 \frac{d(x-1)}{\sqrt{9-(x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{3}\Big|_{-0,5}^1 =$$

$$= \arcsin 0 - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

г) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x \cos x \cdot dx}{\sqrt[3]{\sin x}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\sin^2 x)\cdot d\sin x}{(\sin x)^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \left((\sin x)^{-\frac{1}{3}} - (\sin x)^{\frac{5}{3}}\right) d(\sin x) =$$

$$= \left(\frac{3(\sin x)^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3(\sin x)^{\frac{8}{3}}}{8}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\sin^2 x} - \frac{3}{8}\sin^2 x\sqrt[3]{\sin^2 x}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{8}\right) = \frac{21}{16}\sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \frac{9}{8}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}$; б) $e - \sqrt{e}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{21}{16}\sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \frac{9}{8}$.

Пример 2. Вычислить интегралы:

а) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$; б) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3}$; г) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$.

Решение.

Воспользуемся формулой замены переменной (теорема 3)

$$\text{а)}\ \int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+x} = t \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \\ t(3) = \sqrt{1+3} = 2 \\ t(8) = \sqrt{1+8} = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 = 2(9-3) - 2\left(\frac{8}{3} - 2\right) = 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}.$$

б) Данный интеграл является интегралом от рациональной функции; однако применение тригонометрической подстановки намного эффективнее:

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{(1+x^2)^3} = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t \\ 1 + x^2 = \dfrac{1}{\cos^2 t} \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ t = \operatorname{arctg} x \\ t(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0 \\ t(1) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2 t \cdot dt}{\cos^2 t \cdot \dfrac{1}{\cos^6 t}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cdot \cos^2 t\, dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t \cdot dt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\pi\right) - \frac{1}{8}\left(0 - \frac{1}{4}\sin 0\right) = \frac{\pi}{32}.$$

в) Воспользуемся универсальной тригонометрической заменой:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ x = 2\operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ t(0) = \operatorname{tg} 0 = 0 \\ t\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)\cdot\left(2\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+3\right)} = \int_0^1 \frac{2dt}{2-2t^2+3+3t^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{5+t^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

г) $$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\cdot\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{e^x-1} = t \\ e^x = t^2+1 \\ x = \ln(t^2+1) \\ dx = \dfrac{2tdt}{t^2+1} \\ t(0) = \sqrt{e^0-1} = 0 \\ t(\ln 5) = \sqrt{e^{\ln 5}-1} = 2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^2 \frac{(t^2+1)\cdot t\cdot 2tdt}{(t^2+4)\cdot(t^2+1)} = \int_0^2 \frac{2t^2dt}{t^2+4} = 2\int_0^2 \frac{t^2+4-4}{t^2+4}\,dt =$$

$$= 2\int_0^2\left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right)dt = 2\left(t - \frac{4}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 2(2 - 2\operatorname{arctg} 1) =$$
$= 4 - \pi.$

Ответ: а) $\dfrac{32}{3}$; б) $\dfrac{\pi}{32}$; в) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; г) $4 - \pi$.

Пример 3. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\cdot dx$; б) $\displaystyle\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$; в) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$.

Решение.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.

а) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\cdot dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= x\sin x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1;$$

б) $$\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx = \begin{vmatrix} u = \ln(x+1) & du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} =$$

$$= x\ln(x+1)\Bigg|_0^{e-1} - \int_0^{e-1}\frac{x}{x+1}dx = e - 1 - \int_0^{e-1}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= e - 1 - (x - \ln(x+1))\Bigg|_0^{e-1} = e - 1 - (e - 1 - 1) = 1;$$

в) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx = \begin{vmatrix} u = e^{2x} & du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2x}\cdot \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot \sin x\cdot dx = e^{\pi} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot \sin x\cdot dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^{2x} & du = 2e^{2x}dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\pi} - 2\left(-\cos x e^{2x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{2x} dx\right) =$$

$$= e^{\pi} + 2\cos x e^{2x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx =$$

$$= e^{\pi} - 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx .$$

Следовательно,

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = e^{\pi} - 2; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{\pi}-2}{5}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} - 1$; б) 1; в) $\frac{e^{\pi}-2}{5}$.

Задания для самостоятельного решения

1. $\displaystyle\int_1^e \frac{2+\ln x}{x}\,dx$ 2. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cdot\cos 3x\,dx$ 4. $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{2x^2-1}\,dx$

5. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$ 6. $\int\limits_0^1 e^{2x}\sin 3x\,dx$

7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$ 8. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+6x+10}$

Ответы:

1. $2\frac{1}{2}$; 2. -1; 3. $-\frac{2}{9}$; 4. $\frac{1}{6}\cdot\left(7\sqrt{7}-1\right)$; 5. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$;

6. $\frac{2\cdot e}{13}\sin 3-\frac{3\cdot e}{13}\cos 3+\frac{3}{13}$; 7. 1; 8. $\operatorname{arctg} 4-\operatorname{arctg} 3$.

6.3. Несобственные интегралы

Интегралы от неограниченных функций

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена и неограничена на полуинтервале $[a, b)$, при этом она ограничена и интегрируема на любом отрезке $[a, c]$, где $a \le c < b$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)\,dx$, то он называется *несобственным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Аналогичным образом вводится понятие несобственного интеграла для функции, неограниченной на полуинтервале $(a, b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{c\to a+0}\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Если функция неограниченна на интервале (a, b), и при этом существуют несобственные интегралы $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^b f(x)\,dx$, где $c \in (a, b)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Определение 2. Если несобственный интеграл существует, то говорят, что интеграл *сходится.* В противном случае говорят, что интеграл *расходится.*

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a, b)$ и $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ на $[a, b)$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a), \text{ где } F(b-0) = \lim_{x\to b-0} F(x).$$

Аналогичным образом находится интеграл от функции, непрерывной на полуинтервале $(a, b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a+0), \text{ где } F(a+0) = \lim_{x\to a+0} F(x).$$

Пример 1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$; б) $\int\limits_1^2 \dfrac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; в) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)\sqrt{x}}$.

Решение.

а) Функция $y = \ln x$ определена при $x > 0$, поэтому несобственный интеграл на отрезке $[0; 1]$ понимается как следующий предел:

$$\int\limits_0^1 \ln x\,dx = \lim_{c\to 0+0}\int\limits_c^1 \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{c\to 0+0}\left(x\cdot\ln x\Big|_c^1 - x\Big|_c^1\right) = \lim_{c\to 0+0}(-c\cdot\ln c - 1 + c).$$

Поскольку $\lim\limits_{c\to 0+0} c\cdot\ln c = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{c\to 0+0}\ln c^c = \ln 1 = 0$ (см. Замечательный предел 6, стр. 276)

то $\int\limits_0^1 \ln x\,dx = -1.$

б) Функция $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ определена при $x > 1$; следовательно, несобственный интеграл на отрезке [1; 2] имеет вид:

$$\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{c\to 1+0}\int\limits_c^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}} = \left|\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=t\\ x=t^2+1\\ dx=2tdt\\ t(c)=\sqrt{c-1}\\ t(2)=1\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{c\to 1+0}\int\limits_{\sqrt{c-1}}^1 \frac{(t^2+1)\cdot 2t\cdot dt}{t} = \lim_{c\to 1+0} 2\int\limits_{\sqrt{c-1}}^1 (t^2+1)dt =$$

$$= \lim_{c\to 1+0}\left(2\cdot\frac{t^3}{3} + 2t\right)\Bigg|_{\sqrt{c-1}}^1 =$$

$$= \lim_{c\to 1+0}\left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}(c-1)\sqrt{c-1} - 2\sqrt{c-1}\right) = \frac{8}{3}.$$

в) Функция $\dfrac{1}{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)\sqrt{x}}$ определена при $x > 0$, поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0+0}\int\limits_c^1 \frac{dx}{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)\sqrt{x}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} e^{\sqrt{x}} - 1 = t \\ \sqrt{x} = \ln(t+1) \\ x = \ln^2(t+1) \\ dx = \dfrac{2\ln(t+1)dt}{t+1} \\ t(c) = e^{\sqrt{c}} - 1 \\ t(1) = e - 1 \end{array} \right| = \lim_{c \to 0+0} \int\limits_{e^{\sqrt{c}}-1}^{e-1} \frac{2\ln(t+1)\cdot dt}{(t+1)\cdot t \cdot \ln(t+1)} =$$

$$= 2\lim_{c \to 0+0} \int\limits_{e^{\sqrt{c}}-1}^{e-1} \frac{dt}{t(t+1)} = 2\lim_{c \to 0+0} \int\limits_{e^{\sqrt{c}}-1}^{e-1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 2\lim_{c \to 0+0} \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\Bigg|_{e^{\sqrt{c}}-1}^{e-1} = 2\lim_{c \to 0+0} \left(\ln\frac{e-1}{e} - \ln\frac{e^{\sqrt{c}}-1}{e^{\sqrt{c}}}\right) = \infty.$$

Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)\sqrt{x}}$ расходится.

Ответ: а) -1; б) $\frac{8}{3}$ в) расходится.

Интегралы с бесконечными пределами

Определение 3. Пусть функция $f(x)$ определена при всех $x \geq a$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$, $b \geq a$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx$, то он называется *несобственным интегралом* функции $f(x)$ при $x \geq a$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Аналогично, если функция определена при $x \leq b$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если функция определена на всей числовой оси, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна при $x \geq a$ и $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ при $x \geq a$, тогда

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a), \text{ где } F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x).$$

Аналогично, если функция определена при $x \leq a$, то

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = F(a) - F(-\infty), \text{ где } F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

Пример 2. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; б) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x dx}{(1+x^2)^2}$; в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

Решение.

а) По определению несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования получаем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{c\to+\infty}\int_0^{c} \frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$= \lim_{c\to+\infty}\int_0^{c} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \lim_{c\to+\infty} \operatorname{arctg}(x+1)\Big|_0^c =$$

$$= \lim_{c\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}(c+1) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

б) $$\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{c\to+\infty}\int_1^{c} \frac{x\ln x dx}{(1+x^2)^2}.$$

Применим интегрирование по частям:

$$\int \frac{x\ln x dx}{(1+x^2)^2} = \left|\begin{matrix} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\dfrac{xdx}{(1+x^2)^2} & v=\dfrac{-1}{2(1+x^2)}\end{matrix}\right| =$$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(1+x^2)}=.$$

Дробь $\frac{1}{x(1+x^2)}$ легко приводится к виду

$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$, следовательно,

$$\int\frac{x\ln x dx}{(1+x^2)^2}=-\frac{\ln x}{(1+x^2)}+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln(1+x^2).$$

Таким образом,

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x dx}{(1+x^2)^2}=\lim_{c\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{\ln x}{2}-\frac{\ln(1+x^2)}{4}\right)\Bigg|_1^c=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty}\left(\frac{\ln c}{c^2+1}-\ln c+\frac{\ln(c^2+1)}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty}\left(\frac{\ln c}{c^2+1}-\ln\frac{\sqrt{c^2+1}}{c}-\ln\sqrt{2}\right).$$

Очевидно, что $\lim\limits_{c\to+\infty}\frac{\ln c}{c^2+1}=0;$

$\lim\limits_{c\to+\infty}\ln\frac{\sqrt{c^2+1}}{c}=\lim\limits_{c\to+\infty}\ln\sqrt{1+\frac{1}{c^2}}=\ln 1=0$, следовательно,

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\ln\sqrt{2}}{2}=\frac{\ln 2}{4}=\frac{\ln 2}{4}.$$

в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=$

$$=\lim_{c\to-\infty}\int_c^0\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{c\to+\infty}\int_0^c\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\lim_{c\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}x\Big|_c^0\right)+\lim_{c\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x\Big|_0^c\right)=$$

$$= -\lim_{c\to-\infty}\left(\operatorname{arctg} c\right) + \lim_{c\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} c\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\ln 2}{4}$; в) π.

Задания для самостоятельного решения

1. $\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+x-2}.$

3. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

4. $\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx.$

5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2+5}{(x^2+2)(x^2+3)}\,dx.$

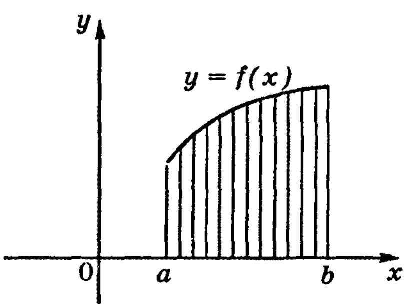
6. $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{x}\cdot e^{-x}\,dx.$

Ответы:
1. расходится; 2. расходится; 3. 2; 4. расходится;
5. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\pi$; 6. 1.

6.4. Приложения определенного интеграла

Вычисление площадей

Площадь криволинейной трапеции



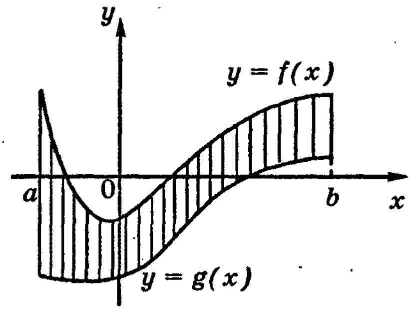
Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, тогда плоская фигура, ограниченная дугой графика функции на этом отрезке и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, называется *криволинейной трапецией*.

Площадь криволинейной трапеции определяется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Площадь «сложной» фигуры

Под «сложной» фигурой будем понимать часть плоскости, ограниченную непрерывными на отрезке $[a, b]$ кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$, $x \in [a, b]$) и прямыми $x = a$, $x = b$.

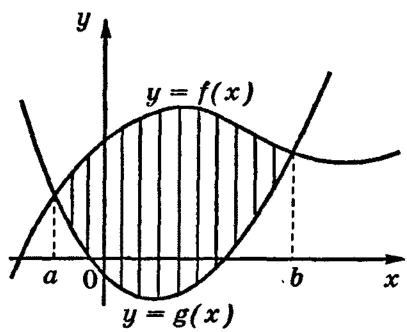


Площадь «сложной» фигуры находится по формуле:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Распространенной является постановка задачи о площади плоской фигуры, ограниченной двумя кривыми. Предполагается, что эти кривые, пересекаясь, образуют некоторую ограниченную фигуру. В этом случае пределы интегрирования ($x = a$, $x = b$) заранее не известны и должны быть определены из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x). \end{cases}$$



Если задача поставлена корректно, то эта система имеет два решения, которые определяют координаты точек пересечения кривых.

Площадь фигуры, ограниченной параметрически заданной кривой

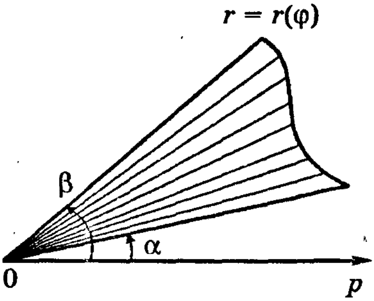
Пусть $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t \in [0, T] \end{cases}$ – параметрическое уравнение кусочно-гладкой простой замкнутой кривой, проходимой против часовой стрелки. Тогда формула площади ограниченной данной кривой фигуры имеет вид:

$$S = -\int_0^T y(t)\cdot x'(t)\,dt = \int_0^T x(t)\cdot y'(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T (x(t)\,y'(t) - x'(t)y(t))dt\,.$$

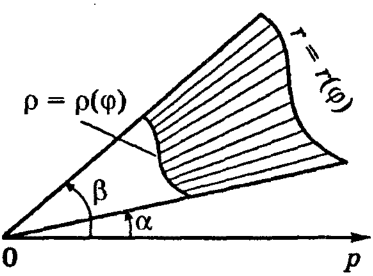
Если при изменении параметра t от 0 до T кривая проходится по часовой стрелке, то в этих формулах необходимо сменить знак на противоположный.

Площадь криволинейного сектора и сегмента



Площадь сектора, ограниченного непрерывной кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$; $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, равна

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,(\varphi)d\varphi.$$



Площадь сегмента, ограниченного непрерывными кривыми $r = r(\varphi)$ и $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$; $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, равна

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r^2\,(\varphi) - \rho^2(\varphi))d\varphi.$$

Пример 1. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

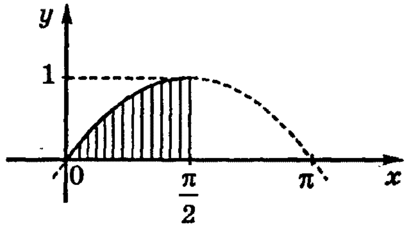
а) $y = \sin x$; $x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2}$; $y = 0$;

б) $y = e^x$; $x = 0$; $y = 0$, $x < 0$.

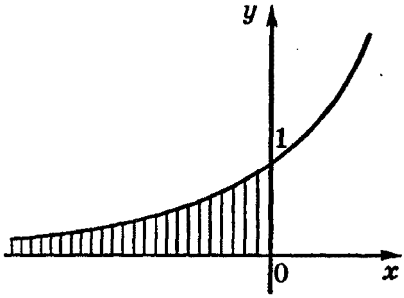
Решение.

а) Совокупность линий $y = \sin x$; $x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2}$; $y = 0$ определяет криволинейную трапецию, площадь которой равна

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = -\cos x \Big|_a^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$



б) Совокупность линий $y = e^x$; $x = 0$; $y = 0$ с дополнительным условием $x < 0$ задает неограниченную плоскую область, площадь которой (если существует!) вычисляется как несобственный интеграл



$$S = \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 e^x dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (1 - e^a) = 1.$$

Ответ: а) 1; б) 1.

Пример 2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x^2 = 2y$; $(1 + x^2)y = 1$; б) $y^2 + 8x = 16$; $y^2 - 24x = 48$;
в) $y^2 = x(x - 1)^2$.

Решение.

а) Плоская фигура ограничена параболой $y = \frac{1}{2}x^2$ и графиком функции $y = \frac{1}{1+x^2}$.

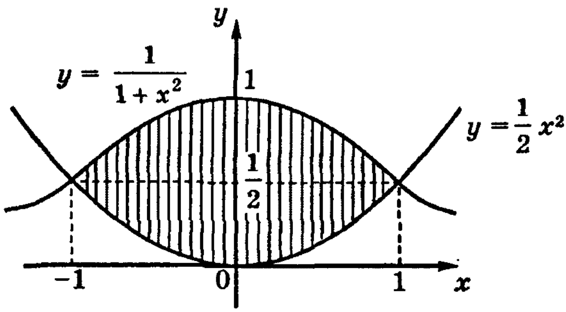
Находим точки пересечения графиков:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ y = \frac{1}{1+x^2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{1+x^2}, \\ y = \frac{1}{1+x^2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x^4 + x^2 - 2 = 0, \\ y = \frac{1}{1+x^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \pm 1, \\ y_{1,2} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, графики пересекаются в точках

$\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

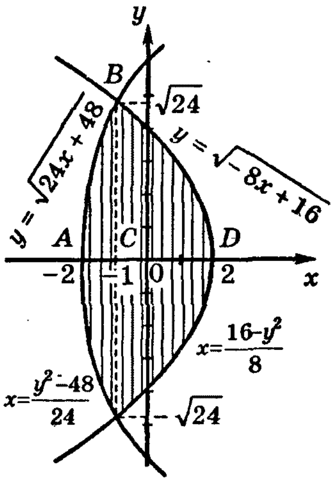


Так как исходные функции – четные, то ограничиваемая ими фигура симметрична относительно оси Oy. Воспользуемся этим обстоятельством:

$$S = 2\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx =$$

$$= 2\left(\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}.$$

б) Уравнения $y^2 + 8x = 16$ и $y^2 - 24x = 48$ задают графики парабол, осью симметрии которых является ось Ox.



Каноническое уравнение первой параболы: $y^2 = -8(x - 2)$, следовательно, ее вершина находится в точке (2; 0); ветви направлены в отрицательном направлении оси Ox.

Каноническое уравнение второй параболы: $y^2 = 24(x + 2)$; ее вершина расположена в точке (−2; 0); ветви направлены в положительном направлении оси Ox.

Находим точки пересечения парабол:

$$\begin{cases} y^2 = -8x+16, \\ y^2 = 24x+48; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x+16 = 24x+48, \\ y^2 = 24x+48; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y^2 = 24; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = -\sqrt{24}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = \sqrt{24}. \end{cases}$$

Параболы пересекаются в точках $(-1; -2\sqrt{6})$ и $(-1; 2\sqrt{6})$.

Очевидно, что искомая фигура симметрична относительно оси Ox, поэтому достаточно найти площадь верхней части фигуры: «криволинейного треугольника» ABD.

Возможны два варианта расчета площади S.

1) Если принять в качестве переменной интегрирования x, то

$S = 2 \cdot (S_{ABC} + S_{BCD})$, где

$$S_{ABC} = \int_{-2}^{-1} \sqrt{24x+48}dx = \frac{1}{36}(24x+48)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^{-1} = \frac{4\sqrt{6}}{3};$$

$$S_{BCD} = \int_{-1}^{2} \sqrt{-8x+16}dx = 4\sqrt{6}\text{, следовательно,}$$

$$S = 2\left(\frac{4\sqrt{6}}{3} + 4\sqrt{6}\right) = \frac{32\sqrt{6}}{3}.$$

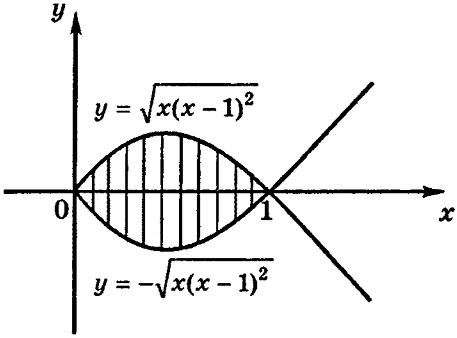
2) Если принять в качестве переменной интегрирования y, то $S = 2 \cdot S_{ABD}$,

$$\text{где } S_{ABD} = \int_{0}^{\sqrt{24}} \left(\frac{16-y^2}{8} - \frac{y^2-48}{24}\right)dy = \int_{0}^{\sqrt{24}} \left(4 - \frac{1}{6}y^2\right)dy =$$

$$= \left(4y - \frac{1}{18}y^3\right)\Big|_{0}^{\sqrt{24}} = \frac{16\sqrt{6}}{3}\text{, следовательно, } S = \frac{32\sqrt{6}}{3}.$$

Отметим, что в первом варианте расчета площади приходится разбивать фигуру ABD на две: ABC и BCD, поскольку верхняя граница области состоит из двух различных фрагментов. Во втором варианте такой необходимости нет, так как фигура ABD имеет единую левую и правую границы.

в) Целесообразно хотя бы эскизно воспроизвести график функции $y^2 = x(x-1)^2$. Данная линия образует петлю, которая симметрична относительно оси Ox, следовательно,



$$S = 2\int_0^1 \sqrt{x(x-1)^2}\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\sqrt{x}\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right)dx = 2\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{15}.$$

Здесь учтено, что при $0 \le x \le 1$: $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = 1-x$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$; б) $\frac{32\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{8}{15}$.

Пример 3. Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически:

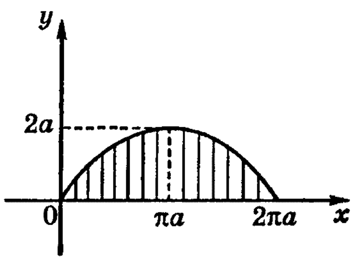
а) циклоида $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $y = 0$, $t \in [0; 2\pi]$;

б) $x = 2t - t^2$; $y = 2t^2 - t^3$.

Решение.

а) Значениям параметра $0 \le t \le 2\pi$ соответствует одна арка циклоиды, которая проходится по часовой стрелке, поэтому

$$S = \int_0^{2\pi} y(t)\cdot x'(t)dt =$$



$$= \int_0^{2\pi} a\,(1-\cos t)\;a\,(1-\cos t)dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = a^2(3\pi - 0) = 3\pi a^2.$$

б) Поскольку заданная кривая ограничивает часть плоскости, то существуют по крайней мере два различных значения параметра t таких, что $x(t_1) = x(t_2)$ и $y(t_1) = y(t_2)$. Для определенности будем считать $t_1 < t_2$:

$$\begin{cases} 2t_1 - t_1^2 = 2t_2 - t_2^2, \\ 2t_1 - t_1^3 = 2t_2^2 - t_2^3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(t_1 - t_2) - (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = 0, \\ 2(t_1 - t_2)(t_1 + t_2) - (t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t_1 - t_2)\,(2 - (t_1 + t_2)) = 0, \\ (t_1 - t_2)\,(2(t_1 + t_2) - (t_1 + t_2)^2 + t_1 t_2) = 0. \end{cases}$$

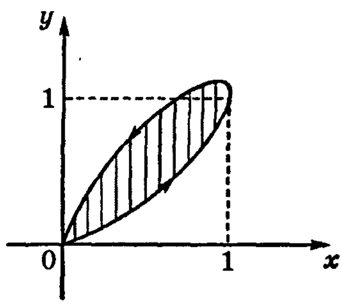
Поскольку $t_1 - t_2 \neq 0$, то система приобретает вид:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2, \\ t_1 t_2 = 0; \end{cases}$$

условию $t_1 < t_2$ соответствует решение $t_1 = 0$; $t_2 = 2$.

Простой подсчет нескольких значений параметра t на отрезке $[0; 2]$ позволяет представить эскиз линии, заданной параметрически. Очевидно, что кривая проходится против часовой стрелки, поэтому

$$S = -\int_0^2 (2t^2 - t^3)\,(2 - 2t)dt =$$



$$= \int_0^2 (-2t^4 + 6t^3 - 4t^2)\,dt =$$

$$= \left(-\frac{2}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - \frac{4}{3}t^3\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{15}.$$

Ответ: а) $3\pi a^2$; б) $\dfrac{8}{15}$.

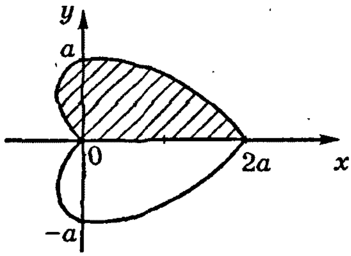
Пример 4. Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах: а) кардиоида $r = a(1 + \cos\varphi)$; б) спираль Архимеда $r = a\varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. в) Перейдя к полярным координатам, найти площадь, ограниченную лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

Решение.

а) Если в условии задачи не указан диапазон значений угла φ, то либо этот диапазон совпадает с областью допустимых значений функции $r(\varphi)$, либо принимается равным отрезку $[0; 2\pi]$.

Поскольку фигура симметрична относительно оси Ox, можно найти площадь половины фигуры, что соответствует диапазону значений φ от 0 до π:

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi =$$



$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

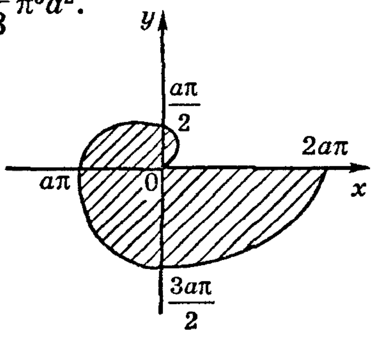
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi a^2;$$

следовательно, полная площадь кардиоиды $S = \dfrac{3}{2}\pi a^2$.

б) Изобразим искомую плоскую фигуру:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$



в) Воспользовавшись формулами:

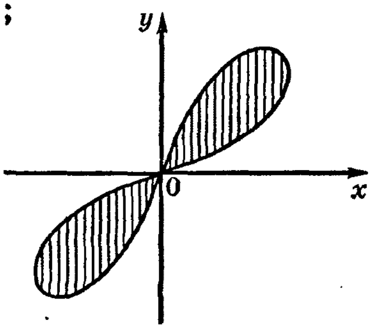
$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi, \\ y = r\cdot\sin\varphi; \end{cases}$$

получаем следующее уравнение лемнискаты в полярной системе координат:

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\cos^2\varphi)^2 = 2a^2 \cdot r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi;$$
$$r^2 = a^2\sin 2\varphi.$$

Из структуры уравнения видно, что кривая определена при тех значениях φ, когда

$$\sin 2\varphi \ge 0;\ 0 \le 2\varphi \le \pi;\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2};$$



$$\text{или } 2\pi \le 2\varphi \le 3\pi;\ \pi \le \varphi \le \frac{3}{2}\pi.$$

Получаем

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}(-\cos 2\varphi)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}.$$

$$S = a^2.$$

Ответ: а) $\frac{3}{2}\pi a^2$; б) $\frac{4}{3}\pi^3 a^2$; в) a^2.

Вычисление длин дуг

Длина дуги пространственной и плоской кривой, заданной параметрически

Если пространственная кривая задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \\ t \in [a, b], \end{cases}$$ то длина дуги вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

Аналогично для плоской кривой:

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Длина дуги плоской кривой, заданной явно

Если функция $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, тогда длина дуги соответствующей кривой имеет вид:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

Длина дуги плоской кривой, заданной в полярных координатах

$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi$, где $r = r(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция, определяющая плоскую кривую; $\alpha \le \varphi \le \beta$.

Пример 5. Найти длину линии:

а) $x = a \cdot \cos^3 t$; $y = a \cdot \sin^3 t$ от точки $(a;\ 0)$ до точки $(0;\ a)$; б) $x = t^2$; $y = t - \dfrac{t^3}{3}$.

Решение.

а) Точке $(a;\ 0)$ соответствует значение параметра $t = 0$, а точке $(0;\ a)$ – $t = \dfrac{\pi}{2}$, следовательно,

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{((a \cdot \cos^3 t)')^2 + ((a \cdot \sin^3 t)')^2}\, dt.$$

Упростим подынтегральное выражение:

$$\sqrt{a^2(-3\cos^2 t \cdot \sin t)^2 + a^2(3\sin^2 t \cdot \cos t)^2} =$$

$$= 3a\sqrt{\cos^4 t \cdot \sin^2 t + \sin^4 t \cdot \cos^2 t} =$$

$$= 3a\,|\sin t \cdot \cos t| \cdot \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 3a\,|\sin t \cdot \cos t| =$$

$$= 3a \cdot \sin t \cdot \cos t,$$

так как при $t \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \ge 0$, $\cos t \ge 0$.

Итак, $l = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \cos t \cdot dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot d(\sin t) =$

$$= \frac{3}{2} a \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}.$$

б) Найдем длину петли линии $x = t^2$; $y = t - \dfrac{t^3}{3}$. Для этого необходимо найти значения t_1 и t_2 параметра t, при которых $x(t_1) = x(t_2)$ и $y(t_1) = y(t_2)$.

$$\begin{cases} t_1^2 = t_2^2, \\ t_1 - \dfrac{t_1^3}{3} = t_2 - \dfrac{t_2^3}{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = 0, \\ (t_1 - t_2)(3 - (t_1 + t_2)^2 + t_1 t_2) = 0; \end{cases}$$

поскольку $t_1 < t_2$, то $\begin{cases} t_1 + t_2 = 0, \\ t_1 t_2 = -3; \end{cases}$ $\begin{cases} t_1 = -\sqrt{3}, \\ t_2 = \sqrt{3}. \end{cases}$

Переходим к расчету длины петли:

$$l = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (1 - t^2)^2}\, dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1 + t^2) dt = \left(t + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= 4\sqrt{3}.$$

Ответ: а) $\dfrac{3a}{2}$; б) $4\sqrt{3}$.

Пример 6. Вычислить длину: а) дуги линии $y = \ln\cos x$, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$; б) дуги параболы $y = ax^2$ от вершины (0; 0) до точки $(x_0; a x_0^2)$.

Решение.

а) $$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + ((\ln\cos x)')^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \cdot dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = \left| \begin{matrix} \sin x = u \\ u(0) = 0 \\ u\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)^2 = \ln(\sqrt{2}+1) \ .$$

Здесь учтено, что $(\ln\cos x)' = \frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x) =$

$= -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x;$

а также использовано соотношение:

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{|\cos x|} = \frac{1}{\cos x},$$

так как при $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ $\cos x > 0$.

б) $l = \int_0^{x_0}\sqrt{1+(2ax)^2}\,dx = \int_0^{x_0}\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx =$

$$= \left| \begin{matrix} u = \sqrt{1+4a^2x^2} & du = \frac{4a^2x\,dx}{\sqrt{1+4a^2x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = \sqrt{1+4a^2x^2}\cdot x\Big|_0^{x_0} -$$

$$-4a^2\int_0^{x_0}\frac{x^2dx}{\sqrt{1+4a^2x^2}} = x_0\cdot\sqrt{1+4a^2x_0^2} - \int_0^{x_0}\frac{4a^2x^2+1-1}{\sqrt{1+4a^2x^2}}\,dx =$$

$$= x_0\cdot\sqrt{1+4a^2x_0^2} + \int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{1+4a^2x^2}} - \int_0^{x_0}\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx =$$

$$= x_0 \cdot \sqrt{1+4a^2x_0^2} + \frac{1}{2a}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4a^2}}\right|\Bigg|_0^{x_0} - \int_0^{x_0}\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx.$$

Получено уравнение для l:

$$l = x_0 \cdot \sqrt{1+4a^2x_0^2} + \frac{1}{2a}\ln\left|x_0+\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4a^2}}\right| - \frac{1}{2a}\ln\frac{1}{2a} - l,$$

следовательно,

$$l = \frac{1}{2}x_0\sqrt{1+4a^2x_0^2} + \frac{1}{4a}\ln\left(2a\left(x_0+\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4a^2}}\right)\right).$$

Ответ: а) $\ln(\sqrt{2}+1)$;

б) $\dfrac{1}{2}x_0\sqrt{1+4a^2x_0^2} + \dfrac{1}{4a}\ln\left(2a\left(x_0+\sqrt{x_0^2+\dfrac{1}{4a^2}}\right)\right)$.

Пример 7. Найти длину дуги:

а) гиперболической спирали $r = \dfrac{1}{\varphi}$, $\varphi \in [1; 2]$;

б) спирали Архимеда $r = a\varphi$; $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Решение.

а) $$l = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{\varphi^2} + \left(\left(\frac{1}{\varphi}\right)'\right)^2}\,d\varphi = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi^4}}\,d\varphi =$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1+\varphi^2}\,\frac{d\varphi}{\varphi^2} = -\int_1^2 \sqrt{1+\varphi^2}\,d\left(\frac{1}{\varphi}\right) =$$

$$= -\sqrt{1+\varphi^2}\cdot\frac{1}{\varphi}\bigg|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{\varphi}\cdot d\left(\sqrt{1+\varphi^2}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}\bigg|_1^2 + \int_1^2 \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}\bigg|_1^2 + \ln\left(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right)\bigg|_1^2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} + \ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}.$$

б) $l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1}\, d\varphi =$

$$= a\left(\varphi \cdot \sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi^2+1}}\, d\varphi \right) =$$

$$= a\left(2\pi \cdot \sqrt{4\pi^2+1} - \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1}\, d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}} \right).$$

Получено уравнение для l:

$$l = 2\pi a\sqrt{4\pi^2+1} + a\ln\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1} \right)\Big|_0^{2\pi} - l,$$

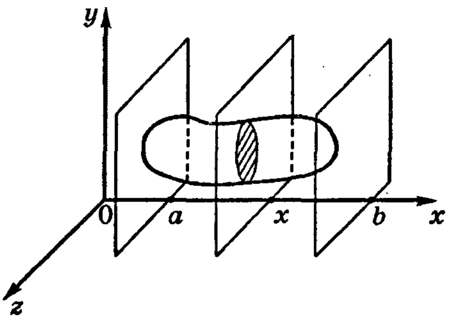
откуда получаем $l = \pi a\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{a}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1} \right)$.

Ответ: а) $-\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{2} + \ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$;

б) $\pi a\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{a}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1} \right)$.

Вычисление объемов

Объем произвольного тела

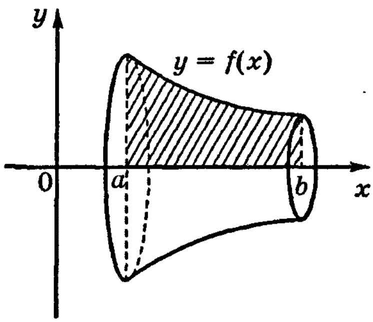


Пусть $S = S(x)$ – функция, задающая площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке x.

Объем тела, ограниченного плоскостями $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле:

$$V = \int\limits_a^b S(x)\, dx.$$

Объем тела вращения



Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, тогда объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, образованной функцией $f(x)$, вокруг оси Ox, вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Объем кольца, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной прямыми $x = a$; $x = b$ и кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные неотрицательные на отрезке $[a, b]$ функции $f(x) \geq g(x)$, вычисляется следующим образом

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx.$$

Пример 8. Найти объем произвольного эллипсоида с центром в начале координат.

Решение.

Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Рассмотрим произвольное сечение эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси Ox: $x = \text{const}$; $x \in [-a; a]$. Как известно, этими сечениями являются эллипсы следующего вида:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}; \quad \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$$

с полуосями $b' = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ и $c' = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Поскольку площадь эллипса равна произведению коэффициента π на длины его полуосей, то площадь поперечного сечения эллипсоида плоскостью $x = \text{const}$ имеет вид

$$S(x) = \pi b'c' = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Следовательно, объем эллипсоида равен

$$V = \int_{-a}^{a} S(x)\,dx = \pi bc\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc.$$

Ответ: $\frac{4}{3}\pi abc$.

Пример 9. Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры:

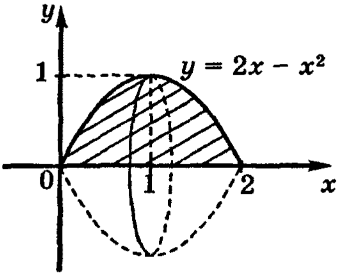
а) $y = 2x - x^2$; $y = 0$ вокруг оси Ox;

б) $y = 2x - x^2$; $y = 0$ вокруг оси Oy;

в) петли кривой $x = 2t - t^2$; $y = 4t - t^3$ вокруг оси Ox;

г) петли кривой $x = 2t - t^2$; $y = 4t - t^3$ вокруг оси Oy.

Решение.



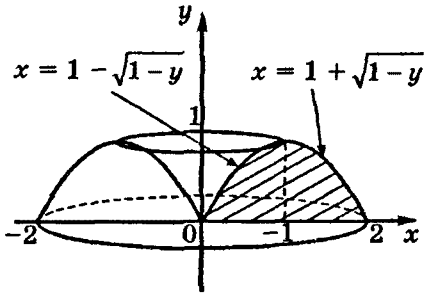
а) Совокупность уравнений $y = 2x - x^2$; $y = 0$ определяет криволинейную трапецию, ограниченную параболой, ветви которой направлены вниз. Вершина параболы находится в точке (1; 1). Парабола пересекает ось Ox при $x = 0$ и $x = 2$, поэтому

$$V = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2\,dx =$$

$$= \pi\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)\,dx = \pi\left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{15}\pi.$$

б) Преобразуем уравнение параболы: $x^2 - 2x + y = 0$;

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - y}.$$



Очевидно, что уравнение $x = 1 + \sqrt{1 - y}$ задает правую ветвь параболы, а уравнение $x = 1 - \sqrt{1 - y}$ – левую. Искомый объем находим как объем кольца, образованного вращением вокруг оси Oy линий $x = 1 \pm \sqrt{1-y}$, $y \in [0, 1]$.

$$V = \pi\int_0^1 \left(x_2^2(y) - x_1^2(y)\right)dy =$$

$$= \pi\int_0^1\left(\left(1+\sqrt{1-y}\right)^2 - \left(1-\sqrt{1-y}\right)^2\right)dy = \pi\int_0^1 4\sqrt{1-y}\,dy =$$

$$= 4\pi\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(1-y)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3}\pi.$$

в) Находим диапазон значений параметра t, при которых кривая образует петлю:

$$\begin{cases} 2t_1 - t_1^2 = 2t_2 - t_2^2, \\ 4t_1 - t_1^3 = 4t_2 - t_2^3; \end{cases} \quad \begin{cases} (t_1 - t_2)(2-(t_1+t_2)) = 0, \\ (t_1 - t_2)(4-(t_1+t_2)^2 + t_1t_2) = 0; \end{cases}$$

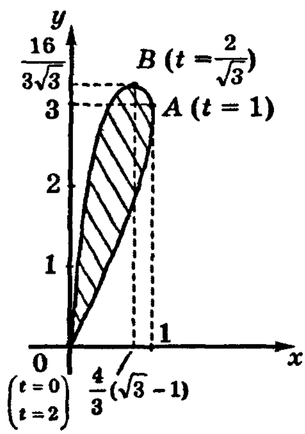
в предположении $t_1 < t_2$ получаем:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2, \\ t_1t_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = 0, \\ t_2 = 2. \end{cases}$$

Анализируя функцию $x = 2t - t^2$ на экстремум, легко получаем $x_{max} = x(1) = 1$. При этом $y(1) = 3$. Анализируя функцию $y = 4t - t^3$ на экстремум, получаем две точки экстремума $t = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$, из которых только $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$ принадлежит отрезку $[0; 2]$; при этом

$$y_{max} = y\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16}{3\sqrt{3}};\ x\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}.$$

Объем тела, образованного вращением петли кривой вокруг оси Ox, получим как разность объемов, образованных вращением дуг OBA и OA: $V = V_1 - V_2$.



Поскольку изменение параметра t от 1 до 2 сопровождается уменьшением переменной x от 1 до 0, то в выражении объема V_1 необходимо поставить знак «−» перед интегралом:

$$V_1 = -\pi\int\limits_1^2 (4t - t^3)^2 \cdot 2(1 - t)dt =$$

$$= 2\pi\int\limits_1^2 (t^7 - t^6 - 8t^5 + 8t^4 + 16t^3 - 16t^2)\,dt =$$

$$= 2\pi\left(\frac{t^8}{8} - \frac{t^7}{7} - \frac{4}{3}t^6 + \frac{8}{5}t^5 + 4t^4 - \frac{16}{3}t^3\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1679}{420}\pi.$$

Аналогично $V_2 = \pi\int\limits_0^1 (4t - t^3)^2 \cdot 2(1 - t)dt =$

$$= 2\pi\left(-\frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} + \frac{4}{3}t^6 - \frac{8}{5}t^5 - 4t^4 + \frac{16}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{911}{420}\pi.$$

$$V_1 - V_2 = \frac{64}{35}\pi.$$

г) Воспользуемся некоторыми результатами задачи в). Очевидно, что объем тела, получающегося при вращении петли кривой вокруг оси Oy, есть разность объемов тел, образованных вращением дуг OAB и OB:

$$V = V_1 - V_2,$$

где $V_1 = \pi\int\limits_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} (2t - t^2)^2 \cdot (4 - 3t^2)\cdot dt;$

$$V_2 = -\pi\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} (2t - t^2)^2 \cdot (4 - 3t^2)\cdot dt.$$

Появление знака «минус» в выражении объема V_2 обусловлено тем, что возрастанию параметра t от $\frac{2}{\sqrt{3}}$ до 2 соответствует уменьшение переменной y от $\frac{16}{3\sqrt{3}}$ до 0.

В результате громоздких, но очевидных расчетов получаем

$$V = \frac{64}{105}\pi.$$

Ответ: а) $\frac{16}{15}\pi$; б) $\frac{8}{3}\pi$; в) $\frac{64}{35}\pi$; г) $\frac{64}{105}\pi$.

Вычисление площади поверхности вращения

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, тогда площадь поверхности, образованной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox, равна

$P = 2\pi \int\limits_a^b y\,ds$, где ds – дифференциал дуги.

В случае явного задания функции, получаем

$$P = 2\pi \int\limits_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot dx.$$

Пример 10. Найти площадь поверхности, образованной вращением

а) дуги параболы $y^2 = 4ax$ вокруг оси абсцисс от вершины до точки с абсциссой $x = 3a$;

б) дуги линии $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ вокруг оси абсцисс.

Решение.

а) Для определенности рассмотрим случай $a > 0$, тогда можно считать, что искомая поверхность образована вращением вокруг оси абсцисс кривой $y = \sqrt{4ax}$, $x \in [0; 3a]$.

$$P = 2\pi \int\limits_0^{3a} \sqrt{4ax} \cdot \sqrt{1 + \left(\left(\sqrt{4ax}\right)'\right)^2}\, dx =$$

$$= 4\sqrt{a}\,\pi \int\limits_0^{3a} \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{a}{x}}\, dx = 4\sqrt{a}\,\pi \int\limits_0^{3a} \sqrt{x + a}\, dx =$$

$$= \frac{8\sqrt{a}\pi}{3} \cdot (x + a)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{3a} = \frac{56}{3} a^2 \pi.$$

$$б)\ P = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cdot \cos t\sqrt{\left(\left(e^t \cdot \sin t\right)'\right)^2 + \left(\left(e^t \cdot \cos t\right)'\right)^2}\, dt =$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cdot \cos t\sqrt{\left(e^t \cdot \sin t + e^t \cdot \cos t\right)^2 + \left(e^t \cdot \cos t - e^t \cdot \sin t\right)^2}\, dt =$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cdot \cos t \cdot \sqrt{2} \cdot e^t\, dt = 2\sqrt{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cdot \cos t\, dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} d(\sin t) = 2\sqrt{2}\pi\left(e^{2t} \cdot \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot e^{2t} dt \right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\left(e^{\pi} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} d(\cos t) \right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\left(e^{\pi} + 2e^{2t} \cdot \cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cos t\, dt \right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\left(e^{\pi} - 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cos t\, dt \right).$$

Получено уравнение для P:

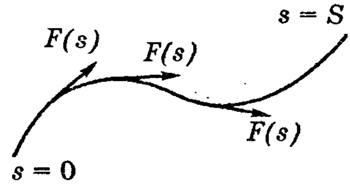
$P = 2\sqrt{2}\,\pi(e^{\pi} - 2) - 4P$, следовательно, $P = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}\pi(e^{\pi} - 2)$.

Ответ: а) $\dfrac{56}{3}a^2\pi$; б) $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\pi(e^{\pi} - 2)$.

Механические приложения определенного интеграла

Вычисление работы сил

Материальная точка движется по непрерывно дифференцируемой кривой, при этом на нее действует сила, направленная по касательной к траектории в направлении движения. Полная работа, совершаемая силой $F(s)$:



$$W = \int_0^S F(s) \cdot ds.$$

Если положение точки на траектории движения описывается другим параметром, то формула приобретает вид:

$$W = \int_a^b F(s(t)) \cdot s'(t)dt.$$

Вычисление статических моментов и центра тяжести

Пусть на координатной плоскости Oxy некоторая масса M распределена с плотностью $\rho = \rho(y)$ на некотором множестве точек S (это может быть дуга кривой или ограниченная плоская фигура). Обозначим $s(y)$ – меру указанного множества (длина дуги или площадь).

Определение 2. Число $M_k = \int\limits_S \rho(y)\, y^k ds(y)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ называется *k-м моментом массы M* относительно оси Ox.

При $k = 0$ $M_0 = M$ – масса,

$k = 1$ M_1 – статический момент,

$k = 2$ M_2 – момент инерции.

Аналогично вводятся моменты относительно оси Oy. В пространстве подобным же образом вводятся понятия моментов массы относительно координатных плоскостей.

Если $\rho \equiv 1$, то соответствующие моменты называются *геометрическими*.

Координаты центра тяжести однородной (ρ – const) плоской фигуры определяются по формулам:

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S}; \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S},$$

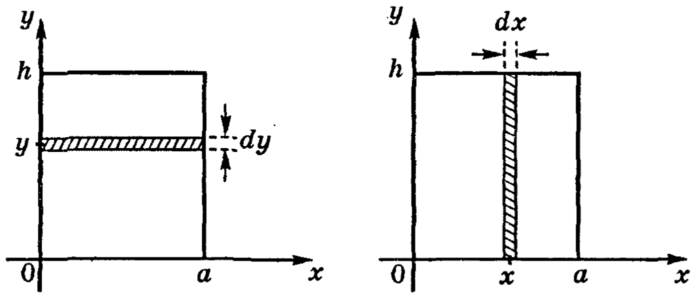
где $M_1^{(y)}$, $M_1^{(x)}$ – геометрические статические моменты фигуры относительно осей Oy и Ox; S – площадь фигуры.

Пример 11. Вычислить статические (геометрические) моменты прямоугольника с основанием a и высотой h относительно его сторон. Найти координаты центра тяжести.

Решение.

Для удобства разместим прямоугольник на координатной плоскости, как это показано на рисунке. Рассмотрим статический момент относительно основания a (ось Ox). В качестве меры принимается площадь горизонтальной полосы: $a \cdot dy$, следовательно,

$$M_x = \int_0^h y \cdot a dy = \left.\frac{ay^2}{2}\right|_0^h = \frac{ah^2}{2}.$$



Статический момент относительно высоты h (ось Oy) находится аналогично:

$$M_y = \int_0^a x \cdot h dx = \left.\frac{hx^2}{2}\right|_0^a = \frac{ha^2}{2}.$$

Поскольку площадь прямоугольника $S = ah$, то в указанной системе координат получаем следующие координаты центра тяжести:

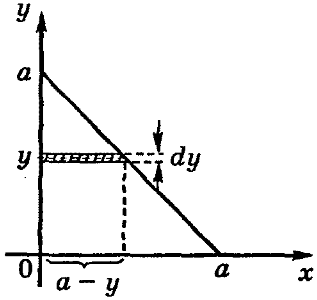
$$x_0 = \frac{M_y}{S} = \frac{a^2h}{2 \cdot ah} = \frac{a}{2}; \quad y_0 = \frac{M_x}{S} = \frac{ah^2}{2 \cdot ah} = \frac{h}{2}.$$

Ответ: $\frac{ah^2}{2}$; $\frac{ha^2}{2}$; $\left(\frac{a}{2}; \frac{h}{2}\right)$.

Пример 12. Найти статические (геометрические) моменты прямоугольного равнобедренного треугольника с катетами a относительно каждой из его сторон. Вычислить координаты центра тяжести.

Решение.

Расположим катеты треугольника на координатных осях.



$$M_x = \int_0^a y\cdot(a-y)\cdot dy = $$

$$=\left(a\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{a^3}{6}.$$

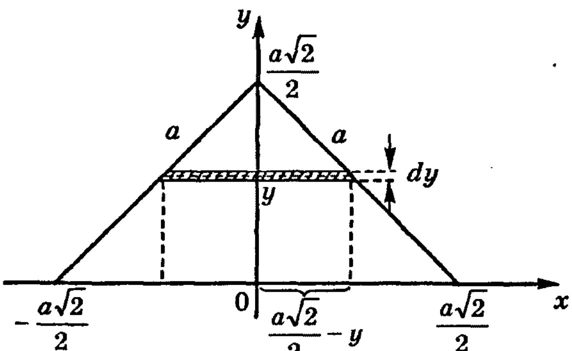
$$M_y = \int_0^a x\cdot(a-x)\cdot dx = \frac{a^3}{6}.$$

Координаты центра тяжести:

$$x_0=\frac{M_y}{S}=\frac{a^3}{6\cdot\left(\frac{a^2}{2}\right)}=\frac{a}{3};\quad y_0=\frac{M_x}{S}=\frac{a^3}{6\cdot\left(\frac{a^2}{2}\right)}=\frac{a}{3}.$$

Для нахождения статического момента относительно гипотенузы расположим гипотенузу на оси Ox симметрично относительно оси Oy.

$$M=\int_0^{\frac{a\sqrt2}{2}} y\cdot\left(a\sqrt2-2y\right)dy=\left(a\sqrt2\cdot\frac{y^2}{2}-\frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_0^{\frac{a\sqrt2}{2}}=\frac{a^3\sqrt2}{12}.$$



Ответ: $\frac{a^3}{6};\ \frac{a^3}{6};\ \frac{a^3\sqrt2}{12};\ \left(\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right).$

Приближенное вычисление определенных интегралов

Формула прямоугольников

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a; b]$. Разобьем отрезок $[a; b]$ точками $x_k = a + kh$; $k = 0, 1, ..., n$ на n отрезков длиной h, тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = h(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) + R_n,$$

где $y_k = f(x_k)$; $k = 0, 1, ..., n$; $R_n = \dfrac{(b-a)h}{2}y'(c)$, $c \in [a; b]$.

Формула трапеций

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) + R_n,$$ где

$$R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(c),\ c \in [a; b].$$

Формула Симпсона

Если $n = 2m$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2})) + R_n,$$

$$R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(c),\ c \in [a; b].$$

Пример 13. Вычислить приближенно интеграл по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона и оценить их погрешности: $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{\ln x}$.

Решение.

Разобьем отрезок интегрирования $[2; 6]$ на 16 отрезков точками $x_0 = 2$; $x_1 = 2{,}25$; $x_2 = 2{,}5$; ...; $x_{15} = 5{,}75$; $x_{16} = 6$. Длины всех отрезков $h = 0{,}25$.

Рассчитаем значения функции $y = \dfrac{1}{\ln x}$ в точках x_k; $k = 0; 1; ... ; 16$.

x	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,5	3,75	4
$y=\dfrac{1}{\ln x}$	1,4427	1,2332	1,0914	0,9885	0,9102	0,8484	0,7982	0,7566	0,7213
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
x	4,25	4,5	4,75	5	5,25	5,5	5,75	6	
$y=\dfrac{1}{\ln x}$	0,6911	0,6649	0,6418	0,6213	0,6031	0,5866	0,5717	0,5581	
	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	

а) Формула прямоугольников

$$\int_2^6 \frac{dx}{\ln x} \approx h \cdot \sum_{k=0}^{15} y_k = 0{,}25 \cdot (1{,}4427 + ... + 0{,}5717) \approx$$

$\approx 3{,}2927.$

Оценим погрешность полученного значения

$$|R_n| = \left|\frac{(b-a)h}{2} y'(c)\right| = \frac{4 \cdot 0{,}25}{2} \cdot \frac{1}{\ln^2 c} \cdot \frac{1}{c} < \frac{1}{2\ln^2 2} \approx$$

$\approx 0{,}5203.$

б) Формула трапеций:

$$\int_2^6 \frac{dx}{\ln x} \approx h\left(\frac{y_0 + y_{16}}{2} + \sum_{k=1}^{15} y_k\right) = 0{,}25(1{,}004 + 11{,}7282) \approx$$

$\approx 3{,}1831.$

Оценим погрешность

$$|R_n| = \left|\frac{(b-a)h^2}{12} y''(c)\right| = \frac{4 \cdot 0{,}25^2}{12} \cdot \frac{2 + \ln c}{c^2 \ln^3 c} < 0{,}059.$$

в) Формула Симпсона:

$$\int_2^6 \frac{dx}{\ln x} = \frac{h}{3}(y_0 + y_{16} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{15}) + 2(y_2 + y_4 + ...$$

$+ y_{14})) \approx 3{,}1778.$

Оценим погрешность.

$$|R_n| = \left|\frac{(b-a)h^4}{180} y^{(4)}(c)\right| < \frac{4 \cdot 0{,}25^4}{180}$$

$$\cdot\frac{3\ln^3 6+11\ln^2 6+18\ln 6+12}{2^4\ln^5 2}\approx 0{,}0008.$$

Ответ:

$$\int_2^6\frac{dx}{\ln x}\approx\begin{cases}3{,}2927 \text{ с погрешностью } 0{,}5203-\text{формула прямоугольников,}\\ 3{,}1831 \text{ с погрешностью } 0{,}059-\text{формула трапеции,}\\ 3{,}1778 \text{ с погрешностью } 0{,}0008-\text{формула Симпсона.}\end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

1. $y=\mathrm{tg}\,x;\ x=0;\ x=\dfrac{\pi}{4};\ y=0.$

2. $y=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1;\\ (x-2)^2, & 1\le x\le 2,\end{cases}$ и осью Ox.

3. $y=\ln x;\ x=1;\ x=e;\ y=0.$

4. $y^2=3x;\ y=\dfrac{1}{3}x^2.$

5. $y=5^x;\ y=5;\ x=0.$

6. $y=\ln x;\ y=\ln^2 x.$

7. $y=\sin x;\ y=\cos x;\ x\ge 0.$

8. $y=\sin x;\ y=\cos x;\ y=0$ (площадь одного из криволинейных треугольников).

9. $x=\cos t+t\cdot\sin t;\ y=\sin t-t\cos t;\ 0\le t\le 2\pi.$

10. $x=\cos t;\ y=\dfrac{\sin^2 t}{2+\sin t}.$

11. Переходя к полярным координатам, найти площадь листа Декарта $x^3+y^3=3xy$.

12. Переходя к полярным координатам, найти площадь $x^4+y^4=x^2+y^2$.

13. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $r=4+2\cos\varphi$.

Найти длины дуг линий:

14. $x=\cos^4 t;\ y=\sin^4 t.$

15. $x=t-\sin t;\ y=1-\cos t;\ 0\le t\le 2\pi.$

16. $y=x^{\frac{3}{2}};\ 0\le x\le 4.$

17. $y = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$; $1 \le x \le 2$.

18. $y = \ln\dfrac{1}{1 - x^2}$; $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$.

19. $r = e^{\varphi}$; $0 < r < 1$.

20. $r = \varphi^2$, $0 \le \varphi \le \sqrt{5}$.

Найти объем:

21. параболоида вращения $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = z$, $0 \le z \le H$.

22. тела вращения, образованного вращением фигуры $y = e^{-x}$; $y = 0$; $x \ge 0$ вокруг оси Ox.

23. тела вращения, образованного вращением фигуры $y = e^{-x}$; $y = 0$; $x \ge 0$ вокруг оси Oy.

24. тела вращения, образованного вращением фигуры $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$; $0 \le t \le 2\pi$ вокруг оси Ox и вокруг оси Oy.

Вычислить площадь поверхности:

25. катеноида, полученного вращением $y = \operatorname{ch} x$ вокруг оси Ox; $0 \le x \le 1$.

26. $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$; $0 \le t \le 2\pi$ вокруг оси Ox и оси Oy.

Вычислить:

27. статический момент и момент инерции однородной треугольной пластины с основанием b и высотой h относительно основания.

28. координаты центра тяжести цепной линии $y = \operatorname{ch} x$; $-1 \le x \le 1$.

Вычислить приближенное значение интегралов:

29. $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \sin x\, dx$ – по правилу прямоугольников ($n = 12$).

30. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,dx}{1 + \sqrt{x}}$ по формуле трапеций ($n = 12$) и формуле Симпсона.

Ответы:

1. $\ln\sqrt{2}$; 2. $\frac{2}{3}$; 3. 1; 4. 3; 5. $5-\frac{4}{\ln 5}$; 6. 3–e; 7. $\sqrt{2}-1$; 8. $2-\sqrt{2}$; 9. $\frac{\pi}{3}(4\pi+3)$; 10. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}(16-9\sqrt{3})$; 11. $\frac{3}{2}$; 12. $\pi\sqrt{2}$; 13. 18π; 14. $1+\frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}$; 15. 8; 16. $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$; 17. $\ln\frac{e^2-e^{-2}}{e-e^{-1}}$; 18. $\ln 3-\frac{1}{2}$; 19. $\sqrt{2}$; 20. $\frac{19}{3}$; 21. $\frac{\pi a^2H^2}{2}$; 22. $\frac{\pi}{2}$; 23. 2π; 24. $5\pi^2$; $6\pi^3$; 25. $\frac{\pi}{4}(e^2-e^{-2}+4)$; 26. $\frac{64\pi}{3}$; $16\pi^2$; 27. $\frac{bh^2}{6}$; $\frac{bh^3}{12}$; 28. $\left(0;\frac{e^4+4e^2-1}{4e(e^2-1)}\right)$; 29. –6,2832; 30. 0,670909; 0,670926.

7. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

7.1. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

n-мерное евклидово пространство

Определение 1. Упорядоченная последовательность n действительных чисел $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$ называется точкой n-мерного пространства, при этом числа x_i, $i = 1, ..., n$ называются координатами точки.

Обозначение: $X = (x_1; x_2; ...; x_n)$.

Определение 2. Если для любых двух точек $X = (x_1; x_2; ...; x_n)$ и $Y = (y_1; y_2; ...; y_n)$ n-мерного пространства определено расстояние между ними по формуле

$$\rho(X; Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

то такое пространство называется *n-мерным евклидовым.*

Обозначение: E^n.

Определение 3. Пусть X – фиксированная точка пространства E^n; $\varepsilon > 0$ – произвольное положительное число. Множество точек Y пространства E^n таких, что

$$\rho(X; Y) < \varepsilon,$$

называется *n-мерным шаром* с центром в точке X и радиусом ε или просто *ε-окрестностью точки* X в пространстве E^n.

Определение 4. Если существует отображение множества натуральных чисел в множество точек пространства E^n

$$X_m = f(m),\ m \in N,$$

то множество точек $X_1; X_2; ...$ называется последовательностью точек этого пространства.

Обозначение: $\{X_m\}$.

Определение 5. Точка $X \in E^n$ называется пределом последовательности $\{X_m\}$, если

$$\lim_{m\to\infty} \rho(X; X_m) = 0.$$

Определение 6. Пусть $E \subset E^n$ – некоторое подмножество n-мерного евклидова пространства. Отображение точек множества E в множество действительных чисел R называется функцией n переменных.

Обозначение: $y = f(x_1; x_2; ...; x_n)$; $y = f(X)$.

Множество E называется *областью определения* функции n переменных.

Пример 1. Найти области определения функций и изобразить их графически:

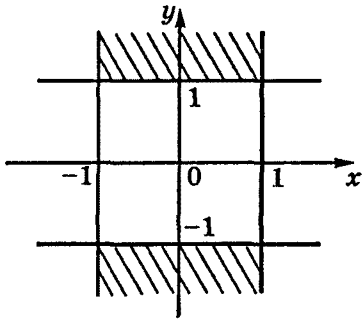
а) $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$; б) $z = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

в) $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$; г) $z = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arccos(1-y)$;

д) $z = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}\right)$.

Решение.

а) Областью определения функции $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$ является множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:



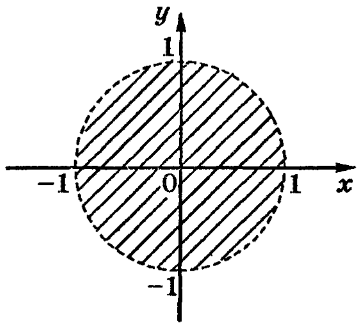
$$\begin{cases} 1-x^2 \ge 0, \\ y^2-1 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 \le 1, \\ y^2 \ge 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ y \le -1;\ y \ge 1. \end{cases}$$

б) Область определения функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$:

$$1 - x^2 - y^2 > 0;$$

$$x^2 + y^2 < 1.$$

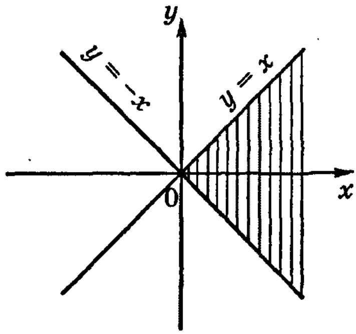


Данное неравенство описывает внутреннюю часть круга радиуса 1 с центром в начале координат.

Если граница области не входит в область определения функции, то она будет изображаться пунктирной линией.

в) Область определения функции $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$:

$$\begin{cases} x+y \ge 0, \\ x-y \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y \ge -x, \\ y \le x. \end{cases}$$



Уравнения $y = \pm x$ определяют две прямые – биссектрисы координатных четвертей.

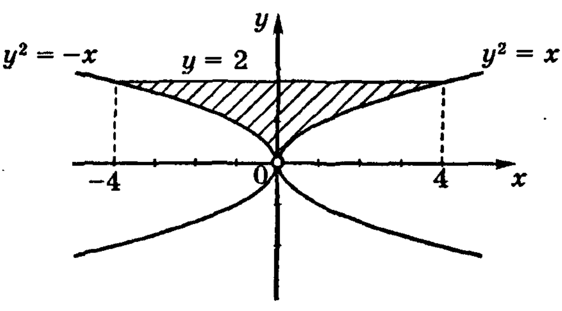
Условие $y \ge -x$ задает верхнюю относительно прямой $y = -x$ полуплоскость.

Условие $y \le x$ задает нижнюю относительно прямой $y = x$ полуплоскость.

г) Ограничения, накладываемые на аргументы функции $z = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arccos(1-y)$, обусловлены ограничениями на функции $\arcsin t$ и $\arccos t$: $|t| \le 1$.

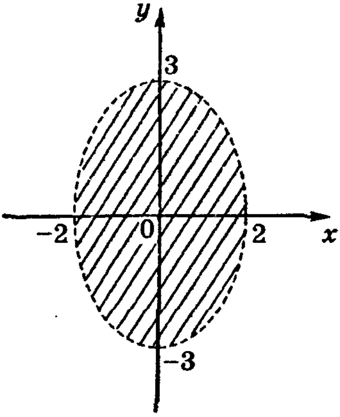
Поэтому область определения исходной функции описывается следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} -1 \le \dfrac{x}{y^2} \le 1, \\ -1 \le 1-y \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 \le x \le y^2, \\ y \ne 0, \\ 0 \le y \le 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \ge x, \\ y^2 \ge -x, \\ 0 < y \le 2. \end{cases}$$



Неравенства $y^2 \ge x$ и $y^2 \ge -x$ задают часть плоскости, расположенную вне обеих парабол одновременно. Отметим, что точка (0; 0) не входит в искомую область определения.

д) Область определения функции $z = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}\right)$ находится как решение неравенства:



$$1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}>0;\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<1.$$

Это неравенство описывает внутреннюю часть эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$

Ответ: а) $\begin{cases}-1\le x\le 1,\\ y\le -1;\ y\ge 1;\end{cases}$

б) $x^2+y^2<1$; в) $\begin{cases}y\ge -x,\\ y\le x;\end{cases}$

г) $\begin{cases}y^2\ge x,\\ y^2\ge -x,\\ 0<y\le 2;\end{cases}$ д) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<1.$

Предел функции нескольких переменных. Непрерывность

Определение 7. Пусть функция $y=f(X)$ определена в некоторой окрестности точки X_0 за исключением, быть может, самой точки X_0. Тогда число a называется пределом функции $y=f(X)$ при $X\to X_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta_\varepsilon>0$, что для всех точек X, таких, что $0<\rho(X;X_0)<\delta_\varepsilon$, выполняется условие $|f(X)-a|<\varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=a.$

Теорема 1. Если существует предел функции двух переменных $f(x_1;x_2)$ при $(x_1;x_2)\to\left(x_1^0;x_2^0\right)$ и при каждом фиксированном значении переменной x_1 существует предел

$$\lim_{x_2\to x_2^0} f(x_1;x_2),$$

то существует *повторный предел*, равный пределу функции в точке $\left(x_1^0;x_2^0\right)$:

$$\lim_{(x_1;x_2)\to\left(x_1^0;x_2^0\right)} f(x_1;x_2)=\lim_{x_1\to x_1^0}\lim_{x_2\to x_2^0} f(x_1;x_2).$$

Аналогичным образом может быть сформулирована теорема о связи предела функции нескольких переменных с повторными пределами для функции n переменных

($n \geq 3$). Отметим, что существование повторных пределов не гарантирует существования предела функции нескольких переменных, а существование предела не означает существование повторных пределов.

Определение 8. Пусть функция $y = f(X)$ определена на множестве $E \subset E^n$ и точка $X_0 \in E$. Функция называется непрерывной в точке X_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_\varepsilon > 0$, что для всех точек $X \in E$, таких, что $0 < \rho(X;\ X_0) < \delta_\varepsilon$, выполняется условие $|f(X) - f(X_0)| < \varepsilon$.

Другими словами, функция непрерывна в точке X_0, если

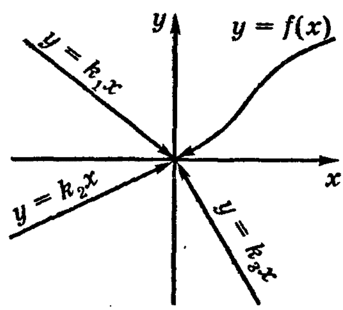
$$\lim_{X \to X_0} f(X) = f(X_0).$$

Определение 9. Если функция непрерывна в каждой точке множества E, то она называется непрерывной на этом множестве.

Как и в случае функций одной переменной, имеет место непрерывность алгебраической суммы, произведения, частного и сложной функции, образованных непрерывными функциями нескольких переменных.

Пример 2. Доказать, что функция $z = \dfrac{2x - 3y}{x + y}$ не имеет предела при $(x;\ y) \to (0;\ 0)$.

Решение.



Покажем, что предел, к которому стремится исходная функция, зависит от выбора кривой $y = f(x)$, проходящей через начало координат, и по дуге которой осуществляется предельный переход к точке (0; 0).

Ограничимся рассмотрением прямых вида $y = kx$.

$\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{2x - 3y}{x + y} = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{2x - 3kx}{x + kx} = \dfrac{2 - 3k}{1 + k}$, т. е. в зависимости от углового коэффициента прямой k могут быть получены любые значения предела. Это и означает отсутствие предела функции $z = \dfrac{2x - 3y}{x + y}$ в точке (0; 0) в смысле определения 7.

Пример 3. Исследовать функцию $z = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x}, & x \neq 0, \\ y, & x = 0 \end{cases}$ на непрерывность а) в точке $\left(1; \dfrac{\pi}{2}\right)$; б) в точке (0; 0).

Решение.

Очевидно, что функция $z(x; y)$ непрерывна во всех точках плоскости, у которых $x \neq 0$, поскольку в этих точках непрерывны функции $\sin xy$ и x, и, следовательно, непрерывно их отношение $\dfrac{\sin xy}{x}$. Поэтому в точке $\left(1; \dfrac{\pi}{2}\right)$ функция $z(x; y)$ непрерывна.

Что касается точек с абсциссой $x = 0$, то в этих точках функция $z(x; y)$ доопределена искусственно; поэтому эти точки должны быть исследованы непосредственно по определению.

Функция $z(x; y)$ определена в точке (0; 0): $z(0; 0) = 0$. Покажем, что в этой точке существует предел

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\sin xy}{x}.$$

Так как при малых значениях t выполняется неравенство: $|\sin t| < |t|$, то при $(x; y) \to (0; 0)$ имеет место следующая оценка:

$$\left|\frac{\sin xy}{x}\right| < \left|\frac{xy}{x}\right| = |y|.$$

Но тогда для любого положительного действительного числа $\varepsilon > 0$ как только $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, $\delta = \varepsilon$,

то $\left|\dfrac{\sin xy}{x}\right| < \varepsilon$.

Поскольку $\sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от точек плоскости до точки (0; 0), то по определению 7 это означает, что

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\sin xy}{x} = 0.$$

Следовательно, функция $z(x; y)$ непрерывна в точке (0; 0). Отметим, что в данном примере легко высчитываются повторные пределы

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{\sin xy}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0;$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{\sin xy}{x} = \lim_{y\to 0} y = 0.$$

Но ни их существование, ни даже их совпадение не гарантируют существование предела функции. Рекомендуем убедиться в этом самостоятельно на примере функции $z = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$.

Ответ: функция $z = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x}, & x \neq 0, \\ y, & x = 0; \end{cases}$ непрерывна в точках $\left(1; \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $(0; 0)$.

Частные производные и дифференциалы. Полный дифференциал

Определение 10. Пусть функция $y = f(X)$ определена в некоторой окрестности точки X_0.

Если зафиксировать все переменные, кроме x_i, получим функцию одной переменной x_i:

$$y(x_i) = f\left(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_{i-1}^0; x_i; x_{i+1}^0; \ldots; x_n^0\right).$$

Производная функции $y(x_i)$ в точке $x_i = x_i^0$ называется *частной производной функции* $y = f(X)$ в точке X_0 по переменной x_i.

Обозначение:

$$\frac{\partial y(X_0)}{\partial x_i}; \left.\frac{\partial y\left(x_1^0; \ldots; x_i; \ldots; x_n^0\right)}{\partial x_i}\right|_{x_i = x_i^0}; y'_{x_i}(X_0).$$

Определение 11. Линейные функции $\dfrac{\partial y}{\partial x_i} dx_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ переменных dx_i называются частными *дифференциалами* функции $y = f(X)$.

Обозначение: $d_{x_i} y$.

Определение 12. Функция $y = f(X)$ называется дифференцируемой в точке X_0, если существуют числа $A_1, A_2, ..., A_n$ такие, что полное приращение функции имеет вид:

$$\Delta y(X_0) = A_1 \cdot \Delta x_1 + ... + A_n \cdot \Delta x_n + \alpha(\Delta x_1; ...; \Delta x_n),$$

где $\alpha(\Delta x_1; ...; \Delta x_n) = \varepsilon(\Delta x_1; ...; \Delta x_n) \cdot \rho$; $\lim\limits_{\rho\to 0} \varepsilon(\Delta x_1; ...; \Delta x_n) = 0$;

$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$. При этом линейная часть приращения $A_1 \cdot \Delta x_1 + ... + A_n \cdot \Delta x_n$ называется *полным дифференциалом* функции $f(X)$ в точке X_0.

Теорема 2. Если функция $f(X)$ дифференцируема в точке X_0, то ее полный дифференциал в этой точке имеет вид:

$$dy(X_0) = \frac{\partial y(X_0)}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \ldots + \frac{\partial y(X_0)}{\partial x_n} \cdot dx_n.$$

Замечание. При расчете частных производных необходимо помнить следующее.

1. Все правила вычисления производных и все табличные производные функций одной переменной сохраняют силу.

2. При частном дифференцировании функции $z = f(x; y)$ по переменной x переменную y считаем фиксированной, т. е. константой. Поэтому, в частности, производная по x от любого выражения, зависящего только от y, равна 0. Например,

$$y'_x = \left(y^2\right)'_x = \left(\sqrt{y}\right)'_x = (\sin y)'_x = 0.$$

И вообще, $\left(f(y)\right)'_x = 0$.

В произведении любой множитель, зависящий только от y, выполняет роль множителя-константы. Например,

$(y \cdot x)'_x = y \cdot x'_x = y$; $(\ln y \cdot \sin x)'_x = \ln y \cdot (\sin x)'_x = $
$= \ln y \cdot \cos x$.

И вообще, $\left(f(y) \cdot g(x)\right)'_x = f(y) \cdot g'(x)$.

3. Аналогичным образом выполняется частное дифференцирование функции $z = f(x; y)$ по переменной y.

Пример 4. Найти частные производные, частные дифференциалы и полный дифференциал первого порядка следующих функций:

а) $z = \ln(x^2 + y^2)$; б) $z = x^y$; в) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; г) $z = \sin(x^2 y)$.

Решение.

а) В соответствии с рекомендациями получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x=$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2}\left(\left(x^2\right)'_x+\left(y^2\right)'_x\right)=\frac{1}{x^2+y^2}(2x+0)=\frac{2x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)=\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2}\left(\left(x^2\right)'_y+\left(y^2\right)'_y\right)=\frac{1}{x^2+y^2}(0+2y)=\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Частные и полный дифференциал имеют вид:

$$d_xz=\frac{2x}{x^2+y^2}dx;\ d_yz=\frac{2y}{x^2+y^2}dy;$$

$$dz=\frac{2x}{x^2+y^2}dx+\frac{2y}{x^2+y^2}dy.$$

б) Функция $z=x^y$ является степенной относительно переменной x и показательной относительно y:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot x^{y-1};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\cdot\ln x.$$

Частные дифференциалы:

$$d_xz=y\cdot x^{y-1}dx;\quad d_yz=x^y\cdot\ln x\cdot dy.$$

Полный дифференциал:

$$dz=y\cdot x^{y-1}dx+x^y\cdot\ln x\cdot dy.$$

в) Частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot y\left(x^{-1}\right)'_x=$$

$$=\frac{y}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot y'_y=$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Частные и полный дифференциал:

$$d_xz=-\frac{y}{x^2+y^2}dx;\quad d_yz=\frac{x}{x^2+y^2}dy;$$

$$dz=-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

г) Частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sin(x^2y)=\cos(x^2y)\cdot(x^2y)'_x=$$

$$=\cos(x^2y)\cdot y\cdot(x^2)'_x=2xy\cdot\cos(x^2y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\sin(x^2y)=\cos(x^2y)\cdot(x^2y)'_y=$$

$$=\cos(x^2y)\cdot x^2\cdot y'_y=x^2\cdot\cos(x^2y);$$

$d_xz=2xy\cdot\cos(x^2y)$; $\quad d_yz=x^2\cdot\cos(x^2y)dy$;

$dz=x\cdot\cos(x^2y)\cdot(2ydx+xdy)$.

Ответ: а) $z'_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$; $z'_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$;

$$d_xz=\frac{2x}{x^2+y^2}dx;\ d_yz=\frac{2y}{x^2+y^2}dy;$$

$$dz=\frac{2x}{x^2+y^2}dx+\frac{2y}{x^2+y^2}dy.$$

б) $z'_x=y\cdot x^{y-1}$; $z'_y=x^y\cdot\ln x$; $d_xz=y\cdot x^{y-1}dx$;
$d_yz=x^y\cdot\ln x\cdot dy$; $dz=y\cdot x^{y-1}dx+x^y\cdot\ln x\cdot dy$

в) $z'_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$; $\quad z'_x=\dfrac{x}{x^2+y^2}$;

$$d_xz=-\frac{y}{x^2+y^2}dx;\quad d_yz=\frac{x}{x^2+y^2}dy;$$

$$dz = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

г) $z'_x = 2xy \cdot \cos(x^2y)dx;\ z'_y = x^2 \cdot \cos(x^2y);$
$d_xz = 2xy \cdot \cos(x^2y)dx;\ d_yz = x^2 \cdot \cos(x^2y)dy;$
$dz = x \cdot \cos(x^2y) \cdot (2ydx + xdy).$

Пример 5. Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенные значения выражений:

а) $\ln\left(\sqrt{1{,}04} + \sqrt[3]{0{,}94} - 1\right)$; б) $\sin 31° \cdot \operatorname{tg} 44°$.

Решение.

а) Введем в рассмотрение функцию $z = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} - 1\right)$.

Выражение $\ln\left(\sqrt{1{,}04} + \sqrt[3]{0{,}94} - 1\right)$ является значением функции z в точке (1,04; 0,94), которая находится в окрестности точки (1; 1).

Поскольку

$\Delta z = z(x;\ y) - z(x_0;\ y_0) \approx dz(x_0;\ y_0)$, то

$$z(x;\ y) \approx z(x_0;\ y_0) + \frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y}dy.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} - 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} - 1} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}.$$

Подставляя значения $x_0 = 1;\ y_0 = 1;\ dx = x - x_0 = 0{,}04;\ dy = y - y_0 = -0{,}06$, получаем:

$$z(1{,}04;\ 0{,}94) \approx \ln\left(\sqrt{1} + \sqrt[3]{1} - 1\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt[3]{1} - 1}\left(\frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot 0{,}04 + \frac{1}{3\sqrt[3]{1}} \cdot (-0{,}06)\right).$$

$z(1{,}04;\ 0{,}94) \approx 0.$

Таким образом, $\ln\left(\sqrt{1{,}04} + \sqrt[3]{0{,}94} - 1\right) \approx 0$. Для сравнения приведем расчетное значение: $-0{,}00061$.

б) Перейдем к радианной мере углов:

$$31° = \frac{31}{180}\pi;$$

$$44° = \frac{11}{45}\pi;$$

Выражение $\sin\left(\frac{31}{180}\pi\right)\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{11}{45}\pi\right)$ является значением функции $z = \sin x \cdot \operatorname{tg} y$ в точке $\left(\frac{31}{180}\pi; \frac{11}{45}\pi\right)$. В качестве точки $(x_0; y_0)$ естественно принять точку $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Так как $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cdot \operatorname{tg} y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sin x}{\cos^2 y}$;

$x_0 = \frac{\pi}{6}$; $y_0 = \frac{\pi}{4}$; $dx = \frac{\pi}{180}$; $dy = -\frac{\pi}{180}$,

то $\sin\left(\frac{31}{180}\pi\right)\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{11}{45}\pi\right) \approx \sin\frac{\pi}{6}\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} +$

$$+\cos\frac{\pi}{6}\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180} - \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 0{,}49766.$$

Для сравнения расчетное значение: 0,49737.

Ответ: а) 0; б) 0,49766.

Производные сложных функций

Теорема 3. Если функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ дифференцируемы в точке t_0, а функция $y = f(x_1; x_2)$ дифференцируема в точке $(x_1^0; x_2^0)$, где $x_1^0 = x_1(t_0)$; $x_2^0 = x_2(t_0)$, то сложная функция $y = f(x_1(t); x_2(t))$ дифференцируема в точке t_0, и при этом

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}.$$

Теорема 4. Если функции $x_1(u; v)$ и $x_2(u; v)$ дифференцируемы в точке $(u_0; v_0)$, а функция $y = f(x_1; x_2)$ дифференцируема в точке $(x_1^0; x_2^0)$, где $x_1^0 = x_1(u_0; v_0)$; $x_2^0 = x_2(u_0; v_0)$, то сложная функция $y = f(x_1(u; v); x_2(u; v))$ дифференцируема в точке $(u_0; v_0)$, и при этом

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial u};$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial v}.$$

Пример 6. Найти производные сложных функций:

а) $z = \operatorname{arctg}(x + 2y)$, $x = t^2$; $y = t^3$; б) $z = f\left(x; \dfrac{x}{y}\right)$;

в) $z = x^3y^2 - x + y$, $x = u \cdot \cos v$; $y = v \cdot \cos u$.

Решение.

а) В соответствии с теоремой 3:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(x+2y)^2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(x+2y)^2}\cdot 2;$$

$$\frac{dx}{dt}=2t;\ \frac{dy}{dt}=3t^2,$$

следовательно,

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{1+(t^2+2t^3)^2}(2t+6t^2)=\frac{2t(3t+1)}{1+t^4(1+2t)^2}.$$

б) Для удобства введем обозначение: $\dfrac{x}{y}=t$, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=f'_x+f'_t\cdot\frac{1}{y}=f'_x+\frac{1}{y}\cdot f'_t;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=f'_t\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{y^2}\cdot f'_t.$$

в) В соответствии с теоремой 4:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Поскольку $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 1$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + 1$; $\dfrac{\partial x}{\partial u} = \cos v$;

$\dfrac{\partial x}{\partial v} = -u \cdot \sin v$; $\dfrac{\partial y}{\partial u} = -v \cdot \sin u$; $\dfrac{\partial y}{\partial v} = \cos u$, то

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (3u^2 \cdot \cos^2 v \cdot v^2 \cdot \cos^2 u - 1) \cdot \cos v +$$
$$+ (2u^3 \cdot \cos^3 v \cdot v \cdot \cos u + 1) \cdot (-v \cdot \sin u);$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (3u^2 \cdot \cos^2 v \cdot v^2 \cdot \cos^2 u - 1) \cdot (-u \cdot \sin v) +$$
$$+ (2u^3 \cdot \cos^3 v \cdot v \cdot \cos u + 1) \cdot \cos u;$$

Ответ: а) $\dfrac{2t(3t+1)}{1+t^4(1+2t)^2}$; б) $f'_x + \dfrac{1}{y} \cdot f'_t$; $-\dfrac{x}{y^2} \cdot f'_t$;

в) $(3u^2 \cdot \cos^2 v \cdot v^2 \cdot \cos^2 u - 1) \cdot \cos v -$
$- (2u^3 \cdot \cos^3 v \cdot v \cdot \cos u + 1) \cdot v \cdot \sin u$;
$(1 - 3u^2 \cdot v^2 \cdot \cos^2 v \cdot \cos^2 u) \cdot u \cdot \sin v +$
$+ (2u^3 \cdot v \cdot \cos^3 v \cdot \cos u + 1) \cdot \cos u$.

Производная по направлению. Градиент

Определение 13. Пусть заданы ненулевой вектор $\vec{l}$ и функция $y = f(x_1; x_2; x_3)$, определенная в некоторой окрестности точки M_0. Пусть также точка M – подвижная точка пространства, но такая, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ сонаправлен $\vec{l}$. Если существует предел

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M_0; M)},$$

то он называется *производной функции* $f(M)$ в точке M_0 *по направлению* $\vec{l}$.

Обозначение: $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$.

Теорема 5. Если функция $y = f(M)$ дифференцируема в точке M_0, то в этой точке существует производная этой функции по любому направлению, и при этом

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Напомним, что направляющие косинусы произвольного вектора $\vec{l} = \{X; Y; Z\}$ находятся по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\vec{l}|};\ \cos\beta = \frac{Y}{|\vec{l}|};\ \cos\gamma = \frac{Z}{|\vec{l}|},$$

где $|\vec{l}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

Определение 14. Вектор с координатами $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}; \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}; \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}$ называется *градиентом* функции $f(M)$ в точке M_0.

Обозначение: grad f; ∇f; grad $f(M_0)$; $\nabla f(M_0)$.

Если вектор $\vec{l}$ единичный, т. е. $|\vec{l}| = 1$, то его координатами являются направляющие косинусы $\vec{l} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$. В этом случае производная по направлению $\vec{l}$ может быть записана как скалярное произведение $\vec{l}$ на grad f:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \vec{l} \cdot \text{grad } f.$$

Вектор grad f имеет простой геометрический смысл: он показывает направление наибыстрейшего роста функции, а величина $|\text{grad } f|$ равна производной функции $f(M)$ в этом направлении.

Пример 7. а) Найти производную функции $w = x^3y^2z$ в точке $A(1; -1; 3)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, если точка B имеет координаты (0; 1; 1).

б) Найти производную функции $z = \ln(e^x + e^y)$ в начале координат по направлению вектора $\overrightarrow{OM}$, если точка M имеет координаты (1; 1).

Решение.

а) Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, его длину и направляющие косинусы:

$$\overrightarrow{AB} = \{-1; 2; -2\};\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3;$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3};\ \cos\beta = \frac{2}{3};\ \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Частные производные функции w имеют вид:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2y^2z;\ \frac{\partial w}{\partial x} = 2x^3yz;\ \frac{\partial w}{\partial x} = x^3y^2,$$

следовательно,

$$\frac{\partial w(A)}{\partial x} = 9;\ \frac{\partial w(A)}{\partial x} = -6;\ \frac{\partial w(A)}{\partial x} = 1.$$

Производная функции w по направлению $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$ в точке A равна:

$$\frac{\partial w(A)}{\partial l} = 9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + (-6)\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -7\frac{2}{3}.$$

б) В случае функции двух переменных $z(x; y)$ теорема 5 приобретает вид:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\sin\alpha,$$

где α – угол между положительным направлением оси Ox и вектором $\vec{l}$.

Для функции $z = \ln(e^x + e^y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y};$$

$$\frac{\partial z(0;\,0)}{\partial x} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial z(0;\,0)}{\partial y} = \frac{1}{2}.$$

Вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет координаты $\{1; 1\}$, при этом

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{2},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \cos\beta = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, $\dfrac{\partial z(0;0)}{\partial l} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: а) $-7\dfrac{2}{3}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 8. Найти величину и направление градиента функции:

а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ в произвольной точке $(x_0; y_0)$;

б) $w = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ в точке $(x_0; y_0; z_0)$.

Решение.

$$\text{а) } \operatorname{grad} z = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right\} = \left\{\frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}; \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right\} =$$

$$= \left\{ \frac{y}{x^2 + y^2}; \frac{-x}{x^2 + y^2} \right\}.$$

$$\text{grad } z(x_0; y_0) = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} \{y_0; -x_0\};$$

$$|\text{grad } z(x_0; y_0)| = \sqrt{\left(\frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} \right)^2 + \left(\frac{-x_0}{x_0^2 + y_0^2} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}};$$

$$\cos\alpha = \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} : \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}};$$

$$\cos\beta = \sin\alpha = \frac{-x_0}{x_0^2 + y_0^2} : \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = -\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

б) $$\text{grad } w = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x}; \frac{\partial w}{\partial y}; \frac{\partial w}{\partial z} \right\} = \frac{-1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \{x; y; z\};$$

$$|\text{grad } w\,(x_0; y_0; z_0)| = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2};$$

$$\cos\alpha = -\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}; \cos\beta = -\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}};$$

$$\cos\gamma = -\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{x_0^2 + y_0^2} \{y_0; -x_0\}$; $\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$; $\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$;

$-\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$;

б) $-\frac{1}{\sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^3}} \{x_0; y_0; z_0\}$; $\frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$;

$-\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$; $-\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$; $-\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$.

Частные производные и дифференциалы высших порядков

Определение 15. Частная производная от частной производной порядка m, $m \in N$, называется частной производной порядка $m + 1$.

Если задана функция $f(x_1; x_2; \dots ; x_n)$ и существуют ее первые частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}$, то их также можно считать функциями, обладающими, возможно, частными производными

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j}\,;\ i, j = 1, \dots, n.$$

Аналогично вводятся производные третьего порядка и т. п.

Теорема 6. Если функция $f(x_1; x_2; \dots ; x_n)$ и все ее частные производные $f'_{x_i}; f''_{x_i x_j}$; $i, j = 1, \dots, n$, определены в некоторой окрестности точки $(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$, причем производные второго порядка $f''_{x_i x_j}$ непрерывны в этой точке, то в этой точке $f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Определение 16. Если $x_1; x_2; \dots ; x_n$ являются независимыми переменными, то вторым дифференциалом d^2y функции $y = f(x_1; x_2; \dots ; x_n)$ в точке X называется выражение вида

$$d^2y(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 y(X)}{\partial x_i \partial x_j}\,dx_i\,dx_j.$$

В частности, для функции двух переменных $y = f(x_1; x_2)$

$$d^2y = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}dx_2^2\ .$$

Для дифференциалов высших порядков используется символическая формула

$$d^m y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m y.$$

Пример 9. Найти первые и вторые частные производные, первый и второй дифференциалы функций:
а) $z = e^{2x+3y}$; б) $w = \operatorname{arctg}(xyz)$.

Решение.

а) $z'_x = \left(e^{2x+3y}\right)'_x = 2 \cdot e^{2x+3y}$; $z'_y = \left(e^{2x+3y}\right)'_y = 3 \cdot e^{2x+3y}$;
$dz = e^{2x+3y}(2dx + 3dy)$;
$z''_{xx} = (z'_x)'_x = 4 \cdot e^{2x+3y}$; $z''_{yy} = (z'_y)'_y = 9 \cdot e^{2x+3y}$;
$z''_{xy} = (z'_x)'_y = 6 \cdot e^{2x+3y}$;
$d^2z = e^{2x+3y}(4dx^2 + 12dxdy + 9dy^2)$.

б) $w'_x = \left(\operatorname{arctg}(xyz)\right)'_x = \dfrac{yz}{1+x^2y^2z^2}$; $w'_y = \left(\operatorname{arctg}(xyz)\right)'_y =$

$= \dfrac{xz}{1+x^2y^2z^2}$; $w'_z = \left(\operatorname{arctg}(xyz)\right)'_z = \dfrac{xy}{1+x^2y^2z^2}$.

$$dw = \frac{1}{1+x^2y^2z^2}(yzdx + xzdy + xydz);$$

$w''_{xx} = (w'_x)'_x = \dfrac{-2xy^3z^3}{\left(1+x^2y^2z^2\right)^2}$; $w''_{yy} = (w'_y)'_y = \dfrac{-2yx^3z^3}{\left(1+x^2y^2z^2\right)^2}$;

$w''_{zz} = (w'_z)'_z = \dfrac{-2zx^3y^3}{\left(1+x^2y^2z^2\right)^2}$; $w''_{xy} = (w'_x)'_y = \dfrac{z\left(1-x^2y^2z^2\right)}{\left(1+x^2y^2z^2\right)^2}$;

$w''_{xz} = (w'_x)'_z = \dfrac{y\left(1-x^2y^2z^2\right)}{\left(1+x^2y^2z^2\right)^2}$; $w''_{yz} = (w'_y)'_z = \dfrac{x\left(1-x^2y^2z^2\right)}{\left(1+x^2y^2z^2\right)^2}$;

$$d^2w = \frac{-2}{\left(1+x^2y^2z^2\right)^2}(xy^3z^3dx^2 + yx^3z^3dy^2 + zx^3y^3dz^2 -$$
$$- z(1-x^2y^2z^2)dxdy - y(1-x^2y^2z^2)dxdz - x(1-x^2y^2z^2)dydz).$$

Ответы см. в тексте решения.

Пример 10. Найти дифференциал третьего порядка функции $z = \sin(ax + by)$.

Решение.

Воспользуемся символической формулой:

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z,$$

которая раскрывается следующим образом:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Переходим к расчету частных производных

$z'_x = a \cdot \cos(ax + by)$; $z'_y = b \cdot \cos(ax + by)$;

$z''_{xx} = -a^2 \sin(ax + by)$; $z''_{yy} = -b^2 \sin(ax + by)$;

$z''_{xy} = -ab \sin(ax + by)$;

$z'''_{xxx} = -a^3 \cos(ax + by)$;

$z'''_{yyy} = -b^3 \cos(ax + by)$;

$z'''_{xxy} = -a^2b \cos(ax + by)$;

$z'''_{xyy} = -ab^2 \cos(ax + by)$.

$d^3z = -\cos(ax + by)(a^3dx^3 + 3a^2bdx^2dy + 3ab^2dxdy^2 +$
$+ b^3dy^3) = -\cos(ax + by) \cdot (adx + bdy)^3$.

Ответ: $-\cos(ax + by) \cdot (adx + bdy)^3$.

Пример 11. Показать, что а) функция $z = \ln(x^2 + y^2)$ удовлетворяет *уравнению Лапласа:* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; б) функция $w = e^{xyz}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = xy\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2x\frac{\partial w}{\partial x} + w.$$

Решение.

а) $z'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$; $z'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$;

$$z''_{xx} = \frac{2(x^2 + y^2) - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$z''_{yy} = \frac{2(x^2 + y^2) - 4y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Следовательно,

$$z''_{xx} + z''_{yy} = \frac{2y^2 - 2x^2 + 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

что и требовалось доказать.

б) $w'_x = yze^{xyz}$; $w''_{xy} = ze^{xyz} + xyz^2e^{xyz} = (z + xyz^2)e^{xyz}$;

$w'''_{xyz} = (1 + 2xyz)e^{xyz} + (z + xyz^2)xy\, e^{xyz} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz}$.

Получаем

$xy\,w''_{xy} + 2x\,w'_x + w = (xyz + x^2y^2z^2 + xyz + 1)e^{xyz} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz} = w'''_{xyz}$, что и требовалось доказать.

Дифференцирование неявных функций

Теорема 7. Пусть функция $F(x_1; x_2; y)$ и ее частная производная $F'_y(x_1; x_2; y)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $F(x_1^0; x_2^0; y^0) = 0$;

2) функция $F(x_1; x_2; y)$ дифференцируема в окрестности точки $(x_1^0; x_2^0; y^0)$, а функция $F'_y(x_1; x_2; y)$ непрерывна в этой окрестности;

3) $F'_y(x_1^0; x_2^0; y^0) \neq 0$,

тогда в указанной окрестности функция $F(x_1; x_2; y) = 0$ определяет функцию $y = f(x_1; x_2)$, которая

1) удовлетворяет условию $y^0 = f(x_1^0; x_2^0)$;

2) дифференцируема в окрестности точки $(x_1^0; x_2^0)$, и при этом ее частные производные находятся из следующих соотношений

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0.$$

Пример 12. Найти производные функций, заданных неявно: а) $y^x - x^y = 0$; б) $e^z - xyz = 0$.

Решение.

а) Обозначим $y^x - x^y = F(x; y)$, тогда неявная функция задана уравнением $F(x; y) = 0$.

В соответствии с теоремой о производной сложной функции

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(y^x - x^y\right)'_x = y^x \ln y - yx^{y-1};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\left(y^x-x^y\right)'_y=xy^{x-1}-x^y\ln x;\ x^y=y^x;$$

следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{y^x\ln y-yx^{y-1}}{xy^{x-1}-x^y\ln x}=\frac{\dfrac{y}{x}x^y-y^x\ln y}{\dfrac{x}{y}y^x-x^y\ln x}=$$

$$=\frac{\dfrac{y}{x}y^x-y^x\ln y}{\dfrac{x}{y}y^x-y^x\ln x}=\frac{\dfrac{y}{x}-\ln y}{\dfrac{x}{y}-\ln x}=\frac{y(y-x\ln y)}{x(x-y\ln x)}.$$

б) Обозначим $e^z-xyz=F(x;y;z)$, тогда частные производные функции $z=z(x;y)$ находятся из уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0 \text{ и } \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Так как $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-yz$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}=e^z-xy$; $\dfrac{\partial F}{\partial y}=-xz$; $e^z=xyz$,

то $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-yz}{e^z-xy}=\frac{yz}{e^z-xy}=\frac{yz}{xyz-xy}=\frac{z}{x(z-1)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-xz}{e^z-xy}=\frac{xz}{e^z-xy}=\frac{xz}{xyz-xy}=\frac{z}{y(z-1)}.$$

Ответ: а) $y'=\dfrac{y(y-x\ln y)}{x(x-y\ln x)}$;

б) $z'_x=\dfrac{z}{x(z-1)}$; $z'_y=\dfrac{z}{y(z-1)}$.

Замена переменных в дифференциальных выражениях

Одним из эффективных методов преобразования дифференциальных выражений является переход к новым переменным. Рассмотрим наиболее важные в практическом отношении случаи.

1. Преобразуемое выражение содержит обыкновенные производные:

$$W = \rho(x;\ y;\ y';\ y'';\ ...;\ y^{(n)}).$$

Если необходимо перейти к новому аргументу t и новой функции u, которые связаны с x и y соотношениями:

$x = \tilde{x}(t;\ u)$ и $y = \tilde{y}(t;\ u)$,

то надо подставить эти выражения в W вместе с производными

$$y'_x = \frac{\dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial u} u'_t}{\dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial u} u'_t};\ y''_{xx} \text{ и т. д.}$$

2. Преобразуемое выражение содержит частные производные:

$$W = \rho\left(x_1;\ x_2;\ y;\ \frac{\partial y}{\partial x_1};\ \frac{\partial y}{\partial x_2};\ ...\right).$$

При переходе к новым аргументам t_1 и t_2, которые связаны со старыми x_1 и x_2 соотношениями:

$x_1 = \tilde{x}_1(t_1;\ t_2)$, $x_2 = \tilde{x}_2(t_1;\ t_2)$,

необходимо подставить эти выражения в W вместе с частными производными, которые определяются из следующих уравнений

$$\frac{\partial y}{\partial t_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1};$$

$$\frac{\partial y}{\partial t_2} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}.$$

Частные производные высших порядков вычисляются аналогично.

Пример 13. Преобразовать уравнение $y'y''' - 3y''^2 = x$, принимая y за независимую переменную.

Решение.

Перейдем от функции $y(x)$ к функции $x(y)$:

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)};$$

$$y''(x)=\left(\frac{1}{x'(y)}\right)'_x=\left(\frac{1}{x'(y)}\right)'_y\cdot y'(x)=-\frac{x''(y)}{(x'(y))^3};$$

$$y'''(x)=\left(-\frac{x''(y)}{(x'(y))^3}\right)'_x=\left(-\frac{x''(y)}{(x'(y))^3}\right)'_y\cdot y'(x)\ =$$

$$=\ \frac{3(x''(y))^2-x'''(y)\cdot x'(y)}{(x'(y))^5}.$$

Подставив полученные выражения в исходное уравнение, получаем:

$$\frac{1}{x'}\cdot\frac{3x''^2-x'''\cdot x'}{x'^5}-3\cdot\frac{x''^2}{x'^6}=x,$$

$$x'(x'''+x\cdot x'^5)=0;$$

очевидно, что $x'\neq 0$, поэтому уравнение приобретает вид

$$x'''+x\cdot x'^5=0.$$

Ответ: $x'''+x\cdot x'^5=0$.

Пример 14. Решить уравнение $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, переходя к переменным $u=x$ и $v=x^2+y^2$.

Решение.

Воспользуемся формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+2x\cdot\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial u}+2u\cdot\frac{\partial z}{\partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 0+2y\cdot\frac{\partial z}{\partial v}=2\sqrt{v-u^2}\,\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Здесь использованы соотношения

$$x=u;\ y=\sqrt{v-x^2}=\sqrt{v-u^2}.$$

Уравнение принимает вид:

$$\sqrt{v-u^2}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial u}+2u\frac{\partial z}{\partial v}\right)-u\cdot 2\sqrt{v-u^2}\,\frac{\partial z}{\partial v}=0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}+2u\frac{\partial z}{\partial v}-2u\frac{\partial z}{\partial v}=0;\qquad \frac{\partial z}{\partial u}=0\Leftrightarrow z=f(v);$$

следовательно, решение исходного уравнения имеет вид

$$z=f(x^2+y^2).$$

Ответ: $z=f(x^2+y^2)$.

Задания для самостоятельного решения

Найти область определения функций:

1. $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$. **2.** $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

3. $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$. **4.** $z=\ln(xy)$.

5. Доказать, что функция $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не имеет предела при $(x;\,y)\to(0;\,0)$

Найти пределы:

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$. **7.** $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4}$.

8. Исследовать функцию $z=\begin{cases}\dfrac{x^2\cdot y^2}{x^4+y^4}, x^2+y^2\neq 0,\\ 0, \qquad x^2+y^2=0\end{cases}$ на непрерывность в точке (0; 0).

Найти частные производные и частные дифференциалы:

9. $w=(\sin x)^{yz}$. **10.** $z=\sin\dfrac{x^2}{y}$.

11. $z=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$.

Найти приближенные значения:

12. $1{,}05^{2{,}04}$. **13.** $\sqrt{1{,}02^2+1{,}97^2}$.

Найти производные сложных функций:
14. $z=f(x+y\,;\,xy)$.
15. $z=\sin x\cdot\ln y$, $x=t^3$; $y=e^t$.
16. $z=yx^2+xy^2$; $x=u\cdot v$; $y=e^{u+v}$.

Найти производную функции по заданному направлению вектора $\overrightarrow{AB}$ в заданной точке A:
17. $w=e^{x+2y+3z}$; A (1; 1; 1); B (2; –3; 4).
18. $z=\ln(x^2+y^2+1)$; A(0; 1); B(1; 3).

Найти величину и направление градиента функции в точке A:

19. $z=\sin\left(\dfrac{x}{y^2+1}\right)$; $A(1;\,1)$. **20.** $z=x^y$; $A(2;\,3)$.

21. Найти первые и вторые частные производные функции $z=\operatorname{tg}(x^2+2y)$.

22. Найти дифференциал третьего порядка функции $z=e^{3x+2y}$.

Найти производную функции, заданной неявно:

23. $2^{x^2+y}-y=0$. **24.** $\sin(x^2+y^2)-x-y=0$.

25. Преобразовать уравнение: $y''+\dfrac{1}{x}y'+y=0$, принимая x за новую функцию; $t=xy$ – за независимую переменную.

26. Преобразовать уравнение: $y'''-x^3y''+xy'-y=0$; $x=\dfrac{1}{t}$; $y=\dfrac{u(t)}{t}$.

Ответы.

1. Внешность круга с центром (0; 0) и радиусом 2: $x^2+y^2\geq 4$;

2. Часть первой координатной четверти, ограниченная кривыми $y=x^2$ и $y=0$;

3. Часть плоскости $|y|\leq|x|$, $x\neq 0$;

4. Первая и третья четверть, не включая оси, $xy>0$;

6. a; 7. 0; 8. разрывна;

9. $\dfrac{\partial w}{\partial x}=yz\cdot(\sin x)^{yz-1}\cdot\cos x$;

$\dfrac{\partial w}{\partial y}=(\sin x)^{yz}\cdot\ln(\sin x)\cdot z$;

$\dfrac{\partial w}{\partial z}=(\sin x)^{yz}\cdot\ln(\sin x)\cdot y$;

$d_xw=yz\cdot(\sin x)^{yz-1}dx$;

$d_yw=(\sin x)^{yz}\cdot\ln(\sin x)\cdot z\cdot dy$;

$d_zw=(\sin x)^{yz}\cdot\ln(\sin x)\cdot y\cdot dz$;

10. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos\left(\dfrac{x^2}{y}\right)\cdot\dfrac{2x}{y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x^2}{y^2}\cdot\cos\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$;

7.2. Приложения дифференциального исчисления функций нескольких переменных

Формула Тейлора

Теорема 1. Пусть функция $y = f(x_1; x_2; \dots ; x_n)$ определена и непрерывна со всеми своими частными производными до порядка $m + 1$ $(m \ge 1)$ включительно в некоторой окрестности точки X_0 $(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$, тогда справедлива формула

$$f(x_1^0+\Delta x_1; x_2^0+\Delta x_2; \dots; x_n^0+\Delta x_n) = f(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0) +$$

$$+ r_m(\Delta x_1; \Delta x_2; \dots; \Delta x_n), \text{ где } r_m(\Delta x_1; \Delta x_2; \dots; \Delta x_n) =$$

$$=\frac{1}{(m+1)!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1} f(x_1^0+\theta_m\Delta x_1; \dots;$$

$$x_n^0+\theta_m\Delta x_n),\ 0 < \theta_m < 1.$$

Данная формула называется *формулой Тейлора* для функций нескольких переменных. Если использовать дифференциалы высших порядков, то формула Тейлора принимает более компактный вид:

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}d^k f(X_0) + r_m.$$

В случае X_0 $(0; 0; \dots ; 0)$ данную формулу называют формулой Маклорена. Для наиболее важного в практическом отношении случая функций двух переменных формула Тейлора имеет вид:

$$f(x_1^0+\Delta x_1; x_2^0+\Delta x_2) = f(x_1^0; x_2^0) + \frac{\partial f(x_1^0; x_2^0)}{\partial x_1}\Delta x_1 +$$

$$+\frac{\partial f(x_1^0; x_2^0)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x_1^0; x_2^0)}{\partial x_1^2}\cdot\Delta x_1^2 +\right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x\cdot\sin y;\ \frac{\partial f}{\partial y}=\sin x\cdot\cos y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\sin x\cdot\sin y;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\sin x\cdot\sin y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\cos x\cdot\cos y;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=-\cos x\cdot\sin y;\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=-\sin x\cdot\cos y;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=-\sin x\cdot\cos y;\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=-\cos x\cdot\sin y.$$

Следовательно,

$$\sin x\cdot\sin y=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+$$

$$+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right)+$$

$$+r_2\left(x-\frac{\pi}{4};y-\frac{\pi}{4}\right),$$

где $r_2\left(x-\frac{\pi}{4};y-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3!}\left(-\cos a\cdot\sin b\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3-\right.$

$$-3\sin a\cdot\cos b\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$\left.-3\cos a\cdot\sin b\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2-\sin a\cdot\cos b\cdot\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\right);$$

$$a=\frac{\pi}{4}+\theta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right);\ b=\frac{\pi}{4}+\theta\cdot\left(y-\frac{\pi}{4}\right);\ 0<\theta<1.$$

Окончательно получаем следующее разложение функции $\sin x \cdot \sin y$:

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$- \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 + r_2.$$

Ответ: а) $x_0^2 - 3y_0^2 + 2x_0y_0 - 1 + 2 \cdot (x_0 + y_0) \cdot \Delta x + 2 \cdot (x_0 - 3y_0) \cdot \Delta y + \Delta x^2 + 2 \cdot \Delta x \cdot \Delta y - 3 \cdot \Delta y^2$.

б) $$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 + r_2;$$

$$r_2 = -\frac{1}{6}\cos a \cdot \sin b \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{1}{2}\sin a \cdot \cos b \cdot$$

$$\cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\cos a \cdot \sin b \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{6}\sin a \cdot \cos b \cdot \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^3; \ a = \frac{\pi}{4} + \theta \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$b = \frac{\pi}{4} + \theta \cdot \left(y - \frac{\pi}{4}\right); \ 0 < \theta < 1.$$

Экстремумы функций нескольких переменных

Определение 1. Пусть функция $y = f(X)$ определена в окрестности точки X_0. Если для всех точек X этой окрестности $(X \neq X_0)$ выполняется неравенство $f(X) > f(X_0)$, то точка X_0 называется *точкой строгого минимума*; если же $f(X) < f(X_0)$, то X_0 называется *точкой строгого максимума*. Точки строгого максимума и минимума называются точками *строгого экстремума*.

Определение 2. Пусть функция $y = f(X)$ дифференцируема в точке X_0. Если при этом

$$df(X_0) = 0,$$

то точка X_0 называется *стационарной точкой* функции $y = f(X)$.

Очевидно, что условие стационарности равносильно обращению в ноль одновременно всех частных производных в этой точке:

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_i} = 0;\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Совокупность данных уравнений образует систему для нахождения стационарных точек.

Теорема 2 (*необходимые условия экстремума*). Пусть функция $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $X_0\ (x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$. Если X_0 – точка экстремума функции $y = f(X)$, и в этой точке существует какая-либо частная производная $\dfrac{\partial f(X_0)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, то

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_i} = 0.$$

В частности, если функция $y = f(X)$ дифференцируема в точке экстремума X_0, то эта точка является стационарной.

Теорема 3 (*достаточные условия строгого экстремума*). Пусть функция $y = f(X)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности стационарной точки X_0. Если второй дифференциал функции в точке X_0 является *положительно определенной (отрицательно определенной)* квадратичной формой, то X_0 – точка строгого минимума (максимума). Если же второй дифференциал – неопределенная квадратичная форма, то в точке X_0 экстремума нет.

Другими словами, в стационарной точке X_0 функция имеет максимум, если

$$d^2f(X_0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j < 0,\ \sum_{i=1}^{n}|dx_i| \neq 0;$$

в стационарной точке X_0 функция имеет минимум, если

$$d^2f(X_0) > 0,\ \sum_{i=1}^{n}|dx_i| \neq 0.$$

На практике знак второго дифференциала исследуется путем сведения квадратичной формы к каноническому виду или применением того или иного критерия, например, *критерия Сильвестра* положительной определенности квадратичной формы.

Напомним его содержание:

1) квадратичная форма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$, где $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, является положительно определенной тогда и только тогда, когда

$$a_{11} > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \ldots; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

2) квадратичная форма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$, где $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда

$$a_{11} < 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \ldots; (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

В случае функции двух переменных имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть функция $y = f(x_1; x_2)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности стационарной точки $\left(x_1^0; x_2^0\right)$. Если при этом $A > 0$, где

$$A = \frac{\partial^2 f\left(x_1^0; x_2^0\right)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f\left(x_1^0; x_2^0\right)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f\left(x_1^0; x_2^0\right)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2,$$ то $\left(x_1^0; x_2^0\right)$

– точка строгого экстремума, а именно строгого максимума, если $\frac{\partial^2 f\left(x_1^0; x_2^0\right)}{\partial x_1^2} < 0$, и строгого минимума, если $\frac{\partial^2 f\left(x_1^0; x_2^0\right)}{\partial x_1^2} > 0$.

Если в точке $\left(x_1^0; x_2^0\right)$ $A < 0$, то в этой точке экстремума нет.

Если же в точке $\left(x_1^0; x_2^0\right)$ $A = 0$, то данная точка может оказаться точкой экстремума, а может и не быть таковой.

Отметим, что случай $A = 0$ требует более «тонкого» анализа поведения функции в окрестности стационарной точки с использованием производных третьего порядка и выше.

Пример 2. Найти стационарные точки, точки экстремума и экстремумы следующих функций:

а) $z = x^3 + y^3 - 3xy$; б) $z = e^{x^2-y}\cdot(5 - 2x + y)$;
в) $w = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;

г) $w = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ $(x > 0;\ y > 0;\ z > 0)$.

Решение.

а) Стационарные точки функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ являются решениями следующей системы уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;\end{cases}\quad \begin{cases}3x^2 - 3y = 0,\\ 3y^2 - 3x = 0;\end{cases}\quad \begin{cases}y = x^2,\\ x^4 - x = 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x_1 = 0,\\ y_1 = 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x_2 = 1,\\ y_2 = 1.\end{cases}$$

Таким образом, исходная функция имеет две стационарные точки: (0; 0); (1; 1)

Производные второго порядка имеют вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -3.$$

В соответствии с теоремой 4 необходимо исследовать знак выражения

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$$

в каждой стационарной точке отдельно.

1) $\dfrac{\partial^2 z(0;0)}{\partial x^2} = 0;\quad \dfrac{\partial^2 z(0;0)}{\partial y^2} = 0;\quad \dfrac{\partial^2 z(0;0)}{\partial x\partial y} = -3;$

$A = -9$, $A < 0$.

Точка (0; 0) не является точкой экстремума.

2) $\dfrac{\partial^2 z(1;1)}{\partial x^2} = 6;\quad \dfrac{\partial^2 z(1;1)}{\partial y^2} = 6;\quad \dfrac{\partial^2 z(1;1)}{\partial x\partial y} = -3;$

$A = 27$, $A > 0$.

Точка (1; 1) является точкой экстремума, и поскольку $\frac{\partial^2 z(1;1)}{\partial x^2} > 0$, то это точка строгого минимума. При этом $z_{min} = z(1;\ 1) = -1$.

б) Находим стационарные точки функции $z = e^{x^2-y} \cdot (5 - 2x + y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} e^{x^2-y} \cdot 2x \cdot (5-2x+y) + e^{x^2-y} \cdot (-2) = 0, \\ e^{x^2-y} \cdot (-1) \cdot (5-2x+y) + e^{x^2-y} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(5-2x+y) - 1 = 0, \\ 5 - 2x + y - 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 - 2x + y = 1, \\ x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2, \\ x = 1. \end{cases}$$

Точка (1; –2) является стационарной точкой исходной функции.

Производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x^2-y} \cdot 2x \cdot (10x - 4x^2 + 2xy - 2) + e^{x^2-y} \cdot (10 - 8x + 2y) = e^{x^2-y} \cdot (20x^2 - 8x^3 + 4x^2y - 12x + 2y + 10);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2-y} \cdot (-2x + y + 3); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x^2-y} \cdot (4x^2 - 2xy - 8x + 2).$$

В точке (1; –2) производные второго порядка имеют следующие значения

$$\frac{\partial^2 z(1;-2)}{\partial x^2} = -2e^3; \quad \frac{\partial^2 z(1;-2)}{\partial y^2} = -e^3; \quad \frac{\partial^2 z(1;-2)}{\partial x \partial y} = 2e^3,$$

и тогда $A = 2e^6 - 4e^6 = -2e^6$, $A < 0$.

Стационарная точка (1; –2) не является точкой экстремума.

в) Находим стационарные точки функции $w = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2 = 0, \\ 2y + 4 = 0, \\ 2z - 6 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = -2, \\ z = 3. \end{cases}$$

Получена стационарная точка $(-1;\ -2;\ 3)$.

Так как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2;\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2;\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2;\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0,$$

то второй дифференциал исходной функции имеет вид $d^2w = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2$.

Очевидно, что d^2w является положительно определенной квадратичной формой; следовательно, точка $(-1;\ -2;\ 3)$ является точкой строгого минимума, при этом

$w_{min} = w(-1;\ -2;\ 3) = -14$.

Отметим, что данную функцию можно исследовать на экстремум, не привлекая аппарат дифференциального исчисления функций нескольких переменных,

$w = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z = (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 - 6z + 9) - 14;$

$w = (x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 - 14$.

Очевидно, что $w \geq -14$, при этом

$w = -14$ при $x = -1;\ y = -2;\ z = 3$.

г) Стационарные точки функции $w = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ находим из следующей системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = 1 - \dfrac{y^2}{4x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2} = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - 4x^2 = 0, \\ y^3 - 2xz^2 = 0, \\ y - z^3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = z^3, \\ z^6 - 4x^2 = 0, \\ z^9 - 2xz^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \\ z_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}, \\ y_2 = 1, \\ z_2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2}, \\ y_3 = -1, \\ z_3 = -1. \end{cases}$$

Условию задачи $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ отвечает лишь одна стационарная точка $\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$.

Находим вторые производные функции w:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{y^2}{2x^3}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{2x^2}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = -\frac{2z}{y^2}.$$

В стационарной точке $\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$ второй дифференциал имеет вид

$$d^2w = 4(dx)^2 + 3(dy)^2 + 6(dz)^2 - 4dx \cdot dy - 4 \cdot dydz,$$

или $d^2w = 2(dx)^2 + 2(dx - dy)^2 + (dy - 2dz)^2 + 2(dz)^2$, т. е. второй дифференциал является положительно определенной квадратичной формой переменных dx, dy, dz.

Следовательно, точка $\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$ является точкой минимума функции

$$w = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \text{ при этом } w_{min} = w\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right) = 4.$$

В заключение покажем, как анализ второго дифференциала может быть проведен с помощью критерия Сильвестра.

Квадратичная форма

$$4(dx)^2 + 3(dy)^2 + 6(dz)^2 - 4dx \cdot dy - 4 \cdot dydz$$

определяет матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим главные определители этой матрицы:

$$a_{11} = 4 > 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0.$$

Таким образом, квадратичная форма положительно определена, и, следовательно, точка $\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$ является точкой минимума исходной функции.

Ответ: а) стационарная точка (0; 0) не является точкой экстремума; стационарная точка (1; 1) – точка минимума; $z_{min} = -1$;

б) стационарная точка (1; −2) не является точкой экстремума;

в) стационарная точка (−1; −2; 3) является точкой минимума; $w_{min} = -14$;

г) стационарная точка $\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$ является точкой минимума; $w_{min} = 4$.

Абсолютный экстремум

Теорема 5. Пусть функция $y = f(X)$ дифференцируема в ограниченной и замкнутой области, тогда она достигает своих *наибольшего и наименьшего значений (абсолютные экстремумы)* или в стационарной точке, или в граничной точке области.

Например, если функция двух переменных $y = f(x_1; x_2)$ определена и дифференцируема в точках плоской области D, границы которой заданы параметрически:

$$x_1 = x_1(t);\ x_2 = x_2(t);\ t_1 \le t \le t_2,$$

то анализ экстремальных значений функции на границе сводится к исследованию функции одной переменной $f(x_1(t); x_2(t))$.

Пример 3. Найти наибольшие и наименьшие значения функции:

а) $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$;

б) $w = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \le 100$;

в) $z = x^2y(4 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$;

г) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ в прямоугольнике

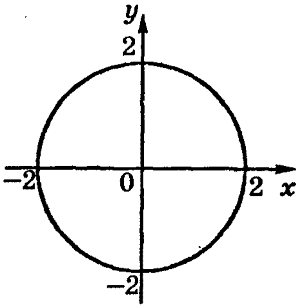
$0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

Решение.

а) 1. В соответствии с теоремой 5 исследуем значения функции в стационарных точках, координаты которых являются решением следующей системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

В стационарной точке (0; 0) функция принимает значение $z(0; 0) = 0$.



2. Переходим к анализу значений функции на границе области. Границей круга $x^2 + y^2 \le 4$ является окружность

$$x^2 + y^2 = 4$$

с центром в начале координат и радиусом 2.

Так как $y^2 = 4 - x^2$, то на границе круга исходная функция принимает вид

$$\tilde{z} = x^2 - (4 - x^2); \quad \tilde{z} = 2x^2 - 4; \; x \in [-2; 2].$$

Исследуем функцию $\tilde{z}(x)$ на наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-2; 2]$ как функцию одной переменной:

$\tilde{z}' = 4x = 0$; $x = 0$; $0 \in [-2; 2]$, и при этом $\tilde{z}(0) = -4$.

На границах отрезка $[-2; 2]$ $\tilde{z}(-2) = \tilde{z}(2) = 4$.

Если $x = 0$, то $y = \pm 2$, при этом $\tilde{z}(0) = z(0; \pm 2) = -4$.

Если $x = \pm 2$, то $y = 0$, при этом $\tilde{z}(\pm 2) = z(\pm 2; 0) = 4$.

3. Сравнивая все полученные значения функции $z(x; y)$, приходим к выводу, что функция $z = x^2 - y^2$ принимает следующие наибольшее и наименьшее значения:

$z_{\text{наиб}} = z(-2; 0) = z(2; 0) = 4$;

$z_{\text{наим}} = z(0; -2) = z(0; 2) = -4$.

б) 1. Находим стационарную точку функции $w = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ и значение функции в этой точке:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = 2x = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = 4y = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = 6z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0; \end{cases} \quad w(0;\,0;\,0) = 0.$$

2. Границей шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 100$ является сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, центр которой находится в начале координат и которая имеет радиус 10. На сфере исходная функция $w(x;\,y;\,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ приобретает вид

$\tilde{w}(x;\,y) = x^2 + 2y^2 + 3(100 - x^2 - y^2)$;

$\tilde{w}(x;\,y) = 300 - 2x^2 - y^2$, при этом функция $\tilde{w}(x;\,y)$ определена в точках круга $x^2 + y^2 \le 100$.

Стационарная точка функции $\tilde{w}(x;\,y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = -4x = 0, \\ \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial y} = -2y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases} \quad \tilde{w}(0;\,0) = 300.$$

Отметим, что при $x = 0$; $y = 0$; переменная z принимает два значения $z_{1,2} = \pm 10$. Следовательно, $w(0;\,0;\,\pm 10) = 300$.

Границей круга $x^2 + y^2 \le 100$ является окружность $x^2 + y^2 = 100$, поэтому функция $\tilde{w}(x;\,y)$ в точках окружности приобретает вид

$\tilde{\tilde{w}}(x) = 300 - 2x^2 - y^2 = 300 - 2x^2 - (100 - x^2)$;

$\tilde{\tilde{w}}(x) = 200 - x^2$, где $x \in [-10;\,10]$.

Стационарная точка функции $\tilde{\tilde{w}}(x)$:

$\tilde{\tilde{w}}'(x) = -2x = 0$; $x = 0$; $\tilde{\tilde{w}}(0) = 200$.

Отметим, что при $x = 0$ переменные y и z принимают следующие значения: $y_{1,2} = \pm 10$; $z = 0$. Следовательно, $w(0;\,\pm 10;\,0) = 200$.

Значение функции $\tilde{\tilde{w}}(x)$ на краях отрезка $[-10;\,10]$:

$$\tilde{\tilde{w}}(\pm 10) = 100.$$

Но поскольку при $x = \pm 10$ переменные y и z равны 0, то $w(\pm 10;\,0;\,0) = 100$.

3. Среди всех полученных значений функции $w(x;\,y;\,z)$ выбираем наибольшее и наименьшее

$w_{\text{наиб}} = w(0;\,0;\,\pm 10) = 300$; $\quad w_{\text{наим}} = w(0;\,0;\,0) = 0$.

в) 1. Стационарные точки функции $z = x^2y(4 - x - y)$ определяются из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 8xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 - x^3 - 2x^2y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) = 0, \\ x^2(4 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

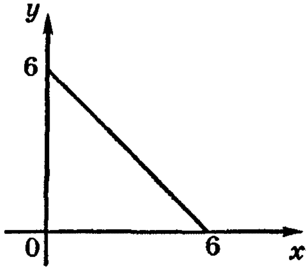
Координаты стационарных точек, расположенных внутри треугольника $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 6$, удовлетворяют условиям $x > 0$, $y > 0$.

Исходная система приобретает вид:

$$\begin{cases} 8 - 3x - 2y = 0, \\ 4 - x - 2y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 - 2y, \\ 8 - 3(4 - 2y) - 2y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1; \end{cases}$$

и при этом $z(2; 1) = 4$.

2. Поскольку граница треугольника состоит из отрезков прямых $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 6$, рассмотрим исходную функцию отдельно на каждом из этих участков:



1) $x = 0$; $0 \le y \le 6$, тогда $z(0; y) = 0$;

2) $y = 0$; $0 \le x \le 6$, тогда $z(x; 0) = 0$;

3) $x + y = 6$; $0 \le x \le 6$, тогда функция $z(x; y)$ принимает вид

$\tilde{z}(x) = x^2(6 - x) \cdot (-2)$;

$\tilde{z}(x) = 2x^3 - 12x^2$; $x \in [0; 6]$.

Стационарные точки функции $\tilde{z}(x)$:

$\tilde{z}(x) = 6x^2 - 24x = 6x(x - 4)$; $x_1 = 0$; $x_2 = 4$;

$\tilde{z}(0) = 0$; $\tilde{z}(4) = -64$.

Значения функции $\tilde{z}(x)$ на концах отрезка

$\tilde{z}(0) = 0$; $\tilde{z}(6) = 0$.

Таким образом, $z(0; 6) = 0$; $z(6; 0) = 0$; $z(4; 2) = -64$.

3. Сравнивая все полученные значения функции $z(x; y)$, получаем

$z_{\text{наиб}} = z(2; 1) = 4$; $z_{\text{наим}} = z(4; 2) = -64$.

г) 1. Определим стационарные точки функции $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, попадающие внутрь прямоугольника $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$; $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos x + \cos(x+y) = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos y + \cos(x+y) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x - \cos y = 0, \\ \cos y + \cos(x+y) = 0. \end{cases}$$

Поскольку в задаче речь идет только об острых положительных углах, условие $\cos x = \cos y$ равносильно условию $x = y$, следовательно,

$$\begin{cases} x = y, \\ \cos x + \cos 2x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y, \\ \cos x = -1, \cos x = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

для углов $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ $\cos x \ge 0$, поэтому

$$\begin{cases} x = y, \\ \cos x = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3}, \\ y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

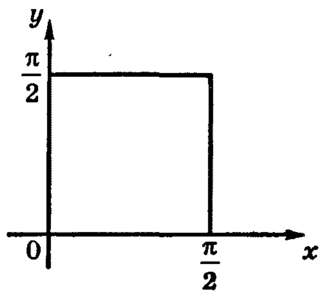
Таким образом, исходная функция в заданной области имеет единственную стационарную точку $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right)$, при этом $z\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

2. Рассмотрим функцию на каждой из четырех сторон прямоугольника.

1) $x = 0;\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ тогда $z(0; y) = 2\sin y$.

На отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin y$ возрастает, ограничимся значениями функции в концах отрезка:

$z(0; 0) = 0$; $z\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.



2) $y=0;\ 0\le x\le \frac{\pi}{2}$, тогда $z(x;\ 0)=2\sin x$.

Аналогичным образом получаем

$z(0;\ 0)=0;\ z\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)=2.$

3) $x=\frac{\pi}{2};\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}$, тогда

$\tilde{z}(y)=z\left(\frac{\pi}{2};\ y\right)=1+\sin y+\cos y.$

Стационарные точки функции $\tilde{z}(y)$ на интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$: $\tilde{z}'=\cos y-\sin y=0;\ y=\frac{\pi}{4};\ \tilde{z}\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\sqrt{2}$.

Значения функции $\tilde{z}(y)$ в концах отрезка:

$\tilde{z}(0)=2;\ \tilde{z}\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.$

Следовательно, $z\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}\right)=1+\sqrt{2}$;

$z\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)=z\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)=2.$

4) $y=\frac{\pi}{2};\ 0\le x\le \frac{\pi}{2}$, тогда

$\tilde{\tilde{z}}(y)=z\left(x;\ \frac{\pi}{2}\right)=1+\sin x+\cos x.$

Аналогично предыдущему пункту получаем

$z\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)=1+\sqrt{2};\ z\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)=z\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)=2.$

3. Сравнивая все значения функции $z(x;\ y)$, получаем:

$z_{\text{наиб}}=z\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2};\ z_{\text{наим}}=z(0;\ 0)=0.$

Ответ: а) $z_{\text{наиб}}=z(-2;\ 0)=z(2;\ 0)=4;\ z_{\text{наим}}=z(0;\ -2)=$
$=z(0;\ 2)=-4;$

б) $w_{\text{наиб}}=w(0;\ 0;\ \pm 10)=300;\ w_{\text{наим}}=w(0;\ 0;\ 0)=0;$

в) $z_{\text{наиб}}=z(2;\ 1)=4;\ z_{\text{наим}}=z(4;\ 2)=-64;$

г) $z_{\text{наиб}} = z\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $z_{\text{наим}} = z(0; 0) = 0$.

Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Определение 3. Пусть E – множество точек X n-мерного евклидова пространства E^n, для которых выполняются условия

$$g_i(X) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ m < n.$$

Точка $X_0 \in E^n$ называется точкой *условного экстремума* функции $y = f(X)$ относительно соотношений $g_i(X) = 0$, если она является точкой обычного экстремума этой функции, рассматриваемой только на множестве E.

Если система уравнений $g_i(x_1; x_2; \ldots; x_n) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $m < n$ разрешима относительно m переменных $x_{n-m+1}; \ldots; x_n$:

$$x_{n-m+j} = h_j(x_1; x_2; \ldots; x_{n-m}) = h_j(\tilde{X}),\ j = 1, 2, \ldots, m,$$

то вопрос об условном экстремуме функции $y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ равносилен вопросу об обычном экстремуме функции

$y = f(\tilde{X}; h_1(\tilde{X}); \ldots; h_m(\tilde{X}))$, где $\tilde{X} = (x_1; x_2; \ldots; x_{n-m})$.

На практике, однако, или принципиально невозможно выразить из уравнений $g_i(X) = 0$ группу переменных, или это может оказаться слишком громоздкой операцией. В этом случае можно эффективно использовать метод множителей Лагранжа.

Определение 4. Функция $L(X) = f(X) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i(X)$, где λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ – постоянные множители, называется *функцией Лагранжа*.

Теорема 6. Если в точке X_0 выполняются условия:

$$g_i(X_0) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

точка X_0 является стационарной точкой для функции Лагранжа, и если второй дифференциал функции Лагранжа в этой точке является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ при условии, что они удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial g_i(X_0)}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial g_i(X_0)}{\partial x_n} dx_n = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

то точка X_0 является точкой условного строгого минимума (максимума) для функции $y = f(X)$ относительно условий $g_i(X) = 0$.

Пример 4. Найти точки условного экстремума и значения условных экстремумов функций:

а) $z = xy$, если $x + y = 1$,

б) $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, если $x - y = \dfrac{\pi}{4}$,

в) $w = x - 2y + 2z$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

г) $w = xyz$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

Решение.

а) Поскольку переменная y легко выражается из уравнения

$$x + y = 1,$$

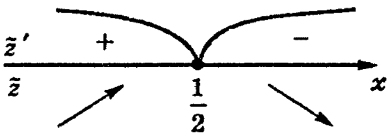
то условные экстремумы функции $z = xy$ находятся как обычные экстремумы функции

$$\tilde{z}(x) = x \cdot (1 - x); \; \tilde{z}(x) = x - x^2;$$

Стационарная точка функции $\tilde{z}(x)$:

$$\tilde{z}'(x) = 1 - 2x; \; \tilde{z}'(x) = 0; \; x = \frac{1}{2}.$$

Поскольку



то $x = \dfrac{1}{2}$ – точка максимума.

Так как при $x = \dfrac{1}{2}$ переменная y принимает значение

$$y = \frac{1}{2}, \text{ то } z_{max} = z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

б) Из условия $x - y = \dfrac{\pi}{4}$ получаем:

$$y = x - \frac{\pi}{4}.$$

Преобразуем с учетом этого функцию $z(x, y)$

$$\tilde{z}(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \cos 2x}{2} +$$

$$+ \frac{1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{2};$$

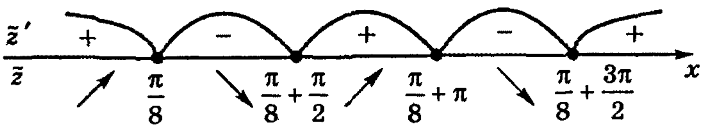
$$\tilde{z}(x) = 1 + \frac{1}{2}(\cos 2x + \sin 2x).$$

Находим стационарные точки функции $\tilde{z}(x)$:

$\tilde{z}(x) = -\sin 2x + \cos 2x$; $\tilde{z}'(x) = 0$; $\sin 2x - \cos 2x = 0$;

$\operatorname{tg} 2x = 1$; $2x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$; $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2} n,\ n \in Z$.

Для определения типа экстремума находим знаки про изводной функции $\tilde{z}(x)$ методом интервалов



Очевидно, что точки $x = \dfrac{\pi}{8} + \pi n$ – точки максимума, точки $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ – точки минимума.

Исходная функция $z(x;\, y)$ достигает максимума в точках с координатами

$$x = \frac{\pi}{8} + \pi n, \quad y = -\frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in Z,$$

при этом

$$z_{max} = \cos^2\left(\frac{\pi}{8} + \pi n\right) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{8} + \pi n\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Функция $z(x;\, y)$ достигает минимума в точках с координатами

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad y = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$z_{min} = \cos^2\left(\frac{5\pi}{8} + \pi n\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8} + \pi n\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

в) Применим метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид

$L(x;\, y;\, z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

Стационарные точки и значения параметра λ определяются из следующей системы

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=1+2x\lambda=0;\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=-2+2y\lambda=0;\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=2+2z\lambda=0;\\ x^2+y^2+z^2=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x=-\dfrac{1}{2\lambda};\\ y=\dfrac{1}{\lambda};\\ z=-\dfrac{1}{\lambda};\\ x^2+y^2+z^2=1;\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda_1=\dfrac{3}{2};\\ x_1=-\dfrac{1}{3};\\ y_1=\dfrac{2}{3};\\ z_1=-\dfrac{2}{3};\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda_2=-\dfrac{3}{2};\\ x_2=\dfrac{1}{3};\\ y_2=-\dfrac{2}{3};\\ z_2=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается путем анализа знака второго дифференциала функции Лагранжа в стационарных точках. Следует, однако, помнить, что переменные x, y и z (а значит, и их дифференциалы!) уже не являются независимыми. В частности, дифференцируя условие $x^2+y^2+z^2=1$, получаем

$$2xdx+2ydy+2zdz=0;\qquad dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy.$$

Поэтому

$$dL=\frac{\partial L}{\partial x}dx+\frac{\partial L}{\partial y}dy+\frac{\partial L}{\partial z}dz;\qquad dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy.$$

$$d^2L=\frac{\partial^2L}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2L}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2L}{\partial z^2}dz^2+$$

$$+2\left(\frac{\partial^2L}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2L}{\partial y\partial z}dydz+\frac{\partial^2L}{\partial x\partial z}dxdz\right)+\frac{\partial L}{\partial z}d^2z.$$

1) Рассмотрим случай $\lambda=\dfrac{3}{2}$ и стационарную точку $M_1\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

$$\frac{\partial^2L(M_1)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2L(M_1)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2L(M_1)}{\partial z^2}=2\lambda=3;$$

$$\frac{\partial^2L(M_1)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2L(M_1)}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2L(M_1)}{\partial x\partial z}=0;\quad \frac{\partial L(M_1)}{\partial z}=0;$$

$$d^2L(M_1)=3(dx^2+dy^2+dz^2),\ dz=\frac{1}{2}dx+dy;$$

то есть $d^2L(M_1)$ – положительно определенная квадратичная форма переменных dx и dy; следовательно, M_1 – точка минимума функции Лагранжа и точка условного минимума функции $w = x - zy$ при этом

$$w_{min} = w\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) = -3.$$

2) Рассмотрим случай $\lambda = -\frac{3}{2}$ и стационарную точку $M_2\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Получаем $d^2L(M_2) = -3(dx^2 + dy^2 + dz^2)$,

$dz = -\frac{1}{2}dx + dy.$

Поскольку $d^2L(M_2)$ – отрицательно определенная квадратичная форма относительно dx и dy, то M_2 – точка максимума функции Лагранжа и точка условного максимума функции $w = x - 2y + 2z$.

$$w_{max} = w\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = 3.$$

г) Условные экстремумы функции $w = xyz$ можно находить как условные экстремумы функции $\tilde{w}(x; y)$, которая получается подстановкой в функцию $w = xyz$ (и в условие $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) выражения $z = -x - y$. Более того, поскольку условий, связывающих x, y и z – два, в принципе можно выразить из них две переменные, например y и z, через x, тогда функция $w = xyz$ преобразуется в функцию одной переменной $\tilde{\tilde{w}}(x)$, которая может быть исследована на экстремумы традиционным образом.

Тем не менее проведем анализ функции $w = xyz$ методом множителей Лагранжа, чтобы убедиться в его эффективности и для случая, когда переменные x, y, z связаны несколькими условиями.

Функция Лагранжа имеет вид:

$L(x; y; z) = xyz + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z)$.

Стационарные точки и значения параметров λ_1 и λ_2 находятся из следующей системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = yz + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0, & (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = xz + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0, & (2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = xy + 2z\lambda_1 + \lambda_2 = 0, & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, & (4) \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Если из уравнения (1) вычесть уравнение (2); из (2) вычесть (3); уравнение (3) заменить из сумму (1), (2) и (3); в уравнении (4) выделить полный квадрат

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz),$$

то система приобретает вид:

$$\begin{cases} (y - x)(z - 2\lambda_1) = 0, \\ (z - y)(x - 2\lambda_1) = 0, \\ xy + yz + xz + 2\lambda_1(x + y + z) + 3\lambda_2 = 0, \\ (x + y + z)^2 - 2 \cdot (xy + yz + xz) = 1, \\ x + y + z = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y - x)(z - 2\lambda_1) = 0, \\ (z - y)(x - 2\lambda_1) = 0, \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{6}, \\ xy + yz + xz = -\dfrac{1}{2}, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Дальнейшее решение громоздко, но очевидно. Ограничимся перечислением полученных ответов:

$$\begin{cases}\lambda_{1,1}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}},\\ \lambda_{2,1}=\dfrac{1}{6},\\ x_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ y_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ z_1=-\dfrac{2}{\sqrt{6}};\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda_{1,2}=-\dfrac{1}{2\sqrt{6}},\\ \lambda_{2,2}=\dfrac{1}{6},\\ x_2=-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ y_2=-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ z_2=\dfrac{2}{\sqrt{6}};\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda_{1,3}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}},\\ \lambda_{2,3}=\dfrac{1}{6},\\ x_3=-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\\ y_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ z_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_{1,4}=-\dfrac{1}{2\sqrt{6}},\\ \lambda_{2,4}=\dfrac{1}{6},\\ x_4=\dfrac{2}{\sqrt{6}},\\ y_4=-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ z_4=-\dfrac{1}{\sqrt{6}};\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda_{1,5}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}},\\ \lambda_{2,5}=\dfrac{1}{6},\\ x_5=\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ y_5=-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\\ z_5=\dfrac{1}{\sqrt{6}};\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda_{1,6}=-\dfrac{1}{2\sqrt{6}},\\ \lambda_{2,6}=\dfrac{1}{6},\\ x_6=-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\\ y_6=\dfrac{2}{\sqrt{6}},\\ z_6=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}.\end{cases}$$

Из условий, связывающих переменные x, y и z, получаем систему уравнений, связывающих их дифференциалы:

$$\begin{cases}xdx+ydy+zdz=0,\\ dx+dy+dz=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}dy=\dfrac{z-x}{y-z}dx,\\ dz=\dfrac{x-y}{y-z}dx.\end{cases}$$

Второй дифференциал функции Лагранжа имеет вид:

$$d^2L=\frac{\partial^2L}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2L}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2L}{\partial z^2}dz^2\ +$$

$$+2\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}\right)+\frac{\partial L}{\partial y}d^2y+\frac{\partial L}{\partial z}d^2z.$$

Очевидно, что $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 L}{\partial z^2}=2\lambda_1$,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}=x+y+z;$$

во всех стационарных точках: $\dfrac{\partial L}{\partial y}=\dfrac{\partial L}{\partial z}=0;\ x+y+z=0$, поэтому $d^2L=2\lambda_1(dx^2+dy^2+dz^2)$.

Вне зависимости от стационарной точки d^2L является определенной квадратичной формой, знак которой зависит только от знака λ_1.

Точки $M_1\left(\dfrac{1}{\sqrt6};\dfrac{1}{\sqrt6};-\dfrac{2}{\sqrt6}\right)$; $M_2\left(-\dfrac{2}{\sqrt6};\dfrac{1}{\sqrt6};\dfrac{1}{\sqrt6}\right)$; $M_3\left(\dfrac{1}{\sqrt6};-\dfrac{2}{\sqrt6};\dfrac{1}{\sqrt6}\right)$, которым соответствует значение $\lambda_1=\dfrac{1}{2\sqrt6}>0$, являются точками условного минимума исходной функции $w=xyz$. При этом

$$w_{min}=w(M_1)=w(M_2)=w(M_3)=-\frac{1}{3\sqrt6}.$$

Точки $M_4\left(-\dfrac{1}{\sqrt6};-\dfrac{1}{\sqrt6};\dfrac{2}{\sqrt6}\right)$; $M_5\left(\dfrac{2}{\sqrt6};-\dfrac{1}{\sqrt6};-\dfrac{1}{\sqrt6}\right)$; $M_6\left(-\dfrac{1}{\sqrt6};\dfrac{2}{\sqrt6};-\dfrac{1}{\sqrt6}\right)$, которым соответствует значение $\lambda_1=-\dfrac{1}{2\sqrt6}<0$, являются точками условного максимума функции $w=xyz$:

$$w_{max}=w(M_4)=w(M_5)=w(M_6)=\frac{1}{3\sqrt6}.$$

Ответ: а) $z_{max} = z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$;

б) $z_{max} = z\left(\frac{\pi}{8} + \pi n; -\frac{\pi}{8} + \pi n\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$z_{min} = \left(\frac{5}{8}\pi + \pi n; \frac{3}{8}\pi + \pi n\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $n \in Z$;.

в) $w_{max} = w\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = 3$; $w_{min} = w\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) = -3$;

г) $w_{max} = w\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = w\left(\frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$= w\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{6}}$;

$w_{min} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = w\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right) =$

$= w\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

Геометрические приложения

Касательная прямая и нормальная плоскость к пространственной кривой

Если кривая задана параметрически:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t),$$

то касательная прямая в точке $X_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

где t_0 – значение параметра, соответствующего точке X_0. Нормальная плоскость задается уравнением

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной явно

Если поверхность задана явно: $z = f(x; y)$, то в точке $X_0(x_0; y_0; z_0)$ она обладает касательной плоскостью

$$z - z_0 = \frac{\partial z(X_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z(X_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

и нормалью $\dfrac{x - x_0}{\dfrac{\partial z(X_0)}{\partial x}} = \dfrac{y - y_0}{\dfrac{\partial z(X_0)}{\partial y}} = \dfrac{z - z_0}{-1}$.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной неявно

Если поверхность задана неявно: $F(x;\ y;\ z) = 0$, то в точке $X_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ она обладает касательной плоскостью

$$\frac{\partial F(X_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(X_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(X_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

и нормалью $\dfrac{x - x_0}{\dfrac{\partial F(X_0)}{\partial x}} = \dfrac{y - y_0}{\dfrac{\partial F(X_0)}{\partial y}} = \dfrac{z - z_0}{\dfrac{\partial F(X_0)}{\partial z}}$.

Особые точки плоских кривых

Определение 5. Если функция $F(x;\ y)$ дифференцируема в точке $X_0(x_0;\ y_0)$, и при этом $F(x_0;\ y_0) = F'_x(x_0;\ y_0) = F'_y(x_0;\ y_0) = 0$, то точка X_0 называется *особой точкой* кривой $F(x;\ y) = 0$.

Определение 6. Если функция $F(x;\ y)$ дважды непрерывно дифференцируема в изолированной особой точке $X_0(x_0;\ y_0)$, частные производные $F''_{xx}(X_0)$, $F''_{yy}(X_0)$, $F''_{zz}(X_0)$ не обращаются в этой точке в ноль одновременно, и при этом

$$\Delta = F''_{xx}(X_0) \cdot F''_{yy}(X_0) - (F''_{xy}(X_0))^2,$$

тогда, если

$\Delta > 0$, то X_0 – *изолированная точка*,

$\Delta < 0$, то X_0 – *двойная точка (узел)*,

$\Delta = 0$, то X_0 – *точка возврата* или *изолированная точка*.

Пример 5. Вывести уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к пространственным кривым:

а) $x = \sin^2 t$; $y = \sin 2t$; $z = \cos^2 t$ в точке $t = \dfrac{\pi}{4}$;

б) $y = x$; $z = x^2$ в точке $M(1;\ 1;\ 1)$.

в) Вывести уравнение касательной и нормальной прямой к плоской кривой $\cos xy = x + 2y$ в точке (1; 0).

Решение.

а) Пространственная кривая задана параметрически

$$x'(t) = (\sin^2 t)' = 2\sin t \cdot \cos t = \sin 2t;\ x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

$$x_0 = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2};$$

$$y'(t) = (\sin 2t)' = 2\cos 2t;\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0;\ y_0 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

$$z'(t) = (\cos^2 t)' = -2\cos t \cdot \sin t = -\sin 2t;\ z'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1;$$

$$z_0 = z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Уравнение касательной прямой:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)};\quad \frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - 1}{0} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-1};$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0;$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) - \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0;\ x - z = 0.$$

Отметим, что появление 0 в знаменателе пропорции носит формальный характер. Фактически это означает, что $y - 1 = 0$, и направляющий вектор прямой имеет координаты (1; 0; −1).

б) Пространственная кривая задана явно; переменная x играет роль параметра

$x' = 1;\ x'(1) = 1;\ x_0 = 1;$
$y' = 1;\ y'(1) = 1;\ y_0 = 1;$
$z' = 2x;\ z'(1) = 2;\ z_0 = 1.$

Уравнение касательной прямой:

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{y'(x_0)} = \frac{z - z_0}{z'(x_0)};\quad \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{2};$$

уравнение нормальной плоскости:

$$(x - x_0) + y'(x_0)(y - y_0) + z'(x_0)(z - z_0) = 0;$$
$$(x - 1) + (y - 1) + 2(z - 1) = 0;\ x + y - 2z - 4 = 0.$$

в) Плоская кривая задана неявно; дифференцируем это выражение по переменной x, считая y – функцией от переменной x:

$-\sin(xy)\cdot(y+xy')=1+2y'$;

$$y'=-\frac{1+y\cdot\sin(xy)}{x\cdot\sin(xy)+2};\quad y'(1;0)=-\frac{1}{2}.$$

Уравнение касательной прямой:

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)};\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{-\frac{1}{2}};\quad x+2y-1=0.$$

Уравнение нормальной прямой:

$(x-x_0)+y'(x_0)\cdot(y-y_0)=0$;

$$(x-1)-\frac{1}{2}(y-0)=0;\quad 2x-y-2=0.$$

Ответ: а) $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-1};\quad x-z=0;$

б) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2};\quad x+y-2z-4=0;$

в) $x+2y-1=0;\quad 2x-y-2=0.$

Пример 6. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности: а) $z=xy$ в точке $(1;\ 1;\ 1)$;

б) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точке $\left(1;1;\dfrac{\pi}{4}\right)$; в) $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$ в точке $(2;\ 2;\ 1)$.

Решение.

а) Поскольку

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y;\ \dfrac{\partial z(1;1)}{\partial x}=1;\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x;\ \dfrac{\partial z(1;1)}{\partial y}$, то касательная плоскость задается уравнением

$z-1=(x-1)+(y-1);\ x+y-z-1=0,$

а нормаль к поверхности имеет вид

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}.$$

б) Так как $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{y}{x^2+y^2};$

$$\frac{\partial z(1;1)}{\partial x}=-\frac{1}{2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2};\ \frac{\partial z(1;1)}{\partial y}=\frac{1}{2},$$

то получаем следующее уравнение касательной плоскости:

$$z-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1);\quad x-y+2z-\frac{\pi}{2}=0.$$

Уравнение нормали к данной поверхности:

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{\frac{1}{2}}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-1}\ \text{или}\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}.$$

в) Запишем уравнение поверхности в виде $F(x;y;z)=0$:

$$2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}-8=0,$$

тогда $\dfrac{\partial F}{\partial x}=2^{\frac{x}{z}}\cdot\ln 2\cdot\dfrac{1}{z};\quad \dfrac{\partial F(2;2;1)}{\partial x}=4\ln 2;$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2^{\frac{y}{z}}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{z};\quad \frac{\partial F(2;2;1)}{\partial y}=4\ln 2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2^{\frac{x}{z}}\cdot\ln 2\cdot\left(-\frac{x}{z^2}\right)+2^{\frac{y}{z}}\cdot\ln 2\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right);$$

$$\frac{\partial F(2;2;1)}{\partial z}=-16\ln 2.$$

Уравнение касательной плоскости:
$4\ln 2\cdot(x-2)+4\ln 2\cdot(y-2)-16\ln 2\cdot(z-1)=0,$
$x+y-4z=0.$
Уравнение нормали к поверхности:

$$\frac{x-2}{4\ln 2}=\frac{y-2}{4\ln 2}=\frac{z-1}{-16\ln 2}\ \text{или}\ \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}.$$

Ответ: а) $x+y-z-1=0;\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1};$

б) $x-y+2z-\dfrac{\pi}{2}=0;\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-\frac{\pi}{4}}{2};$

в) $x + y - 4z = 0;\ \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-4}$.

Пример 7. Найти особые точки плоских кривых и указать их тип:

а) $x^3 + y^3 + 10xy = 0$; б) $x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 0$; в) $y^2 - x^3 = 0$.

Решение.

а) $F(x;\, y) = x^3 + y^3 + 10xy\ ;\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 10y\ ;$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + 10x.$

Особые точки удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 10xy = 0, \\ 3x^2 + 10y = 0, \\ 3y^2 + 10x = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

(0; 0) – единственное решение системы. Точка (0; 0) – особая точка исходной кривой. Определим ее тип:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x;\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6y;\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 10;$$

$$\frac{\partial^2 F(0;\, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F(0;\, 0)}{\partial y^2} = 0;\ \frac{\partial^2 F(0;\, 0)}{\partial x \partial y} = 10;$$

$\Delta = -100$, $\Delta < 0$,

следовательно, (0; 0) – двойная точка (узел).

б) $F(x;\, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2\ ,\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 - 2x\ ;$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = 4x^3 - 2y.$

Находим особые точки:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 0, \\ 2x(2x^2 - 1) = 0, \\ 2y(2y^2 - 1) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 0, \\ x_1 = 0;\ x_{2,3} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y_1 = 0;\ y_{2,3} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0; \\ y = 0. \end{cases}$$

Определим тип особой точки (0; 0):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12x^2 - 2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 12y^2 - 2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 F(0;\,0)}{\partial x^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 F(0;\,0)}{\partial y^2} = -2;$$

$\Delta = 4$, $\Delta > 0$,

следовательно, (0; 0) – изолированная точка.

в) $F(x;\, y) = y^2 - x^3$; $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -3x^2$; $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y$.

Очевидно, что единственной особой точкой является точка (0; 0). Определим ее тип:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -6x; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 F(0;\,0)}{\partial x^2} = 0;$$

$\Delta = 0$, следовательно, (0; 0) – точка возврата.

Ответ: а) (0; 0) – двойная точка;

б) (0; 0) – изолированная точка;

в) (0; 0) – точка возврата.

Задания для самостоятельного решения

1. Разложить по формуле Тейлора функцию $z = x^3 - x^2 + y^2 + x + y + 1$ в окрестности точки $A(1;\, 1)$.

2. Разложить в ряд Тейлора функцию $e^x \cdot \sin y$ в окрестности произвольной точки $A(x;\, y)$, ограничившись членами третьего порядка.

Найти стационарные точки, точки экстремума и экстремумы функций:

3. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

4. $z = xy \cdot \ln(x^2 + y^2)$.

5. $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций:

6. $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

7. $z = x^2 - xy + y^2$, если $|x| + |y| \le 1$.

Найти точки условного экстремума и значения условных экстремумов функций:

8. $z = x + y$, если $x^2 + y^2 = 1$.

9. $z = x^2 + y^2$, если $x + y = 1$.

10. Вывести уравнение касательной прямой и нормальной плоскости для кривой $x = \cos t$; $y = \cos t$; $z = \sqrt{2}\sin t$ в точке $t = \dfrac{\pi}{2}$.

11. Вывести уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1;\ 2;\ 5)$.

12. Найти особые точки кривых, указать их тип:
а) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; б) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Ответы:

1. $4 + 2(x-1) + 3(y-1) + 2(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-1)^3$;

2. $e^x(\sin y + \Delta x\cdot\sin y + \Delta y\cos y + \dfrac{1}{2}(\Delta x^2\cdot\sin y +$
$+ 2\Delta x\cdot\Delta y\cdot\cos y - \Delta y^2\cdot\sin y) + \dfrac{1}{6}(\Delta x^3\cdot\sin y +$
$+ 3\cdot\Delta x^2\cdot\Delta y\cdot\cos y - 3\Delta x\cdot\Delta y^2\cdot\sin y - \Delta y^3\cdot\cos y)) + r_3(\Delta x;\ \Delta y)$;

3. $z_{min} = z(1;\ 1) = z(-1;\ -1) = -2$; в стационарной точке $(0;\ 0)$ экстремума нет;

4. $z_{min} = z\left(\dfrac{1}{\sqrt{2e}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right) = z\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2e}};\ -\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$;
$z_{max} = z\left(\dfrac{1}{\sqrt{2e}};\ -\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right) = z\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2e}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right) = \dfrac{1}{2e}$; в стационарных точках $(0;\ 1)$; $(0;\ -1)$; $(1;\ 0)$; $(-1;\ 0)$ экстремумов нет;

5. $z_{min} = z(0;\ 0) = 0$; в точке $\left(-\dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{2}\right)$ экстремума нет;

6. $z_{\text{наим}} = z(0;\ 0) = 0$; $z_{\text{наиб}} = z(0;\ 1) = z(0;\ -1) = \dfrac{3}{e}$;

7. $z_{\text{наим}} = z(0;\ 0) = 0$; $z_{\text{наиб}} = z(0;\ \pm 1) = z(\pm 1;\ 0) = 1$;

8. $z_{min} = z\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$; $z_{max} = z\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$;

9. $z_{max} = z\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$;

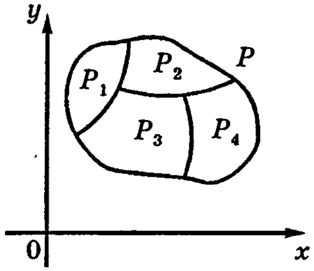
10. $x = y = -(z - \sqrt{2})$; $x + y = 0$;

11. $2x + 4y - z - 5 = 0$; $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-5}{-1}$;

12. *а*) $(0;\ 0)$ – двойная точка; б) $(0;\ 0)$ – двойная точка.

7.3. Интегральное исчисление функций нескольких переменных

Двойные интегралы



Рассматривается произвольная ограниченная *квадрируемая* область P. На этом множестве определена функция $z = f(x; y)$. Область P разбита на конечное число подобластей $P_1; P_2; \dots ; P_n$, таких что они попарно не пересекаются, а их объединение есть P. В каждой подобласти P_i, $i = 1; \dots ; n$ выбирается произвольным образом точка $M_i(x_i; y_i)$, после чего вычисляется значение функции в этой точке $f(M_i) = f(x_i; y_i)$.

Выражение вида

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \cdot S_i,$$

где $S_1; S_2; \dots ; S_n$ – площади подобластей $P_1; P_2; \dots ; P_n$, называется *интегральной суммой* функции $z = f(x; y)$.

Обозначим λ – наибольший из диаметров подобластей P_i (под диаметром области понимается наибольшее расстояние между точками этой области).

Определение 1. Если существует конечный предел интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$, то этот предел называется двойным интегралом от функции $f(x; y)$ по области P и обозначается

$$\iint\limits_P f(x; y)\,dx\,dy,$$

при этом сама функция называется интегрируемой на области P.

Свойства двойного интеграла

1. Если функция $f(x; y)$ непрерывна в области P, то она интегрируема на этой области.

2. Если значения функции $f(x; y)$, интегрируемой на области P , произвольно изменить на некоторой подобласти $\tilde{P}$, площадь которой равна 0, сохранив при этом ее ограниченность, то величина двойного интеграла по области P сохраняется.

3. Если $P = P_1 \cup P_2$; $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, то

$$\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy = \iint\limits_{P_1} f(x;y)\,dx\,dy + \iint\limits_{P_2} f(x;y)\,dx\,dy.$$

4. Если функция $f(x; y)$ интегрируема на области P, то функция $k \cdot f(x; y)$ (k – const, $k \neq 0$) также интегрируема на области P, и при этом

$$\iint\limits_P k \cdot f(x;y) = k \cdot \iint\limits_P f(x;y).$$

5. Если функция $f_1(x; y)$ и $f_2(x; y)$ интегрируемы на области P , то функции $f_1(x; y) \pm f_2(x; y)$, также интегрируемы на области P, и при этом

$$\iint\limits_P (f_1(x;y) \pm f_2(x;y))dx\,dy = \iint\limits_P f_1(x;y)\,dx\,dy \pm$$

$$\pm \iint\limits_P f_2(x;y)\,dx\,dy.$$

6. Если функции $f_1(x; y)$ и $f_2(x; y)$ интегрируемы на области P и всюду в P $f_1(x; y) \leq f_2(x; y)$, то

$$\iint\limits_P f_1(x;y)\,dx\,dy \leq \iint\limits_P f_2(x;y)\,dx\,dy.$$

7. Если функция $f(x; y)$ интегрируема на области P, то функция $|f(x; y)|$ также интегрируема на области P, и при этом

$$\left|\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy\right| \leq \iint\limits_P |f(x;y)|\,dx\,dy.$$

Теорема о среднем значении

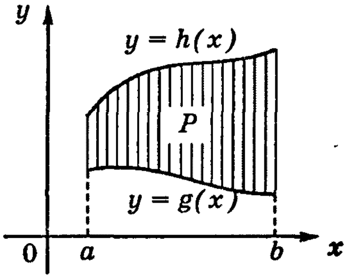
Если функция $f(x; y)$ непрерывна на области P, то существует такая точка $(a; b) \in P$, что

$$\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy = f(a, b) \cdot S_p,$$

где S_p – площадь области P.

Сведение двойных интегралов к повторным

Теорема 1. Пусть P – плоская область, ограниченная графиками непрерывных функций $g(x)$ и $h(x)$, таких что $g(x) \leq h(x)$, $x \in [a; b]$, и, быть может, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Если функция $f(x; y)$ непрерывна в области P, то

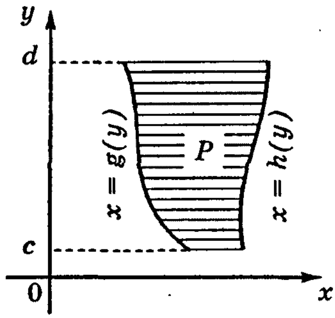


$$\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy =$$

$$\int\limits_a^b\left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x;y)\,dy\right)dx.$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы, называется повторным интегралом и записывается в виде

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x;y)\,dy\,.$$



Отметим, что если плоская область P ограничена графиками непрерывных функций $g(y)$ и $h(y)$, таких что $g(y) \le h(y)$, $y \in [c; d]$, и, быть может, отрезками прямых $y = c$ и $y = d$, то порядок интегрирования может быть иным

$$\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_c^d dy\int\limits_{g(y)}^{h(y)} f(x;y)\,dx\,.$$

Замечание. Расчет двойных интегралов приводит к необходимости вычисления выражений $\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x;y)\,dy$, в которых интегрирование ведется по переменной y, а переменная x при этом играет роль константы (как, впрочем, и любое выражение $p(x)$, зависящее только от x).

Пусть $\int f(x;y)\,dy = F(x;y)$, $\left(\dfrac{\partial F(x;y)}{\partial y} = f(x;y)\right)$,

тогда $\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x;y)\,dy = F(x;y)\Big|_{y=g(x)}^{y=h(x)} = F(x;h(x)) - F(x;g(x)) =$

$= \tilde{F}(x)\,.$

Аналогичным образом осуществляется интегрирование выражений вида $\int\limits_{g(y)}^{h(y)} f(x;y)\,dx$.

Пример 1. Вычислить двойные интегралы по прямоугольным областям интегрирования P.

а) $\iint\limits_P \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy$; $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$;

б) $\iint\limits_P x^2 y\cos\left(xy^2\right)dx\,dy$; $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le 2$.

Решение.

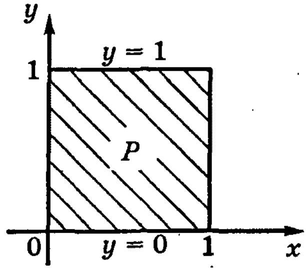
а) Применяя формулу теоремы 1, получаем:

$$\iint\limits_P \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,dy = \int_0^1 \left(x^2 \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} y \Big|_{y=0}^{y=1} dx =$$

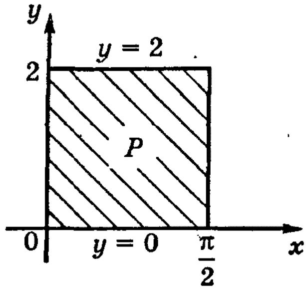
$$= \int_0^1 \frac{\pi}{4} x^2 dx = \frac{\pi}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$



б) $$\iint\limits_P x^2 y\cdot\cos\left(xy^2\right)dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^2 x^2 y\cdot\cos\left(xy^2\right)dy =$$

$$= \left| x^2 y dy = \frac{x^2}{2} d(y^2) = \frac{x}{2} d(xy^2) \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^2 \frac{x}{2}\cdot\cos\left(xy^2\right)\cdot d\left(xy^2\right) =$$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2} \cdot \left(\sin\left(xy^2\right) \Big|_{y=0}^{y=2} \right) \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin 4x \cdot dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin 4x dx & v = -\dfrac{\cos 4x}{4} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{x \cdot \cos 4x}{4} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \cdot dx \right) =$$

$$= -\frac{\pi}{16} + \frac{1}{32} \sin 4x \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{16}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{12}$; б) $-\frac{\pi}{16}$.

Пример 2. Записать двойной интеграл $\iint\limits_P f(x; y)\, dx\, dy$ как повторный, если

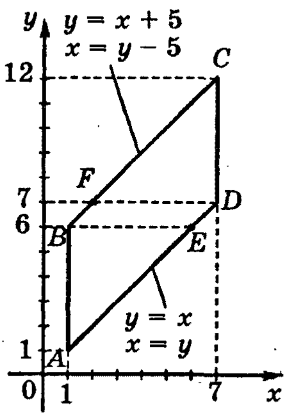
а) P – параллелограмм со сторонами $x = 1$; $x = 7$;
$x - y + 5 = 0$; $x - y = 0$;

б) P – треугольник с вершинами $O(0; 0)$; $A(2; 1)$; $B(3; -2)$;

в) P – внутренность эллипса

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1;$$

г) P – круговое кольцо
$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.



Решение.

а) При решении задач подобного типа целесообразно изобразить плоскую область P графически.

Из уравнения стороны BC

$$x - y + 5 = 0$$

получаем $$y = x + 5.$$

Из уравнения стороны AD

$$x - y = 0$$

получаем $$y = x.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_P f(x;y)\,dxdy = \int\limits_1^7 dx \int\limits_x^{x+5} f(x;y)\,dy.$$

Если изменить порядок интегрирования, то область P необходимо рассматривать как объединение трех областей: треугольников ABE, FCD и параллелограмма $BFDE$. Это связано с тем, что нельзя записать одним уравнением границу ABC и границу ADC.

Из уравнения стороны BC получаем $x = y - 5$.

Из уравнения стороны AD получаем $x = y$.

$$\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy = \iint\limits_{ABE} f(x;y)\,dx\,dy +$$

$$+ \iint\limits_{BFDE} f(x;y)\,dx\,dy + \iint\limits_{FCD} f(x;y)\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy =$$

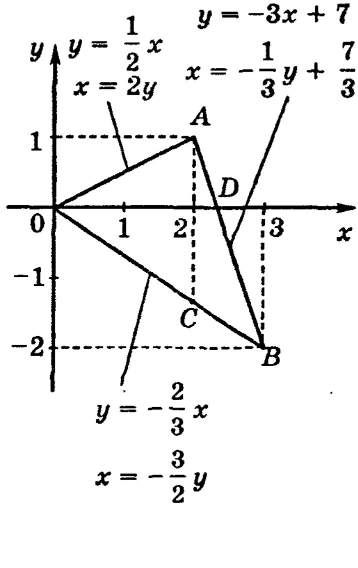
$$= \int\limits_1^6 dy \int\limits_1^y f(x;y)dx + \int\limits_6^7 dy \int\limits_{y-5}^y f(x;y)dx + \int\limits_7^{12} dy \int\limits_{y-5}^7 f(x;y)dx.$$

б) Находим уравнения прямых OA, OB, AB, на которых расположены стороны треугольника. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

В результате очевидных преобразований получаем следующие уравнения

прямая OA: $y = \frac{1}{2}x$ или $x = 2y$;



прямая OB: $y = -\frac{2}{3}x$ или $x = -\frac{3}{2}y$;

прямая AB: $y = -3x + 7$ или $x = -\frac{1}{3}y + \frac{7}{3}$.

Поскольку верхняя граница области P состоит из отрезков двух прямых, задаваемых различными уравнениями, то область P необходимо разбить на треугольники OAC и CAB.

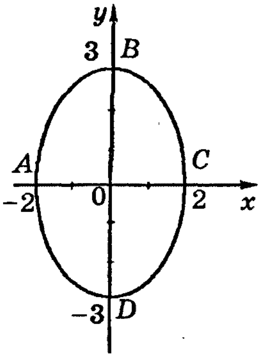
$$\iint\limits_{P} f(x;y)\,dx\,dy = \iint\limits_{OAC} f(x;y)\,dx\,dy + \iint\limits_{OAB} f(x;y)\,dx\,dy;$$

$$\iint\limits_{P} f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\frac{2}{3}x}^{\frac{1}{2}x} f(x;y)\,dy + \int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{-\frac{2}{3}x}^{-3x+7} f(x;y)\,dy.$$

Если изменить порядок интегрирования, то область P придется рассматривать как совокупность треугольников OAD и ODB:

$$\iint\limits_{P} f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{-\frac{3}{2}y}^{-\frac{1}{3}y+\frac{7}{3}} f(x;y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y}^{-\frac{1}{3}y+\frac{7}{3}} f(x;y)\,dx.$$

в) Уравнение $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ задает эллипс с центром в начале координат, фокусы которого расположены на оси Oy и который имеет полуоси 2 и 3.



Уравнение дуги ABC: $y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$;

уравнение дуги ADC: $y = -\frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$;

уравнение дуги DAB: $x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$;

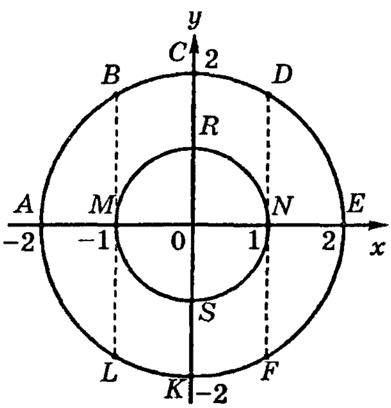
уравнение дуги DCB: $x = \frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$.

Следовательно,

$$\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy\,,$$

или $$\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}} f(x;y)\,dx\,.$$

г) Кольцо $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ образовано двумя концентрическими окружностями с центром в начале координат и имеющими радиусы 1 и 2. Вертикальные касательные BL и DF, проведенные в точках $M(-1;\,0)$ и $N(1;0)$ к окружности $x^2+y^2=1$, разбивают кольцо на области ABL; $MBCDNR$; $MLKFNS$; EDF.



Дуги AB; BD; DE задаются уравнением $y = \sqrt{4-x^2}$;

дуги AL; LF; FE задаются уравнением $y = -\sqrt{4-x^2}$;

дуга MRN задается уравнением $y = \sqrt{1-x^2}$;

дуга MSN задается уравнением $y = -\sqrt{1-x^2}$.

Таким образом,

$$\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1} dx \left(\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x;y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy \right) +$$

$$+ \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy\,.$$

При изменении порядка интегрирования получаем аналогичное выражение формальной заменой x на y и y на x (за исключением выражения функции $f(x;y)$).

Ответ: а) $\int\limits_1^7 dx \int\limits_x^{x+5} f(x;y)\,dy = \int\limits_1^6 dx \int\limits_1^y f(x;y)\,dx +$

$$+\int\limits_6^7 dy \int\limits_{y-5}^{y} f(x;y)\,dx + \int\limits_7^{12} dy \int\limits_{y-5}^{7} f(x;y)\,dx.$$

б) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\frac{2}{3}x}^{\frac{1}{2}x} f(x;y)\,dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_{-\frac{2}{3}x}^{-3x+7} f(x;y)\,dy =$

$$= \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{-\frac{3}{2}y}^{-\frac{1}{3}y+\frac{7}{3}} f(x;y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y}^{-\frac{1}{3}y+\frac{7}{3}} f(x;y)\,dx.$$

в) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy = \int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}} f(x;y)\,dx.$

г) $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy +$

$$+\int\limits_{-1}^{1} dx \left(\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x;y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy \right) +$$

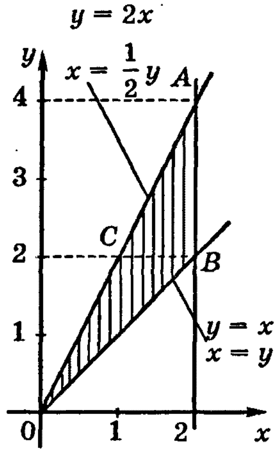
$$+\int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)\,dy.$$

Пример 3. Изменить порядок интегрирования

а) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x;y)\,dy$; б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x;y)\,dx$;

в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x;y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}} f(x;y)\,dy$.

Решение.



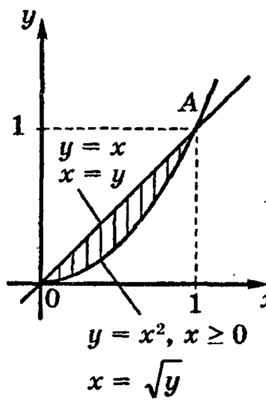
а) По пределам интегрирования повторного интеграла восстановим область интегрирования P.

Границы искомой области задаются следующими уравнениями: $x = 0$; $x = 2$; $y = x$; $y = 2x$.

Таким образом, P – треугольник OAB с вершинами $O(0;\,0)$; $A(2;\,4)$; $B(2;\,2)$. При изменении порядка интегрирования разобьем область P на треугольники OCB и CAB:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x;y)\,dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y}^{y} f(x;y)\,dx + $$

$$+\int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y}^{2} f(x;y)\,dx\,.$$

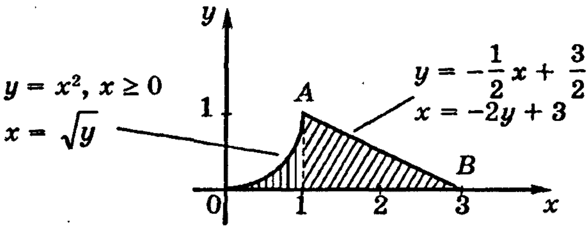


б) Область интегрирования имеет следующие границы $y = 0$; $y = 1$; $x = y$; $x = \sqrt{y}$.

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x;y)\,dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x;y)\,dy\,.$$

в) Область интегрирования состоит из двух подобластей

1) $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$; $y = x^2$;



2) $x = 1$; $x = 3$; $y = 0$; $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

После изменения порядка интегрирования получаем

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x;y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}} f(x;y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{-2y+3} f(x;y)\,dx .$$

Ответ: а) $\displaystyle\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y}^{y} f(x;y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y}^{2} f(x;y)\,dx$;

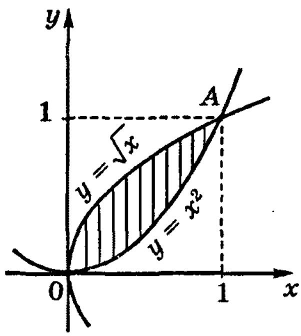
б) $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x;y)\,dy$; в) $\displaystyle\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{-2y+3} f(x;y)\,dx$.

Пример 4. Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\iint\limits_P (x^2 + y)\,dxdy$, P – область, ограниченная параболами $y = x^2$ и $y^2 = x$;

б) $\displaystyle\iint\limits_P \cos(x + y)\,dxdy$, P – область, ограниченная прямыми $x = 0$; $y = \pi$; $y = x$.

Решение.



а) $\displaystyle\iint\limits_P (x^2 + y)\,dxdy =$

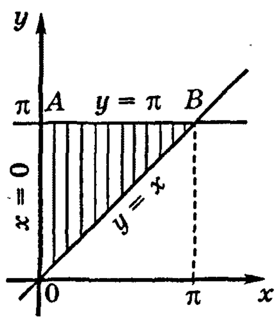
$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2\sqrt{x} + \frac{x}{2} - x^4 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \int\limits_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^4 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{10}x^5 \right) \Bigg|_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{33}{140} .$$

б) $\iint\limits_P \cos(x+y)\,dxdy =$



$$= \int\limits_0^\pi dx \int\limits_x^\pi \cos(x+y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^\pi \sin(x+y)\Big|_{y=x}^{y=\pi} dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi (\sin(x+\pi) - \sin 2x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi (-\sin x - \sin 2x)\,dx = \left(\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^\pi = (\cos\pi +$$

$$+ \frac{1}{2}\cos 2\pi) - (\cos 0 + \frac{1}{2}\cos 0) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2.$$

Ответ: а) $\dfrac{33}{140}$; б) -2.

Замена переменных в двойных интегралах

Теорема 2. Пусть непрерывно дифференцируемые функции $x = x(u;\ v)$; $y = y(u;\ v)$ осуществляют однозначное отображение ограниченной и замкнутой области P в плоскости Oxy на область P' в окрестности Ouv. Если якобиан

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

сохраняет постоянный знак в P, за исключением, быть может, множества нулевой площади, то справедлива формула

$$\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy = \iint\limits_{P'} f(x(u;v),y(u;v)) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \cdot du\,dv.$$

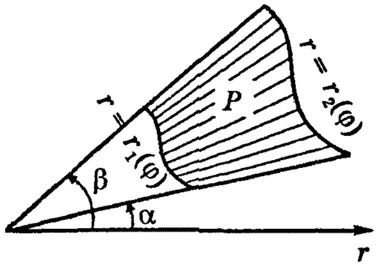
В случае перехода к полярным координатам r и φ: $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$, получаем

$$\iint_P f(x;y)\,dx\,dy = \iint_{P'} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr\cdot d\varphi.$$

В частности, если P – криволинейный сегмент, то

$$\iint_P f(x;y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr.$$

Как и в случае однократного интеграла, замена переменных в двойном интеграле может существенно упростить его вычисление. При этом введение новых переменных может преследовать разные цели: или упростить вид подынтегральной функции, или упростить вид области интегрирования.



Пример 5. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint_P f(x;y)\,dx\,dy$, где

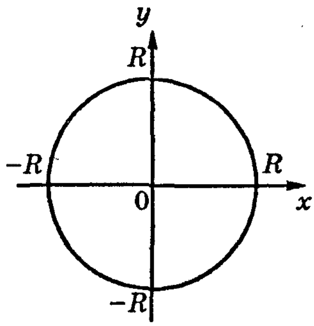
а) P – круг $x^2 + y^2 \le R^2$;

б) P – область, ограниченная линиями $x^2 + y^2 = 4x$; $x^2 + y^2 = 8x$; $y = x$; $y = 2x$;

в) P – треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$; $y = 0$; $y = 1 - x$.

Решение.

а) Переходя к полярной системе координат $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$, получаем следующее уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$; $r = R$.



Очевидно, что $0 \le \varphi < 2\pi$, поэтому $\iint_P f(x;y)\,dx\,dy =$

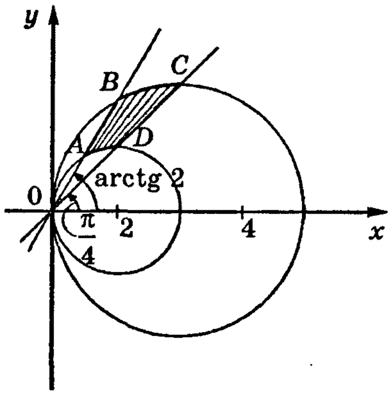
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr.$$

б) Преобразуем исходные выражения $x^2 + y^2 = 4x$ и $x^2 + y^2 = 8x$ к каноническому виду:

$x^2 + y^2 - 4x = 0$; $(x - 2)^2 + y^2 = 4$;

$x^2 + y^2 - 8x = 0$; $(x - 4)^2 + y^2 = 16$.

Следовательно, область P ограничена окружностью, имеющей радиус 2, с центром в точке (2; 0); окружностью, имеющей радиус 4, с центром в точке (4; 0), а также прямыми $y = x$; $y = 2x$.



Фигура $ABCD$ ограничена лучами $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \operatorname{arctg} 2$.

В полярной системе координат уравнение дуги AD имеет вид $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 4r\cos\varphi$, $r = 4\cos\varphi$.

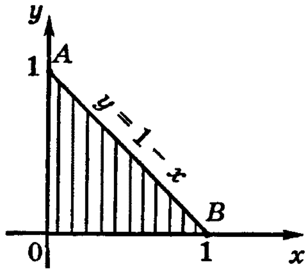
Аналогично, уравнение дуги BC: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 8r\cos\varphi$, $r = 8\cos\varphi$.

Таким образом,

$$\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr.$$

в) В полярной системе координат прямая $y = 1 - x$ имеет вид

$$r\sin\varphi = 1 - r\cos\varphi;\ r = \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}.$$



Следовательно,

$$\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr.$$

Ответ: а) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr$;

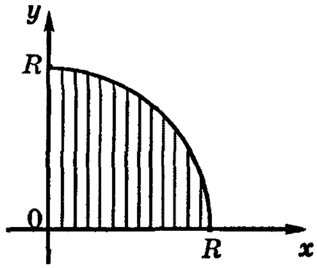
б) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr$;

$$\text{в)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}} f(r\cos\varphi;\, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr.$$

Пример 6. Перейдя к полярным координатам, вычислить интеграл $\iint\limits_P \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$; где P – область, ограниченная окружностью $x^2+y^2=R^2$, $0<R\le 1$, и расположенная в первой координатной четверти.

Решение.

Очевидно, что $0\le\varphi\le p/2$, $0\le r\le R$, следовательно,



$$\iint\limits_P \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr.$$

Рассмотрим неопределенный интеграл

$$\int \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr = \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,dr^2 = \left| r^2 = t \right| = \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{2}\int\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t +$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2} = \frac{1}{2}\arcsin r^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-r^4}\,.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\arcsin r^2 + \sqrt{1-r^4}\right)\Bigg|_0^R =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\arcsin R^2 + \sqrt{1-R^4} - 1\right).$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}\left(\arcsin R^2 + \sqrt{1-R^4} - 1\right)$.

Тройные интегралы

Рассматриваются произвольная ограниченная замкнутая *кубируемая область* P и функция $w = f(x; y; z)$, определенная на этой области. Область P разбита на конечное число подобластей P_i, $i = 1; \ldots ; n$, которые попарно не пересекаются, и их объединение равно P. В каждой подобласти P_i выбирается произвольная точка $M_i(x_i; y_i; z_i)$ и вычисляется значение функции в этой точке $w(M_i) = f(x_i; y_i; z_i)$. Выражение вида

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i) \cdot V_i,$$

где $V_1; V_2; \ldots ; V_n$ – объемы подобластей $P_1; P_2; \ldots ; P_n$, называется интегральной суммой функции $w = f(x; y; z)$.

Обозначим λ – наибольший из диаметров подобластей $P_1; P_2; \ldots ; P_n$.

Определение 2. Если существует конечный предел интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$, то этот предел называется *тройным интегралом* от функции $f(x; y; z)$ по области P и обозначается

$$\iiint\limits_P f(x; y; z)\, dx\, dy\, dz,$$

при этом сама функция называется интегрируемой на области P.

Свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

Сведение тройных интегралов к повторным

Теорема 3. Пусть P – трехмерная область, ограниченная поверхностями

$x = x_1$; $x = x_2$ $(x_1 < x_2)$; $y = y_1(x)$; $y = y_2(x)$ $(y_1(x) \le y_2(x))$;
$z = z_1(x; y)$; $z = z_2(x; y)$ $(z_1(x; y) \le z_2(x; y))$,

где x_1, x_2 – const; $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x; y)$, $z_2(x; y)$ – непрерывные функции.

Если функция $f(x; y; z)$ непрерывна на области P, то

$$\iiint\limits_P f(x; y; z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x; y; z)\, dz.$$

На практике полезна также следующая формула

$$\iiint\limits_P f(x; y; z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \iint\limits_{S(x)} f(x; y; z)\, dy\, dz,$$

где $S(x)$ – сечение области P плоскостью, перпендикулярной оси Ox: $x = \text{const}$.

Замена переменных в тройных интегралах

Теорема 4. Пусть непрерывно дифференцируемые функции

$$x = x(u;\ v;\ s)\ ;\ y = y(u;\ v;\ s)\ ;\ z = z(u;\ v;\ s)$$

осуществляют однозначное отображение ограниченной и замкнутой области P пространства $Oxyz$ на область P' пространства $Ouvs$.

Если якобиан

$$\frac{\partial(x;y;z)}{\partial(u;v;s)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial s} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix}$$

сохраняет постоянный знак в области P, за исключением, быть может, множества нулевого объема, то справедлива формула

$$\iiint\limits_P f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{P'} f\big(x(u;v;s);y(u;v;s);z(u;v;s)\big)\cdot\left|\frac{\partial(x;y;z)}{\partial(u;v;s)}\right| du\,dv\,ds.$$

1. В случае *цилиндрической системы координат* φ, r, h:

$$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi;\ z = h;\ \frac{\partial(x;y;z)}{\partial(r;\varphi;h)} = r;$$

$$\iiint\limits_P f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{P'} f(r\cos\varphi;r\sin\varphi;h)\cdot r\cdot dr\cdot d\varphi\cdot dh.$$

2. В случае *сферической системы координат* φ, ψ, r:
$x = r\cos\varphi\cos\psi$; $y = r\sin\varphi\sin\psi$; $z = r\cdot\sin\psi$;

$$\frac{\partial(x;y;z)}{\partial(\varphi;\psi;r)} = r^2\cdot\cos\varphi.$$

$$\iiint\limits_P f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz =$$

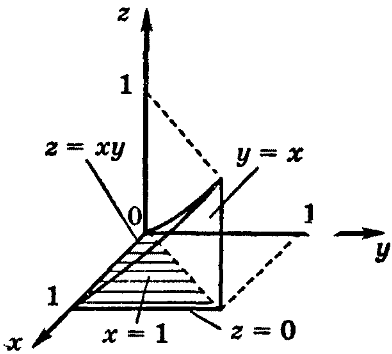
$$= \iiint\limits_{P'} f(r\cos\varphi\sin\psi;r\sin\varphi\cos\psi;r\sin\psi)\cdot r^2\cdot\cos\psi\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\psi.$$

Пример 7. Вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint\limits_P xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, где область P ограничена поверхностями $z = xy$; $y = x$; $x = 1$; $z = 0$;

б) $\iiint\limits_P \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, где область P ограничена поверхностями $x + y + z = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

Решение.



а) Как и в случае двойных интегралов, вычисление тройных интегралов требует понимания структуры области интегрирования. В данном случае область P определяется следующими неравенствами:

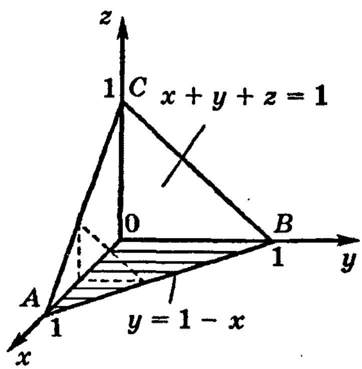
$0 \le x \le 1$; $0 \le y \le x$; $0 \le z \le xy$, поэтому

$$\iiint\limits_P xy^2z^3\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} xy^2z^3\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^x \left(xy^2\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=xy} dy = \int_0^1 dx\int_0^x \frac{x^5y^6}{4}dy = \int_0^1 \frac{x^5y^7}{28}\Bigg|_{y=0}^{y=x} dx =$$

$$= \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\,dx = \frac{1}{364}x^{13}\Big|_0^1 dx = \frac{1}{364}.$$



б) Уравнение $x + y + z = 1$ определяет плоскость, которая пересекает оси координат в точках $A(1;\ 0;\ 0)$; $B(0;\ 1;\ 0)$; $C(0;\ 0;\ 1)$. Следовательно, P – треугольная пирамида $OABC$.

Предельные значения переменной x: $x = 0$ и $x = 1$.

Если зафиксировать значение x, то предельные значения переменной y: $y = 0$ и $y = 1 - x$.

При фиксированных значениях x и y переменная z имеет предельные значения $z = 0$ и $z = 1 - x - y$.

Переходим к повторному интегралу

$$\iiint\limits_P \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1+x+y+z)^{-3}\, d(1+x+y+z) =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\left. \frac{1}{-2(1+x+y+z)^2} \right|_{z=0}^{z=1-x-y} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{8}y - \frac{1}{2(1+x+y)} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{x-1}{8} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}x \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{364}$; б) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$.

Пример 8. а) Перейти к сферическим координатам в интеграле $\iiint\limits_P f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) dx\,dy\,dz$, где область P ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$; $x = y$; $x = 1$; $y = 0$; $z = 0$;

б) перейти к цилиндрическим координатам и вычислить интеграл $\iiint\limits_P \left(x^2+y^2\right) dx\,dy\,dz$, где область P ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$; $z = 2$.

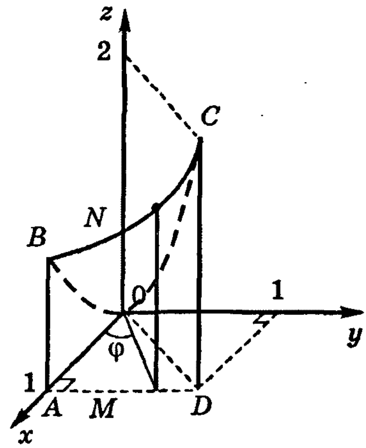
Решение.

а) Область P ограничена криволинейной трапецией $ABCD$; криволинейными треугольниками ABO и OCD; треугольником AOD и частью поверхности параболоида вращения BOC.

В сферических координатах $x = r\cos\psi\cos\varphi$;

$y = r\cos\psi\sin\varphi$;

$z = r\sin\psi$; $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$.

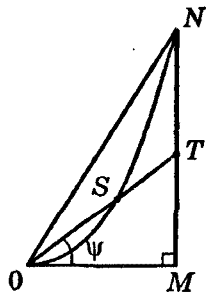


Переменная φ изменяется от $\varphi = 0$ до

$\varphi = \dfrac{\pi}{4}\left(\angle AOD = \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Переменная ψ изменяется от $\psi = 0$ до значения $\angle NOM$, которое зависит от величины φ.

Из треугольника AOM: $AM = \operatorname{tg}\varphi$, $OM = \dfrac{1}{\cos\varphi}$, следовательно, точка M имеет координаты $M(1; \operatorname{tg}\varphi; 0)$. Точка N находится на поверхности $z = x^2 + y^2$, поэтому



$z = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}$,

т. е. $N\left(1; \operatorname{tg}\varphi; \dfrac{1}{\cos^2\varphi}\right)$.

Из треугольника NOM: $\operatorname{tg}(\angle NOM) = \dfrac{NM}{OM} = \dfrac{1}{\cos\varphi}$. Таким образом, диапазон значений переменной ψ:

$$0 \le \psi \le \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right).$$

Переменная r изменяется от значения OS до значения OT. Точка S находится на поверхности $z = x^2 + y^2$, уравнение которой в сферических координатах:

$r\sin\varphi = r^2\cos^2\psi\cos^2\varphi + r^2\cos^2\psi\sin^2\varphi$;

$$r\sin\psi = r^2\cos^2\psi;\ r = \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi},$$

следовательно, $OS = \dfrac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$.

Из треугольника OMT

$$OT = \frac{OM}{\cos(\angle TOM)},\ OT = \frac{1}{\cos\varphi\cdot\cos\psi}.$$

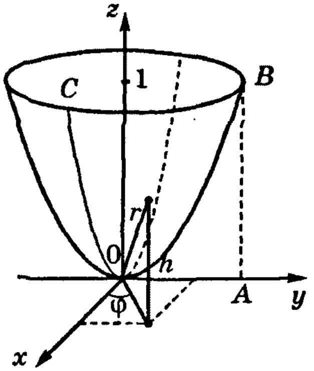
Таким образом, переменная r изменяется в диапазоне

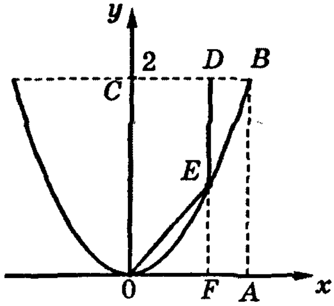
$$\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi} \le r \le \frac{1}{\cos\varphi\cdot\cos\psi}.$$

Итак,

$$\iiint\limits_P \left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)} d\psi \int\limits_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\psi\cdot\cos\varphi}} f(r)\cdot r^2\cdot\cos\psi\cdot dr.$$

б) Очевидно, что область P симметрична относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz. Подынтегральная функция четна по каждой из переменных x и y. Вычисление исходного интеграла сводится к его вычислению в первом октанте ($x \ge 0$; $y \ge 0$; $z \ge 0$).





Рассмотрим сечение области P плоскостью Oyz. Поскольку уравнение $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ определяет параболоид вращения, то все сечения, проходящие через ось Oz, одинаковы.

В цилиндрической системе координат $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$; $z = h$.

Если ограничиться первым октантом, то $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Переменная h меняется от 0 до 2. Переменная r меняется от 0 до значения OE, которое определяется величиной h. В цилиндрических координатах уравнение параболоида:

$$h = \frac{1}{2}r^2;$$

следовательно, $OE = \sqrt{2h}$. Таким образом, $0 \le r \le \sqrt{2h}$.

Итак, $\iiint\limits_{P} \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy\, dz = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2} dh \int\limits_0^{\sqrt{2h}} r^3 dr =$

$$= 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int\limits_0^{2} \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2h}} dh = 2\pi \cdot \int\limits_0^{2} h^2 dh \int\limits_0^{2} \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2h}} =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{h^3}{3}\Bigg|_0^{2} = \frac{16}{3}\pi.$$

Ответ: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)} d\psi \int\limits_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\psi \cdot \cos\varphi}} f(r) \cdot r^2 \cdot \cos\psi \cdot dr;$

б) $\frac{16}{3}\pi.$

Задания для самостоятельного решения

Записать двойной интеграл $\iint\limits_{P} f(x;y)\, dx\, dy$ как повторный,

1. если P – треугольник с вершинами $(0; 0)$; $(1; 0)$ и $(1; 1)$;
2. если P – круг $x^2 + y^2 \le y$.

Вычислить двойные интегралы по прямоугольной области P:

3. $\iint\limits_{P} \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$; $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$.
4. $\iint\limits_{P} x^2 y e^{xy}\, dx\, dy$; $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 2$.

Изменить порядок интегрирования

5. $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x;y)\, dy.$
6. $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x;y)\, dy.$

7. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^{\frac{2}{3}}} f(x;y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x;y)dy$.

Вычислить интегралы

8. $\iint\limits_P (x+y)\,dx\,dy$, P – область, ограниченная кривыми $y^2 = 2x$; $x + y = 4$; $x + y = 12$.

9. $\iint\limits_P \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, P – область, ограниченная прямыми $x = 2$; $y = x$ и гиперболой $xy = 1$.

Перейти к полярным координатам, расставить пределы интегрирования:

10. $\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy$; P – кольцо: $R_1^2 \le x^2 + y^2 \le R_2^2$.

11. $\iint\limits_P f(x;y)\,dx\,dy$; P – область, ограниченная кривыми $y = x^2$, $y = 1$.

12. Перейти к полярным координатам, вычислить интеграл $\iint\limits_P \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где P – кольцо: $\pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$.

Вычислить тройные интегралы

13. $\iiint\limits_P xyz\,dx\,dy\,dz$, где P – область, ограниченная поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

14. $\iiint\limits_P \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, где P – область, ограниченная поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$; $z = 1$.

Переходя к сферическим и цилиндрическим координатам, вычислить

15. $\iiint\limits_P \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, P – шар $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

16. $\iiint\limits_P \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, P – цилиндр $x^2+y^2\le 1$, $-1\le z\le 1$.

Ответы:

1. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x;y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f(x;y)\,dx$;

2. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx\int\limits_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x;y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x;y)\,dx$;

3. $\ln\frac{4}{3}$; **4.** 2; **5.** $\int\limits_{-1}^{0} dy\int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x;y)\,dx+\int\limits_0^8 dy\int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x;y)\,dx$;

6. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{e^y}^{e} f(x;y)\,dx$; **7.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^{\frac{3}{2}}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x;y)\,dx$;

8. $543\frac{11}{15}$; **9.** $\frac{9}{4}$; **10.** $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_{R_1}^{R_2} r\,f(r\cos\varphi;\,r\sin\varphi)dr$;

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int\limits_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} r\,f(r\cos\varphi;\,r\sin\varphi)dr+$

$+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi\int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} r\,f(r\cos\varphi;\,r\sin\varphi)dr+$

$+\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi\int\limits_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} r\,f(r\cos\varphi;\,r\sin\varphi)dr$;

12. $-6\pi^2$; **13.** $\dfrac{1}{48}$; **14.** $\dfrac{\pi}{6}$; **15.** $\dfrac{2\pi}{3}$;

16. $\pi\left(3\sqrt{10}+\ln\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3}-\sqrt{2}-8\right)$.

7.4. Несобственные двойные и тройные интегралы

Интегрирование непрерывной функции по неограниченной области

Определение 1. Пусть функция $f(x;\, y)$ непрерывна на неограниченной плоской области P. Пусть также $\{P_n\}$ – произвольная последовательность ограниченных замкнутых квадрируемых областей, таких что

1) $P_k \subset P_{k+1}$, $k \in N$;

2) $P_1 \cup P_2 \cup \ldots = P$.

Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{P_n} f(x;y)\,dx\,dy,$$

не зависящий от выбора последовательности $\{P_n\}$, то он называется *несобственным двойным интегралом* функции $f(x;\, y)$ по области P и обозначается

$$\iint\limits_{P} f(x;y)\,dx\,dy.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{P_n} f(x;y)\,dx\,dy$ существует, то соответствующий интеграл называется сходящимся; в противном случае – расходящимся.

Несобственные тройные интегралы от непрерывных функций определяются аналогично.

Несобственные интегралы обладают рядом свойств собственных интегралов.

Например, они также сводятся к повторным, и к ним также применимы формулы замены переменных.

Интегрирование разрывных функций на ограниченной области

Определение 2. Пусть функция $f(x; y)$ непрерывна всюду в ограниченной замкнутой плоской области P, за исключением точки $A(x_0; y_0)$.

Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \iint\limits_{P-P_\varepsilon} f(x; y)\,dx\,dy,$$

где P_ε – любая область диаметра ε, содержащая точку A, то этот предел называется несобственным двойным интегралом функции $f(x; y)$ по области P и обозначается

$$\iint\limits_{P} f(x; y)\,dx\,dy.$$

Как и ранее, если указанный предел существует, то несобственный интеграл называется сходящимся; в противном случае – расходящимся.

Если в области P существует линия разрыва, то несобственный интеграл определяется аналогично, но под P_ε понимается любая область, содержащая эту линию и точки которой удалены от линии разрыва не далее, чем на ε. Несобственные тройные интегралы от разрывных функций определяются аналогично, с той лишь разницей, что в пространственной области P могут существовать и поверхности разрыва.

Пример 1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$; б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dxdydz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}}$;

в) $\displaystyle\iint\limits_{P} \frac{dxdy}{x^a y^b}$; область P описывается неравенствами $xy \geq 1$; $x \geq 1$;

г) $\iiint\limits_P \dfrac{\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$; P – шар радиуса R с центром в начале координат.

Решение.

а) Поскольку функция $\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ четна по каждому аргументу, а областью интегрирования является вся плоскость, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2}=4\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2}.$$

Переходим к повторному интегралу

$$\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2}=\int\limits_0^{+\infty}dx\int\limits_0^{+\infty}\frac{dy}{1+x^2+y^2}.$$

Для внутреннего интеграла выражение $1+x^2$ носит характер положительной константы, поскольку не зависит от y, поэтому данный интеграл является табличным:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dy}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2+y^2}=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg|_{y=0}^{y=A}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Рассмотрим внешний интеграл

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\pi}{2}\lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{A\to+\infty}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Bigg|_0^A=\frac{\pi}{2}\lim_{A\to+\infty}\ln\left(A+\sqrt{1+A^2}\right)=\infty.$$

Таким образом, исходный интеграл расходится.

Заметим, что данный анализ можно было провести и в полярных координатах:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2}=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{+\infty}\frac{rdr}{1+r^2}=2\pi\int\limits_0^{+\infty}\frac{rdr}{1+r^2}=$$

$$=\pi\int\limits_0^{+\infty}\frac{d(1+r^2)}{1+r^2}=\pi\lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^{R}\frac{d(1+r^2)}{1+r^2}=\pi\lim_{R\to+\infty}\ln\left(1+r^2\right)\Big|_0^R=$$

$$=\pi\lim_{R\to+\infty}\ln(1+R^2)=\infty.$$

б) Приведем исходный интеграл к повторному:

$$\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dxdydz}{\sqrt{(1+x+y+z)^7}}=\int\limits_0^{+\infty}dx\int\limits_0^{+\infty}dy\int\limits_0^{+\infty}(1+x+y+z)^{-\frac{7}{2}}dx.$$

Рассмотрим внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}(1+x+y+z)^{-\frac{7}{2}}dx=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A}(1+x+y+z)^{-\frac{7}{2}}d(1+x+y+z)=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{2}{5}(1+x+y+z)^{-\frac{5}{2}}\Bigg|_{z=0}^{z=A}\right)=$$

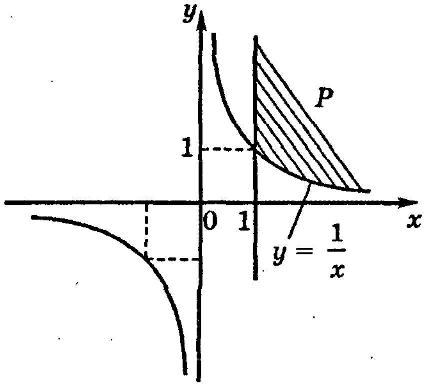
$$=-\frac{2}{5}\lim_{A\to+\infty}\left((1+x+y+A)^{-\frac{5}{2}}-(1+x+y)^{-\frac{5}{2}}\right)=$$

$$=\frac{2}{5}(1+x+y)^{-\frac{5}{2}}.$$

Аналогично получаем

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{2}{5}(1+x+y)^{-\frac{5}{2}}dy=\frac{4}{15}(1+x)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{4}{15}(1+x)^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{8}{15}.$$



Следовательно, исходный интеграл сходится.

в) Изобразим графически область P. Ее границами являются гипербола $xy = 1$, ветви которой расположены в первой и третьей четвертях, и прямая $x = 1$. Рассмотрим три случая.

1) $b < 1$, тогда

$$\iint\limits_P \frac{dxdy}{x^a y^b} = \int_1^{+\infty} dx \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dy}{x^a y^b} = \int_1^{+\infty} \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{x^a}\left(\frac{y^{1-b}}{1-b}\right)\Bigg|_{y=\frac{1}{x}}^{y=A}\right)dx =$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1-b)x^a} \lim_{A\to+\infty} (A^{1-b} - x^{b-1})dx = \infty;$$

2) $b = 1$, тогда

$$\iint\limits_P \frac{dxdy}{x^a y} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} \lim_{A\to+\infty} (\ln y)\Bigg|_{y=\frac{1}{x}}^{y=A} dx = \infty.$$

3) $b > 1$, тогда

$$\iint\limits_P \frac{dxdy}{x^a y^b} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1-b)x^a} \lim_{A\to+\infty}\left(A^{1-b} - x^{b-1}\right)dx =$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{x^{b-a-1}}{b-1} dx = \frac{1}{b-1} \lim_{A\to+\infty} \int_1^A x^{b-a-1}\, dx.$$

3.1) Если $b-a>0$, то

$$\iint\limits_P \frac{dxdy}{x^a y^b}=\frac{1}{(b-1)(b-a)}\lim_{A\to+\infty}\left(A^{b-a}-1\right)=\infty.$$

3.2) Если $b=a$, то $\iint\limits_P \frac{dxdy}{x^a y^b}=\frac{1}{b-1}\lim\limits_{A\to+\infty}\ln A=\infty.$

3.3) Если $b-a<0$, то

$$\iint\limits_P \frac{dxdy}{x^a y^b}=\frac{1}{(b-1)(b-a)}\lim_{A\to+\infty}\left(A^{b-a}-1\right)=\frac{1}{(b-1)(a-b)}.$$

Таким образом, исходный интеграл сходится при $a>b>1$, при этом он принимает значение $\frac{1}{(b-1)(a-b)}$.

При любых других сочетаниях a и b интеграл расходится.

г) Целесообразно перейти к сферической системе координат:

$x=r\cos\varphi\cos\psi$; $y=r\sin\varphi\cos\psi$; $z=r\sin\psi$; $\frac{\partial(x;y;z)}{\partial(r;\varphi;\psi)}=$ $=r^2\cos\psi$; тогда $x^2+y^2+z^2=r^2$, и интеграл принимает вид

$$\iiint\limits_P \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint\limits_{P'}\frac{\ln r}{r^2}\cdot r^2\cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi=$$

$$=\iiint\limits_{P'}\ln r\cdot\cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi.$$

Переходим к повторному интегралу

$$\iiint\limits_P \ln r\cdot\cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi\int_0^R\ln r\cdot dr.$$

Очевидно, что повторный интеграл распадается на произведение трех интегралов, поскольку все пределы интегрирования – константы:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi; \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi = \sin\psi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Отдельно рассмотрим несобственный интеграл от н ограниченной в точке $r = 0$ функции $\ln r$:

$$\int_0^R \ln r\, dr = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_\varepsilon^R \ln r \cdot dr = \lim_{\varepsilon \to 0+0} (r \ln r - r)\Big|_\varepsilon^R =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+0} ((R \ln R - R) - (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon)) = R \ln R - R$$

(см. 5.3. «Замечательные пределы и их следствия»)

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \varepsilon \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \ln \varepsilon^\varepsilon = 0).$$

Итак, $\iiint\limits_P \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = 4\pi R(\ln R - 1)$, интеграл сходится.

Ответ: а) расходится; б) $\frac{8}{15}$; в) при $a > b > 1$: $\frac{1}{(b-1)(a-b)}$; при любых других сочетаниях a и b интеграл расходится; г) $4\pi R(\ln R - 1)$.

Задания для самостоятельного решения

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость

1. $\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} (x+y)\, e^{-x-y}\, dx\, dy.$

2. $\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} xye^{-x^2-y^2}\, dx\, dy.$

3. $\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} \frac{xydxdydz}{\left(1+x^2+y^2+z^2\right)^3}.$

4. $\iint\limits_P \frac{dxdy}{x^4+y^2}$, где P – область $y \geq x^2 + 1$.

5. $\iint\limits_P \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, P – круг $x^2 + y^2 \leq 1$.

6. $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{e^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

Ответы:

1. 2; 2. $\frac{1}{4}$; 3. $\frac{\pi}{16}$; 4. $\pi\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}$; 5. $\frac{\pi}{2}$; 6. расходится.

7.5. Приложения двойных и тройных интегралов

Вычисление площадей плоских фигур и поверхностей

Площадь области P, расположенной в плоскости Oxy, определяется формулой

$$S = \iint\limits_P dxdy.$$

Если граница области задана *в полярных координатах*, то площадь этой области находится по формуле:

$$S = \iint\limits_P r\,dr\,d\varphi.$$

Пусть уравнение $z = f(x; y)$ определяет *гладкую криволинейную поверхность*, пусть также область P – проекция данной поверхности на плоскость Oxy, тогда площадь поверхности имеет вид:

$$S = \iint\limits_P \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Пусть совокупность непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x(u; v);\ y = y(u; v);\ z = z(u; v);\ (u; v) \in P,$$

где P – ограниченная замкнутая *квадрируемая область,* задает параметрически поверхность, тогда ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \iint\limits_P \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

где $E = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2$;

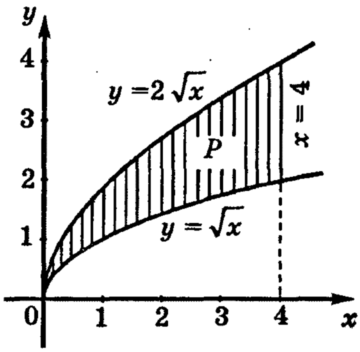
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2;$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Пример 1. Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y = \sqrt{x}$; $y = 2\sqrt{x}$; $x = 4$;
б) $x^2 + y^2 + 2y = 0$; $y = -x$; $y = -1$;
в) $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$.

Решение.



а) Изобразим область P. Очевидно, что уравнение $y = \sqrt{x}$ и $y = 2\sqrt{x}$ определяют ветви парабол с вершиной в начале координат.

Так как $S = \iint\limits_P dxdy$, то

$$S = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \sqrt{x}\right)dx = \int_0^4 \sqrt{x}dx = \frac{16}{3}.$$

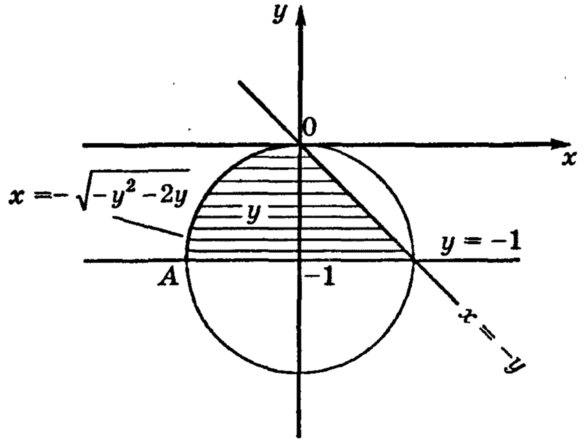
б) Преобразуем уравнение $x^2 + y^2 + 2y = 0$ к каноническому виду:

$$x^2 + y^2 + 2y + 1 = 1;\ x^2 + (y + 1)^2 = 1.$$

Следовательно, исходное уравнение задает окружность радиуса 1 с центром в точке $(0; -1)$.

Уравнение дуги AO получаем из уравнения окружности с учетом условия $x < 0$: $x^2 = -y^2 - 2y$;

$$x = -\sqrt{-y^2 - 2y}.$$



Переходим к вычислению площади:

$$S = \iint_P dxdy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y^2-2y}}^{-y} dx =$$

$$\int_{-1}^{0}\left(-y+\sqrt{-y^2-2y}\right) = -\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0}\sqrt{-y^2-2y}\,dy =$$

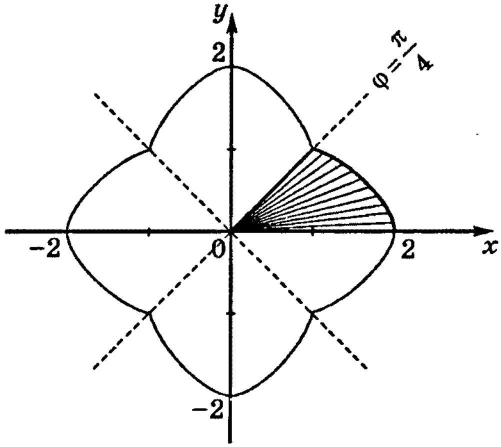
$$= \frac{1}{2} + \int_{-1}^{0}\sqrt{1-(y+1)^2}\,dy = \left|\begin{array}{l} y+1=\sin t \\ dy=\cos t\cdot dt \\ t=\arcsin(y+1) \\ t(-1)=0;\, t(0)=\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Отметим, что данную площадь можно было найти, не прибегая к методам математического анализа, поскольку область P составлена из четверти круга радиусом 1 (площадь $\frac{\pi}{4}$) и равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 1 (площадь $\frac{1}{2}$).

в) Перейдем к полярным координатам:
$x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$.



Уравнение $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$
приобретает вид:

$(r^2)^3 = r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi$; $r^2 = \cos^4\varphi + \sin^4\varphi$;

$r^2 = (\cos^2\varphi + \sin^2)^2 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi$; $r^2 = 1 - \dfrac{\sin^2 2\varphi}{2}$;

$r^2 = \dfrac{3+\cos 4\varphi}{4}$; $r = \dfrac{\sqrt{3+\cos 4\varphi}}{2}$.

Искомая фигура симметрична относительно осей Ox и Oy, поэтому вычислим площадь той ее части, которая расположена в первой четверти $\left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$\frac{1}{4}S = \iint\limits_P r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\sqrt{3+\cos 4\varphi}}{2}} r\,dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3+\cos 4\varphi}}{2}} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3+\cos 4\varphi}{4}\,d\varphi = \frac{1}{8}\left(3\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{16}\pi.$$

Следовательно, $S = \frac{3}{4}\pi$.

В заключение отметим, что область P обладает симметрией также относительно прямой $\varphi = \frac{\pi}{4}$, поэтому в данном случае можно было рассчитывать $\frac{1}{8}S$.

Ответ: а) $\frac{16}{3}$; б) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$; в) $\frac{3}{4}\pi$.

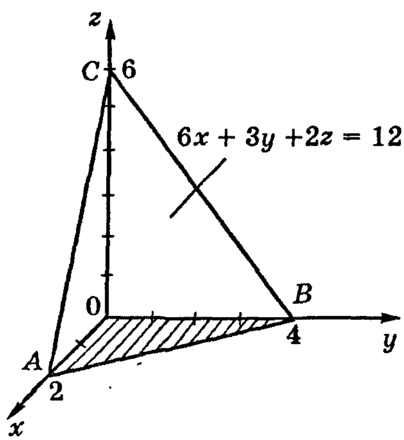
Пример 2. а) Вычислить площадь части плоскости $6x + 3y + 2z = 12$, которая ограничена первым октантом; б) найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b \le a$.

Решение.

а) Приведем уравнение плоскости к уравнению в отрезках:

$$6x + 3y + 2z = 12;$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1.$$



Плоскость пересекает ось Ox в точке $A(2; 0; 0)$; ось Oy в точке $B(0; 4; 0)$; ось Oz в точке C $(0; 0; 6)$. Проекцией искомой части плоскости на плоскость Oxy является треугольник AOB.

Уравнение плоскости преобразуем к виду:

$$z = 6 - 3x - \frac{3}{2}y.$$

Так как $\frac{\partial z}{\partial x} = -3$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{2}$, получаем

$$S = \iint\limits_{AOB} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{AOB} \sqrt{1 + 9 + \frac{9}{4}}\, dx\, dy = \frac{7}{2} \iint\limits_{AOB} dxdy\,.$$

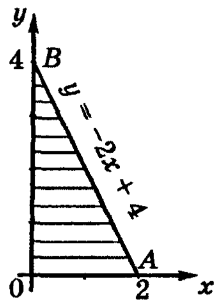
Поскольку уравнение прямой AB:

$$y = -2x + 4,$$

то $\frac{7}{2}\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{-2x+4} dy = \frac{7}{2}\int\limits_0^2 (-2x+4)dx = \frac{7}{2}\left(-x^2 + 4x\right)\Big|_0^2 = 14.$

Заметим, что $\iint\limits_{AOB} dxdy$ – это площадь треугольника AOB, т. е.

$$\iint\limits_{AOB} dxdy = \frac{OB \cdot OA}{2} = 4.$$



б) Поскольку сфера пересекается цилиндром, образующая которого параллельна оси Oz, то проекцией искомой части сферы на плоскости Oxy является эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ с центром в начале координат и полуосями a и b ($b \le a$).

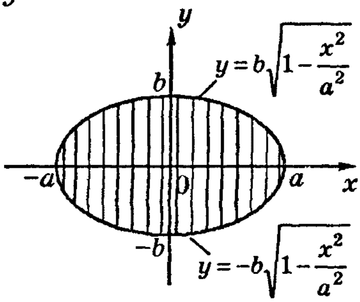
Очевидно, что цилиндр, пересекая сферу, образует два симметричных относительно плоскости Oxy фрагмента. Рассчитаем поверхность одного из них ($z \ge 0$):

$$\frac{1}{2} \cdot S = \iint\limits_{P} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy;\ z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,;\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,;$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}\,;$$

$$\frac{1}{2}\cdot S=\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dy=$$



$$=2a\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=$$

$$=2a\int\limits_{-a}^{a}\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dx=2a\cdot\int\limits_{-a}^{a}\arcsin\frac{b}{a}\,dx=$$

$$=2a\cdot\arcsin\frac{b}{a}\cdot 2a=4a^2\cdot\arcsin\frac{b}{a}.$$

Следовательно, $S=8a^2\cdot\arcsin\dfrac{b}{a}$.

Ответ: а) 14; б) $8a^2\cdot\arcsin\dfrac{b}{a}$.

Пример 3. Найти площадь части геликоида $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$; $z=h\varphi$, если $0<r<a$; $0<\varphi<2\pi$.

Решение.

Так как $\dfrac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi$; $\dfrac{\partial y}{\partial r}=r\sin\varphi$; $\dfrac{\partial z}{\partial r}=0$;

$\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi$; $\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}=r\cos\varphi$; $\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}=h$,

то $E=\left(\dfrac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2=1$;

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=r^2+h^2;$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0;\ EG-F^2=r^2+h^2.$$

Для вычисления искомой площади получаем

$$S=\iint\limits_P \sqrt{r^2+h^2}\,drd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\sqrt{r^2+h^2}\,dr=$$

$$=2\pi\cdot\int\limits_0^a\sqrt{r^2+h^2}\,dr.$$

Найдем первообразную функции $\sqrt{r^2+h^2}$, используя интегрирование по частям,

$$I=\int\sqrt{r^2+h^2}\,dr=\left|\begin{matrix} u=\sqrt{r^2+h^2}; & du=\dfrac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}dr \\ dv=dr; & v=r\end{matrix}\right|=$$

$$=r\cdot\sqrt{r^2+h^2}-\int\frac{r^2}{\sqrt{r^2+h^2}}dr=$$

$$=r\sqrt{r^2+h^2}-\int\frac{r^2+h^2-h^2}{\sqrt{r^2+h^2}}dr=r\sqrt{r^2+h^2}\;-$$

$$-\int\sqrt{r^2+h^2}\,dr+h^2\ln\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right),$$ то есть

$$I=r\sqrt{r^2+h^2}\;-I+h^2\ln\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right);$$

$$I=\frac{1}{2}\left(r\sqrt{r^2+h^2}+h^2\ln\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)\right).$$

Вернемся к вычислению площади геликоида:

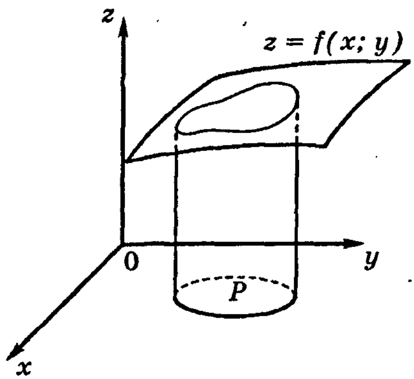
$$S=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(r\sqrt{r^2+h^2}+h^2\ln\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=\pi\left(a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\left(a+\sqrt{a^2+h^2}\right)-h^2\ln|h|\right).$$

Ответ:

$$\pi\left(a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\left(a+\sqrt{a^2+h^2}\right)-h^2\ln|h|\right).$$

Вычисление объемов



1. Объем цилиндрического тела с образующими, параллельными оси Oz, основанием которого является квадрируемая область P, принадлежащая плоскости Oxy, и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x; y)$, определяется формулой:

$$V = \iint\limits_P f(x;y)\,dxdy.$$

2. Объем трехмерной области P выражается формулой:

$$V = \iiint\limits_P dxdydz.$$

При решении задач об объеме пространственных тел могут оказаться полезными так называемые обобщенные сферические координаты r $(r \geq 0)$; φ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$; $\psi \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq \psi \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$x = a \cdot r \cdot \cos^\alpha \varphi \cdot \cos^\beta \psi;$$
$$y = b \cdot r \cdot \sin^\alpha \varphi \cdot \cos^\beta \psi;$$
$$z = c \cdot r \cdot \sin^\beta \psi;$$

$$\frac{\partial(x;y;z)}{\partial(r;\varphi;\psi)} = \alpha\beta\, abc \cdot r^2 \cdot \cos^{\alpha-1}\varphi \cdot \sin^{\alpha-1}\varphi \cdot \cos^{2\beta-1}\psi \cdot \sin^{\beta-1}\psi,$$

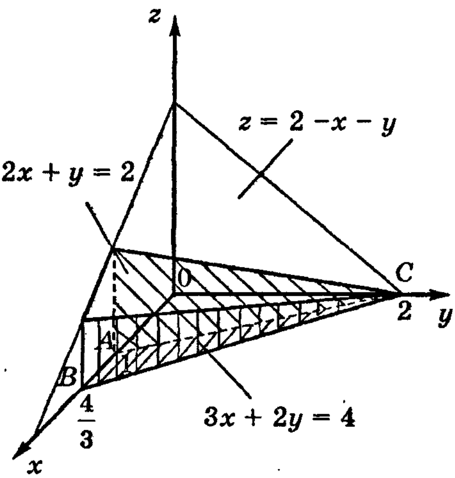
где a, b, c, α, β – const.

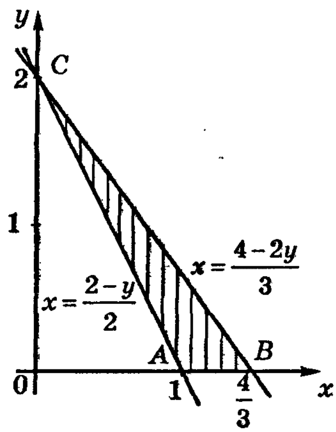
Пример 4. Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями :

а) $x + y + z = 2$; $3x + 2y = 4$; $2x + y = 2$; $y = 0$; $z = 0$;
б) $z = x^2 + y^2$; $y = x^2$; $y = 1$; $z = 0$;
в) $z^2 = x\,y$; $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $(x \geq 0;\ y \geq 0;\ z \geq 0)$.

Решение.

а) Плоскости $3x + 2y = 4$; $2x + y = 2$; $y = 0$ параллельны оси Oz; при пересечении с плоскостью Oxy они образуют треугольную область ABC. Нетрудно убедиться, что во всех точках области ABC функция $z = 2 - x - y$ принимает неотрицательные значения, и, следовательно, плоскость $z = 2 - x - y$ ограничивает тело сверху.





Переходим к вычислению объема:

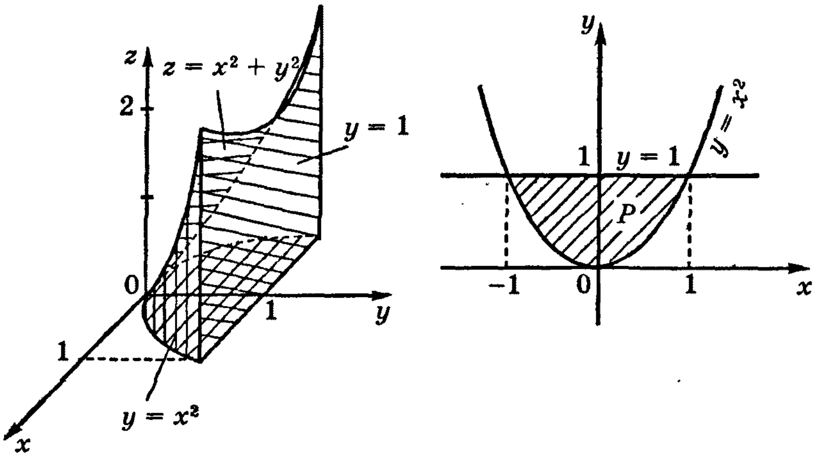
$$V=\iint\limits_{ABC} f(x;y)\,dxdy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{2-y}{2}}^{\frac{4-2y}{3}}(2-x-y)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(2x-\frac{x^2}{2}-xy\right)\Bigg|_{x=\frac{2-y}{2}}^{x=\frac{4-2y}{3}}dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left(\frac{8-4y}{3}-\frac{(4-2y)^2}{18}-\frac{(2y-4)y}{3}-(2-y)+\frac{(2-y)^2}{8}+\frac{(2-y)y}{2}\right)dy=$$

$$=\frac{5}{72}\int\limits_0^2(y-2)^2\,dy=\frac{5}{72}\,\frac{(y-2)^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{5}{27}.$$

б) Образующие цилиндра $y=x^2$ параллельны оси Oz. Плоскость $y=1$ также параллельна оси Oz. При пересечении с плоскостью $z=0$ эти поверхности образуют замкнутую область P, ограниченную параболой $y=x^2$ и прямой $y=1$. Очевидно, что во всех точках области P функция $z=x^2+y^2$ неотрицательна, т. е. параболоид вращения ограничивает тело сверху.



Рассчитаем объем тела:

$$V = \iint\limits_P f(x;y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} \left(x^2 + y^2\right) dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=x^2}^{y=1} dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx =$$

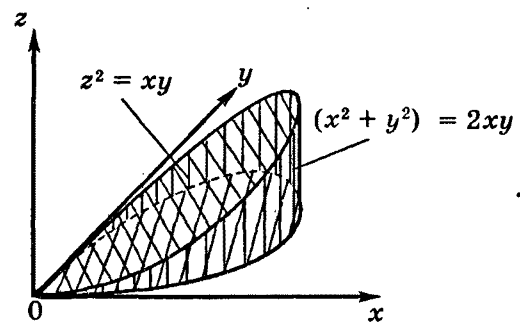
$$= 2\int\limits_{0}^{1} \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = 2\left(-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x \right) \Bigg|_0^1 =$$

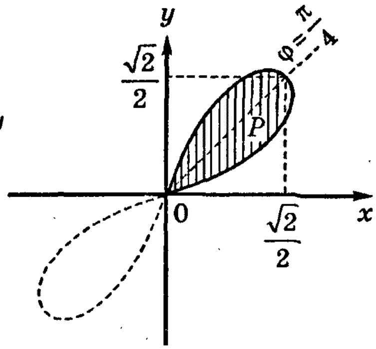
$$= 2\left(-\frac{1}{21} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{88}{105}.$$

в) Образующие цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ параллельны оси Oz. В пересечении с плоскостью Oxy цилиндр образует плоскую область P: $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$. Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$, получаем $r^4 = 2r^2 \sin\varphi\cos\varphi$; $r^2 = 2\sin\varphi\cos\varphi$; $r^2 = \sin 2\varphi$. Диапазон значений угла φ определяется из условия $\sin 2\varphi \geq 0$:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};\ \pi \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi.$$

Поскольку по условию $x \geq 0$, $y \geq 0$, то $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$.





Уравнение поверхности $z^2 = xy$ в полярных координатах: $z^2 = r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi = r^2 \sin\varphi \cos\varphi$. Так как по условию $z \geq 0$, то $z = r\sqrt{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}$.

Переходим к расчету объема тела:

$$V = \iint\limits_P r\sqrt{\sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} \sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{2}}\, r^2 dr = \frac{1}{3\sqrt{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin 2\varphi} \cdot r^3 \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{6\sqrt{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{12\sqrt{2}}.$$

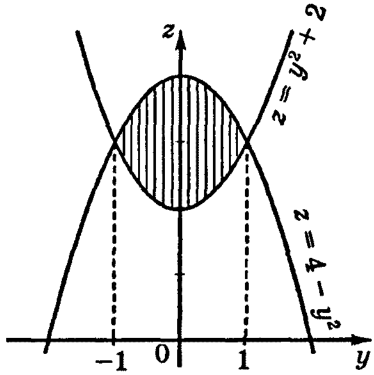
Ответ: а) $\frac{5}{27}$; б) $\frac{88}{105}$; в) $\frac{\pi}{12\sqrt{2}}$.

Пример 5. а) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$, $x = -1$ и $x = 2$.

б) Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$; $z = 2x^2 + 2y^2$; $y = x^2$; $y = x$.

Решение.

а) Образующие цилиндров $z = 4 - y^2$ и $z = y^2 + 2$ параллельны оси Ox и, следовательно, перпендикулярны плоскостям $x = -1$ и $x = 2$. Сечение тела плоскостью $x = 0$ есть плоская область P, ограниченная параболами $z = 4 - y^2$ и $z = y^2 + 2$, вершинами которых являются соответственно точки (0; 4) и (0; 2). Параболы пересекаются в точках (±1; 3).



Переходим к вычислению объема, принимая во внимание, что $-1 \le x \le 2$; $-1 \le y \le 1$; $y^2 + 2 \le z \le 4 - y^2$,

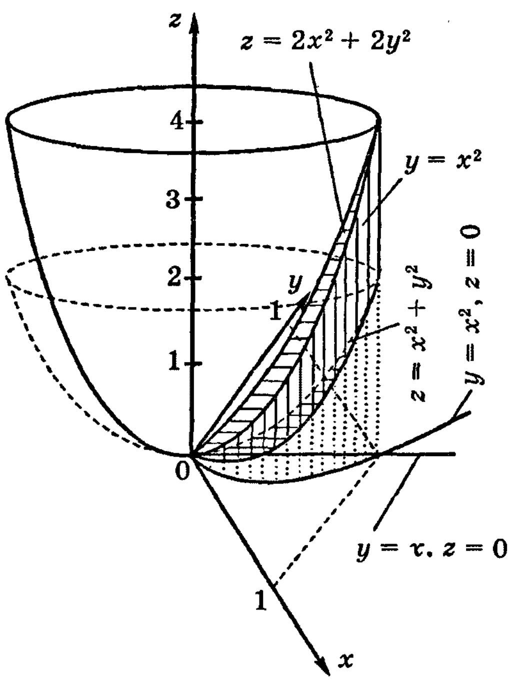
$$V = \iiint\limits_P dxdydz =$$

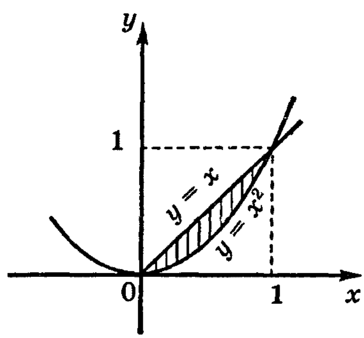
$$= \int_{-1}^{2} dx \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2+2}^{4-y^2} dz = 2\int_{-1}^{2} dx \int_{0}^{1} dy \int_{y^2+2}^{4-y^2} dz = 2\int_{-1}^{2} dx \int_{0}^{1} \left(z \Big|_{y^2+2}^{4-y^2} \right) dy =$$

$$= 2\int_{-1}^{2} dx \int_{0}^{1} \left(2 - 2y^2\right) dy = 4\int_{-1}^{2} \left(y - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 dx = 8.$$

Здесь использован тот факт, что искомое тело симметрично относительно плоскости Oxz ($y = 0$).

б) Искомое тело ограничено параболоидами вращения $z = x^2 + y^2$ и $z = 2x^2 + 2y^2$, цилиндром $y = x^2$ и плоскостью $y = x$. Поскольку образующая цилиндра параллельна оси Oz, а плоскость $y = x$ проходит через ось Oz, то в пересечении с плоскостью Oxy получается плоская область, ограниченная параболой $y = x^2$ и прямой $y = x$.





Диапазон изменения переменных:
$0 \le x \le 1$; $x^2 \le y \le x$; $x^2 + y^2 \le z \le 2x^2 + 2y^2$.
Переходим к расчету объема

$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \left(x^2 + y^2\right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{3}{25}.$$

Ответ: а) 8; б) $\frac{3}{25}$.

Физические приложения двойных и тройных интегралов

Масса и центр тяжести плоских фигур и пространственных тел

Пусть P – плоская область; $\rho(x; y)$ – плотность точек этой области, тогда ее масса M вычисляется по формуле

$$M = \iint_P \rho(x; y)\, dxdy.$$

Координаты центра тяжести области P определяются следующим образом

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_P \rho(x; y) \cdot x \cdot dxdy,$$

$$y_0 = \frac{1}{M} \iint_P \rho(x; y) \cdot y \cdot dxdy.$$

Если тело занимает объем P и имеет плотность $\rho(x; y; z)$, то его масса M и координаты центра тяжести вычисляются по формулам

$$M = \iiint_P \rho(x; y; z)\, dxdydz,$$

$$x_0 = \frac{1}{M} \iiint_P \rho(x; y; z) \cdot x \cdot dxdydz,$$

$$y_0 = \frac{1}{M} \iiint_P \rho(x; y; z) \cdot y \cdot dxdydz,$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\iiint\limits_P \rho(x;\, y;\, z)\cdot z\cdot dxdydz.$$

Если фигура или тело однородны, то $\rho = \text{const}$.

Моменты инерции плоских фигур и пространственных тел

Пусть область P расположена в плоскости Oxy и имеет плотность $p(x;\, y)$, тогда моменты инерции относительно осей Ox и Oy находятся по формулам:

$$I_x = \iint\limits_P \rho(x;y)\cdot y^2\cdot dxdy;\ I_y = \iint\limits_P \rho(x;y)\cdot x^2\cdot dxdy.$$

Центробежный момент инерции имеет вид:

$$I_{xy} = \iint\limits_P \rho(x;y)\cdot x\cdot y\cdot dxdy.$$

В случае $\rho = 1$ получаются так называемые геометрические моменты инерции области P.

Моменты инерции пространственного тела P относительно координатных плоскостей определяются по формулам:

$$I_{xy} = \iiint\limits_P \rho(x;\, y;\, z)\cdot z^2\cdot dxdydz;$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_P \rho(x;\, y;\, z)\cdot x^2\cdot dxdydz;$$

$$I_{zx} = \iiint\limits_P \rho(x;\, y;\, z)\cdot y^2\cdot dxdydz.$$

Момент инерции тела относительно некоторой оси l имеет вид:

$$I_l = \iiint\limits_P \rho(x;\, y;\, z)\cdot r^2\cdot dxdydz\ ,$$

где r – расстояние от точек тела до оси l.

Если в качестве оси рассматриваются координатные оси Ox; Oy и Oz, то

$$I_x = I_{xy} + I_{xz};\ I_y = I_{yx} + I_{yz};\ I_z = I_{zx} + I_{zy}.$$

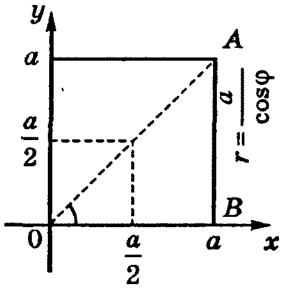
Момент инерции тела относительно начала координат:

$$I_0 = \iiint\limits_P \rho(x;\, y;\, z)\cdot (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz;$$

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}.$$

Пример 6. а) Найти массу квадратной пластинки со стороной a, если плотность пластинки в каждой точке пропорциональна расстоянию от этой точки до одной из вершин квадрата O и принимает значение ρ_0 в центре квадрата. б) Найти координаты центра тяжести. в) Найти моменты инерции пластинки относительно сторон квадрата, исходящих из вершины O. г) Найти центробежный момент инерции.

Решение.



а) Совместим начало отсчета с вершиной O квадрата. Оси Ox и Oy направим вдоль сторон квадрата, исходящих из вершины O. Поскольку плотность пропорциональна расстоянию до точки O, то

$$\rho(x;\, y) = k \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Коэффициент k легко находим из условия

$$\rho\left(\frac{a}{2};\, \frac{a}{2}\right) = \rho_0;\quad k\sqrt{\frac{a^2}{2}} = \rho_0;\ k = \frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}.$$

Следовательно, $\rho(x;\, y) = \dfrac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$.

Переходим к расчету массы пластинки; очевидно, что плотность пластинки является функцией, симметричной относительно прямой $y = x$ $\left(\varphi = \dfrac{\pi}{4}\right)$, поэтому ограничимся вычислением массы треугольной области OAB. Целесообразно перейти к полярным координатам $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$; $\rho(x;\, y) = \dfrac{\rho_0\sqrt{2}}{a}r$;

уравнение прямой AB: $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$.

Получаем:

$$\frac{1}{2}M = \iint\limits_P \rho(x;y)\,dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\cos\varphi}} \frac{\rho_0\sqrt{2}}{a} r\cdot r\cdot dr =$$

$$= \frac{\rho_0\sqrt{2}a^3}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{\rho_0 a^2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\,d(\operatorname{tg}\varphi).$$

Воспользуемся результатом, полученным в примере 3:

$$\int\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2}+\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right);$$

следовательно,

$$M = \frac{2\rho_0 a^2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\varphi\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}+\ln\left(\operatorname{tg}\varphi+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\rho_0 a^2\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) = \frac{\rho_0 a^2}{3}\left(2+\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

б) Для определения координат центра тяжести необходимо найти следующие интегралы:

$$\iint_P \rho(x;y)\cdot x\cdot dxdy \text{ и } \iint_P \rho(x;y)\cdot y\cdot dxdy:$$

$$\iint_P \rho(x;y)\cdot x\cdot dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}\frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}r\cdot r\cdot\cos\varphi\cdot r\cdot dr +$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}}\frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}r\cdot r\cdot\cos\varphi\cdot r\cdot dr =$$

$$= \frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{r^4}{4}\Bigg|_{r=0}^{r=\frac{a}{\cos\varphi}}\cos\varphi\,d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^4}{4}\Bigg|_{r=0}^{r=\frac{a}{\sin\varphi}}\cos\varphi\,d\varphi\right) =$$

$$= \frac{\rho_0\sqrt{2}a^3}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin\varphi)}{\sin^4\varphi}\right) =$$

$$= \frac{\rho_0 a^3\sqrt{2}}{24}\left(7\sqrt{2}-2+3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right);$$

аналогично получаем

$$\iint_P \rho(x;y)\cdot y\cdot dxdy = \frac{\rho_0 a^3\sqrt{2}}{24}\left(7\sqrt{2}-2+3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

Таким образом, координаты центра тяжести

$$x_0 = y_0 = \frac{a\sqrt{2}}{8}\frac{7\sqrt{2}-2+3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2+\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \approx 0{,}5741a.$$

в) Моменты инерции относительно осей Ox и Oy определяются по формулам

$$I_x = \iint_P \rho(x;y)\cdot y^2\cdot dxdy;\ I_y = \iint_P \rho(x;y)\cdot x^2\cdot dxdy.$$

В полярных координатах получаем:

$$I_x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}} \frac{\rho_0\sqrt{2}}{a} r\cdot r^2\cdot\sin^2\varphi\cdot r\cdot dr +$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} \frac{\rho_0\sqrt{2}}{a} r\cdot r^2\cdot\sin^2\varphi\cdot r\cdot dr =$$

$$= \frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\cdot\frac{a^5}{5}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^5\varphi}d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^5\varphi}d\varphi\right) = \left|\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi\right| =$$

$$= \frac{\rho_0 a^4\sqrt{2}}{5}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^5\varphi} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^3\varphi}\right);$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^5\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\mathrm{tg}^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}} d(\mathrm{tg}\,\varphi) = \left|\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,\varphi = t\\ t(0)=0\\ t\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right| = \int_0^1\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}} dt =$$

$$=\left(\frac{1}{4}t\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{8}t\left(1+t^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{8}\ln\left(t+\left(1+t^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{7\sqrt{2}}{8}+\frac{3}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right);$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}=\begin{vmatrix}\varphi=\frac{\pi}{2}-\psi\\ \psi=\frac{\pi}{2}-\varphi\end{vmatrix}=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\psi}{\sin^3\psi}=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sin^3\psi},$$

следовательно,

$$I_x=\frac{\rho_0 a^4\sqrt{2}}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^5\varphi}=\frac{\rho_0 a^4\sqrt{2}}{40}\left(7\sqrt{2}+3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

Легко показать, что $I_y=I_x$.

г) Найдем центробежный момент инерции пластинки:

$$I_{xy}=\iint\limits_P\rho(x;y)\cdot x\cdot y\cdot dxdy=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}\frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}r\cdot r^2\cdot\sin\varphi\cos\varphi\cdot r\cdot dr+$$

$$+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{a}{\sin\varphi}}\frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}r\cdot r^2\cdot\sin\varphi\cos\varphi\cdot r\cdot dr=$$

$$=\frac{\rho_0\sqrt{2}a^4}{5}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi\cdot d\varphi}{\cos^4\varphi}+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\varphi\cdot d\varphi}{\sin^4\varphi}\right)=$$

$$=\frac{\rho_0 a^4\sqrt{2}}{5}\left(-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\cos\varphi)}{\cos^4\varphi}+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin\varphi)}{\sin^4\varphi}\right)=$$

$$= \frac{\rho_0 a^4 \sqrt{2}}{5}\left(-\frac{1}{\cos^3\varphi}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\sin^3\varphi}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\rho_0 a^4 \sqrt{2}}{15}\left(4\sqrt{2}-2\right) =$$

$$= \frac{\rho_0 a^4}{15}\left(8-2\sqrt{2}\right).$$

Ответ: а) $M = \dfrac{\rho_0 a^2}{3}\left(2+\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$;

б) $x_0 = y_0 = \dfrac{a\sqrt{2}}{8}\dfrac{7\sqrt{2}-2+3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2+\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$;

в) $I_x = I_y = \dfrac{\rho_0 a^4 \sqrt{2}}{40}\left(7\sqrt{2}+3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$;

г) $I_{xy} = \dfrac{\rho_0 a^4}{15}\left(8-2\sqrt{2}\right)$.

Задания для самостоятельного решения

Найти площади плоских фигур, ограниченных линиями:

1. $y = 2x;\ y = \dfrac{1}{2}x;\ x = 2$.
2. $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$.

Найти площадь части поверхности:

3. $z = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.
4. $x^2 + y^2 = 2z$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

5. $z = \sin\dfrac{\pi y}{2x};\ z = 0;\ y = x;\ y = 0;\ x = \pi$.
6. $2y^2 = x;\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{4} = 1;\ z = 0$.
7. Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей Ox и Oy площадей, ограниченных следующими кривыми: $xy = 1;\ xy = 2;\ x = 2y;\ 2x = y\ (x > 0,\ y > 0)$.
8. Найти центробежный момент инерции I_{xy} однородной плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2,\ x = y^2$.

9. Найти координаты центра тяжести круглой пластины $x^2 + y^2 \le 1$, если ее плотность в точке $M(x; y)$ пропорциональна расстоянию точки M до точки $A(1; 0)$.

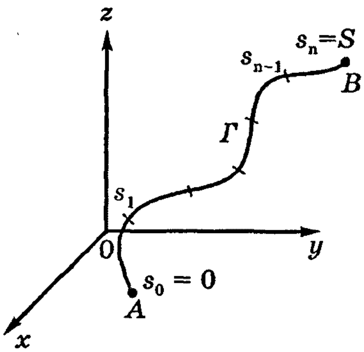
Ответы:

1. 3; 2. $\frac{5\pi}{8}$; 3. $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$; 4. $\frac{20-3\pi}{9}$; 5. π; 6. $16\frac{1}{5}$;

7. $I_x = I_y = \frac{9}{8}$; 8. $\frac{1}{12}$; 9. $\left(-\frac{1}{5}; 0\right)$.

7.6. Криволинейные и поверхностные интегралы и их приложения

Криволинейные интегралы первого рода



Пусть функция $w = f(x; y; z)$ определена во всех точках пространственной кривой Γ, заданной параметрически:

$x = x(s)$; $y = y(s)$; $z = z(s)$; $0 \le s \le S$, где s – переменная длина дуги. Произвольной конечной системой точек

$0 = s_0 < s_1 < s_2 \ldots < s_{n-1} < s_n = S$ разбиваем отрезок $[0; S]$ на отрезки $[s_i; s_{i+1}]$; $i = 0; 1; \ldots; n-1$. На каждом из этих отрезков произвольным образом выбираем точку $c_{i+1} \in [s_i, s_{i+1}]$ и рассчитываем значение функции в этой точке $w_i = f(x(c_{i+1}); y(c_{i+1}); z(c_{i+1}))$.

Переходим к составлению интегральной суммы

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \Delta s_i,$$

где $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$. Обозначим через $\lambda = max\,|\Delta s_i|$, $i = 0; \ldots; n-1$.

Определение 1. Если при $\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$ существует конечный предел интегральных сумм σ, то этот предел называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции w по кривой Γ:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \int\limits_{\Gamma} w(x(s);\, y(s);\, z(s))\ ds.$$

Если кривая Γ задана уравнениями

$$x = x(s);\ y = y(s);\ z = z(s),\ 0 \le s \le S,$$

где s – переменная длина дуги, то

$$\int\limits_{\Gamma} w(x(s); y(s); z(s))\, ds = \int\limits_{0}^{S} w(x(s);\, y(s);\, z(s))\, ds.$$

Если кривая Γ задана уравнениями

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t),\ a \le t \le b,$$

где $x(t)$; $y(t)$; $z(t)$ – непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a;\, b]$ функции, тогда

$$\int\limits_{\Gamma} w(x; y; z)\, ds =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} w(x(t);\, y(t);\, z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + \ (z'(t))^2}\ dt.$$

Если $\rho = \rho(x;\, y;\, z)$ – линейная (погонная) плотность пространственной кривой Γ, то масса кривой находится по формуле

$$M = \int\limits_{\Gamma} \rho(x; y; z)\, ds.$$

Координаты центра тяжести:

$$x_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{\Gamma} x \cdot \rho(x; y; z)\, ds; \qquad y_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{\Gamma} y \cdot \rho(x; y; z)\, ds;$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{\Gamma} z \cdot \rho(x; y; z)\, ds.$$

Пример 1. Вычислить криволинейные интегралы первого рода :

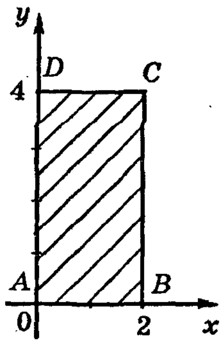
а) $\int\limits_{\Gamma} xy\, ds$, где Γ – контур прямоугольника с вершинами $A(0;\, 0)$; $B(2;\, 0)$; $C(2;\, 4)$; $D(0;\, 4)$;

б) $\int\limits_{\Gamma} y^2\, ds$, где Γ – арка циклоиды $x = a(t - \sin\ t)$; $y = a(1 - \cos t)$; $0 \le t \le 2\pi$;

в) $\int\limits_{\Gamma}\left(x^2+y^2+z^2\right)ds$, где Γ – часть винтовой линии $x = a\cos t$; $y = a\sin t$; $z = bt$; $0 \le t \le 2\pi$;

г) $\int\limits_{\Gamma} z\,ds$, где Γ – коническая винтовая линия $x = t\cos t$; $y = t\sin t$; $z = t$; $0 \le t \le t_0$.

Решение.



а) $\int\limits_{\Gamma} xy\,ds = \int\limits_{AB} xy\,ds + \int\limits_{BC} xy\,ds + \int\limits_{CD} xy\,ds + \int\limits_{DA} xy\,ds.$

На отрезке AB $y \equiv 0$, следовательно,

$\int\limits_{AB} xy\,ds = 0.$

На отрезке BC $x \equiv 2$; $ds = dy$; $0 \le y \le 4$:

$\int\limits_{BC} xy\,ds = \int\limits_0^4 2y\,dy = y^2\Big|_0^4 = 16.$

На отрезке CD $y \equiv 4$; $ds = -\,dx$; $0 \le x \le 2$

$$\int\limits_{CD} xy\,ds = \int\limits_2^0 4\cdot x(-dx) = 4\int\limits_2^0 x\,dx = 2x^2\Big|_0^2 = 8.$$

На отрезке DA $x \equiv 0$; $ds = dy$; $0 \le y \le 4$:

$$\int\limits_{DA} xy\,ds = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma} xy\,ds = 24.$$

б) $\int\limits_{\Gamma} y^2\,ds = \int\limits_0^{2\pi} y^2(t)\cdot\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt.$

Преобразуем подынтегральное выражение:

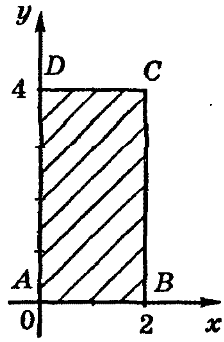
$x(t) = a(t - \sin t)$; $y(t) = a(1-\cos t)$; $y^2(t) = 4a^2\sin^4\dfrac{t}{2}$;

$x'(t) = a\,(1-\cos t)$; $y'(t) = a\sin t$;

в) $\int\limits_{\Gamma}\left(x^2+y^2+z^2\right)ds$, где Γ – часть винтовой линии $x=a\cos t$; $y=a\sin t$; $z=bt$; $0\le t\le 2\pi$;

г) $\int\limits_{\Gamma} z\,ds$, где Γ – коническая винтовая линия $x=t\cos t$; $y=t\sin t$; $z=t$; $0\le t\le t_0$.

Решение.



а) $\int\limits_{\Gamma} xy\,ds=\int\limits_{AB} xy\,ds+\int\limits_{BC} xy\,ds+$

$+\int\limits_{CD} xy\,ds+\int\limits_{DA} xy\,ds.$

На отрезке AB $y\equiv 0$, следовательно,

$\int\limits_{AB} xy\,ds=0.$

На отрезке BC $x\equiv 2$; $ds=dy$; $0\le y\le 4$:

$$\int\limits_{BC} xy\,ds=\int\limits_0^4 2y dy=y^2\Big|_0^4=16.$$

На отрезке CD $y\equiv 4$; $ds=-dx$; $0\le x\le 2$

$$\int\limits_{CD} xy\,ds=\int\limits_2^0 4\cdot x(-dx)=4\int\limits_2^0 xdx=2x^2\Big|_0^2=8.$$

На отрезке DA $x\equiv 0$; $ds=dy$; $0\le y\le 4$:

$$\int\limits_{DA} xy\,ds=0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma} xy\,ds=24.$$

б) $\int\limits_{\Gamma} y^2\,ds=\int\limits_0^{2\pi} y^2(t)\cdot\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt.$

Преобразуем подынтегральное выражение:

$x(t)=a(t-\sin t)$; $y(t)=a(1-\cos t)$; $y^2(t)=4a^2\sin^4\dfrac{t}{2}$;

$x'(t)=a\,(1-\cos t)$; $y'(t)=a\sin t$;

$$= \int_0^{t_0} t\cdot\sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{t_0}\left(t^2+2\right)^{\frac{1}{2}}\,d(t^2+2) = \frac{1}{3}\left(t^2+2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{t_0} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(t_0^2+2\right)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right).$$

Ответ: а) 24; б) $\frac{256}{15}a^3$; в) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2+\frac{4}{3}\pi^2 b^2\right)$;

г) $\frac{1}{3}\left(\left(t_0^2+2\right)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right)$.

Пример 2. Найти массу и координаты центра тяжести участка винтовой линии $x = a\cos t$; $y = a\sin t$; $t = bt$, $0 \le t \le \pi$, считая плотность ρ постоянной.

Решение.

Вычислим массу указанного участка винтовой линии:

$$M = \int_\Gamma \rho\,ds = \rho\int_0^{\pi}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\,dt =$$

$$= \rho\int_0^{\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \rho\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

Переходим к расчету координат центра тяжести:

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_\Gamma \rho x ds = \frac{\rho}{M}\int_0^{\pi} a\cdot\cos t\cdot\sqrt{a^2+b^2}dt = \frac{a}{\pi}(\sin t)\Big|_0^{\pi} = 0;$$

$$y_0 = \frac{1}{M}\int_\Gamma \rho y ds = \frac{\rho}{M}\int_0^{\pi} a\cdot\sin t\cdot\sqrt{a^2+b^2}dt = \frac{a}{\pi}(-\cos t)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2a}{\pi};$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\int_\Gamma \rho z ds = \frac{\rho}{M}\int_0^{\pi} b\cdot t\cdot\sqrt{a^2+b^2}dt = \frac{b}{\pi}\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi b}{2}.$$

Ответ: $\rho\pi\sqrt{a^2+b^2}$; $\left(0; \frac{2a}{\pi}; \frac{\pi b}{2}\right)$.

Криволинейные интегралы второго рода

Пусть Γ – пространственная кривая, задаваемая уравнениями:

$$x = x(s);\ y = y(s);\ z = z(s),\ 0 \le s \le S,$$

где $x(s)$; $y(s)$; $z(s)$ – непрерывно дифференцируемые на отрезке $[0;\ S]$ функции.

Пусть также $(\cos\alpha(s);\ \cos\beta(s);\ \cos\gamma(s))$ – единичный касательный вектор к кривой, а функция $w(x;\ y;\ z)$ определена во всех точках Γ.

Определение 2. Интегралы вида:

$$\int\limits_\Gamma w(x;y;z)\,dx = \int\limits_\Gamma w(x;y;z)\cdot\cos\alpha\cdot ds;$$

$$\int\limits_\Gamma w(x;y;z)\,dy = \int\limits_\Gamma w(x;y;z)\cdot\cos\beta\cdot ds;$$

$$\int\limits_\Gamma w(x;y;z)\,dz = \int\limits_\Gamma w(x;y;z)\cdot\cos\gamma\cdot ds$$

называются *криволинейными интегралами второго рода* от функции w по кривой Γ.

Пусть функции $P(x;\ y;\ z)$; $Q(x;\ y;\ z)$ и $R(x;\ y;\ z)$ непрерывны в точках кривой Γ, которая проходится в направлении возрастания параметра t, определяющего кривую Γ:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t),\ a \le t \le b.$$

Тогда

$$\int\limits_\Gamma P(x;y;z)\,dx + Q(x;\ y;\ z)dy + R(x;\ y;\ z)dz =$$

$$= \int\limits_a^b (P(x(t);y(t);z(t))\cdot x'(t) + Q(x(t);\ y(t);\ z(t))\cdot y'(t) +$$

$$+ R(x(t);\ y(t);\ z(t))\cdot z'(t))dt.$$

При изменении ориентации кривой, т. е. при изменении направления обхода этой кривой, интеграл меняет знак.

Пусть $\vec{F} = (P;\ Q;\ R)$ – сила, действующая на материальную точку, движущуюся вдоль кривой Γ. Тогда *работа этой силы* вдоль данной траектории определяется по формуле

$$A = \int\limits_\Gamma P(x;y;z)\,dx + Q(x;\ y;\ z)dy + R(x;\ y;\ z)dz.$$

Пример 3. Вычислить криволинейные интегралы второго рода:

а) $\int\limits_\Gamma (x^2-2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)dy$, где Γ – дуга параболы $y = x^2$; $x \in [-1, 1]$;

б) $\int\limits_\Gamma (x^2+y^2)\,dx + (x^2 - y^2)dy$, где Γ – кривая $y = 1 - |1 - x|$; $x \in [0, 2]$;

в) $\int\limits_\Gamma -x \cdot \cos y \cdot dx + y \cdot \sin x \cdot dy$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $(0; 0)$ и $(\pi; 2\pi)$;

г) $\int\limits_\Gamma yz\,dx + zxdy + xydz$, где Γ – дуга винтовой линии $x = a\cos t$; $y = a\sin t$; $z = \dfrac{bt}{2\pi}$; $0 \le t \le 2\pi$.

Решение.

а) Так как $y = x^2$, $dy = 2xdx$, то

$$\int\limits_\Gamma (x^2-2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)dy = \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 2x \cdot x^2 + ((x^2)^2 -$$

$$- 2x \cdot x^2) \cdot 2x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{4}{5} =$$

$$= -\frac{14}{15}.$$

б) Линия $y = 1 - |1 - x|$ состоит из отрезков двух прямых:

$$y = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2; \end{cases}$$

поэтому $\int\limits_\Gamma (x^2+y^2)\,dx + (x^2 - y^2)dy =$

$$= \int\limits_{\Gamma_1} (x^2+y^2)\,dx + (x^2 - y^2)dy + \int\limits_{\Gamma_2} (x^2+y^2)\,dx + (x^2 - y^2)dy,$$

где контур Γ_1 задается уравнением $y = x$, $x \in [0;\ 1]$; контур Γ_2 задается уравнением $y = 2 - x$, $x \in [1;\ 2]$;

$$\int_{\Gamma}(x^2+y^2)\,dx + (x^2 - y^2)dy = \int_0^1 (x^2 + x^2 + x^2 - x^2)dx +$$

$$+\int_1^2 (x^2 + (2-x)^2 + (x^2 - (2-x)^2)\cdot(-1))dx = \int_0^1 2x^2\,dx -$$

$$-2\int_1^2 (2-x)^2\,d(2-x) = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1 - \left.\frac{2(2-x)^3}{3}\right|_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

в) Уравнение прямой, проходящей через точки (0; 0) и (π; 2π), имеет вид: $y = 2x$, следовательно,

$$\int_{\Gamma} -x\cdot\cos y\cdot dx + y\cdot\sin x\cdot dy =$$

$$= \int_0^{\pi}(-x\cdot\cos 2x + 2x\cdot\sin x\cdot 2)dx = -\int_0^{\pi} x\cdot\cos 2x\,dx +$$

$$+4\int_0^{\pi} x\cdot\sin x\,dx = -I_1 + 4I_2.$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} x\cdot\cos 2x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos 2x dx & v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{matrix}\right| =$$

$$= \left.\left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\right|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx = \left.\frac{1}{4}\cos 2x\right|_0^{\pi} = 0;$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} x\cdot\sin x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{matrix}\right| =$$

$$= -\left.(x\cdot\cos x)\right|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos x\,dx = \pi.$$

Окончательно получаем

$$\int_{\Gamma} -x\cdot\cos y\cdot dx + y\cdot\sin x\cdot dy = 4\pi.$$

г) $$\int_\Gamma yz\,dx + zxdy + xydz = \int_0^{2\pi}\left(a\cdot\sin t\cdot\frac{bt}{2\pi}\cdot(a\cos t)' +\right.$$

$$\left.+\frac{bt}{2\pi}\cdot a\cdot\cos t\cdot(a\sin t)' + a\cos t\cdot a\cdot\sin t\left(\frac{bt}{2\pi}\right)'\right)dt =$$

$$= \frac{a^2b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\sin^2 t\cdot t+\cos^2 t\cdot t+\frac{\sin 2t}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{a^2b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\sin^2 t\cdot t+\cos^2 t\cdot t+\frac{\sin 2t}{2}\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\sin 2t\cdot dt = -\frac{1}{2}(\cos 2t)\Big|_0^{2\pi} = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} t\cdot\cos 2t\cdot dt = \begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ dv = \cos 2t dt & v = \frac{1}{2}\sin 2t\end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{t}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t\cdot dt = \frac{1}{4}(\cos 2t)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Следовательно, $\int_\Gamma yz\,dx + zxdy + xydz = 0.$

Ответ: а) $-\frac{14}{15}$; б) $\frac{4}{3}$; в) 4π; г) 0.

Интегрирование полных дифференциалов

В общем случае криволинейный интеграл зависит от вида кривой Γ. Существуют, однако, случаи, когда криволинейный интеграл второго рода не зависит от конкретного выбора кривой Γ, а определяется лишь точками начала и конца дуги интегрирования.

Теорема 1. Пусть $w = w(x; y; z)$ – однозначная дифференцируемая функция в области D, и при этом

$dw(x; y; z) = P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz.$

Тогда для любого контура Γ, целиком расположенного в D, началом которого является точка $(x_1; y_1; z_1)$ и концом которого является точка $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, выполняется условие:

$$\int_\Gamma P(x;y;z)\,dx + Q(x;\ y;\ z)dy + R(x;\ y;\ z)dz =$$
$$= w(x_2;\ y_2;\ z_2) - w(x_1;\ y_1;\ z_1).$$

Теорема 2. Пусть функции $P(x;\ y;\ z)$; $Q(x;\ y;\ z)$ и $R(x;\ y;\ z)$ имеют непрерывные частные производные в односвязной области D. Криволинейный интеграл второго рода

$$\int_\Gamma P(x;y;z)\,dx + Q(x;\ y;\ z)dy + R(x;\ y;\ z)dz$$

определяется только координатами начала и конца дуги интегрирования тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y};\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Независимость интеграла от пути интегрирования позволяет выбирать в качестве линии Γ наиболее простой контур.

Заметим также, что если контур Γ – замкнутый, то соответствующий интеграл равен нулю.

Пример 4. Показать, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Вычислить криволинейные интегралы:

а) $\oint_\Gamma y\cdot f(xy)dx + x\cdot f(xy)dy$, Γ – замкнутый контур;

б) $\int\limits_{(-2;\,-1)}^{(3;\,0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$;

в) $\int\limits_{(1;\,2;\,3)}^{(6;\,1;\,1)} yz\,dx + xzdy + xydz.$

Решение.

а) Проверим выполнение условия теоремы 2 применительно к случаю плоского контура интегрирования:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

где $P(x;\ y) = y\cdot f(xy)$; $Q(x;\ y) = x\cdot f(xy)$.

Итак,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y\cdot f(xy))=f(xy)+y\cdot f'(xy)\cdot x;$$

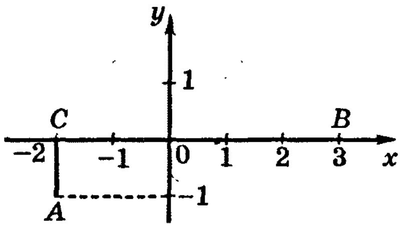
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x\cdot f(xy))=f(xy)+x\cdot f'(xy)\cdot y.$$

Поскольку $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, исходный интеграл не зависит от контура интегрирования, и при условии, что контур замкнут, принимает значение 0.

б) $P(x;\,y)=x^4+4xy^3$; $Q(x;\,y)=6x^2y^2-5y^4$;

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy^2;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=12xy^2,$$

следовательно, значение интеграла не зависит от выбора контура интегрирования.



Может показаться, что в качестве Γ проще всего выбрать отрезок прямой AB; однако, это не так. Лучшим вариантом оказывается ломаная ACB, поскольку на отрезке AC

$$x=-2;\ dx=0;\ -1\le y\le 0,$$

а на отрезке CB

$$y=0;\ dy=0;\ -2\le x\le 3.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{(-2;\,-1)}^{(3;\,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{0}(6\cdot(-2)^2y^2-5y^4)dy+\int\limits_{-2}^{3}(x^4+4x\cdot 0)dx=$$

$$=\left(24\cdot\frac{y^3}{3}-y^5\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-2}^{3}=7+\frac{243}{5}+\frac{32}{5}=62.$$

в) $P(x;\,y;\,z)=yz$; $Q(x;\,y;\,z)=xz$; $R(x;\,y;\,z)=xy$.

Очевидно, что

$$\frac{\partial P}{\partial y}=z=\frac{\partial Q}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial z}=x=\frac{\partial R}{\partial y};\ \frac{\partial R}{\partial x}=y=\frac{\partial P}{\partial z},$$

т. е. условия теоремы 2 выполнены. Исходный интеграл не зависит от контура интегрирования. Соединим точку $A(1;\,2;\,3)$ с точкой $D(6;\,1;\,1)$ ломаной $ABCD$, где точки B и

C имеют соответственно координаты $B(6;\ 2;\ 3)$; $C(6;\ 1;\ 3)$. Очевидно, что на отрезке прямой AB

$y = 2$; $z = 3$; $dy = dz = 0$; x возрастает от 1 до 6;
на отрезке BC

$x = 6$; $z = 3$; $dx = dz = 0$; y уменьшается от 2 до 1;
на отрезке CD

$x = 6$; $y = 1$; $dx = dy = 0$; z уменьшается от 3 до 1.

Таким образом,

$$\int\limits_{(1;\ 2;\ 3)}^{(6;\ 1;\ 1)} yz\,dx + xzdy + xydz = \int\limits_{1}^{6} 2\cdot 3\cdot dx + \int\limits_{2}^{1} 6\ \cdot 3\cdot dy +$$

$$+\int\limits_{3}^{1} 6\ \cdot 1\cdot dz = 6\cdot x\Big|_{1}^{6} + 18\cdot y\Big|_{2}^{1} + 6\cdot z\Big|_{3}^{1} = 30 - 18 - 12 = 0.$$

Ответ: а) 0 ; б) 62 ; в) 0.

Формула Грина и ее применение

Теорема 3. Пусть D – плоская область, ограниченная кусочно-гладким контуром Γ, проходимым в положительном направлении. Пусть также функции $P(x;\ y)$ и $Q(x;\ y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка $\dfrac{\partial P(x;\ y)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q(x;\ y)}{\partial x}$ всюду в области D, включая контур Γ. Тогда справедлива формула Грина

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x; y)\,dx + Q(x;\ y)dy = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q(x;\ y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x;\ y)}{\partial y}\right)dxdy.$$

Формула Грина может быть эффективно использована для расчета площадей плоских фигур, ограниченных контуром Γ:

$$S = \oint\limits_{\Gamma} x\,dy = -\oint\limits_{\Gamma} y\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} x\,dy - ydx.$$

Пример 5. Применяя формулу Грина, преобразовать криволинейные интегралы по замкнутым контурам, проходимым в положительном направлении, в двойные интегралы:

а) $\oint\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy;$

б) $\oint\limits_{\Gamma}(1-x^2)\,y\,dx + x(1+y^2)dy.$

Решение.

а) $P(x;\,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

$Q(x;\,y) = y\left(xy + \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)$;

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y\left(y+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

В соответствии с формулой Грина

$$\oint\limits_{\Gamma}\sqrt{x^2+y^2}dx+y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy =$$

$$= \iint\limits_{D}\left(y\left(y+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy = \iint\limits_{D}y^2\,dxdy,$$

где D – плоская область, ограниченная контуром Γ.

б) $P(x;\,y) = (1-x^2)y$; $Q(x;\,y) = x(1+y^2)$;

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2;\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + y^2,$$

следовательно,

$$\oint\limits_{\Gamma}(1-x^2)\,y\,dx + x(1+y^2)dy =$$

$$= \iint\limits_{D}((1+y^2) - (1-x^2))dxdy = \iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dxdy.$$

Ответ: а) $\iint\limits_{D}y^2\,dxdy$; б) $\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dxdy$.

Пример 6. Используя криволинейные интегралы, вычислить площади фигур, ограниченных плоскими кривыми:

а) эллипсом $x = a\cos t$; $y = b\sin t$; $t\in[0;\,2\pi]$;

б) астроидой $x = a\cos^3 t$; $y = b\sin^3 t$; $t\in[0;\,2\pi]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $S = \oint\limits_{\Gamma}x\,dy$:

$$S=\int_0^{2\pi} a\cdot\cos t\cdot(b\sin t)'dt=ab\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{ab}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\pi ab.$$

б) Воспользуемся формулой $S=\dfrac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdy-ydx$:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos^3 t\cdot\left(b\sin^3 t\right)'-b\sin^3 t\cdot\left(a\cos^3 t\right)'\right)dt=$$

$$=\frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^3 t\cdot\sin^2 t\cdot\cos t+\sin^3 t\cdot\cos^2 t\cdot\sin t\right)dt=$$

$$=\frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\cdot dt=\frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\cdot dt=$$

$$=\frac{3ab}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{3ab}{16}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{3\pi ab}{8}.$$

Ответ: а) πab; б) $\dfrac{3\pi ab}{8}$.

Поверхностный интеграл первого рода

Пусть *кусочно гладкая двусторонняя поверхность* D определяется уравнениями $x=x(u;v)$; $y=y(u;v)$; $z=z(u;v)$; $(u;v)\in\tilde{D}$.

Пусть также во всех точках этой поверхности определена непрерывная функция $f(x;y;z)$.

Определение 3. *Поверхностным интегралом первого рода* называется выражение вида

$$\iint\limits_D f(x;y;z)\,dD=\iint\limits_{\tilde{D}} f(x(u;v);\,y(u;v);\,z(u;v))\cdot\sqrt{EG-F^2}\;dudv$$

где $E=\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2$;

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2;\; F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Если уравнение поверхности имеет вид

$z=z(x;\,y);\ (x;\,y)\in\tilde{D}$, то

$$\iint\limits_D f(x;\,y;\,z)\,dD=\iint\limits_{\tilde{D}} f(x;\,y;\,z(x;\,y))\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Пример 7. Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

а) $\iint\limits_D\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dD$, где D – часть плоскости $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, ограниченная плоскостями $x=0$; $y=0$; $z=0$;

б) $\iint\limits_D(x+y+z)\,dD$, где D – поверхность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\ge 0$.

Решение.

а) Плоскость $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ пересекает оси Ox, Oy и Oz соответственно в точках $A(2;\,0;\,0)$; $B(0;\,3;\,0)$; $C(0;\,0;\,4)$.

Проекцией треугольника ABC на плоскость Oxy является треугольник AOB.

В плоскости Oxy прямая AB задается уравнением

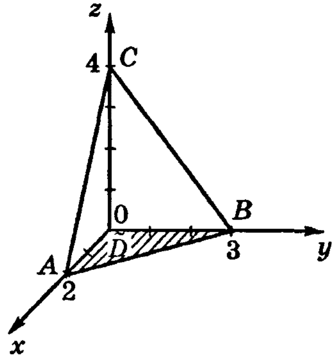
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \quad \text{или} \quad y=-\frac{3}{2}x+3.$$

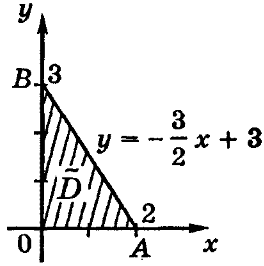
Выразим z из уравнения плоскости ABC:

$$z=4-2x-\frac{4}{3}y;\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-2;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4}{3}.$$

$$\iint\limits_D\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dD=$$

$$=\iint\limits_{\tilde{D}}\left(\left(4-2x-\frac{4}{3}y\right)+2x+\frac{4}{3}y\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=$$





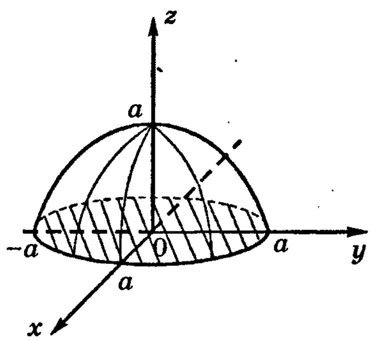
$$= \iint_{\tilde{D}} 4 \cdot \sqrt{\frac{61}{9}} \cdot dxdy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \iint_{\tilde{D}} dxdy.$$

Поскольку $\iint_{\tilde{D}} dxdy$ – площадь треугольника AOB, то

$$\iint_{D} \left(z + 2x + \frac{4}{3} y \right) dD = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot 3 = 4\sqrt{61}.$$

б) Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ задает поверхность полусферы с центром в начале координат и радиусом a, расположенную не ниже плоскости Oxy. Проекцией $\tilde{D}$ этой полусферы на плоскость Oxy является круг

$$x^2 + y^2 \leq a^2.$$



Вычислим элемент поверхности dD:

$$dD = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

Дифференцируя уравнение полусферы по переменным x и y, получаем

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z};$$

$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},$$

следовательно,

$$dD = \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dxdy = \sqrt{\frac{z^2+x^2+y^2}{z^2}}\,dxdy =$$

$$= \frac{a}{z}\,dxdy.$$

Переходим к интегрированию:

$$\iint\limits_D (x+y+z)\,dD = \iint\limits_{\tilde D}(x+y+z)\cdot\frac{a}{z}\,dxdy =$$

$$= a\cdot I_1 + a\cdot I_2 + a\cdot I_3,$$

где $I_1 = \iint\limits_{\tilde D}\frac{xdxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$; $I_2 = \iint\limits_{\tilde D}\frac{ydxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$;

$I_3 = \iint\limits_{\tilde D} dxdy$.

Поскольку круг $\tilde D$ симметричен относительно осей Ox и Oy, а функции $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ и $\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ нечетны соответственно по переменным x и y, то

$$I_1 = I_2 = 0.$$

Интеграл I_3 совпадает с площадью круга $\tilde D$, т. е.

$$I_3 = \pi a^2.$$

Таким образом, $\iint\limits_D (x+y+z)\,dD = \pi a^3$.

Ответ: а) $4\sqrt{61}$; б) πa^3.

Пример 8. Вычислить интеграл $\iint\limits_D z^2\,dD$, где D – часть конической поверхности:

$x = r\cos\varphi\cdot\sin\alpha$; $y = r\sin\varphi\cdot\sin\alpha$; $z = r\cos\alpha$;

$0 \le r \le a$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; α – const $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

Вычислим элемент поверхности $dD = \sqrt{EG-F^2}\,drd\varphi$:

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2=$$
$$=(\cos\varphi\cdot\sin\alpha)^2+(\sin\varphi\cdot\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1;$$
$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2=$$
$$=(-r\sin\varphi\cdot\sin\alpha)^2+(r\cos\varphi\cdot\sin\alpha)^2=r^2\sin^2\alpha;$$
$$F=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi}=$$
$$=(\cos\varphi\cdot\sin\alpha)\cdot(-r\sin\varphi\cdot\sin\alpha)+$$
$$+(\sin\varphi\cdot\sin\alpha)\cdot(r\cos\varphi\cdot\sin\alpha)=0;$$
$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{r^2\sin^2\alpha}=r\sin\alpha;\ dD=r\sin\alpha\cdot dr\,d\varphi.$$

Переходим к интегрированию:

$$\iint\limits_D z^2\,dD=\iint\limits_{\tilde D} r^2\cos^2\alpha\cdot r\cdot\sin\alpha\cdot dr\,d\varphi=$$
$$=\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha\iint\limits_{\tilde D} r^3\,dr\,d\varphi=\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{a}r^3\,dr=$$
$$=\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha.$$

Ответ: $\dfrac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha.$

Поверхностный интеграл второго рода

Пусть D – гладкая двусторонняя поверхность, при этом нормаль $(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$ определяет сторону D^+.

Определение 4. *Поверхностным интегралом второго рода* называется выражение вида

$$\iint\limits_{D^+} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=$$
$$=\iint\limits_D (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dD,$$

где $P(x;\ y;\ z)$; $Q(x;\ y;\ z)$; $R(x;\ y;\ z)$ определены и непрерывны на поверхности D.

Если поверхность D задается уравнениями

$$x = x(u;\ v);\ y = y(u;\ v);\ z = z(u;\ v);\ (u;\ v) \in \tilde{D},$$

то направляющие косинусы нормали имеют вид

$$\cos\alpha = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \cos\beta = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix};\ B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix};\ C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Знак выбирается в зависимости от стороны поверхности D.

Пример 9. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_D x^2\, y^2 z\,dxdy$, где D – положительная сторона нижней половины сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Решение.

Проекцией области D на плоскость Oxy является круг $\tilde{D}$ с центром в начале координат, имеющий радиус R:

$$x^2 + y^2 \le R^2,$$

поэтому при интегрировании удобнее использовать полярные координаты $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$.

Поскольку на нижней половине сферы

$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, то $\iint\limits_D x^2\, y^2 z\,dxdy =$

$$= -\iint\limits_{\tilde{D}} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^2\cos^2\varphi \cdot r^2\sin^2\varphi \cdot \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r \cdot dr =$$

$$= -\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi\,d\varphi \cdot \int\limits_0^R r^5 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}\,dr;$$

$$I_1=\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi=\left(\frac{1}{2}\varphi-\frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\pi.$$

$$I_2=\int_0^R r^5\cdot\sqrt{R^2-r^2}\,dr=\left|\begin{array}{l}\sqrt{R^2-r^2}=t\\ r^2=R^2-t^2\\ rdr=-tdt\\ t(0)=R\\ t(R)=0\end{array}\right|=-\int_R^0(R^2-t^2)^2\cdot t\cdot tdt=$$

$$=\int_0^R(R^4t^2-2R^2t^4+t^6)\,dt=\left(R^4\frac{t^3}{3}-\frac{2R^2t^5}{5}+\frac{t^7}{7}\right)\Bigg|_0^R=$$

$$=\frac{8}{105}R^7.$$

Следовательно, $\iint\limits_D x^2y^2zdxdy=-\frac{2\pi}{105}R^7.$

Ответ: $-\frac{2\pi}{105}R^7.$

Формула Стокса. Формула Остроградского

Пусть $P(x;y;z)$; $Q(x;y;z)$; $R(x;y;z)$ – непрерывно дифференцируемые функции; Γ – простой замкнутый кусочно-гладкий контур, ограничивающий двустороннюю поверхность D, тогда выполняется **формула Стокса:**

$$\oint\limits_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_D\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dD,$$

где $\cos\alpha$; $\cos\beta$; $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали, ориентированной так, что относительно нее обход контура Γ совершается против хода часовой стрелки.

Пусть D – кусочно гладкая поверхность, ограничивающая объем V, включая поверхность D. Пусть также $P(x;y;z)$; $Q(x;y;z)$; $R(x;y;z)$ – функции, непрерывные вместе со своими частными производными в области V, тогда выполняется **формула Остроградского**

$$\iint_D (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dD =$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

где $\cos\alpha$; $\cos\beta$; $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности D.

Пример 10. С помощью формулы Стокса преобразовать интеграл $\oint_\Gamma (y^2+z^2)\,dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)dz$, который берется по некоторому замкнутому контуру Γ, в поверхностный интеграл по поверхности D, ограниченной контуром Γ.

Решение.

В соответствии с формулой Стокса

$$\oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint_D \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dD =$$

$$= \iint_D \left(\cos\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \cos\beta\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \right.$$

$$\left. + \cos\gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right) dD = 2\iint_D (\cos\alpha\cdot(y-z) + \cos\beta\cdot(z-x) +$$

$$+ \cos\gamma\cdot(x-y))dD = 2\iint_D (x-y)\,dxdy + (z-x)dxdz +$$

$$+ (y-z)dydz.$$

Ответ: $2\iint_D (x-y)\,dxdy + (z-x)dxdz + (y-z)dydz.$

Пример 11. Используя формулу Остроградского, преобразовать поверхностный интеграл к тройному:

$$\iint\limits_D \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)dD.$$

Решение.

В соответствии с формулой Остроградского получим

$$\iint\limits_D (A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)dD=$$

$$=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right)dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}\right)dxdydz=0.$$

Ответ: 0.

Задания для самостоятельного решения

Вычислить криволинейные интегралы первого рода:

1. $\int\limits_{\Gamma}(x+y)\,ds$, Γ – контур треугольника с вершинами (0; 0); (1; 0) и (0;1);

2. $\int\limits_{\Gamma}(x^2+y^2)\,ds$, Γ – кривая $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

3. $\int\limits_{\Gamma}x^2\,ds$, Γ – окружность: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=a$.

4. Найти координаты центра тяжести однородной дуги $x=e^t\cdot\cos t$; $y=e^t\cdot\sin t$; $z=e^t$; $t\le 0$.

Вычислить криволинейные интегралы второго рода:

5. $\int\limits_{\Gamma}(2xy-1)\,dx+(x^2y+2)dy$, Γ – дуга эллипса $x=\cos t$; $y=3\sin t$, лежащая в 1-й четверти.

6. $\int\limits_{\Gamma}(2xy-1)\,dx+(x^2y+2)dy$, Γ – дуга параболы $y=-3x^2+3$, лежащая в 1-й четверти.

7. $\int\limits_{\Gamma}y\,dx+z\,dy+x\,dz$, Γ – виток винтовой линии $x=a\cdot\cos t$; $y=a\cdot\sin t$; $z=bt$; $0\le t\le 2\pi$.

Показать, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и вычислить криволинейные интегралы:

8. $\int\limits_{(-1;\,2)}^{(2;\,4)}(2x-3y^2+1)\,dx+(2-6xy)dy$.

9. $\oint\limits_{\Gamma}f\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2}$.

10. $\int\limits_{(-2;\,-1)}^{(3;\,0)}(x^4+4xy^3)\,dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$.

11. Применив формулу Грина, вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma}e^x\left((1-\cos y)dx-(y-\sin y)\right)dy$, где Γ – проходимый в положительном направлении контур $y=0$; $y=\sin x$; $0<x<\pi$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $x=2a\cos t-a\cos 2t$; $y=2a\sin t-a\sin 2t$.

13. Вычислить поверхностный интеграл 1-го рода $\iint\limits_{D}\dfrac{dD}{(1+x+y)^2}$, где D – поверхность тетраэдра $x+y+z\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

14. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{D}x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, где D – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

15. Используя формулу Стокса, вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma}(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, где Γ – эллипс $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cdot\cos t$, $z = a\cdot\cos^2 t$, $0 \le t \le \pi$, который проходится в направлении возрастания параметра t.

16. Используя формулу Остроградского, преобразовать поверхностный интеграл: $\iint\limits_{D} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$.

Ответы:

1. $1+\sqrt{2}$; **2.** $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$; **3.** $\dfrac{2}{3}\pi a^3$;

4. $\left(\dfrac{2}{5};-\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{2}\right)$; **5.** $7\dfrac{1}{4}$; **6.** 7; **7.** $-\pi a^2$; **8.** -98; **9.** 0;

10. 62; **11.** $-\dfrac{1}{5}(e^{\pi}-1)$; **12.** $6\pi a^2$;

13. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$; **14.** $4\pi a^3$; **15.** 0;

16. $3\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$.

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Понятие дифференциального уравнения первого порядка

Определение 1. Уравнение вида $F(x;\, y;\, y') = 0$ называется *обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка.* Любая функция $y = \varphi(x)$, обращающая данное уравнение в тождество, называется *решением* этого дифференциального уравнения.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является разыскание всех решений данного дифференциального уравнения и изучение свойств этих решений. Процедуру нахождения решений дифференциального уравнения называют интегрированием данного уравнения.

Определение 2. Функция $y = \varphi(x;\, C)$ называется *общим решением* дифференциального уравнения первого порядка, если она обращает уравнение в тождество и при соответствующем выборе константы C из нее может быть получено любое (частное) решение исходного уравнения.

Теорема существования и единственности решений уравнений первого порядка

Теорема 1. Пусть обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $F(x;\, y;\, y') = 0$ разрешено относительно производной: $y' = f(x;\, y)$, и при этом функция $f(x;\, y)$ определена и непрерывна вместе с частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ во всех точках плоской области D. Тогда существует, и притом единственное, решение исходного уравнения, проходящее через заданную точку $(x_0;\, y_0) \in D$.

Другими словами, для любой точки $(x_0;\, y_0) \in D$ существует, и притом единственное, решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию: $y_0 = \varphi(x_0)$.

Определение 3. Задача об отыскании решения дифференциального уравнения $F(x;\, y;\, y') = 0$, удовлетворяющего дополнительному (начальному) условию $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши.*

Фактически, теорема о существовании и единственности формулирует условия, при которых задача Коши корректна, т. е. может быть решена, и притом единственным образом.

В дальнейшем из экономии времени и места будем сокращать словосочетание «обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка» до «уравнение», по крайней мере в случаях, когда это не приведет к двусмысленностям.

Уравнения с разделяющимися переменными

Выделим пять типов уравнений, когда возможна процедура разделения переменных с последующим интегрированием исходного уравнения.

1. $y' = f(x)$.

Переходя к дифференциалам, получаем $dy = f(x)dx$; следовательно,

$$\int_{y_0}^{y} dt = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds, \text{ или } y - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds;\ y = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds + y_0;$$

x_0, y_0 – const.

Данная процедура требует некоторых пояснений:

1) при переходе от дифференциалов к интегралам с переменным верхним пределом необходимо менять имена переменных под знаком интеграла (в нашем случае y заменен на t, x на s);

2) полученное решение является общим, так как при любом выборе значений x_0 и y_0 функция $y(x)$ пройдет через точку $(x_0; y_0)$;

3) часто при решении дифференциальных уравнений процедуру интегрирования проводят формально. Например:

$$y' = e^x;\ dy = e^x \cdot dx;\ \int dy = \int e^x dx;\ y = e^x + C.$$

И далее из дополнительного условия $y(x_0) = y_0$ получают

$$y_0 = e^{x_0} + C;\ C = y_0 - e^{x_0};\ y = e^x + y_0 - e^{x_0},$$

что и есть решение задачи Коши.

Очевидно, что при использовании интегралов с переменным верхним пределом задача решается быстрее:

$$y' = e^x;\ dy = e^x\,dx;\ \int_{y_0}^{y} dt = \int_{x_0}^{x} e^s\,ds;$$

$$y - y_0 = e^x - e^{x_0}\,;\; y = e^x + y_0 - e^{x_0}\,.$$

Выбор формы интегрирования является личностным, в данном пособии авторы придерживаются схемы интегрирования с переменными пределами интегрирования.

2. $y' = f(y)$.

$$dy = f(y)dx;\; \frac{dy}{f(y)} = dx;\; f(y) \neq 0;$$

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{dt}{f(t)} = \int\limits_{x_0}^{x} ds\,;\; \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dt}{f(t)} = x - x_0.$$

Последнее выражение есть общее решение задачи Коши.

Случай $f(y) = 0$ должен быть проанализирован отдельно.

3. $y' = f(x)\,g(y)$.

$$dy = f(x) \cdot g(y)\,dx;\; \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx;\; g(y) \neq 0;$$

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(s)\,ds.$$

Решение завершается анализом случая $g(y) = 0$.

4. $M(x) \cdot N(y)\,dx + P(x) \cdot Q(y)\,dy = 0$;
$M(x) \cdot N(y)\,dx = -P(x) \cdot Q(y)\,dy\,;\; P(x) \neq 0\,;\; N(y) \neq 0$

$$\frac{M(x)}{P(x)}\,dx = -\frac{Q(y)}{N(y)}\,dy;\; \int\limits_{x_0}^{x} \frac{M(s)}{P(s)}\,ds = -\int\limits_{y_0}^{y} \frac{Q(t)}{N(t)}\,dt,$$

после чего необходимо рассмотреть уравнения $P(x) = 0$ и $N(y) = 0$.

5. $y' = f(ax + by)$, $b \neq 0$.

Введем новую функцию $z = ax + by$, тогда $y = \frac{1}{b}z - \frac{a}{b}x$;

$y' = \frac{1}{b}z' - \frac{a}{b}$, и уравнение принимает вид

$$\frac{1}{b}z' - \frac{a}{b} = f(z);\ z' = a + b\cdot f(z);\ dz = (a + b\cdot f(z))dx;$$

$$\frac{dz}{a+b\cdot f(z)} = dx;\ a + b\cdot f(z) \neq 0;$$

$$\int\limits_{z_0}^{z} \frac{dt}{a+b\cdot f(t)} = x - x_0 \text{ и т. д.}$$

Решение уравнений данного типа завершается анализом ситуации $a + b\cdot f(z) = 0$.

Пример 1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0;$

б) $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$; в) $y' = \cos(y - x)$.

Решение.

а) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0;$
$x(y^2 + 1)dx + y(1 - x^2)dy = 0;$
$x(y^2 + 1)dx = -y\,(1 - x^2)dy;$
разделяем переменные в предположении $x^2 - 1 \neq 0$.

$$\frac{xdx}{x^2-1} = \frac{ydy}{y^2+1};$$

интегрируем полученное уравнение:

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{sds}{s^2-1} = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{tdt}{t^2+1};\ \frac{1}{2}\ln\left|s^2-1\right|\Bigg|_{x_0}^{x} = \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|\Bigg|_{y_0}^{y};$$

$$\ln|x^2 - 1| - \ln|x_0^2 - 1| = \ln|1 + y^2| - \ln|1 + y_0^2|;$$

$$\ln\left|\frac{x^2-1}{x_0^2-1}\right| = \ln\left|\frac{y^2+1}{y_0^2+1}\right|;$$

$$\frac{x^2-1}{x_0^2-1} = \frac{y^2+1}{y_0^2+1};\ y^2 + 1 = \frac{y_0^2+1}{x_0^2-1}(x^2 - 1).$$

Обозначим $\dfrac{y_0^2+1}{x_0^2-1} = C$, тогда

$$y^2 + 1 = C(x^2 - 1);\quad y = \pm\sqrt{Cx^2 - C - 1}.$$

При разделении переменных были исключены случаи $x_{1,2} = \pm 1$. Проверим каждый из этих случаев прямой подстановкой в исходное уравнение. Очевидно, что вертикальные прямые $x = \pm 1$ являются решениями. Заметим, что эти решения не могут быть получены из выражения $y = \pm\sqrt{Cx^2 - C - 1}$ ни при одном конечном значении C; однако, если $C = \pm\infty$, то получаем именно $x = \pm 1$.

б) $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$; $\dfrac{ydy}{dx} = \dfrac{1-2x}{y}$; $y^2dy = (1-2x)dx$;

$$\int_{y_0}^{y} t^2\,dt = \int_{x_0}^{x} (1-2s)\,ds;\ \left.\frac{t^3}{3}\right|_{y_0}^{y} = \left.(s-s^2)\right|_{x_0}^{x};$$

$$\frac{y^3}{3} - \frac{y_0^3}{3} = x - x^2 - x_0 + x_0^2;$$

$$y^3 = 3x - 3x^2 + y_0^3 - 3x_0 + 3x_0^2.$$

Обозначим $y_0^3 - 3x_0 + 3x_0^2 = C$, тогда $y^3 = 3x - 3x^2 + C$.

$y = \sqrt[3]{3x - 3x^2 + C}$.

в) $y' = \cos(y - x)$. Проводим замену $z = y - x$, тогда $y' = z' + 1$.

Уравнение принимает вид:

$$z' + 1 = \cos z;\ \frac{dz}{dx} = -(1 - \cos z);$$

$$-\frac{dz}{1-\cos z} = dx;\ -\frac{dz}{2\sin^2\frac{z}{2}} = dx;\ -\frac{d\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin^2\frac{z}{2}} = dx;$$

$$\left.\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|_{z_0}^{z} = x - x_0;\ \operatorname{ctg}\frac{z}{2} = \operatorname{ctg}\frac{z_0}{2} - x_0 + x.$$

Обозначим $\operatorname{ctg}\dfrac{z_0}{2} - x_0 = C$, тогда $\operatorname{ctg}\dfrac{z}{2} = x + C$;

$$\operatorname{ctg}\frac{y-x}{2} = x + C.$$

Поскольку при разделении переменных осуществлено деление на $1 - \cos z$, рассмотрим случай $\cos z = 1$ отдельно: $z = 2\pi n,\ n \in Z$; $y - x = 2\pi n,\ n \in Z$; $y = x + 2\pi n,\ n \in Z$.

Прямая проверка показывает, что множество прямых вида $y = x + 2\pi n$, $n \in Z$ является решением исходного уравнения, вместе с тем эти прямые не могут быть получены из общего решения ни при каких действительных значениях C, включая $\pm\infty$.

Ответ: а) $y = \pm\sqrt{Cx^2 - C - 1}$; б) $y = \sqrt[3]{3x - 3x^2 + C}$;

в) $\operatorname{ctg}\dfrac{y-x}{2} = x + C$; $y = x + 2\pi n$, $n \in Z$.

Однородные уравнения

Определение 4. Функция $M(x; y)$ называется *однородной* функцией степени m, если для всех значений параметра t выполняется условие: $M(tx; ty) = t^m M(x; y)$.

Определение 5. Дифференциальное уравнение первого порядка $M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$, где $M(x; y)$ и $N(x; y)$ – однородные функции одной и той же степени, называется *однородным*.

Рассмотрим однородное уравнение

$$M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0,$$

перейдем к форме записи с производной:

$$y' = -\frac{M(x; y)}{N(x; y)},\ N(x; y) \neq 0.$$

Введем новую функцию $z = \dfrac{y}{x}$; $y = xz$; $y' = z + x$

$$z + x \cdot z' = -\frac{M(x; xz)}{N(x; xz)} = -\frac{x^m M(1; z)}{x^m N(1; z)} = \varphi(z);$$

$$x \cdot z' = \varphi(z) - z;\ x \cdot \frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z.$$

Получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x};\ \varphi(z) - z \neq 0;$$

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dt}{\varphi(t) - t} = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{s},\ \int_{z_0}^{z} \frac{dt}{\varphi(t) - t} = \ln|x| - \ln|x_0|.$$

$$\int_{\frac{y_0}{x_0}}^{\frac{y}{x}} \frac{dt}{\varphi(t) - t} = \ln\left|\frac{x}{x_0}\right|$$ – общее решение задачи Коши.

Случай $N(x;\, y) = 0$ проверяется прямой подстановкой в исходное уравнение, как и случай $\varphi(z) - z = 0$.

Пример 2. Решить уравнение:

а) $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$; б) $y' = \dfrac{x-y}{x-2y}$.

Решение.

а) Данное уравнение является однородным, поскольку функции
$M(x;\, y) = x(x + 2y)$ и $N(x;\, y) = x^2 - y^2$
являются однородными 2-й степени.
$(x^2 - y^2)dy = -\,x(x + 2y)dx$;

$$y' = -\frac{x^2+2xy}{x^2-y^2};\ y \ne \pm x.$$

Введем функцию $z = \dfrac{y}{x}$; $y = xz$; $y' = z + x \cdot z'$, тогда

$$z + x\cdot z' = \frac{x^2+2x\cdot(xz)}{(xz)^2-x^2};\ z + x\cdot z' = \frac{x^2+2x^2z}{x^2z^2-x^2};$$

$$x\cdot z' = \frac{1+2z}{z^2-1} - z;\ \frac{xdz}{dx} = \frac{1+3z-z^3}{z^2-1}.$$

Разделяем переменные при условии $z^3 - 3z - 1 \ne 0$:

$$-\frac{z^2-1}{z^3-3z-1}dz = \frac{dx}{x};\ -\frac{1}{3}\frac{d(z^3-3z-1)}{z^3-3z-1} = \frac{dx}{x};$$

$$-\frac{1}{3}\int_{z_0}^{z}\frac{d(t^3-3t-1)}{t^3-3t-1} = \int_{x_0}^{x}\frac{ds}{s};$$

$$-\frac{1}{3}\ln|\,t^3-3t-1\,|\Big|_{z_0}^{z} = \ln|\,s\,|\Big|_{x_0}^{x};$$

$$-\frac{1}{3}\ln|z^3-3z-1| + \frac{1}{3}\ln|z_0^3-3z_0-1| = \ln|x| - \ln|x_0|;$$

$$\ln|\,z^3-3z-1\,| - \ln|\,z_0^3-3z_0-1\,| = 3\ln|\,x_0\,| - 3\ln|\,x\,|;$$

$$\ln\left|\frac{z^3-3z-1}{z_0^3-3z_0-1}\right| = \ln\left|\frac{x_0}{x}\right|^3;\ \frac{z^3-3z-1}{z_0^3-3z_0-1} = \frac{x_0^3}{x^3};$$

$$z^3 - 3z - 1 = \frac{C}{x^3}\text{, где } C = x_0^3(z_0^3 - 3z_0 - 1).$$

$$\frac{y^3}{x^3} - 3\frac{y}{x} - 1 = \frac{C}{x^3};\ y^3 - 3x^2y - x^3 - C = 0.$$

Очевидно, что прямые $y = \pm x$ не являются решениями исходного уравнения. Что касается случая $z^3 - 3z - 1 = 0$, то он получается из общего решения при $C = 0$.

б) $y' = \dfrac{x - y}{x - 2y}$.

Проведем замену $z = \dfrac{y}{x}$; $y = xz$; $y' = z + x \cdot z'$,

уравнение принимает вид:

$$z + x \cdot z' = \frac{x - xz}{x - 2zx};\ z + x\frac{dz}{dx} = \frac{1 - z}{1 - 2z};$$

$$\frac{xdz}{dx} = \frac{1 - 2z + 2z^2}{1 - 2z};$$

разделяем переменные

$$\frac{(1 - 2z)dz}{2z^2 - 2z + 1} = \frac{dx}{x};\ -\frac{d\left(z^2 - z + \frac{1}{2}\right)}{2\left(z^2 - z + \frac{1}{2}\right)} = \frac{dx}{x}.$$

Отметим, что $x - 2y \neq 0$ по условию примера, а выражение $2z^2 - 2z + 1$ не обращается в ноль при $z \in R$.

$$-\frac{1}{2}\ln\left|t^2 - t + \frac{1}{2}\right|\Bigg|_{z_0}^{z} = \ln|s|\Big|_{x_0}^{x};$$

$$\ln\left|\frac{z^2 - z + \frac{1}{2}}{z_0^2 - z_0 + \frac{1}{2}}\right| = \ln\frac{x_0^2}{x^2};\ z^2 - z + \frac{1}{2} = \frac{\left(z_0^2 - z_0 + \frac{1}{2}\right)x_0^2}{x^2}.$$

Обозначим $\left(z_0^2 - z_0 + \dfrac{1}{2}\right)x_0^2 = C$, тогда

$$\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + \frac{1}{2} = \frac{C}{x^2};\ y^2 - xy + \frac{x^2}{2} = C.$$

Ответ: а) $y^3 - 3x^2y - x^3 - C = 0$; б) $y^2 - xy + \dfrac{x^2}{2} = C$.

Линейные уравнения

Определение 6. *Линейным* дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $y' + p(x)\,y = g(x)$; при этом, если $g(x) = 0$, то уравнение называется *линейным однородным*, если $g(x) \neq 0$, то *линейным неоднородным*.

Линейные однородные уравнения легко сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными:

$$y' + p(x)y = 0;\quad y' = -p(x)y;\quad dy = -p(x)\cdot y\cdot dx;\quad y \neq 0;$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx;\quad \int\limits_{y_0}^{y}\frac{dt}{t} = -\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds;$$

$$\ln|y| - \ln|y_0| = \int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds;\quad \ln\left|\frac{y}{y_0}\right| = -\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds;$$

$y = y_0\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$ – общее решение задачи Коши.

Традиционно используются два способа решения линейных неоднородных уравнений.

Метод вариации произвольной постоянной

Решение неоднородного уравнения строится в том же виде, что и общее решение однородного уравнения, с той лишь разницей, что константа y_0 заменяется на неизвестную функцию $C(x)$:

$$y = C(x)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}.$$

Подставляя данное выражение для y в неоднородное линейное уравнение, получаем:

$$C'\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} + C\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\cdot(-p(x)) + C\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\cdot p(x) = q(x);$$

$$C' e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} = q(x);\quad C' = q(x)\cdot e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds};$$

$$C(x)=\int\limits_{x_0}^{x} q(t)\cdot e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)ds}\cdot dt + C_0;\ C_0 - \text{const}.$$

Следовательно, $y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)ds}\cdot\left(C_0+\int\limits_{x_0}^{x} q(t)\cdot e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)ds}\cdot dt\right)$

– общее решение линейного неоднородного уравнения.

При условии задачи Коши: $y(x_0)=y_0$ получаем, что $C_0=y_0$.

Представление искомой функции в виде произведения двух функций: $y = u\cdot v$.

Исходное уравнение принимает вид:

$(u\cdot v)'+p(x)\cdot u\cdot v=q(x);\quad u'v+u(v'+p(x)\cdot v)=q(x).$

Введение «лишней» функции позволяет сформулировать некоторое дополнительное условие для функции v:

$$v'+p(x)\cdot v=0;\quad \frac{dv}{v}=-p(x)dx;\quad v=v_0\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)ds}.$$

Но тогда исходное уравнение принимает вид:

$$u'v=q(x);\quad u'=\frac{1}{v_0}e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)ds}\cdot q(x);$$

$$u=u_0+\frac{1}{v_0}\int\limits_{x_0}^{x} q(t)\cdot e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)ds}\cdot dt$$

и общее решение

$$y=u\cdot v=v_0\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)ds}\cdot\left(u_0+\frac{1}{v_0}\int\limits_{x_0}^{x} q(t)\cdot e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)ds}dt\right).$$

$$y=e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(s)ds}\cdot\left(y_0+\int\limits_{x_0}^{x} q(t)\cdot e^{\int\limits_{x_0}^{t} p(s)ds}dt\right),\ \text{где } y_0=u_0\cdot v_0.$$

Пример 3. Найти решение задачи Коши:

а) $(x^2+x)y'-y=x^2+x;\ y(1)=0;$

б) $y'-y\sin x=\sin x\cdot\cos x;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

Решение.

а) Данное уравнение является линейным неоднородным; в предположении, что $x \neq 0$; $x \neq -1$, оно приобретает вид

$$y' - \frac{1}{x(x+1)}y = 1.$$

Решим однородное уравнение:

$$y' - \frac{1}{x(x+1)}y = 0;\ \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(x+1)};\ \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x(x+1)};$$

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dt}{t} = \int_{x_0}^{x}\frac{ds}{s^2+s};\ \ln|y| - \ln|y_0| = \int_{x_0}^{x}\frac{d\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\ln\left|\frac{y}{y_0}\right| = \ln\left|\frac{s}{s+1}\right|\Bigg|_{x_0}^{x};\ \frac{y}{y_0} = \frac{x}{x+1}\cdot\frac{x_0+1}{x_0};$$

$$y = \frac{(x_0+1)y_0}{x_0}\cdot\frac{x}{x+1};\ y = C\cdot\frac{x}{x+1};\ \text{где } C = \frac{(x_0+1)y_0}{x_0}.$$

В рамках метода вариации произвольной постоянной решение неоднородного уравнения строится в виде

$y = C(x)\cdot\dfrac{x}{x+1}$, где $C(x)$ – неизвестная функция:

$$C'(x)\cdot\frac{x}{x+1} + C(x)\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)' - \frac{1}{x(x+1)}\cdot C(x)\cdot\frac{x}{x+1} = 1;$$

$$C'(x)\cdot\frac{x}{x+1} = 1;\quad C'(x) = \frac{x+1}{x};\quad dC = \left(\frac{x+1}{x}\right)dx$$

$$\int_{C_0}^{C}dt = \int_{x_0}^{x}\left(1+\frac{1}{s}\right)ds;\quad C - C_0 = x + \ln|x| - x_0 - \ln|x_0|:$$

$C(x) = x + \ln|x| + C_1$, где $C_1 = C_0 - x_0 - \ln|x_0|$;

$$y = (x + \ln|x| + C_1)\cdot\frac{x}{x+1}.$$

Так как $y(1) = 0$, то $C_1 = -1$.

Окончательно получаем следующее решение исходной задачи Коши:

$$y = \frac{x\cdot(x+\ln|x|-1)}{x+1}.$$

Очевидно, что прямые $x = 0$ и $x = -1$ не являются решениями исходного уравнения.

б) Используем вторую схему решения линейных уравнений

$y = u \cdot v;$

$u'v + uv' - \sin x \cdot u \cdot v = \sin x \cdot \cos x;$

$u'v + u(v' - \sin x \cdot v) = \sin x \cdot \cos x.$

Потребуем, чтобы функция $v(x)$ была решением уравнения

$$v' - \sin x \cdot v = 0;\ \frac{dv}{v} = \sin x \cdot dx;\ \ln\left|\frac{v}{v_0}\right| = -\cos x + \cos x_0;$$

$v = v_0 e^{-\cos x + \cos x_0}$.

Так как $v(x)$ выполняет роль вспомогательной функции, положим $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; $v_0 = 1$, тогда $v = e^{-\cos x}$.

Получаем следующее уравнение для $u(x)$:

$e^{-\cos x} \cdot u' = \sin x \cdot \cos x;$

$du = e^{\cos x} \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot dx;\ du = -e^{\cos x} \cos x\, d(\cos x);$

$$\int\limits_{u_0}^{u} dt = -\int\limits_{x_0}^{x} e^{\cos s} \cdot \cos s \cdot d(\cos s).$$

Так как $\int e^{\cos s} \cdot \cos s \cdot d(\cos s) = |\cos s = p| =$

$$= \int e^{p} \cdot p \cdot dp = \begin{vmatrix} f = p & df = dp \\ dg = e^{p}dp & g = e^{p} \end{vmatrix} = pe^{p} - e^{p} + C =$$

$= \cos s \cdot e^{\cos s} - e^{\cos s} + C$, то получаем:

$u - u_0 = e^{\cos x} - \cos x \cdot e^{\cos x} - e^{\cos x_0} + \cos x_0 \cdot e^{\cos x_0};$

$u = e^{\cos x} - \cos x \cdot e^{\cos x} + C$, C – const.

Следовательно,

$y = u \cdot v = (e^{\cos x} - \cos x \cdot e^{\cos x} + C) \cdot e^{-\cos x};$

$y = 1 - \cos x + Ce^{-\cos x}.$

По условию $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,$

$$1 = 1 - \cos\frac{\pi}{2} + Ce^{-\cos\frac{\pi}{2}};\ C = 0;$$

$y = 1 - \cos x.$

Ответ: а) $\dfrac{x \cdot (x + \ln|x| - 1)}{x + 1}$; б) $1 - \cos x$.

Уравнение Бернулли

Определение 7. Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^m$, где $m \in \mathrm{R}$; $m \neq 0$; $m \neq 1$.

Замена $u(x) = y^{1-m}(x)$; $y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-m}}$ приводит уравнение Бернулли к линейному:

$u' + (1-m)\cdot p(x)\cdot u = (1-m)\cdot q(x)$.

Второй способ решения уравнения Бернулли аналогичен второй схеме решения линейных уравнений:

$y(x) = u(x)\cdot v(x)$ и т. д.

Пример 4. Решить уравнение: $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2y}$.

Решение.

Данное уравнение является уравнением Бернулли:

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{2}y^{-1}.$$

Представляем искомую функцию в виде $y = u\cdot v$, тогда

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = \frac{1}{2}u^{-1}\cdot v^{-1};$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = \frac{1}{2}u^{-1}\cdot v^{-1}.$$

Функцию $v(x)$ находим из уравнения

$$v' - \frac{1}{x}v = 0; \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}; \quad \frac{v}{v_0} = \frac{x}{x_0}; \quad v = \frac{v_0}{x_0}x.$$

Для простоты положим $x_0 = v_0 = 1$, тогда $v = x$.

Уравнение для нахождения функции $u(x)$:

$$x\cdot u' = \frac{1}{2xu}; \quad u\cdot du = \frac{dx}{2x^2}.$$

$$u^2 - u_0^2 = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}; \quad u^2 - \frac{1}{x} + u_0^2 = \frac{1}{x_0};$$

$$u^2 = -\frac{1}{x} + C; \quad u(x) = \pm\sqrt{C - \frac{1}{x}}.$$

Окончательно получаем: $y(x) = \pm\, x\sqrt{C - \dfrac{1}{x}}$.

Ответ: $\pm\, x\sqrt{C - \dfrac{1}{x}}$.

Уравнения в полных дифференциалах

Определение 8. Уравнение вида $M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$ называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует функция $U(x; y)$, такая что

$$dU(x; y) \equiv M(x; y)dx + N(x; y)dy.$$

Если дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, то оно может быть записано в виде:

$$dU(x; y) = 0,$$

поэтому общее решение такого уравнения имеет вид: $U(x; y) = C$, C – const.

Теорема 2. Уравнение $M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial M(x; y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x; y)}{\partial x}$.

Интегрирование уравнений в полных дифференциалах может быть проведено следующим образом.

1) Так как $M(x; y) = \dfrac{\partial U(x; y)}{\partial x}$, то

$$U(x; y) = \int_{x_0}^{x} M(s; y)\,ds + U(x_0; y), \text{ где}$$

$U(x_0; y)$ – неизвестная функция, подлежащая определению.

2) Так как $N(x; y) = \dfrac{\partial U(x; y)}{\partial y}$, то

$$N(x; y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} M(s; y)\,ds + U(x_0; y)\right);$$

$$N(x; y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(s; y)}{\partial y}\,ds + U'(x_0; y),$$

но $\dfrac{\partial M(s; y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(s; y)}{\partial s}$, поэтому

$$N(x; y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(s; y)}{\partial s}\,ds + U'(x_0; y);$$

$$N(x; y) = N(x; y) - N(x_0; y) + U'(x_0; y);$$

$$U'(x_0;\,y) = N(x_0;\,y);\; U(x_0;\,y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0;\,t)\;dt + U(x_0;\,y_0);$$

$$U(x;\,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(s;\,y)\,ds + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0;\,t)\;dt + U(x_0;\,y_0).$$

Общее решение исходного уравнения:

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(s;\,y)\,ds + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0;\,t)\;dt = C.$$

Очевидно, что частное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, получается из общего при $C = 0$.

Пример 5. Решить уравнение:

$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2\,y + 4y^3)dy = 0.$

Решение.

Для удобства обозначим

$3x^2 + 6xy^2 = M(x;\,y);\quad 6x^2\,y + 4y^3 = N(x;\,y).$

Данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, поскольку $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 12xy;\; \dfrac{\partial N}{\partial x} = 12xy$, т. е. $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Искомую функцию, чьим полным дифференциалом является левая часть уравнения, обозначим $U(x;\,y)$, тогда

$$\frac{\partial U(x;\,y)}{\partial x} = M(x;\,y);\quad \frac{\partial U(x;\,y)}{\partial y} = N(x;\,y).$$

Из первого соотношения получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2;\quad \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial U(s;\,y)}{\partial s}\,ds = \int\limits_{x_0}^{x} (3s^2 + 6sy^2)\,ds;$$

$U(x;\,y) = x^3 + 3x^2y^2 - x_0^3 - 3\,x_0^2\,y^2 + U(x_0;\,y).$

Из второго соотношения получаем

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3,$$

с другой стороны, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y - 6\,x_0^2\,y + \dfrac{\partial U(x_0;\,y)}{\partial y}$.

Сравнивая полученные выражения, получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{\partial U(x_0;\, y)}{\partial y} = 4y^3 + 6\,x_0^2\,y;$$

$U(x_0;\, y) - U(x_0;\, y_0) = y^4 + 3\,x_0^2\,y^2 - \,y_0^4\, - 3\,x_0^2\,y_0^2\,.$

Окончательно функция $U(x;\, y)$ приобретает вид:

$$U(x;\, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 - \,x_0^3\, - 3\,x_0^2\,y_0^2\, - \,y_0^4\, + U(x_0;\, y_0).$$

Общее решение исходного уравнения:

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C;$$

решение задачи Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0$:

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 - \,x_0^3\, - 3\,x_0^2\,y_0^2\, - \,y_0^4\, = 0.$$

Ответ: $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$.

Уравнения, не разрешенные относительно производной

$F(y') = 0$.

Пусть a_k – действительные корни уравнения $F(t) = 0$, т. е. $F(a_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, тогда $y' = a_k$; $y = a_k\,x + C$; C – const; $k = 1, 2, \ldots , n$.

Совокупность линейных функций $y = a_k\,x + C$, C – const; $k = 1, 2, \ldots , n$ является общим решением исходного уравнения.

Общий интеграл можно записать компактно: поскольку $a_k = \dfrac{y-c}{x}$, то $F\left(\dfrac{y-c}{x}\right) = 0$.

$F(x;\, y') = 0$.

1)Если это уравнение разрешимо относительно y': $y' = f_k\,(x)$; $k = 1, 2, \ldots , n$, тогда общее решение есть совокупность функций $y = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_k(s)\,ds + y_0$.

2) Если существуют функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, такие что $F(\varphi(t);\, \psi(t)) \equiv 0$, то

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y' = \psi(t); \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \varphi(t), \\ dy = \psi(t)dx; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \varphi(t), \\ dy = \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int\limits_{t_0}^{t} \psi(s) \cdot \varphi'(s) ds + y_0. \end{cases}$$

Полученная совокупность уравнений – параметрическое задание функции, являющейся решением исходного уравнения.

$$F(y; y') = 0.$$

1) Если это уравнение разрешимо относительно y': $y' = f_k(y)$; $k = 1, 2, \dots, n$, то общее решение есть совокупность функций $\int\limits_{y_0}^{y} \frac{ds}{f_k(s)} = x - x_0$; $k = 1, 2, \dots, n$.

2) Если существуют функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, такие что $F(\varphi(t); \psi(t)) \equiv 0$, то

$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ y' = \psi(t); \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \varphi(t), \\ dy = \psi(t) dx; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \varphi(t), \\ dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ x = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(s)}{\psi(s)} ds + x_0. \end{cases}$$

Получено общее решение исходного уравнения в параметрической форме.

Уравнение Лагранжа: $y = \varphi(y')x + \psi(y')$.

Введем новую переменную $p = y'$, тогда
$y = \varphi(p)x + \psi(p)$;
$dy = \varphi(p)dx + \varphi'(p) \cdot x \cdot dp + \psi'(p) \cdot dp$.
Так как $dy = y'dx = pdx$, то
$pdx = \varphi(p)dx + (\varphi'(p) \cdot x + \psi'(p))dp$;
$(\varphi(p) - p)dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p))dp = 0$.
Это уравнение является линейным относительно функции $x(p)$:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Как было показано ранее, решение этого уравнения имеет вид

$x(p) = A(p) \cdot C + B(p)$; C – const.

Подставляя полученное выражение в y, окончательно получаем решение уравнения Лагранжа в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = A(p) \cdot C + B(p), \\ y = A_1(p) \cdot C + B_1(p), C - \text{const}. \end{cases}$$

Уравнение Клеро: $y = y'x + \psi(y')$.

Уравнение Клеро, очевидно, является частным случаем уравнения Лагранжа.

После аналогичной процедуры уравнение Клеро приводит к уравнению: $(x + \psi'(p))dp = 0$;

1) $dp = 0$; $p = C$; C – const, тогда уравнение Клеро имеет следующее решение: $y = Cx + \psi(C)$;

2) $x + \psi'(p) = 0$, тогда решение уравнения Клеро в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p). \end{cases}$$

Пример 6. Найти общие интегралы уравнений:

а) $e^{y'} + y' = 1$; б) $y' - \sin y' = 0$; в) $y'^5 - 3y' + 1 = 0$.

Решение.

а) Можно легко показать, что алгебраическое уравнение

$$e^t + t = 1$$

имеет единственный действительный корень $t = 0$, поэтому

$$y' = 0; \ y = C, \ C - \text{const}.$$

Как следует из теории, общий интеграл можно было записать и сразу $e^{\frac{y-C}{x}} + \dfrac{y-C}{x} = 1$, но использовать такую запись неудобно.

б) Уравнение $\sin t = t$ имеет действительный корень $t = 0$, следовательно

$$y' = 0; \ y = C, \ C - \text{const}.$$

в) Поскольку точное решение уравнения $t^5 - 3t + 1 = 0$ не осуществимо, ограничимся записью общего интеграла исходного уравнения в неявной форме:

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^5 - 3\frac{y-C}{x} + 1 = 0.$$

Ответ: а) $y = C$, C – const; б) $y = C$, C – const;

$$\text{в)}\ \left(\frac{y-C}{x}\right)^5 - 3\frac{y-C}{x} + 1 = 0.$$

Пример 7. Найти общее решение уравнений

а) $e^{y'} - y' - x = 0$; б) $y = y'^2 + y'^3$.

Решение.

а) Очевидно, что выразить y' из данного выражения нельзя. Попытаемся проинтегрировать уравнение путем введения параметра t:

$$\begin{cases} y' = t, \\ x = e^t - t; \end{cases} \quad \begin{cases} dy = tdx = t \cdot x' \cdot dt, \\ x = e^t - t; \end{cases} \quad \begin{cases} dy = t(e^t - 1)dt, \\ x = e^t - t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = te^t - e^t - \dfrac{t^2}{2} + C, C - \text{const}, \\ x = e^t - t. \end{cases}$$

б) Введем параметр $t = y'$, тогда

$$\begin{cases} y = t^2 + t^3, \\ y' = t; \end{cases} \quad \begin{cases} y = t^2 + t^3, \\ \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{t}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = t^2 + t^3, \\ dx = \dfrac{1}{t}dy; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = t^2 + t^3, \\ dx = \dfrac{1}{t}\left(t^2 + t^3\right)'dt; \end{cases} \quad \begin{cases} y = t^2 + t^3, \\ dx = (2 + 3t)dt; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = t^2 + t^3, \\ x = 2t + \dfrac{3}{2}t^2 + C, C - \text{const}. \end{cases}$$

Ответ: а) $\begin{cases} x = e^t - t, \\ y = te^t - e^t - \dfrac{t^2}{2} + C, C - \text{const}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 2t + \dfrac{3}{2}t^2 + C, C - \text{const}, \\ y = t^2 + t^3. \end{cases}$

Пример 8. Решить уравнения: а) $y = 2xy' + y'^2$; б) $y = xy' - y'^2$.

Решение.

а) Данное уравнение является уравнением Лагранжа. В соответствии с общей схемой решения введем параметр $p = y'$, тогда

$y = 2xp + p^2$; $\quad dy = 2x\,dp + 2p\,dx + 2p\,dp$.

Но поскольку $dy = p\,dx$, то

$pdx = 2x\,dp + 2p\,dx + 2p\,dp$,

$$p\,dx + 2(x + p)\,dp = 0; \qquad \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -2.$$

Получено линейное уравнение для функции $x(p)$. Поскольку схемы решения этих уравнений рассмотрены ранее, приведем без выкладок итоговое выражение:

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3},\ C - \text{const}.$$

Общее решение исходного уравнения в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{2p}{3}, \\ y = 2xp + p^2 = \dfrac{2C}{p} - \dfrac{p^2}{3}. \end{cases}$$

б) Данное уравнение является уравнением Клеро.

Введем параметр $p = y'$, тогда

$y = xp - p^2$;

$dy = x\,dp + p\,dx - 2p\,dp$; $\quad dy = p\,dx$,

следовательно,

$x\,dp - 2p\,dp = 0$; $\quad (x - 2p)dp = 0$.

Если $x - 2p = 0$, то получаем следующее решение:

$$\begin{cases} x = 2p, \\ y = p^2 \end{cases} \text{ или просто } y = \frac{x^2}{4}.$$

Если $dp = 0$, то $p = C$, и тогда $y = Cx - C^2$, C – const.

Ответ: а) $\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{2p}{3}, C - \text{const}, \\ y = \dfrac{2C}{p} - \dfrac{p^2}{3}; \end{cases}$

б) $y = \dfrac{x^2}{4}$; $y = Cx - C^2$, C – const.

Задания для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1. $y' = \dfrac{1}{y}$; 2. $xyy' = 1 - x^2$;

3. $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$; 4. $e^{-y}(1 + y') = 1$;

5. $xy' + y = y^2$; 6. $(x^2 - y^2)dx + 2xy\,dy = 0$;

7. $y' = \dfrac{y}{x+y}$; 8. $\dfrac{dx}{y+x} = \dfrac{dy}{y-x}$;

9. $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = 0$; $y(1) = 2$;

10. $y' + \dfrac{1}{x}y = 3x$; $y(1) = 1$;

11. $y' - 2xy = 1$; $y(0) = 0$;

12. $(x + y^2)dy = ydx$;

13. $y' - 2xy = 3x^3y^2$; $y(0) = \dfrac{2}{3}$;

14. $3y^2y' + y^3 + x = 0$;

15. $(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0$;

16. $\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \dfrac{e^y}{1+x^2}dy = 0$;

17. $y' - |y'| = 0$; 18. $x = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$;

19. $x = y'^3 + 1$; 20. $\dfrac{(y')^3}{2} + \ln(y')$;

21. $x \cdot (y')^2 + (y')^2$; 22. $y = \dfrac{x \cdot (y')^2}{2y' + 4}$;

23. $y = x \cdot y' - \dfrac{1}{y'}$.

Ответы

1. $y^2 = 2x + C$; 2. $y^2 = 2\ln|x| - x^2 + C$;

3. $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$; $x = \pm 1$; $y = \pm 1$;

4. $1 - e^{-y} = Ce^x$; 5. $\dfrac{y-1}{y} = Cx$; 6. $y^2 + x^2 = Cx$;

7. $y = C \cdot e^{\frac{x}{y}}$; 8. $-\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{y^2}{x^2}+1\right) = \ln|xc|$;

9. $y = x^2 + 1$; 10. $y = x^2$; 11. $y = e^{x^2}\cdot\int\limits_0^x e^{-s^2}\,ds$;

12. $x = y^2 + Cx$; 13. $y = \dfrac{1}{1-x^2}$; 14. $y^3 = Ce^{-x} - x + 1$;

15. $x^4 + 4xy - 2y^2 = C$; 16. $\dfrac{e^y - 1}{1+x^2} = C$;

17. $\dfrac{y-C}{x} - \left|\dfrac{y-C}{x}\right| = 0$;

18. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = -\cos t + C \end{cases}$ или $x^2 + (y - C)^2 = 1$;

19. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = \dfrac{3}{4}t^4 + C; \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x = t - \dfrac{1}{t} + C, \\ y = \dfrac{t^2}{2} + \ln|t|; \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \dfrac{C-(p-1)^3}{(p-1)^2}, \\ y = \dfrac{Cp^2}{(p-1)^2}; \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x = C(p+2), \\ y = \dfrac{C}{2}p^2; \end{cases}$

23. $\begin{cases} y = Cx - \dfrac{1}{C}, \\ x = -\dfrac{y^2}{4}. \end{cases}$

8.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков

Определение 1. Уравнение вида $F(x; y; y'; ...; y^{(n)}) = 0$ называется *обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка.*

Определение 2. Любая функция $y = \varphi(x)$, обращающая вместе со своими производными данное уравнение в тождество, называется *решением (частным решением)* этого дифференциального уравнения.

Определение 3. Функция $y = \varphi\,(x; C_1; C_2; ...; C_n)$ называется *общим решением* дифференциального уравнения n-го порядка, если она обращает уравнение в тождество, и при соответствующем выборе констант $C_1; C_2; ...; C_n$ из нее может быть получено любое (частное) решение исходного уравнения.

Определение 4. Задача о нахождении решения дифференциального уравнения $F(x; y; y'; ...; y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего дополнительным (начальным) условиям: $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y'_0$; ...; $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где y_0; y'_0; ...; $y_0^{(n-1)}$ – произвольные константы, называется *задачей Коши.*

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Уравнение вида $F(x; y^{(n)}) = 0$

а) Если уравнение разрешено относительно старшей производной $y^{(n)} = f(x)$, то искомая функция $y(x)$ находится в результате n-кратного интегрирования:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(s_1)ds_1 + y_0^{(n-1)};$$

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1} f(s_2)ds_2 ds_1 + y_0^{(n-1)}(x - x_0) + y_0^{(n-2)} \quad \text{и т. д.;}$$

$$y(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x_1}\dots\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(s_n)\,ds_n \dots ds_1 + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$+ \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + \dots + y'_0 \cdot (x - x_0) + y_0.$$

Данная форма записи удобна тем, что это есть решение задачи Коши.

Полученное решение можно записать в компактной форме:

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(s)\cdot(x-s)^{n-1}\cdot ds + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} +$$

$$+ \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + \ldots + y_0' \cdot (x-x_0) + y_0.$$

б) Существуют функции $x = \varphi(t)$; $y^{(n)} = \psi(t)$, такие что $F(\varphi(t); \psi(t)) \equiv 0$.

В этом случае может быть построено параметрическое решение:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y^{(n)} = \psi(t); \end{cases} \quad \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y^{(n-1)} = \int_{t_0}^{t} \psi(s)\cdot\varphi'(s)ds + C_1 = \psi_1(t; C_1); \end{cases} \ldots$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi_n(t; C_1; C_2; \ldots; C_n). \end{cases}$$

В частности, если удается выразить переменную x: $x = f(y^{(n)})$, то в качестве параметра t можно выбрать $t = y^{(n)}$.

Уравнения, не содержащие искомой функции и последовательных первых производных:

$$F(x; y^{(k)}; y^{(k+1)}; \ldots; y^{(n)}) = 0.$$

Подстановка $y^{(k)} = z$ сводит исходное уравнение к уравнению $(n-k)$ порядка $F(x; z; z'; \ldots; z^{(n-k)}) = 0$. Пусть $z = \varphi(x; C_1; C_2; \ldots; C_{n-k})$ – общее решение этого уравнения, тогда искомая функция $y(x)$ находится из уравнения

$$y^{(k)} = \varphi(x; C_1; C_2; \ldots; C_{n-k}).$$

Уравнения, не содержащие независимой переменной $F(y; y'; \ldots; y^{(n)}) = 0$.

а) Введение новой функции $z(y) = y'$ позволяет понизить порядок уравнения на единицу:

$$y'' = \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = z'\cdot z;$$

$$y''' = \frac{\partial y''}{\partial x} = (z''\cdot z + (z')^2)z; \ldots$$

$$y^{(n)} = \varphi(z; z'; \ldots; z^{(n-1)}),$$

следовательно, исходное уравнение приобретает вид $\tilde{F}(y; z; ...; z^{(n-1)}) = 0.$

б) Рассмотрим один из наиболее важных случаев: $y'' = f(y);\quad y' = z(y);\ y'' = z' \cdot z;$ уравнение принимает вид

$$z \cdot z' = f(y);\quad zdz = f(y)dy;\quad \int_{z_0}^{z} sds = \int_{y_0}^{y} f(t)dt;$$

$$z^2 = 2\int_{y_0}^{y} f(t)dt + z_0^2;\qquad (y')^2 = 2\int_{y_0}^{y} f(t)dt + z_0^2;$$

$$y' = \pm\sqrt{2\int_{y_0}^{y} f(t)dt + z_0^2};\qquad \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{\sqrt{2\int_{y_0}^{y} f(t)dt + z_0^2}} = \pm(x - x_0).$$

Получено общее решение, как решение задачи Коши.

Пример 1. Найти общее решение уравнений:

а) $y''' = \dfrac{2}{x^3}$; б) $y''' = \dfrac{\sin x}{x}$; в) $x = \dfrac{y''}{\sqrt{1 + y''^2}}$.

Решение.

а) Искомая функция находится в результате трех последовательных интегрирований:

$$dy'' = 2x^{-3}dx;\quad y'' = -\frac{1}{x^2} + C_1;$$

$$dy' = (-x^{-2} + C_1)dx;\quad y' = \frac{1}{x} + C_1x + C_2;$$

$$dy = (-x^{-1} + C_1x + C_2)dx;\quad y = \ln|x| + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3;$$

C_1, C_2, C_3 – const.

б) Поскольку в элементарных функциях проинтегрировать выражение $\dfrac{\sin x}{x}$ не удается, ограничимся следующей формой ответа

$$y = \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\sin s}{s}(x-s)^2 ds + \frac{y_0''}{2}(x-x_0)^2 + \frac{y_0'}{1}(x-x_0) + y_0,$$

y_0'', y_0', y_0 – const.

в) В принципе, в данном уравнении можно выразить $y'' = f(x)$.

Продемонстрируем, однако, схему нахождения решения в параметрической форме. Введем параметр t следующим образом:

$$y'' = \operatorname{tg} t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \text{ тогда } \sqrt{1+y''^2} = \frac{1}{|\cos t|}.$$

Очевидно, что, во-первых, данному диапазону значений t соответствуют все действительные значения y'', и, во-вторых, $\cos t > 0$, поэтому

$$\begin{cases} y'' = \operatorname{tg} t, \\ x = \sin t; \end{cases} \quad \begin{cases} dy' = \operatorname{tg} t \cdot dx = \operatorname{tg} t \cdot \cos t \cdot dt = \sin t \cdot dt, \\ x = \sin t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = -\cos t + C_1, \\ x = \sin t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} dy = (-\cos t + C_1)\, dx = (-\cos t + C_1)\cos t \cdot dt, \\ x = \sin t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4} + C_1 \sin t + C_2, \quad C_1, C_2 - \text{const}, \\ x = \sin t. \end{cases}$$

Ответ: а) $\ln|x| + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3$;

б) $\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\sin s}{s}(x-s)^2 ds + \frac{y_0''}{2}(x-x_0)^2 + \frac{y_0'}{1}(x-x_0) + y_0,$

в) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4} + C_1 \sin t + C_2, \quad C_1, C_2 - \text{const}, \\ x = \sin t. \end{cases}$

Пример 2. Найти общее решение уравнений:

а) $y''' = -\frac{1}{2}(y'')^3$; б) $yy'' = (y')^3$.

Решение.

а) Введем новую функцию $z = y''$, тогда получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$z' = -\frac{1}{2}z^3; \quad \frac{dz}{z^3} = -\frac{1}{2}dx; \quad z \neq 0;$$

$$z^2 = \frac{1}{x + C_1}; \quad (y'')^2 = \frac{1}{x + C_1}; \quad y'' = \pm\frac{1}{\sqrt{x + C_1}}.$$

После двукратного интегрирования получаем искомое решение:

$$y(x) = \pm\frac{4}{3}(x + C_1)^{\frac{3}{2}} + C_2x + C_3; \quad C_1, C_2, C_3 - \text{const}.$$

Если $z = 0$, то $y = C_1x + C_2$; C_1, C_2 – const, также решение исходного уравнения.

б) Данное уравнение не содержит в явном виде переменной x, поэтому введем новую функцию $z(y) = y'$, при этом y будем рассматривать как аргумент этой функции:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z.$$

В новых обозначениях получаем:

$$y \cdot z' \cdot z = z^3; \quad \frac{dz}{z^2} = \frac{dy}{y}; \quad z \neq 0; \quad y \neq 0.$$

После интегрирования получаем:

$$z = -\frac{1}{\ln|C_1y|}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\ln|C_1y|};$$

$$\ln|C_1y| \cdot dy = -dx; \quad \int_{y_0}^{y} \ln|C_1t| \cdot dt = -x + x_0;$$

интегрируя по частям, получаем:
$y \cdot \ln|C_1y| - y = -x + C_2$, C_1, C_2 – const.
Если $z = 0$, то $y' = 0$, $y = C$, C – const – также решение исходного уравнения, включая и $y = 0$.

Ответ: а) $y = \pm\frac{4}{3}(x + C_1)^{\frac{3}{2}} + C_2x + C_3$; $y = C_1x + C_2$;
C_1, C_2, C_3 – const; б) $y \cdot \ln|C_1y| - y = -x + C_2$;
$y = C$; C, C_1, C_2 – const.

Линейные уравнения n-го порядка

Определение 5. *Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x).$$

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется линейным однородным, в противном случае – линейным неоднородным.

Определение 6. Совокупность n линейно независимых решений линейного однородного уравнения n-го порядка называется *фундаментальной системой решений.*

Теорема 1. Если y_1; y_2; ...; y_n – фундаментальная система решений, то общее решение линейного однородного уравнения имеет вид $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$, где C_1, C_2, ..., C_n – произвольные постоянные.

Определение 7. Фундаментальная система решений, удовлетворяющая дополнительным условиям: $y_k^{(k-1)}(x_0) = 1$, $y_k^{(m)}(x_0) = 0$, $m \neq k - 1$, $k = 1, \ldots, n$, называется нормированной в точке x_0.

Если фундаментальная система решений нормирована, то решение задачи Коши имеет вид:

$$y(x) = y_0 \cdot y_1(x) + y_0' \cdot y_2(x) + \ldots + y_0^{(n-1)} \cdot y_n(x).$$

Теорема 2. Если $\tilde{y}(x)$ – частное решение линейного неоднородного уравнения, y_1; y_2; ...; y_n – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения имеет вид: $y(x) = \tilde{y} + C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$, где C_1, C_2, ..., C_n – произвольные постоянные.

Если известна фундаментальная система решений однородного уравнения, то частное решение неоднородного может быть построено методом вариации произвольных постоянных, для чего решение строится в том же виде, что и решение однородного уравнения, только константы C_1, C_2, ..., C_n заменяются на неизвестные функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$:

$$y = C_1(x) \cdot y_1(x) + \ldots + C_n(x) \cdot y_n(x).$$

Производные этих функций находятся из следующей (алгебраической!) системы уравнений

$$\begin{cases} C_1' \cdot y_1 + C_2' \cdot y_2 + \ldots + C_n' \cdot y_n = 0, \\ C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2' + \ldots + C_n' \cdot y_n' = 0, \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ C_1' \cdot y_1^{(n-2)} + C_2' \cdot y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' \cdot y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1' \cdot y_1^{(n-1)} + C_2' \cdot y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' \cdot y_n^{(n-1)} = f(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = \varphi_1(x), \\ C_2'(x) = \varphi_2(x), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ C_{n-1}'(x) = \varphi_{n-1}(x), \\ C_n'(x) = \varphi_n(x). \end{cases}$$

После интегрирования уравнений этой системы получаем

$$C_i(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi_i\,(s)ds + C_{i_0}\,;\ i = 1;\ 2;\ ...;\ n;\ C_{i_0}\ - \text{const}.$$

$$y(x) = y_1 \cdot \int_{x_0}^{x} \varphi_1\,(s)ds + ... + y_n \cdot \int_{x_0}^{x} \varphi_n\,(s)ds + C_{1_0}\,y_1 +$$

$$+\ C_{2_0}\,y_2 + ... + C_n y_n \ -$$

общее решение линейного неоднородного уравнения. При $C_{i_0} = 0;\ i = 1;\ 2;\ ...;\ n$ получаем $y(x) = \tilde{y}\,(x)$ – частное решение линейного неоднородного уравнения.

Однородные линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Метод Эйлера

Решение однородного уравнения

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = 0$, $a_1;\ a_2;\ ...;\ a_n$ – const, строится в виде $y = e^{kx}$, где k – неизвестная константа, подлежащая определению. После указанной подстановки уравнение приобретает вид:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1}k + a_n = 0.$$

Это уравнение называют *характеристическим*, а его корни называют *характеристическими числами*.

Рассмотрим различные варианты решения характеристического уравнения.

Все корни различны и действительны: k_1; k_2; ...; k_n.

Тогда фундаментальная система решений имеет вид e^{k_1x}; e^{k_2x}; ...; e^{k_nx}, а общее решение исходного уравнения

$$y(x) = C_1 e^{k_1x} + C_2 e^{k_2x} + ... + C_n e^{k_nx}.$$

Все корни действительные, но среди них есть кратные.

Пусть, например, k_1 – действительное p-кратное характеристическое число, тогда в фундаментальной системе решений ему соответствуют следующие функции: e^{k_1x}; $x \cdot e^{k_1x}$; ...; $x^{p-1} \cdot e^{k_1x}$, а в формуле общего решения – выражение типа

$$e^{k_1x}(C_1 + C_2x + ... + C_px^{p-1}).$$

Все корни различны, но среди них есть комплексные.

Пусть $k_1 = a + ib$ – характеристическое число, легко показать, что $k_2 = a - ib$ – также характеристическое число. Этой паре комплексных корней соответствует следующая пара действительных функций в фундаментальной системе решений:

$$e^{ax} \cdot \cos bx, \; e^{ax} \cdot \sin bx,$$

что добавляет в формулу общего решения слагаемые вида

$$e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

Среди корней характеристического уравнения встречаются комплексные кратные.

Пусть $k_1 = a + ib$ – характеристическое число кратности p, тогда в фундаментальную систему решений входят следующие функции:

$$e^{ax} \cdot \cos bx; \; x \cdot e^{ax} \cdot \cos bx; \; ...; \; x^{p-1} \cdot e^{ax} \cdot \cos bx;$$

$$e^{ax} \cdot \sin bx; \; x \cdot e^{ax} \cdot \sin bx; \; ...; \; x^{p-1} \cdot e^{ax} \cdot \sin bx,$$

а в формулу общего решения войдут следующие слагаемые:

$$e^{ax}((C_1 + C_2x + ... + C_px^{p-1})\cos bx + (C_{p+1} + C_{p+2}x + ... + C_{2p}x^{p-1})\sin bx).$$

Пример 3. Решить линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $y''' - 5y'' + 6y' = 0$; б) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$;
в) $y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0$; г) $y^{(n)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.

Решение.

а) Характеристическое уравнение

$$k^3 - 5k^2 + 6k = 0$$

имеет корни $k_1 = 0$; $k_2 = 2$; $k_3 = 3$.

Фундаментальную систему решений составляют функции:

$1;\ e^{2x};\ e^{3x}$.

Общее решение уравнения:

$$y = C_1 + C_2\, e^{2x} + C_3\, e^{3x};\ C_1, C_2, C_3 - \text{const}.$$

б) Характеристическое уравнение

$$k^3 + 5k^2 + 8k - 4 = 0$$

имеет простой корень $k = 1$ и двукратный корень $k = 2$, поэтому фундаментальная система имеет вид:

$$e^x;\ e^{2x};\ xe^{2x}.$$

Общее решение уравнения:

$$y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x)\, e^{2x};\ C_1, C_2, C_3 - \text{const}.$$

в) Характеристическое уравнение

$$k^3 + 3k^2 + 9k - 13 = 0$$

имеет действительный корень $k_1 = 1$ и комплексные корни $k_{2,3} = -2 \pm 3i$.

Фундаментальная система решений:

$$e^x;\ e^{-2x}\cos 3x;\ e^{-2x}\sin 3x.$$

Общее решение уравнения:

$$y = C_1 e^x + (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)\, e^{-2x};\ C_1, C_2, C_3 - \text{const}.$$

г) Характеристическое уравнение

$$k^4 + 4k^3 + 8k^2 + 8k + 4 = 0$$

является полным квадратом $(k^2 + 2k + 2)^2 = 0$ и имеет два двукратных комплексных корня $k_{1,2} = -1 + i$; $k_{3,4} = -1 - i$.

Фундаментальная система решений состоит из четырех функций:

$$e^{-x}\cos x;\ e^{-x}\sin x;\ xe^{-x}\cos x;\ xe^{-x}\sin x.$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y = ((C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x)\, e^{-x}.$$

Ответ: а) $y = C_1 + C_2\, e^{2x} + C_3\, e^{3x};\ C_1, C_2, C_3 - \text{const}$;

б) $y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x)\, e^{2x};\ C_1, C_2, C_3 - \text{const}$;

в) $y = C_1 e^x + (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)\, e^{-2x};\ C_1, C_2, C_3 - \text{const}$;

г) $y = ((C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x)\, e^{-x};\ C_1, C_2, C_3, C_4 - \text{const}$.

Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов позволяет сравнительно просто найти частное решение неоднородного линейного уравнения с особой правой частью.

1. $f(x) = b_1 x^s + b_2 x^{s-1} + \dots + b_s x + b_{s+1}$.

Если $k = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде

$A_1 x^s + A_2 x^{s-1} + ... + A_s x + A_{s+1}$, где A_1; A_2; ...; A_{s+1} – постоянные, которые необходимо найти.

Если $k = 0$ является корнем кратности p, то частное решение следует искать в виде $x^p \cdot (A_1 x^s + A_2 x^{s-1} + ... + A_s x + A_{s+1})$.

2. $f(x) = e^{ax} \cdot (b_1 x^s + ... + b_{s+1})$.

Если $k = a$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде $e^{ax} \cdot (A_1 x^s + ... + A_{s+1})$.

Если $k = a$ является корнем кратности p, то решение ищется в виде $x^p \cdot e^{ax} \cdot (A_1 x^s + ... + A_{s+1})$.

3. $f(x) = e^{ax}((b_1 x^s + ... + b_{s+1})\cos bx + (c_1 x^t + ... + c_{t+1})\sin bx)$.

Пусть $m = max(s; t)$. Если $k = a + ib$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищется в следующем виде:

$e^{ax}((A_1 x^m + ... + A_{m+1})\cos bx + (A_{m+2} x^m + ... + A_{2m+2})\sin bx)$.

Если же $k = a + ib$ является корнем кратности p, то частное решение имеет вид:

$x^p \cdot e^{ax} \cdot ((A_1 x^m + ... + A_{m+1})\cos bx + (A_{m+2} x^m + ... + A_{2m+2})\sin bx)$.

Пример 4. Решить линейные неоднородные уравнения:

а) $y'' - y = x^2 - x + 1$; б) $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$;

в) $y'' + y = 4e^x$; г) $y'' - y = 4e^x$.

Решение.

а) Однородное уравнение $y'' - y = 0$ имеет характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$; $k_{1,2} = \pm 1$, следовательно, общее решение однородного уравнения $y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$; C_1, C_2 – const. Так как $k_{1,2} \neq 0$, то в соответствии с методом неопределенных коэффициентов частное решение неоднородного уравнения строится в виде

$$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C,$$

где A, B, C – неизвестные постоянные.

Итак, $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$; $\tilde{y}' = 2Ax + B$; $\tilde{y}'' = 2A$;

уравнение приобретает вид:

$2A - Ax^2 - Bx - C = x^2 - x + 1$;

$-Ax^2 - Bx + 2A - C = x^2 - x + 1$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем линейную алгебраическую систему

$$\begin{cases} -A = 1, \\ -B = -1, \\ 2A - C = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1, \\ B = 1, \\ C = -3. \end{cases}$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$\tilde{y} = -x^2 + x - 3,$$

и общее решение неоднородного уравнения

$$y = -x^2 + x - 3 + C_1e^{-x} + C_2e^x;\ C_1, C_2 - \text{const}.$$

б) Рассмотрим однородное уравнение $y'' - 4y' = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 - 4k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$; $k_2 = 4$. Общее решение однородного уравнения $y_0 = C_1 + C_2e^{4x}$, C_1, C_2 – const.

Так как $k = 0$ – простой корень характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения необходимо строить в виде

$$\tilde{y} = x \cdot (Ax^2 + Bx + C).$$

Получаем

$$\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx;\ \tilde{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C;$$

$$\tilde{y}'' = 6Ax + 2B,$$

и уравнение приобретает вид:

$$6Ax + 2B - 12Ax^2 - 8Bx - 4C = -12x^2 + 6x - 4;$$

$$-12Ax^2 + (6A - 8B)x + 2B - 4C = -12x^2 + 6x - 4.$$

Сравнивая многочлены в левой и правой части уравнения, получаем

$$\begin{cases} -12A = -12, \\ 6A - 8B = 6, \\ 2B - 4C = -4; \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ C = 1. \end{cases}$$

Частное и общее решение неоднородного уравнения имеют соответственно вид:

$$\tilde{y} = x^3 + x;$$

$$y = x^3 + x + C_1 + C_2e^{4x};\ C_1, C_2 - \text{const}.$$

в) Однородное уравнение $y'' + y = 0$ имеет характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ с мнимыми корнями $k_{1,2} = \pm i$. А его общее решение имеет вид

$$y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x;\ C_1, C_2 - \text{const}.$$

Так как $k = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$\tilde{y} = Ae^x.$$

Коэффициент A находим из уравнения:

$$\tilde{y}'' + \tilde{y} = 4e^x;\ Ae^x + Ae^x = 4e^x;\ A = 2,$$

следовательно,

$$\tilde{y} = 2e^x,$$

а общее решение исходного уравнения:

$$y = 2e^x + C_1\cos x + C_2\sin x;\ C_1,\ C_2 - \text{const}.$$

г) Общее решение однородного уравнения:

$$y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^x \text{ (см. задачу а)).}$$

Так как $k = 1$ *является корнем характеристического* уравнения кратности 1, а правая часть неоднородного уравнения имеет вид $4e^x$, то частное решение неоднородного уравнения следует строить в виде

$$\tilde{y} = Axe^x.$$

Тогда $\tilde{y}' = Ae^x + Axe^x$; $\tilde{y}'' = 2Ae^x + Axe^x$

и получаем следующее уравнение для определения A:

$$2Ae^x + Axe^x - Axe^x = 4e^x;\ A = 2,$$

следовательно, $\tilde{y} = 2xe^x$.

Общее решение однородного уравнения:

$y = 2xe^x + C_1e^{-x} + C_2e^x$; C_1, C_2 – const.

Ответ: а) $y = -x^2 + x - 3 + C_1e^{-x} + C_2e^x$;

б) $y = x^3 + x + C_1 + C_2e^{4x}$;

в) $y = 2e^x + C_1\cos x + C_2\sin x$;

г) $y = 2xe^x + C_1e^{-x} + C_2e^x$; C_1, C_2 – const.

Пример 5. Решить уравнение:

а) $y'' + y = 6\sin 2x$; б) $y'' + 4y = \sin 2x$.

Решение.

а) Общее решение однородного уравнения было получено ранее (пример 4 в)):

$$y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x;\ C_1,\ C_2 - \text{const}.$$

Так как среди корней характеристического уравнения нет корня $2i$, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x,$$

при этом $\tilde{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$,

$\tilde{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$,

и уравнение принимает вид:

$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = 6\sin 2x$,

$-3A\cos 2x - 3B\sin 2x = 6\sin 2x$,

следовательно,

$$\begin{cases} -3A = 0, \\ -3B = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} A = 0, \\ B = -2. \end{cases}$$

Частное решение неоднородного уравнения:

$$\tilde{y} = -2\sin 2x,$$

а общее решение

$$y = -2\sin 2x + C_1\cos x + C_2\sin x;\ C_1,\ C_2 - \text{const}.$$

б) Характеристическое уравнение однородного уравнения имеет вид $k^2 + 4 = 0$, откуда $k_{1,2} = \pm 2i$, и общее решение однородного уравнения $y_0 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$; C_1, C_2 – const. Поскольку правая часть неоднородного уравнения имеет вид $\sin 2x$, то частное решение неоднородного уравнения следует строить в виде

$$\tilde{y} = x\,(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Тогда $\tilde{y}' = A\cos 2x + B\sin 2x - 2A\,x\sin 2x + 2B\,x\cos 2x$;

$\tilde{y}'' = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x$.

Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, получаем:

$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x +$
$+ 4Ax\cos 2x + 4Bx\sin 2x = \sin 2x$,

откуда имеем: $A = -\frac{1}{4}$; $B = 0$; $\tilde{y} = -\frac{1}{4}x\cdot\cos 2x$.

Следовательно, $y = -\frac{1}{4}x\cdot\cos 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$; C_1, C_2 – const.

Ответ: а) $y = 2\sin 2x + C_1\cos x + C_2\sin x$;

б) $y = -\frac{x}{4}\cos 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$; C_1, C_2 – const.

Задания для самостоятельного решения

1. $y''' = -\cos x$;
2. $x - \sin y'' + 2y'' = 0$;
3. $y'^3 - 8 = 0$;
4. $y'^2 - 4y' + 4 = 0$;
5. $xy'' = y'\cdot\ln\frac{y'}{x}$;
6. $y'' = \left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}$;
7. $2yy'' = y'^2 + y^2$;
8. $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$;
9. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$;
10. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$;
11. $y'' + 4y' + 4y = 0$;
12. $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$;

13. $y'' + 2y' + 2y = 0$;
14. $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0$;
15. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$;
16. $y'' + 5y' + 6y = 3$;
17. $y'' + y' = 5$;
18. $y'' - 2y' + y = 4e^x$;
19. $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$;
20. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$;
21. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$.

Ответы:

1. $y = \sin x + \dfrac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$;

2. $\begin{cases} x = \sin t - 2t, \\ y = -\dfrac{1}{4}t\cos 2t + \dfrac{3}{8}\sin 2t - t^2\sin t - 2\sin t + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{2}{3}t^3 + (\sin t - 2t)C_1 + C_2; \end{cases}$

3. $y = x^2 + C_1x + C_2$; **4.** $y = x + \dfrac{1}{3}(x + C_1)^2 + C_2$;

5. $y = \dfrac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\cdot\left(x - \dfrac{1}{C_1}\right) + C_2$; $y = e^{\frac{x^2}{2}} + C$;

6. $y = \pm\sqrt{1-(x-C_1)^2} + C_2$;

7. $y + \dfrac{C_1}{2} + \sqrt{y^2 + C_1y} = e^{\pm x + C_2}$;

8. $\dfrac{2}{3C_1}\left(y - C_1^2\right)^{\frac{3}{2}} = \pm x + C_2$;

9. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^x + C_4e^{-x}$;
10. $y = C_1e^{2x} + C_2e^x + C_3e^{-x}$;
11. $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$;
12. $y = C_1e^{3x} + (C_2 + C_3x)e^{2x}$;
13. $y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$;
14. $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + C_3\cos x + C_4\sin x$;
15. $y = (C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x$;

16. $y = \dfrac{1}{2} + C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$; **17.** $y = 5x + C_1 + C_2e^{-x}$;

18. $y = 2x^2e^x + (C_1 + C_2x)e^x$; **19.** $y = e^x - 1 + C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$;

20. $y = \dfrac{x}{2}\sin x - \dfrac{1}{3}\cos 2x + C_1\cos x + C_2\sin x$;

21. $y = -\sin x + 2\cos x + C_1e^x + C_2e^{-x}$.

8.3. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Определение 1. Системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка называется совокупность уравнений вида

$$\begin{cases} F_1(x;\ y_1;\ \ldots;y_n;\ y_1';\ \ldots;y_n') = 0, \\ F_2(x;\ y_1;\ \ldots;y_n;\ y_1';\ \ldots;y_n') = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x;\ y_1;\ \ldots;y_n;\ y_1';\ \ldots;y_n') = 0; \end{cases}$$

где $y_1;\ y_2;\ \ldots\ ;\ y_n$ – искомые функции.

Система вида $\begin{cases} y_1' = f_1(x;\ y_1;\ \ldots;y_n), \\ y_2' = f_2(x;\ y_1;\ \ldots;y_n), \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x;\ y_1;\ \ldots;y_n) \end{cases}$

называется *нормальной системой* дифференциальных уравнений 1-го порядка. Если f_i не зависят явно от x, то система называется *автономной или стационарной*.

Определение 2. Любая совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x);\ y_2 = \varphi_2(x);\ \ldots;\ y_n = \varphi_n(x)$, обращающая в тождества все уравнения системы, называется *решением (частным решением)* данной системы дифференциальных уравнений.

Определение 3. Совокупность n функций вида $y_i = \varphi_i(x;\ C_1;\ C_2;\ \ldots;\ C_n)$; $i = 1;\ 2;\ \ldots;\ n$, называется *общим решением системы* дифференциальных уравнений, если они тождественно удовлетворяют системе уравнений и при соответствующем выборе констант $C_1;\ C_2;\ \ldots;\ C_n$ из них может быть получено любое (частное) решение исходной системы.

Определение 4. Задача о нахождении решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, удовлетворяющего дополнительным (начальным) условиям $y_1(x_0) = y_1^0;\ y_2(x_0) = y_2^0;\ \ldots;\ y_n(x_0) = y_n^0$, где $y_1^0;\ y_2^0;\ \ldots;\ y_n^0$ – произвольные постоянные, называется *задачей Коши*.

Системы линейных уравнений

Определение 5. Системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = p_{21}(x)y_1 + \ldots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x); \end{cases}$$

называются *линейными*. Если $f_i(x) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то система называется *однородной*.

Определение 6. Совокупность n линейно независимых решений однородной линейной системы называется *фундаментальной системой решений.*

Теорема 1. Если $\begin{matrix} y_{11}; y_{12}; \ldots; y_{1n} \\ y_{21}; y_{22}; \ldots; y_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{n1}; y_{n2}; \ldots; y_{nn} \end{matrix}$ – фундаментальная система решений линейной однородной системы, то общее решение этой системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = C_1y_{11} + C_2y_{21} + \ldots + C_ny_{n1}, \\ y_2 = C_1y_{12} + C_2y_{22} + \ldots + C_ny_{n2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = C_1y_{1n} + C_2y_{2n} + \ldots + C_ny_{nn}; \end{cases}$$

где C_1; C_2; ...; C_n – произвольные постоянные.

Теорема 2. Общее решение системы линейных неоднородных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = \tilde{y}_1 + C_1y_{11} + \ldots + C_ny_{n1}, \\ y_2 = \tilde{y}_2 + C_1y_{12} + \ldots + C_ny_{n2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = \tilde{y}_n + C_1y_{1n} + \ldots + C_ny_{nn}; \end{cases}$$

$\tilde{y}_1$; $\tilde{y}_2$; ...; $\tilde{y}_n$ – частное решение неоднородной системы; y_{ij} – фундаментальная система решений однородной системы; C_1; C_2; ...; C_n – произвольные постоянные.

При решении системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами наиболее эффективен метод Эйлера, в рамках которого решение ищется в виде $y_1 = A_1e^{kx}$; $y_2 = A_2e^{kx}$; ...; $y_n = A_ne^{kx}$, где k; A_1; A_2; ...; A_n – постоянные, подлежащие определению. После подстановки данных выражений в исходную систему

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

получаем следующую алгебраическую систему

$$\begin{cases} (a_{11} - k)A_1 + a_{12}A_2 + \ldots + a_{1n}A_n = 0, \\ a_{21}A_1 + (a_{22} - k)A_2 + \ldots + a_{2n}A_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \ldots + (a_{nn} - k)A_n = 0. \end{cases}$$

Система имеет нетривиальное решение, если определитель матрицы системы равен нулю

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{11} - k & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0.$$

Полученное уравнение называется *характеристическим*, а его корни – *характеристическими числами.*

Рассмотрим различные варианты решения характеристического уравнения.

1. Все характеристические числа действительны и различны: k_1; k_2; ...; k_n.

Для каждого корня k_i находим коэффициенты A_{i1}; A_{i2}; ...; A_{in}; а следовательно, получаем следующее решение: $y_{i1} = A_{i1}e^{k_i x}$; $y_{i2} = A_{i2}e^{k_i x}$; ...; $y_{in} = A_{in}e^{k_i x}$; $i = 1; 2; ...; n$. Совокупность найденных функций – фундаментальная система решений системы:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cdot A_{11}e^{k_1 x} + C_2 \cdot A_{21}e^{k_2 x} + \ldots + C_n \cdot A_{n1}e^{k_n x}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = C_1 \cdot A_{n1}e^{k_1 x} + C_2 \cdot A_{n1}e^{k_2 x} + \ldots + C_n \cdot A_{nn}e^{k_n x}. \end{cases}$$

2. Все характеристические числа действительны, но среди них есть кратные.

Пусть корень k имеет кратность p, тогда ему соответствуют решения вида:

$y_1 = P_1(x)e^{kx}$; $y_2 = P_2(x)e^{kx}$; ...; $y_n = P_n(x)e^{kx}$, где $P_i(x)$ – полиномы степени не выше $p - 1$. Среди коэффициентов этих полиномов p являются произвольными, а остальные выражаются через них. Полагая последовательно один из этих произвольных коэффициентов равным 1, а остальные – 0, получаем p линейно независимых частных решений, соответствующих данному p-кратному корню k.

3. Все характеристические числа различны, но среди них есть комплексные.

Решение проводится по схеме пункта 1, но после того, как построены комплексные решения, проводится выделение действительной и мнимой частей. В результате чего каждая пара комплексно сопряженных корней $k_{1,2} = a \pm ib$ порождает два действительных решения исходной системы.

4. Среди характеристических чисел есть комплексные кратные.

Решение проводится по схеме пункта 2. Каждый раз после получения комплексного решения проводится выделение действительной и мнимой частей.

При решении линейных неоднородных уравнений для построения частного решения наиболее часто используется метод неопределенных коэффициентов (см. 8.2).

Пример 1. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} y' = 5y + 4z, \\ z' = 4y + 5z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$

Решение.

а) Характеристическое уравнение данной системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 5-k & 4 \\ 4 & 5-k \end{vmatrix} = 0; \; k^2 - 10k + 9 = 0,$$

откуда получаем $k_1 = 1$; $k_1 = 9$.

Рассмотрим случай $k = 1$. Решение системы ищется в виде

$$\begin{cases} y = Ae^x, \\ z = Be^x; \end{cases}$$

получаем: $4A + 4B = 0$; $A = -B$. Используя произвол в выборе одной из констант, получим $A = 1$; $B = -1$. То есть решение системы, соответствующее значению $k = 1$, имеет вид $y_1 = e^x$; $z_1 = -e^x$.

Случай $k = 9$ рассматривается аналогично, при этом получаем $y_2 = e^{9x}$; $z_2 = e^{9x}$.

Общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} y = C_1e^x + C_2e^{9x}, \\ z = -C_1e^x + C_2e^{9x}; \end{cases} \text{где } C_1, C_2 - \text{const}.$$

б) Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \; k^2 - 4k + 5 = 0,$$

откуда получаем $k_{1,2} = 2 \pm i$.

Поскольку решение системы ищется в виде

$$\begin{cases} y = Ae^{kx}, \\ z = Be^{kx}; \end{cases}$$

то после подстановки этих выражений в исходную систему получаем: $iA + B = 0$; $B = -iA$.

Пусть $A = 1$, тогда $B = -i$ и решение системы следующее:

$$\begin{cases} y = e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i\sin x), \\ z = -ie^{(2+i)x} = e^{2x}(\sin x - i\cos x). \end{cases}$$

Выделяя действительную и мнимую части решений, получаем

$y_1 = e^{2x}\cos x$; $z_1 = e^{2x}\sin x$;

$y_2 = e^{2x}\sin x$; $z_2 = -e^{2x}\cos x$,

после чего общее решение системы приобретает окон чательный вид:

$$\begin{cases} y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x), \\ z = e^{2x}(C_1\sin x - C_2\cos x); \end{cases} C_1, C_2 - \text{const}.$$

Ответ: а) $\begin{cases} y = C_1e^x + C_2e^{9x}, \\ z = -C_1e^x + C_2e^{9x}; \end{cases}$ где $C_1, C_2 - \text{const}$;

б) $\begin{cases} y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x), \\ z = e^{2x}(C_1\sin x - C_2\cos x); \end{cases}$ $C_1, C_2 - \text{const}$.

Пример 2. Решить систему: $\begin{cases} y' = 4y - z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$

Решение.

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 4-k & -1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0$ **имеет** двукратный корень $k = 3$.

В этом случае решение исходной системы ищется в виде

$$\begin{cases} y = (A_1x + A_2)e^{3x}, \\ z = (B_1x + B_2)e^{3x}; \end{cases}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 – коэффициенты, подлежащие определению.

После подстановки выражений для y и z в исходную систему получаем

$$\begin{cases} (-A_1 + B_1)x + A_1 - A_2 + B_2 = 0, \\ (-A_1 + B_1)x + B_2 + B_1 - A_2 = 0; \end{cases}$$

что равносильно следующей алгебраической системе уравнений.

$$\begin{cases} -A_1 + B_1 = 0, \\ A_1 - A_2 + B_2 = 0, \\ -A_1 + B_1 = 0, \\ B_2 + B_1 - A_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1 = A_1, \\ B_2 = A_2 - A_1, \\ A_1;\ A_2 \in R. \end{cases}$$

В качестве двух линейно независимых решений этой системы выберем следующие:

$$\begin{cases} A_1 = 1, \\ A_2 = 0, \\ B_1 = 1, \\ B_2 = -1; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} A_1 = 0, \\ A_2 = 1, \\ B_1 = 0, \\ B_2 = 1. \end{cases}$$

Получены два линейно независимых решения исходной системы дифференциальных уравнений:

$$y_1 = xe^{3x};\ z_1 = (x-1)e^{3x} \text{ и } y_2 = e^{3x};\ z_2 = e^{3x}.$$

Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид:

$$\begin{cases} y = (C_1x + C_2)e^{3x}, \\ z = (C_1(x-1) + C_2)e^{3x}; \quad C_1, C_2 - \text{const}. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} y = (C_1x + C_2)e^{3x}, \\ z = (C_1(x-1) + C_2)e^{3x}; \quad C_1, C_2 - \text{const}. \end{cases}$

Пример 3. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y' = -5y + 2z + e^{x}, \\ z' = y - 6z + e^{-2x}. \end{cases}$$

Решение.

Данная система является неоднородной, поэтому ее решение будет построено как сумма частного решения неоднородной системы и общего решения однородной системы уравнений.

1) Рассмотрим однородную систему: $\begin{cases} y' = -5y + 2z, \\ z' = y - 6z. \end{cases}$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -5-k & 2 \\ 1 & -6-k \end{vmatrix} = 0; \quad k^2 + 11k + 28 = 0,$$

а его корни соответственно равны $k_1 = -4$; $k_2 = -7$.
Если $k = -4$, то решение системы ищется в виде

$$\begin{cases} y = Ae^{-4x}, \\ z = Be^{-4x}. \end{cases}$$

После подстановки этих выражений в систему получаем:

$$A = 2B.$$

Пусть $B = 1$, тогда $A = 2$, тогда решение исходной системы, соответствующее случаю $k = -4$, имеет вид:

$$y_1 = 2e^{-4x}; \ z_1 = e^{-4x}.$$

Случай $k = -7$ исследуется аналогично и приводит к следующему решению:

$$y_2 = e^{-7x}; \ z_2 = -e^{-7x}.$$

Окончательно получаем общее решение однородной системы уравнений:

$y_0 = 2C_1e^{-4x} + C_2e^{-7x}$,
$z_0 = C_1e^{-4x} - C_2e^{-7x}$; $\quad C_1, C_2$ – const.

2) Частное решение неоднородной системы найдем методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases} \tilde{y} = Ae^{x} + Be^{-2x}, \\ \tilde{z} = Ce^{x} + De^{-2x}; \end{cases}$$

A, B, C, D – коэффициенты, подлежащие определению.

После подстановки $\tilde{y}$ и $\tilde{z}$ исходная система приобретает вид:

$$\begin{cases} Ae^{x} - 2Be^{-2x} = -5Ae^{x} - 5Be^{-2x} + 2Ce^{x} + 2De^{-2x} + e^{x}, \\ Ce^{x} - 2De^{-2x} = Ae^{x} + Be^{-2x} - 6Ce^{x} - 6De^{-2x} + e^{-2x}; \end{cases}$$

откуда получаем $A = \dfrac{7}{40}$; $B = \dfrac{1}{5}$; $C = \dfrac{1}{40}$; $D = \dfrac{3}{10}$, или $\begin{cases} \tilde{y} = \dfrac{7}{40}e^{x} + \dfrac{1}{5}e^{-2x}, \\ \tilde{z} = \dfrac{1}{40}e^{x} + \dfrac{3}{10}e^{-2x}. \end{cases}$

3) Общее решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} y = \dfrac{7}{40}e^{x} + \dfrac{1}{5}e^{-2x} + 2C_1e^{-4x} + C_2e^{-7x}, \\ z = \dfrac{1}{40}e^{x} + \dfrac{3}{10}e^{-2x} + C_1e^{-4x} - C_2e^{-7x}; \quad \text{где } C_1, C_2 - \text{const}. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} y = \dfrac{7}{40}e^{x} + \dfrac{1}{5}e^{-2x} + 2C_1e^{-4x} + C_2e^{-7x}, \\ z = \dfrac{1}{40}e^{x} + \dfrac{3}{10}e^{-2x} + C_1e^{-4x} - C_2e^{-7x}; \quad C_1, C_2 - \text{const}. \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

1. $\begin{cases} y' = 3y - z + w, \\ z' = -y + 5z - w, \\ w' = y - z + 3w. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y' = z + w, \\ z' = y + z - w, \\ w' = z + w. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y' = z - 7y, \\ z' = -2y - 5z. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y' = y - 2z - w, \\ z' = -y + z + w, \\ w' = y - w. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y' = -z + \cos x, \\ z' = 3y - 4z + 4\cos x - \sin x. \end{cases}$

Ответы:

1. $\begin{cases} y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - C_3e^{6x}, \\ z = C_2e^{3x} + 2C_3e^{6x}, \\ w = -C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - C_3e^{6x}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = 2C_1 + C_2 x e^x + C_3 e^x, \\ z = -C_1 + C_2 e^x, \\ w = C_1 + C_2 x e^x + C_3 e^x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) e^{-6x}, \\ z = ((C_1 + C_2) \cos x + (C_2 - C_1) \sin x) e^{-6x}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y = C_1 + 3C_2 e^{2x}, \\ z = -2C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}, \\ w = C_1 + C_2 e^{2x} - C_3 e^{x}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}, \\ z = C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{-3x} + \cos x. \end{cases}$

9. РЯДЫ

9.1. Числовые ряды

Определение 1. Числовым рядом называется выражение $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$, где числа $u_1, u_2, ..., u_n, ...$, называемые *членами ряда*, образуют числовую последовательность $u_n = f(n)$; $n \in N$.

Определение 2. Частичной суммой ряда (1) называется число $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

Частичные суммы образуют последовательность $S_1 = u_1$; $S_2 = u_1 + u_2$; $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$; ...; $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$; ...

Определение 3. Если существует предел последовательности частичных сумм ряда, то ряд называется *сходящимся*, а этот предел называется *суммой ряда*. При этом, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то используют обозначение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$. Если же предел последовательности частичных сумм ряда не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Ряд $a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$ ($|q| < 1$), составленный из членов бесконечно убывающей *геометрической прогрессии*, является сходящимся, и его сумма равна $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Ряд $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} + ...$, называемый *гармоническим*, расходится.

Основные теоремы о сходящихся числовых рядах

Теорема 1. Если сходится ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...,$$

то сходится и ряд

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + ...,$$

получаемый из данного ряда отбрасыванием n первых членов; наоборот, из сходимости n-го остатка ряда r_n вытекает сходимость данного ряда.

Теорема 2. Если сходится ряд
$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$
и суммой его является число S, то сходится и ряд
$$\alpha u_1 + \alpha u_2 + \alpha u_3 + \ldots + \alpha u_n + \ldots,$$
причем сумма последнего ряда равна αS.

Теорема 3. Если сходятся ряды
$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots,$$
имеющие соответственно суммы S и σ, то сходится и ряд
$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots,$$
причем сумма последнего равна $S + \sigma$.

Теорема 4. Если ряд
$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$
сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, т. е. при $n \to \infty$ предел общего члена сходящегося ряда равен нулю *(необходимый признак сходимости ряда)*.

Теорема 5. Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Признаки сходимости рядов

Первый признак сравнения

Пусть даны два ряда с положительными членами:
$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{2}$$
причем каждый член ряда (1) не превосходит соответствующего члена ряда (2), т. е.
$$u_n \le v_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
Тогда, если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1); если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2).

Второй признак сравнения

Если существует конечный, отличный от нуля, предел

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A > 0$, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ одновременно сходятся и одновременно расходятся.

Признак Коши

Если для ряда
$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,\ u_n > 0,\ n \in N$$
существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$, то этот ряд сходится при $k < 1$ и расходится при $k > 1$.

Признак Даламбера

Если для ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,\ u_n > 0,\ n \in N$$

существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = D$, то этот ряд сходится при $D < 1$ и расходится при $D > 1$.

Интегральный признак

Если $f(x)$ при $x \geq 1$ – непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = f(n)$, $n \in N$ сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Рассмотрим теперь ряды, члены которых имеют разные знаки.

Определение 4. *Знакочередующимся рядом* называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,$$

где $u_n > 0$, $n \in N$.

Признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница)

Знакочередующийся ряд сходится, если абсолютные величины его членов монотонно убывают, а общий член стремится к нулю, т. е. если выполняются следующие два условия:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

Сумма знакочередующегося ряда меньше первого члена ряда, т. е. $S < u_1$.

Определение 5. *Знакопеременные ряды* — это ряды с произвольным чередованием знаков его членов.

Теорема 6. Знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходится, если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда.

Определение 6. Сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится. и *условно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то ряд, полученный после любой перестановки бесконечного множества его членов, абсолютно сходится и имеет ту же сумму, что и первоначальный ряд.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ условно сходится, то при перестановке бесконечного множества его членов сумма ряда может измениться. В частности, при соответствующей перестановке членов условно сходящегося ряда его можно превратить в расходящийся ряд.

Пример 1. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n}{n^2+4}$.

Решение.

Найдем предел общего члена ряда при $n \to \infty$:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{2}{n}} = \dfrac{2}{3} \neq 0$. Необходимый признак для данного ряда не выполняется. Поэтому данный ряд расходится.

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{n^2+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{4}{n^2}} = 0.$

Для данного ряда необходимый признак сходимости выполняется. Поскольку признак сходимости необходимый, но не достаточный, то ряд может быть сходящимся или расходящимся, что можно установить после дополнительного исследования.

Ответ: а) необходимый признак сходимости не выполняется; б) необходимый признак сходимости выполняется.

Пример 2. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Написать три первых члена ряда.

Решение.

Если $n = 1$, то $u_1 = \frac{1}{1^p} = 1$; если $n = 2$, то $u_2 = \frac{1}{2^p}$; если $n = 3$, то $u_3 = \frac{1}{3^p}$; .... Ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots.$$

Ответ: $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{2^p}$, $u_3 = \frac{1}{3^p}$.

Пример 3. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \ldots.$$

Решение.

$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Поэтому

$$u_1 = 1 - \frac{1}{2},\ u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\ u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},\ \ldots$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}$. Так как

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, то ряд сходится и его сумма $S = 1$.

Пример 4. Исследовать с помощью интегрального признака сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p > 0$.

Решение.

Заменяем в выражении общего члена ряда $u_n = \frac{1}{n^p}$ аргумент n непрерывной переменной x, $x \in [1, +\infty)$. Функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $p > 0$ является на промежутке $[1, +\infty)$ непрерывной, монотонно убывающей, положительной.

Находим несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, $p \neq 1$.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}x^{-p}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{b^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right] =$$

$$=\begin{cases}+\infty, & \text{при } 0 < p < 1,\\ \dfrac{1}{p-1}, & \text{при } p > 1.\end{cases}$$

Исследуем отдельно случай, когда $p = 1$.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln|x|\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\ln b = +\infty.$$

Отсюда заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leq 1$.

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}\text{сходится при } p>1,\\ \text{расходится при } p\le 1.\end{cases}$

Пример 5. Исследовать по признаку сравнения сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}.$$

Решение.

Очевидно, $u_n=\dfrac{1}{n\cdot 2^n}<\dfrac{1}{2^n}=v_n$, $n\in N$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ есть геометрическая прогрессия, знаменатель которой $q=\dfrac{1}{2}<1$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ сходится, $u_n<v_n$, $n\in N$, то сходится и данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}$.

Ответ: сходится.

Пример 6. Исследовать по второму признаку сравнения ряд

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}.$$

Решение.

Сравним данный ряд с гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\ v_n=\frac{1}{n};\ u_n=\frac{1}{2n-1}.$$

Находим $\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2n-1}:\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{n}{2n-1}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\ne 0.$$

Гармонический ряд расходится, значит, и данный ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

Решение.

$u_n=\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}=v_n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический, он расходится. Значит, данный ряд расходится по первому признаку сравнения.

Ответ: ряд расходится.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\dots$$

и найти его сумму в случае сходимости.

Решение.

Данный ряд – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\frac{1}{2}$ и первым членом $b_1=\frac{2}{3}$. Этот ряд сходится, так как $q=\frac{1}{2}<1$, и его сумма равна

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}.$$

Ответ: ряд сходится, $S=\frac{4}{3}$.

Исследовать сходимость рядов по признаку Даламбера.

Пример 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$.

Решение.

Зная $u_n=\frac{n^5}{2^n}$, найдем следующий за ним член ряда $u_{n+1}=\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}$. Затем находим предел отношения последующего члена u_{n+1} ряда к предыдущему u_n при $n\to\infty$.

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n^5}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5=$$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=\frac{1}{2}<1$. Данный ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Пример 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$.

Решение.

$$u_n=\frac{n!}{5^n},\ u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}.$$

Далее, $D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5}=\infty.$

Ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Пример 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$.

Решение.

Применим признак Даламбера.

$$u_n=\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}},\ u_{n+1}=\frac{3^{2(n+1)+1}}{2^{3(n+1)-1}}=\frac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}}.$$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n+3}\cdot 2^{3n-1}}{2^{3n+2}\cdot 3^{2n+1}}=\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8};\ D=\frac{9}{8}>1.$$

Ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Пример 12. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots.$$

Решение.

Данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p>0$, у которого $p=\frac{1}{2}<1$. Значит, ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Пример 13. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$$

Решение.

Члены данного ряда монотонно убывают по абсолютной величине, стремясь к нулю:

$$1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\frac{1}{7}>\ldots \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0.$$

Поэтому, согласно признаку Лейбница, данный ряд сходится и сумма ряда меньше первого члена ряда, т. е. $S<1$.

Пример 14. Исследовать сходимость знакочередующихся рядов.

а) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin n\alpha}{2^n}$.

Решение.

Вместо данного ряда возьмем ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{2^n}$. Это – ряд с положительными членами, сравним его по *первому* признаку сравнения с рядом $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$; $u_n=\dfrac{|\sin n\alpha|}{2^n}\le\dfrac{1}{2^n}=v_n$.

Ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$ – геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\dfrac{1}{2}<1$, он сходится. По признаку сравнения данный ряд абсолютно сходится.

Ответ: ряд абсолютно сходится.

б) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+\ldots.$

Решение.

Применим признак Лейбница. Так как

$$\frac{2}{2^2+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\ \frac{3}{3^2+1}=\frac{1}{3+\frac{1}{3}},\ \frac{4}{4^2+1}=\frac{1}{4+\frac{1}{4}},\ \ldots,$$

то $\frac{1}{2}>\frac{1}{2+\frac{1}{2}}>\frac{1}{3+\frac{1}{3}}>\frac{1}{4+\frac{1}{4}}>\ldots.$

Следовательно, выполнено первое условие признака Лейбница. Найдем предел общего члена ряда.

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=0$, т. е. второе условие выполнено. Ряд сходится.

Проверим данный ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}.\ u_n=\frac{n}{n^2+1}>\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}=v_n.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический, расходится. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ по признаку сравнения тоже расходится.

Ответ: данный ряд сходится условно.

Замечание. Для приближенного вычисления суммы сходящегося ряда в качестве суммы ряда берут его n-ю частичную сумму:

$S\approx S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$, отбрасывается остаток ряда $r_n=u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}\ldots.$ Если данный ряд сходится, то ряд r_n тоже сходится, причем ошибка метода вычисления суммы знакочередующегося ряда меньше абсолютной величины первого отброшенного члена ряда, т. е. $r_n<|u_{n+1}|$.

Пример 15. Проверить, что знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$ сходится, и вычислить приближенное значение его суммы с точностью до 0,01.

Решение.

Проверяем сходимость ряда по признаку Лейбница: убеждаемся, что его члены убывают по абсолютному значению и что $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1} = 0$. Ряд сходится.

Далее, вычисляем несколько последовательных первых членов данного ряда, пока не получим такой член ряда, абсолютное значение которого меньше 0,01:

$$u_1 = -\frac{1}{2},\ u_2 = \frac{1}{9},\ u_3 = -\frac{1}{28},\ u_4 = \frac{1}{65},\ u_5 = -\frac{1}{126} < 0{,}01.$$

Следовательно, для вычисления суммы данного ряда с точностью до 0,01 достаточно взять сумму четырех его первых членов:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1} \approx -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{28} + \frac{1}{65} \approx -0{,}41.$$

Ответ: ряд сходится, $S \approx -0{,}41$.

Пример 16. Исследовать по признаку Коши положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Решение.

$u_n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Здесь удобно применить признак Коши, поскольку $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $C = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$;

так как $C = \frac{1}{2} < 1$, то ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Задания для самостоятельного решения

1. Написать простейшую формулу n-го члена ряда по указанным членам:

а) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$; б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots$;

в) $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \ldots$; г) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \ldots$.

В следующих задачах для каждого ряда:

1) найти сумму n первых членов ряда (S_n),

2) доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости и

3) найти сумму ряда (S).

2. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\ldots.$

3. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}+\ldots.$

4. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+3)}+\ldots.$

В следующих задачах написать 4–5 первых членов ряда по известному общему члену u_n:

5. $u_n=\frac{3n-2}{n^2+1}$. 6. $u_n=\frac{(-1)^n\cdot n}{2^n}$. 7. $u_n=\frac{2+(-1)^n}{n^2}$.

Исследовать сходимость рядов, применяя признаки сравнения (или необходимый признак):

8. $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots.$

9. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots+\frac{n+1}{2n+1}+\ldots.$

10. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots.$

11. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots.$

С помощью признака Даламбера исследовать сходимость рядов:

12. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}+\ldots.$

13. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

14. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{2^n(2n+1)}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$.

С помощью признака Коши исследовать сходимости рядов:

17. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}}{n^n}$.

Исследовать сходимость следующих знакопеременных рядов. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

21. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}$.

Ответы:

1. а) $\frac{1}{n^2}$, б) $\frac{1}{2n}$, в) $\frac{n+2}{(n+1)^2}$, г) $\frac{n}{2^{n-1}}$;

2. $S_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$, $S = \frac{1}{2}$;

3. $S_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$, $S = \frac{1}{3}$;

4. $S_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$, $S = \frac{11}{18}$;

8. расходится; **9.** расходится; **10.** расходится; **11.** сходится; **12.** сходится; **13.** сходится; **14.** расходится; **15.** сходится; **16.** сходится; **17.** сходится; **18.** сходится; **19.** сходится; **20.** сходится; **21.** сходится условно; **22.** сходится условно; **23.** сходится абсолютно; **24.** сходится абсолютно.

9.2. Функциональные, степенные ряды

Определение 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots$, члены которого являются функциями от переменной x, называется *функциональным*.

При различных значениях x из функционального ряда получаются различные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися.

Определение 2. Множество значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости*.

Из всех функциональных рядов простейшими и наиболее употребительными являются *степенные ряды* вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n + \ldots \qquad (*)$$

или более общего вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$+ a_n(x - x_0)^n + \ldots \qquad (*).$$

Теорема Абеля. 1) Если степенной ряд (*) сходится при $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$), то он сходится, и притом абсолютно, для всех x, удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$; 2) если ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Определение 3. Радиусом сходимости степенного ряда (*) называется число R такое, что для всех x, $|x| < R$, степенной ряд сходится, а для всех x, $|x| > R$, расходится. Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда (*). Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда. В точках $x = -R$, $x = R$ ряд может сходиться в обеих точках, или только в одной из них, или ни в одной. При этом ряд может сходиться в этих точках как абсолютно, так и условно.

Для нахождения области сходимости ряда (*) сначала находят интервал сходимости $(-R, R)$ ряда, составленного из абсолютных величин членов данного ряда, например, по признаку Даламбера. Затем значения $x = \pm R$ подставляют в исходный ряд и исследуют сходимость числовых рядов посредством других признаков сходимости.

Ряды Тейлора и Маклорена

Формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n,$$

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),\ 0 \le \theta < 1.$$

Формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n,$$

$R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, где c – некоторое число между x_0 и x,

$c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1.$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, то справедливы следующие разложения данной функции в ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Это ряд Тейлора; если $x_0 = 0$, то получаем при $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ разложение функции в ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Разложения в ряды Маклорена элементарных функций

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ -\infty < x < +\infty;$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,$$
$$-\infty < x < +\infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$-\infty < x < +\infty.$$

Эти ряды сходятся к соответствующим функциям при всех значениях $x \in R$.

$(1 + x)^m = 1 + \dfrac{m}{1!}x + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$ – биномиальный ряд; он сходится к биному $(1 + x)^m$ при $|x| < 1$;

$\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$. Этот ряд сходится к $\ln(1 + x)$ при $-1 < x \le 1$;

$\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots$ сходится к $\operatorname{arctg} x$ при $|x| \le 1$.

Пример 1. Определить интервал сходимости ряда и исследовать сходимость его на концах интервала:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^{n-1} \cdot n} = 1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \ldots.$$

Решение.

Так как степенной ряд по теореме Абеля сходится абсолютно в интервале сходимости, то рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{|x|^{n-1}}{3^{n-1} \cdot n}$. Это ряд положительный, поэтому мы можем для его исследования применить признак Даламбера.

$$u_n = \frac{|x|^{n-1}}{3^{n-1} \cdot n}, \quad u_{n+1} = \frac{|x|^n}{3^n \cdot (n+1)}.$$

Далее, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{|x|^n \cdot 3^{n-1} \cdot n}{3^n \cdot (n+1) \cdot |x|^{n-1}} = \dfrac{|x| \cdot n}{3(n+1)}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{|x|}{3} < 1.$$

Получили интервал сходимости данного ряда

$$|x| < 3, \ -3 < x < 3.$$

Исследуем сходимость данного ряда на концах интервала.

$x = -3$ подставим в данный ряд, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3^{n-1}}{3^{n-1} \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Полученный знакочередующийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

сходится по признаку Лейбница.

Действительно, 1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots$

Первое условие признака Лейбница выполняется.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, второе условие признака Лейбница выполняется.

$x = 3$ подставим и исходный ряд, получим

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{3^{n-1} \cdot n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – это гармонический ряд, он расходится. Следовательно, областью сходимости данного ряда является промежуток $[-3; 3)$.

Ответ: $[-3; 3)$ или $-3 \le x < 3$.

Пример 2. Определить область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1} \cdot \sqrt{n}}$.

Решение.

Так как степенной ряд по теореме Абеля сходится абсолютно в интервале сходимости, то рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{3^{n-1} \cdot \sqrt{n}}.$$

Этот ряд положительный, поэтому мы можем для его исследования применить признак Даламбера.

$$u_n = \frac{|x|^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}, \quad u_{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{3^n \sqrt{n+1}}.$$

Далее, $D = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^{n+1}\cdot 3^{n-1}\cdot\sqrt{n}}{3^n\cdot\sqrt{n+1}\cdot|x|^n} =$

$$= \frac{|x|}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{|x|}{3} < 1.$$

Получим интервал сходимости данного степенного ряда $|x| < 3$, $-3 < x < 3$.

Исследуем сходимость данного ряда на концах интервала.

При $x = -3$ получим числовой ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{\sqrt{n}}$, или $3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Этот ряд при $p = \dfrac{1}{2} < 1$ расходится.

При $x = 3$ получим числовой знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3}{\sqrt{n}}$, который сходится по признаку Лейбница. (Члены этого ряда монотонно убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю.) Следовательно, областью сходимости данного степенного ряда является полуоткрытый интервал $-3 < x \le 3$.

Ответ: $(-3; 3]$.

Пример 3. Используя ряды Маклорена для функций e^x, $\ln(1 + x)$, найти разложения в ряд по степеням x для следующих функций: а) xe^x, б) $\ln(1 + 3x + 2x^2)$.

Решение.

а) $xe^x = x\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots\right) =$

$$= x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n!} + \ldots \text{ при } -\infty < x < +\infty.$$

б) Преобразуем данную функцию:

$\ln(1 + 3x + 2x^2) = \ln[(1 + x)(1 + 2x)] = \ln(1 + x) + \ln(1 + 2x)$.

Запишем ряды Маклорена для полученных слагаемых функций:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ -1<x\le 1;$$

$$+\ \ln(1+2x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n x^n}{n},\ -\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}.$$

Складывая эти ряды почленно, имеем

$$\ln(1+3x+2x^2)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(1+2^n)\frac{x^n}{n},\ -\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}.$$

Ответ: 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!},\ x\in R;$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(1+2^n)\frac{x^n}{n},\ \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right].$

Пример 4. Вычислить с точностью до 0,0001 ln 1,1.

Решение.

Возьмем ряд для функции $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

который сходится к $\ln(1+x)$ в интервале $(-1;\ 1]$. Пусть $x=0{,}1$, тогда получим ряд для вычисления ln 1,1 с любой точностью:

$$\ln(1+0{,}1)=\ln 1{,}1=0{,}1-\frac{(0{,}1)^2}{2}+\frac{(0{,}1)^3}{3}-\frac{(0{,}1)^4}{4}+\ldots.$$

Абсолютное значение четвертого члена меньше 0,0001. В качестве суммы числового ряда Лейбница возьмем сумму первых трех слагаемых.

Тогда по признаку Лейбница остаток ряда меньше абсолютной величины первого отбрасываемого члена ряда, т. е. $r_n<(0{,}1)$

Итак, $\ln 1{,}1\approx 0{,}1-\frac{0{,}01}{2}+\frac{0{,}001}{3}\approx 0{,}0953.$

Ответ: $\ln 1{,}1\approx 0{,}0953.$

Пример 5. Разложить $\ln x$ в ряд по степеням $(x-1)$.

Решение.

В разложении

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \; (-1 < x \le 1)$$

заменим x на $x-1$, получим

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$$

$(0 < x \le 2)$.

Ответ: $\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}, \; 0 < x \le 2.$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_{0,5}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью до

0,001.

Решение.

Так как $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$, то, деля почленно обе части этого равенства на x, получим разложение

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получаем

$$\int_{0,5}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_{0,5}^{1} \left(1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) dx =$$

$$= x\Big|_{0,5}^{1} - \frac{x^3}{3\cdot 3!}\Big|_{0,5}^{1} + \frac{x^5}{5\cdot 5!}\Big|_{0,5}^{1} - \ldots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{3\cdot 3!} - \frac{1}{3\cdot 3!\cdot 2^3}\right) + \left(\frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{5\cdot 5!\cdot 2^5}\right) - \ldots.$$

Полученный ряд можно рассматривать как разность двух знакочередующихся сходящихся рядов, удовлетворяющих условиям признака Лейбница:

$$1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \ldots \qquad (*)$$

и $$\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 3!\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 5!\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 7!\cdot 2^7}+\ldots \quad (^{**}).$$

Поэтому $$\int_{0,5}^{1}\frac{\sin x}{x}dx=\left[1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\ldots\right]-$$

$$-\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 3!\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 5!\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 7!\cdot 2^7}+\ldots\right].$$

Но так как в знакочередующемся ряде, сходящемуся по признаку Лейбница, погрешность не превосходит модуля первого из отброшенных членов и так как

$$\frac{1}{7\cdot 7!}<0{,}0005 \text{ [для ряда (*)]},$$

$$\frac{1}{5\cdot 5!\cdot 2^5}<0{,}0005 \text{ [для ряда (**)]},$$

то $$\int_{0,5}^{1}\frac{\sin x}{x}dx\approx\left[1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}\right]-\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 3!\cdot 2^3}\right]\approx 0{,}4530.$$

Итак, $\int_{0,5}^{1}\frac{\sin x}{x}dx=0{,}453$ с точностью до 0,001, поскольку при вычитании приближенных чисел абсолютные погрешности складываются.

Ответ: $\int_{0,5}^{1}\frac{\sin x}{x}dx=0{,}453$ с точностью до 0,001.

Задания для самостоятельного решения

1. Определить интервал сходимости ряда и найти его сумму $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$.

2. Найти область сходимости степенного ряда

$$\frac{2x}{1}-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\frac{(2x)^4}{4}+\ldots.$$

3. Разложить в степенной ряд функцию e^{-x^2}.

4. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

Определить область сходимости ряда и найти его сумму.

5. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots = S(x)$.

Указание. Для нахождения суммы S найти сначала $\int\limits_0^x S(x)\,dx$.

6. $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots = S(x)$.

Указание. Найти сначала $\dfrac{dS}{dx}$.

Разложить указанные функции в степенные ряды по степеням x:

7. $\int\limits_0^x \dfrac{\ln(1+t^2)}{t}\,dt$. 8. $\int\limits_0^x \cos^2 t\,dt$.

9. Разложить функцию $y = \ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$ (при $x_0 = 1$).

10. Разложить функцию $\dfrac{1}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности $x_0 = 3$.

В следующих задачах, пользуясь формулами разложения в ряд Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, вычислить указанные выражения.

11. e^2 с точностью до 0,001.

12. $\sqrt{e}$ с точностью до 0,001.

13. $\sin 1^\circ$ с точностью до 0,0001.

14. $\cos 10^\circ$ с точностью до 0,0001.

Ответы:

1. $-1 < x < 1$, $S = \dfrac{1}{1-x}$; 2. $-\dfrac{1}{2} < x \le \dfrac{1}{2}$;

3. $e^{-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, $x \in R$; 4. $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}\,dx = 0{,}321$;

5. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ при $|x| < 1$; 6. $\operatorname{arctg} x$ при $|x| \le 1$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n}}{2n^2}$; 8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}$;

9. $(x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^n}{n}+\ldots$;

10. $\dfrac{1}{3}-\dfrac{x-3}{9}+\dfrac{(x-3)^2}{27}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{(x-3)^{n-1}}{3^n}+\ldots$;

11. 7,389; 12. 1,649; 13. 0,0175; 14. 0,9848.

9.3. Ряды Фурье

Определение 1. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\left(a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}\right)+\left(a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l}\right)+$$

$$+\left(a_3\cos\frac{3\pi x}{l}+b_3\sin\frac{3\pi x}{l}\right)+\ldots, \qquad (*)$$

где $l > 0$, a_0, a_n, b_n ($n \in N$) – постоянные числа, *называется тригонометрическим рядом.*

Все члены тригонометрического ряда – синусы и косинусы углов, кратных $\dfrac{\pi x}{l}$, и их сумма $S(x)$, если она существует, являются периодическими функциями от x с периодом $2l$; $S(x) = S(x + 2l)$.

Рядом Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$ называется тригонометрический ряд вида (*), если его коэффициенты a_n и b_n вычислены по формулам Фурье:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ n=0,\ n\in N,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ n \in N.$$

Достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье

Теорема Дирихле. Если на отрезке $[-l; l]$ функция $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода (или непрерывна) и конечное число точек экстремума (или не имеет их вовсе), то ее ряд Фурье сходится, т.е. имеет сумму $S(x)$, во всех точках этого отрезка.

При этом:

1) в точках непрерывности функции $f(x)$ он сходится к самой функции, $S(x) = f(x)$;

2) в каждой точке разрыва x_k функции – к полусумме односторонних пределов функции слева и справа,

$$S(x_k) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_k-0} f(x) + \lim_{x\to x_k+0} f(x)\right];$$

3) в обеих граничных точках отрезка $[-l, l]$ – к полусумме односторонних пределов функции при стремлении x к этим точкам изнутри отрезка,

$$S(-l) = S(l) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -l+0} f(x) + \lim_{x\to l-0} f(x)\right].$$

Для четной функции $f(x) = f(-x)$ все коэффициенты $b_n = 0$, и соответствующий ряд Фурье не содержит синусов

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},\ a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ n = 0,$$

$n \in N$.

Для нечетной функции $f(x) = -f(-x)$ все коэффициенты $a_n = 0$, и соответствующий ряд Фурье содержит только синусы

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},\ b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ n \in N.$$

Если функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы Дирихле, является периодической, то на всей числовой оси ее ряд Фурье сходится к самой функции, а в каждой точке разрыва функции – к полусумме ее односторонних пределов.

Функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[0;\ l]$, можно произвольно продолжить в соседний интервал $[-l,\ 0)$ и поэтому ее можно представить различными рядами Фурье.

Пользуясь этим, такую функцию представляют неполным рядом Фурье, содержащим только косинусы или только синусы.

Ряд по косинусам получается при четном, а ряд по синусам – при нечетном продолжении данной функции на соседний слева интервал $[-l;\ 0)$. В первом случае график данной функции продолжается на интервал $[-l;\ 0)$ симметрично относительно оси ординат, а во втором случае – симметрично относительно начала координат.

Пример 1. Периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π определена следующим образом:
$f(x) = x^2,\ -\pi < x \le \pi;\ f(x) = f(x + 2\pi)$.
Найти разложение в ряд Фурье функции $f(x) = x^2$, $-\pi < x \le \pi$.

Решение.

Данная функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле; следовательно, для нее существует ряд Фурье. Найдем его.

Функция четная, ее график симметричен относительно оси Oy. Все коэффициенты $b_n = 0$, а коэффициенты a_n вычисляются по формулам Фурье, при $l = \pi$:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\cos nx + \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\sin nx\right]\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4\cos n\pi}{n^2} = (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2},\ n \ne 0,\ \cos n\pi = (-1)^n.$$

(Здесь дважды применена формула интегрирования по частям.)

При $n = 0$ (и $l = \pi$) найдем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2x^3}{3\pi}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Следовательно,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2} + \ldots\right].$$

Это разложение данной периодической и всюду непрерывной функции справедливо при любом значении x, т. е.

полученный ряд Фурье сходится к данной функции на всей числовой оси.

Графики данной функции и суммы ее ряда Фурье полностью совпадают.

Пусть в полученном разложении $x = 0$; найдем сумму соответствующего числового ряда:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12},$$

при $x = \pi$ найдем сумму другого числового ряда:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ответ: $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{\cos nx}{n^2}$, $x \in R$.

Пример 2. Найти разложение в ряд Фурье функции $f(x) = x$, $-\pi < x \le \pi$ $(l = \pi)$.

Решение.

Данная функция удовлетворяет условиям сходимости теоремы Дирихле. Следовательно, она допускает разложение в ряд Фурье.

По формулам Фурье находим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Интегрированием по частям найдем a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right] = 0.$$

Найдем b_n:

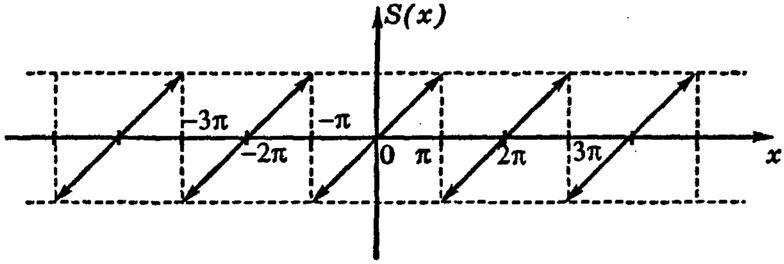
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right] =$$

$$= (-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}.$$

Таким образом, получаем ряд

$$f(x) = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right].$$

Это равенство верно во всех точках, кроме точек разрыва. В каждой точке разрыва сумма ряда равна среднему арифметическому ее пределов справа и слева, т. е. нулю.



Ответ: $f(x) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{\sin nx}{n}$.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2l$, которая на отрезке $[-l;\ l]$ задана равенством $f(x) = |x|$.

Решение.

Так как рассматриваемая функция – четная, то $b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x\,dx = l,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \begin{cases} 0 \text{ при } n \text{ четном,} \\ -\dfrac{4l}{\pi^2 n^2} \text{ при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Следовательно, разложение функции в ряд Фурье имеет вид:

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi x}{l}}{1} + \frac{\cos\frac{3\pi x}{l}}{3^2} + \frac{\cos\frac{(2p+1)\pi x}{l}}{(2p+1)^2} + \ldots\right].$$

Ответ: $|x| = \dfrac{l}{2} - \dfrac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{p=0}^{n}\dfrac{\cos\frac{(2p+1)\pi x}{l}}{(2p+1)^2}$.

Пример 4. Разложить функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0; \pi]$ в ряд по синусам.

Решение.

Продолжая эту функцию нечетным образом, получим $f(x) = x$, $-\pi < x \le \pi$. Разложение в ряд Фурье этой функции дано в примере 2.

$$x = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right].$$

Ответ: $x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{\sin(2n-1)}{2n-1}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π ($l = \pi$), которая определена следующим образом:
$f(x) = -x$ при $-\pi \le x < 0$,
$f(x) = x$ при $0 < x \le \pi$, т. е. $f(x) = |x|$.

2. Найти разложение в ряд Фурье функции:

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } -\pi < x < 0, \\ +1 \text{ при } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \dfrac{x}{2}$ в интервале $(0; 2\pi)$.

4. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $2l = 2$, заданную на интервале $-1 < x \le 1$ формулой $f(x) = x - 1$.

5. Разложить в ряд по синусам функцию $f(x) = 1$, заданную в интервале $0 < x \le 1$.

6. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |\sin x|$ на отрезке; с помощью полученного ряда показать, что

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{1}{2}.$$

Ответы:

1. $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\cos x}{1^2} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \dfrac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right]$;

2. $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\sin x}{1} + \dfrac{\sin 3x}{3} + \dfrac{\sin 5x}{5} + \ldots + \dfrac{\sin(2p+1)x}{2p+1} + \ldots\right]$;

3. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\sin x}{1}-\dfrac{\sin 2x}{2}-\dfrac{\sin 3x}{3}-\ldots-\dfrac{\sin nx}{n}-\ldots;$

4. $f(x)=1+\dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{\sin\pi x}{1}-\dfrac{\sin 2\pi x}{2}+\dfrac{\sin 3\pi x}{3}-\ldots(-1)^{n-1}\dfrac{\sin n\pi x}{n}+\ldots\right];$

5. $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\sin\pi x}{1}+\dfrac{\sin 3\pi x}{3}+\ldots+\dfrac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}+\ldots\right];$

6. $|\sin x|=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\left[\cos x+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\dfrac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right].$

Литература

Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука, 1987.

Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1985.

Болгаров В. А., Демидович Б. П., Ефименко В. А. и др. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А. В. Ефименко и Б. П. Демидовича. — М.: Мир, 1984.

Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 т. Ч. 1, 2. — М.: ОНИКС 21 век, Мир и образование, 2003.

Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов. — М.: АСТ, Астрель, 2002.

Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. Учебное пособие для втузов. — СПб.: Профессия, 2002.

Кудрявцев Л. Д. Математический анализ: В 2 т. — М.: Высшая школа, 1973.

Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для втузов. — М.: Наука, 1987.

Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1976.

Пискунов М. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебное пособие для вузов: В 2 т. — М.: Интеграл-Пресс, 2001.

Содержание

Соболь Борис Владимирович,
Мишняков Николай Тимофеевич,
Поркшеян Виталий Маркосович

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Ответственный редактор И. Жиляков
Технический редактор Л. Багрянцева
Обложка А. Пащенко
Редактор И. Ю. Виноградова
Корректоры: Н. Пустовойтова, А. Иванова

Подписано в печать 10.08.2006.
Формат 84×108 1/32. Бумага тип 2. Гарнитура Школьная
Печать высокая. Усл. печ. л. 33,6.
Тираж 4000 экз. Заказ № 6

Издательство «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга»
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.

Качество печати соответствует предоставленным диапозитивам.