Н. Винер, Р. Пэли

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

# FOURIER TRANSFORMS IN THE COMPLEX DOMAIN

by
RAYMOND E. A. C. PALEY
and
NORBERT WIENER

Published by the
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
NEW YORK 1934

Н. ВИНЕР, Р. ПЭЛИ

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Перевод с английского
Ф. В. ШИРОКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

517.2
В 48
УДК 517·512:517·53

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге дано окончательное изложение результатов, полученных покойным Р. Пэли и мной в течение того года, когда Пэли был рокфеллеровским стипендиатом в Массачусетском технологическом институте (1932—1933). Р. Пэли погиб 7 апреля, катаясь на лыжах в Скалистых горах (Canadian Rockies) во время короткого перерыва в нашей совместной работе. Я уже писал о той огромной утрате, которую понесла математика с его смертью; позвольте мне описать здесь лишь состояние, в котором он оставил нашу совместную работу. Наше сотрудничество отнюдь не носило официального характера. Мы работали вместе у доски, и, когда она покрывалась нашими заметками, один из нас переписывал существенное и превращал его в предварительную рукопись. Большая часть нашей работы прошла через много вариантов, в написании которых принимали участие оба автора. Даже в той части исследования, которая была написана после смерти Пэли, совершенно невозможно отделить новые результаты от воспоминаний о наших многочисленных беседах.

Часть нашей работы была опубликована в виде серии заметок в трудах Американского математического общества (Transactions of the American Mathematical Society). Эта работа охватывала большое количество вопросов, но объединяющей, центральной идеей было применение преобразования Фурье в комплексной области. Я уже давно был убежден в важности преобразования Фурье — Меллина как орудия анализа. Введение его, конечно, не является новинкой, однако мне не встречалось систематическое развитие этого метода. Быть может, самый близкий подход к такому развитию следует искать в работах Г. Бора, Йессена и Безиковича по почти периодическим функциям в комплексной области. Однако, по-видимому, никто не осознал широты этого метода. С его помощью мы смогли атаковать столь различные вопросы анализа, как вопрос о квазианалитических функциях, теорема Мерсера о суммируемости, интегральное уравнение Милна в теории лучистого равновесия, теоремы Мюнца и Саса о замкнутости последовательности степеней независимого переменного, принадлежащая Титчмаршу теория целых функций полуэкспоненциального типа с вещественными отрицательными нулями, тригонометрическое интерполирование и разложения по полиномам вида

$$\sum_{1}^{N} A_n e^{i\lambda_n x},$$

лакунарные ряды, обобщенный гармонический анализ в комплексной области, нули случайных функций и многие другие вопросы. Мы пришли к убеждению, что аналитический метод такой широты заслуживает специальной монографии.

Американское математическое общество оказало мне честь, пригласив меня прочитать курс лекций на коллоквиуме в Вильямстауне в 1934 г. До этого отчет о совместной работе не бывал предметом подобных лекций, но моей наиболее подходящей работой была совместная, и я предложил ее в качестве темы упомянутых лекций.

Я хочу поблагодарить Американское математическое общество за приглашение и за согласие с нашими планами. Я хочу поблагодарить моих студентов С. С. Саслоу, Х. Малина и Н. Левинсона за очень ценную работу по составлению записок, пересмотру их и критике. В частности, Н. Левинсон многое добавил к содержанию первой главы. Я хочу поблагодарить моего коллегу профессора Эберхарда Хопфа за позволение включить в книгу материал § 17, который был нашей совместной работой. И наконец, от своего имени и от имени моего покойного соавтора я хочу поблагодарить профессора Я. Д. Тамаркина из Браунского университета за его неустанное одобрение, советы и критику, без которых эта книга не появилась бы на свет.

*Норберт Винер*

Массачусетский
технологический институт,
1 марта 1934 г.

# ВВЕДЕНИЕ

**1. Теорема Планшереля.** Книгу, подобную этой, объединенную скорее повторным применением некоторого числа методов, чем большой однородностью материала, совершенно необходимо начать с краткого обзора сведений, которыми должен владеть читатель, и с перечисления основных методов. Сведения, предполагаемые у читателя в большей части этой монографии, в основном покрываются весьма полезной книгой Титчмарша «Теория функций»*). Чаще всего используются:

(1) Интегрирование по частям и различные приемы обращения порядка в абсолютно сходящихся двойных интегралах.

(2) «Усечение» функции, т. е. замена функции функцией, тождественной ей в некоторой конечной области и обращающейся в нуль вне этой области.

(3) Неравенство Шварца

$$\left[\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,dx \int_a^b |g(x)|^2\,dx \qquad (1.01)$$

и аналогичные неравенства для конечных сумм, рядов и т. п.

(4) Принадлежащая Вейлю форма теоремы Рисса — Фишера, утверждающая, что если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ из $L_2$ сходится в среднем в себе, т. е. если

$$\lim_{m,\,n\to\infty} \int_a^b |f_m(x) - f_n(x)|^2\,dx = 0, \qquad (1.02)$$

*) Русский перевод: Е. Титчмарш, Теория функций, Гостехиздат, М.—Л., 1951.

то существует функция $f(x)$ из $L_2$, к которой эта последовательность сходится в среднем, т. е.

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b |f_m(x)-f(x)|^2\,dx=0. \tag{1.03}$$

(5) Теорема, утверждающая, что если последовательность функций сходится в среднем к одному пределу и сходится в обычном смысле к другому, то эти два предела отличаются самое большее на множестве меры нуль.

(6) Методы суммирования и усреднения, в частности теоремы абелева и тауберова типа *).

(7) Методы, основанные на теоремах Планшереля и Парсеваля о преобразованиях Фурье **).

Во всей этой книге мы будем предполагать, что читатель свободно владеет теорией и применениями интеграла Лебега и знаком с соответствующими обозначениями. Например, мы будем часто пользоваться обозначением $L$ для класса измеримых, абсолютно интегрируемых функций и обозначением $L_p$ для класса тех измеримых функций, $p$-я степень модуля которых интегрируема. Однако же мы редко будем встречаться с классами, отличными от $L$ и $L_2$.

Фундаментальной теоремой о классе $L_2$ в теории интеграла Фурье является теорема Планшереля. Она читается следующим образом:

Теорема Планшереля. *Пусть $f(x)$ принадлежит $L_2$ на интервале $(-\infty, \infty)$. Тогда существует такая функция $g(u)$, принадлежащая $L_2$ на $(-\infty, \infty)$, что*

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(u)-(2\pi)^{-1/2}\int_{-A}^{A} f(x)\,e^{iux}\,dx\right|^2 du=0. \tag{1.04}$$

---

*) Ср. Wiener, The Fourier Integral and Certain of its Applications, Cambridge, 1933. (Русский перевод: Н. Винер, Интеграл Фурье и некоторые его применения, Физматгиз, 1963.) Тауберовы теоремы этой книги не содержатся в книге Титчмарша.

**) Достаточно элементарное исследование этих вопросов можно найти в книге S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932. (Русский перевод: С. Бохнер, Лекции об интегралах Фурье, Физматгиз, М., 1962. Трактовка в книге Винера (см. выше) немного более повышенного типа.

*Кроме того,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2\, du = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx \tag{1.05}$$

*и*

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - (2\pi)^{-1/2} \int_{-A}^{A} g(u)\, e^{-iux}\, du \right|^2 dx = 0. \tag{1.06}$$

*Функция $g(u)$ называется преобразованием Фурье функции $f(x)$. Она определена с точностью до значений на множестве меры нуль.*

Если интеграл

$$h(u) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{iux}\, dx \tag{1.07}$$

существует, то $g(u) = h(u)$ почти всюду.

Важным следствием из теоремы Планшереля является

Теорема Парсеваля. *Пусть функции $f_1(x)$* и *$f_2(x)$ принадлежат $L_2$, и пусть $g_1(u)$ и $g_2(u)$ соответственно их преобразования Фурье. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(u)\, g_2(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(-x)\, dx. \tag{1.08}$$

*В частности,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(u)\, g_2(u)\, e^{-iux}\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\, f_2(x-y)\, dy. \tag{1.09}$$

*Таким образом, если произведение $g_1(u)\, g_2(u)$ принадлежит $L_2$ наряду с обоими его сомножителями, то оно является преобразованием Фурье функции*

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\, f_2(x-y)\, dy. \tag{1.10}$$

*То же самое будет верно всякий раз, когда $f_1(x)$, $f_2(x)$ и функция (1.10) принадлежат $L_2$.*

**2. Преобразование Фурье экспоненциально убывающей функции.** Предположим, что $f(x)$ измерима и имеет интегрируемый квадрат на любом конечном интервале. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} O(e^{-\mu x}) & [x\to\infty]; \\ O(e^{\lambda x}) & [x\to-\infty]. \end{cases} \tag{2.1}$$

Если $-\lambda<\sigma<\mu$, то преобразованием Фурье функции $f(x)e^{\sigma x}$ будет

$$F(\sigma,\ t)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{(\sigma+it)x}\,dx. \tag{2.2}$$

Но этот интеграл сходится абсолютно и равномерно во всякой области $-\lambda+\varepsilon<\sigma<\mu-\varepsilon$. Таким образом, по хорошо известной теореме из теории функций комплексного переменного функция

$$F(\sigma+it)=F(\sigma,\ t) \tag{2.3}$$

будет аналитической функцией от $\sigma+it$ внутри полосы $-\lambda<\sigma<\mu$.

Кроме того, во всякой полосе $-\lambda+\varepsilon\leqslant\sigma\leqslant\mu-\varepsilon$ мы будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\sigma,\ t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,e^{2\sigma x}\,dx<$$

$$<\text{const.}\int_{0}^{\infty}e^{-2\varepsilon x}\,dx+\text{const.}\int_{-\infty}^{0}e^{2\varepsilon x}\,dx=\text{const.} \tag{2.4}$$

Таким образом, доказана

Теорема I. *Если функция $f(x)$ измерима, имеет интегрируемый квадрат на любом конечном интервале и удовлетворяет условию (2.1) с $-\lambda<\mu$, то формула (2.2) определяет функцию $F(\sigma+it)$, аналитическую внутри полосы $-\lambda<\sigma<\mu$; в любой внутренней полосе*

$-\lambda+\varepsilon\leqslant\sigma\leqslant\mu-\varepsilon$ *интеграл* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|F(\sigma+it)|^2\,dt$ *ограничен.*

**3. Преобразование Фурье функции, аналитической в полосе.** Пусть $F(\sigma+it)$ — функция комплексного переменного $s=\sigma+it$, которая является аналитической внутри и на границе полосы $-\lambda\leqslant\sigma\leqslant\mu$, и пусть

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\sigma+it)|^2\,dt<\text{const.}\qquad[-\lambda\leqslant\sigma\leqslant\mu].\qquad(3.01)$$

Тогда по теореме Коши при достаточно большом $A$ и $-\lambda<\sigma<\mu$ имеем

$$F(s)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-\lambda+Ai}^{-\lambda-Ai}+\int_{-\lambda-Ai}^{\mu-Ai}+\int_{\mu-Ai}^{\mu+Ai}+\int_{\mu+Ai}^{-\lambda+Ai}\right]\frac{F(z)}{z-s}\,dz.\qquad(3.02)$$

Интегрируя еще раз, имеем, при достаточно большом $B$,

$$F(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{B}^{B+1}dA\left[\int_{-\lambda+Ai}^{-\lambda-Ai}+\int_{-\lambda-Ai}^{\mu-Ai}+\int_{\mu-Ai}^{\mu+Ai}+\int_{\mu+Ai}^{-\lambda+Ai}\right]\frac{F(z)}{z-s}\,dz.$$
$$(3.03)$$

Далее,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{B}^{B+1}dA\int_{\mu+Ai}^{-\lambda+Ai}\frac{F(z)}{z-s}\,dz\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\lambda}^{\mu}dz\int_{B}^{B+1}\frac{F(z+Ai)}{z+Ai-s}\,dA\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\mu}dz\left\{\int_{B}^{B+1}|F(z+Ai)|^2\,dA\cdot\int_{B}^{B+1}\frac{dA}{|z+Ai-s|^2}\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\text{const.}\int_{-\lambda}^{\mu}d\sigma\left\{\int_{B}^{B+1}|F(\sigma+it)|^2\,dt\right\}^{1/2}.\qquad(3.04)$$

Из (3.01) следует, что

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\int_{B}^{B+1}|F(\sigma+it)|^2\,dt\right\}^{1/2}<\text{const.},\\&\lim_{B\to\infty}\left\{\int_{B}^{B+1}|F(\sigma+it)|^2\,dt\right\}^{1/2}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(3.05)$$

Хорошо известная теорема из теории интеграла Лебега утверждает, что если последовательность интегрируемых функций ограниченно сходится к пределу и если интеграл от предела существует *), то предел интеграла от функции последовательности равен интегралу от предела.

Итак,

$$\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{B}^{B+1} dA \int\limits_{\mu+Ai}^{-\lambda+Ai}\frac{F(z)}{z-s}\,dz=0. \tag{3.06}$$

Аналогично

$$\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{B}^{B+1} dA \int\limits_{-\lambda-Ai}^{\mu-Ai}\frac{F(z)}{z-s}\,dz=0. \tag{3.07}$$

Таким образом,

$$F(s)=\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B}^{B+1} dA\int\limits_{-A}^{A}\left\{\frac{F(\mu+iy)}{\mu+iy-s}-\frac{F(-\lambda+iy)}{-\lambda+iy-s}\right\}dy=$$

$$=\lim_{B\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-B}^{B}\frac{F(\mu+iy)}{\mu+iy-s}\,dy-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-B}^{B}\frac{F(-\lambda+iy)}{-\lambda+iy-s}\,dy+\right.$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B}^{B+1}\frac{(B+1-y)\,F(\mu+iy)}{\mu+iy-s}\,dy-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B}^{B+1}\frac{(B+1-y)\,F(-\lambda+iy)}{-\lambda+iy-s}\,dy+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-B-1}^{-B}\frac{(B+1+y)\,F(\mu+iy)}{\mu+iy-s}\,dy-$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-B-1}^{-B}\frac{(B+1+y)\,F(-\lambda+iy)}{-\lambda+iy-s}\,dy\right\}. \tag{3.08}$$

---

*) Это предположение излишне.—*Прим. перев.*

Но

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{B}^{B+1}\frac{(B+1-y)\,F(\mu+iy)}{\mu+iy-s}\,dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{B}^{B+1}\left|\frac{B+1-y}{\mu+iy-s}\right|^{2}dy\cdot\int_{B}^{B+1}|F(\mu+iy)|^{2}\,dy\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\text{const.}\left\{\int_{B}^{B+1}|F(\mu+iy)|^{2}\,dy\right\}^{1/2}. \qquad (3.09)$$

Из (3.01) сразу же следует, что

$$\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{B}^{B+1}\frac{(B+1-y)\,F(\mu+iy)}{\mu+iy-s}\,dy=0. \qquad (3.10)$$

Аналогичное рассуждение позволяет нам исключить из (3.08) еще три члена, и мы получаем

$$F(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\mu+iy)}{\mu+iy-s}\,dy-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(-\lambda+iy)}{-\lambda+iy-s}\,dy. \qquad (3.11)$$

Этот результат достаточно важен, чтобы занумеровать его как теорему.

Теорема II. *Пусть* $F(s)$ *аналитична в полосе* $-\lambda\leqslant\sigma\leqslant\mu$, *и пусть в этой области справедливо неравенство* (3.01). *Тогда формула* (3.11) *справедлива для* $s$, *лежащих внутри этой области.*

Неравенство Шварца дает нам оценку

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\mu+iy)}{\mu+iy-s}\,dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|F(\mu+iy)|^{2}\,dy\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{|\mu+iy-s|^{2}}\right\}^{1/2}, \qquad (3.12)$$

т. е. имеем следующую теорему:

Теорема III. *В предположениях теоремы* II *функция* $F(s)$ *ограничена в любой области* $-\lambda+\varepsilon\leqslant\sigma\leqslant\mu-\varepsilon$.

Положим

$$f(\sigma, x) = (2\pi)^{-1/2} \operatorname*{l.i.m.}_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} F(\sigma + it)\, e^{-itx}\, dt. \qquad (3.13)$$

Положим также

$$\varphi(x) = 0 \quad [x < 0]; \quad \varphi(x) = e^{-\alpha x} \quad [x > 0]; \quad \alpha > 0. \qquad (3.14)$$

Будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{ixy}\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{ixy - \alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha - iy}. \qquad (3.15)$$

Теорема Планшереля дает, если $\alpha > 0$,

$$\operatorname*{l.i.m.}_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \frac{e^{-ixy}}{\alpha - iy}\, dy = \begin{cases} 0 & [x < 0], \\ e^{-\alpha x} & [x > 0]. \end{cases} \qquad (3.16)$$

Аналогично, если $\alpha < 0$, то

$$\operatorname*{l.i.m.}_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \frac{e^{ixy}}{\alpha - iy}\, dy = \begin{cases} -e^{-\alpha x} & [x < 0], \\ 0 & [x > 0]. \end{cases} \qquad (3.17)$$

Таким образом, при $-\lambda + \varepsilon < \sigma < \mu - \varepsilon$ по теореме Парсеваля имеем

$$\int_{-\infty}^{0} f(-\lambda, x)\, e^{(\sigma+\lambda)x} e^{itx} dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(-\lambda + iy)}{-\lambda - \sigma - (t - y)\, i}\, dy. \qquad (3.18)$$

Точно таким же способом получим

$$\int_{0}^{\infty} f(\mu, x)\, e^{(\sigma-\mu)x} e^{itx} dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\mu + iy)}{\mu - \sigma - (t - y)\, i}\, dy. \qquad (3.19)$$

Таким образом, в силу (3.11)

$$F(s) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{0} f(-\lambda, x) e^{(\sigma+\lambda) x} e^{itx} dx + \\ + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{0}^{\infty} f(\mu, x) e^{(\sigma-\mu) x} e^{itx} dx. \quad (3.20)$$

Еще раз применяя теорему Планшереля, получим

$$f(\sigma, x) = \begin{cases} f(-\lambda, x) e^{(\sigma+\lambda) x} & [-\infty < x < 0], \\ f(\mu, x) e^{(\sigma-\mu) x} & [0 < x < \infty], \end{cases} \quad (3.21)$$

и, значит, полагая при некотором частном значении $\alpha$

$$f(x) = f(\alpha, x) e^{-\alpha x} \quad [-\lambda < \alpha < \mu], \quad (3.22)$$

будем иметь

$$f(\sigma, x) = f(x) e^{\sigma x} \quad [-\lambda < \sigma < \mu]. \quad (3.23)$$

Отсюда сразу же следует, что

$$\lim_{\sigma, \sigma_1 \to \mu - 0} \int_{A}^{B} | f(\sigma, x) - f(\sigma_1, x) |^2 dx = 0. \quad (3.24)$$

Кроме того, если $B$ положительно, а $A$ отрицательно, то

$$\int_{B}^{\infty} | f(\sigma, x) |^2 dx \leqslant \int_{B}^{\infty} | f(\mu, x) |^2 dx \quad (3.25)$$

и

$$\int_{-\infty}^{A} | f(\sigma, x) |^2 dx \leqslant \int_{-\infty}^{A} | f(-\lambda, x) |^2 dx. \quad (3.26)$$

Как следствие получаем

$$\lim_{\sigma, \sigma_1 \to \mu - 0} \int_{-\infty}^{\infty} | f(\sigma, x) - f(\sigma_1, x) |^2 dx = 0. \quad (3.27)$$

Таким образом, по лемме Вейля к теореме Рисса—Фишера, в $L_2$ существует некоторая функция $f_1(x)$ такая, что

$$\lim_{\sigma\to\mu-0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma, x)-f_1(x)|^2dx=0. \tag{3.28}$$

Применяя преобразование Фурье и пользуясь теоремой Планшереля, находим, что существует некоторая функция $F_1(t)$ такая, что

$$\lim_{\sigma\to\mu-0}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\sigma+it)-F_1(t)|^2\,dt=0. \tag{3.29}$$

Однако мы заранее знаем, что

$$\lim_{\sigma\to\mu-0}F(\sigma+it)=F(\mu+it), \tag{3.30}$$

а значит,

$$\lim_{\sigma\to\mu-0}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\sigma+it)-F(\mu+it)|^2\,dt=0. \tag{3.31}$$

Еще одно преобразование Фурье дает

$$\lim_{\sigma\to\mu-0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma, x)-f(\mu, x)|^2\,dx=0. \tag{3.32}$$

Аналогично

$$\lim_{\sigma\to-\lambda+0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma, x)-f(-\lambda, x)|^2\,dx=0. \tag{3.33}$$

Но

$$\lim_{\sigma\to\mu}f(\sigma, x)=f(-\lambda, x)\,e^{(\mu+\lambda)x}\quad[-\infty<x<0] \tag{3.34}$$

и

$$\lim_{\sigma\to-\lambda}f(\sigma, x)=f(\mu, x)\,e^{-(\mu+\lambda)x}\quad[0<x<\infty]. \tag{3.35}$$

Итак, за возможным исключением множества меры нуль,

$$f(\sigma, x)=f(\mu, x)\,e^{(\sigma-\mu)x}=f(-\lambda, x)\,e^{(\sigma+\lambda)x}\qquad[-\infty<x<\infty]. \tag{3.36}$$

Это дает нам теорему.

Теорема IV. *При условиях теоремы* II *существует такая измеримая функция* $f(x)$, *что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{2\mu x} dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-2\lambda x} dx < \infty \qquad (3.37)$$

*и на замкнутом интервале* $-\lambda \leqslant \sigma \leqslant \mu$

$$F(\sigma + it) = \underset{A \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} (2\pi)^{-1/2} \int_{-A}^{A} f(x) e^{x(\sigma+it)} dx. \qquad (3.38)$$

Из теорем I и IV следует, что границы интервала, на котором $F(\sigma + it)$ как функция от $t$ равномерно принадлежит $L_2$, даются границами сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{2\sigma x} dx.$$

**4. Преобразование Фурье функции, аналитической в полуплоскости.** В частности, $F(\sigma + it)$ будет принадлежать $L_2$ на всякой прямой, параллельной мнимой оси и лежащей в некоторой правой полуплоскости, тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{2\sigma x} dx < \infty \qquad (4.01)$$

для всех достаточно больших $\sigma$; $F(\sigma + it)$ будет принадлежать $L_2$ *равномерно* в такой полуплоскости тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\sigma \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{2\sigma x} dx < \infty. \qquad (4.02)$$

Эта последняя возможность может встретиться только тогда, когда $f(x)$ обращается в нуль при почти всех положительных значениях своего аргумента. В противном случае имелся бы некоторый интервал $(a, b)$ $[b > a > 0]$, на котором

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = I > 0. \qquad (4.03)$$

Тогда мы имели бы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{2\sigma x} dx \geqslant e^{2\sigma a} I, \qquad (4.04)$$

что противоречит нашему предположению.

Обратно, если $f(x)$ обращается в нуль при положительных значениях своего аргумента и если при некотором $\lambda$

$$\int_{-\infty}^{0} |f(x)|^2 e^{-2\lambda x} dx < \infty, \qquad (4.05)$$

то функция $F(\sigma + it)$, определяемая равенством (3.38), будет равномерно принадлежать $L_2$ как функция от $t$ при $\sigma \geqslant -\lambda$. В частности, имеем:

Теорема V. *Следующие два класса аналитических функций совпадают*:

(1) *Класс всех функций* $F(\sigma + it)$, *аналитических при* $\sigma > 0$ *и таких, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + it)|^2 dt < \text{const.} \quad [0 < \sigma < \infty]. \qquad (4.06)$$

(2) *Класс всех функций, определяемых равенством*

$$F(\sigma + it) = \underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}} (2\pi)^{-1/2} \int_{-A}^{0} f(x) e^{x(\sigma+it)} dx, \qquad (4.07)$$

*где* $f(x)$ *принадлежит* $L_2$ *на* $(-\infty, 0)$. *При этом*

$$\underset{\sigma\to 0}{\text{l.i.m.}} F(\sigma + it) = \underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}} (2\pi)^{-1/2} \int_{-A}^{0} f(x) e^{itx} dx. \qquad (4.08)$$

**5. Теоремы типа Фрагмена — Линделёфа.** Рассмотрим снова функции $F(\sigma+it)$, аналитические в полосе $-\lambda \leqslant \sigma \leqslant \mu$. Предположим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(-\lambda+it)|^2\,dt < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mu+it)|^2\,dt < \infty \tag{5.01}$$

и что

$$|F(\sigma+it)| \leqslant M \quad [-\lambda \leqslant \sigma \leqslant \mu]. \tag{5.02}$$

Вместо (3.04) при достаточно большом $B$ будем иметь

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{B}^{B+1} dA \int_{\mu+iA}^{-\lambda+iA} \frac{F(z)}{z-s}\,dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\mu} dz \int_{B}^{B+1} \frac{M\,dA}{|z+Ai-s|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M(\mu+\lambda)}{2\pi}\cdot\frac{1}{B-t}, \tag{5.03}$$

так что, как и раньше, устанавливается равенство (3.08). Таким образом, представление (3.11) справедливо, и все рассуждение вплоть до (3.21) повторяется без изменения. Единственное отличие состоит в том, что на этот раз рассуждение проводится так, чтобы *доказать*, что $F(\sigma+it)$ является преобразованием Фурье некоторой функции $f(\sigma, x)$, принадлежащей $L_2$, вместо того, чтобы с самого начала принимать без доказательства этот факт или эквивалентный ему факт, что $F(\sigma+it)$ равномерно принадлежит $L_2$.

Из (3.21) сразу же вытекает, что $f(\sigma, t)$ равномерно принадлежит $L_2$ на $(-\lambda, \mu)$, а отсюда — что $F(\sigma+it)$ равномерно принадлежит $L_2$ на этом интервале.

Мы доказали, таким образом, теорему:

Теорема VI. *Если условия* (5.01) *и* (5.02) *удовлетворены, то справедливы предположения, а значит, и заключения теорем* II, III *и* IV.

Сошлемся теперь на классическую теорему Фрагмена — Линделёфа *). Она утверждает, что если $F(\sigma+it)$ аналитична при $-\lambda \leqslant \sigma \leqslant \mu$, если

$$F(\sigma+it) = O\left(e^{e^{\varrho t}}\right) \quad [\varrho < \mu+\lambda] \tag{5.04}$$

---

*) Е. Титчмарш, Теория функций, Гостехиздат, М. — Л., 1951, стр. 203 и след.

и если $F(-\lambda+it)$ и $F(\mu+it)$ ограничены, то $F(\sigma+it)$ ограничена при всех $t$ и $-\lambda\leqslant\sigma\leqslant\mu$. Теперь без какого-либо дополнительного предположения, кроме того, что $F(s)$ принадлежит $L_2$ на прямых $\sigma=-\lambda$ и $\sigma=\mu$, мы можем утверждать, что если $F(s)$ аналитична в полосе между этими прямыми, включая эти прямые, и если выполнено условие (5.04), то аналитическая функция

$$F_\varepsilon(\sigma+it)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+\varepsilon}F(\sigma+i\tau)\,d\tau=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\sigma+it}^{\sigma+it+i\varepsilon}F(s)\,ds \tag{5.05}$$

будет ограничена и будет удовлетворять условию (5.04), а отсюда рассуждением, которым мы доказали теорему IV, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F_\varepsilon(\sigma+it)|^2\,dt\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F_\varepsilon(-\lambda+it)|^2\,dt+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F_\varepsilon(\mu+it)|^2\,dt\qquad[-\lambda\leqslant\sigma\leqslant\mu]. \tag{5.06}$$

Однако по хорошо известной теореме

$$\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_x^{x+\varepsilon}\varphi(\xi)\,d\xi=\varphi(x), \tag{5.07}$$

если $\varphi(x)$ принадлежит $L_2$. Более того, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(\sigma+it)|^2\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F_\varepsilon(\sigma+it)|^2\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(-\lambda+it)|^2\,dt+\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(\mu+it)|^2\,dt \tag{5.08}$$

и отсюда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(\sigma+it)|^2\,dt<\text{const.}\qquad[-\lambda\leqslant\sigma\leqslant\mu]. \tag{5.09}$$

Это дает нам теорему.

Теорема VII. *Если* $F(s)$ *аналитична в полосе* $-\lambda \leqslant \sigma \leqslant \mu$ *и если выполнены условия* (5.01) *и* (5.04), *то заключения теорем* II, III *и* IV *справедливы.*

Теперь перейдем от полосы к полуплоскости. Пусть $F(s)$ аналитична при $\sigma \geqslant 0$, пусть

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(it)|^2\, dt < \infty, \tag{5.10}$$

и пусть

$$|F(\sigma+it)| \leqslant \text{const.} \quad [0 \leqslant \sigma < \infty]. \tag{5.11}$$

Как и прежде, имеем

$$F(s) = \lim_{B\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{B}^{B+1} dA \int_{-A}^{A} \left\{ \frac{F(\mu+iy)}{\mu+iy-s} - \frac{F(iy)}{iy-s} \right\} dy \tag{5.12}$$

при условии, что $\mu$ достаточно велико. Это равенство, пользуясь рассуждениями типа (3.10) и (3.11), можно записать так:

$$F(s) = \lim_{B\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{B}^{B+1} dA \int_{-A}^{A} \frac{F(\mu+iy)}{\mu+iy-s}\, dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(iy)}{iy-s}\, dy. \tag{5.13}$$

Но если $\mu$ достаточно велико и

$$\operatorname{Re} s > 0,$$

то имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{B}^{B+1} dA \int_{-A}^{A} \left\{ \frac{F(\mu+iy)}{\mu+iy-s} - \frac{F(\mu+iy)}{\mu+iy-s_1} \right\} dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|\mu+iy-s|\,|\mu+iy-s_1|} = o(1), \tag{5.14}$$

когда $\mu \to \infty$.

Это возможно, только если

$$F(s) = \text{const.} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(iy)}{iy-s}\, dy. \tag{5.15}$$

Если мы положим

$$F(it)=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ (2\pi)^{-1/2}\int_{-A}^{A} f(x)\,e^{itx}\,dx, \qquad (5.16)$$

то получим равенство

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(iy)}{iy-s}\,dy=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{0} f(x)\,e^{(\sigma+it)x}\,dx, \qquad (5.17)$$

подобное равенству (3.18). Поэтому функция

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(iy)}{iy-s}\,dy \qquad (5.18)$$

равномерно принадлежит $L_2$ при $\sigma>0$ и сходится в среднем к некоторой функции из $L_2$, когда $\sigma\to+0$. Таким образом, постоянная в (5.15) должна принадлежать $L_2$ и, значит, равняется нулю; имеем

$$F(s)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(iy)}{iy-s}\,dy. \qquad (5.19)$$

Это дает нам теорему.

Теорема VIII. *Если $F(s)$ ограничена и аналитична в полуплоскости $0\leqslant\sigma<\infty$ и если выполнено условие* (5.10), *то выполнено и условие* (4.06) *и мы можем записать $F(s)$ в виде* (4.07).

Введем теперь ту форму теоремы Фрагмена — Линделёфа, которая утверждает, что если $F(it)$ ограничена и если

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\lg|F(te^{i\theta})|=0 \qquad (5.20)$$

равномерно по всем $\theta$ из $(-\pi/2,\ \pi/2)$, то $F(s)$ ограничена в полуплоскости $0\leqslant\sigma<\infty$. Рассуждение, совершенно аналогичное тому, с помощью которого мы доказали теорему VII, позволяет установить теорему.

Теорема IX. *Пусть $F(s)$ аналитична в полуплоскости $0\leqslant\sigma<\infty$, и пусть выполнено условие* (5.10). *Пусть выполнено также условие* (5.20). *Тогда выполнено и условие* (4.06) *и мы можем записать $F(s)$ в виде* (4.07).

**6. Целые функции экспоненциального типа.** Мы переходим теперь к рассмотрению одного класса целых функций, который обозначим $E$. Этот класс $E$ состоит из всех целых функций $F(z)$, для которых интеграл по вещественной оси

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\,dx < \infty \tag{6.01}$$

и существует такая постоянная $A$, что

$$F(z) = O(e^{A|z|}). \tag{6.02}$$

Тогда функция

$$\frac{e^{-Az}}{\varepsilon}\int_{z}^{z+i\varepsilon} F(iw)\,dw = G(z) \tag{6.03}$$

ограничена на мнимой оси и на положительной вещественной оси и имеет самое большее показательный рост. Таким образом, по одной из форм теоремы Фрагмена — Линделёфа она ограничена в правой полуплоскости и удовлетворяет условиям, высказанным в посылке теоремы IX. Таким образом, мы можем написать

$$G(z) = \int_{-\infty}^{0} f_\varepsilon(x)\,e^{zx}\,dx, \tag{6.04}$$

где $f_\varepsilon(x)$ принадлежит $L_2$, или

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{z}^{z+\varepsilon} F(w)\,dw = iG(iz)\,e^{Aiz} = \int_{-\infty}^{A} if_\varepsilon(x-A)\,e^{izx}\,dx. \tag{6.05}$$

Аналогично

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{z}^{z+\varepsilon} F(w)\,dw = \int_{-A}^{\infty} ig_\varepsilon(x-A)\,e^{izx}\,dx. \tag{6.06}$$

То есть почти всюду

$$\underset{B\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-B}^{B}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{x}^{x+\varepsilon} F(y)\,dy\right] e^{-ixu}\,dx = 0 \qquad [\,|u| > A\,]. \tag{6.07}$$

Но преобразование Фурье функции $F(x)$ является пределом в среднем преобразования Фурье функции

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x}^{x+\varepsilon} F(y)\,dy,$$

когда $\varepsilon \to 0$, и, стало быть, также должно обращаться в нуль, когда $|u| > A$. То есть

$$F(z) = \int_{-A}^{A} f(u)\, e^{iuz}\, du, \tag{6.08}$$

где $f(u)$ принадлежит $L_2$ на $(-A, A)$.

Обратно, пусть $f(u)$ принадлежит $L_2$ на $(-A, A)$, и пусть $F(z)$ определена формулой (6.08). Тогда условия (6.01) и (6.02) будут выполнены, ибо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} |f(u)|^2\, du \tag{6.09}$$

и

$$|F(z)| \leqslant \left\{\int_{-A}^{A} |f(u)|^2\, du\right\}^{1/2} \left\{\int_{-A}^{A} |e^{2iuz}|\, du\right\}^{1/2} =$$

$$= O\left\{\int_{-A}^{A} e^{2u\,|\operatorname{Im} z|}\, du\right\}^{1/2} = O\left(e^{A\,|\operatorname{Im} z|}\right). \tag{6.10}$$

Мы получаем, таким образом, теорему.

Теорема X. *Следующие два класса целых функций тождественны*:

(1) *класс всех целых функций* $F(z)$, *удовлетворяющих* (6.02) *и принадлежащих* $L_2$ *на вещественной оси*;

(2) *класс всех целых функций вида* (6.08), *где* $f(x)$ *принадлежит* $L_2$ *на* $(-A, A)$.

Прямым следствием отсюда является

Теорема XI. *Если* $F(z)$ — такая целая функция, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \lg^{+} |F(re^{i\theta})| = 0, \tag{6.11}$$

*и если $F(z)$ не равна тождественно нулю, то она не может принадлежать $L_2$ ни на какой прямой.*

Если бы она принадлежала $L_2$ на некоторой прямой, то мы приняли бы эту прямую за вещественную ось. Если $F(x)$ принадлежит $L_2$, то по теореме X преобразование Фурье $F(x)$ обращается в нуль почти всюду вне $(-A, A)$ при любом $A > 0$ и, стало быть, эквивалентно нулю. Таким образом, $F(z)$ тождественно равна нулю, и мы приходим к противоречию.

ГЛАВА I

# КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ *)

**7. Задача о квазианалитических функциях.** Одно из основных свойств аналитической функции состоит в том, что она задается во всей своей области определения значениями всех своих производных (от нулевого порядка и выше) в какой-либо одной точке. Класс аналитических функций $f(x)$ вещественного переменного на интервале $(-1, 1)$ можно охарактеризовать тем, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема и что на этом интервале

$$|f^{(\nu)}(x)|^{1/\nu} < M \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{7.01}$$

Данжуа **) показал, что существуют менее ограничительные условия на производные, которые также однозначно определяют функцию через ее значение и значения ее производных в какой-либо точке. Основной теоремой в этой области является теорема Карлемана ***).

Карлеман определяет класс функций $C_A$ на интервале $(-1, 1)$ следующим образом. Пусть $A_0 = 1, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ — последовательность положительных чисел. Тогда символ $C_A$ обозначает множество функций, определенных на интервале $(-1, 1)$, бесконечно дифференцируемых на нем и удовлетворяющих неравенствам

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(\nu)}(x)| \leqslant B^{\nu} A_{\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{7.02}$$

*) Ср. Paley and Wiener, Notes on the theory and application of Fourier transforms, Note I, On quasi-analytic functions, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 35, стр. 348—353.

**) A. Denjoy, Comptes Rendus, vol. 173 (1921), стр. 1329.

***) T. Carleman, Les Functions Quasi-Analitiques, Paris, 1926.

где $B$ — некоторая постоянная, зависящая от $f(x)$. Мы говорим, что класс $C_A$ *квазианалитичен*, если функция из $C_A$ полностью определяется на $(-1, 1)$ значениями своих производных $f^{(\nu)}(x)$ $(\nu=0, 1, 2, \ldots)$ в одной точке $x_0$ или, что то же самое, если из равенств

$$f^{(\nu)}(x_0)=0 \qquad (\nu=0, 1, 2, \ldots) \tag{7.03}$$

и из условия, что $f(x)$ принадлежит $C_A$, вытекает, что $f(x)$ тождественно равна нулю.

Упомянутая теорема состоит в следующем:

Теорема Карлемана. *Необходимым и достаточным условием квазианалитичности класса $C_A$ является расходимость интеграла*

$$\int_0^\infty \lg\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{A_\nu^2}\right)\frac{dx}{1+x^2} \tag{7.04}$$

*или, что то же самое, расходимость наименьшей невозрастающей мажоранты ряда*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 1/(A_\nu)^{1/\nu}. \tag{7.05}$$

Эквивалентность этих двух условий была установлена Карлеманом в его книге *). Здесь мы не будем пользоваться вторым условием. В этой главе мы дадим доказательство теоремы Карлемана о классе $C_A$ и доказательство аналогичной теоремы для других близко родственных ему классов.

В первую очередь мы хотим определить квазианалитичность для иного класса функций. Это определение вместо максимумов модулей содержит интегралы от квадратов модулей производных. Вводя, как и раньше, последовательность положительных чисел

$$A_0=1,\ A_1,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots$$

мы примем за $C'_A$ множество тех функций, определенных на интервале $(-1, 1)$, которые бесконечно дифференцируемы

*) T. Carleman, цит. соч., стр. 50 и след.

в этой области и удовлетворяют неравенствам

$$\int_{-1}^{1} |f^{(\nu)}(x)|^2\,dx \leqslant B^\nu A_\nu^2 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (7.06)$$

где $B$ — постоянная, зависящая от $f(x)$. Ясно, что $C_A$ будет содержаться в $C'_A$.

С другой стороны, пусть

$$\int_{-1}^{1} |f^{(\nu)}(x)|^2 \leqslant B^\nu F_\nu^2 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (7.07)$$

и пусть для некоторой точки $\xi$ из $(-1, 1)$

$$f^{(\nu)}(\xi) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (7.071)$$

Тогда по неравенству Шварца

$$|f^{(\nu)}(x)|^2 = \left|\int_x^\xi f^{(\nu+1)}(y)\,dy\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{-1}^{1} |f^{(\nu+1)}(y)|^2\,dy \leqslant 2B^{\nu+1}F_{\nu+1}^2, \qquad (7.072)$$

если $x$ лежит в $(-1, 1)$.

Следовательно, существует такая постоянная $C$, что

$$|f^{(\nu)}(x)| \leqslant C^\nu F_{\nu+1}. \qquad (7.08)$$

Положим теперь

$$A_\nu = F_{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)\,^{*}). \qquad (7.081)$$

Тогда класс $C'_F$ будет содержаться в $C_A$, если речь идет о функциях, которые обращаются в нуль вместе со всеми

---

*) Класс Карлемана $C_A$ не меняется при умножении последовательности $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ на постоянный положительный множитель. Требование $A_0 = 1$ является условием нормировки и несущественно. Здесь $A_0 = F_1 \neq 1$, вообще говоря. — *Прим. перев.*

производными в некоторой точке. Имеем

$$\int_1^\infty \lg\left(\sum_{\nu=0}^\infty \frac{x^{2\nu}}{F_\nu^2}\right)\frac{dx}{1+x^2} = \int_1^\infty \lg\left(1+\sum_{\nu=0}^\infty \frac{x^{2(\nu+1)}}{A_\nu^2}\right)\frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= \int_1^\infty \lg\left(\frac{1}{x^2}+\sum_{\nu=0}^\infty \frac{x^{2\nu}}{A_\nu^2}\right)\frac{dx}{1+x^2} + \int_1^\infty \frac{\lg x^2}{1+x^2}\,dx <$$
$$< \int_1^\infty \lg\left(\sum_{\nu=0}^\infty \frac{x^{2\nu}}{A_\nu^2}\right)\frac{dx}{1+x^2} + \mathrm{const}. \qquad (7.09)$$

Также

$$\int_1^\infty \lg\left(1+\sum_{\nu=0}^\infty \frac{x^{2(\nu+1)}}{A_\nu^2}\right)\frac{dx}{1+x^2} > \int_1^\infty \lg\left(\sum_{\nu=0}^\infty \frac{x^{2\nu}}{A_\nu^2}\right)\frac{dx}{1+x^2}. \qquad (7.10)$$

Поэтому

$$\int_1^\infty \lg\left(\sum_{\nu=0}^\infty \frac{x^{2\nu}}{A_\nu^2}\right)\frac{dx}{1+x^2} < \int_1^\infty \lg\left(\sum_{\nu=0}^\infty \frac{x^{2\nu}}{F_\nu^2}\right)\frac{dx}{1+x^2} <$$
$$< \int_1^\infty \lg\left(\sum_{\nu=0}^\infty \frac{x^{2\nu}}{A_\nu^2}\right)\frac{dx}{1+x^2} + \mathrm{const}. \qquad (7.11)$$

Таким образом, интегралы (7.04), определяемые $A_\nu$ и $F_\nu$, сходятся или расходятся одновременно, потому что часть такого интеграла, взятая в пределах от 0 до 1, не изменяет его сходимости или расходимости.

Класс $C'_A$ можно, разумеется, перенести на бесконечную область, сделав подстановку

$$f_1(y) = \frac{f(\operatorname{arctg} y)}{(1+y^2)^{1/2}}, \qquad (7.12)$$

которая преобразует функцию $f(x)$, принадлежащую $L_2$ на $(-1, 1)$, в функцию $f_1(y)$, принадлежащую $L_2$ на $(-\infty, \infty)$. Наряду с этим прямым и, пожалуй, грубым переносом теоремы, можно образовать аналогичную теорему, в которой интервал $(-1, 1)$, использованный для определения класса $C'_A$, заменяется, как таковой, *бесконечным интервалом* $(-\infty, \infty)$, а неравенство (7.06) превращается в неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f^{(\nu)}(x)|^2 dx \leqslant B^\nu A_\nu^2 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \quad (7.13)$$

Эта теорема для бесконечной области справедлива и может быть выведена из следующей основной теоремы.

Теорема XII. *Пусть $\varphi(x)$ — вещественная неотрицательная функция, не эквивалентная нулю, определенная при $-\infty < x < \infty$ и имеющая интегрируемый квадрат в этой области.*

*Сходимость интеграла*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lg \varphi(x)|}{1+x^2} dx < \infty \quad (7.14)$$

*является необходимым и достаточным условием, при котором существует вещественно- или комплекснозначная функция $F(x)$, определенная в той же самой области, обращающаяся в нуль при $x \geqslant$ некоторого числа $x_0$ и такая, что ее преобразование Фурье $G(x)$ удовлетворяет условию $|G(x)| = \varphi(x)$.*

Значение этой теоремы для теории квазианалитических функций определяется следующими фактами: (1) условие ограниченности преобразования Фурье некоторой функции тесно связано с условием ограниченности его производных; (2) функция $F(x)$, обращающаяся в нуль на полупрямой, но не обращающаяся в нуль тождественно, не может определяться всеми своими производными в какой-либо точке и является типичным представителем класса неквазианалитических функций. Теорема XII, будучи подобной теореме Валле-Пуссена *), является значительно более определенной, потому что, тогда как Валле-Пуссен имеет дело с порядком величины коэффициентов ряда Фурье функции, обращающейся в нуль вместе со всеми своими производными в некоторой точке, мы фактически фиксируем модуль преобразования Фурье функции этого типа, подчиненной, разумеется, условию сходимости интеграла (7.14).

---

*) T. Carleman, цит. соч., стр. 76 и 91.

**8. Доказательство теоремы, основной для квазианалитических функций.** Обратимся кдоказательству теоремы XII. Предположим сначала, что интеграл (7.14) сходится. При $z=x+iy$, $y>0$, введем функцию

$$\lambda(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lg\varphi(x')\cdot y}{(x-x')^2+y^2}\,dx', \tag{8.01}$$

которая будет гармонической в полуплоскости $y>0$. Пусть $\mu(z)$ — сопряженная ей гармоническая функция, положим

$$h(z)=\exp(\lambda(z)+i\mu(z)). \tag{8.02}$$

Хорошо известно из рассуждений типа теоремы Фату *), что для почти всех значений $x$

$$\lim_{y\to0}\lambda(x+iy)=\lg\varphi(x) \tag{8.03}$$

или, что то же самое,

$$\lim_{y\to0}|h(x+iy)|=\varphi(x). \tag{8.04}$$

Геометрическое среднее двух положительных величин не может превзойти их арифметического среднего. В силу этого свойства, распространенного на интегралы, или, иными словами, в силу свойства выпуклости логарифма имеем

$$|h(x+iy)|=e^{\lambda(z)}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x')\,y}{(x-x')^2+y^2}\,dx'. \tag{8.05}$$

Отсюда в силу неравенства Шварца

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(x+iy)|^2\,dx\leqslant\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[\varphi(x')]^2\,y}{(x-x')^2+y^2}\,dx'\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,dx''}{(x-x'')^2+y^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[\varphi(x')]^2y}{(x-x')^2+y^2}\,dx'=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x')]^2\,dx'\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,dx}{(x-x')^2+y^2}=\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x')]^2\,dx'. \tag{8.06}$$

*) E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 1929, стр. 40.

Это значит, что функция $h(is)$ удовлетворяет условию (1) теоремы V, и мы можем воспользоваться этой теоремой. Она дает нам

$$h(x+iy) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,(2\pi)^{-1/2}\int_{-A}^{A} F(\xi)\,e^{-i\xi(x+iy)}\,d\xi, \tag{8.07}$$

где $F(x)$ обращается в нуль при $x \geqslant 0$ и принадлежит $L_2$. С другой стороны, из (8.07) следует, что

$$\underset{y\to+0}{\mathrm{l.i.m.}}\,h(x+iy) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,(2\pi)^{-1/2}\int_{-A}^{A} F(\xi)\,e^{-i\xi x}\,d\xi. \tag{8.08}$$

Положим

$$\underset{y\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\,h(x+iy) = G(x). \tag{8.09}$$

В силу (8.04) почти всюду имеем

$$|G(x)| = \varphi(x), \tag{8.10}$$

и в одну сторону теорема XII доказана.

Нам все еще надо доказать, что если $G(x)$ задана, как в теореме XII, то интеграл (7.14) сходится. Предположим, что $F(x')$ обращается в нуль при $x' > x_0$; не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Введем функции

$$\left\{\begin{aligned} G(x) &= \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,(2\pi)^{-1/2}\int_{-N}^{N} F(x')\,e^{-ixx'}\,dx',\\ \psi(z) &= (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} F(x')\,e^{-izx'}\,dx', \quad \operatorname{Im} z > 0. \end{aligned}\right. \tag{8.11}$$

Легко видеть, что функция $\psi(z)$ является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Отобразим полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|\zeta| < 1$ ($\zeta = re^{i\theta}$) по формуле $z = i(\zeta+1)/(1-\zeta)$, и пусть $G(x)$ превратится в $\Gamma(e^{i\theta})$, а $\psi(z)$ — в $\gamma(\zeta)$. Тогда легко видеть, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Gamma(e^{i\theta})|^2\,d\theta = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(x)|^2}{1+x^2}\,dx, \tag{8.12}$$

так что $\Gamma$ заведомо принадлежит классу $L_2$. Простая выкладка показывает также, что если $re^{i\theta}$ является образом точки $x'+iy'$, то

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma(e^{i\theta})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta=$$

$$=\pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}G(x)\frac{y'\,dx}{(x-x')^2+y'^2}=$$

$$=\pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y'\,dx}{(x-x')^2+y'^2}\operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty}(2\pi)^{-1/2}\int_{-N}^{0}F(\xi)e^{-ix\xi}d\xi=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y'\,dx}{(x-x')^2+y'^2}(2\pi)^{-1/2}\int_{-N}^{0}F(\xi)e^{-ix\xi}\,d\xi=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\pi^{-1}\int_{-N}^{0}\frac{F(\xi)\,d\xi}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix\xi}y'\,dx}{(x-x')^2+y'^2}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}(2\pi)^{-1/2}\int_{-N}^{0}F(\xi)e^{-ix'\xi+y'\xi}d\xi=\psi(x'+iy')=\gamma(re^{i\varphi}),\tag{8.13}$$

так что $\gamma$ является на самом деле интегралом Пуассона от $\Gamma(e^{i\theta})$. Тогда

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\lg^{+}|\gamma(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|\gamma(re^{i\theta})|^2\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|\Gamma(e^{i\theta})|^2\,d\theta.\tag{8.14}$$

Вспомним теперь одну из важнейших теорем анализа — теорему Йенсена*). Она гласит:

Теорема XIII. *Пусть $f(z)$ аналитична при $|z|<R$. Предположим, что $f(0)$ не равно нулю, и пусть $r_1$,*

---

*) Е. Титчмарш, Теория функций, Гостехиздат, 1951, стр. 147 и след.

$r_2, \ldots, r_n, \ldots$ — *модули нулей функции* $f(z)$ *в круге* $|z| < R$, *расположенные в неубывающем порядке. Тогда при* $r_n \leqslant r \leqslant r_{n+1}$

$$\lg \frac{r^n |f(0)|}{r_1 r_2 \ldots r_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg |f(re^{i\theta})| \, d\theta, \tag{8.15}$$

*где каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.*

Отсюда следует, что если $\gamma(0) \neq 0$, то

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lg |\gamma(re^{i\theta})| \, d\theta \geqslant \lg |\gamma(0)|. \tag{8.16}$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lg |\gamma(re^{i\theta})| \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lg^+ |\gamma(re^{i\theta})| \, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lg^- |\gamma(re^{i\theta})| \, d\theta \tag{8.17}$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\lg |\gamma(re^{i\theta})|| \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lg^+ |\gamma(re^{i\theta})| \, d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lg^- |\gamma(re^{i\theta})| \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lg^+ |\gamma(re^{i\theta})| \, d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lg |\gamma(re^{i\theta})| \, d\theta. \tag{8.18}$$

Отсюда, в силу (8.14) и (8.16), имеем равномерно по $r$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\lg |\gamma(re^{i\theta})|| \, d\theta \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |\Gamma(e^{i\theta})|^2 \, d\theta - \lg |\gamma(0)|. \tag{8.19}$$

Вообще, если $\gamma(z)$ имеет в точке $z = 0$ нуль кратности $m$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\lg|\gamma(re^{i\theta})||\,d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\lg\left|\frac{\gamma(re^{i\theta})}{r^m e^{im\theta}}\right|\right| d\theta - m\lg r \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\Gamma(e^{i\theta})|^2\,d\theta - \lg\left|\frac{\gamma(\zeta)}{\zeta^m}\right|_{\zeta=0} - m\lg r. \quad (8.191)$$

Наконец, поскольку $\lg|\gamma(re^{i\theta})|$ стремится почти всюду к $\lg|\Gamma(e^{i\theta})|$, когда $r\to 1$, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\lg|\Gamma(e^{i\theta})||\,d\theta < \infty \quad (8.20)$$

и, возвращаясь снова к полуплоскости, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lg|G(x)||}{1+x^2}\,dx < \infty. \quad (8.21)$$

**9. Доказательство теоремы Карлемана.** Пусть интеграл (7.04) сходится; положим

$$[\varphi(x)]^2 = 10^{-1}(1+x^2)^{-1}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{2\nu}}{A_\nu^2}\right]^{-1}. \quad (9.01)$$

Очевидно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lg\varphi(x)|}{1+x^2}\,dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)]^2\,dx < \infty. \quad (9.02)$$

Таким образом, согласно теореме XII существует функция $F(x)$, принадлежащая $L_2$, обращающаяся в нуль при $x>0$, но не эквивалентная нулю, преобразование Фурье которой $G(x)$ удовлетворяет условию $|G(x)|=\varphi(x)$. Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F^{(\nu)}(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |G(x)|^2 x^{2\nu}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)]^2 x^{2\nu}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} [10(1+x^2)]^{-1}\left(\frac{x^{2\nu}}{A_\nu^2}\right)^{-1} x^{2\nu}\,dx \leqslant A_\nu^2. \quad (9.03)$$

Таким образом, расходимость первого из интегралов (9.02) заведомо необходима для квазианалитичности класса $C'_A$ для бесконечной прямой и a fortiori необходима для $(-1, 1)$. Однако если задана последовательность $A_\nu$, для которой интеграл (7.04) сходится, то по формуле (7.081) мы определим последовательность $F_\nu$, для которой интеграл, соответствующий интегралу (7.04), также сходится.

Согласно оценке (9.03) существует функция, принадлежащая $C'_F$ и обращающаяся в нуль со всеми производными в начале координат. Формула (7.08) показывает, что эта функция будет принадлежать также $C_A$. Таким образом, расходимость интеграла (7.04) необходима для квазианалитичности класса $C_A$.

Перейдем теперь к вопросу о достаточности условия Карлемана для квазианалитичности; мы рассмотрим сначала случай класса $C'_A$ на бесконечном интервале. Пусть $f(x)$ — всюду бесконечно дифференцируемая функция, не равная тождественно нулю, но обращающаяся в нуль вместе со всеми производными в точке $x=0$. Мы хотим показать, что интеграл (7.04) сходится для всякого класса $C'_A$, которому принадлежит $f(x)$. Пусть $F(x)$ совпадает с $f(x)$ при отрицательных $x$ и обращается в нуль при всех положительных $x$. Пусть $G(x)$ — преобразование Фурье функции $F(x)$. Положим в формуле (7.13) $B=1$, что не является реальным ограничением. Получим

$$A_\nu^2 \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(\nu)}(x)|^2\,dx \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} |F^{(\nu)}(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |G(x)|^2 x^{2\nu}\,dx. \tag{9.04}$$

Следовательно,

$$\lg\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^{2\nu}}{A_\nu^2}\right) \leqslant \lg\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} |G(x)|^2\left(\frac{x}{r}\right)^{2\nu} dx\right]^{-1}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \lg\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\int_{2r}^{2r+1} |G(x)|^2\left(\frac{x}{r}\right)^{2\nu} dx\right]^{-1}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \lg\left(2\left[\int_{2r}^{2r+1} |G(x)|^2\,dx\right]^{-1}\right) \leqslant 2\int_{2r}^{2r+1} |\lg(2^{-1/2}|G(x)|)|\,dx. \tag{9.05}$$

Отсюда

$$\int_1^\infty \lg\left(\sum_{\nu=0}^\infty \frac{r^{2\nu}}{A_\nu^2}\right)\frac{dr}{r^2} \leqslant 2\int_1^\infty \frac{dr}{r^2}\int_{2r}^{2r+1} |\lg(2^{-1/2}|G(x)|)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_2^\infty |\lg(2^{-1/2}|G(x)|)|\,dx \int_{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{x}{2}} \frac{dr}{r^2} \leqslant$$

$$\leqslant 20\int_2^\infty |\lg(2^{-1/2}|G(x)|)|\,x^{-2}\,dx < \infty. \qquad (9.06)$$

Таким образом расходимость интеграла (7.04) достаточна для квазианалитичности на бесконечном интервале. Аналог теоремы Карлемана для класса $C_A$ на бесконечном интервале доказан.

Обратимся теперь к случаю конечного интервала $(-1, 1)$. Нам понадобится здесь следующая лемма Н. Левинсона:

*Пусть* $f(x)$ *принадлежит классу* $C_A$ *на* $(-1, 1)'$ *и обращается в нуль на интервале* $(-1, \xi)$, *где* $\xi \geqslant 0$. *Тогда функция* $F(t)$, *равная* $e^{-t} f(1-e^{-z})$ *при* $t \geqslant 0$ *и равная* $0$ *при* $t < 0$, *будет принадлежать классу* $C'_A$ *на* $(-\infty, \infty)$.

Действительно, при $t \geqslant 0$

$$F(t) = e^{-t} f(1-e^{-t}),$$

$$\frac{d}{dt}F(t) = e^{-2t} f'(1-e^{-t}) - e^{-t} f(1-e^{-t}),$$

$$\frac{d^2}{dt^2}F(t) = e^{-3t} f''(1-e^{-t}) - 3e^{-2t} f'(1-e^{-t}) + e^{-t} f(1-e^{-t}), \qquad (9.061)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{d^n}{dt^n}F(t) = e^{-(n+1)t} f^{(n)}(1-e^{-t}) + a_1 e^{-nt} f^{(n-1)}(1-e^{-t}) + \ldots + a_n e^{-t} f(1-e^{-t}),$$

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}F(t) = e^{-(n+2)t} f^{(n+1)}(1-e^{-t}) + b_1 e^{-(n+1)t} f^{(n)}(1-e^{-t}) + \ldots + b_{n+1} e^{-t} f(1-e^{-t}).$$

Здесь $f^{(k)}(1-e^{-t})=f^{(k)}(x)$, где $x=1-e^{-t}$. Из предыдущих формул имеем:

$$\begin{aligned} &b_1=-(n+1)+a_1, \quad b_2=-na_1+a_2, \ \ldots, \\ &b_n=-2a_{n-1}+a_n, \quad b_{n+1}=-a_n. \end{aligned} \tag{9.062}$$

Отсюда получаем

$$|b_\alpha|\leqslant(n+1)|a_{\alpha-1}|+|a_\alpha| \qquad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1), \tag{9.063}$$

где $a_0=1$ и $a_{n+1}=0$. Воспользуемся принципом индукции, чтобы получить неравенства для $a_\alpha$. Предположим, что

$$|a_\alpha|\leqslant\frac{n^{2\alpha}}{\alpha!}\cdot 2^n \quad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{9.064}$$

Тогда

$$|b_\alpha|\leqslant\left[(n+1)\frac{n^{2\alpha-2}}{(\alpha-1)!}+\frac{n^{2\alpha}}{\alpha!}\right]2^n<\frac{(n+1)^{2\alpha}}{\alpha!}\cdot 2^{n+1} \tag{9.065}$$
$$(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1).$$

Но предположенное неравенство выполняется при $n=1$, а мы только что показали, что если оно выполняется для $n$, то оно выполняется для $n+1$, и, значит, неравенство (9.064) доказано для всех значений $n$. Таким образом, при $t\geqslant 0$

$$\left|\frac{d^n}{dt^n}F(t)\right|\leqslant 2^n\left[e^{-(n+1)t}\,|f^{(n)}(1-e^{-t})|+\right.$$
$$\left.+\frac{n^2}{1!}e^{-nt}\,|f^{(n-1)}(1-e^{-t})|+\ldots+\frac{n^{2n}}{n!}e^{-t}\,|f(1-e^{-t})|\right]. \tag{9.066}$$

Далее, поскольку $f(x)$ в точке $x=0$ обращается в нуль вместе со всеми своими производными, имеем

$$f^{(n-\alpha)}(x)=\frac{1}{(\alpha-1)!}\int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1}f^{(n)}(\xi)\,d\xi \quad (\alpha>0). \tag{9.07}$$

Поэтому

$$|f^{(n-\alpha)}(x)|\leqslant\frac{\max|f^{(n)}(\xi)|}{(\alpha-1)!}, \tag{9.08}$$

и, поскольку $f(x)$ принадлежит $C_A$, получаем, используя оценку (7.02),

$$|f^{(n-\alpha)}(x)| \leqslant \frac{B^n A_n}{(\alpha-1)!}. \tag{9.081}$$

Пользуясь этой оценкой и тем, что $e^{-t} \leqslant 1$ при $t \geqslant 0$, имеем

$$\left|\frac{d^n}{dt^n} F(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-t}(2B)^n A_n \left[1 + n^2 + \frac{n^4}{2!} + \frac{n^6}{2!3!} + \cdots + \frac{n^{2n}}{(n-1)!\, n!}\right] <$$

$$< e^{-t}(2B)^n A_n n \left[1 + n^2 + \frac{n^4}{(2!)^2} + \frac{n^6}{(3!)^2} + \cdots + \frac{n^{2n}}{(n!)^2}\right]. \tag{9.09}$$

Если выбрать некоторую часть членов ряда

$$e^{2n} = \left[1 + n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \cdots\right]^2,$$

то видно, что

$$\left|\frac{d^n}{dt^n} F(t)\right| < e^{-t}(2B)^n A_n n e^{2n} < e^{-t}(2B)^n A_n e^{3n}. \tag{9.10}$$

Положив $C = 2Be^3$, имеем

$$\left|\frac{d^n}{dt^n} F(t)\right| < e^{-t} C^n A_n \quad \text{при} \quad t \geqslant 0. \tag{9.11}$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d^n F(t)}{dt^n}\right|^2 dt \leqslant C^{2n} A_n^2 \int_0^{\infty} e^{-2t}\, dt < C^{2n} A_n^2. \tag{9.12}$$

Таким образом, $F(t)$ принадлежит классу $C'_A$ на $(-\infty, \infty)$. Это доказывает лемму.

Пусть теперь $f(x)$ принадлежит классу $C_A$ на $(-1, 1)$, и пусть последовательность $A_n$ такова, что интеграл (7.04) расходится. Мы покажем, что если функция $f(x)$ и все ее производные обращаются в нуль в некоторой точке этого интервала, то $f(x)$ обращается в нуль тождественно; это и будет доказывать, что расходимость интеграла (7.04) достаточна для квазианалитичности класса $C_A$.

В самом деле, предположим, что $f(x)$ не обращается в нуль тождественно. Тогда сдвигом или сдвигом и подстановкой $y = -x$ можно получить функцию $f_1(x)$, которая вместе со всеми своими производными обращается в нуль в точке $x = \xi$ (где $0 \leqslant \xi < 1$), все еще принадлежит классу $C_A$ и не эквивалентна нулю на интервале $1 > x > \xi$.

Положим $f_2(x) = 0$ при $-1 \leqslant x < \xi$ и $f_2(x) = f_1(x)$ при $1 \geqslant x > \xi$. Функция $f_2(x)$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы. Из этой леммы и из того, что расходимость интеграла (7.04), как уже было показано, достаточна для квазианалитичности класса $C'_A$ на бесконечном интервале, следует, что функция $F(t)$, фигурировавшая в лемме, а стало быть и $f_2(x)$, должна тождественно обращаться в нуль, что приводит к противоречию. Таким образом, расходимость интеграла (7.04) достаточна также для квазианалитичности класса $C_A$ на интервале $(-1, 1)$. Этим завершается доказательство теоремы Карлемана для класса $C_A$.

Расходимость интеграла (7.04) достаточна также для квазианалитичности класса $C'_F$ на интервале $(-1, 1)$. В самом деле, предположим, что это неверно; тогда существует функция, которая вместе со всеми своими производными обращается в нуль в некоторой точке замкнутого интервала $(-1, 1)$, но не обращается в нуль тождественно и принадлежит классу $C'_F$, причем интеграл (7.04) расходится. В силу неравенства (7.08) эта функция принадлежит также классу $C_A$, для которого интеграл (7.04) расходится, а из только что доказанной теоремы Карлемана для классов $C_A$ следует, что эта функция тождественно обращается в нуль. Это рассуждение завершает доказательство достаточности. Необходимость рассматриваемого условия уже была показана для класса $C'_A$. Таким образом, мы доказали аналог теоремы Карлемана для классов $C'_A$ на интервале $(-1, 1)$.

**10. Модуль преобразования Фурье функции, обращающейся в нуль при больших значениях аргумента.** Пусть функция $f(x)$ принадлежит $L$ на $(-A, A)$ и обращается в нуль вне $(-A, A)$. Это высказывание равносильно утверждению, что $f(x)$ является произведением двух функций из $L_2$, одна из которых обращается в нуль слева от $-A$, а другая — справа от $A$. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — эти функции, и пусть $g_1(u)$ и $g_2(u)$ — их преобразования Фурье. Тогда по теореме Парсеваля преобразованием Фурье $f(x)$ будет функция

$$g(u)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(v)\, g_2(u-v)\, dv. \tag{10.01}$$

Кроме того, согласно теореме XII вещественные функции $|g_1(u)|$ и $|g_2(u)|$ подчинены единственному условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lg|g_1(u)||\,du}{1+u^2}<\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lg|g_2(u)||}{1+u^2}\,du<\infty. \tag{10.02}$$

Это условие, очевидно, не зависит от $A$. Более того, не изменяя $|g_1(u)|$ и $|g_2(u)|$, можно так выбрать $f_1(x)$ и $f_2(x)$, что эти функции будут иметь не эквивалентное нулю произведение без каких-либо других предположений, кроме (10.02).

Чтобы увидеть это, допустим, что функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$ равны соответственно $|f_1(x)|$ и $|f_2(x)|$ на $(-A, A)$ и равны нулю в остальных точках. Мы заведомо можем выбрать функции $f_1$ и $f_2$ так, чтобы $h_1$ и $h_2$ были ненулевыми. Тогда, если

$$h_1(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\pi x/(2A)},\quad h_2(-x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{in\pi x/(2A)}$$

$$(-2A\leqslant x\leqslant 2A), \tag{10.03}$$

то имеем

$$\int_{-2A}^{2A} h_1(y)\, h_2(-x+y)\, dy=4A\sum_{-\infty}^{\infty} a_n b_n e^{in\pi x/(2A)}, \tag{10.04}$$

и поскольку $a_0$ и $b_0$, очевидно, не равны нулю, мы можем найти такое $x_0$, лежащее внутри $(-A, A)$, что

$$\int_{-2A}^{2A} h_1(y)\, h_2(-x_0+y)\, dy\neq 0. \tag{10.05}$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$f_1(x) f_2(-x_0+x) \not\equiv 0, \tag{10.06}$$

и если мы заменим $f_2(x)$ на $f_2(x-x_0)$, то получим функции $f_1$ и $f_2$, соответствующие данным значениям $|g_1|$ и $|g_2|$, для которых $f_1 f_2$ не эквивалентно нулю.

Далее, из формулы (10.01), получаем

$$\begin{aligned}
|g(u)| &\leqslant (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |g_1(v)|\,|g_2(u-v)|\,dv = \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{u/2} |g_1(v)|\,|g_2(u-v)|\,dv + \\
&\qquad + (2\pi)^{-1/2} \int_{u/2}^{\infty} |g_1(v)|\,|g_2(u-v)|\,dv \leqslant \\
&\leqslant (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |g_1(v)|\,dv \cdot \operatorname*{vrai\,max}_{w \geqslant u/2} |g_2(w)| + \\
&\qquad + (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |g_2(v)|\,dv \cdot \operatorname*{vrai\,max}_{w \geqslant u/2} |g_1(w)|.
\end{aligned} \tag{10.07}$$

Если существует некоторая функция $\varphi(u) \geqslant 0$, которая монотонно убывает при $|u| \to \infty$ и для которой справедливы неравенства

$$A\,|g_i(u)| \leqslant \varphi(u) \leqslant B\,|g_i(u)| \quad (i=1,\ 2;\ B \geqslant A > 0), \tag{10.08}$$

то из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lg|g(u)||}{1+u^2}\,du < \infty \tag{10.09}$$

вытекает (10.02).

ГЛАВА II

# ТЕОРЕМА САСА

**11. Некоторые теоремы о замкнутости.** В этой главе мы хотим исследовать замкнутость на интервале $(a, b)$ некоторых совокупностей функций $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) \in L_2$. Множество функций $\{f_n(x)\}$ называется *замкнутым на* $(a, b)$, если из условия

$$\int_a^b f(x) f_n(x)\, dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{11.01}$$

вытекает, что $f(x)$ обращается в нуль всюду, кроме множества меры нуль, если только $f(x) \in L_2$. Множество функций $\{f_n(x)\}$ называется *полным*, если для любой функции $f(x)$, принадлежащей $L_2$, и для любого положительного $\varepsilon$ существует такой многочлен

$$P_n(x) = \sum_1^n a_k f_k(x), \tag{11.02}$$

что

$$\int_a^b |P_n(x) - f(x)|^2\, dx < \varepsilon. \tag{11.021}$$

Мы докажем сейчас теорему, которая демонстрирует значение замкнутости последовательности функций. Эта теорема утверждает, что *множество функций замкнуто тогда и только тогда, когда оно полно.*

Сначала мы докажем соответствующую классическую теорему для множества $\{\varphi_n(x)\}$, которое является нормальным и ортогональным, т. е. для которого

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\overline{\varphi_m(x)}\,dx = 0 \quad (m \neq n), \tag{11.03}$$

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n(x)}\,dx = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{11.031}$$

Пусть $f(x)$ — любая функция из $L_2$. Тогда

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_1^n a_k \varphi_k(x) \right|^2 dx =$$

$$= \int_a^b \left( f(x) - \sum_1^n a_k \varphi_k(x) \right) \left( \overline{f(x)} - \sum_1^n \overline{a_k}\, \overline{\varphi_k(x)} \right) dx =$$

$$= \int_a^b |f^2|\,dx - \sum_1^n \left| \int_a^b f \overline{\varphi_k}\,dx \right|^2 + \sum_1^n \left| a_k - \int_a^b f \overline{\varphi_k}\,dx \right|^2. \tag{11.04}$$

Это выражение положительно при любом выборе $a_k$. Поэтому оно будет минимальным, если взять

$$a_k = \int_a^b f \overline{\varphi}_k\,dx,$$

что заставляет последний член обратиться в нуль. Если мы, кроме того, устремим $n \to \infty$, то получим

$$\int_a^b |f|^2\,dx - \sum_1^\infty \left| \int_a^b f \overline{\varphi}_k\,dx \right|^2 \geqslant 0. \tag{11.041}$$

Это неравенство известно под названием неравенства Бесселя.

Если известно, что множество $\{\varphi_n(x)\}$ полно, то из определения полноты и из минимизирующего свойства чисел

$$a_k = \int_a^b f \overline{\varphi_k}\,dx$$

видно, что неравенство Бесселя превращается в равенство, и мы имеем

$$\int_a^b |f|^2\,dx = \sum_1^\infty \left| \int_a^b f\bar{\varphi}_k\,dx \right|^2. \tag{11.042}$$

Таким образом, не может существовать функция, не эквивалентная нулю, которая была бы ортогональна к каждой $\varphi_k(x)$. Иными словами, полное множество нормальных и ортогональных функций является замкнутым.

Мы докажем теперь, что замкнутое множество полно. Если оно не полно, то существует такая функция $f(x)$ из $L_2$, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_1^n \varphi_k(x) \int_a^b f\bar{\varphi}_k\,dx \right|^2 dx > 0, \tag{11.043}$$

ибо если бы удерживалось равенство, то множество было бы полным. Отсюда и из (11.04) имеем

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx - \sum_1^\infty \left| \int_a^b f\bar{\varphi}_k\,dx \right|^2 > 0. \tag{11.044}$$

Положим

$$g_n(x) = \sum_1^n \varphi_k(x) \int_a^b f\bar{\varphi}_k\,dx. \tag{11.05}$$

Тогда по теореме Рисса—Фишера существует предел

$$g(x) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, g_n(x) \tag{11.051}$$

и

$$\int_a^b |g(x)|^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b |g_n(x)|^2\,dx = \sum_1^\infty \left| \int_a^b f\bar{\varphi}_k\,dx \right|^2. \tag{11.052}$$

Рассмотрим теперь $f(x)-g(x)$; имеем

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\bar{\varphi}_n(x)\,dx =$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_a^b [f(x)-g_k(x)]\,\overline{\varphi_n(x)}\,dx = 0\ (n=1, 2, \ldots). \qquad (11.053)$$

Следовательно, $f(x)-g(x)$ эквивалентна нулю, поскольку множество $\{\varphi_k(x)\}$ замкнуто. Но из (11.052) и (11.044) следует

$$\int_a^b |f|^2\,dx - \int_a^b |g|^2\,dx > 0, \qquad (11.054)$$

и, значит, $f(x)$ не эквивалентна $g(x)$. Таким образом, замкнутое множество является также и полным. Мы доказали, стало быть, что *нормальное и ортогональное множество функций замкнуто тогда и только тогда, когда оно полно.*

Приступим теперь к разбору общего случая, когда $\{f_n(x)\}$ является произвольным счетным множеством функций из $L_2$. Из данного множества мы построим сейчас некоторое нормальное и ортогональное множество.

В процессе этого построения мы отбрасываем любой член множества $\{f_n(x)\}$, который эквивалентен нулю или линейной комбинации членов, предшествующих ему, а затем строим последовательность $\{\varphi_k(x)\}$, где

$$\varphi_1(x) = \frac{f_1(x)}{\left[\int_a^b |f_1(\xi)|^2\,d\xi\right]^{1/2}};$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\left[f_2(x)-\varphi_1(x)\int_a^b f_2(\xi)\,\overline{\varphi_1(\xi)}\,d\xi\right]}{\left[\int_a^b |f_2(\xi)|^2\,d\xi - \left|\int_a^b f_2(\xi)\,\overline{\varphi_1(\xi)}\,d\xi\right|^2\right]^{1/2}}, \qquad (11.06)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{\left[f_3(x)-\varphi_1(x)\int_a^b f_3(\xi)\,\overline{\varphi_1(\xi)}\,d\xi-\varphi_2(x)\int_a^b f_3(\xi)\,\overline{\varphi_2(\xi)}\,d\xi\right]}{\left[\int_a^b |f_3(\xi)|^2\,d\xi - \left|\int_a^b f_3(\xi)\,\overline{\varphi_1(\xi)}\,d\xi\right|^2 - \left|\int_a^b f_3(\xi)\varphi_2(\xi)\,d\xi\right|^2\right]^{1/2}},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Ни один из знаменателей не обращается в нуль, поскольку мы отбрасываем все члены, эквивалентные нулю или линейной комбинации предшествующих членов. Как легко проверить, множество $\{\varphi_k(x)\}$ нормально и ортогонально. Его члены имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x) = b_{11}f_1(x), \\ &\varphi_2(x) = b_{21}f_1(x) + b_{22}f_2(x), \\ &\varphi_3(x) = b_{31}f_1(x) + b_{32}f_2(x) + b_{33}f_3(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (11.061)$$

где ни один из коэффициентов $b_{nn}$ не обращается в нуль. Из этого представления видно, что свойства замкнутости множеств $\{\varphi_k(x)\}$ и $\{f_k(x)\}$ полностью эквивалентны. Далее, поскольку многочлен по функциям одного множества является многочленом по функциям другого (мы можем выразить $f_k(x)$ через $\varphi_k(x)$, так как $b_{nn} \neq 0$), свойства полноты у этих двух множеств полностью эквивалентны. Это позволяет нам обобщить теорему, доказанную для нормальных и ортогональных систем, и мы видим теперь, что счетная последовательность функций замкнута тогда и только тогда, когда она полна. Это свойство инвариантности замкнутости сохраняется при весьма общих преобразованиях. Мы покажем теперь, что замкнутость инвариантна при любом линейном преобразовании всего $L_2$ в себя, которое сохраняет интеграл от квадрата модуля каждой функции. Иначе говоря, *пусть дано линейное преобразование такое, что каждой функции $f(x)$ класса $L_2$ на $a \leqslant x \leqslant b$ соответствует $g(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, класса $L_2$, причем если $f_j(x) \longrightarrow g_j(y)$* *), *то*

$$\left.\begin{aligned} &cf_j(x) \longrightarrow cg_j(y), \\ &f_1(x) + f_2(x) \longrightarrow g_1(y) + g_2(y), \\ &\int_a^b |f_j(x)|^2\,dx = \int_c^d |g_j(y)|^2\,dy \quad (j = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (11.07)$$

*Тогда свойства замкнутости последовательности $\{f_n(x)\}$ такие же, как у последовательности $\{g_n(x)\}$.*

*) Знак $\longrightarrow$ означает здесь «соответствует», а не «стремится к».

Ибо, складывая соотношение

$$\frac{1}{4}\int_a^b |f_1(x)+f_2(x)|^2\,dx = \frac{1}{4}\int_c^d |g_1(y)+g_2(y)|^2\,dy \qquad (11.071)$$

с аналогичными соотношениями для $f_1(x)-f_2(x)$, $f_1(x)+$ $+if_2(x)$ и $f_1(x)-if_2(x)$, умноженными соответственно на множители 1, $-1$, $i$ и $-i$, получим

$$\int_a^b f_1(x)\overline{f_2(x)}\,dx = \int_c^d g_1(y)\overline{g_2(y)}\,dy. \qquad (11.072)$$

Таким образом, для последовательности $\{f_n(x)\}$ и функции $f(x)$ из $L_2$ и для соответствующих им образов $g$ имеем

$$\int_a^b f(x)\overline{f_n(x)}\,dx = \int_c^d g(y)\overline{g_n(y)}\,dy \quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (11.073)$$

Таким образом, свойства замкнутости для последовательностей $f_n$ и $g_n$ эквивалентны.

Некоторые специальные случаи этой теоремы имеют большое значение. Например, если $\{f_n(\xi)\}$ замкнута на интервале $(-\infty,\ \infty)$, то замкнуто на этом интервале и множество преобразований Фурье

$$g_n(\xi) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-A}^{A} f_n(y)\,e^{iy\xi}\,dy. \qquad (11.08)$$

Ибо согласно теоремам Планшереля и Парсеваля это преобразование попадает в класс, рассмотренный выше.

Далее, пусть $\{f_n(x)\}$ замкнута на $(a,\ b)$. Пусть $\varphi(t)$ — функция, имеющая производную $\varphi'(t)$, которая определена для любого $t$ и заключена между положительными конечными пределами при $t$, лежащем в любой области вида $(c+\varepsilon,\ d-\varepsilon)$. Пусть, наконец,

$$\varphi(c)=a, \quad \varphi(d)=b. \qquad (11.09)$$

Тогда, если $f(x)$ — любая функция из $L_2$, а $\psi$ — вещественная изммримая функция, то

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx = \int_c^d |f(\varphi(t))\,[\varphi'(t)]^{1/2}\,e^{i\psi(t)}|^2\,dt. \qquad (11.10)$$

Таким образом, преобразование, которое превращает $f(x)$ в $f(\varphi(t))[\varphi'(t)]^{1/2}e^{i\psi(t)}$, обратимо, поскольку $\varphi'(t)>0$ и оставляет инвариантным как класс $L_2$, так и интеграл от квадрата модуля каждой функции. Подобно преобразованию Фурье, оно попадает в класс, рассмотренный выше, и сохраняет свойство замкнутости.

Еще более простое преобразование, не меняющее замкнутости, превращает $f(x)$ в $f(x)g(x)$, где $g(x)$ — ограниченная измеримая функция, не зависящая от $f(x)$, причем

$$\frac{1}{g(x)} > \varepsilon > 0, \tag{11.11}$$

ибо если

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = 0, \tag{11.12}$$

то

$$\int_a^b f(x)g(x)\frac{h(x)}{g(x)}\,dx = 0, \tag{11.13}$$

и наоборот. Ясно, что вместе с $f(x)$ классу $L$ принадлежат и $f(x)g(x)$ и $f(x)/g(x)$. Отсюда сразу же следует, что наше преобразование не изменяет замкнутости.

В качестве частного случая рассмотрим множество функций $\{x^{\lambda_n}\}$ на интервале $(0, 1)$. Хорошо известная аппроксимационная теорема Вейерштрасса говорит нам, что если мы возьмем $\lambda_n = n \geqslant 0$, то система будет замкнутой. Здесь мы изучим более общий случай, когда нам дано только, что $\operatorname{Re}\lambda_n > -\frac{1}{2}$. Это множество преобразуется в множество

$$\{e^{-(\lambda_n+1/2)\xi}\} \qquad (0<\xi<\infty) \tag{11.14}$$

преобразованием

$$f(x) \to f(e^{-\xi})\,e^{-\xi/2}. \tag{11.15}$$

Последнее в свою очередь становится множеством

$$\{e^{-(\lambda_n+1/2)e^u}e^{u/2}\} \qquad (-\infty<u<\infty) \tag{11.16}$$

при преобразовании

$$f(\xi) \to f(e^u)\, e^{u/2}. \qquad (11.17)$$

Заметим, что эти преобразования удовлетворяют условиям (11.07).

Преобразование Фурье превращает это множество функций в множество

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda_n+1/2)e^u} e^{u(1/2+iw)}\, du =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_n+1/2)v} v^{-1/2+iw}\, dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\lambda_n + \frac{1}{2}\right)^{-1/2-iw} \Gamma\left(\frac{1}{2}+iw\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\lambda_n + \frac{1}{2}\right)^{-1/2-iw} \left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iw\right)\right| e^{i\psi(w)}$$

$$(-\infty < w < \infty), \qquad (11.18)$$

где $\psi(w)$ — некоторая вещественная функция от $w$. По хорошо известной теореме о гамма-функции

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iw\right)\right| = \left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}+iw\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-iw\right)\right\}^{1/2} =$$

$$= \{\pi \operatorname{sech} \pi w\}^{1/2} \sim (2\pi)^{1/2} e^{-\pi|w|/2} \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \operatorname{sech}\frac{\pi w}{2}. \qquad (11.19)$$

Таким образом, используя различные теоремы эквивалентности, рассмотренные выше, можно утверждать, что свойства замкнутости последовательности $\{x^{\lambda_n}\}$ на $(0, 1)$ тождественны со свойствами последовательности

$$\left\{\pi (\operatorname{sech} \pi w/2)\left(\lambda_n + \frac{1}{2}\right)^{-iw}\right\} \quad \text{или} \quad \left\{e^{-\pi|w|/2}\left(\lambda_n + \frac{1}{2}\right)^{-iw}\right\}$$

на $(-\infty, \infty)$, ибо $\operatorname{sech}(\pi w/2) = g(w)\, e^{-\pi|w|/2}$, где $1 \leqslant |g(w)| \leqslant 2$, и поэтому функция $g(w)$ подчиняется условию (11.11).

При повторном преобразовании Фурье функция $\pi(\operatorname{sech}\pi w/2)\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)^{-iw}$ превращается в

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}\frac{\pi w}{2}\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)^{-iw}e^{-iwx}\,dw=$$

$$=(2\pi)^{1/2}\left(\int_0^{\infty}+\int_{-\infty}^{0}\right)\frac{1}{e^{\pi w/2}+e^{-\pi w/2}}\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)^{-iw}e^{-iwx}\,dw=$$

$$=(2\pi)^{1/2}\int_0^{\infty}\left(e^{-\pi w/2}-e^{-3\pi w/2}+e^{-5\pi w/2}-\ldots\right)\times$$

$$\times\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)^{-iw}e^{-iwx}\,dx+(2\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{0}\left(e^{\pi w/2}-e^{3\pi w/2}+\right.$$

$$\left.+e^{5\pi w/2}-\ldots\right)\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)^{-iw}e^{-iwx}\,dx=$$

$$=2(2\pi)^{1/2}\sum_0^{\infty}\int_0^{\infty}(-1)^k e^{-(2k+1)\pi w/2}\times$$

$$\times\cos\left(wx+w\lg\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\right)dw=$$

$$=2(2\pi)^{1/2}\sum_0^{\infty}(-1)^k\frac{\frac{2k+1}{2}\pi}{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2\pi^2+\left(x+\lg\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\right)^2}=$$

$$=(2\pi)^{1/2}\operatorname{sech}\left(x+\lg\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{2(2\pi)^{1/2}}{\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)e^x+\frac{1}{\lambda_n+\frac{1}{2}}e^{-x}}=\frac{2(2\pi)^{1/2}\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)e^x}{\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)^2e^{2x}+1}. \tag{11.20}$$

Выше мы воспользовались теоремой об ограниченной сходимости, чтобы обратить порядок суммирования и интегрирования. Преобразование

$$f(e^{2x})\,e^{x} \to f(x) \tag{11.21}$$

превращает эти функции в функции

$$\frac{2\,(2\pi)^{1/2}\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)}{\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)^2 x+1} \quad (0<x<\infty). \tag{11.22}$$

Таким образом, свойства замкнутости системы

$$\frac{1}{\left(\lambda_n+\frac{1}{2}\right)^2 x+1}$$

на $(0, \infty)$ те же самые, что и у системы $x^{\lambda_n}$ на $(0,1)$.

**12. Теорема Саса.** Исследуем теперь замкнутость множества функций (11.14). Все числа $\lambda_n+\frac{1}{2}$ лежат в правой полуплоскости. Таким образом, вопрос о замкнутости совпадает с вопросом о распределении нулей функции

$$\varphi(u)=\int_0^{\infty} F(\xi)\,e^{-u\xi}\,d\xi, \tag{12.01}$$

где $F(\xi)$ принадлежит $L_2$ на $(0, \infty)$. Ибо если $\varphi(u)$ имеет бесконечное число нулей $\mu_n$ в правой полуплоскости, $\varphi(\mu_n)=0$, то $e^{-\mu_n\xi}$ не может быть замкнутым множеством. Функция $\varphi(u)$, очевидно, будет аналитической в правой полуплоскости. Пусть $u=s+it$, где $s$ и $t$ вещественны. Положим

$$\psi(z)=\varphi\left(\frac{1-z}{1+z}\right),$$

$$\Phi(it)=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^{A} F(\xi)\,e^{-it\xi}\,d\xi, \tag{12.02}$$

$$\Psi(e^{i\theta})=\Phi\left(\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}\right).$$

Тогда $\psi(z)$ будет аналитической в единичном круге. В точности теми же рассуждениями, что и в формуле (8.13), получим, что $\psi(z)$ является интегралом Пуассона от $\Psi(e^{i\theta})$. Пусть $z_1, z_2, \ldots$ — нули функции $\psi(z)$, лежащие в единичном круге, причем нули в начале координат опущены, а остальные расположены в порядке неубывания модулей. Если $|z_n| \leqslant r_n \leqslant |z_{n+1}|$ и $m$ — наименьшее целое число такое, что $\psi^{(m)}(0) \neq 0$, то по теореме Йенсена будем иметь, используя оценку (8.191),

$$\lg \left| \frac{r_n^n \psi^{(m)}(0)}{z_1 z_2 \ldots z_n} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lg |\psi(r_n e^{i\theta})| \, d\theta + \lg m! - m \lg r_n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lg^+ |\psi(r_n e^{i\theta})| \, d\theta + \text{const.} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi(e^{i\theta})| \, d\theta + \text{const.} \qquad (12.03)$$

и a fortiori при $k < n$

$$\lg \left| \frac{r_n^k \psi^{(m)}(0)}{z_1 z_2 \ldots z_k} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi(e^{i\theta})| \, d\theta + \text{const.} \qquad (12.04)$$

Устремляя $r_n \to 1$ в соотношении (12.04), как прямое следствие получаем

$$\lg \left| \frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_k} \right| < \text{const.} \qquad (12.05)$$

и, значит,

$$\sum_{1}^{\infty} -\lg |z_k| < \infty. \qquad (12.051)$$

Если теперь мы вновь превратим окружность $|z| = 1$ в ось $\operatorname{Im} w = 0$, а нули $z_k$ функции $\psi(z)$ — в нули функции $\varphi(w)$, то это даст нам

$$w_k = \frac{1 - z_k}{1 + z_k}, \qquad z_k = \frac{1 - w_k}{1 + w_k}, \qquad (12.06)$$

а соотношение (12.051) превратится в соотношение

$$\infty > \sum_{1}^{\infty} \lg \left| \frac{1+w_k}{1-w_k} \right| = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \lg \left[ 1 + \frac{2(w_k+\bar{w}_k)}{1-w_k-\bar{w}_k+|w_k|^2} \right], \tag{12.07}$$

которое эквивалентно соотношению

$$\infty > \sum_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} w_k}{1+|w_k|^2}. \tag{12.071}$$

Обратно, пусть $\{z_k\}$ — множество чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{1}^{\infty} -\lg|z_k| < \infty \tag{12.08}$$

и лежащих внутри единичного круга. Из (12.08) получаем

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1-|z_k|}{|z_k|} < \infty. \tag{12.09}$$

Произведение

$$\prod_{1}^{\infty} \frac{z_k-z}{z_k-z|z_k|^2} \tag{12.10}$$

будет сходиться равномерно к аналитической функции $h(z)$ во всяком круге $|z|<r<1$, поскольку

$$\left| 1 - \frac{z_k-z}{z_k-z|z_k|^2} \right| = \frac{|z \cdot (1-|z_k|^2)}{|z_k|\,|1-z\bar{z}_k|} \leqslant \frac{2}{1-|z|} \cdot \frac{1-|z_k|}{|z_k|} \tag{12.11}$$

и соответствующий мажорантный ряд сходится в силу (12.09). Таким образом, для любой точки внутри единичного круга имеем

$$|h(z)| = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z_k}\right)^2 \prod_{1}^{\infty} \left| \frac{z-z_k}{z-\frac{1}{\bar{z}_k}} \right| \leqslant \prod_{1}^{\infty} \left| \frac{1}{z_k} \right|^2 < \text{const.} \tag{12.12}$$

в силу (12.08). Таким образом, функция $h(z)$ аналитична внутри единичного круга и равномерно ограничена во всем круге. Положим

$$\psi(z) = h(z)(1+z)^2. \tag{12.13}$$

Тогда $\psi(z)$ будет определена внутри и на единичной окружности и

$$\psi(z_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{12.131}$$

Кроме того, $\psi(z)$ равномерно ограничена внутри единичного круга. Превратим, как и прежде, окружность $|z| = 1$ в ось $\operatorname{Im} w = 0$. Будем иметь

$$\varphi(w) = \psi\left(\frac{1-w}{1+w}\right). \tag{12.14}$$

Из формул (12.12) и (12.13) видим, что $\psi(s+it)$ будет равномерно принадлежать классу $L_2$ по $t$ при любых $s$ таких, что $0 < s < \infty$. Согласно этому из теоремы V получаем

$$\varphi(w) = \int\limits_0^\infty F(\xi)\, e^{-w\xi}\, d\xi, \tag{12.15}$$

где $F(\xi)$ — функция класса $L_2$. Так, если

$$w_k = \frac{1-2k}{1+2k},$$

то множество $\{e^{-w_k\xi}\}$ не будет замкнуто на $(0, \infty)$, поскольку $F(\xi)$ принадлежит классу $L_2$ и ортогональна ко всем этим функциям в силу формулы (12.15).

Мы доказали, таким образом, теорему.

Теорема XIV (теорема Саса)*). *Пусть $\lambda_n$ — множество чисел с вещественными частями бо́льшими — $1/2$. Множество функций $\{x^{\lambda_n}\}$ будет замкнуто в $L_2$ на $(0, 1)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} = \infty. \tag{12.16}$$

---

*) O. Szász, Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen, Mathematische Annalen, Bd. 77 (1916), стр. 482—496.

Как следствие имеем:

Теорема XIV′ *). *Пусть* $\sigma_n$ — *множество чисел, лежащих в полосе* $|\operatorname{Im}\sigma_n| < \frac{\pi}{2}$. *Множество функций* $\{e^{-\pi|w|/2-\sigma_n i w}\}$ *будет замкнуто на* $(-\infty, \infty)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \operatorname{Im} \sigma_n}{\operatorname{ch} \operatorname{Re} \sigma_n} = \infty. \tag{12.17}$$

Это сразу вытекает из рассуждений, приведенных в абзаце, следующем за формулой (11.19).

Далее, согласно (11.22) имеем:

Теорема XIV″ **). *Пусть* $\{\mu_n\}$ — *множество чисел с положительной вещественной частью. Множество функций* $1/(\mu_n^2 x + 1)$ *будет замкнуто на* $(0, \infty)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\mu_n}{1+|\mu_n|^2} = \infty. \tag{12.18}$$

От теорем замкнутости в $L_2$ перейдем теперь к теоремам вейерштрассова типа о возможности равномерно аппроксимировать произвольную непрерывную функцию многочленами по данному множеству функций. Пусть

$$\int_0^1 \left| f(x)\, x^{\alpha} - \sum_1^n a_k x^{\lambda_k} \right|^2 dx < \varepsilon. \tag{12.19}$$

Тогда по неравенству Шварца

$$\left| \int_0^x f(x)\, dx - \sum_1^n \frac{a_k x^{\lambda_k+1-\alpha}}{\lambda_k+1-\alpha} \right| \leqslant \varepsilon^{1/2} \left[ \frac{1}{-2\alpha+1} \right]^{1/2} \tag{12.20}$$

$$\left( |\alpha| < \frac{1}{2} \right).$$

*) R. E. A. C. Paley and N. Wiener, Notes on the theory and application of Fourier transforms, Note IV, a theorem on closure, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 35, стр. 766—768.

**) Эта теорема была доказана профессором Сасом иными методами (неопубликованная работа). Ср. также Szász, Über die Approximation stetiger Funktionen durch gegebene Funktionenfolgen, Mathematische Annalen, Bd. 104 (1931), стр. 155—160.

Ясно, что произвольную непрерывную функцию, обращающуюся в нуль в начале координат, всегда можно равномерно аппроксимировать функциями вида

$$\int_0^x \varphi(x)\,dx, \tag{12.21}$$

где $\varphi(x)$ принадлежит $L_2$.

С другой стороны, пусть

$$\max_x \left| f(x) - \sum_1^n a_k x^{\lambda_k} \right| < \varepsilon. \tag{12.22}$$

Тогда

$$\int_0^1 x^{2\alpha} \left| f(x) - \sum_1^\infty a_k x^{\lambda_k} \right|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{2\alpha+1} \quad \left(\alpha > -\frac{1}{2}\right). \tag{12.23}$$

Таким образом, мы доказали теорему.

Теорема XV (форма Саса теоремы Мюнтца)*). *Пусть* $\lambda_n$ — *множество чисел с положительной вещественной частью. Произвольную непрерывную функцию можно равномерно аппроксимировать на* $(0, 1)$ *полиномами* $C + \sum a_n x^{\lambda_n}$, *если*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} = \infty; \tag{12.24}$$

*такая аппроксимация всякой непрерывной функции невозможна, если*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1+\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} < \infty. \tag{12.25}$$

*) Ср. Szász, цит. соч.; C. H. Müntz, Über den Approximationssatz von Weierstrass, Schwarz's Festschrift, Berlin, 1914, стр. 303—312.

## ГЛАВА III

# НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

**13. Интегральные уравнения Лапласа и Планка.** Интегральное уравнение, известное под названием уравнения Лапласа, имеет вид

$$g(u) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-ux}\, dx, \tag{13.01}$$

где все независимые переменные вещественны, функция $g(u)$ является данной ($c < u < \infty$), а $f(x)$ — искомой. Мы будем считать, что несобственный интеграл понимается в смысле $\lim\limits_{A\to\infty} \int_0^A$, где $\int_0^A$ — собственный интеграл Лебега.

Допустим, что $g(a)$ согласно формуле (13.01) существует и конечно. Положим

$$\int_0^x f(\xi)\, e^{-a\xi}\, d\xi = f_1(x). \tag{13.02}$$

При $u > a$ будем иметь

$$g(u) = \int_0^\infty e^{(-u+a)x}\, df_1(x) = (u-a)\int_0^\infty e^{(-u+a)x} f_1(x)\, dx. \tag{13.03}$$

Таким образом, интеграл (13.01) при $u > a$ будет сходиться, и мы будем иметь

$$\frac{g(a+\varepsilon+u)}{\varepsilon+u} = \int_0^\infty e^{-ux}\,[e^{-\varepsilon x} f_1(x)]\, dx, \tag{13.04}$$

что можно записать так:

$$g_2(u)=\int\limits_0^\infty f_2(x)\,e^{-ux}\,dx. \tag{13.05}$$

Согласно (13.02) функция $f_2(x)$ является ограниченной и имеет порядок $O(e^{-\varepsilon x})$ на бесконечности. Таким образом, мы нэ ограничим существенно уравнение (13.01), если будем считать, что функция $f(x)$ принадлежит $L_2$ или что она также ограничена и непрерывна.

Чрезвычайно простой метод решения уравнения (13.01) принадлежит Уиддеру *).

Прямым дифференцированием, которое можно легко обосновать, получаем

$$(-1)^n g^{(n)}(u)=\int\limits_0^\infty x^n f(x)\,e^{-ux}\,dx. \tag{13.06}$$

Таким образом,

$$\frac{(-1)^n g^{(n)}\left(\frac{n}{x}\right)\left(\frac{n}{x}\right)^{n+1}}{n!}=\frac{\int\limits_0^\infty \xi^n f(\xi)\,e^{-n\xi/x}\,d\xi}{\int\limits_0^\infty \xi^n e^{-n\xi/x}\,dx}. \tag{13.07}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi_n(\xi)=\xi^n e^{-n\xi/x}. \tag{13.08}$$

Для нее

$$\psi_n'(\xi)=\psi_n(\xi)\left[\frac{n}{\xi}-\frac{n}{x}\right],\qquad \psi_n(\xi)\geqslant 0, \tag{13.09}$$

$$(0<\xi<\infty).$$

Значит, $\psi_n(\xi)$ имеет один и только один максимум при $x=\xi$. Легко показать, кроме того, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\psi_n(\xi)\,d\xi}{\int\limits_0^\infty \psi_n(\xi)\,d\xi}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int\limits_{1-\varepsilon/x}^{1+\varepsilon/x}\xi^n e^{-n\xi}\,d\xi}{\int\limits_0^\infty \xi^n e^{-n\xi}\,d\xi}=1. \tag{13.10}$$

---

*) D. V. Widder, The inversion of the Laplace integral and the related moment problem, Transactions of the American Mathemati cal Society, vol. 36, стр. 107—201.

Иначе говоря, выражение (13.07) представляет собой среднее от $f(\xi)$ с положительным весом, причем, когда $n$ стремится к бесконечности, общий вес значений $f(\xi)$ для аргумента $\xi$ вне $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$ стремится к нулю. Таким образом, если $f(x)$ ограничена и непрерывна, то рассуждение Фейера показывает, что

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n g^{(n)}\left(\frac{n}{x}\right)\left(\frac{n}{x}\right)^{n+1}}{n!}. \tag{13.11}$$

Уиддер показал, что условия ограниченности и непрерывности несущественны.

Другой метод решения уравнения (13.01) состоит в следующем: если $f(x)$ принадлежит $L_2$, то и $f(e^{\xi})e^{\xi/2}$ обладает тем же свойством. Напишем

$$g(e^{\eta})e^{\eta/2}=\int_{-\infty}^{\infty} f(e^{\xi})e^{\xi/2}e^{(\xi+\eta)/2}e^{-e^{\xi+\eta}}\,d\xi \tag{13.12}$$

и положим

$$F(u)=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-A}^{A} f(e^{\xi})e^{\xi(iu+1/2)}\,d\xi=$$

$$=\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} f(x)x^{iu-1/2}\,dx. \tag{13.13}$$

Тогда по теореме Парсеваля для преобразований Фурье

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} g(e^{\eta})e^{\eta/2}e^{iv\eta}\,d\eta=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{\xi}}e^{\xi(1/2+iv)}\,d\xi\cdot F(-v). \tag{13.14}$$

Как мы уже видели (ср. (11.18)),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{\xi}}e^{\xi(1/2+iv)}\,d\xi=\Gamma\left(iv+\frac{1}{2}\right)=O(e^{-\pi|v|/2}). \tag{13.15}$$

Таким образом, произведение $\Gamma\left(\frac{1}{2}+iv\right)F(-v)$ принадлежит $L_2$, принадлежат $L_2$ также и оба его сомножителя. По формуле (1.7) теперь имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+iv\right)F(-v)=\underset{A\to\infty}{\text{l. i. m.}}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-A}^{A} g(e^{\eta})\,e^{\eta/2}e^{iv\eta}\,d\eta. \tag{13.16}$$

Стоит отметить, что по теореме Планшереля $F(v)$ будет совершенно произвольной функцией, принадлежащей $L_2$, если сама $f(x)$ является произвольной функцией из $L_2$. Таким образом, если функция $g(u)$ подчинена единственному условию, чтобы (13.01) имело решением некоторую функцию $f(x)$ из $L_2$, то мы можем заменить это условие эквивалентным условием, состоящим в том, что обе функции

$$e^{\pm\pi v/2}\underset{A\to\infty}{\text{l. i. m.}}\int_{-A}^{A} g(e^{\eta})\,e^{\eta/2}e^{iv\eta}\,d\eta \tag{13.17}$$

принадлежат $L_2$. Повторное обращение к теореме Планшереля превратит формально это условие в условие, что обе функции

$$g(e^{\eta\pm\pi i/2})\,e^{\eta/2\pm\pi i/4} \tag{13.18}$$

принадлежат $L_2$, т. е. что $g(\pm iy)$ принадлежат $L_2$. Этот процесс, конечно, подразумевает продолжение $g(u)$ в комплексную область. Мы увидим, что этот формальный результат соответствует известному из теоремы Планшереля результату, что

$$\underset{A\to\infty}{\text{l. i .m.}}\int_{0}^{A} f(x)\,e^{\pm iyx}\,dx \tag{13.19}$$

принадлежит $L_2$ на $(0, \infty)$. Пользуясь теоремой Планшереля, мы можем обратить соотношение (13.16)

$$f(e^{y})\,e^{y/2}=\underset{A\to\infty}{\text{l. i. m.}}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-A}^{A} e^{iy\xi}\,d\xi\,\frac{1}{\Gamma\left(i\xi+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\underset{B\to\infty}{\text{l. i. m.}}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-B}^{B} g(e^{w})\,e^{i\xi w+w/2}\,dw=$$

$$=\underset{A\to\infty}{\text{l. i. m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(e^{w})\,e^{w/2}\,dw\int_{-A}^{A}\frac{e^{i\xi(w+y)}}{\Gamma\left(i\xi+\frac{1}{2}\right)}\,d\xi, \tag{13.20}$$

что в свою очередь можно записать в виде

$$f(x)=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\ \frac{1}{2\pi x}\int_0^\infty g\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dz}{z^{1/2}}\int_{-A}^{A}\frac{z^{i\xi}\,d\xi}{\Gamma\left(i\xi+\frac{1}{2}\right)}. \quad (13.21)$$

Это дает нам другую форму решения уравнения Лапласа.

Обратимся теперь к одной физической задаче, приводящей к интегральному уравнению, похожему на уравнение Лапласа и отличающемуся от последнего тем, что оно приводит нас к дзета-функции Римана. Согласно закону Планка излучение на единицу объема в абсолютно черной полости, находящейся в состоянии равновесия при температуре $T$, для частот, лежащих между $\nu$ и $\nu+d\nu$, дается выражением

$$\frac{8\pi h\nu^3}{c^3\left(e^{h\nu/kT}-1\right)}\,d\nu, \quad (13.22)$$

где $h$ — постоянная Планка, $c$ — скорость света и $k$ — «газовая постоянная», отнесенная к одной молекуле. Этот закон приводит к тому, что излучение источника, находящегося в приближенном локальном равновесии, но состоящего из смеси абсолютно черных тел с различной температурой, будет иметь распределение, задаваемое выражением

$$\nu^3\,d\nu\ \mathrm{const.}\int_0^\infty\frac{\varphi(T)\,dT}{e^{h\nu/kT}-1}, \quad (13.23)$$

где $\varphi(T)$ представляет в некотором смысле «количество» излучения от абсолютно черных тел температуры $T$. Тогда, если мы имеем наблюдаемое излучение с распределением по частотам $\psi(\nu)\,d\nu$, то задача о разложении его на составляющие излучения абсолютно черных тел равносильна решению уравнения

$$\psi(\nu)=\nu^3\int_0^\infty\frac{\varphi(T)\,dT}{e^{h\nu/kT}-1}. \quad (13.24)$$

Положим теперь

$$\frac{h}{kT}=\mu,\quad \varphi(T)\,dT=\mu\Phi(\mu)\,d\mu,\quad \frac{\psi(\nu)}{\nu^2}=\Psi(\nu). \quad (13.25)$$

Тогда уравнение (13.24) примет вид

$$\Psi(\nu)=\int_0^\infty \Phi(\mu)\frac{\mu\nu}{e^{\mu\nu}-1}\,d\mu. \tag{13.26}$$

Это можно записать так:

$$\Psi(e^\eta)e^{\eta/2}=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(e^\xi)e^{\xi/2}\frac{e^{3(\xi+\eta)/2}\,d\xi}{e^{e^{\xi+\eta}}-1}\,d\xi. \tag{13.27}$$

Положим (как в (13.13))

$$F(u)=\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\,\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_\varepsilon^{1/\varepsilon}\Phi(x)\,x^{iu-1/2}\,dx, \tag{13.28}$$

в предположении, что $\Phi(x)$ принадлежит $L_2$. Тогда по теореме Парсеваля для преобразования Фурье

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(e^\eta)\,e^{\eta/2}e^{iv\eta}\,d\eta=F(-v)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\xi(3/2+iv)}\,d\xi}{e^{e^\xi}-1}. \tag{13.29}$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\xi(3/2+iv)}\,d\xi}{e^{e^\xi}-1}=\int_0^\infty\frac{x^{1/2+iv}\,dx}{e^x-1}=$$

$$=\Gamma\left(\frac{3}{2}+iv\right)\zeta\left(\frac{3}{2}+iv\right)=O(ve^{-\pi|v|/2}). \tag{13.30}$$

Значит, функции

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+iv\right)\zeta\left(\frac{3}{2}+iv\right)$$

и $F(-v)$ принадлежат $L_2$, как и их произведение. По формуле (1.06) имеем

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+iv\right)\zeta\left(\frac{3}{2}+iv\right)F(-v)=$$

$$=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-A}^{A}\Psi(e^\eta)\,e^{\eta/2}e^{iv\eta}\,d\eta. \tag{13.31}$$

Таким образом, мы можем выразить $F(-v)$, а следовательно, и $\Phi(x)$ и $\varphi(T)$ через $\Psi(x)$ и $\psi(\nu)$. Этот процесс содержит деление на дзета-функцию.

Аргумент $^3/_2+iv$ в формуле (13.31) лежит вне критической полосы, однако легко построить другие формальные решения, в которых деление имеет место внутри критической полосы и в которых, следовательно, гипотеза Римана о нулях дзета-функции имеет важное значение.

**14. Интегральное уравнение Стилтьеса.** Пусть $g(u)$ определяется равенством (13.01). Тогда формально

$$h(y)=\int_0^\infty e^{-uy}\,dy\int_0^\infty f(x)\,e^{-ux}\,dx=$$

$$=\int_0^\infty f(x)\,dx\int_0^\infty e^{-u(x+y)}\,du=\int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{x+y}. \qquad (14.01)$$

Мы докажем теперь это соотношение, используя теорию преобразования Фурье. Полагая для $y=e^{\eta}$, имеем

$$h(e^{\eta})\,e^{\eta/2}=e^{\eta/2}\int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{x+y}=\int_{-\infty}^\infty \frac{f(e^{\xi})\,e^{\xi/2}\,d\xi}{e^{(\xi-\eta)/2}+e^{(\eta-\xi)/2}}. \qquad (14.02)$$

Далее,

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iy\xi}\,d\xi}{e^{\xi/2}+e^{-\xi/2}}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^\infty \frac{\cos y\xi\,d\xi}{e^{\xi/2}+e^{-\xi/2}}=$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^\infty \cos y\xi\,(e^{-\xi/2}-e^{-3\xi/2}+e^{-5\xi/2}-\ldots)\,d\xi=$$

$$=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^\infty \cos y\xi\,e^{-(2n+1)\xi/2}\,d\xi=$$

$$=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{\frac{2n+1}{2}}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2+y^2}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\operatorname{sech}\pi y. \qquad (14.03)$$

Здесь мы воспользовались теоремой об ограниченной сходимости, чтобы обратить порядок суммирования и интегрирования. Если $f(x)$ принадлежит $L_2$, а $F(y)$ определена формулой (13.13), то по теореме Парсеваля, используя формулу (13.16), будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(e^{\xi})\, e^{\xi/2}\, d\xi}{e^{(\xi-\eta)/2}+e^{(\eta-\xi)/2}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) \operatorname{sech} \pi y e^{-iy\eta}\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\, \Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-iy\right) e^{-iy\eta}\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right) e^{-i\eta y}\, dy \times$$

$$\times \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} g(e^u)\, e^{u/2} e^{-iuy}\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\eta}\, dy \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{\xi}} e^{\xi/2} e^{iy\xi}\, d\xi \times$$

$$\times \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} g(e^u)\, e^{u/2} e^{-iuy}\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{\xi+\eta}} e^{(\xi+\eta)/2} g(e^{\xi})\, e^{\xi/2}\, d\xi = e^{\eta/2} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-xe^{\eta}}\, dx. \qquad (14.04)$$

Сопоставляя эту формулу с (14.02), видим, что

$$h(y) = \int_{0}^{\infty} \frac{f(x)}{x+y}\, dx\ ^{*)}. \qquad (14.01)$$

Заметим, что ряд Маклорена для $\operatorname{ch} \pi y$ сходится так, что его частные суммы остаются по модулю меньше $\operatorname{ch} \pi y$. Пусть

$$\varphi_m(y) = \sum_{0}^{m} \frac{(\pi y)^{2n}}{(2n)!} \qquad (14.05)$$

— $2m$-я частная сумма.

*) Это уравнение и называется уравнением Стилтьеса.— *Прим. перев.*

Тогда

$$\sum_0^m \frac{(-1)^n\left(\pi\frac{d}{d\eta}\right)^{2n}}{(2n)!}\left(h(e^\eta)e^{\eta/2}\right)=$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\operatorname{sech}\pi y\cdot\varphi_m(y)\,e^{-iy\eta}\,dy. \qquad (14.06)$$

Если $F(x)$ принадлежит $L_2$ на $(-\infty, \infty)$, то

$$f(e^\xi)\,e^{\xi/2}=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-A}^{A}F(y)\,e^{-iy\eta}\,dy. \qquad (14.07)$$

При том же условии

$$\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-A}^{A}F(y)\,e^{-iy\eta}\,dy=$$
$$=\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\operatorname{sech}\pi y\varphi_m(y)\,e^{-iy\eta}\,dy, \qquad (14.08)$$

поскольку в силу ограниченной сходимости

$$F(y)=\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ F(y)\operatorname{sech}\pi y\varphi_m(y)=\lim_{m\to\infty}F(y)\operatorname{sech}\pi y\varphi_m(y). \qquad (14.09)$$

Сопоставляя (14.07) и (14.08), получаем

$$\pi f(e^\xi)\,e^{\xi/2}=\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\operatorname{sech}\pi y\varphi_m(y)\,e^{-iy\eta}\,dy \qquad (14.10)$$

или, в силу формулы (14.06),

$$f(e^\xi)\,e^{\xi/2}=\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{\pi}\sum_0^m(-1)^n\left(\pi\frac{d}{d\xi}\right)^{2n}\left[h(e^\xi)\,e^{\xi/2}\right]. \qquad (14.11)$$

Это соотношение можно записать так:

$$f(x)=\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{\pi x^{1/2}}\sum_0^m(-1)^n\frac{\left(\pi x\frac{d}{dx}\right)^{2n}}{(2n)!}\left(x^{1/2}h(x)\right). \qquad (14.12)$$

Это дает нам простую форму решения интегрального уравнения Стилтьеса. Проводя рассуждения в обратном порядке, легко показать, что существование предела в среднем, указанного в (14.11), является необходимым и достаточным условием для существования решения уравнения Стилтьеса. Согласно формуле (14.01) уравнение Лапласа будет при этом иметь решение

$$f(x)=\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{\pi x^{1/2}}\sum_{0}^{m}(-1)^{n}\frac{\left(\pi x\frac{d}{dx}\right)^{2n}}{(2n)!}\left(x^{1/2}\int_{0}^{\infty}g(u)\,e^{-ux}\,du\right)=$$

$$=\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{0}^{\infty}g(u)\,K_{m}(ux)\,du, \qquad (14.13)$$

где

$$K_{m}(w)=\frac{1}{\pi w^{1/2}}\sum_{0}^{m}(-1)^{n}\frac{\left(\pi w\frac{d}{dw}\right)^{2n}}{(2n)!}\left(w^{1/2}e^{-w}\right). \qquad (14.14)$$

Это дает также другое необходимое и достаточное условие на $g(x)$ для разрешимости уравнения Лапласа в случае, когда $f(x)$ принадлежит $L_2$, к которому, как мы показали, приводятся все случаи.

## 15. Асимптотический ряд.

Формально *) имеем

$$h(y)=\int_{0}^{\infty}\frac{f(x)}{x+y}\,dx=\frac{1}{y}\int_{0}^{\infty}\frac{f(x)}{1+\frac{x}{y}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{y}\int_{0}^{\infty}f(x)\,dx-\frac{1}{y^{2}}\int_{0}^{\infty}xf(x)\,dx+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{y^{n+1}}\int_{0}^{\infty}(-x)^{n}f(x)\,dx+\int_{0}^{\infty}\frac{f(x)}{x+y}\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}dx. \qquad (15.01)$$

*) Ср. K. Knopp, Theory and Application of Infinite Series, London, 1928; последняя глава.

Полагая $x = e^{\xi}$, $y = e^{\eta}$, $f(e^{\xi})\, e^{\xi/2} = \varphi(\xi)$, будем иметь

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x+y} \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} dx = \frac{e^{-\eta/2}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \operatorname{sech} \frac{\xi-\eta}{2}\, e^{(\xi-\eta)(n+1)}\, d\xi \tag{15.02}$$

и, если $\varphi(\xi)\, e^{(n+1)\xi}$ принадлежит $L_2$, то

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x+y} \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{-(n+3/2)\eta}}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\xi)\, e^{(n+1)\xi}|^2\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \frac{\xi-\eta}{2}\, d\xi \right\}^{1/2} =$$

$$= O(y^{-(n+3/2)}). \tag{15.03}$$

Таким образом, при этом предположении формула (15.01) дает хорошо известный асимптотический ряд для $h(y)$. Следует отметить, что член

$$\frac{1}{y} \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^k f(x)\, dx = e^{-3\eta/2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{(\xi-\eta)\left(k-\frac{1}{2}\right)}\, d\xi \tag{15.04}$$

имеет ядро $e^{-(\xi-\eta)\left(k-\frac{1}{2}\right)}$, формальное преобразование Фурье которого имеет особенности в точках $\left(k-\frac{1}{2}\right)i$, которые являются также особенностями функции $(\pi/2)^{1/2} \operatorname{sech} \pi u$ преобразования Фурье ядра $\operatorname{sech}((\xi+\eta)/2)$. Это не случайно, в более общих случаях мы найдем члены некоторого асимптотического ряда, связанные с особенностями ядра в комплексной области.

**16. Преобразования Ватсона*).** Пусть $\varphi(x)$ — функция, определенная на $(-\infty, \infty)$, измеримая и по модулю равная всюду 1.

---

*) Теория преобразований Ватсона (G. N. Watson, General transforms, Proceedings of the London Mathematical Society, (2), vol. 35 (1932), стр. 156—199) была недавно включена Бохнером в более общую теорию унитарных преобразований в гильбертовом

Пусть функция

$$\varphi_a(x) = \frac{2}{\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-\xi) \frac{\sin^2(a\xi/2)}{\xi^2} d\xi \tag{16.01}$$

принадлежит $L_2$ при любом $a$. Положим

$$\Phi_a(u) = \underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} \varphi_a(x) e^{iux}\, dx. \tag{16.02}$$

Тогда при $a < b < c$

$$\int_a^b \left[1 - \frac{|u|}{a}\right]^2 |\Phi_b(u) - \Phi_c(u)|^2 du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-a}^{a} \left[1 - \frac{|u|}{a}\right] \Phi_b(u) e^{-iux} du - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-a}^{a} \left[1 - \frac{|u|}{a}\right] \Phi_c(u) e^{-iux} du \right|^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \frac{2}{\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{a(x-\xi)}{2}}{(x-\xi)^2} d\xi \times \right.$$

$$\left. \times \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin^2 \frac{b\eta}{2}}{b\eta^2} - \frac{\sin^2 \frac{c\eta}{2}}{c\eta^2} \right) \varphi(\xi - \eta)\, d\eta \right|^2 =$$

пространстве (S. Bochner, Inversion formulae and unitary transformations, Annals of Mathematics, (2), vol. 34 (1934), стр. 111—115). Методы этого параграфа ближе к методам Харди и Титчмарша (G. H. Hardy and E. C. Titchmarsh, A class of Fourier kernels, Proceedings of the London Mathematical Society (2), vol. 35 (1932), стр. 116—155) и, в противоположность методам Бохнера, специфически применимы скорее к ядрам вида $K(xy)$, чем к более общим ядрам вида $K(x, y)$. Ср. также E. C. Titchmarsh, Journal of the London Mathematical Society, vol. 8 (1933), стр. 217—220; M. Plancherel, там же, vol. 8 (1933), стр. 220—226, и Ida W. Busbridge, там же, vol. 9 (1934), стр. 179—186,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \frac{4}{\pi^2 a} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin^2 \frac{b\eta}{2}}{b\eta^2} - \frac{\sin^2 \frac{c\eta}{2}}{c\eta^2} \right) d\eta \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{\sin^2 a(x-\eta-\xi)}{(x-\eta-\xi)^2} d\xi \right|^2 =$$

$$= \int_{-a}^{a} \left| \Phi_a(u) \frac{|u|(b-c)^2}{bc} \right|^2 du. \tag{16.03}$$

Отсюда сразу же следует, что

$$\lim_{b,c\to\infty} \int_{-a}^{a} \left[1 - \frac{|u|}{a}\right]^2 |\Phi_b(u) - \Phi_c(u)|^2 \, du = 0, \tag{16.04}$$

и, значит, во всякой конечной области существует функция

$$\Phi(u) = \underset{b\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m}}\, \Phi_b(u). \tag{16.05}$$

Теперь, отправляясь от функции $f(x)$ такой, что

$$f(x) = 0 \qquad [|x| > A], \tag{16.06}$$

положим

$$g(y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Phi(y-x)\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Phi_b(y-x)\,dx, \tag{16.07}$$

$$g_b(y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Phi_b(y-x)\,dx. \tag{16.08}$$

Будем иметь

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy}\,dy\, \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Phi_b(y-x)\,dx =$$

$$= \frac{\varphi_b(u)}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-iux}\,dx \tag{16.09}$$

и отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_b(y)|^2\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_b(u)|^2 \left| \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iux}\, dx \right|^2 du. \tag{16.10}$$

Согласно формуле (16.01) и теореме Фейера почти всюду имеем

$$|\varphi_b(u)| \leqslant 1, \qquad \lim_{b\to\infty} |\varphi_b(u)| = 1, \tag{16.11}$$

так что формула (16.10) дает оценку

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_b(y)|^2\, dy \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iux}\, dx \right|^2 du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx \tag{16.12}$$

и по теореме об ограниченной сходимости

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g_b(y)|^2\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx. \tag{16.13}$$

Возвращаясь к (16.09), имеем

$$\lim_{b,\ c\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g_b(y) - g_c(y)|^2\, dy =$$

$$= \lim_{b,\ c\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_b(u) - \varphi_c(u)|^2 \left| \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iux}\, dx \right|^2 du = 0. \tag{16.14}$$

Это соотношение, формула (16.07) и частно используемый принцип, согласно которому предел и предел в среднем, если они оба существуют, эквивалентны, дают

$$\underset{b\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\; g_b(y) = g(y). \tag{16.15}$$

Таким образом, в силу (16.13) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^2\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx. \tag{16.16}$$

Обратимся теперь к случаю, когда $f(y)$ является совершенно произвольной функцией, принадлежащей $L_2$. Применяя формулу (16.16) к функции, равной $f$ на $(A, B)$ и $(-B, -A)$ и равной нулю в остальных точках, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-B}^{B} f(x)\,\Phi(y-x)\,dx - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} f(x)\,\Phi(y-x)\,dx \right|^2 dy =$$

$$= \int_{-B}^{B} |f(x)|^2\,dx - \int_{-A}^{A} |f(x)|^2\,dx. \tag{16.17}$$

Таким образом, по теореме Рисса — Фишера существует функция

$$g(y) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} f(x)\,\Phi(y-x)\,dx, \tag{16.18}$$

принадлежащая $L_2$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^2\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx. \tag{16.19}$$

Если $f(x)$ обращается в нуль при достаточно больших значениях аргумента, то в силу (16.08), (16.15) и (16.09) имеем

$$\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} e^{-iyu}\,dy \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\Phi(y-x)\,dx =$$

$$= \frac{\varphi(u)}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-iux}\,dx. \tag{16.20}$$

Аппроксимируя $f(x)$ функциями, отличными от нуля только в конечной области, и переходя затем к пределу, мы можем, используя (16.18), распространить формулу (16.20) на самый общий случай, когда $f(x)$ принадлежит $L_2$. Это дает нам

$$\underset{A\to\infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} g(y)\, e^{-iuy}\, dy =$$
$$= \underset{B\to\infty}{\text{l. i. m.}} \frac{\varphi(u)}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-B}^{B} f(x)\, e^{-iux}\, dx. \tag{16.21}$$

Вспомним теперь, что $\overline{\varphi(u)} = 1/\varphi(u)$. Тогда получим

$$\underset{B\to\infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-B}^{B} f(x)\, e^{-iux}\, dx =$$
$$= \overline{\varphi(u)}\ \underset{A\to\infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} g(y)\, e^{-iuy}\, dy \tag{16.22}$$

или, производя еще раз преобразование Фурье, как в формуле (16.20),

$$f(x) = \underset{A\to\infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} g(y)\, \overline{\Phi}(y-x)\, dy. \tag{16.23}$$

Если мы положим теперь

$$f(-x) = h(x), \tag{16.24}$$

то $h(x)$ будет принадлежать $L_2$ и мы получим две двойственные формулы:

$$\left.\begin{aligned} g(y) &= \underset{A\to\infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} h(x)\, \Phi(x+y)\, dx, \\ h(x) &= \underset{A\to\infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} g(y)\, \overline{\Phi}(x+y)\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{16.25}$$

Произведем теперь замены:

$$\left.\begin{aligned} &y = \lg \eta, \quad x = \lg \xi, \quad g(y) = \eta^{1/2} G(\eta), \\ &h(x) = \xi^{1/2} H(\xi), \quad \Phi(x) = \xi^{1/2} K(\xi). \end{aligned}\right\} \tag{16.26}$$

Тогда формулы (16.25) примут вид

$$
\begin{aligned}
G(\eta) &= \underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} H(\xi) K(\xi\eta)\, d\xi, \\
H(\xi) &= \underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} G(\eta) \overline{K(\xi\eta)}\, d\eta.
\end{aligned} \tag{16.27}
$$

В силу (16.19)

$$
\int_0^\infty |G(\eta)|^2\, d\eta = \int_0^\infty |H(\xi)|^2\, d\xi. \tag{16.28}
$$

Приведем таблицу функций $\varphi(x)$ и соответствующих функций $K(\xi)$.

| $\varphi(x)$ | $K(\xi)$ |
|---|---|
| $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}-ix\right) \cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-ix\right)$ | $2\sin\xi$ (синус-преобразование Фурье) |
| $-i\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}-ix\right) \sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-ix\right)$ | $2\cos\xi$ (косинус-преобразование Фурье) |
| $e^{ie^x}$ | $\frac{\xi^{(\pi-1)/2} i\Gamma(i\lg\xi)}{2\pi}$ |
| $e^{ix^2/2}$ | $\frac{1-i}{2}\xi^{-1/2-i\xi/2}$ |
| $\frac{2^{ix}\Gamma\left(\frac{m+ix}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-ix}{2}+\frac{1}{2}\right)}$ | $(2\pi)^{1/2} J_m(\xi)\, \xi^{1/2}$ (преобразование Ганкеля) |

## ГЛАВА IV

# ОДИН КЛАСС СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**17. Теория Хопфа — Винера** *). Мы посвятим этот параграф решению однородного линейного интегрального уравнения

$$f(x)=\int_0^\infty K(x-y)f(y)\,dy \tag{17.01}$$

и будем считать, что ядро $K$ экспоненциально убывает при больших значениях $|x|$. Простейшим частным случаем является уравнение Лалеско с ядром

$$K(x)=e^{-|x|}. \tag{17.02}$$

При

$$K(x)=\frac{1}{2}\int_{|x|}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt \tag{17.03}$$

получается уравнение Милна. Это уравнение дает в качестве решения распределение температуры в звездной атмосфере, находящейся в лучистом равновесии **). Мы применим метод преобразований Фурье в комбинации с некоторыми элеменарными соображениями из теории функций комплексного переменного, чтобы получить «фундаментальные решения» уравнения (17.01), т. е. все решения

---

*) N. Wiener and E. Hopf, Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1931, стр. 696.

**) E. Hopf, Mathematisches zur Strahlungsgleichgewichtstheorie der Fixsternatmosphären, Mathematische Zeitschrift, Bd. 33 (1931), стр. 109.

$f(x)$, которые возрастают при больших значениях $x$ медленнее, чем показательная функция с показателем меньшим, чем противоположная величина показателя экспоненты, мажорирующей ядро $K(x)$. Мы представим эти решения в явной интегральной форме.

Теория аналогичного уравнения

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) f(y)\, dy \tag{17.04}$$

гораздо проще. Его решения являются, по существу, показательными функциями. Если $u = u^*$ — $n$-кратный нуль функции

$$1 - \int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{ut}\, dt, \tag{17.05}$$

если $Q$ — произвольный полином степени, не превосходящей $h-1$, и если все нужные интегралы имеют смысл, то

$$Q(x) e^{-u^* x} \tag{17.06}$$

будет решением уравнения (17.04). Связь уравнения (17.01) с уравнением (17.04) можно выразить следующим образом: решение уравнения (17.01) при больших $x$ ведет себя асимптотически, как некоторые решения уравнения (17.04). Этот факт можно усмотреть уже из двух упомянутых выше примеров.

Перейдем теперь к решению уравнения (17.01). Пусть ядро $K$ вещественно и непрерывно, за исключением конечного числа конечных скачков. Пусть $K(x) e^{s|x|}$ принадлежит $L_2$ по меньшей мере при одном положительном значении $s$. Не внося существенного ограничения, можно считать, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K(x) e^{s|x|})^2\, dx \tag{17.07}$$

сходится при всех $s < 1$. Тогда по неравенству Шварца интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(x)| e^{s|x|}\, dx \tag{17.08}$$

будет сходиться при $s<1$, что можно видеть, записав подинтегральную функцию в виде

$$|K(x)|\,e^{(s+1)|x|/2}e^{-(1-s)|x|/2}.$$

В дальнейшем мы рассмотрим те решения уравнения (17.01), для которых

$$f(x)=O(e^{\alpha x}), \tag{17.09}$$

где $\alpha$ — произвольная фиксированная постоянная, меньшая 1.

Для того чтобы при этих предположениях решить уравнение (17.01), запишем его сначала в виде

$$g(x)=f(x)-\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)\,f(y)\,dy, \tag{17.10}$$

где

$$f(x)=0\ (x<0),\quad g(x)=0\ (x>0). \tag{17.11}$$

Здесь функция $g(x)$ определяется при $x<0$ правой частью формулы (17.10). Введем теперь преобразования Лапласа

$$\varphi(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{ux}\,dx,\quad \gamma(u)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,e^{ux}\,dx,$$

$$\varkappa(u)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x)\,e^{ux}\,dx, \tag{17.12}$$

где $u=s+it$ — комплексное переменное. Тогда

$$\frac{\varphi(s+it)}{(2\pi)^{1/2}},\quad \frac{\gamma(s+it)}{(2\pi)^{1/2}},\quad \frac{\varkappa(s+it)}{(2\pi)^{1/2}},$$

рассматриваемые как функции от $t$, будут преобразованиями Фурье функций $f(x)\,e^{sx}$, $g(x)\,e^{sx}$, $K(x)\,e^{sx}$. Согласно (17.11)

$$\varphi(u)=\int_{0}^{\infty}f(x)\,e^{ux}\,dx, \tag{17.13}$$

$$\gamma(u)=\int_{-\infty}^{0}g(x)\,e^{ux}\,dx. \tag{17.14}$$

В силу теорем V и III функция $\varphi(u)$ будет регулярной в полуплоскости $s<-\alpha$ и ограниченной во всякой строго внутренней полуплоскости. Эти же теоремы показывают, что $\gamma(u)$ будет регулярной в полуплоскости $s>-1$ и ограниченной во всякой строго внутренней полуплоскости, поскольку $g(x)=O(e^{-|x|})$. Далее, полуплоскости регулярности функций $\varphi$ и $\gamma$ покрывают совместно всю плоскость $u$ и имеют общую полосу $-1<s<-\alpha$.

При наших предположениях о ядре $K(x)$ интеграл Лапласа для $K(x)$ сходится абсолютно при $|s|<1$, и $\varkappa(u)$ будет регулярной в этой полосе. Если мы теперь преобразуем по Лапласу соотношение (17.10), то получим

$$\gamma(u)=\varphi(u)-\int_{-\infty}^{\infty} e^{ux}\,dx\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\,f(y)\,dy=$$

$$=\varphi(u)-\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\,e^{ux}\,dx=$$

$$=\varphi(u)-\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{uy}\,dy\int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,e^{ut}\,dt, \tag{17.15}$$

иначе говоря,

$$\gamma(u)=\varphi(u)\,(1-\varkappa(u)). \tag{17.16}$$

Поскольку все интегралы сходятся абсолютно при $-1<s=\operatorname{Re}u<-\alpha$, произведенное изменение порядка интегрирования законно.

Для того чтобы воспользоваться соотношением (17.16), нам нужна следующая лемма:

Лемма. *Функция* $1-\varkappa(u)$ *имеет самое большое конечное число нулей во всякой полосе* $|s|\leqslant\beta$ $(\beta<1)$. *Если обозначить их через* $u_1, u_2, \ldots, u_m$, *то функцию* $1-\varkappa(u)$ *можно представить в полосе* $|s|<\beta$ *в виде*

$$1-\varkappa(u)=\frac{\sigma_+(u)}{\sigma_-(u)}\prod_{1}^{m}(u-u_\nu). \tag{17.17}$$

*Здесь* $\sigma_+(u)$ *регулярна и не имеет нулей в полуплоскости* $s\geqslant-\beta$, *тогда как* $\sigma_-(u)$ *регулярна и не имеет* *нулей в полуплоскости* $s \leqslant +\beta$. *Модули*

$$|\sigma_+(u)\, u^{k+m/2}|, \quad |\sigma_-(u)\, u^{k-m/2}|, \tag{17.18}$$

*при достаточно больших значениях и в соответствующих полуплоскостях заключены между положительными границами. Здесь* $k$ *— некоторое целое число, определяемое ядром. Для четного ядра* $K = K(|x|)$ *имеем* $\varkappa(u) = \varkappa(-u)$, $m = 2n$ *— четное число и* $k = 0$.

Полагая $x = \xi + \pi/t$, видим, что

$$\varkappa(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{st}\, e^{itx} dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} K\left(\xi + \frac{\pi}{t}\right) e^{s(\xi+\pi/t)} e^{i\xi t} d\xi. \tag{17.19}$$

Заменяя во втором интеграле $\xi$ на $x$ и складывая его с первым интегралом, получим

$$2\varkappa(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{K(x)\, e^{sx} - K\left(x + \frac{\pi}{t}\right) e^{s(x+\pi/t)}\right\} e^{itx} dx. \tag{17.20}$$

Расщепляя подинтегральную функцию на две части, видим, что ее модуль не превосходит

$$e^{\pi/t} \left| K\left(x + \frac{\pi}{t}\right) - K(x) \right| e^{sx} +$$

$$+ |e^{s\pi/t} - 1|\, |K(x)|\, e^{sx} \tag{17.21}$$

при $|s| < 1$.Отсюда при $|s| \leqslant s_0 < 1$ следует, что

$$2|\varkappa(u)| \leqslant e^{\pi/t} \int_{-\infty}^{\infty} \left| K\left(x + \frac{\pi}{t}\right) - K(x) \right| e^{s_0|x|} dx +$$

$$+ |e^{s\pi/t} - 1| \int_{-\infty}^{\infty} |K(x)|\, e^{s_0|x|}\, dx. \tag{17.22}$$

Если мы воспользуемся теперь нашими предположениями о ядре $K$, то легко получим, что

$$\varkappa(s + it) \to 0 \text{ при } |t| \to \infty \tag{17.23}$$

равномерно в полосе $|s| \leqslant s_0$. Отсюда сразу же следует наше утверждение, касающееся нулей функции $1-\varkappa(u)$. Кроме того,

$$\frac{\varkappa(s+it)}{(2\pi)^{1/2}}, \tag{17.24}$$

рассматриваемая как функция от $t$, является преобразованием Фурье функции $K(x)e^{sx}$, которую мы еще раньше предположили принадлежащей $L_2$. Таким образом, по теореме Планшереля $|\varkappa(s+it)|$ также принадлежит $L_2$ на прямой $-\infty < t < \infty$.

Положим теперь

$$\tau(u) = (1-\varkappa(u))\frac{(u^2-1)^{m/2}}{\prod\limits_{1}^{m}(u-u_\nu)}\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^k, \tag{17.25}$$

где $k$ все еще подлежит определению и где под $(u^2-1)^{m/2}$ мы понимаем ту однозначную в полосе $|s| < 1$ ветвь, которая ведет себя, как $u^m$ при больших значениях $|u|$. Пусть $\beta < \beta' < 1$, где $\beta'$ выбрано, однако, так, чтобы несколько более широкая полоса $|s| \leqslant \beta'$ не содержала новых нулей функции $1-\varkappa(u)$. Тогда $\tau(u)$ будет регулярной и свободной от нулей в полосе $|s| \leqslant \beta'$, причем

$$\tau(u) \to 1 \text{ при } |t| \to \infty \tag{17.26}$$

равномерно в полосе $|s| \leqslant \beta'$.

Рассмотрим теперь приращение $\lg \tau(s+it)$, когда $t$ увеличивается от $-\infty$ до $+\infty$. Согласно (17.26) это приращение является целым кратным $2\pi i$, и его можно уничтожить подходящим выбором $k$ в формуле (17.25). Определив таким образом $k$, рассмотрим ту однозначную в полосе $|s| \leqslant \beta'$ ветвь функции $\lg \tau(u)$, для которой $\lg \tau(u)$ стремится к 0 при $t \to -\infty$. Тогда мы будем также иметь $\lg \tau(u) \to 0$ при $t \to +\infty$, т. е.

$$\lg \tau(u) \to 0 \text{ при } |t| \to \infty \tag{17.27}$$

во всей полосе $|s| \leqslant \beta'$. Кроме того, $\tau(u)$ имеет вид

$$(1-\varkappa(u))\left(1+O\left(\frac{1}{|u|}\right)\right) \tag{17.28}$$

при больших значениях $|t|$, так что $|\lg \tau(u)|$ также принадлежит $L_2$ по $t$. Поэтому мы можем применить интегральную формулу Коши, которая дает $\lg \tau = \lg \tau_+ - \lg \tau_-$, где

$$\begin{aligned} \lg \tau_+(u) &= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\beta'-i\infty}^{-\beta'+i\infty} \frac{\lg \tau(v)}{v-u}\, dv, \\ \lg \tau_-(u) &= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta'-i\infty}^{\beta'+i\infty} \frac{\lg \tau(v)}{v-u}\, dv \end{aligned} \tag{17.29}$$

при $-\beta' < s = \operatorname{Re} u < \beta'$.

Теперь по неравенству Шварца

$$|\lg \tau_-(u)|^2 \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\beta'-i\infty}^{\beta'+i\infty} |\lg \tau(v)|^2 |dv| \int\limits_{\beta'-i\infty}^{\beta'+i\infty} \frac{|dv|}{|u-v|^2}, \tag{17.30}$$

так что функция $\lg \tau_-(u)$ является регулярной и ограниченной при $s \leqslant \beta < \beta'$. Аналогично функция $\lg \tau_+(u)$ регулярна и ограничена при $s \geqslant -\beta > -\beta'$. Если мы теперь положим

$$\begin{aligned} \sigma_+(u) &= \tau_+(u)(u+1)^{-k-m/2}, \\ \sigma_-(u) &= \tau_-(u)(u-1)^{-k+m/2}, \end{aligned} \tag{17.31}$$

то формула (17.17) и все свойства функций $\sigma_+$ и $\sigma_-$ будут следовать из соотношений (17.25) и (17.29).

Если $K$ четное, то, очевидно, $\varkappa(u) = \varkappa(-u)$ и число нулей функции $1-\varkappa(u)$ в полосе $|s| \leqslant \beta$ четно, $m = 2n$. Поскольку $K(x)$ вещественно, $\overline{\varkappa(u)} = \varkappa(\bar{u})$. Если при этом $u$ чисто мнимое, то $\bar{u} = -u$ и $\overline{\varkappa(u)} = \varkappa(-u) = \varkappa(u)$, т. е. $\varkappa(u)$ вещественна. Если мы положим $k = 0$ в формуле (17.25), то $\tau(u)$ также будет вещественной при чисто мнимых $u$. Поскольку $\tau(u) \neq 0$, приращение $\lg \tau(u)$ вдоль мнимой оси $u$ равно нулю.

Следует подчеркнуть, что функции $\sigma_+$ и $\sigma_-$ определяются ядром $K(x)$ посредством явных интегральных формул.

Теперь уже легко решить уравнение (17.16). Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_m$ — все нули функции $1-\varkappa(u)$, лежащие в полосе $|s| \leqslant \alpha$, где $\alpha$ взято из оценки (17.09). Определим $\beta$ так, чтобы $\alpha < \beta < 1$ и чтобы в полосе $|s| \leqslant \beta$ не было новых нулей. Пользуясь этим $\beta$, применим нашу лемму. Тогда (17.16) и (17.17) дают

$$\frac{\gamma(u)}{\sigma_+(u)} = \frac{\varphi(u)}{\sigma_-(u)} \prod_1^m (u - u_\nu). \tag{17.32}$$

По нашей лемме и еще одному замечанию, которое мы уже сделали, левая часть этого равенства регулярна при $s \geqslant -\beta$ и имеет вид $O(|u|^{k+m/2})$ при больших значениях $|u|$. Аналогично правая часть регулярна при $s \leqslant -\beta$ и имеем вид $O(|u|^{k+m/2})$ при больших значениях $|u|$.

Таким образом, соотношение (17.32) определяет некоторую целую функцию, которая равна $O(|u|^{k+m/2})$ при больших значениях $|u|$, и, значит, может быть только полиномом степени, не превосходящей $k+m/2$.

В дальнейшем мы ограничимся случаем четного вещественного ядра $K(x) = K(|x|)$. Тогда $m = 2n$, $k = 0$ и формула (17.32) определяет полином самое большее $n$-й степени. Однако сама $n$-я степень исключается, ибо в противном случае по нашей лемме $|\varphi(u)|$ был бы больше положительной постоянной при больших значениях $|u|$, а это противоречит тому, что по теореме Парсеваля $|\varphi(s+it)|$ как функция от $t$ принадлежит $L_2$. Таким образом,

$$\varphi(u) = \frac{\sigma_-(u) P_{n-1}(u)}{\prod\limits_1^{2n} (u - u_\nu)}, \quad \gamma(u) = \sigma_+(u) P_{n-1}(u), \tag{17.33}$$

где $P_{n-1}$ — произвольный полином степени, не превосходящей $n-1$.

Мы хотим теперь показать, что и обратно функции $\varphi(u)$ и $\gamma(u)$, определяемые формулой (17.33), действительно дают решение уравнений (17.10) и (17.11). Функция $\varphi(u)$ будет регулярна в полуплоскости $s \leqslant \beta$ всюду, кроме полюсов $u = u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$, и будет равна $O(1/|u|)$ при больших значениях $|u|$. Аналогично $\gamma(u)$ регулярна в полуплоскости $s \geqslant -\beta$ и равна $O(1/|u|)$ при больших значениях $|u|$.

Таким образом, по теореме Планшереля интегралы в формулах обращения Меллина

$$
\left.
\begin{aligned}
f(x) &= \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\beta-iA}^{-\beta+iA} \varphi(u)\, e^{-ux} du,\\
g(x) &= \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\beta-iA}^{-\beta+iA} \gamma(u)\, e^{-ux} du
\end{aligned}
\right\} \tag{17.34}
$$

имеют смысл и определяют функции $f(x)$ и $g(x)$, принадлежащие $L_2$. По формуле (3.38) можно написать

$$
f(x)\, e^{-\lambda x} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(-\lambda + it)\, e^{-ixt} dt \qquad (\lambda \geqslant \beta), \tag{17.35}
$$

а по теореме V мы можем утверждать, что $f(x)$ эквивалентна нулю при отрицательных значениях $x$, тогда как $g(x)$ эквивалентна нулю при положительных значениях $x$, т. е. выполнены равенства (17.11).

Что же касается равенства (17.10), то мы должны показать, что функция

$$
\delta(x) = e^{-\beta x} \Big(g(x) - f(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\, f(y)\, dy\Big) \tag{17.36}
$$

обращается в нуль, и в первую очередь, что она обращается в нуль почти всюду. Но согласно формулам (17.34) функции $e^{-\beta x} f(x)$ и $e^{-\beta x} g(x)$ является преобразованиями Фурье функций

$$
\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\, \varphi(it-\beta)
$$

и

$$
\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\, \gamma(it-\beta).
$$

Таким образом, интеграл

$$
e^{-\beta x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\, f(y)\, dy
$$

в выражении (17.36) можно преобразовать по теореме Парсеваля в интеграл

$$\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{e^{-\beta x}}{2\pi i}\int\limits_{-\beta-iA}^{-\beta+iA}\varphi(u)\,\varkappa(u)\,e^{-ux}\,du. \tag{17.37}$$

Иначе говоря, преобразованием Фурье интеграла в (17.36) будет функция

$$\frac{\varphi(it-\beta)\,\varkappa(it-\beta)}{(2\pi)^{1/2}}, \tag{17.38}$$

а преобразование Фурье $\delta(x)$ равно

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}(-\varphi(-\beta+it)+\gamma(-\beta+it)+ \\ +\varphi(-\beta+it)\,\varkappa(-\beta+it))=0 \tag{17.39}$$

и $\delta(x)$ обращается в нуль почти всюду.

Таким образом, функция $f(x)$, определяемая равенствами (17.33) и (17.34), удовлетворяет почти всюду интегральному уравнению (17.01). Наконец, легко показать, исходя из уравнения (17.01) и из того факта, что $f(x)e^{-\beta x}$ принадлежит $L_2$, что $f(x)e^{-\beta x}$ является непрерывной и ограниченной.

Мы хотим теперь обсудить асимптотическое поведение $f(x)$. Ограничимся случаем, когда $K(x)$ четно. Если мы переместим абсциссу интегрирования в первой из формул (17.34) из $-\beta$ в $+\beta$, то мы изменим значение интеграла на минус сумму вычетов функции $\varphi(u)e^{-ux}$ в полосе $|\operatorname{Re} u|\leqslant\alpha$. Согласно (17.33) подобный вычет имеет вид

$$-Q(x)\,e^{-u^*x}, \tag{17.40}$$

где $u^*$ обозначает некоторый нуль функции $1-\varkappa(u)$ в полосе $|\operatorname{Re} u|\leqslant\alpha$, а $Q(x)$ — полином степени меньшей, чем кратность этого нуля. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=f_0(x)+r(x),\\ f_0(x)&=\sum Q(x)\,e^{-u^*x},\\ r(x)&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\varphi(u)\,e^{-ux}\,du, \end{aligned}\right\} \tag{17.41}$$

где сумма в выражении для $f_0(x)$ берется по всем нулям $u^*$ в полосе $|\operatorname{Re} u| \leqslant \alpha$. Функция $f_0(x)$ является решением интегрального уравнения (17.04), которое можно записать в виде

$$f_0(x) = \int_0^\infty K(x-y) f_0(y)\, dy + \int_{-\infty}^0 K(x-y) f_0(y)\, dy. \quad (17.42)$$

Ясно, что $f_0(x) = O(e^{\beta|x|})$, и, используя наши предположения относительно ядра $K$, мы получаем

$$\int_{-\infty}^0 K(x-y) f_0(y)\, dy = O(e^{-\beta x}). \quad (17.43)$$

В силу (17.41) функция $r(x)e^{\beta x}$ является преобразованием Фурье функции

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \varphi(\beta - it)$$

и принадлежит $L_2$. Из соотношений (17.41) — (17.43) получаем

$$r(x) = \int_0^\infty K(x-y) r(y)\, dy + O(e^{-\beta x}). \quad (17.44)$$

Подинтегральную функцию можно представить в виде $(K(x-y)e^{-\beta y})(r(y)e^{\beta y})$, так что в силу неравенства Шварца $r(x) = O(e^{-\beta x})$. Таким образом, в предположениях, сделанных в этом параграфе о ядре $K$, мы установили теорему.

Теорема XVI. *Пусть $2n$ — (всегда конечное) число нулей функции*

$$1 - \int_{-\infty}^\infty K(x) e^{ux}\, dx \qquad [K(x) = K(|x|)] \quad (17.45)$$

*с учетом их кратностей в полосе $|\operatorname{Re} u| \leqslant \alpha < 1$. Тогда максимальное число линейно независимых решений уравнений (17.01), для которых $f(x) = O(e^{(\alpha+\delta)x})$, где $\delta$ — произвольное положительное число, равно в точности $n$.*

*Эти решения имеют вид*

$$f(x)=\sum Q(x)\,e^{-u^*x}+O(e^{-\beta x})^*), \qquad (17.46)$$

*где сумма берется по упомянутым нулям* $u^*$, *а* $Q(x)$ — *некоторые полиномы степени меньшей, чем кратности* $u^*$; $\beta$ — *такое число, лежащее внутри интервала* $(\alpha, 1)$, *что полосы* $\alpha < \operatorname{Re} u \leqslant \beta$ *и* $-\alpha > \operatorname{Re} u \geqslant -\beta$ *не содержат нулей.*

Упомянем еще об одном свойстве четного ядра, именно: среди членов главной части решения всегда присутствует член с $\operatorname{Re} u^* \leqslant 0$, иначе говоря, уравнение (17.01) не имеет решения такого, что $f(x)\to 0$ при $x\to\infty$, ибо из (17.33) и из $\sigma_-(u)\neq 0$ следует, что $\varphi(u)$ имеет по меньшей мере один полюс, который не лежит в правой полуплоскости.

Применим теперь нашу общую теорию к некоторым частным случаям. В уравнении Лалеско

$$K(x)=\lambda e^{-|x|} \quad \text{и} \quad \varkappa(u)=\frac{2\lambda}{1-u^2};$$

нулями функции $1-\varkappa$ являются $u=\pm(1-2\lambda)^{1/2}$, и мы имеем $n=1$. Представление (17.17) непосредственно дает

$$\sigma_+(u)=\frac{1}{u+1}. \qquad (17.47)$$

При $\lambda\leqslant 0$ не существует решений, подчиненных оценке (17.09) с каким-либо $\alpha<1$. При $\lambda>0$ имеется, по существу, одно решение. Согласно (17.33) имеем

$$\varphi(u)=\frac{u-1}{u^2-1+2\lambda}. \qquad (17.48)$$

Далее, согласно (17.41)

$$f(x)=\frac{e^{x(1-2\lambda)^{1/2}}+e^{-x(1-2\lambda)^{1/2}}}{2}+$$

$$+\frac{e^{x(1-2\lambda)^{1/2}}-e^{-x(1-2\lambda)^{1/2}}}{2(1-2\lambda)^{1/2}}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\varphi(u)\,e^{-ux}\,du. \qquad (17.49)$$

---

*) Оценка (17.09) не обязана удовлетворяться, поскольку кратный нуль может лежать на границе полосы $|\operatorname{Re} u|\leqslant\alpha$ и, стало быть, в решении может присутствовать член $x^l e^{\alpha x}$, $l>0$.

Интеграл в этой формуле должен обращаться в нуль, поскольку абсциссу интегрирования можно переместить сколь угодно далеко направо.

Вторым, более сложным примером служит уравнение Милна. Здесь

$$K(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{|x|}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt, \tag{17.50}$$

так что

$$\begin{aligned}
\varkappa(u)&=\frac{1}{2}\int\limits_{x=0}^{\infty}\int\limits_{t=x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\left(e^{ux}+e^{-ux}\right)dt\,dx=\\
&=\frac{1}{2}\int\limits_{t=0}^{\infty}\int\limits_{x=0}^{t}\frac{e^{-t}}{t}\left(e^{ux}+e^{-ux}\right)dx\,dt=\\
&=\frac{1}{2u}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-(1-u)t}-e^{-(1+u)t}}{t}\,dt=\\
&=\frac{1}{2u}\int\limits_{0}^{\infty}dt\int\limits_{1-u}^{1+u}e^{-wt}\,dw=\frac{1}{2u}\int\limits_{1-u}^{1+u}\frac{dw}{w}=\\
&=\frac{1}{2u}\lg\frac{1+u}{1-u},
\end{aligned} \tag{17.51}$$

где мы берем ту ветвь логарифма, которая регулярна в полосе $|\operatorname{Re} u|<1$ и обращается в нуль при $u=0$. Уравнение $1-\varkappa=0$ имеет $u=0$ двойным корнем. Небольшое размышление показывает, что в полосе $|\operatorname{Re} u|<1$ нет других нулей.

Таким образом, существует только одно решение, подчиненное оценке (17.09). При больших $x$ оно ведет себя, как линейная функция:

$$f(x)=x+a+O\left(e^{-(1-\delta)x}\right), \tag{17.52}$$

где $\delta$ — произвольное положительное число. В этом случае нам не удалось привести интегральное представление $f(x)$ к элементарному виду. По-видимому, $f(x)$ является новой трансцендентной функцией.

В общем случае предположение (17.09) о решениях уравнения (17.01) вполне естественно, поскольку $1-\varkappa$

может иметь бесконечно много нулей в полосе $|\operatorname{Re} u| < 1$. В случае, когда $1-\varkappa$ имеет только конечное число нулей, как, например, в двух только что разобранных случаях, можно доказать единственность наших решений даже при более слабом предположении, чем (17.09), однако мы не будем развивать этот вопрос.

Перейдем теперь к специальному случаю, когда ядро положительно *). Пусть $K = K(|x|) > 0$ всюду, кроме конечного числа точек, и пусть $\varkappa(0) \leqslant 1$, $\varkappa(1) > 1$. Тогда уравнение (17.01) будет иметь по меньшей мере одно положительное решение. Ибо при этих предположениях функция

$$\varkappa(u) = \int_0^\infty K(x)(e^{ux} + e^{-ux})\,dx$$

будет монотонно возрастать, когда $u$ возрастает по вещественной оси от 0 до 1, и уравнение $1-\varkappa = 0$ будет иметь в точности два вещественных нуля $\pm u^*$ $(u^* \geqslant 0)$ в полосе $|\operatorname{Re} u| < 1$. Таким образом, уравнение (17.01) будет иметь решение, для которого $f(x) = O(e^{u^*x})$, если $u^* > 0$, и $f(x) = O(x)$, если $u^* = 0$, что означает, что $\varkappa(0) = 1$. В обоих случаях это решение положительно, начиная с некоторой точки. Если бы оно было где-то нулем или отрицательным, то оно принимало бы где-нибудь, скажем при $x = x_0$, свое наименьшее значение. Поскольку $K > 0$,

$$f(x_0) = \int_0^\infty K(x_0 - y) f(y)\,dy \geqslant f(x_0) \int_0^\infty K(x_0 - y)\,dy \tag{17.53}$$

или

$$f(x_0)\left\{1 - \int_0^\infty K(x_0 - y)\,dy\right\} \geqslant 0, \tag{17.54}$$

где знак равенства имеет место только при $f \equiv f(x_0)$. Таким образом, равенство $f(x_0) = 0$ невозможно. Неравенство $f(x_0) < 0$ также невозможно, поскольку интеграл,

---

*) См. также E. Hopf, Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern, Berliner Sitzungsberichte, 1928, XVIII.

стоящий в скобках, строго меньше, чем

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,dt = \varkappa(0) \leqslant 1.$$

Таким образом, $f(x) > 0$ при $x \geqslant 0$. Например, решение (17.52) уравнения Милна положительно.

**18. Замечание об уравнении Вольтерра.** Теорема Мерсера *) утверждает, что если $0 < \alpha < 1$ и если

$$\alpha s_n - (1-\alpha)\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} s_\nu \to s, \qquad (18.01)$$

то

$$s_n \to s. \qquad (18.02)$$

Эта теорема имеет обобщение нетривиального характера. Непрерывный аналог утверждает, что если $0 < \alpha < 1$ и если

$$\alpha s(x) - \frac{1-\alpha}{x}\int_{1}^{x} s(y)\,dy \to s, \text{ когда } x \to \infty, \qquad (18.03)$$

то

$$s(x) \to s. \qquad (18.04)$$

Заменой независимого переменного мы придем к утверждению, что если

$$\alpha S(\xi) + (1-\alpha)\int_{0}^{\xi} e^{\eta-\xi} S(\eta)\,d\eta \to s, \text{ когда } \xi \to \infty, \qquad (18.05)$$

то

$$S(\xi) \to s. \qquad (18.06)$$

*) J. Mercer, On the limits of real variants, Proceedings of the London Mathematical Society, (2), vol. 5 (1907), стр. 206—224.

Paley and Wiener, цит. соч., Note VII, On the Volterra equation, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 35, стр. 785—791.

L. L. Silverman, On the consistency and equivalence of certain generalized definitions of the limit of a function of a continuous variable, Annals of Mathematics, vol. 21 (1920), стр 128—140.

Это утверждение является частным случаем следующей теоремы:

Теорема XVII. *Пусть* $F(x)$ *измерима и ограничена во всякой конечной области* $(0, A)$. *Пусть* $K(x)$ *принадлежит* $L$ *на* $(0, \infty)$, *т. е.*

$$\int_0^\infty |K(\xi)|\, d\xi < \infty. \tag{18.07}$$

*Пусть, наконец,*

$$F(x) + \int_0^x K(x-\xi) F(\xi)\, d\xi \to s, \text{ когда } x \to \infty. \tag{18.08}$$

*Тогда, если*

$$\int_0^\infty K(\xi) e^{-w\xi}\, d\xi \neq -1 \text{ при } \operatorname{Re} w \geqslant 0, \tag{18.09}$$

*то*

$$F(x) \to \frac{s}{1 + \int_0^\infty K(\xi)\, d\xi}. \tag{18.10}$$

*Обратно, пусть* $K(x)$ *принадлежит* $L$, *пусть*

$$\int_0^\infty K(\xi)\, d\xi \neq -1,$$

*и пусть из* (18.08) *вытекает* (18.10) *для всякой* $F(x)$, *удовлетворяющей нашим условиям. Тогда должно выполняться условие* (18.09).

Вторую часть этой теоремы можно доказать от противного, положив

$$F(x) = e^{w_0 x}, \tag{18.11}$$

где

$$\int_0^\infty K(\xi) e^{-w_0\xi}\, d\xi = -1, \quad \operatorname{Re} w_0 \geqslant 0, \quad w_0 \neq 0. \tag{18.12}$$

Тогда

$$\left|F(x)+\int\limits_0^x K(x-\xi)F(\xi)\,d\xi\right|=\left|e^{w_0x}\int\limits_x^\infty K(\xi)\,e^{-w_0\xi}\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_x^\infty |K(\xi)|\,d\xi\to 0. \qquad (18.13)$$

И, поскольку (18.10), очевидно, не выполняется, вторая часть теоремы доказана.

Первая часть теоремы XVII будет следствием одной теоремы об интегральном уравнении Вольтерра с замкнутым циклом *).

Мы будем пользоваться символом

$$A*B(x) \qquad (18.14)$$

для обозначения свертки двух функций

$$A*B(x)=\int\limits_0^x A(\xi)B(x-\xi)\,d\xi=$$

$$=\int\limits_0^x A(x-\xi)B(\xi)\,d\xi=B*A(x). \qquad (18.15)$$

Хорошо известно **), что (ограниченное и измеримое) решение интегрального уравнения Вольтерра

$$G(x)=F(x)+K*F(x) \qquad (18.16)$$

определяется однозначно и дается формулой

$$F(x)=G(x)+Q*G(x), \qquad (18.17)$$

---

*) Уравнение Вольтерра $f(x)=\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^x K(x, y)f(y)\,dy$ называется *уравнением с замкнутым циклом*, если $K(x, y)=K(x-y)$. См. Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, ИЛ, М., 1960, стр. 37 и след.—*Прим. перев.*

**) Volterra, Leçons sur les Equations Intégrales et les Equations Intégro-Differéntielles, Paris, 1913.

где резольвентное ядро $Q(x)$ само определяется из уравнения

$$Q(x)+K(x)=-K*Q(x)=-Q*K(x), \qquad (18.18)$$

или же формулами

$$Q(x)=\sum_{1}^{\infty}(-1)^n K^n(x), \qquad (18.19)$$
$$K^n(x)=K*K^{n-1}(x), \quad K^1(x)=K(x).$$

Заметим, что решение уравнения (18.18) легко получить, используя преобразование Лапласа *). Обозначим через

$$k(w)=\int_0^{\infty} K(\xi)\,e^{-w\xi}d\xi, \qquad (18.20)$$

$$q(w)=\int_0^{\infty} Q(\xi)\,e^{-w\xi}\,d\xi \qquad (18.21)$$

преобразования Лапласа ядер $K(x)$ и $Q(x)$. Уравнение (18.18) приводится тогда к соотношению

$$q(w)=\frac{-k(w)}{1+k(w)} \qquad (18.22)$$

и $Q(x)$ отыскивается обращением интеграла Лапласа.

Теорему, о которой мы упомянули, можно теперь сформулировать следующим образом:

Теорема XVIII. *Необходимое и достаточное условие того, что $Q(x)$ принадлежит $L$ на* $(0, \infty)$ (*т. е. того, что*

$$\int_0^{\infty} |Q(\xi)|\,d\xi<\infty), \qquad (18.23)$$

*состоит в том, что*

$$k(w)=\int_0^{\infty} K(\xi)\,e^{-w\xi}\,d\xi \neq -1 \quad (\operatorname{Re} w \geqslant 0). \qquad (18.24)$$

---

*) См., например, S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig (русский перевод со второго английского издания: С. Бохнер, Лекции об интегралах Фурье, Физматгиз, 1962), гл. VII. Ссылки на другие источники можно найти там же.

Если эта теорема справедлива, то первая часть теоремы XVII сразу же доказывается. Действительно, при сделанных предположениях имеем

$$F(x)=G(x)+\int_0^x G(x-\xi)\,Q(\xi)\,d\xi. \tag{18.25}$$

Здесь $G(x)$ ограничена во всякой конечной области и $\to s$, когда $\xi\to\infty$. Значит, $G(\xi)$ ограничена на всей полупрямой $(0, \infty)$. Поскольку $Q(\xi)$ интегрируема на $(0, \infty)$, мы можем перейти к пределу под знаком интеграла, когда $x\to\infty$; в результате получим соотношение

$$F(x)\to s+s\int_0^\infty Q(\xi)\,d\xi=s\,[1+q(0)]=s\,[1+k(0)]^{-1}, \tag{18.26}$$

которое и является в точности желаемой формулой (18.10).

Чтобы доказать необходимость условия (18.24), заметим, что если (18.23) выполняется, то $q(w)$ наряду с $k(w)$ будет аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} w>0$ и непрерывной в ней, включая границу $\operatorname{Re} w=0$. Отсюда вытекает, что знаменатель в правой части формулы (18.22) не обращается в нуль при $\operatorname{Re} w\geqslant 0$, так что условие (18.24) выполняется.

Доказательство достаточности условия (18.24) является более трудным. Введем вспомогательные функции:

$$\varphi_A(u)=\begin{cases} 1 & [|u|<A], \\ 2-\dfrac{|u|}{A} & [A\leqslant|u|\leqslant 2A], \\ 0 & [|u|>2A], \end{cases} \tag{18.27}$$

и положим:

$$q^*(w)=\frac{-k(w)}{1+k(w)}, \tag{18.28}$$

$$q^*(iu)=q_1(u)+q_2(u), \tag{18.29}$$

$$q_1(u)=\varphi_A(u)\,q^*(iu), \quad q_2(u)=[1-\varphi_A(u)]\,q^*(iu). \tag{18.30}$$

Мы хотим показать, что при достаточно большом $A$ обе функции $q_1(u)$ и $q_2(u)$ будут преобразованиями Фурье функций, принадлежащих $L$.

Сначала заметим, что

$$q_1(u)=\begin{cases} \dfrac{-\varphi_A(u)\,k(iu)}{\varphi_{2A}(u)+\varphi_{2A}(u)\,k(iu)}, & \text{когда } |u|<2A, \\ 0, \text{ когда } |u|\geqslant 2A. \end{cases} \tag{18.31}$$

Таким образом, $q_1(u)$ является частным двух функций, каждая из которых является преобразованием Фурье функции из $L$ и обращается в нуль вне конечной области, причем функция, стоящая в знаменателе, обращается в нуль только в точках, лежащих внутри области, в которой обращается в нуль функция, стоящая в числителе. Мы можем теперь сослаться на теорию Винера *) и утверждать, что $q_1(u)$ является преобразованием Фурье функции из $L$.

Имеем

$$q_2(u)=[1-\varphi_A(u)]\,\frac{-k(iu)\,[1-\varphi_{A/2}(u)]}{1+k(iu)\,[1-\varphi_{A/2}(u)]}. \tag{18.32}$$

Легко показать, что эта функция является преобразованием Фурье функции из $L$, если это утверждение справедливо для функции

$$-k(iu)\,[1-\varphi_{A/2}(u)]\,\{1+k(iu)\,[1-\varphi_{A/2}(u)]\}^{-1}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\{k(iu)\,[1-\varphi_{A/2}(u)]\}^n. \tag{18.33}$$

Но

$$\{k(iu)\,[1-\varphi_{A/2}(u)]\}^n \tag{18.34}$$

является преобразованием Фурье некоторой функции $h_n(x)$, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h_n(\xi)|\,d\xi\leqslant\Big[\int_{-\infty}^{\infty}|h_1(\xi)|\,d\xi\Big]^n=$$
$$=\Big[\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\,\Big|K(\xi)-\frac{1}{\pi A}K(\eta)\,\frac{\cos\frac{A}{2}(\xi-\eta)-\cos A(\xi-\eta)}{(\xi-\eta)^2}\,d\eta\Big|\Big]^n. \tag{18.35}$$

---

*) N. Wiener, The Fourier Integral and Certain of its Applications, Cambridge, 1933 (русский перевод: Н. Винер, Интеграл Фурье и некоторые его приложения, Физматгиз, М., 1963): леммы $6_7$, $6_{10}$, $6_{18}$.

Рассуждение хорошо известного фейеровского типа показывает, что мы можем выбрать $A$ столь большим, чтобы интеграл в скобках был меньше, чем любое наперед заданное число $\lambda$ из интервала $0 < \lambda < 1$.

Отсюда сразу же следует, что $q_2(u)$ является преобразованием Фурье некоторой функции $F_2(u)$, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_2(\xi)|\, d\xi \leqslant \frac{\lambda}{1-\lambda}. \qquad (18.36)$$

Сопоставляя этот результат с аналогичным результатом для $q_1(u)$, видим, что можно написать

$$q^*(iu) = -\frac{k(iu)}{1+k(iu)} = \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi)\, e^{-iu\xi}\, d\xi,$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E(\xi)|\, d\xi < \infty. \qquad (18.37)$$

Соотношение (18.37) можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{0} E(\xi)\, e^{-iu\xi}\, d\xi = -\int_{0}^{\infty} E(\xi)\, e^{-iu\xi}\, d\xi + q^*(iu). \qquad (18.38)$$

Далее, легко видеть, что $k(w) \to 0$, когда $|w| \to \infty$ равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} w \geqslant 0$. Но так как по предположению $1 + k(w) \neq 0$ при $\operatorname{Re} w \geqslant 0$, то существует такая положительная постоянная $c$, что

$$|1 + k(w)| \geqslant c > 0. \qquad (18.39)$$

Таким образом, функция от $w$

$$-\int_{0}^{\infty} E(\xi)\, e^{-w\xi}\, d\xi + q^*(w) \qquad (18.40)$$

будет аналитической и ограниченной в правой полуплоскости и непрерывной в замкнутой полуплоскости с границей по мнимой оси. Аналогично функция от $w$

$$\int_{-\infty}^{0} E(\xi)\, e^{-w\xi}\, d\xi \qquad (18.41)$$

будет аналитической и ограниченной в левой полуплоскости и непрерывной в замкнутой полуплоскости с границей по мнимой оси. Кроме того, на мнимой оси эти две функции совпадают. Классическое рассуждение Римана — Пэнлеве сразу же показывает, что эти две функции являются частями одной и той же аналитической функции, которая, таким образом, оказывается целой и ограниченной. Следовательно, она сводится к постоянной, а поскольку

$$\int_{-\infty}^{0} E(\xi)\, e^{-w\xi}\, d\xi \to 0, \text{ когда } w \to \infty, \tag{18.42}$$

эта постоянная может быть только нулем. Таким образом,

$$q^*(w) = \frac{-k(w)}{1+k(w)} = \int_{0}^{\infty} E(\xi)\, e^{-w\xi}\, d\xi. \tag{18.43}$$

С другой стороны, из (18.19) сразу же следует, что существует такое число $w_0 > 0$, что

$$\frac{-k(w)}{1+k(w)} = \int_{0}^{\infty} Q(\xi)\, e^{-w\xi}\, d\xi \quad (\operatorname{Re} w > w_0) \tag{18.44}$$

и

$$\int_{0}^{\infty} |Q(\xi)|\, e^{-w_0\xi}\, d\xi < \infty. \tag{18.45}$$

По теореме единственности для преобразования Лапласа заключаем, что $E(x)\, e^{-wx}$ и $Q(x)\, e^{-wx}$ совпадают почти всюду и, значит, $Q(x)$ принадлежит $L$.

В этом доказательстве мы воспользовались теоремой Винера *), которая утверждает, что если функция $f(x)$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье и не обращается в нуль, то функция $1/f(x)$ также разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье. П. Леви **) показал, что эти же методы достаточны для доказательства следующей

*) Цит. соч., лемма $6_{16}$.

**) P. Lévi, Sur le convergence absolue des séries de Fourier, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, vol. 196 (1933), стр. 463.

теоремы: если функция $f(x)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье и если $\Phi$ аналитична в области значений функции $f(x)$, то $\Phi[f(x)]$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье. Методами, не отличающимися существенно от методов этой работы, мы можем обобщить эту теорему следующим образом: *если $f(x)$ является преобразованием Фурье функции из $L$, а $\Phi(u)$ аналитична в области значений $f(x)$, включая* 0, *то*

$$\Phi[f(x)]$$

*является преобразованием Фурье функции из $L$.*

**19. Теорема Харди.** Харди*) доказал следующую теорему:

Теорема XIX. *Пусть $f(x)$ измерима, и пусть*

$$f(x)=O(|x|^n e^{-x^2/2}), \text{ когда } x \to \pm\infty. \tag{19.01}$$

*Положим*

$$g(u)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iux}\,dx. \tag{19.02}$$

*Если*

$$g(u)=O(|u|^n e^{-u^2/2}), \text{ когда } u \to \pm\infty, \tag{19.03}$$

*то $f(x)$ имеет вид $P(x)e^{-x^2/2}$, где $P(x)$ — некоторый полином степени, не превосходящей $n$.*

Мы докажем эту теорему методами, аналогичными методам, которые мы уже употребляли в этой главе. Мы можем, очевидно, разбить $f(x)$ на четную и нечетную части и рассматривать их по отдельности. Доказательства в этих двух случаях протекают вполне параллельно, и поэтому мы ограничимся четным случаем. В этом случае

$$g(u)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos ux\,dx. \tag{19.04}$$

---

*) G. H. Hardy, A theorem concerning Fourier transforms, Journal of the London Mathematical Society, vol. 8 (1933), стр. 227—231.

Кроме того, при $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$

$$\left|\int_0^\infty g(u)\, u^{z-1/2}\, du\right| \leqslant A \int_0^\infty u^{\operatorname{Re} z-1/2+n} e^{-u^2/2}\, du =$$

$$= A \int_0^\infty (2v)^{(\operatorname{Re} z-3/2+n)/2} e^{-v}\, dv =$$

$$= A\cdot 2^{(\operatorname{Re} z+n)/2-3/4}\, \Gamma\left(\frac{\operatorname{Re} z+n}{2}+\frac{1}{4}\right), \qquad (19.05)$$

где $A$ представляет различные постоянные.

Аналогично

$$\left|\int_0^\infty f(x)\, x^{z-1/2}\, dx\right| \leqslant \text{const}\cdot 2^{(\operatorname{Re} z+n)/2-3/4} \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{\operatorname{Re} z+n}{2}+\frac{1}{4}\right), \quad \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}. \qquad (19.06)$$

Используя предположение теоремы, имеем

$$\int_0^\infty g(u)\, u^{z-1/2}\, du = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon u} g(u)\, u^{z-1/2}\, du =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty e^{-\varepsilon u}\, u^{z-1/2}\, du \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty f(x) \cos ux\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty f(x)\, dx \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty \cos ux\, u^{z-1/2} e^{-\varepsilon u}\, du. \qquad (19.07)$$

Но

$$\int_0^\infty \cos ux\, u^{z-1/2} e^{-\varepsilon u}\, du = x^{-z-1/2} \int_0^\infty \cos y\, y^{z-1/2} e^{-\varepsilon y/x}\, dy =$$

$$= x^{-z-1/2} \int_0^\infty \frac{1}{2} \left[e^{-y(-i+\varepsilon/x)} + e^{-y(i+\varepsilon/x)}\right] y^{z-1/2}\, dy. \qquad (19.08)$$

Пользуясь тем, что интеграл по замкнутому контуру равен нулю, имеем

$$\int_0^\infty e^{-y(-i+\varepsilon/x)}\, y^{z-1/2}\, dy = \int_0^{\infty(-i+\varepsilon/x)} e^{-y(-i+\varepsilon/x)}\, y^{z-1/2}\, dy =$$

$$= \left(-i+\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-z-1/2} \int_0^\infty e^{-w}\, w^{z-1/2}\, dw =$$

$$= \left(-i+\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-z-1/2} \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right). \qquad (19.081)$$

Аналогично

$$\int_0^\infty e^{-y\,(i+\varepsilon/x)}\, y^{z-1/2}\, dy = \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(i+\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-z-1/2}. \qquad (19.082)$$

Таким образом,

$$\int_0^\infty \cos ux\, u^{z-1/2}\, e^{-\varepsilon u}\, du =$$

$$= x^{-z-1/2}\, \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\left[\left(-i+\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-z-1/2} + \left(i+\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-z-1/2}\right] =$$

$$= x^{-z-1/2}\, \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(z+1/2)}{2} \lg\left(1+\frac{\varepsilon^2}{x^2}\right)\right\} \cos\left\{\left(z+\frac{1}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}\right\}. \qquad (19.083)$$

Поэтому для чисто мнимого $z$ и $x > 0$ имеем

$$\left|\int_0^\infty \cos ux\, u^{z-1/2}\, e^{-\varepsilon u}\, du\right| \leqslant x^{-1/2}\, e^{\pi\,|z|/2} \left|\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\right|. \qquad (19.09)$$

Таким образом, по теореме о мажорированной сходимости имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty f(x)\, dx \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty \cos ux\, u^{z-1/2}\, e^{-\varepsilon u}\, du =$$

$$= \int_0^\infty f(x)\, x^{-z-1/2}\, dx \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \cos\frac{\pi}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right). \qquad (19.10)$$

Используя (19.07), получим

$$\int_0^\infty g(u)\,u^{z-1/2}\,du=\int_0^\infty f(x)\,x^{-z-1/2}\,dx\times$$
$$\times\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right). \qquad (19.11)$$

В частности,

$$\int_0^\infty e^{-u^2/2}\,u^{z-1/2}\,du=$$
$$=\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,x^{-z-1/2}\,dx\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\cos\frac{\pi}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right). \qquad (19.12)$$

Но

$$\int_0^\infty e^{-u^2/2}\,u^{z-1/2}\,du=2^{z/2-3/4}\,\Gamma\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{4}\right). \qquad (19.13)$$

Таким образом,

$$\frac{z^{-z/2}\int_0^\infty g(u)\,u^{z-1/2}\,du}{\Gamma\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{4}\right)}=\frac{2^{z/2}\int_0^\infty f(x)\,x^{-z-1/2}\,dx}{\Gamma\left(-\frac{z}{2}+\frac{1}{4}\right)}. \qquad (19.14)$$

Обозначим эту функцию $F(z)$. Из оценок (19.05) и (19.06) ясно, что эта функция целая и что в правой полуплоскости

$$|F(z)|\leqslant \text{const.}\,|z|^{n/2}\exp(\pi\,|\operatorname{Im} z|/4). \qquad (19.15)$$

Тем же способом можно доказать, что оценка (19.15) выполняется в левой полуплоскости и, значит, во всей плоскости.

Рассмотрим теперь функцию $F(z)$ на положительной части мнимой оси. Здесь

$$|F(iy)|=\frac{\left|\int_0^\infty g(u)\,e^{iy-1/2}\,du\right|}{\left|\Gamma\left(\frac{iy}{2}+\frac{1}{4}\right)\right|}\sim Ay^{1/4}\,e^{\pi y/4}\left|\int_0^\infty g(u)\,u^{iy-1/2}\,du\right|\sim$$

$$\sim Ay^{1/4}\left|\int\limits_0^{\infty\exp(-\pi i/4+\varepsilon i)} g\left(u\exp i\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)\right)u^{iy-1/2}\,du\right|e^{\varepsilon y}. \tag{19.16}$$

Но

$$|g(ue^{i\theta})|=\left|\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(ixue^{i\theta})\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant A\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^n\exp\left(-\frac{x^2}{2}+ixue^{i\theta}\right)dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant A\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|^n\exp\left(-\frac{1}{2}(x-iue^{i\theta})^2\right)dx\exp\left(\frac{-u^2e^{2i\theta}}{2}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left[A\int\limits_0^{\infty}|x+iue^{i\theta}|^n e^{-x^2/2}\,dx+A\int\limits_0^{\infty}|x-iue^{i\theta}|^n e^{-x^2/2}\,dx\right]\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{u^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\varepsilon\right)\right]\leqslant$$

$$\leqslant A(1+|u|^n)\exp\left(-O(1)\frac{u^2}{2}\right)$$

$$\left[-\frac{\pi}{4}+\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right]. \tag{19.17}$$

Таким образом, в силу (19.16) и (19.17) имеем

$$|F(iy)|\sim\text{const.}\,y^{1/4}\left|\int\limits_0^{\infty} g\left(u\exp\left(i\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)\right)\right)u^{iy-1/2}\,du\right|e^{\varepsilon y}, \tag{19.18}$$

где интеграция производится вдоль вещественной оси. Отсюда

$$|F(iy)|=O(e^{\varepsilon y}),\quad |F(-iy)|=O(e^{\varepsilon y}) \tag{19.19}$$

при всех $\varepsilon$. Значит, в силу оценки (19.15) по теореме Фрагмена — Линделёфа имеем

$$F(z)=O(e^{\varepsilon_1|z|}), \tag{19.20}$$

если $\varepsilon_1 > \varepsilon$. Отсюда следует, что $F(z)$ должна либо быть полиномом, либо иметь бесконечное число нулей, ибо в противном случае $F(z)$ имела бы вид $e^{az}$, что противоречит оценке (19.18). Таким образом, если $F(z)$ не является полиномом, то мы можем удалить более чем $n/2+1$ ее нулей и получить некоторую целую функцию $G(z)$, которая принадлежит $L_2$ на вещественной оси и удовлетворяет оценке

$$G(z) = O(e^{\varepsilon |z|}) \qquad (19.21)$$

при любом $\varepsilon$. Это, однако, невозможно в силу теоремы XI. Таким образом, $F(z)$ является полиномом, и, как таковой, она не может в силу (19.15) иметь степень, большую $n/2$. Отсюда

$$\int_0^\infty f(x)\, x^{-z-1/2}\, dx = F(z)\,\Gamma\left(-\frac{z}{2}+\frac{1}{4}\right) 2^{-z/2} \qquad (19.22)$$

и во всякой конечной области

$$f(x) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} F(iu)\,\Gamma\left(-\frac{iu}{2}+\frac{1}{4}\right) 2^{-iu/2}\, x^{iu-\frac{1}{2}}\, du =$$

$$= \sum_0^{\left[\frac{n}{2}\right]} d_k \left(x\frac{d}{dx}\right)^k e^{-x^2/2} = \sum_0^{\left[\frac{n}{2}\right]} c_k\, x^{2k}\, e^{-x^2/2}. \qquad (19.23)$$

Здесь мы пользуемся математической индукцией на основе соотношения

$$x\frac{d}{dx}\left(x^n e^{-x^2/2}\right) = \left(nx^n - x^{n+2}\right) e^{-x^2/2}. \qquad (19.24)$$

## ГЛАВА V

# ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

**20. Классические теоремы о целых функциях.** Пусть $f(z)$ — целая функция, т. е. функция, не имеющая особенностей во всей комплексной плоскости. Она называется функцией конечного порядка, если существует такое положительное число $A$, что

$$f(z) = O(e^{r^A}), \tag{20.01}$$

когда $z = re^{i\theta}$ стремится к бесконечности. Нижняя грань чисел $A$, для которых эта оценка справедлива, называется *порядком* функции $f(z)$. В этой книге основное внимание мы уделим функциям $f(z)$ порядка 1, т. е. функциям, для которых

$$f(z) = O(e^{r^{1+\varepsilon}}) \tag{20.02}$$

при $\varepsilon > 0$, и, в частности, еще более узкому классу функций экспоненциального типа, для которых существует такое $A$, что

$$f(z) = O(e^{rA}). \tag{20.03}$$

В этих случаях мы можем написать

$$f(z) = z^m e^{cz} B \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{z/\lambda_n} \tag{20.04}$$

по хорошо известной теореме Адамара *). В частности, если $f(z)$ четная, мы можем перемножить попарно

*) Е. Титчмарш, цит. соч., стр. 284.

множители в (20.04) и получить

$$f(z)=z^{2m}B\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \tag{20.05}$$

а если $f(z)$ нечетная, то

$$f(z)=z^{2m+1}B\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right). \tag{20.06}$$

Если $f(z)$ четная, то имеем

$$\frac{\lg\{|f(z)|\,|z|^{-2m}\}}{|z|}\leqslant\frac{\lg|B|}{|z|}+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|z|}\lg\left(1+\frac{|z|^2}{|\lambda_n|^2}\right). \tag{20.07}$$

Обозначим $\lambda(r)$ число нулей $\lambda_n$, не превосходящих $r$ по модулю. Тогда

$$\frac{\lg\{|f(z)|\,z^{-2m}|\}-\lg|B|}{|z|}\leqslant\frac{1}{|z|}\int_0^{\infty}\lg\left(1+\frac{|z|^2}{u^2}\right)d\lambda(u)=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left\{\frac{1}{|z|}\lg\left(1+\frac{|z|^2}{A^2}\right)\lambda(A)+\frac{2}{|z|}\int_0^A\frac{\frac{\lambda(u)}{u}\,\frac{|z|^2}{u^2}}{1+\frac{|z|^2}{u^2}}du\right\}. \tag{20.08}$$

Отсюда вытекает, что

$$\overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{\lg|f(z)|}{z}\leqslant\pi\,\overline{\lim_{u\to\infty}}\frac{\lambda(u)}{u}. \tag{20.09}$$

С другой стороны, по теореме Йенсена, если

$$\lim_{z\to 0}f(z)\,z^{-2m}=B\neq 0, \tag{20.10}$$

то имеем

$$\int_0^r\frac{2\lambda(x)}{x}dx=2\sum_{1}^{n}\lg\frac{r}{|\lambda_k|}=2\lg\frac{r^n}{|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n|}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg|f(re^{i\theta})\,r^{-2m}e^{-2im\theta}|\,d\theta-\lg|B|, \tag{20.11}$$

где $n=\lambda(r)$. Таким образом,

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^r\frac{2\lambda(x)}{x}\,dx=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\lg|f(re^{j\theta})|\,d\theta\leqslant\varlimsup_{z\to\infty}\frac{\lg|f(z)|}{|z|}\tag{20.12}$$

и

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_{r/2}^r\frac{2\lambda(x)}{x}\,dx\leqslant\varlimsup_{z\to\infty}\frac{\lg|f(z)|}{|z|}.\tag{20.13}$$

Поскольку $\lambda$ не убывает, это неравенство дает нам

$$\frac{1}{\lg 2}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_r^{2r}\lambda(r)\frac{dx}{x}=\varlimsup_{u\to\infty}\frac{\lambda(u)}{u}\leqslant\frac{1}{\lg 2}\varlimsup_{z\to\infty}\frac{\lg|f(z)|}{|z|}.\tag{20.14}$$

Сопоставляя эту оценку с оценкой (20.09) получаем теорему:

Теорема XX. *Если $f(z)$ — четная целая функция порядка 1, то $\lambda(u)/u$ ограничена на бесконечности тогда и только тогда, когда $(\lg|f(z)|)/|z|$ ограничена на бесконечности; определение функции $\lambda(u)$ дано в строке, следующей за формулой* (20.07).

Основная цель этой главы — доказать следующую, гораздо более глубокую, теорему того же характера:

Теорема XXI. *Пусть $f(z)$ — четная целая функция, равная 1 в начале координат. Пусть*

$$\int_0^{\infty}\frac{\lg^+|f(x)|\,dx}{x^2}<\infty,\tag{20.15}$$

*где интеграл берется вдоль вещественной оси, и пусть*

$$\varlimsup_{z\to\infty}\frac{1}{|z|}\lg|f(z)|<\infty.\tag{20.16}$$

*Пусть $\pm z_n$ — нули функции $f(z)$. Положим*

$$f_1(z)=\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{|z_n|^2}\right).$$

*Тогда существует предел*

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\lambda(u)}{u}=A, \tag{20.17}$$

*причем*

$$A=-\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\lg f_1(x)}{x^2}\,dx. \tag{20.18}$$

*В частности, это будет иметь место, если*

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx<\infty, \tag{20.19}$$

*где интеграл берется вдоль вещественной оси. При этом будем иметь*

$$f(z)=\int_0^{\pi L}\cos uz\,\varphi(u)\,du \quad (L>0), \qquad (20.20)\,{}^{*)}$$

*где $\varphi(u)$ не эквивалентна нулю ни на каком из интервалов $(\pi L-\varepsilon,\ \pi L)$.*

Условие (20.15) можно заменить условием

$$\int_0^\infty \lg^+ m_f(r)\frac{dr}{r^2}<\infty, \tag{20.21}$$

где $m_f(r)$ равно

$$\min_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f(re^{i\theta})|.$$

**21. Тауберова теорема о целых функциях.** В доказательстве теоремы XXI важное место занимает следующая теорема:

Теорема XXII. *Пусть $\{\lambda_n\}$ — монотонная последовательность положительных чисел такая, что ряд $\sum_1^\infty \lambda_n^{-2}$ сходится. Положим*

$$\varphi(z)=\prod_1^\infty\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right). \tag{21.01}$$

---

*) Ср. с (6.08) и теоремой X.

*Тогда утверждения*

$$\lg \varphi(iy) \sim \pi A |y| \text{ при } y \to \pm\infty \tag{21.02}$$

*и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lg |\varphi(x)| x^{-2}\, dx = -\pi^2 A \tag{21.03}$$

*полностью эквивалентны.*

Чтобы доказать это, заметим, что если $\lambda(t)$ является числом нулей $\lambda_n$, не превосходящих $t$, и $y > 0$, то

$$(\pi y)^{-1} \lg \varphi(iy) = (\pi y)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \lg\left(1 + \frac{y^2}{\lambda_n^2}\right) =$$

$$= (\pi y)^{-1} \int_0^{\infty} \lg\left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right) d\lambda(t). \tag{21.04}$$

Аналогично

$$-\pi^{-2} \int_{-y}^{y} \lg|\varphi(x)| x^{-2}\, dx = -2\pi^{-2} \int_0^y x^{-2}\, dx \int_0^{\infty} \lg\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| d\lambda(t) =$$

$$= -2\pi^{-2} \int_0^{\infty} d\lambda(t) \int_0^y \lg\left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| x^{-2}\, dx =$$

$$= -2\pi^{-2} y^{-1} \int_0^{\infty} d\lambda(t) \frac{y}{t} \int_0^{y/t} \lg|1 - s^2| s^{-2}\, ds. \tag{21.05}$$

Оба выражения (21.04) и (21.05) имеют вид

$$\frac{1}{y} \int_0^{\infty} N\left(\frac{t}{y}\right) d\lambda(t), \tag{21.06}$$

где $\lambda(t)$ — монотонно возрастающая функция. В (21.04) имеем

$$N(\lambda) = N_1(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lg\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{21.07}$$

тогда как в (21.05)

$$N(\lambda)=N_2(\lambda)=-\frac{2}{\pi^2\lambda}\int_0^{1/\lambda}\lg|1-x^2|\,x^{-2}\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\left\{\lg\left|1-\frac{1}{\lambda^2}\right|+\frac{1}{\lambda}\lg\left|\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right|\right\}. \qquad (21.08$$

Функция $N_1(\lambda)$ положительна и монотонно убывает То же самое верно и для $N_2(\lambda)$, поскольку

$$N_2'(\lambda)=-\frac{2}{\pi\lambda^2}\lg\left|\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right|<0. \qquad (21.09$$

Обозначив через $N(\lambda)$ любую из функций $N_1(\lambda)$ $N_2(\lambda)$, легко установить следующие свойства:

$$N(\lambda)=\begin{cases} O(\lg 1/\lambda), & \text{когда } \lambda\to 0; \\ O(1/\lambda^2), & \text{когда } \lambda\to\infty; \end{cases} \qquad (21.10$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\max_{2^k\leqslant\lambda\leqslant 2^{k+1}}\lambda N(\lambda)<\infty, \quad N(\lambda)>0. \qquad (21.11$$

Кроме того,

$$\int_0^\infty N_1(\lambda)\lambda^{it}\,d\lambda=\frac{1}{\pi(it+1)}\int_0^\infty\frac{\mu^{(it-1)/2}}{1+\mu}\,d\mu=\frac{1}{(it+1)\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}} \qquad (21.12)$$

и

$$\int_0^\infty N_2(\lambda)\lambda^{it}\,dt=\frac{2}{\pi^2(it+1)}\int_0^\infty\lambda^{it-1}\lg\left|\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right|d\lambda=$$

$$=\frac{2}{\pi^2(it+1)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi it}{2}}{\pi it(it+1)}. \qquad (21.13)$$

Отсюда следует, что при вещественном $t$

$$\int_0^\infty N(\lambda)\lambda^{it}\,d\lambda\neq 0 \qquad (21.14)$$

и что

$$\int_0^\infty N(\lambda)\,d\lambda = 1. \qquad (21.15)$$

Наконец, при $y \to 0$

$$\lim \frac{1}{y} \int_0^\infty N_1\left(\frac{t}{y}\right) d\lambda(t) = \lim (\pi y)^{-1} \lg \varphi(iy) = 0 \qquad (21.16)$$

и

$$\lim \frac{1}{y} \int_0^\infty N_2\left(\frac{t}{y}\right) d\lambda(t) = \lim\left( -\pi^2 \int_{-y}^{y} \lg|\varphi(x)|\, x^{-2}\,dx \right) = 0. \qquad (21.17)$$

Таким образом, любое из утверждений

$$\frac{1}{y} \int_0^\infty N_i\left(\frac{t}{y}\right) d\lambda(t) \to A \quad \text{при} \quad y \to \infty \qquad (i = 1, 2) \qquad (21.18)$$

влечет за собой ограниченность соответствующего интеграла

$$\frac{1}{y} \int_0^\infty N_i\left(\frac{t}{y}\right) d\lambda(t) \qquad (21.19)$$

в области $(0, \infty)$. Непосредственное применение одной из тауберовых теорем Винера*) показывает теперь, что утверждения (21.18) полностью эквивалентны, что и составляет как раз результат теоремы XXII.

Перейдем теперь к доказательству теоремы XXI. Согласно теореме XX, если мы заменим каждую пару нулей функции $f(x)$, отличающихся друг от друга только знаком, другой парой нулей с тем же абсолютным значением, но вещественных, превратив тем самым функцию

$$f(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{z_\nu^2}\right) \qquad (21.20)$$

*) N. Wiener, Tauberian theorems, Annales of Mathematics, (2), vol. 33 (1932), стр. 1—100; теорема XI, стр. 30.

в функцию

$$f_1(z)=\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{|z_\nu|^2}\right), \tag{21.21}$$

мы заведомо не повлияем на справедливость соотношения (20.14), ибо при вещественных $x$

$$\lg\left|1-\frac{x^2}{|z_\nu^2|}\right|\leqslant \lg\left|1-\frac{x^2}{z_\nu^2}\right|; \tag{21.22}$$

точно так же мы не повлияем на справедливость неравенства (20.19). Если $\lambda(u)$ — число нулей $z_\nu$, не превосходящих $u$ по модулю, то наше преобразование не влияет на $\lambda(u)$, так что по теореме XX оценка (20.13) остается справедливой. Таким образом, при доказательстве теоремы мы имеем право заменить $f(z)$ на $f_1(z)$ и считать, что все $z_n$ вещественны и положительны. Мы будем предполагать, что

$$0<z_1\leqslant z_2\leqslant \ldots, \tag{21.23}$$

где разумеется

$$\sum_1^{\infty} z_\nu^{-2}<\infty. \tag{21.24}$$

Имеем

$$\frac{\lambda(u)}{u}=\frac{1}{u}\int_0^u d\lambda(v)=\frac{1}{u}\int_0^{\infty}K_1\left(\frac{v}{u}\right)d\lambda(v) \tag{21.25}$$

и

$$\frac{1}{\pi y}\lg f_1(iy)=\frac{1}{\pi y}\sum_0^{\infty}\lg\left(1+\frac{y^2}{z_\nu^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi y}\int_0^{\infty}\lg\left(1+\frac{y^2}{v^2}\right)d\lambda(v)=\frac{1}{y}\int_0^{\infty}K_2\left(\frac{v}{y}\right)d\lambda(v), \tag{21.26}$$

где (ср. (21.12))

$$K_1(u)\geqslant 0;\qquad K_2(u)\geqslant 0;\qquad \int_0^{\infty}K_1(v)\,v^{iw}\,dv=\frac{1}{iw+1}\neq 0;$$

$$\int\limits_0^\infty K_1(v)\,dv = 1; \quad \int\limits_0^\infty K_2(v)\,v^{iw}\,dv = \frac{1}{(iw+1)\operatorname{ch}(\pi w/2)} \neq 0:$$

$$\int\limits_0^\infty K_2(v)\,dv = 1. \tag{21.27}$$

Таким образом, по другой теореме Винера *) соотношения

$$\frac{1}{y}\lg f_1(iy) \sim A\pi \tag{21.28}$$

и

$$\lambda(u) \sim Au \tag{21.29}$$

полностью эквивалентны. Это утверждение является также одним из результатов Титчмарша **). Таким образом, мы должны установить всего лишь равенство (21.28) или, согласно теореме XXII, равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lg|f_1(x)|\,x^{-2}\,dx = -\pi^2 A. \tag{21.30}$$

Мы уже знаем, что

$$\lg^+|f_1(w)| = O(|w|) \tag{21.31}$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lg^+|f_1(u)|\,u^{-2}\,du < \infty, \tag{21.32}$$

как это следует из непосредственной выкладки. Из (21.31) вытекает, что отношение $\lambda(t)/t$ ограничено. Отсюда

---

*) N. Wiener, A new method in Tauberian theorems, Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institute of Technology, vol. 7 (1928), стр. 161—184. Эта теорема не сформулирована здесь в форме, применимой к интегралу Стилтьеса, однако приведенное доказательство, по существу, не зависит от этой формы.

**) E. C. Titchmarsh, On integral functions with real negative zeros, Proceedings of the London Mathematical Society, (2), vol. 26 (1927), стр. 185—200.

в силу (21.05) и (21.09)

$$\int_{-y}^{y} \lg |f_1(u)| u^{-2}\, du = -\frac{\pi^2}{y} \int_0^\infty N_2\left(\frac{t}{y}\right) d\lambda(t) =$$

$$= \frac{\pi^2}{y} \int_0^\infty \lambda(t)\, d_t N_2\left(\frac{t}{y}\right) = -2 \int_0^\infty t^{-2} \lambda(t) \lg \left| \frac{y+t}{y-t} \right| dt =$$

$$= O\left\{ \int_0^y \frac{dt}{t} \lg \left| \frac{1+t/y}{1-t/y} \right| + \int_y^\infty \frac{dt}{t} \lg \left| \frac{1+t/y}{1-t/y} \right| \right\} = O(1). \quad (21.33)$$

Сопоставляя эту оценку с неравенством (21.32), получаем

$$\int_{-y}^{y} \lg^- |f_1(u)| u^{-2}\, du = O(1), \qquad (21.34)$$

где интеграл берется вдоль вещественной оси. Таким образом, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lg^- |f_1(u)| u^{-2}\, du < \infty. \qquad (21.35)$$

Это неравенство вместе с неравенством (21.32) дает соотношение (21.30). Мы будем, очевидно, иметь

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\lambda(u)}{u} = A, \qquad (21.36)$$

откуда сразу же следует (20.16).

Обратимся теперь к общему случаю, данному в посылке теоремы XXI, когда не все нули функции $f(x)$ вещественны. Согласно оценке (20.13)

$$\lambda(u) = O(u). \qquad (21.37)$$

С другой стороны,

$$\int_0^\infty \frac{\lg^+ |f(x)|}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \lg^+ \left| \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x^2}{z_\nu^2}\right) \right| dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \lg^+ \left| \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x^2}{|z_\nu|^2}\right) \right| dx = \int_0^\infty \frac{\lg^+ |f_1(x)|\, dx}{x^2}. \qquad (21.38)$$

Отсюда следует, что предел

$$A = \lim_{u\to\infty} \frac{\lambda(u)}{u} \leqslant \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{|\lg|f_1(x)||}{x^2}\, dx \tag{21.39}$$

существует.

**22. Условие, при котором нули целой функции являются вещественными.** Мы хотим доказать теорему:

Теорема XXIII. *Пусть $f(z)$ — четная целая функция порядка, не превосходящего 1, и пусть $2\lambda(r)$ — число ее нулей $\pm z_n$, лежащих в круге радиуса $r$ с центром в начале координат. Пусть*

$$\lambda(r) \sim Br \quad (r \to \infty). \tag{22.01}$$

*При этих условиях все нули $f(z)$ будут вещественными тогда и только тогда, когда*

$$B = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lg|f(x)|}{x^2}\, dx. \tag{22.02}$$

В силу теоремы XXII и соотношений (21.28), (21.29) мы должны доказать лишь, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \lg\left|\prod_1^\infty \left(1-\frac{u^2}{z_\nu^2}\right)\right| - \lg\left|\prod_1^\infty \left(1-\frac{u^2}{|z_\nu|^2}\right)\right| \right] u^{-2}\, du = 0 \tag{22.03}$$

тогда и только тогда, когда каждое из $z_\nu$ вещественно. Но если какое-либо из $z_\nu$ не является вещественным, то мы будем иметь

$$\lg\left|\prod_1^\infty \left(1-\frac{u^2}{z_\nu^2}\right)\right| - \lg\left|\prod_1^\infty \left(1-\frac{u^2}{|z_\nu|^2}\right)\right| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lg \frac{|z_\nu^2 - u^2|}{||z_\nu|^2 - u^2|} > 0 \tag{22.04}$$

при вещественных $u$, что несовместимо с (22.03).

**23. Теорема о дзета-функции Римана.** Приступим к доказательству теоремы:

Теорема XXIV. *Пусть числа $\lambda_n$ вещественны и положительны, и пусть ряд $\Sigma 1/\lambda_n^2$ сходится. Положим*

$$\varphi(w)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{w^2}{\lambda_\nu^2}\right). \tag{23.001}$$

*Тогда утверждения*

$$\lg\varphi(iy)\sim\pi A\,|y|\lg|y| \text{ при } y\to\infty \tag{23.01}$$

*и*

$$\int_{-y}^{y}\lg|\varphi(x)|\,x^{-2}\,dx\sim-\pi^2 A\lg|y| \tag{23.02}$$

*полностью эквивалентны.*

Пусть $y>0$; воспользуемся ядрами $N_1(\lambda)$, $N_2(\lambda)$ предыдущего параграфа. Тогда соотношения (23.01) и (23.02) можно заменить соответственно соотношениями:

$$(y\lg y)^{-1}\int_0^{\infty}N\left(\frac{t}{y}\right)d\lambda(t)\to A;\quad N=N_1(\lambda),\ N_2(\lambda). \tag{23.03}$$

Заметим теперь, что каждое из соотношений (23.03) влечет оценку

$$\lambda(y)=O(y\lg y). \tag{23.04}$$

Действительно, если (23.03) выполнено, то

$$O(1)\geqslant(y\lg y)^{-1}\int_0^{y}N\left(\frac{t}{y}\right)d\lambda(t)=$$

$$=N(1)(y\lg y)^{-1}\lambda(y)-(y\lg y)^{-1}\int_0^{y}\lambda(t)\,d_tN\left(\frac{t}{y}\right)>$$

$$>N(1)\lambda(y)(y\lg y)^{-1}, \tag{23.05}$$

поскольку $N(\lambda)$ положительно и убывает. Докажем теперь, что при условии (23.04) соотношение (23.03) эквивалентно соотношению

$$\frac{1}{y}\int_0^{\infty}N\left(\frac{t}{y}\right)d\Lambda^*(t)\to A;\quad N(\lambda)=N_1(\lambda),\ N_2(\lambda), \tag{23.06}$$

где

$$\Lambda^*(y) = \int_0^y (\lg t)^{-1} \, d\lambda(t) \tag{23.07}$$

в смысле главного значения Коши.

Не внося существенного ограничения, мы можем считать, что $\lambda(t)$ непрерывна в точке 1. Из (23.04) и (23.07) сразу же видно, что $\Lambda^*(y)$ обращается в нуль при достаточно малых $y$ и что

$$\Lambda^*(y) = O(y) \text{ при } y \to \infty. \tag{23.08}$$

Далее, разность между левыми частями соотношений (23.06) и (23.03) равна

$$I(y) = \frac{1}{y} \int_0^\infty N\left(\frac{t}{y}\right) \left(\frac{1}{\lg t} - \frac{1}{\lg y}\right) d\lambda(t) =$$

$$= (y \lg y)^{-1} \int_0^\infty N\left(\frac{t}{y}\right) \lg \frac{y}{t} \, d\Lambda^*(t) =$$

$$= -(y \lg y)^{-1} \int_0^\infty \Lambda^*(t) \, d_t \left[N\left(\frac{t}{y}\right) \lg \frac{y}{t}\right] =$$

$$= O\left\{(\lg y)^{-1} \int_0^\infty t \frac{d}{dt}\left[N(t) \lg \frac{1}{t}\right] dt\right\} = O\left(\frac{1}{\lg y}\right), \tag{23.09}$$

что стремится к нулю, когда $y \to \infty$ или $y \to 0$. Та же самая теорема Винера, которая была применена при доказательстве теоремы XXII, сразу же показывает эквивалентность двух утверждений (23.06); поэтому эквивалентны и два утверждения (23.03), а значит, эквивалентны и (23.01) и (23.02).

Чтобы применить теорему XXIV к теории дзета-функции Римана, введем функцию

$$\Xi(z) = \xi\left(\frac{1}{2} + iz\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + iz\right)\left(\frac{1}{2} - iz\right) \pi^{-1/4 - iz/2} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{iz}{2}\right) \zeta\left(\frac{1}{2} + iz\right). \tag{23.10}$$

Известно, что $\Xi(z)$ — четная целая функция, все нули которой лежат в полосе $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2}$ *). Кроме того,

$$\lg \Xi(iy) = O(y) + \lg \Gamma(y/2) \sim \frac{1}{2}\, y \lg y, \tag{23.11}$$

$$\Xi(z) = c \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{z_\nu^2}\right), \quad \sum_{1}^{\infty} |z_\nu|^{-2} < \infty, \quad c = \Xi(0). \tag{23.12}$$

Положим

$$z_\nu = z'_\nu + iz''_\nu, \quad z'_\nu > 0, \quad |z''_\nu| < \frac{1}{2}, \quad |z_\nu| = \lambda_\nu \tag{23.13}$$

и

$$H(z) = c \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_\nu^2}\right). \tag{23.14}$$

На мнимой оси имеем

$$\lg \frac{|H(iy)|}{|\Xi(iy)|} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \lg \left| \frac{z_\nu^2 + y^2}{\lambda_\nu^2 + y^2} \right| =$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{\infty} \lg \left| 1 + \frac{z_\nu^2 - \lambda_\nu^2}{\lambda_\nu^2 + y^2} \right| = O(1). \tag{23.15}$$

Таким образом, при $y > 0$ в силу (23.11) имеем

$$\lg H(iy) \sim \frac{1}{2}\, y \lg y \tag{23.16}$$

и по теореме XXIV

$$(\lg y)^{-1} \int_{-y}^{y} \lg |c^{-1} H(x)|\, x^{-2}\, dx \to -\frac{\pi}{2}, \text{ когда } y \to \infty. \tag{23.17}$$

---

*) Ср. A. E. Ingham, The distribution of Primes, Cambridge Tract in Mathematics and Mathematical Physics, № 30, гл. III, § 7 (русский перевод: А. Е. Ингам, Распределение простых чисел, ОНТИ, 1936).

Далее, на вещественной оси

$$\left|1-\frac{x^2}{z_\nu^2}\right| \geqslant \left|1-\frac{x^2}{\lambda_\nu^2}\right|, \tag{23.18}$$

откуда

$$\lg\left|\frac{1-x^2/z_\nu^2}{1-x^2/\lambda_\nu^2}\right| \geqslant 0. \tag{23.19}$$

Кроме того,

$$0 \leqslant I_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \lg\left|\frac{1-x^2/z_\nu^2}{1-x^2/\lambda_\nu^2}\right| x^{-2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda_\nu}\int_{-\infty}^{\infty} \lg\left|\frac{1-t^2 e^{iO(1/\lambda_\nu)}}{1-t^2}\right| t^2\,dt = O\left(\frac{1}{\lambda_\nu^2}\right). \tag{23.20}$$

Интегрируя почленно, получим

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} \lg\left|\frac{\Xi(x)}{H(x)}\right| x^{-2}dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} I_\nu < \infty. \tag{23.21}$$

Тогда согласно (23.17)

$$(\lg y)^{-1}\int_{-y}^{y} \lg|c^{-1}\Xi(x)|\,x^{-2}\,dx \longrightarrow -\frac{\pi}{2}. \tag{23.22}$$

Если мы воспользуемся теперь формулой (23.10) и выразим все через дзета-функцию, то получим теорему:

Теорема XXV*).

$$\int_{1}^{y} \lg\frac{\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right|}{x^2}\,dx = o(\lg y). \tag{23.23}$$

---

*) Этот результат менее силен, чем результат, полученный Титчмаршем в его «Cambridge tract» о дзета-функции. Титчмарш устанавливает, что

$$\int_{0}^{T} \lg\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| dt = O(T\lg\lg T).$$

**24. Некоторые теоремы Титчмарша.** Титчмарш*) рассмотрел асимптотические свойства целых функций с вещественными отрицательными нулями. В этом параграфе мы приводим некоторые результаты, которые перекрываются с результатами Титчмарша. Метод, используемый для получения этих результатов, во многом аналогичен методу, использованному при доказательстве теоремы XXII; поэтому мы даем здесь только краткий набросок доказательства, предоставляя детали читателю.

Пусть

$$f(y)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{a_\nu}\right) \qquad (24.01)$$

— целая функция, все нули которой $\{-a_\nu\}$ отрицательны. Мы будем считать, что

$$0<a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots,\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^{-1}<\infty. \qquad (24.02)$$

Символом $n(r)$ мы будем обозначать число нулей $a_\nu$, не превосходящих $r$. Буква $x$ будет означать вещественное положительное переменное, которое стремится к бесконечности.

Теорема XXVI. *Пусть $\lambda$, $\varrho$, $\theta$ — фиксированные числа такие, что*

$$\lambda>0,\ 0<\varrho<1,\quad |\theta|<\pi. \qquad (24.03)$$

*Тогда утверждения*

(i) $$n(x)\sim\lambda x^\varrho,$$

(ii) $$\lg f(x)\sim\pi\lambda\operatorname{cosec}\pi\varrho x^\varrho,$$

(iii) $$\lg|f(xe^{i\theta})|\sim\pi\lambda\operatorname{cosec}\pi\varrho\cos\theta\varrho x^\varrho\quad(|\theta|<\pi),$$

(iv) $$\int_0^x r^{-1-\pi/(2|\theta|)}\lg|f(re^{i\theta})|\,dr\sim$$

$$\sim\frac{\pi\lambda\operatorname{cosec}\pi\varrho\cos\theta\varrho}{\varrho-\dfrac{\pi}{2|\theta|}}x^{\varrho-\pi/(2|\theta|)}\quad\left(\frac{\pi}{2\varrho}<|\theta|<\pi\right)$$

*эквивалентны. В последнем утверждении член в правой*

*) Цит. соч. (см. стр. 113).

*части в случае* $\varrho = \pi/(2\theta)$ *следует заменить его предельным значением при* $\varrho \to \pi/(2\theta)$.

Заметим сначала, что из сходимости ряда (24.02) вытекает оценка

$$n(x) = o(x). \tag{24.04}$$

Положим, далее,

$$\omega(x) = x^{-\rho} n(x). \tag{24.05}$$

Ввиду того, что $n(x)$ монотонно возрастает, легко видеть, что утверждение (i), которое можно записать как

$$\omega(x) \to \lambda, \tag{24.06}$$

и утверждение

$$\int_0^x \omega(r)\,dr \sim \lambda x \tag{24.07}$$

эквивалентны *).

Наш следующий шаг состоит в таком преобразовании левых частей утверждений (ii)—(iv), которое позволит непосредственно применить тауберовы теоремы Винера.

$$x^{-\rho} \lg f(x) = x^{-\rho} \int_0^\infty \lg\left(1 + \frac{x}{t}\right) dn(t) =$$

$$= x^{-\rho} \int_0^\infty n(t) \frac{x}{t(t+x)}\,dt = \frac{1}{x} \int_0^\infty \omega(t) \frac{\left(\frac{t}{x}\right)^{\rho-1}}{1+\frac{t}{x}}\,dt,$$

$$x^{-\rho} \lg |f(xe^{i\theta})| = \frac{1}{2} x^{-\rho} \int_0^\infty \lg\left|1 + \frac{x}{t} e^{i\theta}\right|^2 dn(t) =$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^\infty \omega(t) \left(\frac{t}{x}\right)^{\rho-1} \frac{1+\frac{t}{x}\cos\theta}{1+2\frac{t}{x}\cos\theta+\frac{t^2}{x^2}}\,dt,$$

*) Эту эквивалентность легко доказать непосредственно или вывести из одной теоремы Винера (цит. соч.—см. стр. 113, теорема XIII, стр. 34—35); она следует также из одной хорошо известной теоремы Ландау (L a n d a u, Beiträge zur analytischen Zahlentheorie, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 26 (1908), стр. 169—302 (стр. 218)).

$$x^{\pi/(2|\theta|)-\rho}\int_0^x r^{-1-\pi/(2|\theta|)}\lg|f(re^{i\theta})|\,dr=$$

$$=x^{\pi/(2|\theta|)-\rho}\int_0^x r^{-1-\pi/(2|\theta|)}\,dr\,r^{\rho-1}\times$$

$$\times\int_0^\infty \omega(t)\left(\frac{t}{r}\right)^{\rho-1}\frac{1+\frac{t}{r}\cos\theta}{1+\frac{2t}{r}\cos\theta+\frac{t^2}{r^2}}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{x}\int_0^\infty \omega(t)\,dt\left(\frac{x}{t}\right)^{1-\rho+\pi/(2|\theta|)}\times$$

$$\times\int_{x/t}^\infty \frac{1+\frac{1}{r}\cos\theta}{1+\frac{2}{r}\cos\theta+\frac{1}{r^2}}\,r^{-1-\pi/(2|\theta|)}\,dr. \qquad (24.08)$$

Для последнего преобразования воспользуемся формулой (24.12) с $u=0$ и $\varrho\theta=\pi/2$. Таким образом, все утверждения (ii)—(iv) представимы в виде

$$\frac{1}{x}\int_0^\infty \omega(t)\,N\left(\frac{t}{x}\right)dt\to\lambda,\ \text{когда}\ x\to\infty, \qquad (24.09)$$

где $N(y)$ обозначает соответственно:

$$N_3(y)=\frac{1}{\pi\operatorname{cosec}\pi\varrho}\,\frac{y^{\rho-1}}{1+y},$$

$$N_4(y)=\frac{1}{\pi\operatorname{cosec}\pi\varrho\cos\theta\varrho}\,y^{\rho-1}\,\frac{1+y\cos\theta}{1+2y\cos\theta+y^2},$$

$$N_5(y)=\frac{\varrho-\frac{\pi}{2|\theta|}}{\pi\operatorname{cosec}\pi\varrho\cos\theta\varrho}\,y^{\rho-1-\pi/(2|\theta|)}\times$$

$$\times\int_{1/y}^\infty \frac{1+\frac{1}{r}\cos\theta}{1+\frac{2}{r}\cos\theta+\frac{1}{r^2}}\,r^{-1-\pi/(2|\theta|)}\,dr. \qquad (24.10)$$

Прямое вычисление дает:

$$\int_0^\infty \frac{y^{iu+\rho-1}}{1+y}\,dy = \pi \operatorname{cosec} \pi (iu+\varrho), \tag{24.11}$$

$$\int_0^\infty \frac{y^{iu+\rho-1}(1+y\cos\theta)}{1+2y\cos\theta+y^2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty \frac{y^{iu+\rho-1}}{1+ye^{i\theta}}\,dy + \int_0^\infty \frac{y^{iu+\rho-1}}{1+ye^{-i\theta}}\,dy\right] =$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{iu+\rho-1}}{1+y}\cdot\frac{1}{2}\left[(e^{i\theta})^{-(iu+\rho)} + (e^{-i\theta})^{-(iu+\rho)}\right] dy =$$

$$= \pi \operatorname{cosec} \pi (iu+\varrho)\cos\theta\,(iu+\varrho), \tag{24.12}$$

$$\int_0^\infty y^{iu+\rho-1-\pi/(2|\theta|)}\,dy \int_{1/y}^\infty r^{-1-\pi/(2|\theta|)} \frac{1+\frac{1}{r}\cos\theta}{1+\frac{2}{r}\cos\theta+\frac{1}{r^2}}\,dr =$$

$$= \int_0^\infty r^{-1+\pi/(2|\theta|)} \frac{1+r\cos\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}\,dr \int_r^\infty y^{iu+\rho-1-\pi/(2|\theta|)}\,dy =$$

$$= \frac{-\pi \operatorname{cosec} \pi (iu+\varrho)\cos\theta\,(iu+\varrho)}{iu+\varrho-\dfrac{\pi}{2|\theta|}}. \tag{24.13}$$

Легко проверить, что ядра $N_3(y)$, $N_4(y)$ при $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ и $N_2(y)$ обладают всеми свойствами ядра $N(y)$, сформулированными в процессе доказательства теоремы XXII. Положим

$$\Lambda(t) = \int_0^t \omega(t)\,dt.$$

Функция $\Lambda(t)$ монотонно возрастает, поскольку $\omega(t) \geqslant 0$. Следовательно, можно применить здесь использованную в § 21 теорему Винера, из которой следует, что утверждения (ii), (iii) при $|\theta| < \pi/2$ и (iv) эквивалентны, тогда как любое из утверждений (ii) или (iv) влечет за собой

(iii) при $\pi/2 < |\theta| < \pi$. Следует заметить, что ядро $N_4(y)$ не является положительным при $|\theta| > \pi/2$, тогда как $N_5(y)$ положительно во всей области $|\theta| < \pi$. Введение этого ядра было вызвано отсутствием положительности у ядра $N_4(y)$ при $|\theta| > \pi/2$. Другая теорема Винера*) показывает, что любое из утверждений (ii), (iii) при $|\theta| < \pi/2$ и (iv) приводит к соотношению (24.07), а значит, и к соотношению (24.06), которое совпадает с (i). С другой стороны, можно непосредственно доказать**), что из (i) вытекает (ii), а значит, также (iii) и (iv). Этим замечанием завершается доказательство теоремы XXVI.

**25. Теорема Пойя.** Пойя***) поставил задачу доказать следующую теорему:

Теорема XXVII. *Пусть $f(z)$ — целая функция, ограниченная при целочисленных значениях аргумента $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$ Пусть*

$$\max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \lg |f(re^{i\theta})| = o(r). \tag{25.01}$$

*Тогда $f(z)$ сводится к постоянной.*

Ясно, что эту теорему достаточно доказать для четных $f(z)$, ибо если $f(z)$ нечетна, то нужно просто рассмотреть $f(z)/z$, которая будет четной и, следовательно, будет сводиться к постоянной, которая может быть только нулем. Случай произвольной функции можно тогда рассмотреть, представляя ее как сумму четной и нечетной частей.

Если $f(z)$ четна, то

$$g(z) = \{f(z) - f(0)\} z^{-2} \tag{25.02}$$

будет целой. Таким образом,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g(n)| < \infty. \tag{25.03}$$

*) N. Wiener, Цит. соч., теорема XI″, стр. 31—32.

**) Titchmarsh, Цит соч., теорема I.

***) Pólya, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Bd. 40 (1931), 2-te Abteilung, стр. 80, проблема 105. Решения были даны Чакаловым и Сегё, решение было прокомментировано Пойя (там же, Bd. 43, 2-te Abteilung, стр. 10, 11, 67). Пойя ссылается на более раннюю работу Дж. М. Уиттекера.

Построим функцию

$$G(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{g(n)\sin\pi(n-z)}{\pi(n-z)}. \qquad (25.04)$$

Очевидно,

$$G(x+iy)=O(y^{-1}e^{\pi|y|}). \qquad (25.05)$$

Образуем теперь целую функцию

$$H(z)=[g(z)-G(z)]\operatorname{cosec}\pi z. \qquad (25.06)$$

При любых значениях $z$ и любых целых значениях $n$ имеем

$$H\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)+iy\right]=$$

$$=O\left\{\exp\left[\varepsilon\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+y^2\right)^{1/2}-\pi|y|\right]\right\}+O\left(\frac{1}{|y|}\right)=$$

$$=e^{\varepsilon|n|}O\left(e^{(\varepsilon-\pi)|y|}\right)+O\left(\frac{1}{|y|}\right) \qquad (25.07)$$

равномерно по $n$. Здесь мы воспользовались оценками (25.01) и (25.05). Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|H\left(n+\frac{1}{2}+iy\right)\right|^2 dy=O\left(e^{2\varepsilon|n|}\right) \qquad (25.08)$$

при любом $\varepsilon$.

Положим

$$x_1=\left[x+\frac{1}{2}\right],\quad x_2=\left[x-\frac{1}{2}\right].$$

Тогда по теореме Коши

$$H(x+iy)=(2\pi i)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H\left(x_1+\frac{1}{2}+iy_1\right)}{x_1+\frac{1}{2}+iy_1-x-iy}\,dy_1-$$

$$-(2\pi i)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H\left(x_2-\frac{1}{2}+iy_1\right)}{x_2-\frac{1}{2}+iy_1-x-iy}\,dy_1. \qquad (25.09)$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x+iy)\,e^{iuy}\,dy =$$

$$= (2\pi i)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} H\left(x_1+\frac{1}{2}+iy_1\right)e^{iuy_1}\,dy_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iuy}\,dy}{x_1+\frac{1}{2}-x-iy} -$$

$$-(2\pi i)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} H\left(x_2-\frac{1}{2}+iy_1\right)e^{iuy_1}\,dy_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iuy}\,dy}{x_2-\frac{1}{2}-x-iy}, \tag{25.10}$$

и по теореме Планшереля и неравенствам Шварца и Минковского

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(x+iy)|^2\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \text{const.}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|H\left(x_1+\frac{1}{2}+iy\right)\right|^2 dy+\int_{-\infty}^{\infty}\left|H\left(x_2-\frac{1}{2}+iy\right)\right|^2 dy\right\}.$$

Таким образом, в силу оценки (25.08)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(x+iy)|^2\,dy = O\left(e^{2\varepsilon|x|}\right). \tag{25.11}$$

Применяя теорему Коши, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x+iy)\,e^{iuy}\,dy = e^{-ux}\int_{-\infty}^{\infty} H(iy)\,e^{iuy}\,dy \equiv e^{-ux}\varphi(u). \tag{25.12}$$

Тогда по теореме Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)|^2\,e^{-2ux}\,du = O\left(e^{2\varepsilon|x|}\right). \tag{25.13}$$

Это возможно, однако, только если $\varphi(u)$ обращается в нуль почти всюду при $|u| > \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon$ произвольно мало, $\varphi(u)$ должна быть эквивалентной нулю. Таким образом, $H(z)$ обращается в нуль и $g(z) = G(z)$. С другой стороны, $G(z)$ принадлежит $L_2$ на вещественной оси, поскольку

$$|G(x)|^2 \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |ng(n)|^2 \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi (n-x)}{n^2\pi^2 (n-x)^2}, \qquad (25.14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(x)|^2 \, dx < \infty. \qquad (25.145)$$

Поэтому $g(x)$ принадлежит $L_2$ на вещественной оси. По теореме XI $g(x)$ должна тождественно обращаться в нуль. Таким образом,

$$G(z) = g(z) = 0, \quad f(z) = f(0), \qquad (25.15)$$

что и является желаемым результатом.

**26. Другая теорема Пойя.** Пойя *) поставил вопрос о справедливости следующей теоремы, ответ на который был дан Сасом **):

*Пусть $m_1, m_2, \ldots$ — вещественные числа, обладающие свойствами $0 < m_1 < m_2 < \ldots$ и*

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{n}{m_n} > \frac{b-a}{2\pi} > 0. \qquad (26.01)$$

*Пусть, кроме того, $f(x)$ — функция, непрерывная в замкнутом интервале $(a, b)$. Тогда из равенств*

$$\int_a^b f(x) \cos m_n x \, dx = \int_a^b f(x) \sin m_n x \, dx = 0 \qquad (26.02)$$

*следует, что $f(x)$ тождественно равна нулю.*

---

*) Pólya, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Bd. 40 (1931), проблема 108 (стр. 81).

**) Там же, Bd. 43 (1933), стр. 20 (часть 2).

Без ограничения можно предполагать, что $b=-a=\pi$. Мы докажем следующую, более общую, теорему:

Теорема XXVIII*). *Пусть* $0<m_1<m_2<\ldots$, *и пусть*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{m_n}>1. \tag{26.03}$$

*Тогда, если* $f(x)$ *принадлежит* $L_2$ *и*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{\pm i m_n x}\,dx=0 \qquad (n=1,\,2,\,3,\,\ldots), \tag{26.04}$$

*то* $f(x)$ *обращается в нуль всюду, кроме некоторого множества меры нуль.*

Очень важно, что мы заменим нижний предел $\underline{\lim}$ верхним $\overline{\lim}$. Это дает нам гораздо более глубокую теорему.

Поскольку условие (26.04) будет выполнено, если заменить $f(x)$ на $f(x)\pm f(-x)$, достаточно рассмотреть случаи, когда $f(x)$ четная или нечетная. Мы подвергнем разбору случай четной $f(x)$, предполагая дополнительно, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt\neq 0.$$

Случай, когда это условие не выполняется, а также случай, когда $f(x)$ нечетная, требуют лишь небольших модификаций, которые могут быть предоставлены читателю. Положим

$$\varphi(u)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{iut}\,dt, \tag{26.05}$$

где целая функция $\varphi(u)$ является четной и где без потери общности можно считать, что $\varphi(0)=1$. Заметим, что, полагая $u=\sigma+i\tau$, будем иметь

$$|\varphi(u)|=|\varphi(\sigma+i\tau)|\leqslant\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt\right\}^{1/2}e^{\pi|\tau|}=O\left(e^{\pi|\tau|}\right). \tag{26.06}$$

*) Эту теорему также можно вывести из одной теоремы Титчмарша: T i t c h m a r s h, The zeros of certain integral functions, Proceedings of the London Mathematical Society, (2), vol. 25 (1925), стр. 283—302; теорема iv.

С другой стороны, из теории преобразования Фурье мы знаем, что $\varphi(\sigma)$ принадлежит $L_2$ на $(-\infty, \infty)$ и что в силу (26.05) преобразование Фурье функции $\varphi(\sigma)$ обращается в нуль вне интервала $(-\pi, \pi)$. Отсюда по теореме XII

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lg|\varphi(\sigma)||}{1+\sigma^2}\,d\sigma < \infty. \tag{26.07}$$

Таким образом, $\varphi(u)$ удовлетворяет условиям теоремы XXI. Отсюда сразу же следует, что существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_\varphi(r)}{r} = A, \tag{26.08}$$

где $n_\varphi(r)$ — число нулей функции $\varphi(u)$, по модулю не превосходящих $r$. Пусть $\{u_\nu\}$ — последовательность нулей функции $\varphi(u)$. Ясно, что $\{\pm m_\nu\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{u_\nu\}$. Следовательно, в силу (26.03) получаем

$$2 < \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{2n}{m_n} \leqslant \lim_{r\to\infty}\frac{n_\varphi(r)}{r} = A. \tag{26.09}$$

Но в силу оценки (26.06) по теореме Йенсена имеем

$$\frac{1}{r}\int_0^r \frac{n_\varphi(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \lg|\varphi(re^{i\theta})|\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \pi r|\sin\theta|\,d\theta + O\left(\frac{1}{r}\right) = 2 + O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{26.10}$$

Отсюда

$$A = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_0^r \frac{n_\varphi(t)}{t}\,dt \leqslant 2. \tag{26.11}$$

Получившееся противоречие показывает, что $f(x)$ должна обращаться в нуль всюду, кроме множества меры нуль.

## ГЛАВА VI

# ЗАМКНУТОСТЬ СИСТЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

**27. Методы из теории целых функций.** Основная цель этой главы — рассмотреть вопрос о замкнутости системы функций $\{e^{\pm i\lambda_n x}, 1\}$ на конечном интервале, который, не ограничивая общности, можно считать интервалом $(-\pi, \pi)$. Этому вопросу посвящено удивительно мало работ. Вся литература, по-видимому, группируется вокруг работы Биркгофа *), в которой он пользуется методом непрерывного варьирования для исследования вопроса о замкнутости систем функций Штурма — Лиувилля. Идеи теоремы Биркгофа были применены Уолшем **) к тригонометрическим системам функций.

Насколько нам известно, единственное исследование случая, когда на $\lambda_n$ налагается (помимо вещественности и четности) единственное ограничение

$$|\lambda_n - n| < L < \infty, \tag{27.01}$$

принадлежит Винеру ***). Эта глава и часть следующей будут посвящены результатам, которые аналогичны винеровскому, но имеют больший объем.

---

*) G. D. Birkhoff, A theorem on series of orthogonal functions with an appication to Sturm-Liuville series, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 3 (1917), стр. 656.

**) J. L. Walsh, A generalization of the Fourier cosine series, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 22 (1921), стр. 230—239.

***) N. Wiener, On the closure of certain assemblages of trigonometric functions, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 13 (1927), стр. 27.

В § 26 мы показали, что если

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} < 1, \tag{27.02}$$

то система функций $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ замкнута в $L_2$ на $(-\pi, \pi)$. В этом параграфе мы ограничимся случаем, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = 1. \tag{27.03}$$

В этом случае будет существовать целая функция

$$F(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 \lambda_n^2}\right). \tag{27.04}$$

Если $\Lambda(t)$ — число показателей $\lambda_n$ меньших, чем $t$, то

$$\frac{1}{y} \lg F(iy) = \frac{1}{y} \int_0^\infty \lg\left(1 + \frac{y^2}{\pi^2 t^2}\right) d\Lambda(t) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\Lambda(t)}{t} \frac{2y}{\pi^2 t^2 + y^2}\, dt. \tag{27.045}$$

Если теперь мы воспользуемся условием (27.03), то получим

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \lg F(iy) = 1. \tag{27.05}$$

Во всей этой главе мы определяем $F(z)$ формулой (27.04). Предполагая выполненным соотношение (27.03), мы докажем серию теорем, связывающих свойства замкнутости системы $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ или системы $\{1, e^{\pm i\lambda_n x}\}$ со свойствами чисел $\lambda_n$ или со свойствами функции $F(z)$. Первой из них является

Теорема XXIX. *Пусть равенство* (27.03) *выполнено, и пусть $F(z)$ принадлежит $L_2$ на вещественной оси. Тогда система функций $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ не может быть замкнутой в $L_2$ на $(-\pi, \pi)$.*

*Далее, пусть $zF(z)$ принадлежит $L_2$ на вещественной оси. Тогда система функций $\{1, e^{\pm i\lambda_n x}\}$ не может быть замкнутой в $L_2$ на $(-\pi, \pi)$. В каждом из этих случаев конечное число функций системы можно заменить таким же числом других функций вида $e^{i\lambda x}$.*

Пусть $F(z)$ принадлежит $L_2$, и пусть

$$f(u) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} F(x)\, e^{iux}\, dx \tag{27.06}$$

— преобразование Фурье функции $F(x)$. Положим

$$H(z) = \int_0^z \frac{F(w)}{w+i} e^{iw(1+\varepsilon)}\, dw, \qquad \varepsilon > 0. \tag{27.07}$$

Тогда $H(z)$ будет целой функцией порядка 1, которая ограничена как на вещественной оси, так и на положительной части мнимой оси. Таким образом, по теореме Фрагмена — Линделёфа она будет ограниченной во всей верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. По теореме Коши

$$\frac{F(z)\, e^{iz(1+\varepsilon)}}{z+i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\delta} \frac{H(w)}{(w-z)^2}\, dw. \tag{27.08}$$

Таким образом, $F(z)\, e^{iz(1+\varepsilon)}/(z+i)$ является ограниченной в полуплоскости над любой прямой $\operatorname{Im} z = \delta > 0$. Аналогично можно доказать, что $F(z)\, e^{-iz(1+\varepsilon)}/(z-i)$ ограничена в полуплоскости под любой прямой $\operatorname{Im} z = -\delta < 0$. Таким образом, по теореме Фрагмена—Линделёфа функция $F(z)/(z+i)$ ограничена в любой горизонтальной полосе над прямой $\operatorname{Im} z = -1$. Таким образом, $F(z)\, e^{iz(1+\varepsilon)}/(z+i)$ ограничена во *всякой* полуплоскости $\operatorname{Im} z > a > -1$. Отсюда вытекает, что для произвольного $\varepsilon$

$$\lim_{\operatorname{Im} z\to\infty} \sup_{-\infty<\operatorname{Re} z<\infty} \left| \frac{F(z)\, e^{iz(1+\varepsilon)}}{z+i} \right| =$$

$$= \lim_{\operatorname{Im} z\to\infty} e^{-\operatorname{Im} z\cdot \varepsilon/2} \sup_{-\infty<\operatorname{Re} z<\infty} \left| \frac{F(z)\, e^{iz(1+\varepsilon/2)}}{z+i} \right| <$$

$$< K \cdot \lim_{\operatorname{Im} z\to\infty} e^{-\operatorname{Im} z\cdot\varepsilon/2} = 0. \tag{27.09}$$

Применим теперь теорему Коши. При достаточно больших $A$ и $B$ будем иметь

$$\frac{F(z)\, e^{zi(1+\varepsilon)}}{(z+i)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{-A}^{A} + \int_{A}^{A+iB} + \int_{A+iB}^{-A+iB} + \int_{-A+iB}^{-A} \right] \frac{F(w)\, e^{iw(1+\varepsilon)}}{(w+i)^2 (w-z)}\, dw. \tag{27.10}$$

Поскольку $F(w)\,e^{iw(1+\varepsilon)}/(w+i)$ ограничена, устремив $A$ к бесконечности, получаем

$$\frac{F(z)\,e^{iz(1+\varepsilon)}}{(z+i)^2}=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty+iB}^{\infty+iB}\right]\frac{F(w)\,e^{iw(1+\varepsilon)}}{(w+i)^2\,(w-z)}\,dw. \qquad (27.11)$$

Пусть теперь $B$ стремится к бесконечности. В силу (27.09) имеем

$$\frac{F(z)\,e^{iz(1+\varepsilon)}}{(z+i)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(w)\,e^{iw(1+\varepsilon)}}{(w+i)^2\,(w-z)}\,dw. \qquad (27.12)$$

По теореме Парсеваля имеем

$$\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-A+yi}^{A+yi}\frac{F(w)\,e^{iw(1+\varepsilon)}}{(w+i)^2}\,e^{iwx}\,dw=$$

$$=\begin{cases} e^{yx}\,\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\displaystyle\int_{-A}^{A}F(w)\,e^{iw(1+\varepsilon)}e^{iwx}\,dw & [x<0], \\ 0 \qquad [x>0]. \end{cases} \qquad (27.13)$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{y\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}dw\left|\frac{F(w+iy)\,e^{i(w+iy)(1+\varepsilon)}}{(w+iy+i)^2}-\frac{F(w)\,e^{iw(1+\varepsilon)}}{(w+i)^2}\right|^2=0. \qquad (27.14)$$

Здесь мы пользуемся тем фактом, что в силу (27.13) функция $F(w+iy)\,e^{i(w+iy)(1+\varepsilon)}/(w+iy+i)^2$ сходится в среднем, когда $y\to 0$, и, значит, она должна сходиться (в среднем) к своему обычному пределу. Таким образом, по теореме Планшереля

$$\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{e^{-x}}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-A}^{A}\frac{F(w)\,e^{iw(1+\varepsilon)}}{(w+i)^2}\,e^{iwx}\,dw=0 \qquad [x>0]. \qquad (27.15)$$

Отсюда двумя формальными дифференцированиями получаем

$$\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-A}^{A}F(w)\,e^{iw(1+\varepsilon)}e^{iwx}\,dw=0 \qquad [x>0]. \qquad (27.16)$$

Эти формальные дифференцирования можно обосновать, поскольку $F(z)$ принадлежит $L_2$ и поскольку

$$\int_0^x \left\{ \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{e^{-x}}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} F(z)\, e^{iz(1+\varepsilon)} e^{izx}\, dz \right\} dx =$$

$$= \frac{e^{-x}}{i(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(z)\, e^{iz(1+\varepsilon)}}{z+i} e^{izx}\, dz - \frac{1}{i(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(z)\, e^{iz(1+\varepsilon)}}{z+i}\, dz. \tag{27.17}$$

Если мы отбросим постоянный член и проинтегрируем еще раз, то получим (27.15). Аналогично

$$\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} F(z)\, e^{-iz(1+\varepsilon)} e^{izx}\, dz = 0 \qquad [x < 0]. \tag{27.18}$$

Таким образом, функция $f(u/\pi)$, определяемая равенством (27.06), является функцией из $L_2$, для которой

$$f(u/\pi) = 0 \qquad [|u| > \pi] \tag{27.19}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{\pi}\right) e^{\pm iu\lambda_n}\, du = \pi (2\pi)^{1/2} F(\pm \pi\lambda_n) = 0 \tag{27.20}$$

$$[n = 1, 2, \ldots].$$

Значит, множество функций $\{e^{\pm i\lambda_n u}\}$ не может быть замкнуто на $(-\pi, \pi)$.

Вторая часть теоремы XXIX, которая относится к системе $\{1, e^{\pm i\lambda_n u}\}$, доказывается совершенно аналогично.

Возможность заменить конечное число функций другими функциями аналогичного вида вытекает из того, что замена конечного числа линейных множителей в $F(z)$ таким же числом других линейных множителей не влияет на принадлежность $F(z)$ к $L_2$ на вещественной оси и не влияет также на область значений, в которой преобразование Фурье функции $F(z)$ отлично от нуля. Второе из этих утверждений вытекает из того, что эта замена не влияет на предел

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \lg F(iy). \tag{27.21}$$

Перейдем теперь к следующей теореме.

Теорема XXX. *Пусть выполняется условие* (27.03), *и пусть множество функций* $\{e^{\pm i\lambda_n u}\}$ *замкнуто в* $L_2$ *на* $(-\pi, \pi)$, *но пусть оно перестает быть замкнутым при удалении некоторого члена. Тогда оно перестает быть замкнутым при удалении любого из членов; функция* $F(z)$ *не принадлежит* $L_2$ *на вещественной оси, но* $F(z)/z$ *принадлежит* $L_2$ *на* $(1, \infty)$. *Далее, если множество функций* $\{1, e^{\pm i\lambda_n x}\}$ *замкнуто в* $L_2$ *на* $(-\pi, \pi)$ *и если оно перестает быть замкнутым при удалении некоторого члена, то этот член произволен,* $zF(z)$ *не принадлежит* $L_2$ *на вещественной оси, но* $F(z)$ *принадлежит* $L_2$.

Мы должны рассмотреть только первую часть этой теоремы. Из теоремы XXIX сразу же следует, что если условия теоремы XXX выполнены, то $F(z)$ не принадлежит $L_2$. С другой стороны, существует некоторая ненулевая функция из $L_2$, скажем $\varphi(x)$, которая ортогональна ко всем, кроме одной, функциям системы $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$. Положим

$$\Phi(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{ixz}\, dx. \tag{27.22}$$

В силу неравенства Шварца

$$\Phi(z) = O(e^{\pi|z|}), \tag{27.23}$$

и мы видим, что $\Phi(z)$ является целой функцией порядка не выше 1 с нулями в точках $z = \mu_n$. Множество чисел $\{\mu_n\}$ содержит в себе все множество $\{\lambda_n\}$, кроме одного числа, скажем $\mu$. По известному свойству целых функций

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|\mu_n|^{1+\varepsilon}} < \infty. \tag{27.24}$$

Таким образом, мы имеем

$$\Phi(z) = A\left\{e^{cz} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\mu_n}\right) e^{z/\mu_n}\right\}. \tag{27.25}$$

Таким образом, существует некоторая целая функция, скажем $\Psi(z)$, такая, что

$$\Phi(z) = \frac{F(\pi z)}{z-\mu} \Psi(z). \tag{27.26}$$

Если $\Psi(z)$ не является экспоненциальной, то она будет иметь по меньшей мере один корень, который мы обозначим $v$. Тогда при $|z|\to\infty$

$$\Phi(z)\sim F(\pi z)\frac{\Psi(z)}{z-v}. \tag{27.27}$$

Таким образом, $F(\pi u)\Psi(u)/(u-v)$ будет принадлежать $L_2$ на всей вещественной оси $u$, ибо $\Phi(z)$ принадлежит $L_2$ в силу (27.22) и теоремы Планшереля. Положим

$$g(x)=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A}F(\pi u)\Psi(u)(u-v)^{-1}e^{-iux}\,du. \tag{27.28}$$

Рассуждение теоремы XXIX (ср. (27.19)) показывает тогда, что

$$g(x)=0\ \ [|x|>\pi]. \tag{27.29}$$

Таким образом, по теореме Планшереля

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{\pm i\lambda_n x}\,dx=\frac{F(\pm\pi\lambda_n)}{\pm\lambda_n-v}\Psi(\pm\lambda_n)=0, \tag{27.30}$$

в то время как $g(x)$ принадлежит $L_2$. Это противоречит нашему предположению о замкнутости системы $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$, и, значит, $\Psi(z)$ не имеет нулей. Поэтому из формулы (27.25) мы имеем

$$\Phi(z)=\frac{AF(\pi z)e^{cz}}{z-\mu}. \tag{27.31}$$

Поскольку на вещественной оси $\Phi(z)$ принадлежит $L_2$ и поскольку $F(\pi z)$ четна, мы видим, что $F(\pi z)/(z-\mu)$ должна принадлежать классу $L_2$ на вещественной оси. Таким образом, наша теорема установлена.

Мы переходим теперь к следующей теореме.

Теорема XXXI. *Пусть выполнено условие* (27.03), *и пусть для некоторых* $\varepsilon$ *и* $n$

$$|F(x+i\varepsilon)|\geqslant\frac{A}{1+|x|^n}>0 \tag{27.32}$$

*при всех вещественных* $x$. *Тогда множество функций* $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ *будет незамкнуто или замкнуто в* $L_2$ *на* $(-\pi,\pi)$, *смотря по тому, будет или не будет* $F(z)$ *принадлежать* $L_2$

*на всей вещественной оси. Это множество всегда можно сделать замкнутым, присоединив к нему конечное число функций* $e^{i\lambda x}$. *Множество функций* $\{1, e^{\pm i\lambda_n x}\}$ *будет незамкнутым или замкнутым в* $L_2$, *смотря по тому, будет или не будет* $zF(z)$ *принадлежать* $L_2$ *на всей вещественной оси.*

Эта теорема также основана на использовании некоторой функции $\varphi(x)$ и ее преобразования Фурье $\Phi(z)$. Пусть $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ замкнуто. Тогда по теореме XXIX функция $F(z)$ не принадлежит $L_2$. Пусть, с другой стороны, $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ не замкнуто, и пусть

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, e^{\pm i\lambda_n x}\, dx = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{27.33}$$

Пусть $\Phi(z)$ определяется формулой (27.22). Как и в доказательстве теоремы XXX,

$$\Phi(z) = F(\pi z)\, \Psi(z), \tag{27.34}$$

где $\Psi(z)$ — некоторая целая функция. Из нашей асимптотической оценки *) функции $F(z)$ на мнимой оси и из того, что

$$|\Phi(iy)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, e^{-xy}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|^2\, dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2xy}\, dx \right\}^{1/2} = O(e^{\pi |y|}), \tag{27.35}$$

очевидно, что при любом $\varepsilon_1 > 0$

$$\Psi(iy) = O(e^{\varepsilon_1 |y|}). \tag{27.36}$$

Далее, на прямой $\operatorname{Im} z = \varepsilon$ функция $\Phi(z)$ ограничена, и в силу неравенства (27.32)

$$|\Psi(z)| \leqslant B(1 + |z|^n). \tag{27.37}$$

Функция $\Psi(z)$ является целой функцией порядка не большего единицы, и простое применение теоремы Фрагмена —

*) Формула (27.05). — *Прим. перев.*

Линделёфа дает нам как следствие оценок (27.36) и (27.37) оценку

$$\Psi(z) = O(e^{\varepsilon_1 |z|}). \tag{27.38}$$

Пусть теперь

$$\Psi(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2) \ldots (z-\alpha_k)\,\Psi_1(z), \tag{27.39}$$

где $\Psi_1(z)$ — некоторая целая функция. Такое разложение всегда возможно, если только $\Psi(z)$ не является полиномом. Целая функция $\Psi_1(z)$ будет принадлежать $L_2$ на некоторой прямой, параллельной вещественной оси, и будет удовлетворять оценке

$$\Psi_1(z) = O(e^{\varepsilon_1 |z|}). \tag{27.40}$$

Таким образом, проведя в основном то же рассуждение, какое мы использовали при доказательстве теоремы XXIX, мы покажем, что преобразование Фурье функции $\Psi_1(z)$ вдоль прямой, на которой, как мы показали, она принадлежит $L_2$, может быть отлично от нуля только внутри интервала $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$. Поскольку $\varepsilon_1$ произвольно мало, это преобразование Фурье, а стало быть и сама $\Psi(z)$, должно быть эквивалентно нулю. Таким образом, $\Phi(z)$ должна также тождественно обращаться в нуль, что приводит нас к противоречию. Это показывает, что функция $\Psi(z)$ должна быть многочленом. Отсюда и из (27.34) следует, что $F(\pi z)$ принадлежит $L_2$ на вещественной оси, поскольку $\Phi(z)$ принадлежит $L_2$ на вещественной оси. Чтобы показать, что $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ можно замкнуть, присоединив конечное число членов вида $e^{i\lambda x}$, мы добавляем достаточное число членов этого вида так, чтобы только одного не хватало до замкнутости. Затем мы строим $\varphi(x)$, ортогональную ко всем этим членам. Рассуждая, как и в предыдущем доказательстве, легко видеть, что было добавлено только конечное число членов.

Остальные утверждения теоремы XXXI либо тривиальны, либо могут быть доказаны тем же способом, что и первая часть. Один пункт, представляющий некоторый интерес, утверждает, что функции $F(x)x^m$ и $F(x+i\varepsilon)x^m$ одновременно принадлежат или не принадлежат $L_2$. Это можно доказать, применив рассуждение теоремы XXIX к $F(x)x^m$ вместо $F(x)$.

Прямым следствием из теорем XXIX и XXXI является

Теорема XXXII. *Пусть оценка* (27.32) *справедлива при некоторых $n$ и $\varepsilon$, и пусть*

$$|F(x)| \leqslant \text{const.}\,(1+|x|^m) \tag{27.41}$$

*при вещественных $x$. Назовем множество функций точным на интервале $(-\pi, \pi)$, если оно замкнуто, но перестает быть замкнутым при удалении любого из членов. Тогда множество функций $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ либо с самого начала является точным, либо становится точным при удалении конечного числа функций, либо же становится точным при добавлении конечного числа функций вида $e^{i\lambda x}$. Число отбрасываемых или добавляемых функций называется соответственно избытком или недостатком рассматриваемого множества. Конкретные функции вида $e^{i\lambda x}$, которые отбрасываются или добавляются, произвольны; существенно только их число.*

Важным применением теоремы XXXII является доказательство следующей теоремы.

Теорема XXXIII. *Если выполнено неравенство* (27.01), *то множество $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ имеет самое большее конечный избыток или недостаток.*

Доказательство этой теоремы основано на оценке функции

$$F(\pi w) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{w^2}{\lambda_n^2}\right), \tag{27.42}$$

когда выполнено неравенство (27.01). Если $|\operatorname{Im} w| = \varepsilon > 0$ и если $|\operatorname{Re} w| = |u| > 2L$, то имеем

$$|F(\pi w)| = \left|\prod_1^\infty \left(1 - \frac{w^2}{\lambda_n^2}\right)\right| =$$

$$= \prod_1^{[|u|]-[L]-1} \left|1 - \frac{w^2}{\lambda_n^2}\right| \prod_{[|u|]-[L]}^{[|u|]+[L]+1} \left|1 - \frac{w^2}{\lambda_n^2}\right| \prod_{[|u|]+[L]+2}^{\infty} \left|1 - \frac{w^2}{\lambda_n^2}\right|. \tag{27.43}$$

Для членов первого произведения справа имеем

$$\left|1 - \frac{w^2}{\lambda_n^2}\right| = \left|1 - \frac{(u \pm i\varepsilon)^2}{\lambda_n^2}\right| \geqslant \left|1 - \frac{w^2}{(n+L)^2}\right|. \tag{27.44}$$

Для членов второго произведения имеем

$$\left|1-\frac{w^2}{\lambda_n^2}\right|=\left|\frac{\lambda_n^2-u^2\pm 2i\varepsilon u+\varepsilon^2}{\lambda_n^2}\right|\geqslant\frac{2\varepsilon\,|u|}{\lambda_n^2}\geqslant\frac{\varepsilon}{2\,|u|}. \quad (27.45)$$

Для членов третьего произведения имеем

$$\left|1-\frac{w^2}{\lambda_n^2}\right|\geqslant\left|1-\frac{w^2}{(n-L)^2}\right|. \quad (27.46)$$

Таким образом,

$$|F(\pi w)|\geqslant\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2[L]+2}|w|^{-2[L]-2}\times$$

$$\times\prod_{1}^{[|u|]-[L]-1}\left|1-\frac{w^2}{(n+L)^2}\right|\prod_{[|u|]+[L]+2}^{\infty}\left|1-\frac{w^2}{(n-L)^2}\right|. \quad (27.47)$$

Но

$$\prod_{1}^{[|u|]-[L]-1}\left|1-\frac{w^2}{(n+L)^2}\right|\geqslant\prod_{[L]+2}^{[|u|]+1}\left|1-\frac{w^2}{n^2}\right| \quad (27.48)$$

и

$$\prod_{[|u|]+[L]+2}^{\infty}\left|1-\frac{w^2}{(n-L)^2}\right|\geqslant\prod_{[|u|]+1}^{\infty}\left|1-\frac{w^2}{n^2}\right|. \quad (27.49)$$

Поэтому

$$|F(\pi w)|\geqslant\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2[L]+2}|w|^{-2[L]-2}\prod_{[L]+2}^{\infty}\left|1-\frac{w^2}{n^2}\right|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{2[L]+2}|w|^{-4[L]-5}\,|\pi w|\prod_{1}^{\infty}\left|1-\frac{w^2}{n^2}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{2[L]+2}|w|^{-4[L]-5}\,|\sin\pi w|\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{2[L]+3}|w|^{-4[L]-5}. \quad (27.50)$$

При тех же условиях

$$|F(\pi w)| = \prod_{1}^{[L]+1}\left|1-\frac{w^2}{\lambda_n^2}\right| \prod_{[L]+2}^{[|u|]}\left|1-\frac{w^2}{\lambda_n^2}\right| \prod_{[|u|]+1}^{\infty}\left|1-\frac{w^2}{\lambda_n^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant A|w|^{2[L]+2} \prod_{1}^{[|u|]-[L]-1}\left|1-\frac{w^2}{n^2}\right| \prod_{[|u|]+[L]+2}^{\infty}\left|1-\frac{w^2}{n^2}\right|. \quad (27.51)$$

Но

$$\prod_{[|u|]-[L]}^{[|u|]+[L]+1}\left|1-\frac{w^2}{n^2}\right| \geqslant \prod_{[|u|]-[L]}^{[|u|]+[L]+1} \frac{\varepsilon|u|}{n^2} \geqslant A|w|^{-2[L]-2}. \quad (27.52)$$

Таким образом,

$$|F(\pi w)| \leqslant A|w|^{4[L]+3}|\sin \pi w| \leqslant A|w|^{4[L]+3}. \quad (27.53)$$

Здесь $A$ — постоянная, которая может быть различной в каждом из выражений. Мы можем воспользоваться теперь теоремой Фрагмена — Линделёфа, чтобы получить оценку

$$|F(\pi x)| \leqslant \text{const.}\, |x|^{4[L]+3} \quad (27.54)$$

при $x$, стремящемся к бесконечности по вещественной оси.

Теорема XXXIII получится теперь сразу же, если применить теорему XXXII.

Специализацией теоремы XXXIII является следующая теорема.

Теорема XXXIV. *Пусть выполнено неравенство* (27.01), *и пусть*

$$L < \frac{n}{4} + \frac{1}{8}. \quad (27.55)$$

*Тогда недостаток множества* $\{1, e^{\pm i\lambda_n x}\}$ *не может превосходить* $n$. *Если*

$$L \leqslant \frac{n}{4} + \frac{1}{8}, \quad (27.56)$$

*то избыток множества* $\{1, e^{\pm i\lambda_n x}\}$ *не может превосходить* $n$.

Теорема XXXIV отличается от теоремы XXXIII тем, что мы должны воспользоваться более тонкими оценками, связанными с гамма-функцией. Они восходят к формуле

Стирлинга. В частности, если $x$ вещественное, а $B$ целое, то имеем

$$\prod_{1}^{\infty}\left|1-\frac{(x+i\varepsilon)^2}{(n+B)^2}\right| \geqslant K_1 |x|^{-1-2B} \tag{27.57}$$

и

$$\prod_{1}^{\infty}\left|1-\frac{x^2}{(n+B)^2}\right| \leqslant K_2 |x|^{-1-2B}. \tag{27.58}$$

При доказательстве мы будем пользоваться обозначениями

$$0 < C_1 \leqslant C \leqslant C_2 < \infty, \tag{27.59}$$

где $C$ может быть переменным, а $C_1$ и $C_2$ фиксированы. Мы фиксируем $\varepsilon$ и положим

$$v=[\operatorname{Re} w], \qquad |\operatorname{Im} w| = \varepsilon. \tag{27.60}$$

Тогда, если $B$ — некоторое целое число и $A+B \geqslant \geqslant \operatorname{Re} w - v$, где $A$ и $B$ считаются постоянными, то

$$\prod_{1}^{v+B}\left|1-\frac{w^2}{(n+A)^2}\right| =$$

$$= \frac{|\Gamma(v+A+B-w+1)\,\Gamma(v+A+B+w+1)|\,\{\Gamma(A+1)\}^2}{\{\Gamma(v+A+B+1)\}^2\,|\Gamma(A-w+1)\,\Gamma(A+w+1)|} =$$

$$= \frac{C\,|\Gamma(v+A+B+w+1)\,\Gamma(w-A)|}{\{\Gamma(v+A+B+1)\}^2\,|\Gamma(A+w+1)|} =$$

$$= C\cdot 2^{2\operatorname{Re} w} |w|^{\operatorname{Re} w - v - 3A - B - 3/2}. \tag{27.61}$$

Следовательно, если мнимая часть $w$ равна $\varepsilon$, а вещественная часть положительна и достаточно велика, то

$$F(\pi w)| \geqslant$$

$$\geqslant a \prod_{1}^{v-[L]-1}\left|1-\frac{w^2}{(n+L)^2}\right| |w|^{-2[L]-2} \prod_{v+[L]+2}^{\infty}\left|1-\frac{w^2}{(n-L)^2}\right| \geqslant$$

$$\geqslant a \cdot 2^{2\operatorname{Re} w} |w|^{-3L+[L]-1/2+\operatorname{Re} w - v} |w|^{-2[L]-2} \prod_{v+2}^{\infty} \left| 1 - \frac{w^2}{n^2} \right| \geqslant$$

$$\geqslant a |w|^{-3L+[L]-1/2+\operatorname{Re} w - v} \times$$

$$\times |w|^{-2[L]-2} |w|^{-\operatorname{Re} w + v + 5/2} \prod_{1}^{\infty} \left| 1 - \frac{w^2}{n^2} \right| \geqslant a |w|^{-4L-1}, \quad (27.62)$$

где $a$ — некоторая положительная постоянная, которая может быть различной в каждом из выражений. Далее,

$$|F(\pi w)| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{1}^{[L]+1} \left| 1 - \frac{w^2}{\lambda_n^2} \right| \prod_{[L]+2}^{v} \left| 1 - \frac{w^2}{(n-L)^2} \right| \prod_{v+1}^{\infty} \left| 1 - \frac{w^2}{(n+L)^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant a |w|^{2[L]+2} \prod_{2}^{v-[L]} \left| 1 - \frac{w^2}{n^2} \right| \prod_{v+[L]+1}^{\infty} \left| 1 - \frac{w^2}{n^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant a |w|^{2[L]-1} |\sin \pi w| \cdot |w|^{2[L]} \leqslant a |w|^{4L-1}. \quad (27.63)$$

Отсюда, как и в доказательстве теоремы XXXIII, при достаточно больших вещественных $x$ имеем

$$|F(\pi x)| \leqslant \text{const.} |x|^{4L-1}. \quad (27.64)$$

Таким образом, $F(x)/(|x|^n + 1)$ принадлежит $L_2$ на вещественной оси, когда $L < n/4 + 1/8$. В свою очередь $F(w) w^{1+n}$ не попадает в класс $L_2$ на прямой, параллельной вещественной оси, когда $L \leqslant n/4 + 1/8$. Из доказательства теоремы XXIX непосредственно следует, что это будет верно тогда и только тогда, когда $F(x) x^{1+n}$ не попадает в класс $L_2$ на вещественной оси. Таким образом, теорема XXXIV, которая устанавливает границы для избытка и недостатка множества $\{1, e^{\pm i\lambda_n x}\}$, сразу же следует из теоремы XXXI.

**28. Двойственность между замкнутостью и независимостью.** Пусть множество функций $\{f_n(x)\}$ замкнуто, нормально и ортогонально на отрезке $(a, b)$. Пусть

$a<c<b$, и пусть множество $\{f_n(x)\}$ составлено из двух неперекрывающихся подмножеств $\{g_n(x)\}$ и $\{h_n(x)\}$. Пусть $f(x)$ обращается в нуль на $(a, c)$ и принадлежит $L_2$ на $(c, b)$. Тогда, если $f(x)$ ортогональна к каждой функции из $\{g_n(x)\}$ на $(c, b)$, то $f(x)$ будет ортогональна к этим функциям и на $(a, b)$ и будет иметь ортогональное разложение вида

$$f(x) \sim \sum_1^\infty a_n h_n(x), \tag{28.01}$$

для которого

$$\sum_1^\infty |a_n|^2 < \infty. \tag{28.02}$$

Отсюда следует, что если $\{g_n(x)\}$ не замкнуто на $(c, d)$, то существует ряд (28.01), удовлетворяющий условию (28.02) и сходящийся в среднем к нулю на $(a, c)$.

С другой стороны, если $\{g_n(x)\}$ замкнуто на $(c, b)$, то не существует функции $f(x)$, обращающейся в нуль на $(a, c)$, принадлежащей $L_2$ на $(c, b)$ и ортогональной на $(c, b)$ к каждой из функций $g_n(x)$. Отсюда вытекает, что не существует функции, обращающейся в нуль на $(a, c)$ и имеющей ортогональное разложение вида (28.01), для которого выполняется условие (28.02). Мы выразим этот результат теоремой:

Теорема XXXV. *Пусть $\{f_n(x)\}$ — множество функций, нормальное, ортогональное и замкнутое на $(a, b)$. Мы назовем его подмножество $\{h_n(x)\}$ слабо независимым на подинтервале $(a, c)$, если из соотношения*

$$0 \sim \sum_1^\infty a_n h_n(x) \tag{28.03}$$

*на $(a, c)$, где выполнено (28.02), вытекает, что $a_n=0$ при всех $n$. Подмножесство $\{h_n(x)\}$ будет слабо независимым на $(a, c)$ тогда и только тогда, когда дополнительное множество $\{g_n(x)\}$, состоящее из всех членов множества $\{f_n(x)\}$, не принадлежащих $\{h_n(x)\}$, является замкнутым на $(c, b)$. В частности, линейно независимое множество является слабо независимым, так что его дополнительное множество всегда замкнуто. Если мно-*

*жество является и замкнутым и слабо независимым, то таким же является и его дополнительное множество в дополнительной области. Если как множество, так и его дополнение являются независимыми на дополнительных областях, то оба они замкнуты.*

Пусть в качестве приложения множество $\{1, e^{\pm inx}\}$ составлено из множеств $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ и $\{1, e^{\pm i\mu_n x}\}$. Пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$, и пусть

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0. \tag{28.04}$$

Отсюда по теореме XXVIII следует, что множество функций $\{e^{\pm i\mu_n x}\}$ замкнуто на *любом* интервале $(-\pi+\varepsilon, \pi)$ и, значит, на любом интервале $(A, A+2\pi-\varepsilon)$ или на любом множестве $(-\pi, A-\varepsilon)+(A, \pi)$, где $-\pi+\varepsilon < A < \pi$. По теореме XXXV дополнительное множество функций $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ будет слабо независимым на любом сколь угодно малом интервале $(A-\varepsilon, A)$. Мы установили, таким образом, теорему.

Теорема XXXVI. *Пусть $\lambda_{-n} = -\lambda_n$, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$, пусть все $\lambda_n$ целые, и пусть*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0. \tag{28.05}$$

*Пусть $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, и пусть*

$$\operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} a_n e^{i\lambda_n x} = 0 \quad (A-\varepsilon \leqslant x \leqslant A), \tag{28.06}$$

*где $\varepsilon$ — произвольное положительное число. Тогда все коэффициенты $a_n$ равны нулю.*

Более общий результат той же самой природы можно получить следующим образом*). Пусть $\lambda_n$ — некоторое множество положительных чисел, и пусть

$$\inf |\lambda_m - \lambda_n| > L > 0. \tag{28.07}$$

*) Следующее рассуждение (стр. 146—148) содержит много неточностей.— *Прим. перев.*

Существует число $D$ такое, что

$$L \geqslant D \geqslant L(1-\varepsilon), \qquad \varepsilon > 0, \tag{28.08}$$

и такое, что ни одно из чисел $\lambda_p$ не равно $\left(n+\frac{1}{2}\right)D$. Чтобы увидеть это, заметим, что числа $L_n$, для которых

$$\lambda_p = \left(m+\frac{1}{2}\right)L_n \tag{28.09}$$

при некоторых целых $p$ и $m$, образуют счетное множество, поскольку счетное множество счетных множеств счетно.

Пусть теперь $\mu_n$ равно $\left(n+\frac{3}{4}\right)D$, если нет ни одного $\lambda_m$, которое отстояло бы от $nD$ меньше чем на $D/2$. Пусть $\mu_n$ равно $\lambda_m$, если

$$nD < \lambda_m \leqslant (n+1)D \qquad (n=0,\ 1,\ \ldots). \tag{28.10}$$

Положим $\sigma_{2n}=\mu_n$ и $\sigma_{2n+1}=(2n+1)D-\mu_n$. Тогда равенство $\sigma_n=\sigma_m$ при $n\neq m$ невозможно. Мы покажем теперь, что множество функций $\{1,\ e^{\pm i\sigma_n x}\}$ замкнуто на интервале $(-2\pi/D,\ 2\pi/D)$, но перестает быть замкнутым, если мы удалим какой-либо один его член. Образуем функцию

$$f(z) = z\prod_1^\infty\left(1-\frac{z^2}{\sigma_n^2}\right) \tag{28.11}$$

и рассмотрим ее на прямой $\operatorname{Im} z=\delta>0$. Имеем

$$\frac{\left(1-\dfrac{z^2}{\sigma_{2n}^2}\right)\left(1-\dfrac{z^2}{\sigma_{2n+1}^2}\right)}{\left(1-\dfrac{z^2}{n^2D^2}\right)^2} = \frac{n^4D^4}{\sigma_{2n}^2\sigma_{2n+1}^2}\cdot\frac{(\sigma_{2n}^2-z^2)(\sigma_{2n+1}^2-z^2)}{(n^2D^2-z^2)^2}, \tag{28.12}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{2n}^2\sigma_{2n+1}^2 &= \mu_n^2((2n+1)D-\mu_n)^2 = (nD+a_n)^2(nD-a_n)^2 = \\ &= (n^2D^2-a_n^2)^2,\end{aligned} \tag{28.13}$$

где $|a_n|\leqslant D/2$. Отсюда вытекает, что произведение

$$\prod_1^\infty \frac{n^4D^4}{\sigma_{2n}^2\sigma_{2n+1}^2} \tag{28.14}$$

сходится к конечному значению. Остающееся произведение

$$\prod_{1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{z^2}{\sigma_{2n}^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{\sigma_{2n+1}^2}\right)}{\left(1-\frac{z^2}{n^2D^2}\right)^2} \tag{28.15}$$

имеет вид

$$\prod_{1}^{\infty} \frac{[(nD-a_n)^2-z^2]\,[(nD+a_n)^2-z^2]}{[n^2D^2-z^2]^2}, \tag{28.16}$$

где $|a_n| \leqslant D/2$. Его можно записать в виде

$$\prod_{1}^{\infty} \left(1-2a_n^2\,\frac{z^2+n^2D^2-a_n^2/2}{(nD+z)^2\,(nD-z)^2}\right). \tag{28.17}$$

Имеем $\operatorname{Im} z = \delta > 0$. Не ограничивая общности, можно рассмотреть случай $\operatorname{Re} z = x > 0$. Легко видеть, что из равномерной ограниченности интеграла

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dt}{(x-Dt)^2+\delta^2}, \tag{28.18}$$

из того факта, что только для конечного (не зависящего от $z$) числа членов

$$\left|2a_n^2\,\frac{z^2+n^2D^2-a_n^2/2}{(nD+z)^2\,(nD-z)^2}\right| \geqslant \frac{1}{2}, \tag{28.19}$$

и из неравенства

$$1-a > \frac{1}{1+2a}, \qquad \frac{1}{2} > a > 1, \tag{28.20}$$

вытекает, что

$$c_1 \geqslant \left|\prod_{1}^{\infty} \left(1-2a_n^2\,\frac{z^2+n^2D^2-a_n^2/2}{(nD+z)^2\,(nD-z)^2}\right)\right| \geqslant c_2. \tag{28.21}$$

Таким образом,

$$\lg \frac{|f(z)|}{|z^2| \prod_{1}^{\infty} \left|1-\frac{z^2}{n^2D^2}\right|^2} < c \qquad (\operatorname{Im} z = \delta), \tag{28.22}$$

и поскольку

$$|z| \prod_{1}^{\infty} \left| 1 - \frac{z^2}{n^2 D^2} \right| = \frac{D}{\pi} \left| \sin \frac{\pi z}{D} \right|, \tag{28.23}$$

мы получаем сразу же, что $\lg |f(z)|$ ограничен. Отсюда по теореме XXXI следует, что множество функций $\{1, e^{\pm i\sigma_n x}\}$ замкнуто на $(-2\pi/D, 2\pi/D)$, но перестает быть замкнутым, если мы удалим какой-либо член. Отсюда, если функция

$$g(x) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_{-n}^{n} a_k e^{i\lambda_k x} + a_0 \tag{28.24}$$

обращается в нуль на каком-либо интервале длины $4\pi/D$ и если, за возможным исключением конечного числа $\lambda_n$,

$$|\lambda_m - \lambda_n| > D, \tag{28.25}$$

то все коэффициенты функции $g(x)$ обращаются в нуль, ибо в противном случае мы могли бы представить некоторую из экспонент $e^{\pm i\lambda_k x}$ через остальные как предел в среднем. Поскольку мы можем заменить конечное число членов множества $\{e^{\pm i\sigma_n x}\}$ членами $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$, не подчиняющимися неравенству (28.25), не влияя на свойства замкнутости множества, мы видим, что множество $\{1, e^{\pm i\lambda_n x}\}$ было превращено в подмножество замкнутой и линейно независимой последовательности.

Таким образом, если (28.25) выполняется для любого положительного $D$, если опустить конечное число $\lambda_n$, то, если функция (28.24) обращается в нуль на каком-либо интервале, она обращается в нуль тождественно. Это — частный случай теоремы о лакунах, подробный разбор который мы предпримем в следующей главе.

ГЛАВА VII

# НЕГАРМОНИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ И ТЕОРЕМА О ЛАКУНАХ

**29. Теорема о замкнутости.** Мы посвятим этот параграф доказательству теоремы:

Теорема XXXVII. *Пусть множество функций* $\{f_n(x)\}$ *нормально, ортогонально и замкнуто на интервале* $(a, b)$. *Пусть функции* $g_n(x)$ *принадлежат* $L_2$ *на* $(a, b)$ *и пусть*

$$\int_a^b \left| \sum_1^N a_n (f_n(x) - g_n(x)) \right|^2 dx \leqslant \theta^2 \sum_1^N |a_n|^2, \qquad (29.01)$$

*где* $\theta$ *не зависит от* $N$ *и* $a_n$; $\theta < 1$. *Множество чисел* $\{a_n\}$ *произвольно. Тогда, если* $f(x)$ *принадлежит* $L_2$, *то существуют такие коэффициенты* $b_n$, *что*

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_1^N b_n g_n(x), \qquad (29.02)$$

*иными словами, множество* $\{g_n(x)\}$ *замкнуто. Кроме того, это множество линейно независимо.*

*При этом имеем*

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leqslant (1+\theta)^2 \sum_1^\infty |b_n|^2 \qquad (29.03)$$

*и*

$$(1-\theta)^2 \sum_1^\infty |b_n|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2 dx. \qquad (29.04)$$

*Существует множество* $\{h_n(x)\}$ *таких функций, принадлежащих* $L_2$, *что*

$$\int_a^b g_m(x)\,h_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \textit{если } m \neq n, \\ 1, & \textit{если } m = n. \end{cases} \tag{29.05}$$

*Если* $f(x)$ *принадлежит* $L_2$, *то существуют такие коэффициенты* $c_n$, *что*

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_1^N c_n h_n(x) \tag{29.06}$$

*и*

$$\frac{1}{(1+\theta)^2}\sum_1^\infty |c_n|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,dx \leqslant \frac{1}{(1-\theta)^2}\sum_1^\infty |c_n|^2. \tag{29.07}$$

Доказательство начнем с оценки

$$\left\{\int_a^b \left|\sum_1^N a_n g_n(x)\right|^2 dx\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\int_a^b \left|\sum_1^N a_n f_n(x)\right|^2 dx\right\}^{1/2} + \\ + \left\{\int_a^b \left|\sum_1^N a_n (g_n(x) - f_n(x))\right|^2 dx\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\sum_1^N |a_n|^2\right\}^{1/2} + \\ + \left\{\theta^2 \sum_1^N |a_n|^2\right\}^{1/2} = (1+\theta)\left\{\sum_1^N |a_n|^2\right\}^{1/2}. \tag{29.08}$$

Отсюда сразу же следует, что если мы рассмотрим какое-либо множество $\{a_n\}$, для которого

$$\sum_1^\infty |a_n|^2 < \infty, \tag{29.09}$$

то предел

$$g(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_1^N a_n g_n(x) \tag{29.10}$$

будет существовать и

$$\int_a^b |g(x)|^2\,dx \leqslant (1+\theta)^2 \sum_1^\infty |a_n|^2; \tag{29.11}$$

для этого нам надо воспользоваться только тем, что в силу (29.08) имеем

$$\underset{M,\, N\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_{M}^{N} a_n g_n(x) = 0. \tag{29.12}$$

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция из $L_2$, и пусть

$$f(x) \sim \sum_{1}^{\infty} a_k f_k(x). \tag{29.13}$$

Тогда функция

$$f^{(1)}(x) \sim \sum_{1}^{\infty} a_k (f_k(x) - g_k(x)) \tag{29.14}$$

будет существовать и будет принадлежать $L_2$ в силу (29.01). Вообще, определим $f^{(n+1)}(x)$ по индукции. Положим

$$f^{(n)} \sim \sum_{1}^{\infty} a_k^{(n)} f_k(x) \tag{29.15}$$

и

$$f^{(n+1)}(x) \sim \sum_{1}^{\infty} a_k^{(n)} (f_k(x) - g_k(x)). \tag{29.16}$$

Будем иметь

$$f^{(n)}(x) - f^{(n+1)}(x) \sim \sum_{1}^{\infty} a_k^{(n)} g_k(x) \tag{29.17}$$

и, складывая,

$$f(x) - f^{(n+1)}(x) \sim \sum_{1}^{\infty} (a_k + a_k^{(1)} + \ldots + a_k^{(n)})\, g_k(x). \tag{29.18}$$

В силу соотношений (29.01) и (29.16) имеем

$$\int_a^b |f^{(n+1)}(x)|^2\, dx \leqslant \theta^2 \sum_{1}^{\infty} |a_k^{(n)}|^2 = \theta^2 \int_a^b |f^{(n)}(x)|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \theta^{2(n+1)} \int_a^b |f(x)|^2\, dx. \tag{29.19}$$

Таким образом,

$$\sum_{1}^{\infty} |a_k^{(n)}|^2 \leqslant \theta^{2n} \sum_{1}^{\infty} |a_k|^2. \tag{29.20}$$

В силу (29.18) и (29.19) имеем

$$f(x) = \underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}}\ \underset{N\to\infty}{\text{l. i. m.}} \sum_{1}^{N} (a_k + a_k^{(1)} + \ldots + a_k^{(n)}) g_k(x). \tag{29.21}$$

В силу неравенства Минковского и оценки (29.20) имеем

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + a_k^{(1)} + \ldots + a_k^{(n)}|^2\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_{1}^{\infty} |a_k|^2\right\}^{1/2} + \left\{\sum_{1}^{\infty} |a_k^{(1)}|^2\right\}^{1/2} + \ldots + \left\{\sum_{1}^{\infty} |a_k^{(n)}|^2\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \theta + \ldots + \theta^n) \left\{\sum_{1}^{\infty} |a_k|^2\right\}^{1/2} \leqslant \frac{1}{1-\theta} \left\{\sum_{1}^{\infty} |a_k|^2\right\}^{1/2}. \tag{29.22}$$

Таким образом, полагая

$$a_k + a_k^{(1)} + \ldots = b_k, \tag{29.23}$$

будем иметь

$$\sum_{1}^{\infty} |b_k|^2 \leqslant \frac{1}{(1-\theta)^2} \sum_{1}^{\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{(1-\theta)^2} \int_{a}^{b} |f(x)|^2\, dx. \tag{29.24}$$

Положим

$$g(x) \sim \sum_{1}^{\infty} b_k g_k(x). \tag{29.25}$$

Это дает нам

$$g(x) - f(x) = \underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}}\ \underset{N\to\infty}{\text{l. i. m.}} \sum_{1}^{N} (a_k^{(n+1)} + a_k^{(n+2)} + \ldots) g_k(x). \tag{29.26}$$

Но, как и в (29.22),

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(n+1)} + a_k^{(n+2)} + \ldots|^2\right\}^{1/2} \leqslant \frac{\theta^{n+1}}{1-\theta} \left\{\sum_{1}^{\infty} |a_k|^2\right\}^{1/2}. \tag{29.27}$$

Отсюда

$$\int_a^b |g(x)-f(x)|^2\,dx=0 \tag{29.28}$$

и

$$f(x)\sim\sum_1^\infty b_k g_k(x). \tag{29.29}$$

Это представление функции $f(x)$ из $L_2$ через функции $g_k(x)$ является единственным при условии, что сумма квадратов модулей коэффициентов сходится. В противном случае существовали бы такие числа $b_k$, не все равные нулю, что

$$\sum_1^\infty b_k g_k(x)\sim 0 \tag{29.30}$$

и

$$\infty>\sum_1^\infty |b_k|^2>0. \tag{29.31}$$

Эти числа дают

$$\left\{\int_a^b\left|\sum_1^\infty b_k f_k(x)\right|^2 dx\right\}^{1/2}\leqslant\left\{\int_a^b\left|\sum_1^\infty b_k (f_k(x)-g_k(x))\right|^2 dx\right\}^{1/2}+$$

$$+\left\{\int_a^b\left|\sum_1^\infty b_k g_k(x)\right|^2 dx\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\varlimsup_{N\to\infty}\left\{\int_a^b\left|\sum_1^N b_k (f_k(x)-g_k(x))\right|^2 dx\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\theta\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_1^N |b_k|^2\right\}^{1/2}. \tag{29.32}$$

С другой стороны,

$$\left\{\int_a^b\left|\sum_1^\infty b_k f_k(x)\right|^2 dx\right\}^{1/2}=\left\{\sum_1^\infty |b_k|^2\right\}^{1/2}. \tag{29.33}$$

Это дает нам противоречие.

Пусть

$$H_n^m(x)=g_n(x)+\sum_{1}^{n-1} a_k g_k(x)+\sum_{n+1}^{m} a_k g_k(x); \tag{29.34}$$

выберем коэффициенты $a_k$ так, чтобы

$$\int_a^b |H_n^m(x)|^2\,dx=\text{minimum}. \tag{29.35}$$

Классическая теория ортогональных разложений показывает, что предел

$$H_n(x)=\underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, H_n^m(x) \tag{29.36}$$

существует и принадлежит $L_2$ и что он ортогонален ко всем $g_k(x)$, отличным от $g_n(x)$. Кроме того, функция $H_n(x)$ ортогональна к функции $g_n(x)-H_n(x)$, которая сама разложима по $g_k(x)$, отличным от $g_n(x)$. В силу (29.04) имеем

$$\int_a^b |H_n(x)|^2\,dx=\lim_{m\to\infty}\int_a^b |H_n^m(x)|^2\,dx\geqslant(1-\theta)^2, \tag{29.37}$$

так что ни одна из $H_n(x)$ не эквивалентна нулю. Положим

$$h_n(x)=\frac{\overline{H_n(x)}}{\int_a^b |H_n(\xi)|^2\,d\xi}. \tag{29.38}$$

Как мы уже видели,

$$\int_a^b g_m(x)\,h_n(x)\,dx=0, \text{ если } m\neq n, \tag{29.39}$$

и, с другой стороны,

$$\int_a^b g_n(x)\,h_n(x)\,dx=\int_a^b g_n(x)\frac{\overline{H_n(x)}}{\int_a^b |H_n(\xi)|^2\,d\xi}\,dx=$$

$$=\int_a^b (H_n(x)+(g_n(x)-H_n(x)))\frac{\overline{H_n(x)}}{\int_a^b |H_n(\xi)|^2\,d\xi}\,dx. \tag{29.40}$$

Таким образом,

$$\int_a^b g_n(x)\,h_n(x)\,dx = 1. \tag{29.41}$$

Пусть

$$\varphi_N(x) = \sum_1^N a_n h_n(x), \quad \psi_N(x) = \sum_1^N \bar{a}_n g_n(x). \tag{29.42}$$

Ясно, что

$$\int_a^b \varphi_N(x)\,\psi_N(x)\,dx = \sum_1^N |a_n|^2 \tag{29.43}$$

и по неравенству Шварца

$$\int_a^b |\varphi_N(x)|^2\,dx \int_a^b |\psi_N(x)|^2\,dx \geqslant \left\{\sum_1^N |a_n|^2\right\}^2. \tag{29.44}$$

Таким образом, в силу (29.03)

$$\int_a^b |\varphi_N(x)|^2\,dx \geqslant \frac{\left\{\sum\limits_1^N |a_n|^2\right\}^2}{(1+\theta)^2 \sum\limits_1^N |a_n|^2} = \frac{\sum\limits_1^N |a_n|^2}{(1+\theta)^2}. \tag{29.45}$$

Пусть, далее,

$$\overline{\varphi_N(x)} \sim \sum_1^\infty b_n g_n(x). \tag{29.46}$$

В силу (29.42) и неравенства Шварца

$$\int_a^b |\varphi_N(x)|^2\,dx = \sum_1^N a_n b_n \leqslant \left\{\sum_1^N |a_n|^2 \sum_1^N |b_n|^2\right\}^{1/2}. \tag{29.47}$$

То есть в силу (29.04)

$$\sum_1^N |a_n|^2 \geqslant \frac{\left[\int\limits_a^b |\varphi_N(x)|^2\,dx\right]^2}{\sum\limits_1^N |b_n|^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(1-\theta)^2\left[\int\limits_a^b |\varphi_N(x)|^2\,dx\right]^2}{\int\limits_a^b |\varphi_N(x)|^2\,dx} = (1-\theta)^2 \int\limits_a^b |\varphi_N(x)|^2\,dx. \qquad (29.48)$$

Функции $h_n(x)$ образуют замкнутое множество. В противном случае существовала бы ненулевая функция $f(x)$, принадлежащая $L_2$ и такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,h_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (29.49)$$

Мы хотим доказать, что если выполнено (29.49), то

$$f(x) \equiv 0. \qquad (29.50)$$

Положим

$$f(x) \sim \sum_1^\infty b_n g_n(x) \qquad (29.51)$$

и

$$h(x) \sim \sum_1^\infty \overline{b_n} h_n(x). \qquad (29.52)$$

Тогда

$$\sum_1^\infty |b_n|^2 = \int\limits_a^b f(x)\,h(x)\,dx = 0. \qquad (29.53)$$

Это дает нам результат и завершает доказательство теоремы XXXVII.

Особенно важным является случай, когда

$$a = -\pi,\ b = \pi,\ f_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{inx} \qquad (-\infty < n < \infty). \qquad (29.54)$$

Предположим, что

$$g_n(x)=\frac{1+\varphi_n(x)}{(2\pi)^{1/2}}e^{inx}. \qquad (29.55)$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f_n(x)-g_n(x))(\overline{f_m}(x)-\overline{g_m}(x))\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(x)\overline{\varphi_m}(x)\,e^{i(n-m)}\,dx. \qquad (29.56)$$

Если мы примем, что все $\varphi_n(x)$ обращаются в нуль вместе со своими первыми производными в точках $\pm\pi$ и являются вторыми повторными интегралами от своих вторых производных, которые принадлежат $L_2$, то для выражения (29.56) получим оценку

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i(n-m)x}}{m-n}(\varphi_n(x)\overline{\varphi_m'(x)}+\varphi_n'(x)\overline{\varphi_m(x)})\,dx\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i(n-m)x}}{(n-m)^2}(\varphi_n(x)\overline{\varphi_m''(x)}+\right.$$

$$\left.+2\varphi_n'(x)\overline{\varphi_m'(x)}+\varphi_n''(x)\overline{\varphi_m(x)})\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(n-m)^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\left\{\left[\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n(x)|^2\,dx\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_m''(x)|^2\,dx\right]^{1/2}+\right.$$

$$+2\left[\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n'(x)|^2\,dx\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_m'(x)|^2\,dx\right]^{1/2}+$$

$$\left.+\left[\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n''(x)|^2\,dx\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_m(x)|^2\,dx\right]^{1/2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4\pi}{(n-m)^2}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n''(x)|^2\,dx\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_m''(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}. \qquad (29.57)$$

Здесь мы воспользовались оценками

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n'(x)|^2\,dx \leqslant 2\pi \max |\varphi_n'(x)|^2 =$$

$$= 2\pi \max \left| \int_x^{\pm\pi} \varphi_n''(x)\,dx \right|^2 \leqslant 2\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n''(x)|^2\,dx \qquad (29.58)$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x)|^2\,dx \leqslant 2\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n'(x)|^2\,dx \leqslant 4\pi^4 \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n''(x)|^2\,dx. \qquad (29.59)$$

Таким образом, если

$$\sup \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n''(x)|^2\,dx = A, \qquad (29.60)$$

то имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{-N}^{N} a_n (f_n(x) - g_n(x)) \right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi^3 A \sum_{-N}^{N} |a_n|^2 + 4\pi A \sum_{m,\ n=-N}^{N}{}' \frac{a_m \bar{a}_n}{(m-n)^2} =$$

$$= A \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{-N}^{N} a_n e^{inx} \right|^2 \left( \pi^2 + 2 \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{inx}}{n^2} \right) dx =$$

$$= A \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{-N}^{N} a_n e^{inx} \right|^2 \left( \frac{5\pi^2}{3} - 2\pi x + x^2 \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi A \left( \frac{2\pi^2}{3} \right) \sum_{-N}^{N} |a_n|^2. \qquad (29.61)$$

Отсюда следует, что если все функции $\varphi_n(x)$ являются вторыми повторными интегралами от своих вторых производных, которые принадлежат $L_2$, если все $\varphi_n(x)$ вместе с их первыми производными обращаются в нуль в точках $\pm\pi$ и если

$$\sup \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n''(x)|^2 dx < \frac{3}{4\pi^3}, \tag{29.62}$$

то выполнено условие (29.01). Нет никакой причины предполагать, что эти условия являются наименее ограничительными достаточными условиями такого типа. (Этот тип условий был предложен одному из авторов профессором Биркгофом.) Этот тип интересен сам по себе, потому что в большинстве прежних случаев при применении аналогичных методов варьирования множества ортогональных функций множество, соответствовавшее $g_n$, имело в качестве асимптотики именно множество $f_n$. Можно надеяться, что методы этого параграфа найдут дальнейшие применения к изучению задач о разложениях по специальным функциям.

**30. Негармонические ряды Фурье.** Пусть снова $a$, $b$ и функции $f_n(x)$ определены соотношениями (29.54); положим

$$g_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{i\lambda_n x}, \tag{30.01}$$

где

$$|\lambda_n - n| \leqslant L < \frac{1}{\pi^2}. \tag{30.02}$$

Имеем

$$\sum_{-N}^{N} a_n (f_n(x) - g_n(x)) = \sum_{-N}^{N} \frac{a_n}{(2\pi)^{1/2}} (e^{inx} - e^{i\lambda_n x}) =$$

$$= ix \sum_{-N}^{N} \frac{a_n}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\lambda_n}^{n} e^{iux} du = \frac{ix}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) e^{iux} du, \tag{30.03}$$

где функция $\psi(u)$ определяется следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } n < \lambda_n, \text{ то } \psi(u) = -a_n \text{ на } (n, \lambda_n); \\ \text{если } \lambda_n < n, \text{ то } \psi(u) = a_n \text{ на } (\lambda_n, n); \\ \text{вне этих интервалов } \psi(u) = 0. \end{array}\right\} \tag{30.04}$$

По теореме Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} \left| \sum_{-N}^{N} a_n (f_n(x) - g_n(x)) \right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(u)|^2 du =$$

$$= \sum_{-N}^{N} |n - \lambda_n| \, |a_n|^2 \leqslant L \sum_{-N}^{N} |a_n|^2. \qquad (30.05)$$

Неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} \left| \sum_{-N}^{N} a_n (f_n(x) - g_n(x)) \right|^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi^2} \left| \sum_{-N}^{N} a_n (f_n(x) - g_n(x)) \right|^2 dx \qquad (30.06)$$

очевидно. Таким образом, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{-N}^{N} a_n (f_n(x) - g_n(x)) \right|^2 \leqslant \pi^2 L \sum_{-N}^{N} |a_n|^2, \qquad (30.07)$$

что и дает неравенство (29.01) в этом случае. Таким образом, мы можем применить теорему XXXVII; мы видим, что множество функций $\{e^{i\lambda_n x}\}$ замкнуто в $L_2$ на $(-\pi, \pi)$. Это является просто подтверждением части теоремы XXXIV; строго новым является то, что если $f(x)$ принадлежит $L_2$ на $(-\pi, \pi)$, то можно написать

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{-N}^{N} a_n e^{i\lambda_n x}, \qquad (30.08)$$

где

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leqslant \text{const.} \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \qquad (30.09)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \leqslant \text{const.} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \qquad (30.10)$$

Определив $f(x)$ равенством (30.08), положим

$$f_\xi(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{-N}^{N} a_n e^{i\lambda_n \xi} e^{i\lambda_n x}. \tag{30.11}$$

Из неравенств (30.09) и (30.10) следует, что эта функция существует и принадлежит $L_2$, а сравнивая ее при различных значениях $\xi$, мы видим, что ее можно записать в форме

$$f_\xi(x) = f(x+\xi) \qquad [-\infty < x < \infty]. \tag{30.12}$$

В силу (30.09) имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\xi)|^2\,dx \leqslant \text{const.} \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n e^{i\lambda_n\xi}|^2 = \text{const.} \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2, \tag{30.13}$$

а в силу (30.10)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\xi)|^2\,dx \leqslant \text{const.} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx. \tag{30.14}$$

Пусть $f_1(x)$ — периодическая функция с периодом $2\pi$, которая совпадает с $f(x)$ на $(-\pi, \pi)$; положим

$$g(x) = f_a(x) - f_b(x). \tag{30.15}$$

По теореме Минковского имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+\xi)|^2\,dx \leqslant \text{const.}, \tag{30.16}$$

а по определению $g(x)$ имеем (кроме самое большее множества меры нуль)

$$g(x) = 0 \quad (-\pi < x < \pi). \tag{30.17}$$

Таким образом, интеграл

$$\frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} |g(x)|^2\,dx \tag{30.18}$$

ограничен. Отсюда

$$\int_{-B}^{B} \frac{|g(x)|^2\,dx}{x^2} = \int_{\pi}^{B} \frac{1}{x^2}\, d \int_{-x}^{x} |g(\xi)|^2\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{B^2} \int_{-B}^{B} |g(x)|^2\, dx + \int_{\pi}^{B} \frac{2\,dx}{x^3} \int_{-x}^{x} |g(\xi)|^2\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{B} + \int_{\pi}^{B} \frac{c\,dx}{x^2} = c, \quad (30.19)$$

где $c$ представляет различные постоянные. Значит, функция $g(x)/x$ принадлежит $L_2$. По теореме Планшереля она имеет преобразование Фурье

$$G(u) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \operatorname*{l.i.m.}_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{g(x)\,e^{-iux}\,dx}{x}, \quad (30.20)$$

также принадлежащее $L_2$, и

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \operatorname*{l.i.m.}_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} G(u)\,e^{iux}\,dx. \quad (30.21)$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{g(x)(1-e^{iwx})}{x} \doteq$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \operatorname*{l.i.m.}_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} [G(u) - G(u-w)]\,e^{iux}\,dx. \quad (30.22)$$

С другой стороны, во всякой бесконечной области

$$g(x) = f_a(x) - f_b(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} (a_n e^{inx} - b_n e^{i\lambda_n x}), \quad (30.23)$$

так что на $(-\infty, \infty)$

$$\frac{g(x)(1-e^{iwx})}{x} = \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} \left( ia_n \int_{n+w}^{n} e^{iux}\,du - ib_n \int_{\lambda_n+w}^{\lambda_n} e^{iux}\,du \right). \quad (30.24)$$

Непосредственно очевидно, что, поскольку ряды $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2$ и $\sum_{-\infty}^{\infty} |b_n|^2$ сходятся, формула (30.24) представляет функцию $g(x)(1-e^{iwx})/x$ как преобразование Фурье некоторой функции из $L_2$, которое должно почти всюду совпадать с преобразованием, даваемым формулой (30.22).

Это возможно, только если

$$G(u) + \sum_{1<n<u} ia_n (2\pi)^{1/2} - \sum_{1<\lambda_n<u} ib_n (2\pi)^{1/2} \sim K = \text{const.} \quad (u > 0). \tag{30.25}$$

Заметим, что этот результат и аналогичный результат при отрицательных $u$ приводят нас к соотношению

$$G(u) = \text{const.} \quad \left[ \left| n + \frac{1}{2} - u \right| < \frac{1}{10} \right], \tag{30.26}$$

выполняющемуся, за исключением множества меры нуль, на каждом таком интервале. Эти множества мы можем считать пустыми. Поскольку $G(u)$ принадлежит $L_2$, это дает нам

$$\lim_{n\to\pm\infty} G\left(n + \frac{1}{2}\right) = 0, \tag{30.27}$$

а ввиду того, что $a_n$ и $b_n$ стремятся к нулю, когда $n \to \pm\infty$, мы можем так определить $G(u)$, что

$$\lim_{u\to\pm\infty} G(u) = 0. \tag{30.28}$$

Таким образом, в силу (30.25) и в силу аналогичного результата для отрицательных $u$ имеем

$$\sum_{2}^{\infty} (ia_n (2\pi)^{1/2} - ib_n (2\pi)^{1/2}) = K =$$
$$= -\sum_{-\infty}^{1} (ia_n (2\pi)^{1/2} - ib_n (2\pi)^{1/2}), \tag{30.29}$$

что позволяет написать

$$G(u) = \sum_{u<n} ia_n (2\pi)^{1/2} - \sum_{u<\lambda_n} ib_n (2\pi)^{1/2}. \tag{30.30}$$

При этом суммировании члены $ia_m(2\pi)^{1/2}-ib_m(2\pi)^{1/2}$ заключаются в скобки, за возможным исключением последнего члена.

Пусть $x$ лежит в интервале $(-\pi+\varepsilon,\ \pi-\varepsilon)$. Положим

$$F_w(x)=\frac{\sin wx}{x}\quad (|x|\geqslant \varepsilon/2),$$
$$F_w(x)=a\quad (|x|<\varepsilon/2), \tag{30.31}$$
$$H_w(x)=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-A}^{A}F_w(x)\,e^{iux}\,dx. \tag{30.32}$$

Имеем

$$H_w(x)=\frac{1}{2i}(\varphi(u+w)-\varphi(u-w)), \tag{30.33}$$

где

$$\varphi(u)=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\left[\int_{-A}^{-\varepsilon/2}+\int_{\varepsilon/2}^{A}\right]\frac{e^{iux}}{x}\,dx. \tag{30.34}$$

Отсюда сразу же следует, что

$$\overline{\lim_{w\to\infty}}\int_{-A}^{A}|H_w(u)|^2\,du\leqslant\overline{\lim_{w\to\infty}}\int_{-A+w}^{A+w}|\varphi(u)|^2\,du+$$
$$+\overline{\lim_{w\to\infty}}\int_{-A-w}^{A-w}|\varphi(u)|^2\,du=0. \tag{30.35}$$

С другой стороны,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|H_w(u)|^2\,du\leqslant 2\int_{\varepsilon/2}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{4}{\varepsilon}. \tag{30.36}$$

На интервале $(-\pi+\varepsilon,\ \pi-\varepsilon)$ имеем

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi)}{\xi}\cdot\frac{\sin w(x-\xi)}{x-\xi}\,d\xi\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi)}{\xi}F_w(x-\xi)\,d\xi\right|=$$
$$=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(-u)\,H_w(u)\,e^{-iux}\,du\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-A}^{A}|G(u)|^2\,du\int_{-A}^{A}|H_w(u)|^2\,du\right\}^{1/2}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left\{\left[\int_{A}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A}\right]|G(u)|^2\,du\left[\int_{A}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A}\right]|H_w(u)|^2\,du\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant \text{const.}\left\{\int_{-A}^{A}|H_u(u)|^2\,du\right\}^{1/2}+$$

$$+\text{const.}\left\{\left[\int_{A}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A}\right]|G(u)|^2\,du\right\}^{1/2}. \quad (30.37)$$

Мы можем сначала выбрать $A$ столь большим, чтобы второй член в последней строке этой формулы не превосходил $\eta/2$, а затем выбрать $w$ столь большим, чтобы первый член не превосходил $\eta/2$. Поскольку $\eta$ произвольно, отсюда сразу же следует, что

$$\lim_{w\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi)}{\xi}\,\frac{\sin w(x-\xi)}{x-\xi}\,d\xi=0 \qquad (30.38)$$

равномерно на интервале $(-\pi+\varepsilon,\ \pi-\varepsilon)$. Далее, поскольку

$$\frac{1}{2}\int_{-w}^{w}e^{iux}\,du=\frac{\sin wx}{x},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin wx}{x}e^{-iux}\,dx=\begin{cases}1, & \text{если } |u|<w,\\ 0, & \text{если } |u|>w,\end{cases} \qquad (30.39)$$

то в силу теоремы Парсеваля получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi)}{\xi}\cdot\frac{\sin w(x-\xi)}{x-\xi}\,d\xi=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-w}^{w}G(u)e^{iux}\,du=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}G(w)\frac{e^{iwx}}{ix}-\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}G(-w)\frac{e^{-iwx}}{ix}-$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-w}^{w}\frac{e^{iux}dG(u)}{ix}. \quad (30.40)$$

Но

$$-\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-w}^{w}\frac{e^{iux}dG(x)}{ix}=\frac{1}{x}\Big[\sum_{-[w]}^{[w]}a_n e^{inx}-\sum_{w>\lambda_n>-w}b_n e^{i\lambda_n x}\Big]. \tag{30.41}$$

Поскольку $G(w)$ стремится к нулю, когда $w\to\pm\infty$, и поскольку $b_n\to 0$ при $n\to\pm\infty$, имеем

$$\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi)}{\xi}\frac{\sin w(x-\xi)}{x-\xi}\,d\xi=\sum_{-[w]}^{[w]}(a_n e^{inx}-b_n e^{i\lambda_n x})+o(1), \tag{30.42}$$

и в силу (30.38)

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{-N}^{N}(a_n e^{inx}-b_n e^{i\lambda_n x})=0 \tag{30.43}$$

равномерно на интервале $(-\pi+\varepsilon,\ \pi-\varepsilon)$. Мы получаем, таким образом, теорему:

Теорема XXXVIII. *Пусть*

$$|\lambda_n-n|\leqslant L<\frac{1}{\pi^2}\qquad [n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ -1,\ -2,\ \ldots]. \tag{30.44}$$

*Тогда множество функций* $\{e^{i\lambda_n x}\}$ *замкнуто в* $L_2$ *на* $(-\pi, \pi)$ *и обладает единственным замкнутым нормальным биортогональным множеством* $\{h_n(x)\}$. *Если* $f(x)$ — *произвольная функция, принадлежащая* $L_2$ *на* $(-\pi, \pi)$, *то ряд*

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{e^{inx}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)e^{in\xi}\,d\xi-e^{i\lambda_n x}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\,h_n(\xi)\,d\xi\right\} \tag{30.45}$$

*сходится равномерно к нулю на любом интервале вида* $(-\pi+\varepsilon\leqslant x\leqslant\pi-\varepsilon)$ *и на любом таком интервале свойства сходимости и суммируемости ряда*

$$\sum_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda_n x}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\,h_n(\xi)\,d\xi \tag{30.46}$$

*совпадают со свойствами обычного ряда Фурье*

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{inx}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\,e^{-in\xi}\,d\xi. \tag{30.47}$$

Мы все еще не знаем, сохраняется ли эта эквивалентность для произвольных функций из $L_1$, и даже не знаем никаких свойств этих рядов. Мы определенно знаем, что свойства эквивалентности, которые мы установили, не выполняются для абсолютной сходимости, ибо изменение всего лишь одной из функций $e^{inx}$ в общем случае достаточно для того, чтобы разрушить это свойство.

Мы не располагаем доказательством, что постоянная $1/\pi^2$ в неравенстве (30.44) является наилучшей. Заменяя в формуле (30.06) выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} \left| \sum_{-N}^{N} a_n (f_n(x) - g_n(x)) \right|^2 dx \tag{30.48}$$

выражением

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{-N}^{N} a_n (f_n(x) - g_n(x)) \right|^2 dx, \tag{30.49}$$

мы прошли через промежуточную стадию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{x^2} \left| \sum_{-N}^{N} a_n (f_n(x) - g_n(x)) \right|^2 dx. \tag{30.50}$$

Очень легко придумать примеры, показывающие, что переход от (30.50) к (30.49) является в некотором смысле наилучшим из возможных и что все большие значения суммы $\sum_{-N}^{N} a_n (f_n(x) - g_n(x))$ могут концентрироваться около точек $\pm\pi$. Однако переход от (30.48) к (30.50) может содержать потерю точности, которую учесть труднее*).

Теорема XXXVIII доказывает и больше и меньше, чем теорема XXXIII, которую мы установили совершенно иными методами. Интервал в теореме XXXVIII у́же, чем в теореме XXXIII, но, с другой стороны, мы отказались от условий $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_{-n} = -\lambda_n$. Мы доказали также нечто гораздо большее, чем простая замкнутость.

---

*) Постоянная $1/\pi^2$ была недавно улучшена д-ром Малином (H. Malin) в его диссертации в Массачусетском технологическом институте. Наилучшая постоянная все еще неизвестна.

Биортогональное множество функций $\{h_n(x)\}$ заслуживает некоторого внимания. Мы ограничимся случаем, когда $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{-n} = -\lambda_n$, или близко родственным случаем, когда это условие не выполняется только для конечного числа показателей $\lambda_k$. Этот второй случай столь походит на первый, что нет необходимости рассматривать его отдельно.

Положим поэтому

$$G(z) = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right). \tag{30.51}$$

По теореме XXX функция $G(z)$ не будет принадлежать $L_2$ на вещественной оси, а $G(z)/z$ будет принадлежать $L_2$. Таким образом, все функции

$$h_n(x) = \frac{1}{2\pi G'(\lambda_n)} \operatorname*{l.i.m.}_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} \frac{G(u)}{u - \lambda_n} e^{-iux} du \tag{30.52}$$

будут принадлежать $L_2$. В силу (27.20) будем иметь всюду, за исключением множества меры нуль,

$$h_n(x) = 0 \quad [\,|x| > \pi] \tag{30.53}$$

и, поскольку функции $G(u)/(G'(\lambda_n)(u - \lambda_n))$ являются аналитическими и принимают значение 1 в точке $\lambda_n$ и значение 0 в точках $\lambda_m$ $(m \neq n)$, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} h_m(x)\, e^{i\lambda_n x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} h_m(x)\, e^{i\lambda_n x}\, dx = \begin{cases} 1, & \text{если } m = n, \\ 0, & \text{если } m \neq n. \end{cases} \tag{30.54}$$

Таким образом, эти функции $h_n(x)$ совпадают с функциями, обозначенными тем же символом в теореме XXXVIII. Они образуют замкнутое множество на интервале $(-\pi, \pi)$, и если $f(x)$ принадлежит $L_2$, то

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} h_n(x) \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, e^{i\lambda_n \xi} d\xi. \tag{30.55}$$

В этом случае, как показывает теорема XXXVII,

$$\frac{1}{c}\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, e^{i\lambda_n\xi}\, d\xi\right|^2 \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, e^{i\lambda_n\xi}\, d\xi\right|^2. \qquad (30.56)$$

Производя преобразование Фурье, получим

$$\frac{1}{c_1}\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left|\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\sum_{-N}^{N}\frac{a_n G(u)}{G'(\lambda_n)(u-\lambda_n)}\right|^2 du \leqslant$$

$$\leqslant c_1\sum_{-\infty}^{\infty}|a_n|^2, \qquad (30.57)$$

где

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, e^{i\lambda_n\xi}\, d\xi. \qquad (30.58)$$

Неравенства (30.57) справедливы в широком смысле, именно, если какой-либо из членов в этих неравенствах конечен, то конечен и другой и неравенства выполняются.

Выражение

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{-N}^{N}\frac{a_n G(u)}{G'(\lambda_n)(u-\lambda_n)} \qquad (30.59)$$

можно рассматривать как интерполяционную формулу Лагранжа для функции, принимающей значения $a_n$ в точках $\lambda_n$. Мы можем резюмировать наши результаты в той степени, в какой они касаются интерполяции, следующим образом:

Теорема XXXIX. *Пусть*

$$|\lambda_n - n| \leqslant L < \frac{1}{\pi^2} \qquad (n=1, 2, \ldots),\ \lambda_0 = 0,\ \lambda_{-n} = -\lambda_n). \qquad (30.60)$$

*Назовем выражение* (30.59) *интерполяционной формулой Лагранжа для функции, принимающей значения* $a_n$

*в точках* $\lambda_n$. *Тогда класс всех функций, определяемых подобными интерполяционными формулами Лагранжа с*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty, \tag{30.61}$$

*совпадает с классом всех целых функций* $\varphi(u)$, *принадлежащих* $L_2$ *на вещественной оси и удовлетворяющих условию*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{\pi r} \lg |\varphi(re^{i\theta})| \leqslant 1, \tag{30.62}$$

*или, если оставаться на вещественной оси, он совпадает с классом всех функций из* $L_2$, *преобразования Фурье которых обращаются в нуль вне* $(-\pi, \pi)$. *Кроме того, справедливы соотношения* (30.57) *и* (30.58).

Устанавливая эту теорему, мы воспользовались теоремой V.

**31. Новый класс почти периодических функций.** Мы скажем, что функция $f(x)$ (вообще говоря, комплексно-значная) вещественного переменного $x\,(-\infty < x < \infty)$ является *псевдопериодической*, если $f(x)$ принадлежит $L_2$ в любой конечной области и если существуют два положительных числа $A$ и $B$ такие, что для любого набора $(a_1, \ldots, a_n)$ комплексных чисел и для любого набора $(b_1, \ldots, b_n)$ вещественных чисел и для вещественных $x$ и $y$ выполняется неравенство

$$\frac{\displaystyle\int_x^{x+A} \left| \sum_1^n a_k f(\xi + b_k) \right|^2 d\xi}{\displaystyle\int_y^{y+A} \left| \sum_1^n a_k f(\xi + b_k) \right|^2 d\xi} < B. \tag{31.01}$$

Наибольшую нижнюю грань чисел $A$ для всех $B > 0$ мы будем называть *псевдопериодом* функции $f(x)$.

Теорема XL. *Класс псевдопериодических функций овпадает с классом всех функций, не эквивалентных* *нулю, которые принадлежат классу Степанова 2* *) *и характеристические частоты* $\{\lambda_n\}$ *которых располагаются так, что*

$$\inf |\lambda_m - \lambda_n| > 0. \tag{31.02}$$

Здесь мы говорим, что функция $f(x)$ из $L_2$ принадлежит классу Степанова 2 и имеет характеристические частоты $\{\lambda_n\}$, если для любого заданного $\varepsilon$ мы можем найти целое число $N$ и полином

$$P_\varepsilon(x) = \sum_1^N a_n e^{i\lambda_n x} \tag{31.03}$$

такой, что для любого $x$

$$\int_x^{x+1} |P_\varepsilon(\xi) - f(\xi)|^2 d\xi < \varepsilon. \tag{31.04}$$

Пусть $f(x)$ — такая функция, и пусть нижняя грань (31.02) положительна и больше $L$. Тогда функции

$$\left\{e^{i\lambda_n x} \frac{1}{x} \sin \frac{Lx}{2}\right\}$$

будут иметь преобразования Фурье

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{i\lambda_n x} \frac{1}{x} \sin \frac{Lx}{2}\, dx =$$
$$= \begin{cases} \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{1/2}, & \text{если } |\lambda_n + u| < \dfrac{L}{2}, \\ 0, & \text{если } |\lambda_n + u| > \dfrac{L}{2}, \end{cases} \tag{31.05}$$

которые отличны от нуля в неперекрывающихся областях и ортогональны. Таким образом, по теореме Планшереля имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |P_\varepsilon(x)|^2 \frac{\sin^2 \frac{Lx}{2}}{x^2}\, dx = \sum_1^N |a_n|^2 \frac{\pi L}{2}. \tag{31.06}$$

*) В. Степанов, Sur quelques généralisations des fonctions presque périodiques, Comptes Rendus, vol. 181, стр. 90—92.

Отсюда

$$\int_{-\pi/L}^{\pi/L} |P_\varepsilon(x)|^2\,dx \leqslant \frac{\pi^3}{2L}\sum_1^N |a_n|^2 \tag{31.07}$$

и вообще

$$\int_{-\pi/L+y}^{\pi/L+y} |P_\varepsilon(x)|^2\,dx \leqslant \frac{\pi^3}{2L}\sum_1^N |a_n|^2. \tag{31.071}$$

Пусть теперь сумма $\sum\limits_1^N |a_n|^2$ задана. В силу (31.071) при $A > \pi/L$ имеем

$$\int_{-A}^{A} |P_\varepsilon(x)|^2 dx \leqslant \pi^2 A\sum_1^N |a_n|^2. \tag{31.08}$$

Таким образом,

$$\left|\left[\int_A^\infty + \int_{-\infty}^{-A}\right] \frac{|P_\varepsilon(x)|^2}{x^2}\,dx\right| = \left|\int_A^\infty \frac{1}{x^2}\,d\int_{-x}^{x} |P_\varepsilon(\xi)|^2\,d\xi\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{A^2}\int_{-A}^{A} |P_\varepsilon(\xi)|^2\,d\xi + 2\int_A^\infty \frac{dx}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\int_{-x}^{x} |P_\varepsilon(\xi)|^2\,d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi^2\sum_1^N |a_n|^2 \int_A^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{2\pi^2}{A}\sum_1^N |a_n|^2. \tag{31.09}$$

Отсюда, используя (31.06), получаем

$$\int_{-A}^{A} |P_\varepsilon(x)|^2 \frac{\sin^2\dfrac{Lx}{2}}{x^2}\,dx \geqslant \left[\frac{\pi L}{2} - \frac{2\pi^2}{A}\right]\sum_1^N |a_n|^2 \tag{31.10}$$

и, если $c > 0$,

$$\int_{-4\pi^2/(\pi L-2c)}^{4\pi^2/(\pi L-2c)} |P_\varepsilon(x)|^2\,dx \geqslant \frac{4}{L^2}\int_{-4\pi^2/(\pi L-2c)}^{4\pi^2/(\pi L-2c)} |P_\varepsilon(x)|^2 \frac{\sin^2\frac{Lx}{2}}{x^2}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4c}{L^2}\sum_1^N |a_n|^2 \geqslant \frac{8c}{L^2\pi^2}\cdot\frac{\pi L-2c}{4\pi^2}\int_{-4\pi^2/(\pi L-2c)+y}^{4\pi^2/(\pi L-2c)+y} |P_\varepsilon(x)|^2\,dx. \tag{31.11}$$

Таким образом, мы установили неравенство (31.01) с

$$A=\frac{8\pi^2}{\pi L-2c},\quad B^{-1}=\frac{2c}{\pi^4L^2}(\pi L-2c) \tag{31.12}$$

для полинома $P_\varepsilon(x)$, его сдвигов и их линейных комбинаций, вместо $f(x)$ и функций, получаемых из нее аналогично. С помощью неравенства Минковского результат можно перенести на саму $f(x)$. В силу (31.12) псевдопериод $f(x)$ не превосходит $8\pi/L$.

Пусть, с другой стороны, $f(x)$ псевдопериодична, а $A$ и $B$ взяты согласно (31.01). Если $K(x)$ принадлежит $L_2$ и обращается в нуль вне $(-D, D)$, то в любой конечной области функцию $\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)f(\xi)\,d\xi$ можно аппроксимировать в среднем полиномом $\sum_{-N}^{N} a_n f(x+b_n)$ *);

---

*) $$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)f(\xi)\,d\xi=\int_{-D+x}^{D+x} K(x-\xi)f(\xi)\,d\xi;$$

поэтому в любой конечной области значений $x$ мы можем использовать функцию $f_N(x)=f(x)$, $|x|\leqslant N$; $f_N(x)=0$, $|x|>N$. Пусть $g_N(u)$ — преобразование $f_N(x)$ и $k(u)$ — преобразование $K(x)$. Тогда мы хотим аппроксимировать в среднем функцию

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(u)\,g_N(u)\,e^{iux}\,dx=\int_{-D+x}^{D+x} K(x-\xi)f(\xi)\,d\xi$$

в любой области $|x|<N-D$. Если мы воспользуемся теперь теоремой Планшереля и неравенством Минковского и разложим

отсюда следует, что если $(x, x+A)$ и $(y, y+A)$ лежат в этой области, то

$$\frac{\int\limits_{x}^{x+A}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\eta-\xi) f(\xi)\, d\xi\right|^2 d\eta}{\int\limits_{y}^{y+A}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\eta-\xi) f(\xi)\, d\xi\right|^2 d\eta} \leqslant B. \tag{31.13}$$

Поскольку область аппроксимации произвольна, это неравенство выполняется для всех вещественных $x$ и $y$. В частности, если

$$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\left|1-\frac{|\xi-x|}{\varepsilon}\right| f(\xi)\, d\xi, \tag{31.14}$$

то

$$\frac{\int\limits_{x}^{x+A} |f_\varepsilon(\xi)|^2\, d\xi}{\int\limits_{y}^{y+A} |f_\varepsilon(\xi)|^2\, d\xi} \leqslant B, \tag{31.15}$$

$$\frac{\int\limits_{x}^{x+A} |f'_\varepsilon(\xi)|^2\, d\xi}{\int\limits_{y}^{y+A} |f'_\varepsilon(\xi)|^2\, d\xi} \leqslant B, \tag{31.16}$$

а из (31.01) непосредственно вытекает, что

$$\frac{\int\limits_{x}^{x+A} |f''_\varepsilon(\xi)|^2\, d\xi}{\int\limits_{y}^{y+A} |f''_\varepsilon(\xi)|^2\, d\xi} \leqslant B. \tag{31.17}$$

---

$k(u)$ в ряд Фурье на интервале $(-c, c)$, так что

$$k(u) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\pi n u/c}$$

в этой области, то мы получим искомое $L_2$-приближение в желаемой форме $\sum\limits_{-N}^{N} a_n f(x+b_n)$.

Отсюда, если $w < A$, то

$$|f'_\varepsilon(x+w) - f'_\varepsilon(x)|^2 = \left| \int_x^{x+w} f''_\varepsilon(\xi)\, d\xi \right|^2 < A \int_x^{x+w} |f''_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi < C. \tag{31.18}$$

В силу (31.16)

$$\int_x^{x+A} |f'_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \leqslant C, \tag{31.19}$$

и, следовательно, $|f'_\varepsilon(\xi)| \leqslant C$ для некоторого $\xi$ между $x$ и $x+A$. Отсюда в силу (31.18)

$$|f'_\varepsilon(x)| < C. \tag{31.20}$$

Аналогично в силу (31.15)

$$|f_\varepsilon(x)| < C. \tag{31.21}$$

Таким образом, функции $f_\varepsilon(x+\sigma_n)$ являются равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными, и для любой конечной области произвольная последовательность вещественных чисел $\{\sigma_n\}$ содержит подпоследовательность $\{\mu_n\}$ такую, что предел

$$\lim_{n\to\infty} f_\varepsilon(x+\mu_n) = g_\varepsilon(x) \tag{31.22}$$

существует равномерно.

В силу (31.01) при $-\infty < x < \infty$

$$\lim_{m,\, n\to\infty} \int_x^{x+A} |f_\varepsilon(\xi+\mu_m) - f_\varepsilon(\xi+\mu_n)|^2 d\xi = 0, \tag{31.23}$$

так что равномерно по любой области $(x, x+A)$ существует предел

$$g_\varepsilon(x) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, f_\varepsilon(x+\mu_n). \tag{31.24}$$

Мы будем иметь равномерно

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} g_\varepsilon(\xi)\, d\xi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_\varepsilon(\xi+\mu_n)\, d\xi. \tag{31.25}$$

Таким образом, функция

$$\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_\varepsilon(\xi)\,d\xi \tag{31.26}$$

является нормальной *) в смысле Бохнера, т. е. в том смысле, что всякая последовательность $\varphi_\varepsilon(x+b_n)$ содержит подпоследовательность, равномерно на $(-\infty, \infty)$ стремящуюся к пределу, и, значит, $\varphi_\varepsilon(x)$ почти периодична. Как следствие мы получаем, что предел **)

$$a_\Lambda=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{x}^{x+T}\varphi_\varepsilon(\xi)\,e^{i\Lambda\xi}\,d\xi \tag{31.27}$$

будет существовать равномерно по $x$ для всех $\Lambda$ и будет отличен от 0 только для счетного множества $\{\Lambda_n\}$ значений $\Lambda$. В силу (31.13)

$$\frac{\int\limits_{y}^{y+A}\left|\frac{1}{a_{\Lambda_m}T}\int\limits_{x}^{x+T}\varphi_\varepsilon(\xi)\,e^{i\Lambda_m(\xi-x)}d\xi-\frac{1}{a_{\Lambda_n}T}\int\limits_{x}^{x+T}\varphi_\varepsilon(\xi)\,e^{i\Lambda_n(\xi-x)}d\xi\right|^2dx}{\int\limits_{z}^{z+A}\left|\frac{1}{a_{\Lambda_m}T}\int\limits_{x}^{x+T}\varphi_\varepsilon(\xi)\,e^{i\Lambda_m(\xi-x)}d\xi-\frac{1}{a_{\Lambda_n}T}\int\limits_{x}^{x+T}\varphi_\varepsilon(\xi)\,e^{i\Lambda_n(\xi-x)}d\xi\right|^2dx}\leqslant B, \tag{31.28}$$

и согласно (31.27)

$$\frac{\int\limits_{y}^{y+A}|e^{-i\Lambda_m x}-e^{-i\Lambda_n x}|^2\,dx}{\int\limits_{z}^{z+A}|e^{-i\Lambda_m x}-e^{-i\Lambda_n x}|^2\,dx}\leqslant B. \tag{31.29}$$

То есть

$$\frac{\int\limits_{y}^{y+A}(1-\cos(\Lambda_m-\Lambda_n)\,x)\,dx}{\int\limits_{z}^{z+A}(1-\cos(\Lambda_m-\Lambda_n)\,x)\,dx}\leqslant B, \tag{31.30}$$

---

*) A. S. Besicovich, Almost periodic functions, Cambridge, 132, стр. 10.

**) См. там же, стр. 15.

откуда при $\Lambda_m > \Lambda_n$ и $\Lambda_m - \Lambda_n$ достаточно малом, полагая

$$y = \frac{\pi}{\Lambda_m - \Lambda_n} - \frac{A}{2}, \quad z = -\frac{A}{2},$$

видим, что

$$\frac{1 + \cos(\Lambda_m - \Lambda_n)\frac{A}{2}}{1 - \cos(\Lambda_m - \Lambda_n)\frac{A}{2}} < B. \tag{31.31}$$

Отсюда получаем

$$(\Lambda_m - \Lambda_n)\frac{A}{2} > B^{-1/2}. \tag{31.32}$$

Из другой фундаментальной теоремы теории почти периодических функций *) вытекает, что функцию $\varphi_\varepsilon(x)$ можно равномерно аппроксимировать полиномом

$$\sum_{1}^{N} C_k e^{-i\Lambda_k x}. \tag{31.33}$$

Пусть на $(-D, D)$

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{in\pi x/D}. \tag{31.34}$$

Тогда внутри $(-D + 2\varepsilon, D - 2\varepsilon)$

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} d_n \frac{4D^2}{n^2\pi^2\varepsilon^2} \sin^2 \frac{n\pi\varepsilon}{2D} e^{in\pi x/D} \tag{31.35}$$

и

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} d_n \frac{4D^3}{n^3\pi^3\varepsilon^3} \sin^2 \frac{n\pi\varepsilon}{2D} \sin \frac{n\pi\varepsilon}{D} e^{in\pi x/D}. \tag{31.36}$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-D+2\varepsilon}^{D-2\varepsilon} |f(x) - \varphi_\varepsilon(x)|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\varepsilon \to \infty} 2D \sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n|^2 \left| 1 - \frac{4D^3}{n^3\pi^3\varepsilon^3} \sin^2 \frac{n\pi\varepsilon}{2D} \sin \frac{n\pi\varepsilon}{D} \right|^2 = 0. \tag{31.37}$$

---

*) См. A. S. Besicovich, Almost periodic functions, Cambridge, стр. 29.

В точности таким же рассуждением, каким мы воспользовались, чтобы установить (31.13), получаем, что при $2D > A+4\varepsilon$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_x^{x+A} |f(x)-\varphi_\varepsilon(x)|^2\,dx = 0 \tag{31.38}$$

равномерно по $x$ на $(-\infty, \infty)$. Из аппроксимации (31.33) вытекает, что для любого $\varepsilon$ мы можем найти такой многочлен $\sum_1^n l_k e^{-i\Lambda_k x}$, что оценка

$$\int_n^{x+A} \Big| f(\xi) - \sum_1^n l_k e^{-i\Lambda_k \xi} \Big|^2 d\xi < \varepsilon \tag{31.39}$$

будет выполняться равномерно на $(-\infty, \infty)$; отсюда

$$\int_x^{x+1} \Big| f(\xi) - \sum_1^n l_k e^{-i\Lambda_k \xi} \Big|^2 d\xi < \varepsilon\left[\frac{1}{A}+1\right], \tag{31.40}$$

и теорема XL доказана.

Заметим, что по классической теореме Степанова функции, почти периодической в смысле класса Степанова 2, сопоставляется счетное множество показателей $\{\lambda_n\}$, из которого могут быть выбраны показатели $\Lambda_k$ в неравенстве (31.40). Более того, если нам дана псевдопериодическая функция $f(x)$ с показателями $\{\lambda_n\}$, то мы можем написать

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(x)|^2\,dx = \sum_1^\infty \left| \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,e^{-i\lambda_n x}\,dx \right|^2 \tag{31.41}$$

и

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{T_1\to\infty}\frac{1}{2T_1}\int_{-T_1}^{T_1}\left| f(x) - \sum_1^N \lim_{T\to\infty}\frac{e^{i\lambda_n x}}{2T}\int_{-T}^{T} f(\xi)\,e^{-i\lambda_n \xi}\,d\xi\right|^2 dx = 0. \tag{31.42}$$

Из (31.41), (31.08) и из теоремы Рисса — Фишера следует, что существует такая функция $g(x)$, что на любом интервале длины $A$ равномерно по $y$

$$\lim_{N\to\infty} \int_y^{y+A} \left| g(x) - \sum_1^N \lim_{T\to\infty} \frac{e^{i\lambda_n x}}{2T} \int_{-T}^{T} f(\xi) e^{-i\lambda_n \xi} d\xi \right|^2 dx = 0. \tag{31.43}$$

Эта функция $g(x)$ будет, очевидно, псевдопериодической, как и $f(x) - g(x)$. В силу (31.42), (31.43) и неравенства Минковского

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0, \tag{31.44}$$

откуда сразу же вытекает, что для всех $y$

$$\int_y^{y+A} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0, \tag{31.45}$$

т. е. что $f(x)$ эквивалентна $g(x)$. В противном случае некоторый интеграл $\int\limits_y^{y+A}$ был бы не равен 0, откуда в силу псевдопериодичности любой интеграл $\int\limits_y^{y+A}$ был бы не равен нулю (был бы ограничен снизу положительным числом) и соотношение (31.44) было бы невозможно. Таким образом,

$$\lim_{N\to\infty} \int_y^{y+A} \left| f(x) - \sum_1^N \lim_{T\to\infty} \frac{e^{i\lambda_n x}}{2T} \int_{-T}^{T} f(\xi) e^{-i\lambda_n \xi} d\xi \right|^2 dx = 0 \tag{31.46}$$

равномерно по $y$.

Вообще, пусть $\sum\limits_1^\infty |a_n|^2$ сходится, и пусть нижняя грань (31.02) не равна нулю. Как и для (31.43), отсюда будет следовать, что существует функция $g(x)$, подобная функции из (31.43), которая на любом интервале длины $A$ является равномерным пределом в среднем функций $\sum_1^N a_n e^{i\lambda_n x}$ при $N \to \infty$. Легкий переход к пределу в неравенствах (31.07) и (31.11) покажет, что если нижняя грань (31.02) больше $L$, то

$$\frac{9\pi^3}{4L}\sum_1^\infty |a_n|^2 \geqslant \int_y^{y+9\pi/L} |g(x)|^2\,dx \geqslant \frac{\pi}{9L}\sum_1^\infty |a_n|^2, \qquad (31.47)$$

а отсюда следует, что $g(x)$ псевдопериодична.

Из оценок (31.47) можно сразу же заключить, что теория сходимости формальных рядов $\sum_1^\infty a_n e^{i\lambda_n x}$ псевдопериодических функций близка к тем приемам, которые были изложены в теореме XXXVIII. В самом деле, методы доказательства этой теоремы позволяют нам непосредственно установить теорему:

Т е о р е м а XLI. *Пусть $f(x)$ — псевдопериодическая функция с формальным рядом*

$$\sum_1^\infty e^{i\lambda_n x} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\xi)\, e^{-i\lambda_n \xi}\, d\xi = \sum_1^\infty a_n e^{i\lambda_n x}, \qquad (31.475)$$

*и пусть на* $(-\pi, \pi)$

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, e^{-in\xi}\, d\xi = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{inx}, \qquad (31.48)$$

*тогда на* $(-\pi+\varepsilon,\ \pi-\varepsilon)$ *равномерно имеем*

$$\lim_{N\to\infty}\Bigl(\sum_{|\lambda_n|<N} a_n e^{i\lambda_n x} - \sum_{-N}^{N} b_n e^{inx}\Bigr) = 0. \qquad (31.49)$$

*В частности, сходимость, суммируемость по Чезаро и т. п. $e^{i\lambda_n x}$-ряда для функции $f(x)$ совпадает со сходимостью, суммируемостью по Чезаро и т. п. ряда Фурье для $f(x)$ равномерно на* $(-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon)$.

**32. Теоремы о лакунарных рядах.** Мы приступаем к доказательству теоремы:

Теорема XLII. *Пусть ни одно из чисел $a_n$ не равно нулю, пусть ряд $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2$ сходится, и пусть $\ldots < \lambda_{-n} < \ldots$ $\ldots < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ Пусть, далее*),*

$$\lim_{n\to\pm\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \infty, \tag{32.01}$$

*и пусть*

$$f(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{-N}^{N} a_n e^{i\lambda_n x} \tag{32.02}$$

*в любой конечной области. Тогда, если $f(x)$ эквивалентна нулю на каком-либо интервале $(a, b)$, то $f(x)$ эквивалентна нулю на любом интервале и все коэффициенты $a_n$ обращаются в нуль.*

Прежде всего, пусть $L$ — произвольное положительное число. Пусть $N$ столь велико, что при $|n| > N$

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > L. \tag{32.03}$$

Пусть $\varepsilon < (b-a)/2$. Пусть функция $\psi(x)$, которую можно построить процессом ортогонализации, принадлежит $L_2$ на $(-\varepsilon, \varepsilon)$, и пусть $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(x) e^{-i\lambda x} dx$ не обращается в нуль для данного $\lambda_k$, но обращается в нуль для всевозможных $\lambda_n$ (отличных от данного), для которых $|n| \leqslant N$. Положим

$$g(x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(\xi) f(x-\xi)\, d\xi = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(\xi) \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{-N}^{N} a_n e^{i\lambda_n(x-\xi)}\, d\xi =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(\xi) e^{-i\lambda_n \xi}\, d\xi. \tag{32.04}$$

---

*) С помощью теоремы Фабри о лакунах (vide infra) мы можем доказать более общую теорему, получающуюся из теоремы XLII заменой условия (32.01) условием $\lim_{n\to\pm\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \infty$.

Тогда функция $g(x)$ будет обращаться в нуль на интервале $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$, поскольку $f(x)$ обращается в нуль на $(a,\ b)$. Кроме того, функция $g(x)$ будет равномерным пределом ряда (32.04); этот ряд будет содержать член $e^{i\lambda_k x}$ с ненулевым коэффициентом, но любые два показателя $\lambda$ в этом ряде будут отстоять друг от друга не меньше чем на $L$. Тогда в силу (31.11) функция $g(x)$ не может быть тождественным нулем ни на каком интервале длины $9\pi/L$, что приводит к противоречию, если $L > 9\pi/(b-a-2\varepsilon)$.

Отметим, что теорема XLII напоминает теорему XXXVI тем, что она также является теоремой о лакунах, однако она отличается от нее тем, что $\lambda_n$ не обязано равняться $-\lambda_{-n}$, и тем, что числа $\lambda_n$ не обязаны быть кратными некоторому общему для них числу. С другой стороны, теорема XXXVI относится только к нижней плотности чисел $\lambda_n$.

Теоремой о лакунах, близко родственной теореме XLII, является следующая:

Теорема XLII′. *Пусть* $\ldots<\lambda_{-n}<\ldots<\lambda_{-1}<\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n<\ldots$, *и пусть выполняется условие* (32.01). *Пусть*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n^2|\, r^{2|\lambda_n|} < \infty \tag{32.05}$$

*при* $0<r<1$. *Пусть*

$$f(r,\ x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{-N}^{N} a_n r^{|\lambda_n|} e^{i\lambda_n x} \tag{32.06}$$

*в любой конечной области. Положим*

$$f(x) = \underset{r\to 1}{\mathrm{l.i.m.}}\, f(r,\ x) \tag{32.07}$$

*для любого интервала $(a,\ b)$, на котором указанный предел в среднем существует. Тогда, если функция $f(x)$ существует на каком-либо интервале, то она существует на любом интервале. Если $f(x)$ является на каком-либо интервале $n$-м повторным интегралом функции из $L_2$, то она является таким интегралом на любом интервале, за исключением произвольного множества меры нуль, на котором* *она не определена. Если $f(x)$ бесконечно дифференцируема на $(a, b)$, если*

$$\int_a^b |f^{(n)}(x)|^2\,dx < D^n A_n^2, \tag{32.08}$$

*где $D$ не зависит от $n$, и если*

$$A_n > n!, \tag{32.09}$$

*то при $d > c$ существует положительное $P$ такое, что*

$$\int_c^d |f^{(n)}(x)|^2\,dx < P^n A_n^2. \tag{32.10}$$

*Если $f(x)$ аналитична на каком-либо интервале, то она аналитична всюду.*

Эта теорема была доказана Н. Винером в работе, которая должна появиться в Pisa Annali. Из нее как прямое следствие вытекает результат, что если в степенном ряде $\sum a_n z^n$ лакуны между последовательными показателями членов с ненулевыми коэффициентами стремятся к бесконечности, то окружность круга сходимости является естественной границей функции. Иными словами, всякая дуга должна содержать особенность. Далее, теорема XLII также является ее прямым следствием, ибо если $f(x)$ обращается в нуль на каком-либо интервале, то $f(x)$ аналитична всюду и, значит, должна тождественно обращаться в нуль.

Винер сделал попытку использовать методы этого типа, чтобы доказать знаменитую теорему Фабри о лакунах *). Эта теорема утверждает, что окружность круга сходимости является естественной границей при более слабом предположении $\lambda_n/n \to \infty$ вместо $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty$. До сих пор попытки не увенчались успехом. С другой стороны, указанные методы применимы, наряду с рядами Тейлора, и к рядам Дирихле.

Перейдем к доказательству теоремы XLII′. Заметим, что после того, как интервал $(a, b)$ фиксирован, мы можем

---

*) См. P. Dienes, The Taylor Series, Oxford, 1931, стр. 372 и след.

считать нижнюю грань

$$\inf [\lambda_{n+1} - \lambda_n] \tag{32.11}$$

сколь угодно большой, скажем $> L$, ибо для того, чтобы добиться этого, мы должны лишь удалить из $f(r, x)$ некоторый полином по $e^{i\lambda_k x}$, стремящийся к определенному аналитическому пределу при $r \to 1$. Такая функция аналитична по $x$, и если мы обозначим ее $P_r(x)$, то существует такая постоянная $K$, что

$$|P_r^{(n)}(x)| < K^n n! \tag{32.12}$$

Таким образом, без ограничения можно считать, что

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > \frac{9\pi}{b-a} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ -1,\ -2,\ \ldots). \tag{32.13}$$

Таким образом, в силу оценки (31.11) и следующего за ней рассуждения, если

$$\left[\frac{d-c}{b-a}\right] = \nu, \tag{32.14}$$

то при подходящей постоянной $B$ имеем

$$\int_c^d |f(r,\ x)|^2\, dx \leqslant B(\nu+1) \int_a^b |f(r,\ x)|^2\, dx \tag{32.15}$$

и аналогично

$$\int_c^d |f^{(n)}(r,\ x)|^2\, dx \leqslant B(\nu+1) \int_a^b |f^{(n)}(r,\ x)|^2\, dx. \tag{32.16}$$

Дальнейшим результатом того же типа является

$$\int_c^d |f(r,\ x) - f(s,\ x)|^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant B(\nu+1) \int_a^b |f(r,\ x) - f(s,\ x)|^2\, dx, \tag{32.17}$$

а поскольку существование $f(x)$ требует, чтобы

$$\lim_{r,\, s \to 1} \int_a^b |f(r,\ x) - f(s,\ x)|^2\, dx = 0, \tag{32.18}$$

то, следовательно,

$$\lim_{r,\, s\to 1} \int_c^d |f(r, x)-f(s, x)|^2\, dx=0. \tag{32.19}$$

Таким образом, по теореме Рисса — Фишера функция $f(x)$ существует на $(c, d)$. Точно таким же путем мы можем показать, что если $f(x)$ является $n$-м повторным интегралом от функции $f^{(n)}(x)$, принадлежащей $L_2$ на $(a, b)$, то мы можем распространить $f^{(n)}(x)$ на $(c, d)$, причем

$$\int_c^d |f^{(n)}(x)|^2\, dx \leqslant B(\nu+1) \int_a^b |f^{(n)}(x)|^2\, dx. \tag{32.20}$$

Это позволяет нам сделать простой переход от (32.08) к (32.10).

Если $f(x)$ аналитична на $(a, b)$, то на интервале $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ имеем *)

$$|f^{(n)}(x)| < c^n n!, \tag{32.21}$$

и наоборот. Пусть $(c, d)$ — любой интервал, содержащий $(a, b)$. Имеем

$$\int_a^b |f^{(n)}(x)|^2\, dx < c_0^{2n} (n!)^2. \tag{32.22}$$

Отсюда при некотором другом $c_0$

$$\int_c^d |f^{(n)}(x)|^2\, dx < c_0^{2n} (n!)^2. \tag{32.23}$$

Таким образом, на $(c, d)$

$$|f^{(n-1)}(x)| \leqslant |f^{(n-1)}(a)| + \left| \int_a^x f^{(n)}(\xi)\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_0^n n! + \left\{ |x-a| \int_a^x |f^{(n)}(\xi)|^2\, d\xi \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_1^n n! + (c_2 c_3^n (n!)^2)^{1/2} \leqslant c_4^n n!. \tag{32.24}$$

*) Ибо в этом случае ряд $\Sigma f^{(n)}(x)(\xi-x)^n/n!$ имеет положительный радиус сходимости при каждом $x$ и, значит, по теореме Гейне — Бореля этот радиус сходимости имеет положительную нижнюю грань.

Следовательно,

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant c_5^n n!. \qquad (32.25)$$

Но отсюда вытекает утверждение, что $f(x)$ аналитична на любом интервале $(c+\varepsilon,\ d-\varepsilon)$.

Интересно осмотреть всю картину, образованную результатами данной и предыдущей главы, и особенно ту ее часть, которая относится к свойствам замкнутости множества $\{e^{i\lambda_n x}\}$, где $|\lambda_n - n| < L$. Мы уже видели, что если $\lambda_{-n} = -\lambda_n$, то это множество становится замкнутым после присоединения самое большее конечного числа членов и перестает быть замкнутым после отбрасывания самое большее конечного числа членов (теорема XXXIII). Если мы будем рассматривать это же самое множество на любом интервале длины большей, чем $4\pi/L$, то из теоремы XL сразу же следует, что 0 не может быть разложен в ряд по функциям этого множества с ненулевыми коэффициентами, сумма квадратов которых сходится, с другой стороны, на интервале $(-1/(\pi L),\ 1/(\pi L))$; это множество (теорема XXXVIII) содержит подмножество, теория $L_2$-разложений по которому, по существу, совпадает с теорией $L_2$-разложений в обычные ряды Фурье.

В целом результаты данной главы, хотя они и идут значительно дальше, чем все предыдущие исследования в этой области, являются фрагментарными почти во всех отношениях. Едва ли в каком-либо случае наши теоремы дают необходимые и достаточные условия, и на самом деле весьма невероятно, чтобы большинство наших результатов имело такую природу. Нигде не показано, что наши неравенства являются наилучшими. Авторы считают, что эти ограничения внутренне присущи употребленным методам; что, в то время как сила этих методов полностью не исчерпана, нужна некоторая радикально новая идея, если мы хотим придать этой теории ее окончательный вид.

## ГЛАВА VIII
# ОБОБЩЕННЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

**33. Необходимые теоремы из обобщенного гармонического анализа.** Винер*) и другие авторы разработали теорию обобщенного гармонического анализа. Это — теория разложений по тригонометрическим функциям, которая охватывает как частные случаи ряды Фурье и интеграл Фурье, но которая охватывает также такие теории, как теория белого света, не попадающая ни в один из упомянутых разделов. Теория Винера до сих пор относилась к функциям, хотя и комплекснозначным, но от вещественных переменных. Но для всякой теории гармонического анализа функций от переменных в вещественной области существует соответствующая ей теория функций от переменных в комплексной области. В случае интеграла Фурье соответствующей теорией является теория интеграла Лапласа; в случае рядов Фурье соответствующей теорией является теория рядов Тейлора и Лорана; а случаю негармонических разложений по дискретным тригонометрическим функциям, с которыми мы встречаемся в боровской теории почти периодических функций, соответствует теория рядов Дирихле. Цель данной главы — расширить в этом смысле теорию Винера и подчинить этой общей теории некоторые теоремы, касающиеся почти периодических функций. Для этого нам нужно воспроизвести некоторые результаты из книги Винера. В задачи этой главы не входит доказательство этих

*) The Fourier Integral and certain of its applications, Cambridge, 1933. (Русский перевод: Интеграл Фурье и некоторые его приложения, Физматгиз, М., 1963.)

теорем или хотя бы сколько-нибудь подробное обсуждение их значения. Мы отметим только, что $f(x)$ представляет функцию, подвергаемую гармоническому анализу; что $s(u)$ представляет интеграл от преобразования Фурье функции $f(x)$ (которое само не существует) с верхним пределом $u$ и что $S(u)$ представляет полную энергию в спектре функции $f$ вплоть до частоты $u$. Функция $\varphi(x)$, которую мы определим ниже, является так называемой *автокорреляционной функцией* *) функции $f$, и $S(u)$ можно выразить через одну лишь $\varphi$. Через $S$ мы обозначим класс функций $f(x)$, обладающих «спектром» $S(u)$, а через $S'$ — тот подкласс класса $S$, спектры функций которого не содержат, в некотором смысле, энергии при бесконечной частоте.

Цитируемые теоремы и определения содержатся в главах III и IV книги Винера. Они читаются следующим образом:

Теорема 20. *Пусть* $f(x)$ — *измеримая функция, для которой интеграл*

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2\,dx \tag{33.01}$$

*ограничен по* $T$. *Тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(x)|^2}{1+x^2}\,dx<\infty. \tag{33.02}$$

Определение.

$$s(u)=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\left[\int_1^A+\int_{-A}^{1}\right]\frac{f(x)\,e^{-iux}}{-ix}+$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-1}^{1}f(x)\,\frac{e^{-iux}-1}{-ix}\,dx. \tag{33.03}$$

*) В оригинале faltung — свертка. — *Прим. перев.*

Заметим, что в предположении теоремы 20 функция $s(u)$ будет существовать для почти всех $u$.

Теорема 22. *В предположении теоремы* 20

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2\,dx \qquad (33.04)$$

*в том смысле, что если существует одна из частей этого равенства, то другая также существует и имеет то же самое значение.*

Определение.

$$\varphi(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x+\xi)\overline{f(\xi)}\,d\xi. \qquad (33.05)$$

Определение. *Класс $S$ является классом измеримых функций $f(x)$, для которых функции $\varphi(x)$ существуют при любом вещественном $x$. Класс $S'$ является классом функций из $S$, для которых $\varphi(x)$ непрерывны.*

Теорема 36. *Если $f(x)$ принадлежит $S$, то функция*

$$S(u)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{e^{-iux}-1}{-ix}\,dx \qquad (33.06)$$

*существует при любом $u$.*

На стр. 207 книги Винера под номером (21.257) приведена формула, которая выглядит следующим образом:

$$\sigma(u)=\mathrm{const}+\underset{\varepsilon\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{1}{2\varepsilon(2\pi)^{1/2}}\int_{0}^{u}|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du. \qquad (33.07)$$

Эта формула утверждает большее, чем фактически было установлено в этом месте; ее следует читать так:

$$\sigma(u)=\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\left[\psi(\varepsilon)+\frac{1}{2\varepsilon(2\pi)^{1/2}}\int_{0}^{u}|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du\right]. \qquad (33.08)$$

В теореме 36 Винер показывает, далее, что если $f(x)$ принадлежит $S$, то разность $\sigma(u)-S(u)$ является постоянной всюду, за исключением самое большее множества меры нуль. Таким образом, за исключением самое большее множества меры нуль, имеем

$$S(u)=\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\left[\psi(\varepsilon)+\frac{1}{2\varepsilon(2\pi)^{1/2}}\int_0^u |s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2 du\right]. \tag{33.09}$$

Теорема 30. *Пусть $f(x)$ принадлежит $S$, и пусть $xK(x)$ принадлежит $L_1$, а $(1+|x|)K(x)$ принадлежит $L_2$. Пусть*

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)f(\xi)\,d\xi. \tag{33.10}$$

*Пусть функция $S(u)$ определена формулой* (33.06), *и пусть*

$$T(u)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e^{-iux}-1)}{-ix}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dw\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}K(x+w-\xi)f(\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\overline{K(w-\xi)}\,\overline{f(\xi)}\,d\xi. \tag{33.11}$$

*Тогда*

$$T(u)=\int_0^u\left|\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)e^{-iu\xi}\,d\xi\right|^2 dS(u). \tag{33.12}$$

Здесь мы заменили $\sigma$ в формуле Винера на $S$.

Лемма $29_3$. *В предположениях теоремы* 30

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|t(u+\varepsilon)-t(u-\varepsilon)-\{s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)\}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}K(\xi)e^{-iu\xi}\,d\xi\Big|^2 du=0. \tag{33.13}$$

*где*

$$t(u) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left[ \int_1^A + \int_{-A}^{-1} \right] \frac{g(x) e^{-iux}\,dx}{-ix} +$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-1}^{1} \frac{g(x)\,(e^{-iux}-1)}{-ix}\,dx. \quad (33.14)$$

Лемма $29_6$. *В предположениях теоремы* 30 *функция* $g(x)$ *будет принадлежать* $S'$.

**34. Теорема Коши.** Пусть

$$\int_{-A}^{A} |f(x)|^2\,dx = O(A). \quad (34.01)$$

Тогда, как в (33.02),

$$\int_{-A}^{A} \frac{|f(x)|^2}{1+x^2}\,dx = O(1). \quad (34.02)$$

Таким образом, если $f(x+iy)$ аналитична в полосе $a \leqslant x \leqslant b$ и

$$\int_{-A}^{A} |f(x+iy)|^2\,dy = O(A) \quad (34.03)$$

равномерно по $x$ при $a \leqslant x \leqslant b$, то функция

$$\frac{f(x+iy)}{x+iy-c} \quad (c > b > a) \quad (34.04)$$

будет равномерно принадлежать $L_2$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Таким образом, в силу теоремы II при $a < x < b$ имеем

$$\frac{f(x+iy)}{x+iy-c} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(b+i\eta)\,d\eta}{(b+i\eta-c)(b+i\eta-x-iy)} -$$
$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(a+i\eta)\,d\eta}{(a+i\eta-c)(a+i\eta-x-iy)}. \quad (34.05)$$

Далее,

$$\frac{x+iy-c}{(b+i\eta-c)(b+i\eta-x-iy)}=\frac{1}{b+i\eta-x-iy}-\frac{1}{b+i\eta-c}, \tag{34.06}$$

так что

$$f(x+iy)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(b+i\eta)\,d\eta\left(\frac{1}{b+i\eta-x-iy}-\frac{1}{b+i\eta-c}\right)-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(a+i\eta)\,d\eta\left(\frac{1}{a+i\eta-x-iy}-\frac{1}{a+i\eta-c}\right). \tag{34.07}$$

Построим функцию

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_n(x)=0\ \ (x<n),\quad \varphi_n(x)=\frac{(x-n)^2}{2}\ \ (n\leqslant x<n+1),\\ &\varphi_n(x)=1-\frac{(n+2-x)^2}{2}\ \ (n+1\leqslant x<n+2),\\ &\varphi_n(x)=1\qquad\qquad (n+2\leqslant x)\end{aligned}\right\} \tag{34.08}$$

и преобразования

$$K_1(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(\xi)\,e^{\xi z}\,d\xi \tag{34.09}$$

и

$$K_2(z)=\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi_n(\xi)-1)\,e^{\xi z}\,d\xi. \tag{34.10}$$

На бесконечности при любом $x<0$ будем иметь

$$K_1(x+iy)=O\left(\frac{1}{y^3}\right), \tag{34.11}$$

а при любом $x>0$

$$K_2(x+iy)=O\left(\frac{1}{y^3}\right). \tag{34.12}$$

Рассмотрим теперь функции

$$h_1(z)=\frac{1}{z-x-iy}-\frac{1}{z-c}-K_1(x+iy-z)=$$
$$(c>\operatorname{Re} z>x)$$

$$= \int_0^n e^{\xi(x+iy-z)}\,d\xi + \int_n^{n+1} \left(1-\frac{(\xi-n)^2}{2}\right) e^{\xi(x+iy-z)}\,d\xi +$$

$$+ \int_{n+1}^{n+2} \frac{(n+2-\xi)^2}{2} e^{\xi(x+iy-z)}\,d\xi + \int_0^{\infty} e^{\xi(z-c)}\,d\xi \qquad (34.13)$$

и

$$h_2(z) = \frac{1}{z-x-iy} - \frac{1}{z-c} - K_2(x+iy-z) =$$

$$(\operatorname{Re} z < x)$$

$$= \int_0^n e^{\xi(x+iy-z)}\,d\xi + \int_n^{n+1} \left(1-\frac{(\xi-n)^2}{2}\right) e^{\xi(x+iy-z)}\,d\xi +$$

$$+ \int_{n+1}^{n+2} \frac{(n+2-\xi)^2}{2} e^{\xi(x+iy-z)}\,d\xi + \int_0^{\infty} e^{\xi(z-c)}\,d\xi. \qquad (34.14)$$

Мы видим, что $h_1(z)$ и $h_2(z)$ представляют одну и ту же аналитическую функцию, которая к тому же имеет порядок $O(1/(\operatorname{Im} z)^2)$ на бесконечности. Таким образом, по теореме Коши

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(b+i\eta)\, h_1(b+i\eta)\, d\eta -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(a+i\eta)\, h_2(a+i\eta)\, d\eta, \qquad (34.15)$$

и в силу (34.07) имеем

$$f(x+iy) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(b+i\eta)\, K_1(x+iy-b-i\eta)\, d\eta -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(a+i\eta)\, K_2(x+iy-a-i\eta)\, d\eta. \qquad (34.16)$$

В силу (34.02) эти интегралы сходятся абсолютно.

Предположим теперь, что $f(a+iy)$ и $f(b+iy)$ принадлежат $S$ и что оценка (34.03) выполняется равномерно при $a \leqslant x \leqslant b$. Положим

$$s(x, u) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left[ \int\limits_{1}^{A} + \int\limits_{-A}^{-1} \right] \frac{f(x+iy)\, e^{-iuy}\, dy}{-iy} +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x+iy)\,(e^{-iuy}-1)\, dy}{-iy}. \qquad (34.17)$$

Тогда в силу (33.13) и (34.16)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{\infty} | s(x, u+\varepsilon) - s(x, u-\varepsilon) -$$

$$- \{s(b, u+\varepsilon) - s(b, u-\varepsilon)\}\, \varphi_n(u)\, e^{u(x-b)} +$$

$$+ \{s(a, u+\varepsilon) - s(a, u-\varepsilon)\}\,(\varphi_n(u)-1)\, e^{u(x-a)}\,|^2\, du = 0, \qquad (34.18)$$

где

$$\varphi_n(u)\, e^{u(x-b)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_1(x-b+iy)\, e^{-iuy}\, dy \qquad (34.19)$$

и

$$(\varphi_n(u)-1)\, e^{u(x-a)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_2(x-a+iy)\, e^{-iuy}\, dy. \qquad (34.20)$$

Отсюда подходящим выбором $n$ непосредственно получаем, что в любой конечной области

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{A}^{B} | s(x, u+\varepsilon) - s(x, u-\varepsilon) -$$

$$- \{s(b, u+\varepsilon) - s(b, u-\varepsilon)\}\, e^{u(x-b)}\,|^2\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{A}^{B} | s(x, u+\varepsilon) - s(x, u-\varepsilon) -$$

$$- \{s(a, u+\varepsilon) - s(a, u-\varepsilon)\}\, e^{u(x-a)}\,|^2\, du = 0. \qquad (34.21)$$

Кроме того, если $\varepsilon$ меньше, чем некоторая величина, не зависящая от $B$ и $x$, получаем, используя (33.04),

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{B}^{\infty}|\{s(b,\ u+\varepsilon)-s(b,\ u-\varepsilon)\}e^{u(x-b)}|^2\,du\leqslant$$

$$\leqslant 2e^{2B(x-b)}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|s(b,\ u+\varepsilon)-s(b,\ u-\varepsilon)|^2\,du\leqslant$$

$$\leqslant \text{const}.e^{2B(x-b)}. \quad (34.22)$$

Аналогично

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{A}|\{s(a,\ u+\varepsilon)-s(a,\ u-\varepsilon)\}e^{u(x-a)}|^2\,du\leqslant$$

$$\leqslant \text{const}.e^{2A(x-a)}. \quad (34.23)$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|s(x,\ u+\varepsilon)-s(x,\ u-\varepsilon)|^2\,du=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-A}^{A}|s(b,\ u+\varepsilon)-s(b,\ u-\varepsilon)|^2\,e^{2u(x-b)}\,du=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-A}^{A}|s(a,\ u+\varepsilon)-s(a,\ u-\varepsilon)|^2\,e^{2u(x-a)}\,du \quad (34.24)$$

в случае, когда пределы

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-A}^{A}|s(b,\ u+\varepsilon)-s(b,\ u-\varepsilon)|^2\,e^{2u(x-b)}\,du \quad (34.25)$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-A}^{A}|s(a,\ u+\varepsilon)-s(a,\ u-\varepsilon)|^2\,e^{2u(x-a)}\,du \quad (34.26)$$

существуют для значений $A$, принадлежащих некоторой возрастающей последовательности, стремящейся к бесконечности.

Положим

$$S(x, u)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e^{-iu\xi}-1)\,d\xi}{-i\xi}\times$$
$$\times\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x+iy+i\xi)\,\overline{f(x+iy)}\,dy, \qquad (34.27)$$

$$T_1(x, u)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e^{-iu\xi}-1)\,d\xi}{-i\xi}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{dy}{4\pi^2}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}f(b+i\eta)\,K_1(x+iy+i\xi-b-i\eta)\,d\eta\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(b+i\eta)}\,\overline{K_1(x+iy-b-i\eta)}\,d\eta, \qquad (34.28)$$

$$T_2(x, y)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e^{-iu\xi}-1)\,d\xi}{-i\xi}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{dy}{4\pi^2}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}f(a+i\eta)\,K_2(x+iy+i\xi-a-i\eta)\,d\eta\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(a+i\eta)}\,\overline{K_2(x+iy-a-i\eta)}\,d\eta. \qquad (34.29)$$

По теореме 36 и лемме $29_6$ функции $T_1(x, u)$ и $T_2(x, u)$ будут существовать для любого $u$. В силу (33.09) и (33.13)

$$T_1(x, u)=\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\left[\psi(\varepsilon)+\frac{1}{2\varepsilon(2\pi)^{1/2}}\times\right.$$
$$\left.\times\int_0^u|s(b, u+\varepsilon)-s(b, u-\varepsilon)|^2\,[\varphi_n(u)]^2\,e^{2u(x-b)}\,du\right]. \qquad (34.30)$$

Далее, покажем, что если последовательность монотонных функций $f_n(x)$ сходится в среднем к пределу $f(x)$, то она сходится к $f(x)$ почти всюду. Имеем равномерно

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}f(\xi)\,d\xi=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}f_n(\xi)\,d\xi. \qquad (34.31)$$

Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x+\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\xi)\,d\xi,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n(x-\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\xi)\,d\xi. \qquad (34.32)$$

Кроме того, по лемме Вейля для теоремы Рисса — Фишера, существует подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ последовательности $\{f_n(x)\}$, сходящаяся почти всюду к $f(x)$. Таким образом, $f(x)$ является монотонной на множестве $\Sigma$, отличающемся от всей оси самое большее на множество меры нуль. Множество $\Sigma$, разумеется, всюду плотно. Пусть $F(x)$ обозначает $f(x)$, определенную, таким образом, для $x$ из $\Sigma$. Если $y$ не лежит в $\Sigma$, то положим

$$f(y) = \frac{1}{2}\Big[\sup_{x \text{ из } \Sigma,\ x<y} F(x) + \inf_{x \text{ из } \Sigma,\ x>y} F(x)\Big], \qquad (34.321)$$

в остальных точках положим $f(x) = F(x)$. Тогда функция $f(x)$ будет определена всюду и монотонна.

Далее, в силу (34.32)

$$\left.\begin{aligned} \varliminf_{n\to\infty} f_n(x+\varepsilon) &\geqslant \varlimsup_{\eta\to 0}\frac{1}{2\eta}\int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} f(\xi)\,d\xi, \\ \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x-\varepsilon) &\leqslant \varliminf_{\eta\to 0}\frac{1}{2\eta}\int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} f(\xi)\,d\xi, \end{aligned}\right\} \qquad (34.322)$$

и по одной из основных теорем анализа имеем почти всюду

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x+\varepsilon) \geqslant f(x) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x-\varepsilon). \qquad (34.323)$$

Таким образом, почти всюду

$$f(x-\varepsilon) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant f(x+\varepsilon), \qquad (34.324)$$

и, значит, почти всюду

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(x-\varepsilon) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} f(x+\varepsilon). \qquad (34.325)$$

Поскольку монотонная функция почти всюду непрерывна, последнее неравенство дает почти всюду

$$f(x) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant f(x). \qquad (34.326)$$

Таким образом, для почти всех $x$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \qquad (34.33)$$

Эта теорема позволяет нам заменить в формуле (34.30) l.i.m. на lim.

Пусть теперь $n$ в формуле (34.30) — произвольно большое отрицательное число. Тогда для почти всех $A$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon (2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} |s(b, u+\varepsilon) - s(b, u-\varepsilon)|^2 e^{2u(x-b)} du = \\ = T_1(x, A) - T_1(x, -A). \qquad (34.34)$$

Аналогично, выбирая $n$ большим положительным, получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon (2\pi)^{1/2}} \int_{-A}^{A} |s(a, u+\varepsilon) - s(a, u-\varepsilon)|^2 e^{2u(x-a)} du = \\ = T_2(x, A) - T_2(x, -A). \qquad (34.35)$$

Таким образом, согласно формуле (34.24) предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s(x, u+\varepsilon) - s(x, u-\varepsilon)|^2 du \qquad (34.36)$$

существует при $a < x < b$ и имеет значение, указанное в этой формуле.

Рассуждение в точности такого же рода, несколько более хлопотливое в деталях, но совершенно не отличающееся по своим принципам, показывает, что если $a < x < b$, а $\xi$ вещественно, то предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |s(x, u+\varepsilon) - s(x, u-\varepsilon)|^2 e^{-iu\xi} du \qquad (34.361)$$

существует и равен пределу

$$\lim_{A\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-A}^{A}|s(b,\ u+\varepsilon)-s(b,\ u-\varepsilon)|^2 e^{2u(x-b)-iu\xi}\,du. \tag{34.362}$$

Ясно, что

$$\overline{\lim_{A\to\infty}}\ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{\varepsilon}\left|\left[\int_{A}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A}\right]|s(b,\ u+\varepsilon)-\right.$$

$$\left.-s(b,\ u-\varepsilon)|^2 e^{2u(x-b)-iu\xi}\,du\right|\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{A\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{A}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A}\right]|s(b,\ u+\varepsilon)-$$

$$-s(b,\ u-\varepsilon)|^2 e^{2u(x-b)}\,du, \tag{34.363}$$

а мы только что доказали в (34.34), что этот последний предел равен нулю. Поэтому предел (34.362) существует, и мы должны только доказать его тождественность пределу (34.361). Это будет сразу же установлено, если мы покажем, что для некоторой последовательности значений $A$, стремящихся к бесконечности,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-A}^{A}e^{-iu\xi}\{|s(x,\ u+\varepsilon)-s(x,\ u-\varepsilon)|^2-$$

$$-e^{2u(x-b)}|s(b,\ u+\varepsilon)-s(b,\ u-\varepsilon)|^2\}\,du=0. \tag{34.364}$$

Используя неравенство Шварца и ограниченность величин

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-A}^{A}|s(x,\ u+\varepsilon)-s(x,\ u-\varepsilon)|^2\,du$$

и (34.365)

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{-A}^{A}e^{2u(x-b)}|s(b,\ u+\varepsilon)-s(b,\ u-\varepsilon)|^2\,du,$$

можно свести соотношение (34.364) к соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-A}^{A}|s(x,\ u+\varepsilon)-s(x,\ u-\varepsilon)-$$
$$-e^{u(x-b)}(s(b,\ u+\varepsilon)-s(b,\ u-\varepsilon))|^2\,du=0, \qquad (34.366)$$

которое восходит к (34.21).

Определим теперь функцию

$$s_\xi(x,\ u)=\underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\left[\int_{1}^{A}+\int_{-A}^{-1}\right]\frac{f(x+iy-i\xi)}{-iy}e^{-iuy}\,dy+$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-1}^{1}f(x+iy-i\xi)\frac{e^{-iuy}-1}{-iy}\,dy. \qquad (34.37)$$

Она будет существовать по той же причине, что и функция (34.17). Как и на стр. 202 книги Винера, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}|s_\xi(x,\ u+\varepsilon)-s_\xi(x,\ u-\varepsilon)-$$
$$-e^{-iu\xi}(s(x,\ u+\varepsilon)-s(x,\ u-\varepsilon))|^2\,du=O(\varepsilon^2). \qquad (34.38)$$

Как и в проведенном там рассуждении, это приводит к равенству

$$\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2B}\int_{-B}^{B}|f(x+iy-i\xi)+wf(x+iy)|^2\,dy=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}(2+we^{iu\xi}+\overline{w}\,e^{-iu\xi})\,|s(u+\varepsilon)-s(u-\varepsilon)|^2\,du.$$
$$(34.39)$$

Если мы дадим $w$ последовательно значения $\pm 1$, $\pm i$ и сложим четыре формулы вида (34.39), умножив их на коэффициенты $\pm 1$, $\pm i$, то получим формулу

$$\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2B}\int_{-B}^{B}f(x+iy-i\xi)\,\overline{f(x+iy)}\,dy=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|s(x,\ u+\varepsilon)-s(x,\ u-\varepsilon)|^2\,e^{-iu\xi}\,du, \qquad (34.40)$$

подобную формуле (21.17) книги Винера. Таким образом, $f(x+iy)$ принадлежит $S$ при $a<x<b$.

В силу (34.40) видим, что

$$\lim_{\xi\to 0}\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} f(x+iy-i\xi)\overline{f(x+iy)}\,dy-$$

$$-\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2B}\int_{-B}^{B}|f(x+iy)|^2\,dy=$$

$$=\lim_{\xi\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{-iu\xi})\,|s(x,u+\varepsilon)-s(x,u-\varepsilon)|^2\,du\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{\xi\to 0}}\;\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-A}^{A}|1-e^{-iu\xi}|\,|s(x,u+\varepsilon)-s(x,u-\varepsilon)|^2\,du+$$

$$+\overline{\lim_{\xi\to 0}}\;\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\int_{A}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A}\right]|1-e^{-iu\xi}|\times$$

$$\times|s(x,u+\varepsilon)-s(x,u-\varepsilon)|^2\,du\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{\xi\to 0}}\,|1-e^{-iA\xi}|\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|s(x,u+\varepsilon)-$$

$$-s(x,u-\varepsilon)|^2\,du+$$

$$+\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\left[\int_{A}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-A}\right]|s(x,u+\varepsilon)-s(x,u-\varepsilon)|^2\,du\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|s(x,u+\varepsilon)-s(x,u-\varepsilon)|^2\,du-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{-A}^{A}|s(x,u+\varepsilon)-s(x,u-\varepsilon)|^2\,du.\quad(34.41)$$

Мы сошлемся теперь на формулы (34.24), (34.21) и (34.34) и получим вместо последней строки в (34.41) выражение

$$\lim_{B\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int\limits_{-B}^{B}|s(b,\ u+\varepsilon)-s(b,\ u-\varepsilon)|^2 e^{2u(x-b)}\,du -$$
$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int\limits_{-A}^{A}|s(b,\ u+\varepsilon)-s(b,\ u-\varepsilon)|^2 e^{2u(x-b)}\,du, \tag{34.42}$$

которое можно сделать сколь угодно малым, выбирая $A$ достаточно большим.

Таким образом, при $a<x<b$ функция

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2B}\int\limits_{-B}^{B} f(x+iy+i\xi)\overline{f(x+iy)}\,dy$$

непрерывна по $\xi$ и $f(x+iy)$ принадлежит $S'$, как функция от $y$.

**35. Почти периодические функции.** Вернемся к формуле (34.16). Пусть $f(a+iy)$ и $f(b+iy)$ почти периодичны по $y$, т. е. пусть для любого $\varepsilon>0$ можно найти тригонометрические полиномы

$$P_1(y)=\sum_1^n A_k e^{i\Lambda_k y} \tag{35.01}$$

и

$$P_2(y)=\sum_1^n B_k e^{iM_k y} \tag{35.02}$$

такие, что

$$|f(a+iy)-P_1(y)|<\varepsilon \quad (-\infty<y<\infty) \tag{35.03}$$

и

$$|f(b+iy)-P_2(y)|<\varepsilon \quad (-\infty<y<\infty). \tag{35.04}$$

Если оценка (34.03) выполняется равномерно на $(a,\ b)$, то мы можем воспользоваться формулой (34.16) и получить

$$\frac{\varepsilon}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}|K_1(x-b+i\lambda)|\,d\lambda+\int\limits_{-\infty}^{\infty}|K_2(x-a+i\lambda)|\,d\lambda\right]\geqslant$$
$$\geqslant\Bigg|f(x+iy)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}P_2(\eta)K_1(x+iy-b-i\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_1(\eta) K_2(x+iy-a-i\eta)\,d\eta\Big| =$$

$$=\Big| f(x+iy)-\frac{1}{2\pi}\sum_1^n B_k\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathrm{M}_k\eta}K_1(x+iy-b-i\eta)\,d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_1^n A_k\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Lambda_k\eta}K_2(x+iy-a-i\eta)\,d\eta\Big| =$$

$$=\Big| f(x+iy)-\frac{1}{2\pi}\sum_1^n B_k e^{i\mathrm{M}_k y}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathrm{M}_k\eta}K_1(x-b-i\eta)\,d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_1^n A_k e^{i\Lambda_k y}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Lambda_k\eta}K_2(x-a-i\eta)\,d\eta\Big| =$$

$$=\Big| f(x+iy)-\sum_1^n B_k e^{\mathrm{M}_k(x-b-iy)}\varphi_n(\mathrm{M}_k) +$$

$$+\sum_1^n A_k e^{\Lambda_k(x-a+iy)}(\varphi_n(\Lambda_k)-1)\Big| =$$

$$=\Big| f(x+iy)-\sum_1^{2n} C_k e^{N_k(x+iy)}\Big|, \qquad (35.05)$$

где

$$N_{2k-1}=\mathrm{M}_k,\quad N_{2k}=\Lambda_k,$$

$$C_{2k-1}=B_k e^{-\mathrm{M}_k b}\varphi_n(\mathrm{M}_k),\quad C_{2k}=-A_k e^{-\mathrm{M}_k a}(\varphi_n(\Lambda_k)-1). \qquad (35.06)$$

Таким образом, $f(x+iy)$ равномерно принадлежит классу почти периодических функций при $a+\varepsilon\leqslant x\leqslant b-\varepsilon$, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_1(x-b+i\lambda)|\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(y)\, e^{(x-b+i\lambda)\, y}\, dy \right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left| \int_{n}^{n+2} \frac{x-n}{2}\, e^{(x-b+i\lambda)\, y}\, dy + \int_{n+2}^{\infty} e^{(x-b+i\lambda)\, y}\, dy \right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\,|x-b+i\lambda|} \left| \int_{n}^{n+2} e^{(x-b+i\lambda)\, y}\, dy \right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\,((x-b)^2+\lambda^2)}\, \left| e^{(n+2)\,(x-b+i\lambda)} - e^{n(x-b+i\lambda)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{const.}}{x-b} \leqslant \text{const.}, \qquad (35.07)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_2(x-a+i\lambda)|\, d\lambda \leqslant \text{const.} \qquad (35.08)$$

ГЛАВА IX

# СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

**36. Случайные функции.** Под случайной функцией мы понимаем функцию, которая известным образом (уточняемым в дальнейшем) зависит от переменного, обозначаемого явно, и от некоторого параметра распределения, обычно опускаемого. Подобные функции встречаются во всей статистической механике. В статистической механике то или иное возможное состояние вселенной выражается функцией от одного или нескольких переменных, которые задают геометрические координаты и время, и от некоторого параметра, который выделяет рассматриваемую вселенную как одну среди всех возможных вселенных и определяет ее вероятность. В качестве более конкретного примера возьмем путь частицы, подверженной броуновскому движению, и рассмотрим одну из координат частицы (скажем, $x$-координату) как функцию времени $t$. Тогда при любом отдельном броуновском движении или движении частицы, вынуждаемом толчками окружающих молекул, находящихся в тепловом возбуждении, координата $x$ будет вполне определенной функцией от $t$. Если же вместо того, чтобы рассматривать фактическую траекторию, описываемую конкретной частицей, мы рассмотрим всевозможные траектории, описываемые всевозможными частицами, то в дополнение к переменному $t$ координата $x$ будет зависеть от переменного, которое выделяет рассматриваемое конкретное броуновское движение из всех возможных броуновских движений. Это переменное вводится для целей интегрирования; иными словами, некоторая область значений этого переменного измеряет своей длиной вероятность того множества броуновских движений, которое она представляет, а интегрирование по этому переменному дает вероятностное среднее интегрируемой величины. Эта вероятностная теория, естественно, вовсе не проста и нуждается в подробном разъяснении; значительная часть данной главы и посвящена такому разъяснению.

Мы увидим, что теория случайных функций в своих существенных чертах представляет собой теорию интегрирования в функциональном пространстве. Как таковая, она может быть подчинена общим теориям интегрирования Радона, Даниэля и Винера. Предварительная попытка построить теорию интегрирования в функциональном пространстве была сделана Гато, однако эта более ранняя теория не является частным случаем теории интеграла Даниэля — Радона. Эта более ранняя теория пыталась трактовать каждое значение $F(t_0)$ функции $F\ (t)$ как независимое переменное. Мы обнаруживаем в такой схеме, что некоторая последовательность областей положительной меры, охватывающих одна другую, может не обладать ни одним элементом, общим для всех этих областей. Это явление нарушает один из наиболее существенных канонов теории Даниэля. Чтобы исключить его, необходимо, чтобы класс функций, по которому мы интегрируем, был в том или ином смысле компактным, т. е. чтобы любая последовательность функций содержала подпоследовательность, имеющую предельную функцию. Хотя это утверждение и неверно в строгом смысле для первоначального класса функций, с которым мы имеем дело, мы во всяком случае должны иметь возможность сделать его верным посредством удаления или добавления множества функций произвольно малой меры. Компактность в обычном смысле эквивалентна равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности. Далее, a priori очевидно, что тип интегрирования Гато должен породить функции, которые почти нигде не являются непрерывными, и, стало быть, никак не выдерживает этого требования.

Броуновское движение указывает нам выход из этого затруднения. Здесь независимым от положения частицы в данный момент времени является не ее положение в другой момент времени, а ее движение в промежутке между этими моментами времени. Грубо говоря, аналогом независимых координат точки в конечномерном пространстве являются дифференциалы функции $x(t)$, а не ее значения. С физической точки зрения по меньшей мере разумным является требование непрерывности броуновского движения частицы, и мы действительно покажем, что эйнштейновская теория броуновского движения позволяет нам утверждать, что оно и на самом деле почти всегда является непрерывным. Мы покажем даже большее, именно мы покажем, что оно подчиняется условию равностепенной непрерывности, за исключением множества случаев, меру которого или, что то же самое, вероятность которого мы можем свести к сколь угодно малой величине.

Теория случайных функций всегда производит впечатление значительно большей искусственности, чем это есть на самом деле. Причина состоит в том, что в теории интегрирования Даниэля или Лебега сумма счетного числа множеств меры нуль сама является множеством меры нуль, тогда как сумма континуального числа множеств меры нуль не обязана быть множеством меры нуль. Благодаря этому факту крайне желательно задавать случайную функцию счетным числом условий, тогда как задание подобной функции ее значениями при всех значениях ее аргумента приводит к континуальному числу данных. Поэтому, если мы будем пытаться задать случайную функцию некоторым множеством ее значений, то почти необходимо для наших технических построений, чтобы первоначальное множество значений, которое мы берем, было счетным. Например, мы можем определить такую функцию ее значениями в рациональных или двоичных точках прямой. С другой стороны, мы можем полностью отказаться от задания такой функции ее значениями и определить ее посредством ее коэффициентов Фурье или ее коэффициентов в какой-либо иной схеме разложения. В любом случае оказывается, что функция, которую мы таким способом определим, будет, за исключением множества случаев вероятности нуль (или меры нуль, что то же самое), либо непрерывной, либо в некотором легко определяемом смысле эквивалентной непрерывной функции. Как только это сделано, мы можем определить значения этой непрерывной функции однозначно на всем интервале ее задания. Мы таким образом расширим нашу исходную функцию, определяемую счетным множеством параметров, до функции, определяемой внешне бо́льшим числом параметров. Поступая таким способом, мы воспользовались методом, который маскирует подлинную инвариантность результата, который мы получили. Однако получение нашего результата не инвариантным путем и установление его собственной инвариантности позднее посредством специальных теорем является вполне законным математическим методом.

Процедура подобного рода обладает, однако, тем недостатком, что она крайне неэвристична и требует от читателя принимать на веру большое количество материала, оправдание которого дается только после завершения рассуждений. В конце концов окажется, что случайные функции, с которыми мы имеем дело, и мера, должным образом соотнесенная им, определяют функциональное пространство, отличное от пространства Гильберта, но ковариантное ему при всех унитарных преобразованиях, которые оставляют инвариантным гильбертово пространство. В то время как подобную теорию можно построить для вещественного гильбертова пространства и в то время как такая теория была предметом предыдущих работ Винера, данная теория пространства дифференциалов*) применима к пространству, ковариантному комплексному гильбертову пространству.

Мы увидим, что, хотя последние две главы этой книги внешне посвящены интегрированию в континуальном числе измерений, в действительности они образуют главы того, что Э. Борель назвал теорией «счетных вероятностей»**). Первый близкий подход к тем специфическим задачам, которые интересуют нас здесь, был сделан Штейнгаузом***). Он рассматривает ряд

$$\sum_{1}^{\infty} \pm \frac{1}{n}. \tag{36.01}$$

*) «Differential space» — «Пространство дифференциалов» — название работы Н. Винера в «Journ. Math. Phys.», vol. 2, № 3 (1923), 131—174.— *Прим. перев.*

**) E. Borel. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 27 (1909), стр. 247—271.

***) Ср. H. Steinhaus, Sur la probabilité de la convergence de series, Studia Mathematica, vol. 2 (1930), стр. 21—39 и более ранние работы, на которые даны ссылки в этой статье.

где знаки $\pm$ представляют назависимые выборы, и показывает, что этот ряд сходится в почти всяком случае. Методы Штейнгауза были превращены в мощный аналитический аппарат Пэли и Зигмундом *), особенно для построения контрпримеров, а окончательная теория была применена с большим успехом Бором и Йессеном**) к изучению римановской дзета-функции и к почти периодическим функциям в комплексной области.

Винер***) развил теорию случайных функций, во многих отношениях параллельную теориям, которые были изучены уже упомянутыми авторами, но не тождественную этим теориям. Поскольку винеровская теория случайных функций выводится из соображений, относящихся к броуновскому движению и статистической механике, в которых важную роль играют гауссовские распределения, эти распределения играют также важную роль и в его теории. В этом отношении теория Винера напоминает эйнштейновскую теорию броуновского движения, которой, как мы покажем позднее, она эквивалентна****). Фактически можно провести резкое различие между теорией Винера и остальными ранее упомянутыми теориями, ибо, хотя в обоих случаях счетному множеству членов приписываются коэффициенты с некоторым распределением, во всех остальных теориях эти коэффициенты либо имеют случайные значения $\pm 1$, либо распределены случайно по единичной окружности в комплексной плоскости. В дополнение к тому, что теория Винера приложима к статистической механике, она обладает большей степенью симметрии, чем противостоящие ей теории, или, говоря то же самое

---

*) On some series of functions, Proceedings of the Cambridge Phylosophical Society, vol. 26 (1930, стр. 337—357, 458—474; vol. 28, стр. 190—205. Ср. также статью: Paley, Wiener und Zygmund, Mathematische Zeitschrpft, Bd. 37 (1933), стр. 647—688, на которой во многом основана данная глава.

**) H. Bohr and B. Jessen, Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion, Acta Mathematica, vol. 54 (1930), стр. 1—35; vol. 58 (1932), стр. 1—55.

***) Ср. N. Wiener, Generalized harmonic analysis, Acta Mathematica, vol. 55, стр. 214 и след. и ссылки, приведенные в этой работе.

****) A. Einstein, Annalen der Physik, Bd. 17 (1905), стр. 549 и след.; Bd. 19 (1906), стр. 371 и след.

иными словами, она обладает более обширной группой преобразований, при которых она инвариантна. Причина этого в том, что если некоторое число членов имеет независимые гауссовские распределения, то и любая линейная комбинация этих членов сама имеет гауссовское распределение. С другой стороны, если мы отправляемся от некоторого распределения исходных величин по значениям $\pm 1$ или по единичной окружности, то распределение линейной комбинации этих исходных величин оказывается весьма сложным и не поддающимся обработке. Таким образом, это свойство гауссовских распределений тесно связано с ковариантностью гильбертову пространству, которую проявляет развитая здесь теория случайных функций.

Изменяя шкалу, можно свести вещественное гауссовское распределение к равномерному распределению вещественного параметра по отрезку (0, 1). Точно так же комплексное гауссовское распределение можно свести к совместному равномерному распределению двух независимых параметров по интервалу такого рода. Этим искусственным приемом наше интегрирование в функциональном пространстве можно свести к интегрированию функции счетного числа переменных по кубу в соответствующем пространстве. Подобное интегрирование рассматривалось Даниэлем, Йессеном и другими авторами *).

Однако, поскольку читатель этой главы, по-видимому, не знаком с этой теорией, мы выведем ее некоторым процессом отображения из обычного интегрирования функции одного переменного по интервалу или по прямой. Этот процесс отображения представляет всего лишь разработку процесса, посредством которого квадрат можно отобразить на прямую так, чтобы плоская мера множеств перешла в равную ей линейную меру.

Это отображение квадрата на прямую с сохранением меры заслуживает некоторого внимания. Пусть координаты точки в единичном квадрате $0 < x < 1$, $0 < y < 1$

---

*) P. J. Daniell, Integrals in an infinite number of dimensions, Annals of Mathematics, (2), vol. 20 (1919), стр. 281—288; B. Jessen, работа должна появиться в «Acta Mathematica»; см. также «Bitrag til Integralteorien for Funktioner af unendelig mange Variable», Copenhagen, 1930.

представлены двоичными дробями в виде

$$x = \alpha_1/2 + \alpha_2/4 + \ldots + \alpha_n/2^n + \ldots$$

($\alpha_n = 0$ или 1 независимо по всем $n$),

$$y = \beta_1/2 + \beta_2/4 + \ldots + \beta_n/2^n + \ldots \tag{36.02}$$

($\beta_n = 0$ или 1 независимо по всем $n$).

Соответствие между точками $x$ и последовательностями $\{\alpha_n\}$ не является взаимно однозначным, но становится взаимно однозначным, если мы пренебрежем всеми рациональными значениями $x$, знаменатели которых являются степенями двойки; такие $x$ имеют два разложения, оканчивающиеся соответственно нулями... 000... и единицами... ...111... Эти значения $x$ образуют счетное множество и, стало быть, множество линейной меры нуль. Точки $(x, y)$ с такими значениями $x$ составляют множество плоской меры нуль. Аналогичные соображения применимы к соответствию между точками $y$ и последовательностями $\{\beta_n\}$. Таким образом, за исключением некоторого множества точек $(x, y)$ плоской меры нуль, соответствие между точками квадрата $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ и парами последовательностей $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ является взаимно однозначным.

Далее, пару последовательностей $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ можно превратить в одну последовательность большим числом различных взаимно однозначных способов. Например, мы можем превратить пару $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ в последовательность

$$\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3 \ldots \alpha_n\beta_n \ldots \tag{36.03}$$

и сопоставить ей число $z$ с тем же самым двоичным представлением. Соответствие между числами $z$ и последовательностями (36.03) будет взаимно однозначным, за исключением нуль-множества рациональных значений $z$, знаменатели которых являются степенями 2. Кроме того, ясно, что если мы зададим какой-либо класс значений $z$, у которых счетное подмножество двоичных знаков имеет фиксированные значения, то этот класс будет иметь меру нуль и сумма счетного числа таких классов также будет иметь меру нуль. Отсюда следует, что множество значений $z$, соответствующих парам $(x, y)$, в которых не обе координаты имеют единственные двоичные представления, само является множеством меры нуль. То же самое верно и для плоской меры множества точек $(x, y)$, соответствующих значениям $z$ с не единственным двоичным представлением. Таким образом, если мы отбросим нуль-множество значений $(x, y)$ и линейное нуль-множество значений $z$, то отображение квадрата $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ на интервал $0 < z < 1$, определяемое схемой (36.03) или какой-либо другой такой схемой, будет взаимно однозначным.

Плоское множество точек, определяемых неравенствами

$$\gamma_1/2 + \gamma_2/4 + \ldots + \gamma_m/2^m < x < \gamma'_1/2 + \gamma'_2/4 + \ldots + \gamma'_m/2^m, \tag{36.031}$$

$$\delta_1/2 + \delta_2/4 + \ldots + \delta_n/2^n < y < \delta'_2/2 + \delta'_2/4 + \ldots + \delta'_n/2^n_- \quad (m > n),$$

где все числа $\gamma_k$, $\gamma'_k$, $\delta_k$ и $\delta'_k$ равны 0 или 1, распадается на $2^{2m}$ $(0, \gamma'_1 \ldots \gamma'_m - 0, \gamma_1 \ldots \gamma_m)$ $(0, \delta'_1 \ldots \delta'_n - 0, \delta_1 \ldots \delta_n)$ квадратов, каждый из которых имеет площадь $2^{-2m}$. Преобразование (36.03) отображает его на такое же число интервалов (длина каждого из которых $2^{-2m}$), имеющих ту же самую общую меру. Аналогично любой интервал значений $z$ с двоично-рациональными концами является образом конечного множества квадратов на плоскости $(x, y)$, общая площадь которых равна длине рассматриваемого интервала. Таким образом, преобразование (36.03) или какое-либо аналогичное преобразование сохраняет меру, если речь идет о прямоугольниках на плоскости $(x, y)$, вершины которых двоично-рациональны, и об интервалах на оси $z$ с двоично-рациональными концами.

Всякий интервал на прямой можно заключить в интервал с двоично-рациональными концами, который будет иметь сколь угодно близкую бо́льшую меру; точно так же он содержит подобный интервал, сколь угодно близкой меньшей меры. На плоскости справедливо в точности такое же утверждение для прямоугольников. Отсюда сразу же следует, что отображение (36.03) или любое аналогичное отображение преобразует всякий прямоугольник на плоскости в измеримое множество на прямой, с линейной мерой, равной площади прямоугольника, и что всякий интервал на прямой является образом измеримого множества на плоскости, с плоской мерой, равной линейной мере интервала. Методами, хорошо известными из теории интеграла Лебега, мы получаем, что всякому измеримому множеству из единичного квадрата на плоскости соответствует измеримое множество на единичном интервале, с линейной мерой, равной плоской мере исходного множества, и что всякое измеримое множество на единичном интервале соответствует плоскому множеству из единичного квадрата, с плоской мерой, равной линейной мере исходного множества. Вся теория интегрирования по Лебегу для двух измерений может быть, таким образом, выведена посредством этого отображения из соответствующей теории для одного измерения. Если на единичном квадрате задана какая-либо функция, то наш процесс отображения определит функцию-образ на единичном интервале, и если таковая интегрируема, то ее интеграл будет совпадать с интегралом исходной функции двух переменных *и может быть использован для определения этого интеграла.* В точности таким же образом области в пространстве трех или более измерений можно отобразить на отрезок прямой с сохранением меры, и это отображение можно использовать, чтобы получить определение интеграла Лебега в пространстве $n$ измерений. Этот метод определения обладает тем явным преимуществом, что все теоремы о лебеговом интегрировании в одном измерении могут быть перенесены непосредственно, без каких-либо модификаций в доказательствах, на лебегово интегрирование в пространстве $n$ измерений.

Это соображение еще более важно, когда речь идет о построении интеграла Лебега в пространстве счетного числа измерений. Как мы видели, Даниэль построил общую теорию интегрирования и подвел под нее *) как частный случай интегрирование в пространстве счетного числа измерений. Преимуществом этого метода является логическая прямота и прозрачность; недостаток же состоит в том, что мы не можем сослаться на большую массу теорем, уже имеющихся в теории интеграла Лебега, и вынуждены каждую из них устанавливать de novo путем тривиальной модификации в ее первоначальном

*) P. J. Daniell, A general form of integral, Annals of Mathematics, (2), vol. 19 (1918), стр. 279—294.

доказательстве. В идеальном курсе по теории интеграла Лебега все теоремы устанавливались бы с точки зрения интеграла Даниэля, но при нынешнем состоянии математического образования метод отображения имеет явные преимущества.

Отображение квадрата на отрезок прямой дает достаточное изложение общих принципов отображения, и мы можем не подвергать разбору взаимно однозначный характер отображения, которое мы сейчас построим. Цель этого отображения — представить на отрезке $0 < \alpha < 1$ точки $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ области

$$\left.\begin{array}{c} 0 < \alpha_1 < 1, \\ 0 < \alpha_2 < 1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 < \alpha_n < 1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \tag{36.032}$$

в пространстве счетного числа измерений. Пусть двоичное разложение числа $\alpha_k$ имеет вид

$$0,\ \alpha_{k1}\alpha_{k2}\ \ldots\ \alpha_{kn}\ \ldots; \tag{36.04}$$

положим

$$\alpha = 0,\ \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{32}\alpha_{41}\ \ldots \tag{36.05}$$

Пусть

$$F(\alpha) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) \tag{36.06}$$

— интегрируемая функция от конечного числа переменных $\alpha_k$. Тогда методами, в существенном такими же, какие мы использовали при разборе отображения квадрата на отрезок, получим

$$\int_0^1 F(\alpha)\,d\alpha = \int_0^1 d\alpha_1 \ldots \int_0^1 d\alpha_\nu f(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu). \tag{36.07}$$

Это следует из хорошо известного факта, относящегося к интегралу Лебега от функции одного переменного; именно, если $f(x)$ — суммируемая функция $x$ на отрезке

(0, 1), то для $\varepsilon > 0$ существует ступенчатая функция $g(x)$ такая, что

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon. \qquad (36.08)$$

Нетрудно показать, что функцию $g$ можно выбрать так, чтобы абсциссы всех скачков были двоично-рациональными числами. Если мы применим этот результат к функциям от $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ и если мы отождествим интегрирование по $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ с интегрированием соответствующей функции по $\alpha$, то мы увидим, что всякая функция $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, для которой существует интеграл

$$\int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \ldots \int_0^1 d\alpha_n \ldots f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots),$$

определяет по меньшей мере одну ступенчатую функцию $g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ конечного числа переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ такую, что

$$\int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \ldots \int_0^1 d\alpha_n \ldots |f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) - \\ - g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)| < \varepsilon. \qquad (36.09)$$

**37. Основная случайная функция.** До сих пор мы рассматривали бесконечное число вещественных переменных $\alpha_\nu$, равномерно и независимо распределенных по отрезку (0, 1). Мы хотим перенести это рассмотрение на бесконечное число комплексных переменных, вещественные и мнимые части которых имеют независимые гауссовские распределения. Для этой цели мы рассмотрим выражения

$$(-\lg \alpha_j)^{1/2} e^{2\pi i \alpha_k}, \text{ где } 0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1,\ 0 \leqslant \alpha_k \leqslant 1,\ j \neq k.$$

Если мы положим

$$r = (-\lg \alpha_j)^{1/2},\ \theta = 2\pi\alpha_k, \qquad (37.01)$$

то будем иметь

$$|d\alpha_j\, d\alpha_k| = \left|\frac{1}{\pi} r e^{-r^2} dr\, d\theta\right| \quad (0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi). \quad (37.02)$$

Если теперь

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \tag{37.03}$$

то

$$|d\alpha_j\, d\alpha_k| = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)} |dx\, dy| \tag{37.04}$$

$$(-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty).$$

Таким образом, если $\alpha_j$ и $\alpha_k$ равномерно распределены по $(0, 1)$ и независимы, то вещественная и мнимая части выражения $(-\lg\alpha_j)^{1/2}e^{2\pi i\alpha_k}$ имеют независимые гауссовские распределения.

Рассмотрим теперь формальный тригонометрический ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \tag{37.05}$$

в котором все вещественные и мнимые части коэффициентов $a_k$ имеют одно и то же гауссовское распределение и независимы друг от друга. Такой ряд почти никогда не будет сходиться, даже в среднем, но мы покажем, что его формальный интеграл

$$\psi(x, \alpha) \sim xa_0 + \sum_{1}^{n} \frac{a_n e^{inx}}{in} + \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{-n}e^{-inx}}{-in} \tag{37.06}$$

будет существовать как предел в среднем для почти всех выборов коэффициентов $\{a_k\}$. Мы выразим это более точно, сказав, что функция

$$\psi(x, \alpha) \sim x(-\lg\alpha_1)^{1/2}\, e^{2\pi i\alpha_2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{in}(-\lg\alpha_{4n-1})^{1/2}\, e^{2\pi i\alpha_{4n}} +$$

$$+ \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-inx}}{-in}(-\lg\alpha_{4n+1})^{1/2}\, e^{2\pi i\alpha_{4n+2}}, \tag{37.061}$$

рассматриваемая как функция от $x$, существует как предел в среднем для почти всех $\alpha$. Для этого мы должны показать, что при почти всех $\alpha$

$$-\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \lg\alpha_{4n-1} - \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\lg\alpha_{4n+1} < \infty. \tag{37.062}$$

Мы исследуем сначала распределение суммы

$$-\sum_{M}^{N}\frac{1}{n^2}\lg\alpha_{4n-1}-\sum_{M}^{N}\frac{1}{n^2}\lg\alpha_{4n+1}. \qquad (37.063)$$

В силу (36.07)

$$\int_0^1\left(-\sum_{M}^{N}\frac{1}{n^2}\lg\alpha_{4n-1}-\sum_{M}^{N}\frac{1}{n^2}\lg\alpha_{4n+1}\right)d\alpha=$$

$$=2\sum_{M}^{N}\frac{1}{n^2}=O\left(\frac{1}{M}\right)\quad (N>M). \qquad (37.07)$$

Далее,

$$\int_0^1\left[\sum_{M}^{N}\frac{1}{n^2}\lg\alpha_{4n-1}+\sum_{M}^{N}\frac{1}{n^2}\lg\alpha_{4n+1}+2\sum_{M}^{N}\frac{1}{n^2}\right]^2d\alpha=$$

$$=6\sum_{M}^{N}\frac{1}{n^4}=O\left(\frac{1}{M^3}\right). \qquad (37.08)$$

Отсюда следует, что, за исключением некоторого множества значений $\alpha$ с мерой, не превосходящей $C_2/M$, имеет место неравенство

$$-\sum_{M}^{N}\frac{1}{n_2}\lg\alpha_{4n-1}-\sum_{M}^{N}\frac{1}{n^2}\lg\alpha_{4n+1}<C_1/M. \qquad (37.09)$$

Если мы положим теперь $M=\nu^2$, $N=(\nu+1)^2$, то увидим, что для почти всех значений $\alpha$ существует постоянная $C_1$, зависящая, вообще говоря, от $\alpha$, такая, что

$$-\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\lg\alpha_{4n-1}-\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\lg\alpha_{4n+1}\leqslant\sum_{1}^{\infty}\frac{C_1}{\nu^2}<\infty. \qquad (37.10)$$

Таким образом, $\psi(x,\alpha)$ определена при почти всех $x$ для почти всех $\alpha$ и принадлежит $L_2$ при почти всех $\alpha$.

Мы хотим, однако, доказать более сильную теорему.

Теорема XLIII. *Некоторая последовательность частных сумм правой части формулы* (37.061) *сходится равномерно по $x$ к пределу для почти всех* $\alpha$. *Таким образом,* *функцию* $\psi(x, \alpha)$ *можно определить так, чтобы она была непрерывной по* $x$ *для почти всех* $\alpha$.

Положим

$$\psi_{m,n}(x, \alpha) = \sum_{m+1}^{n} \frac{e^{ikx}}{ik} (-\lg \alpha_{4k-1})^{1/2} e^{2\pi i \alpha_{4k}}. \tag{37.11}$$

Мы докажем, что ряд

$$\sum_{1}^{\infty} |\psi_{2^n, 2^{n+1}}(x, \alpha)| \tag{37.12}$$

сходится равномерно для почти всех $\alpha$ и, стало быть, ряд

$$\sum_{1}^{\infty} \psi_{2^n, 2^{n+1}}(x, \alpha) \tag{37.13}$$

сходится равномерно для почти всех $\alpha$. То же самое рассуждение покажет, что ряд

$$\sum_{1}^{\infty} \left[ \sum_{2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{e^{-ikx}}{ik} (-\lg \alpha_{4k+1})^{1/2} e^{2\pi i \alpha_{4k+2}} \right] \tag{37.14}$$

сходится равномерно для почти всех $\alpha$, и теорема XLIII будет установлена.

Имеем

$$|\psi_{m,n}(x, \alpha)|^2 = \sum_{m+1}^{n} \frac{e^{ikx}}{k} (-\lg \alpha_{4k+1})^{1/2} e^{2\pi i \alpha_{4k}} \times$$
$$\times \sum_{m+1}^{n} \frac{e^{-ilx}}{l} (-\lg \alpha_{4l-1})^{1/2} e^{-2\pi i \alpha_{4l}} = \sum_{m+1}^{n} \frac{-\lg \alpha_{4k-1}}{k^2} +$$
$$+ 2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{n-m-1} e^{ijx} \sum_{k=m+1+j}^{n} \frac{(-\lg \alpha_{4k-1})^{1/2} (-\lg \alpha_{4(k-j)-1})^{1/2}}{k(k-j)} \times \right.$$
$$\left. \times [\exp(2\pi i (\alpha_{4k} - \alpha_{4(k-j)}))] \right\} \leqslant \frac{1}{m^2} \sum_{m+1}^{n} (-\lg \alpha_{4k-1}) +$$
$$+ 2 \sum_{j=1}^{n-m-1} \left| \sum_{k=m+1+j}^{n} \frac{(-\lg \alpha_{4k-1})^{1/2} (-\lg \alpha_{4(k-j)-1})^{1/2}}{k(k-j)} \times \right.$$
$$\left. \times \exp(2\pi i (\alpha_{4k} - \alpha_{4(k-j)})) \right|. \tag{37.15}$$

Таким образом,

$$\int_0^1 \sup_x |\psi_{m,n}(x, \alpha)|^2 d\alpha \leqslant \frac{n}{m^2}\int_0^1 (-\lg \xi)\, d\xi +$$

$$+2\sum_{j=1}^{n-m-1}\int_0^1 d\xi_1 \ldots \int_0^1 d\xi_{n-m-1}\int_0^1 d\eta_1 \ldots \int_0^1 d\eta_{n-m-1} \times$$

$$\times\left|\sum_{k=m+1+j}^{n} \frac{(\lg \xi_k \lg \xi_{k-j})^{1/2}}{k(k-j)} \exp(2\pi i \eta_k)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{m^2} + n^2 m^\varepsilon \exp(-m^\varepsilon) +$$

$$+2\sum_{j=1}^{n-m-1}\int_{\exp(-m^\varepsilon)}^1 d\xi_1 \ldots \int_{\exp(-m^\varepsilon)}^1 d\xi_{n-m-1}\int_0^1 d\eta_1 \ldots \int_0^1 d\eta_{n-m-1} \times$$

$$\times\left|\sum_{k=m+1+j}^{n} \frac{(\lg \xi_k \lg \xi_{k-j})^{1/2}\exp(2\pi i \eta_k)}{k(k-j)}\right|, \qquad (37.16)$$

где $\varepsilon$ — некоторое положительное число, которое мы фиксируем позже.

Далее, по неравенству Шварца

$$\int_0^1 d\eta_1 \ldots \int_0^1 d\eta_p \left|\sum_1^p a_k e^{2\pi i \eta_k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_0^1 d\eta_1 \ldots \int_0^1 d\eta_p \left|\sum_1^p a_k e^{2\pi i \eta_k}\right|^2\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\int_0^1 d\eta_1 \ldots \int_0^1 d\eta_p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p a_j \bar{a}_k e^{2\pi i(\eta_j - \eta_k)}\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\sum_1^p |a_k|^2\right\}^{1/2}. \qquad (37.17)$$

Применяя эту оценку к (37.16), получим

$$\int_0^1 \sup_x |\psi_{m,\,2m}(x,\,\alpha)|^2 d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant O\left(\frac{1}{m}\right)+2\sum_{j=1}^{m-1}\Bigg[\sum_{k=m+1+j}^{2m}\frac{m^{2\varepsilon}}{[k\,(k-j)]^2}\Bigg]^{1/2}=$$

$$=O\left(\frac{1}{m}\right)+2\sum_{j=1}^{m-1}\left[O\left(\int_{m+j}^{2m}\frac{m^{2\varepsilon}}{x^2\,(x-j)^2}dx\right)\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant O\left(\frac{1}{m}\right)+2\sum_{j=1}^{m-1}\left[O\left(\int_{m}^{3m}\frac{m^{2\varepsilon}}{x^4}\,dx\right)\right]^{1/2}=$$

$$=O\left(\frac{1}{m}\right)+O\left(\frac{m}{m^{3/2-\varepsilon}}\right)=O(m^{-1/4}), \qquad (37.18)$$

если $\varepsilon < 1/4$. Таким образом, за исключением некоторого множества значений $\alpha$ с мерой, не превосходящей $cm^{-1/12}$, имеем

$$\sup_x |\psi_{m,\,2m}(x,\,\alpha)| \leqslant cm^{-1/12} \qquad (37.19)$$

и, в частности, за исключением некоторого множества значений $\alpha$ с мерой, не превосходящей $c_1\cdot 2^{-n/12}$, имеем

$$\sup_x |\psi_{2^n,\,2^{n+1}}(x,\,\alpha)| < c_1\cdot 2^{-r/12}. \qquad (37.20)$$

Отсюда следует, что, за исключением некоторого множества значений $\alpha$ с мерой, не превосходящей

$$c_1\sum_N^{\infty} 2^{-n/12}=\frac{c_1\cdot 2^{-N/12}}{1-2^{-1/12}}, \qquad (37.21)$$

имеем для всех $x$

$$\left|\sum_N^{\infty}\psi_{2^n,\,2^{n+1}}(x,\,\alpha)\right| \leqslant c_1\sum_N^{\infty} 2^{-n/12}=\frac{c_1 2^{-N/12}}{1-2^{-1/12}}. \qquad (37.22)$$

Поскольку выражение (37.21) стремится к 0, когда $N\to\infty$, мы видим, что, за исключением некоторого нуль-множества значений $\alpha$, предел

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{1}^{N}\psi_{2^n,\,2^{n+1}}(x,\ \alpha) \tag{37.23}$$

существует равномерно по $x$. Этим теорема XLIII доказана. Здесь мы используем известный факт, что если ряд сходится к одному пределу и сходится в среднем к другому пределу, то эти пределы отличаются самое большее на нуль-множестве.

*В дальнейшем мы будем считать* $\psi(x,\ \alpha)$ *непрерывной.* Пусть теперь $F(x)$ принадлежит $L_2$, и пусть

$$F(x)=\sum_{-n}^{n} f_k e^{ikx}. \tag{37.24}$$

Мы хотим определить интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\,d\psi(x,\ \alpha)$, однако мы не можем определить его как обычный интеграл Стилтьеса, поскольку у нас нет причины считать, что функция $\psi(x,\alpha)$ почти всегда имеет ограниченную полную вариацию по $x$; на самом деле она почти никогда не имеет ограниченной полной вариации. Однако определим этот интеграл, выполнив указанное интегрирование по частям. Имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\,d\psi(x,\ \alpha)=F(\pi)\,\psi(\pi,\ \alpha)-F(-\pi)\,\psi(-\pi,\ \alpha)-$$
$$-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\psi(x,\ \alpha)\,F'(x)\,dx=$$
$$=2\pi\left\{(-\lg\alpha_1)^{1/2}e^{2\pi i\alpha_2}f_0+\sum_{1}^{n}(-\lg\alpha_{4k-1})^{1/2}e^{2\pi i\alpha_{4k}}f_k+\right.$$
$$\left.+\sum_{1}^{n}(-\lg\alpha_{4k+1})^{1/2}e^{2\pi i\alpha_{4k+2}}f_{-k}\right\}. \tag{37.25}$$

Мы хотим теперь сформулировать и доказать теорему.

Теорема XLIV. *Пусть* $F(x)$ *определена формулой* (37.24). *Пусть* $\Phi$ — *произвольная функция, для которой* *интеграл*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{0}^{\infty} e^{-u}\Phi\left\{e^{i\theta}\left[2\pi u \int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|^2\,dx\right]^{1/2}\right\} du = I \quad (37.26)$$

*существует как абсолютно сходящийся интеграл Лебега. Тогда*

$$\int_{0}^{1} \Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,d\psi(x,\ \alpha)\right\} d\alpha = I. \quad (37.27)$$

*Аналогично пусть*

$$G(x) = \sum_{-n}^{n} g_k e^{ikx}. \quad (37.28)$$

*Пусть*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|^2\,dx = A, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \overline{F(x)}\,G(x)\,dx = B,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |G(x)|^2\,dx = C, \qquad AC - |B|^2 = D, \quad (37.29)$$

*и пусть* $\Phi$ — *произвольная функция, для которой интеграл*

$$\frac{1}{4\pi^4 D}\int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \times$$

$$\times \exp\left[\frac{-(u_1^2+v_1^2)\,C + 2\,(u_1u_2+v_1v_2)\operatorname{Re} B - (u_2^2+v_2^2)\,A + 2\,(u_1v_2-u_2v_1)\operatorname{Im} B}{2\pi D}\right] \times$$

$$\times \Phi(u_1+iv_1,\ u_2+iv_2) = J \quad (37.30)$$

*существует как абсолютно сходящийся интеграл Лебега. Тогда*

$$\int_{0}^{1} \Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,d\psi(x,\ \alpha),\ \int_{-\pi}^{\pi} G(x)\,d\psi(x,\ \alpha)\right\} = J. \quad (37.301)$$

*В частности, если $F(x)$ и $G(x)$ ортогональны друг к другу в комплексном смысле, $B=0$ и $D=AC$, то*

$$J=\frac{1}{4\pi^4 AC}\int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{u_1^2+v_1^2}{2\pi A}-\frac{u_2^2+v_2^2}{2\pi C}\right\}\Phi(u_1+iv_1,\ u_2+iv_2)=$$

$$=\int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta\, \Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,d\psi(x,\ \alpha),\ \int_{-\pi}^{\pi} G(x)\,d\psi(x,\ \beta)\right\}. \tag{37.302}$$

Чтобы доказать эквивалентность равенств (37.26) и (37.27), заметим, что

$$I=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \Phi\left\{2\pi\left[\sum_{-n}^{n}|f_k|^2\right]^{1/2}(x+iy)\right\}e^{-x^2-y^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi^{2n+1}}\int_{-\infty}^{\infty} dx_{-n}\ \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \int_{-\infty}^{\infty} dy_{-n}\ \dots \int_{-\infty}^{\infty} dy_n \times$$

$$\times \exp\left(-\sum_{-n}^{n} x_k^2-\sum_{-n}^{n} y_k^2\right)\Phi\left\{2\pi\sum_{-n}^{n} f_k(x_k+iy_k)\right\}. \tag{37.303}$$

Теперь мы воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{\pi^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=1, \tag{37.304}$$

и тем, что выражение

$$\exp\left(-\sum_{-n}^{n} x_k^2-\sum_{-n}^{n} y_k^2\right)$$

остается инвариантным при унитарном преобразовании переменных $x_k+iy_k$. Простой заменой переменных получаем

$$I=\int\limits_0^1 d\alpha_1\ldots\int\limits_0^1 d\alpha_{4n+2}\Phi\left\{2\pi\left[(-\lg\alpha_1)^{1/2}e^{2\pi i\alpha_2}f_0+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_1^n(-\lg\alpha_{4k-1})^{1/2}e^{2\pi i\alpha_{4k}}f_k+\sum_1^n(-\lg\alpha_{4k+1})^{1/2}e^{2\pi i\alpha_{4k+2}}f_{-k}\right]\right\},\tag{37.305}$$

откуда в силу соотношения (37.25) следует (37.27).

Доказательство соотношения (37.301) совершенно аналогично. Указанной заменой переменных получаем

$$J=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}dy_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_2\int\limits_{-\infty}^{\infty}dy_2\exp(-x_1^2-y_1^2-x_2^2-y_2^2)\times$$

$$\times\Phi\left\{(2\pi A)^{1/2}(x_1+iy_1),\ \frac{(2\pi)^{1/2}}{A^{1/2}}B(x_1+iy_1)+\right.$$

$$\left.+\left(2\pi\frac{D}{A}\right)^{1/2}(x_2+iy_2)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi^{2n+1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_{-n}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_n\int\limits_{-\infty}^{\infty}dy_{-n}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}dy_n\times$$

$$\times\exp\left(-\sum_{-n}^n x_k^2-\sum_{-n}^n y_k^2\right)\times$$

$$\times\Phi\left\{2\pi\sum_{-n}^n f_k(x_k+iy_k),\ 2\pi\sum_{-n}^n g_k(x_k+iy_k)\right\},\tag{37.306}$$

откуда соотношение (37.30) вытекает так же, как соотношение (37.27) вытекает из (37.303).

Формула (37.302) является просто частным случаем формулы (37.30), комбинированной с соотношением (37.27) для $F(x)$ и $G(x)$ одновременно. Она означает, что если две функции $F(x)$ и $G(x)$ ортогональны, то выражения

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(x)\,d\psi(x,\ \alpha)\quad\text{и}\quad\int\limits_{-\pi}^{\pi}G(x)\,d\psi(x,\ \alpha)$$

являются полностью независимыми, а не только линейно независимыми. Этот результат сразу же распространяется на любое конечное множество $\{G_n(x)\}$ ортогональных функций с обрывающимися разложениями Фурье.

Мы хотим теперь исключить это последнее ограничение, что разложения Фурье функций $F$ и $G$ или $G_n$ обрываются. Мы делаем это посредством следующей теоремы:

Теорема XLV. *Пусть*

$$F(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}, \tag{37.31}$$

*и пусть*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |f_k|^2 < \infty. \tag{37.32}$$

*Положим*

$$F_n(x) = \sum_{-n}^{n} f_k e^{ikx}. \tag{37.33}$$

*Тогда, за исключением некоторого множества значений $\alpha$ меры нуль, существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\, d\psi(x, \alpha). \tag{37.34}$$

*Мы определяем интеграл* $\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, d\psi(x, \alpha)$ *как этот последний предел.*

При доказательстве этой теоремы заметим сначала, что рассуждение, в точности аналогичное рассуждению, которое мы использовали для доказательства (37.062), показывает, что для почти всех $\alpha$

$$-\lg \alpha_1 |f_0|^2 - \sum_{1}^{\infty} (-\lg \alpha_{4k-1}) |f_k|^2 - \\ - \sum_{1}^{\infty} (-\lg \alpha_{4k+1}) |f_{-k}|^2 < \infty. \tag{37.35}$$

Мы прибегнем теперь к результату Радемахера*),

*) H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Mathematische Annalen, Bd. 87 (1922), стр. 112—138.

утверждающему, что если

$$\sum_{1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty, \tag{37.36}$$

то для почти всех выборов последовательности знаков

$$\left|\sum_{1}^{\infty} \pm c_n\right| < \infty. \tag{37.37}$$

Чтобы доказать это, введем функции Радемахера

$$\varphi_n(x) = (-1)^{[2^n x]}. \tag{37.38}$$

Мы хотим показать, что для почти всех $x$ ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ сходится. Заметим, во-первых, что функции $\varphi_n(x)$ нормальны и ортогональны и что существует функция $\varphi(x)$ из $L_2$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left|\varphi(x) - \sum_{1}^{n} c_k\varphi_k(x)\right|^2 dx = 0. \tag{37.39}$$

Заметим, что если $2^{-m}[2^m x] = x_m$, то

$$2^m \int_{x_m}^{x_m+2^{-m}} \varphi(\xi)\,d\xi = \sum_{1}^{m} c_n\varphi_n(x). \tag{37.40}$$

Таким образом, то, что мы хотим показать, сводится к равенству для почти всех $x$:

$$\varphi(x) = \lim_{m\to\infty} 2^m \int_{x_m}^{x_m+2^{-m}} \varphi(\xi)\,d\xi. \tag{37.41}$$

Следует отметить, что оно очень близко к фундаментальной теореме анализа, утверждающей, что для почти всех $x$

$$\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1} \int_{x}^{x+\varepsilon} \varphi(\xi)\,d\xi. \tag{37.42}$$

И фактически соотношение (37.41) является прямым следствием соотношения (37.42), ибо

$$2^m \int_{x_m}^{x_m+2^{-m}} \varphi(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{x_m+2^{-m}-x} \int_{x}^{x_m+2^{-m}} \varphi(\xi)\,d\xi \frac{x_m+2^{-m}-x}{2^{-m}} +$$

$$+ \frac{1}{x-x_m} \int_{x_m}^{x} \varphi(\xi)\,d\xi\, \frac{x-x_m}{2^{-m}}. \quad (37.43)$$

Мы сошлемся теперь на тот факт, что мера множества значений $x$, для которых любые $p$ функций Радемахера имеют заданные знаки, равна в точности $2^{-p}$, а это равно вероятности того, что $p$ независимых выборов при равновероятных альтернативах дают определенный набор результатов. Соответственно этому мы можем заменить меру определенного множества значений $x$, при которых функции Радемахера имеют предписанные знаки, на вероятность указанной последовательности знаков. Это устанавливает теорему Радемахера.

Если мы применим теорему Радемахера к рядам

$$\pm(-\lg \alpha_1)^{1/2} f_0 \cos 2\pi\alpha_2 + \sum_1^\infty \pm(-\lg \alpha_{4n-1})^{1/2} f_k \cos 2\pi\alpha_{4k} +$$

$$+ \sum_1^\infty \pm(-\lg \alpha_{4k+1})^{1/2} f_{-k} \cos 2\pi\alpha_{4k+2} \quad (37.44)$$

и

$$\pm(-\lg \alpha_1)^{1/2} f_0 \sin 2\pi\alpha_2 + \sum_1^\infty \pm(-\lg \alpha_{4k-1})^{1/2} f_k \sin 2\pi\alpha_{4k} +$$

$$+ \sum_1^\infty \pm(-\lg \alpha_{4k+1})^{1/2} f_{-k} \sin 2\pi\alpha_{4k+2}, \quad (37.45)$$

то увидим, что при почти всех значениях $\alpha$ последовательности частных сумм рядов (37.44) и (37.45) сходятся для почти всех последовательностей знаков $\pm$. Однако

$$\cos 2\pi\left(\alpha_\nu + \frac{1}{2}\right) = -\cos 2\pi\alpha_\nu,$$

$$\sin 2\pi\left(\alpha_\nu + \frac{1}{2}\right) = -\sin 2\pi\alpha_\nu. \quad (37.451)$$

Таким образом, изменение знаков у членов в рядах (37.44) или (37.45) можно рассматривать как замену множества переменных $\{\alpha_\nu\}$, независимо распределенных по (0, 1), другим множеством $\{\beta_\nu\}$ независимых переменных с тем же распределением. Такое изменение, следовательно, не повлияет на интеграл или среднее какой-либо функции от $\{\alpha_\nu\}$. Это справедливо не только для *специального* изменения знаков у членов, это также верно для *почти всякого* изменения знаков у членов, заданного так, чтобы оно имело вполне определенное распределение. Значит, если мы воспользуемся определением (37.25), теорема XLV будет установлена сразу же.

Отсюда непосредственно вытекает теорема:

Теорема XLIV′. *Все результаты теоремы* XLIV *можно распространить на любые функции* $F(x)$ *и* $G(x)$ *из* $L_2$, *независимо от того, обрываются ли их ряды Фурье или нет.*

Здесь мы пользуемся уже доказанным фактом, что любая функция бесконечного числа переменных, принадлежащая $L_1$, может быть аппроксимирована в $L_1$ функцией конечного числа этих переменных.

Дадим одно из приложений теоремы XLIV′. Пусть $-\pi \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant \pi$, и пусть

$$\begin{aligned} &f_1(x) = 1 \text{ на } (a, b);\ f_1(x) = 0 \text{ в остальных точках;} \\ &f_2(x) = 1 \text{ на } (c, d);\ f_2(x) = 0 \text{ в остальных точках.} \end{aligned} \tag{37.46}$$

Тогда, очевидно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\, f_2(x) = 0. \tag{37.47}$$

Отсюда

$$\int_0^1 \Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\, d\psi(x, \alpha)\right\} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-u} \Phi\left\{[2\pi u e^{2i\theta}(b-a)]^{1/2}\right\} du \tag{37.48}$$

и

$$\int_0^1 \Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\,d\psi(x,\alpha),\quad \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\,d\psi(x,\alpha)\right\}d\alpha =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 \int_0^\infty e^{-u_1}\,du_1 \int_0^\infty e^{-u_2}\,du_2 \times$$
$$\times \Phi\left\{[2\pi u_1 e^{2i\theta_1}(b-a)]^{1/2},\ [2\pi u_2 e^{2i\theta_2}(d-c)]^{1/2}\right\}. \qquad (37.49)$$

Мы получим аналогичные результаты для функций многих переменных.

Мы можем сформулировать (37.48) и (37.49) следующим образом: если $y = \psi(x, \alpha)$ — кривая, зависящая от $\alpha$ как от параметра распределения, то распределение $y_2 - y_1$ зависит только от распределения $x_2 - x_1$ и не зависит от «прошлого» или «будущего» величин $x$ и $y$. Если $t$ — время, то $\psi(t, \alpha)$ представляет одну из координат частицы, подвергающейся случайной, но равномерно распределенной последовательности импульсов, подобной той, которую мы обнаруживаем при броуновском движении согласно знаменитой теории Эйнштейна*) и Смолуховкого**).

## 38. Свойства непрерывности случайной функции.

Аномальные свойства броуновского движения хорошо известны физикам. По словам Перрэна***), «этот механизм (броуновского движения) был подвергнут подробному анализу Эйнштейном в великолепной серии теоретических работ. Безусловно, следует отметить также приближенный, но приводящий к интересным идеям анализ, данный Смолуховским».

«Эйнштейн и Смолуховский одинаково характеризовали активность броуновского движения. До этого времени пытались определить «среднюю скорость» движения, следя сколь возможно внимательнее за траекторией

*) A. Einstein, цит. соч.— см. стр. 209.

**) M. von Smoluchowski, Die Naturwissenschaften, Bd. 6 (1918), стр. 253—263.

***) J. Perrin, Atoms, перевод Д. Лл. Хэммика, второе английское издание, Лондон, 1923, стр. 109 и след. (Мы цитируем по русскому переводу И. А. Соколова: Ж. Перрэн, Атомы, Государственное издательство, М., 1924 — *Прим. перев.*)

зернышка. Полученные таким образом числа были порядка нескольких микронов в секунду для зернышек величиною также около микрона.

Но вычисления, проведенные по этому способу, будут грубо ошибочными. Изменения в направлении траектории, ее зигзаги, так многочисленны и так быстры, что проследить их все невозможно, а действительная траектория будет гораздо сложнее и гораздо длиннее, чем та, которую можно заметить.

Равным образом средняя кажущаяся скорость зернышка за данный промежуток времени меняется прямо «сумасшедшим» образом по величине и направлению, не обнаруживая никакого стремления к пределу, когда время наблюдения уменьшается. В этом можно убедиться весьма просто, отмечая из минуты в минуту или, лучше, каждые 5 секунд положения одного из зернышек эмульсии или, еще лучше, фотографируя их через 1/20 долю секунды, как это делали Виктор Анри (Victor Henri), Командон (Comandon) или де Брольи (de Broglie), снимая движение при помощи кинематографа. Бесполезно пытаться провести, даже приблизительным образом, касательную в какой-нибудь точке траектории; в этом случае, естественно, приходится думать о непрерывных функциях, не имеющих производной, которые были придуманы математиками и которые ошибочно считали лишь математическими курьезами, тогда как природа дает такие же образцы их, как и функций, имеющих производную...

Согласно с данными такого качественного наблюдения мы составляем впечатление о том, что броуновское движение является совершенно беспорядочным в плоскостях, перпендикулярных вертикальной линии...

Нужно, однако, помнить, что этот результат перестает быть точным в том случае, если перемещения настолько малы, что дижения зернышка нельзя считать совершенно беспорядочными. Это тем более существенно, что иначе истинная скорость может оказаться бесконечно большой. Весьма вероятно, что минимальный промежуток, за который движение можно считать беспорядочным, есть величина того же порядка, как и время, которое протекает между последовательными молекулярными ударами...»

Чрезвычайно интересно, что броуновское движение вызывает у Перрэна ассоциацию с недифференцируемыми непрерывными функциями. В первую очередь он говорит об этом движении как о геометрическом движении, при котором $x$ изображается графически как функция $y$, но та же самая ситуация возникает, когда мы рассматриваем $x$ наряду с $y$ или же комплексное переменное $x+iy$ как функцию времени $t$. Сравнительно просто доказать, что вероятность того, что подобная функция имеет производную при каком-либо фиксированном значении аргумента, равна нулю. Мы докажем значительно более трудную и общую теорему, утверждающую, что почти все такие функции не имеют производной ни при каких значениях аргумента. Эта теорема является следствием еще более общей теоремы *).

Теорема XLVI. *Значения $\alpha$, для которых существует значение $t$ такое, что*

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0}|\psi(t+\varepsilon, \alpha)-\psi(t, \alpha)|\,\varepsilon^{-\lambda}<\infty \quad \left[\lambda>\frac{1}{2}\right], \qquad (38.01)$$

*образуют множество меры нуль.*

Мы докажем эту теорему от противного. Пусть такое $t$ существует и имеет двоичное разложение

$$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}+\ldots+\frac{a_n}{2^n}+\ldots \quad (a_1,\ a_2,\ \ldots=0 \text{ или } 1). \qquad (38.02)$$

Тогда, если выполнено соотношение (38.01), то для любого $n$ мы должны иметь неравенства

$$\left|\psi(t, \alpha)-\psi\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}+\ldots+\frac{a_n}{2^n},\ \alpha\right)\right|2^{\lambda n}<A<\infty,$$
$$\left|\psi(t, \alpha)-\psi\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}+\ldots+\frac{a_n-1}{2^n},\ \alpha\right)\right|2^{\lambda n}<A, \qquad (38.03)$$

*) R. E. A. C. Paley, N. Wiener and A. Zygmund, Notes on random functions, Mathematische Zeitschrift, Bd. 37 (1933), стр. 647—668. См. особенно теорему VII, стр. 666. Эта теорема отличается от теоремы XLVI данной книги тем, что в ней речь идет о функции $\chi(\alpha, x)$, которая соответствует вещественной части функции $\psi(x, \alpha)$.

которые дают неравенство

$$\left|\psi\left(\frac{a_1}{2}+\ldots+\frac{a_n}{2^n}, \alpha\right)-\psi\left(\frac{a_1}{2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2^n}, \alpha\right)\right| 2^{\lambda n}<2A. \tag{38.04}$$

Если мы сможем доказать, что вероятность такого стечения обстоятельств, как (38.04), равна нулю, то мы установим нашу теорему. Для этой цели мы хотим рассмотреть распределение $\psi(t+\varepsilon, \alpha)$, когда $\psi(t, \alpha)$ и $\psi(t+2\varepsilon, \alpha)$ заданы. Мера множества значений $\alpha$, для которых $\operatorname{Re}(\psi(t+\varepsilon, \alpha)-\psi(t, \alpha))$ лежит между $u$ и $u+du$, тогда как $\operatorname{Re}(\psi(t+2\varepsilon, \alpha)-\psi(t, \alpha))$ лежит между $v$ и $v+dv$, равна асимптотически

$$\frac{1}{2\pi^2\varepsilon}\exp\left(-\frac{u^2}{2\pi\varepsilon}-\frac{(v-u)^2}{2\pi\varepsilon}\right), \tag{38.05}$$

когда $du$ и $dv \to 0$. Это можно видеть, подставляя в формулу (37.30) подходящие $f_1$, $f_2$ и $\Phi$. Таким образом, обозначая величину $\operatorname{Re}(\psi(t+\varepsilon, \alpha)-\psi(t, \alpha))$ через $u$, а $\operatorname{Re}(\psi(t+2\varepsilon, \alpha)-\psi(t, \alpha))$ через $v$, найдем, что отношение меры множества значений $\alpha$, для которых $|u|<u_0$, а $v$ лежит между $v_0$ и $v_0+dv$, к мере множества всех значений $\alpha$, для которых $v$ лежит между $v_0$ и $v_0+dv$, равно

$$\frac{\int\limits_{-u_0}^{u_0}\exp\left(\frac{-u^2}{2\pi\varepsilon}-\frac{(v_0-u)^2}{2\pi\varepsilon}\right)du}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-u^2}{2\pi\varepsilon}-\frac{(v_0-u)^2}{2\pi\varepsilon}\right)du}=\frac{\int\limits_{-u_0}^{u_0}\exp\left(\frac{-2u^2+2uv_0}{2\pi\varepsilon}\right)du}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-2u^2+2uv_0}{2\pi\varepsilon}\right)du}=$$

$$=\frac{\int\limits_{-u_0+v_0/2}^{u_0-v_0/2}\exp\left(\frac{-2u^2}{2\pi\varepsilon}\right)du}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{-2u^2}{2\pi\varepsilon}\right)du}\leqslant 2\pi u_0\varepsilon^{1/2}. \tag{38.06}$$

В точности такой же результат справедлив для мнимой части $\psi$. Таким образом, если $\psi(t, \alpha)$ и $\psi(t+2\varepsilon, \alpha)$ подчинены каким-либо ограничениям, которые выполняются для множества значений $\alpha$ меры $M$, и если мы потребуем дополнительно, чтобы

$$|\psi(t+\varepsilon, \alpha)-\psi(t, \alpha)| \leqslant u_0, \tag{38.061}$$

то отсюда будет следовать, что одновременно

$$\begin{gathered} |\operatorname{Re}(\psi(t+\varepsilon, \alpha)-\psi(t, \alpha))| \leqslant u_0, \\ |\operatorname{Im}(\psi(t+\varepsilon, \alpha)-\psi(t, \alpha))| \leqslant u_0 \end{gathered} \tag{38.062}$$

и что мера множества значений $\alpha$, для которых $\psi$ подчинена исходным ограничениям совместно с ограничением (38.061), не превосходит $2u_0^2\varepsilon M$. Тот же самый результат будет иметь место, если мы заменим (38.061) на

$$|\psi(t+2\varepsilon, \alpha)-\psi(t+\varepsilon, \alpha)| \leqslant u_0. \tag{38.063}$$

В любом случае мы будем описывать ситуацию, говоря, что, каковы бы ни были $\psi(t, \alpha)$ и $\psi(t+2\varepsilon, \alpha)$, *вероятность* неравенств (38.062) или (38.063) не превосходит $\text{const.}\, u_0^2\varepsilon$. Таким образом, вероятность того, что из $2^{q+1}$ величин

$$|\psi((\mu+1)\, 2^{-q-1}, \alpha)-\psi(\mu 2^{-q-1}, \alpha)|$$

по меньшей мере $N_q$ не превосходит $2^{-\lambda q}a$, каково бы ни было распределение $2^q$ аналогичных величин предыдущей серии, не превосходит

$$\sum_{\nu=N_q}^{2^{q+1}} \frac{(2^{q+1})!}{\nu!\,(2^{q+1}-\nu)!}\left(1-\text{const.}\, 2^{q-2\lambda q}\right)^{2^{n+1}-\nu}\left(\text{const.}\, 2^{q-2\lambda q}\right)^{\nu}. \tag{38.07}$$

Эта величина при больших $q$ асимптотически равна

$$\frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{A_q}^{\infty} e^{-u^2}\, du, \tag{38.071}$$

где

$$A_q=\frac{N_q-\text{const.}\, 2^{2q+1-2\lambda q}}{\text{const.}\, 2^{q(1-\lambda)}}. \tag{38.072}$$

Это вытекает из известных теорем о связи гауссовского распределения с биномиальным *). Так, если

$$N_q=\text{const.}\, 2^{q(2-2\mu)+1} \qquad [0 \leqslant \mu<\lambda], \tag{38.08}$$

*) C. Jordan, Statistique Mathematique, Paris, 1927, стр. 105 и след.

то выражение (38.072) становится больше, чем

$$\text{const.}\, 2^{q(1-2\mu+\lambda)} - \text{const.}\, 2^{q(1-\lambda)}, \tag{38.09}$$

что больше, чем $\text{const.}\, 2^{q(1-2\lambda+\mu)}$, что в свою очередь больше, чем $2^{q(1-\mu)}$ при достаточно больших значениях $q$. Но если $\mu < 1$, то

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{1/2}} \int\limits_{\text{const.}\, 2^{q(1-\mu)}}^{\infty} e^{-u^2}\, du < \infty. \tag{38.10}$$

Таким образом, вероятность того, что можно найти более чем конечное число значений $q$, для которых по меньшей мере $N_q$ из $2^{q+1}$ величин

$$|\psi((\mu+1)\, 2^{-q-1},\ \alpha) - \psi(\mu 2^{-q-1},\ \alpha)| \tag{38.11}$$

не превосходят $\text{const.}\, 2^{-\lambda q}$, бесконечно мала. С другой стороны, вероятность того, что множества $S_q$, состоящие из всех точек $N_q$ интервалов на $q$-м шаге, имеют общую точку при всех значениях $q$ от $Q_1+1$ до $Q_2$, не превосходит

$$2^{Q_2+1} \prod_{q=Q_1+1}^{Q_2} \text{const.}\, \frac{2^{q(2-2\mu)}}{2^{q+1}} \leqslant C_1 C_2^{Q_2} 2^{(1-2\mu)Q_2^2/2}, \tag{38.12}$$

где $C_1$ и $C_2$ — постоянные. Эта оценка стремится к 0 при $Q_2 \to \infty$, если $\mu > \frac{1}{2}$. Таким образом, вероятность того, что существует какая-либо точка, общая всем $S_q$, начиная с некоторого шага, бесконечно мала, и неравенство (38.04) не может выполняться для какого-либо $t$ и всех $n$. Этим теорема XLVI доказана.

Антиподом теоремы XLVI является теорема:

Теорема XLVII*). *Если $\lambda < 1/2$, то, за исключением множества значений $\alpha$ меры нуль,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\psi(t+\varepsilon,\ \alpha) - \psi(t,\ \alpha))/\varepsilon^{\lambda} = 0 \tag{38.13}$$

*равномерно по всем значениям $t$.*

---

*) Частный случай этой теоремы был доказан Н. Винером в статье «Generalized harmonic analysis», Acta Mathematica, vol. 55, стр. 219, 220.

Поскольку функция $\psi(t, \alpha)$ непрерывна по $t$, не будет существенным ограничением, если мы ограничим в (38.13) значения $t$ обрывающимися двоичными дробями и заставим $\varepsilon$ стремиться к нулю по обрывающимся двоичным дробям. Пусть теперь

$$2^{\lambda n} |\psi((k+1)2^{-n}, \alpha) - \psi(k2^{-n}, \alpha)| < A \tag{38.14}$$

для всех значений $n$, начиная с некоторого, и для всех $k$ из $(0, 2^n - 1)$.

Тогда, если в двоичной системе

$$t = 0,\overbrace{000\ldots}^{n-1 \text{ раз}} a_n a_{n+1} \ldots$$

и (38.15)

$$t + \varepsilon = 0,\overbrace{000\ldots}^{n-1 \text{ раз}} b_n b_{n+1} \ldots,$$

мы можем положить

$$s = \begin{cases} 0,000 \ldots a_n c_{n+1} c_{n+2} \ldots \\ 0,000 \ldots b_n d_{n+1} d_{n+2} \ldots \; (a_n = c_n;\ b_n = d_n). \end{cases} \tag{38.16}$$

Положим

$$\begin{cases} S_m = 0,000 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_m, \\ T_m = 0,000 \ldots b_n b_{n+1} \ldots b_m. \end{cases} \tag{38.161}$$

Тогда

$$|\psi(t+\varepsilon, \alpha) - \psi(t, \alpha)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \{|\psi(S_{k+1}, \alpha) - \psi(S_k, \alpha)| + |\psi(T_{k+1}, \alpha) - \psi(T_k, \alpha)|\} +$$
$$+ |\psi(S_n, \alpha) - \psi(s, \alpha)| + |\psi(T_n, \alpha) - \psi(s, \alpha)| \leqslant$$
$$\leqslant 2A \sum_{n}^{\infty} 2^{-\lambda k} = \frac{2A2^{-\lambda n}}{1 - 2^{-\lambda}} \leqslant \text{const.}\, \varepsilon^{\lambda}, \tag{38.17}$$

и соотношение (38.13) установлено.

Вероятность того, что

$$2^{\lambda n} |\psi((k+1)2^{-n}, \alpha) - \psi(k2^{-n}, \alpha)| \geqslant A \tag{38.18}$$

для некоторого $\lambda$, некоторого $n$ и некоторого $k$, равна, в силу (37.48),

$$\int\limits_{(A^2/(4\pi^2))2^{(1-2\lambda)n}}^{\infty} e^{-u}\,du = e^{(-A^2/(4\pi^2))2^{(1-2\lambda)n}}. \tag{38.19}$$

Если мы просуммируем это по $0 \leqslant k < 2^n$, то получим результат, не превосходящий

$$\exp\left(n \lg 2 - \frac{A^2}{4\pi^2} 2^{(1-2\lambda)n}\right), \tag{38.20}$$

и если мы просуммируем теперь по всем $n > N$, то получим результат, не превосходящий

$$\sum_{N}^{\infty} \exp\left(n \lg 2 - \frac{A^2}{4\pi^2} 2^{(1-2\lambda)n}\right), \tag{38.21}$$

а это выражение стремится к нулю, когда $N \to \infty$. Таким образом, за исключением множества значений $\alpha$ нулевой меры, существуют некоторое $A$ и некоторое $N$ такие, что если $n > N$ и $0 \leqslant k < 2^n$, то неравенство (38.14) удовлетворяется. Мы видели, что оно приводит к неравенству (38.17) равномерно по всем $t$.

Теоремы XLVI и XLVII идут, так сказать, в противоположных направлениях. Первая справедлива, когда $\lambda > {}^1/_2$, вторая — когда $\lambda < {}^1/_2$. В критическом случае $\lambda = {}^1/_2$ необходимы более мощные средства для получения результатов более сильных, чем простейшие. Простой результат, доказываемый аналогично теореме XLVII, состоит в том, что мы можем заменить в ней $\varepsilon^\lambda$ на

$$\varepsilon^{1/2}\left(-\frac{\lg \varepsilon}{\lg 2}\right)^{1+\theta},$$

где $\theta > 0$. Для критического случая важные результаты были получены Колмогоровым*).

*) А. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, М.—Л., 1936.

ГЛАВА X

# ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

**39. Эргодическая теорема.** В исследовании случайных функций одна из самых важных теорем принадлежит Биркгофу *). Эта теорема, которая на самом деле является общей теоремой из теории меры Лебега, лежит в основе изучения эргодических динамических систем. Простейшее доказательство этой теоремы принадлежит Хинчину **); оно основано на методе, набросанном Хопфом ***).

Пусть $V$ — область пространства, имеющая конечный объем, в которой действует стационарный поток, переводящий ее в себя. В дальнейшем $x$ всегда обозначает точку $V$, а интегрирование по $x$ — это пространственное интегрирование по $V$. Если движущаяся частица в момент времени нуль находится в точке $x$, то $T_\lambda x$ обозначает точку, в которой она будет находиться в момент $\lambda$. Если $M$ — произвольное подмножество в $V$, то $T_\lambda M$ имеет аналогичный смысл. Если множество $M$ измеримо по Лебегу и имеет меру $\mathfrak{M}(M)$, то мы будем считать, что

$$\mathfrak{M}(T_\lambda M) = \mathfrak{M}(M) \qquad (39.01)$$

для всех $\lambda$.

*) G. D. Birkhoff, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 17 (1931), стр. 650—660.

**) A. Khintchine, Zu Birkhoff's Lösung des Ergodenproblems, Mathematische Annalen, Bd. 107, стр. 485—488.

***) E. Hopf, Complete transitivity and the ergodic principle, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 18 (1932), стр. 204—209.

Для вещественной $f(x)$, принадлежащей $L$ на $V$, положим

$$\varphi(x, t) = \int_0^t f(T_\lambda x)\, d\lambda. \qquad (39.02)$$

Ясно, что этот криволинейный интеграл имеет смысл для почти всех $x$. Теорема Биркгофа теперь утверждает, что, *когда $t$ стремится к бесконечности, предел*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\varphi(x, t) \qquad (39.03)$$

*существует как функция от $x$ для почти всех $x$.*

**40. Теория преобразований.** В этой главе мы займемся изучением некоторых средних, связанных с броуновским движением, особенно когда эти средние требуют гармонического анализа в комплексной области. Наша теория является, таким образом, точным двойником теории почти периодических функций в комплексной области, развитой Бором и Йессеном*). В качестве необходимого орудия мы используем теорию унитарных преобразований в гильбертовом пространстве. Имеется большое сходство между кругом идей, вводимых здесь, и теорией перемешивания Эбергарда Хопфа**), и фактически мы могли бы превратить всю нашу теорию в частный случай его теории. После тщательного обдумывания мы отказались от этого способа изложения, который потребовал бы замены той формы гильбертова пространства, которая непосредственно связана с нашей задачей, другой, несколько искусственной формой. Мы хотим выразить особую благодарность профессору Хопфу и профессору Йессену, указавших нам на то серьезное упрощение в наших рассуждениях, которое могло быть достигнуто введением фундаментальной теоремы Биркгофа.

---

*) H. Bohr und B. Jessen, Über bie Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion, Erste Mitteilung, Acta Mathematica, vol. 54 (1930), стр. 31—35; Zweite Mitteilung, vol. 58 (1932), стр. 51—55.

**) E. Hopf, Complete transitivity and the ergodic principle, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 18 (1932), стр. 204—209.

Мы уже видели, что $\psi(x, \alpha)$ имеет формальный тригонометрический ряд

$$\psi(x, \alpha) \sim x(-\lg \alpha_1)^{1/2} e^{2\pi i \alpha_2} + \sum_1^\infty \frac{e^{inx}}{in} (-\lg \alpha_{4n-1})^{1/2} e^{2\pi i \alpha_{4n}} + \\ + \sum_1^\infty \frac{e^{-inx}}{-in} (-\lg \alpha_{4n+1})^{1/2} e^{2\pi i \alpha_{4n+2}}, \qquad (37.061)$$

т. е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi(x, \alpha) = (-\lg \alpha_1)^{1/2} e^{2\pi i \alpha_2},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, d\psi(x, \alpha) = (-\lg \alpha_{4n-1})^{1/2} e^{2\pi i \alpha_{4n}} \\ (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, d\psi(x, \alpha) = (-\lg \alpha_{4n+1})^{1/2} e^{2\pi i \alpha_{4n+2}} \\ (n = 1, 2, \ldots). \qquad (40.01)$$

Поскольку задание последовательности $\{\alpha_k\}$ эквивалентно заданию числа $\alpha$, имеется взаимно однозначное соответствие между $\alpha$ и последовательностью

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} d\psi(x, \alpha) \qquad (40.015)$$

$$[n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots].$$

Пусть теперь $T$ — унитарное преобразование гильбертова пространства в себя. Тогда, если $\{\varphi_n(x)\}$ — нормальная и ортогональная замкнутая последовательность, то теми же свойствами будут обладать и последовательности $\{T\varphi_n(x)\}$ и $\{T^{-1}\varphi_n(x)\}$. Пусть $\varphi_n(x) = e^{inx}/(2\pi)^{1/2}$; тогда последовательности $Te^{inx}/(2\pi)^{1/2}$ и $T^{-1}e^{inx}/(2\pi)^{1/2}$ нормальны, ортогональны и замкнуты. Из теоремы XLIV следует, что если $\alpha$ задано, то (за исключением самое большее нуль-множества случаев) последовательности

$$\int_{-\pi}^{\pi} Te^{inx} d\psi(x, \alpha) \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} T^{-1} e^{inx} d\psi(x, \alpha)$$

определены. Определим $\beta$ равенством

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} d\psi(x, \beta) = \int_{-\pi}^{\pi} T e^{inx} d\psi(x, \alpha). \qquad (40.02)$$

Это равенство определяет $\beta$ как однозначную функцию от $\alpha$ для почти всех значений $\alpha$. Мы уже видели, что любая интегрируемая функция бесконечного числа переменных может быть аппроксимирована в $L_1$ сколь угодно точно функцией конечного числа этих переменных. Любая измеримая функция от $\alpha$ является функцией от переменных $\int_{-\pi}^{\pi} T e^{inx} d\psi(x, \alpha)$, и если мы положим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T e^{inx} d\psi(x, \alpha) = (-\lg \beta_j)^{1/2} e^{2\pi i \beta_k}, \qquad (40.03)$$

где $j=1$, $k=2$ при $n=1$; $j=4n+1$, $k=4n+2$ при $n>1$; $j=4m-1$, $k=4m$ при $n=-m\leqslant 0$, то переменные $\beta_\nu$ будут независимы друг от друга и будут распределены равномерно по отрезку $(0, 1)$ (ср. (37.27)). Отсюда сразу же следует, что интеграл любой функции от $\beta$, зависящей только от конечного числа $\beta_\nu$, будет совпадать с интегралом этой функции по $\alpha$, и, значит, по только что упомянутой теореме об аппроксимации интеграл любой интегрируемой функции от $\beta$ по переменному $\beta$ будет совпадать с ее интегралом по переменному $\alpha$.

Далее, из соотношения (40.02) следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-N}^{N} a_n e^{inx} d\psi(x, \beta) = \int_{-\pi}^{\pi} T\left(\sum_{-N}^{N} a_n e^{inx}\right) d\psi(x, \alpha), \qquad (40.04)$$

откуда рассуждением, подобным рассуждению в теореме XLIV′, выводится, что если $F(x)$ принадлежит $L_2$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, d\psi(x, \beta) = \int_{-\pi}^{\pi} TF(x)\, d\psi(x, \alpha). \qquad (40.05)$$

В частности,

$$\int_{-\pi}^{\pi} T^{-1}e^{inx}\,d\psi(x, \beta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,d\psi(x, \alpha). \qquad (40.06)$$

Это позволяет нам определить $\alpha$ как однозначную функцию $\beta$ для почти всех значений $\beta$. Таким образом, $T$ определяет некоторое преобразование $\alpha$ в $\beta$, которое сохраняет меру и является взаимно однозначным для почти всех значений $\alpha$ и для почти всех значений $\beta$. Мы будем писать

$$\psi(x, \alpha) = T\psi(x, \beta). \qquad (40.07)$$

Такое преобразование позволяет нам применить теорему Биркгофа. Нуль-множества значений $\alpha$ и $\beta$, на которых отображение перестает быть взаимно однозначным, можно заменить другими нуль-множествами, которые отображаются взаимно однозначно и которые не влияют на теорему Биркгофа.

Мы введем теперь группу унитарных преобразований $T^t$, определяемую свойством $T^tT^u = T^{t+u}$. Если

$$\Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi} T^tF(x)\,d\psi(x, \alpha)\right\}$$

интегрируемо по Лебегу по $\alpha$, то, применяя теорему Биркгофа, получим, что для почти всех $\alpha$ существует предел

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}\int_0^A \Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi} T^tF(x)\,d\psi(x, \alpha)\right\}dt. \qquad (40.08)$$

Это во всяком случае будет иметь место, если интеграл (37.26) сходится абсолютно.

Рассмотрим теперь выражение

$$\int_0^1\left|\frac{1}{A}\int_0^A \Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi} T^tF(x)\,d\psi(x, \alpha)\right\}dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\,d\psi(y, \beta)\right\}d\beta\right|^2 d\alpha =$$

$$= \int_0^1 \left| \frac{1}{A} \int_0^A \Phi \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} T^t F(x)\, d\psi(x, \alpha) \right\} dt \right|^2 d\alpha -$$

$$- \left| \int_0^1 \Phi \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} F(y)\, d\psi(y, \beta) \right\} d\beta \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{A^2} \int_0^A ds \int_0^A dt \int_0^1 \Phi \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} T^s F(x)\, d\psi(x, \alpha) \right\} \times$$

$$\times \Phi \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} T^t F(y)\, d\psi(y, \alpha) \right\} d\alpha -$$

$$- \left| \int_0^1 \Phi \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} F(y)\, d\psi(y, \beta) \right\} d\beta \right|^2. \qquad (40.09)$$

Применим теорему XLIV′. Если мы положим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|^2\, dx = U, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \overline{F(x)}\, T^{s-t} F(x)\, dx = V, \qquad (40.091)$$

то правая часть равенства (40.09) примет вид

$$\frac{1}{A^2} \int_0^A ds \int_0^A dt \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \Phi(u_1+iv_1) \overline{\Phi}(u_2+iv_2) \times$$

$$\times \left[ \frac{\exp\left( \dfrac{-(u_1^2+v_1^2+u_2^2+v_2^2)\, U + 2\,(u_1u_2+v_1v_2) \operatorname{Re} V + 2\,(u_1v_2-u_2v_1) \operatorname{Im} V}{U^2 - |U|^2} \right)}{4\pi^4 \left[U^2 - |V|^2\right]} - \right.$$

$$\left. - \frac{\exp\left( -\dfrac{(u_1^2+v_1^2+u_2^2+v_2^2)}{U} \right)}{4\pi^4 U^2} \right]. \qquad (40.092)$$

Предположим, что Φ подчинена условиям, которые обеспечивают ограниченность интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \Phi(u_1+iv_1)\, \Phi(u_2+iv_2) \times$$

$$\times\left[\frac{\exp\left(\dfrac{-(u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2)\,U+2\,(u_1u_2+v_1v_2)\operatorname{Re}V+2\,(u_1v_2-u_2v_1)\operatorname{Im}V}{U^2-|V|^2}\right)}{4\pi\,[U^2-|V|^2]}-\frac{\exp\left(-\dfrac{(u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2)}{U}\right)}{4\pi^4U^2}\right] \qquad (40.093)$$

при $U<P$, $|V|<Q<P$. Тогда, если

$$\lim_{u\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{F(x)}\,T^uF(x)\,dx=0, \qquad (40.094)$$

то мы будем иметь

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^1\left|\frac{1}{A}\int_0^A\Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi}T^tF(x)\,d\psi(x,\,\alpha)\right\}dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}e^{-u}\Phi\left\{e^{i\theta}\left[2\pi u\int_{-\pi}^{\pi}|F(x)|^2\,dx\right]^{1/2}\right\}du\right|^2d\alpha=$$

$$=\lim_{B\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}du_1\int_{-\infty}^{\infty}du_2\int_{-\infty}^{\infty}dv_1\int_{-\infty}^{\infty}dv_2\Phi(u_1+iv_1)\,\Phi(u_2+iv_2)\times$$

$$\times\left[\frac{\exp\left(\dfrac{-(u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2)+2\,(u_1u_2+v_1v_2)\operatorname{Re}B+2\,(u_1v_2-u_2v_1)\operatorname{Im}B}{U\,(1-|B|^2)}\right)}{4\pi^4U^2\,(1-|B|^2)}-\frac{\exp\left(-\dfrac{(u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2)}{U}\right)}{4\pi^4U^2}\right]=0. \qquad (40.095)$$

Таким образом, в силу (40.08) и в силу того факта, что предел и предел в среднем одной и той же функции отличаются самое большее на нуль-множестве значений аргумента, будем иметь для почти всех $\alpha$

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}\int_0^A\Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi}T^tF(x)\,d\psi(x,\,\alpha)\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^{\infty}e^{-u}\Phi\left\{e^{i\theta}\left[2\pi u\int_{-\pi}^{\pi}|F(x)|^2\,dx\right]^{1/2}\right\}du. \qquad (40.096)$$

Например, если выполняется (40.05), то для почти всех $\alpha$ имеем

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\left|\int_{-\pi}^{\pi}T^tF(x)\,d\psi(x,\alpha)\right|^w dt=$$

$$=\Gamma\left(\frac{w}{2}+1\right)\left\{2\pi\int_{-\pi}^{\pi}|F(x)|^2\,dx\right\}^{w/2}. \qquad (40.097)$$

Этот результат является частным случаем следующего результата, который может быть доказан тем же методом:

Теорема XLVIII. *Пусть* $F_1(x),\ldots,F_N(x)$ — *набор функций из* $L_2$, *и пусть* $T^t$ — *однопараметрическая группа унитарных преобразований, обладающая тем свойством, что для любых* $m$ *и* $n$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{F_m(x)}\,T^tF_n(x)\,dx=0. \qquad (40.098)$$

*Тогда, если функция*

$$\Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi}F_1(x)\,d\psi(x,\alpha),\ \ldots,\ \int_{-\pi}^{\pi}F_N(x)\,d\psi(x,\alpha)\right\} \qquad (40.10)$$

*интегрируема по Лебегу по* $\alpha$, *то для почти всех* $\alpha$

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}\int_{0}^{A}\Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi}T^tF_1(x)\,d\psi(x,\alpha),\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\int_{-\pi}^{\pi}T^tF_N(x)\,d\psi(x,\alpha)\right\}dt=$$

$$=\int_0^1\Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi}F_1(x)\,d\psi(x,\beta),\ \ldots,\ \int_{-\pi}^{\pi}F_N(x)\,d\psi(x,\beta)\right\}d\beta. \qquad (40.11)$$

Особенно важной группой преобразований $T^t$ является группа всех сдвигов на бесконечной оси. Изоморфная ей группа преобразований на $(-\pi, \pi)$ получается заменой $y = \operatorname{tg}(x/2)$ и определяется следующим образом: положим

$$\begin{aligned} F(x) &= 2^{-1/2} f(\operatorname{tg}(x/2)) \sec(x/2), \\ G(x) &= 2^{-1/2} g(\operatorname{tg}(x/2)) \sec(x/2) \end{aligned} \tag{40.12}$$

и

$$T^t F(x) = 2^{-1/2} f(\operatorname{tg}(x/2) + t) \sec(x/2). \tag{40.13}$$

Рассматриваемая группа, очевидно, унитарна. Если теперь $F(x)$ и $G(x)$ — *любые* две функции, принадлежащие $L_2$, то будем иметь

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{F(x)}\, T^t G(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\xi)}\, g(\xi + t)\, d\xi = 0. \tag{40.14}$$

Введем обозначение

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, d\psi(x, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\Psi(\xi, \alpha). \tag{40.15}$$

Формально будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, d\psi(x, \alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} 2^{-1/2} f(\operatorname{tg}(x/2)) \sec(x/2)\, d\psi(x, \alpha) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-1/2} f(\xi)(1 + \xi^2)^{1/2}\, d\psi(2 \operatorname{arctg} \xi, \alpha). \tag{40.16}$$

Чтобы добиться согласованности с введенным обозначением, положим

$$\Psi(\xi, \alpha) = \int_{0}^{\xi} 2^{-1/2} (1 + \eta^2)^{1/2}\, d\psi(2 \operatorname{arctg} \eta, \alpha) =$$

$$= \int_{0}^{\operatorname{tg}(\xi/2)} 2^{-1/2} \sec(x/2)\, d\psi(x, \alpha). \tag{40.17}$$

При этом мы будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} T^t F(x)\, d\psi(x, \alpha) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-1/2} f(\xi + t)(1 + \xi^2)^{1/2} d\psi(2 \operatorname{arctg} \xi, \alpha) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + t)\, d\Psi(\xi, \alpha), \tag{40.18}$$

что разумно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\Psi(\xi - t, \alpha). \tag{40.19}$$

Если

$$\Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi} T^t e^{in_1 x}\, d\psi(x, \alpha), \ldots, \int_{-\pi}^{\pi} T^t e^{in_k x}\, d\psi(x, \alpha)\right\}$$

— произвольный функционал от $\psi(x, \alpha)$, который зависит только от конечного числа коэффициентов Фурье функции $\psi(x, \alpha)$ и интегрируем по $\alpha$, то по теореме XLVIII будем иметь для почти всех $\alpha$

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{A} \int_a^{A+a} \Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi} T^t e^{in_1 x}\, d\psi(x, \alpha), \ldots, \int_{-\pi}^{\pi} T^t e^{in_k x}\, d\psi(x, \alpha)\right\} dt =$$
$$= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{A} \int_a^{A+a} \Phi\left\{\int_{-\pi}^{\pi} e^{in_1 x}\, dT^{-t}\psi(x, \alpha), \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, \int_{-\pi}^{\pi} e^{in_k x}\, dT^{-t}\psi(x, \alpha)\right\} dt, \tag{40.20}$$

что равно фиксированному значению, не зависящему от $\alpha$, для почти всех $\alpha$. Далее, мы видели, что всякий функционал от $\psi(x, \alpha)$, являющийся непрерывной функцией $\alpha$, является равномерным пределом последовательности интегрируемых функционалов, зависящих только от конечного числа коэффициентов Фурье функции $\psi(x, \alpha)$, а также что произвольная интегрируемая функция от $\alpha$ является, за исключением множества значений произвольно малой меры, равномерным пределом последовательности непрерывных функций. Отсюда мы сразу же получаем теорему:

Теорема XLIX. *Пусть $T^t$ определена формулами* (40.12) *и* (40.13). *Пусть $\mathfrak{F}(\psi(x, \alpha))$ — произвольный функционал от $\psi(x, \alpha)$, который интегрируем по $\alpha$. Тогда для почти всех $\alpha$*

$$\frac{1}{N} \int_{a}^{N+a} \mathfrak{F}(\psi(x+t, \alpha))\, dt \tag{40.21}$$

*стремится при $N \to \infty$ к пределу* $\int_0^1 \mathfrak{F}(\psi(x, \alpha))\, d\alpha.$

**41. Гармонический анализ случайных функций.** Пусть $f(x+iy)$ — аналитическая функция такая, что $(1+x^2) \times \times f(x+iy)$ и $(1+|x|) f'(x+iy)$ равномерно принадлежат $L_2$ при $a < y < b$. Для любого счетного множества значений $y$ и для почти всех значений $\alpha$ как следствие из теоремы XLIX будем иметь

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \int_{-N}^{N} dx \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi+x+iy)\, d\Psi(\xi, \alpha) \right|^2 =$$

$$= \int_0^1 d\alpha \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi+x+iy)\, d\Psi(\xi, \alpha) \right|^2 =$$

$$= \int_0^1 d\alpha \left| \int_{-\pi}^{\pi} [2^{-1/2} f(\operatorname{tg}(u/2)+x+iy) \sec(u/2)]\, d\psi(u, \alpha) \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-u} \left| e^{i\theta} \left[ 2\pi u \int_{-\pi}^{\pi} \left| 2^{-1/2} f(\operatorname{tg}(w/2)+x+iy) \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \sec(w/2) \right|^2 dw \right]^{1/2} \right|^2 du =$$

$$= \int_0^{\infty} 2\pi u \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi+iy)|^2\, d\xi e^{-u}\, du = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi+iy)|^2\, d\xi. \tag{41.01}$$

Точно таким же образом при $a \leqslant y_0 < y_1 \leqslant b$ будем иметь

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \int_{-N}^{N} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + x + iy)\, d\Psi(\xi, \alpha) \right|^2 = \\ = 2\pi \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi + iy)|^2\, d\xi. \qquad (41.02)$$

Кроме того, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + x + iy)\, d\Psi(\xi, \alpha) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-1/2} f(\xi + x + iy)(1 + \xi^2)^{1/2}\, d\psi(2 \operatorname{arctg} \xi, \alpha) = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} 2^{-1/2} f(\operatorname{tg}(u/2) + x + iy) \sec(u/2)\, d\psi(u, \alpha) = \\ = -\int_{-\pi}^{\pi} \psi(u, \alpha)\, d\left(2^{-1/2} f(\operatorname{tg}(u/2) + x + iy) \sec(u/2)\right) \qquad (41.03)$$

сходится абсолютно и равномерно для почти всех $\alpha$, поскольку $\psi$ ограничена и непрерывна, и, таким образом, этот интеграл является аналитической функцией при $a < y < b$.

По теореме Коши и неравенству Шварца

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + x_0 + iy_0)\, d\Psi(\xi, \alpha) \right| = \\ = \frac{1}{2\pi} \left| \int_C \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + x + iy)\, d\Psi(\xi, \alpha)}{x - x_0 + i(y - y_0)}\, ds \right| \leqslant \\ \leqslant \frac{r}{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2} \int_0^{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + x + iy)\, d\Psi(\xi, \alpha) \right|^2 d\theta \right]^{1/2}, \qquad (41.04)$$

где $r$ — радиус окружности $C$, а $\theta$ — центральный угол, параметризующий эту окружность. Сравнение с (41.01) показывает, что равномерно по $x$ в полосе $a + \varepsilon < y < b - \varepsilon$

выполняется оценка

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N}\int_{-N}^{N} dx\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi+iy)\,d\Psi(\xi,\alpha)\right|^2 < \text{const.} \tag{41.05}$$

Кроме того, для любого конечного или счетного множества абсцисс и для почти всех $\alpha$ по теореме XLVIII имеем

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dx\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi+x+iy+t)d\Psi(\xi,\alpha)\times\right.$$
$$\left.\times\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(\xi+x+iy)\,d\Psi(\xi,\alpha)}\right]=$$
$$=2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi+iy+t)\,\overline{f(\xi+iy)}\,d\xi. \tag{41.06}$$

Таким образом, в силу результатов главы VIII функция

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi+iy)\,d\Psi(\xi,\alpha)$$

принадлежит $S'$ при $a<y<b$ для почти всех $\alpha$ и является ограниченной на любом интервале $y_0\leqslant y\leqslant y_1$. Следовательно, соотношение (41.01) выполняется для каждого $y$ из $(y_0, y_1)$ при почти всех $\alpha$.

Предположим, что

$$f(z)=\underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\varphi(u)\,e^{iuz}\,du \tag{41.07}$$

для любой абсциссы при $a<y<b$. Тогда из соотношения (34.40) главы VIII будет следовать, что для почти всех $\alpha$, всех $t$ и всех $y$ из $(y_0, y_1)$ выполняется равенство

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dx\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi+x+iy+t)\,d\Psi(\xi,\alpha)\times\right.$$
$$\left.\times\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(\xi+x+iy)\,d\Psi(\xi,\alpha)}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(u)|^2\,e^{iut-uy}\,du.$$
$$\tag{41.08}$$

**42. Нули случайной функции в комплексной плоскости.** Пусть $f(x+iy)$ обладает свойствами, приписанными ей в предыдущем параграфе. Тогда по теореме XLIX будем иметь

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}dx\int_{y_0}^{y_1}dy\left|\lg\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi+x+iy)\,d\Psi(\xi,\alpha)\right|\right|=$$
$$=\int_0^\infty e^{-u}du\int_{y_0}^{y_1}dy\left|\lg\left|\left[2\pi u\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2dx\right]^{1/2}\right|\right|. \qquad (42.01)$$

Соответственно этому для любого $C$

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\left[\int_{-A-C}^{-A}+\int_{A}^{A+C}\right]dx\int_{y_0}^{y_1}dy\times$$
$$\times\left|\lg\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi+x+iy)\,d\Psi(\xi,\alpha)\right|\right|=0. \qquad (42.02)$$

Из свойств гармонических функций следует также, что

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}dx\int_{y_0}^{y_1}dy\lg\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi+x+iy)\,d\Psi(\xi,\alpha)\right|=$$
$$=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}dx\cdot 2\int_0^{(y_1-y_0)/2}\frac{r\,dr}{\left[\left(\frac{y_1-y_0}{2}\right)^2-r^2\right]^{1/2}}\times$$
$$\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg\left|\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\xi+x+\frac{i(y_0+y_1)}{2}+re^{i\theta}\right)d\Psi(\xi,\alpha)\right|d\theta. \qquad (42.03)$$

С другой стороны, пусть $\varphi(z)$ ограничена в полосе $|\operatorname{Im} z|\leqslant a$ и измерима по переменным $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$. Преобразуя полярные координаты в декартовы, получим

$$\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}dx\cdot 2\int_0^a[a^2-r^2]^{-1/2}r\,dr\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x+re^{i\theta})\,d\theta=$$
$$=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}dx\,\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}d\eta\int_{-(a^2-\eta^2)^{1/2}}^{(a^2-\eta^2)^{1/2}}\varphi(x+\xi+i\eta)[a^2-\xi^2-\eta^2]^{-1/2}d\xi. \qquad (42.04)$$

Замена переменного $w=x+\xi$ приводит это выражение к виду

$$\frac{1}{2A}\int\limits_{-a}^{a} d\eta \frac{1}{\pi} \int\limits_{-[a^2-\eta^2]^{1/2}}^{[a^2-\eta^2]^{1/2}} d\xi \int\limits_{-A+\xi}^{A+\xi} \varphi(w+i\eta)[a^2-\xi^2-\eta^2]^{-1/2}\,dw=$$

$$=\frac{1}{2A}\int\limits_{-a}^{a} d\eta \Bigg\{ \int\limits_{-A}^{A} \varphi(w+i\eta)\,dw \frac{1}{\pi} \int\limits_{-[a^2-\eta^2]^{1/2}}^{[a^2-\eta^2]^{1/2}} [a^2-\xi^2-\eta^2]^{-1/2} d\xi +$$

$$+\frac{1}{\pi} \int\limits_{-[a^2-\eta^2]^{1/2}}^{[a^2-\eta^2]^{1/2}} d\xi \int\limits_{A}^{A+\xi} \varphi(w+i\eta)[a^2-\xi^2-\eta^2]^{-1/2}\,dw +$$

$$+\frac{1}{\pi} \int\limits_{-[a^2-\eta^2]^{1/2}}^{[a^2-\eta^2]^{1/2}} d\xi \int\limits_{-A-\xi}^{-A} \varphi(w+i\eta)[a^2-\xi^2-\eta^2]^{-1/2}\,dw \Bigg\} =$$

$$=\frac{1}{2A}\int\limits_{-a}^{a} d\eta \int\limits_{-A}^{A} \varphi(w+i\eta)\,dw + R, \qquad (42.041)$$

где

$$|R| \leqslant \text{const.}\,\frac{1}{2A}\int\limits_{-a}^{a} d\eta \int\limits_{-[a^2-\eta^2]^{1/2}}^{[a^2-\eta^2]^{1/2}} d\xi\,|\xi|\,[a^2-\xi^2-\eta^2]^{-1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const.}\,A^{-1}. \qquad (42.042)$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2A}\int\limits_{-A}^{A} dx\cdot 2\int\limits_{0}^{a} [a^2-r^2]^{-1/2}\,r\,dr\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} \varphi(x+re^{i\theta})\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2A}\int\limits_{-A}^{A} dw \int\limits_{-a}^{a} \varphi(w+i\eta)\,d\eta + O(A^{-1}). \qquad (42.043)$$

Сопоставляя это равенство с (42.02), получим

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A}\int\limits_{-A}^{A} dx\cdot 2\int\limits_{0}^{(y_1-y_0)/2} \frac{r\,dr}{\left[\left(\frac{y_1-y_0}{2}\right)^2-r^2\right]^{1/2}} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} \lg\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(\xi+x+\frac{i(y_0+y_1)}{2}+re^{i\theta}\right) d\Psi(\xi,\alpha)\right| d\xi\right.$$

$$-\lg\left|\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\xi+x+\frac{i(y_0+y_1)}{2}\right)d\Psi(\xi,\alpha)\right|\Bigg] =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-u}\,du \int_{y_0}^{y_1} dy\,\left\{\lg\left|\left[2\pi u\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2\,dx\right]^{1/2}\right| -\right.$$

$$\left. -\lg\left|\left[2\pi u\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{i(y_0+y_1)}{2}\right)\right|^2 dx\right]^{1/2}\right|\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{y_0}^{y_1} dy\,\lg\left\{\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{i(y_0+y_1)}{2}\right)\right|^2 dx}\right\}. \quad (42.05)$$

С другой стороны, по теореме Йенсена, обозначая через $\xi_n+i\eta_n$ нули функции $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi+z)\,d\Psi(\xi,\alpha)$ в полосе $y_0 \leqslant \operatorname{Im} z < y_1$, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg\left|\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\xi+x+\frac{i(y_0+y_1)}{2}+re^{i\theta}\right)d\Psi(\xi,\alpha)\right|d\theta -$$

$$-\lg\left|\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\xi+x+\frac{i(y_0+y_1)}{2}\right)d\Psi(\xi,\alpha)\right| =$$

$$= \sum_{J(r)}\lg\left\{r\left[(\xi_n-x)^2+\left(\eta_n-\frac{y_0+y_1}{2}\right)^2\right]^{-1/2}\right\}, \quad (42.06)$$

где $J(r)$ — область, характеризуемая неравенством

$$(\xi_n-x)^2+\left(\eta_n-\frac{y_0+y_1}{2}\right)^2 \leqslant r^2. \quad (42.061)$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\int_{y_0}^{y_1} dy\,\lg\left\{\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{i(y_0+y_1)}{2}\right)\right|^2 dx}\right\} =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} dx \int_{0}^{(y_1-y_0)/2} \frac{r\,dr}{[((y_1-y_0)/2)^2-r^2]^{1/2}} \times$$

$$\times \sum_{J} \lg \left\{ r \left[ (\xi_n - x)^2 + \left( \eta_n - \frac{y_0+y_1}{2} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\}. \quad (42.07)$$

Положим

$$\left[ (\xi_n - x)^2 + \left( \eta_n - \frac{y_0+y_1}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = \varrho_n. \quad (42.071)$$

Тогда правая часть равенства (42.07) примет вид

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} dx \sum_{J\,((y_1-y_0)/2)} \int_{\rho_n}^{(y_1-y_0)/2} \frac{r \lg (r/\varrho_n)\,dr}{\left[ \left( \frac{y_1-y_0}{2} \right)^2 - r^2 \right]^{1/2}}. \quad (42.072)$$

Воспользуемся теперь формулой

$$\int_{b}^{a} \lg \frac{r}{b} \frac{r\,dr}{(a^2-r^2)^{1/2}} = \int_{b}^{a} (a^2-r^2)^{1/2} \frac{dr}{r} =$$

$$= -a \left[ \lg \left( \frac{a}{b} - \left( \frac{a^2}{b^2} - 1 \right)^{1/2} \right) + \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (42.08)$$

Подставляя ее в (42.072) и используя (42.07), получим

$$\frac{1}{2} \int_{y_0}^{y_1} dy \lg \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left( x + \frac{i(y_0+y_1)}{2} \right) \right|^2 dx} \right\} =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{A} \int_{-A}^{A} dx \sum_{J\,((y_1-y_0)/2)} \frac{y_0-y_1}{2} \times$$

$$\times \left\{ \lg \left[ \frac{y_1-y_0}{2\varrho_n} - \left( \frac{(y_1-y_0)^2}{4\varrho_n^2} - 1 \right)^{1/2} \right] + \left[ 1 - \frac{4\varrho_n^2}{(y_1-y_0)^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (42.09)$$

Изменим теперь порядок суммирования и интегрирования. Пределы нашего комбинированного интегрирования



22

и суммирования означают, что $x$ лежит между $-A$ и $A$ и что $(\xi_n, \eta_n)$ лежит внутри круга радиуса $\frac{1}{2}(y_1 - y_0)$ с центром в точке $\left(x, \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\right)$. Отсюда следует, что $\xi_n$ лежит в пределах, зависящих от $\eta_n$, но содержащихся между $\left(-A + \frac{1}{2}(y_1 - y_0), A - \frac{1}{2}(y_1 - y_0)\right)$ и $\left(-A - \frac{1}{2}(y_1 - y_0), A + \frac{1}{2}(y_1 - y_0)\right)$. Кроме того, подинтегральная функция в (42.09) всюду положительна. Поскольку предел в (42.09) существует, мы будем иметь тот же самый предел, если заменим $A$ на $A \pm \frac{1}{2}(y_1 - y_0)$, что дает отношение к $A$, стремящееся к 1, когда $A \to \infty$. Соответственно, если мы возьмем область изменения $\xi_n$ от $-A$ до $A$, мы не изменим предел в (42.09). Точка $\left(x, \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\right)$ будет лежать тогда внутри круга $K$ радиуса $\frac{1}{2}(y_1 - y_0)$ с центром в точке $(\xi_n, \eta_n)$. Соответственно этому правая часть равенства (42.09) примет вид

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{A} \sum_{|\xi_n| < A} \int_K \frac{y_0 - y_1}{2} \left\{ \lg \left[ \frac{y_1 - y_0}{2\varrho_n} - \left( \frac{(y_1 - y_0)^2}{4\varrho_n^2} - 1 \right)^{1/2} \right] + \right.$$
$$\left. + \left[ 1 - \frac{4\varrho_n^2}{(y_1 - y_0)^2} \right]^{1/2} \right\} dx. \quad (42.091)$$

Положим теперь $u = \xi_n - x$ и выполним интегрирование по частям. Правая часть равенства (42.09) примет вид

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{A} \sum_{|\xi_n| < A} \int_L \frac{u^2 \left[ \left( \frac{y_1 - y_0}{2} \right)^2 - u^2 - \left( \eta_n - \frac{y_0 + y_1}{2} \right)^2 \right]^{1/2}}{\frac{y_1 - y_0}{2} \left( u^2 + \left( \eta_n - \frac{y_0 + y_1}{2} \right)^2 \right)} du, \quad (42.092)$$

где $L$ — внутренность круга

$$u^2 + \left( \eta_n - \frac{y_0 + y_1}{2} \right)^2 \leqslant \left( \frac{y_1 - y_0}{2} \right)^2.$$

Если мы положим теперь

$$w=\left[u^2+\left(\eta_n-\frac{y_0+y_1}{2}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{42.093}$$

то правая часть (42.09) преобразуется к виду

$$\lim_{A\to\infty}\frac{2}{A}\sum_{|\xi_n|<A}\int\limits_{|\eta_n-(y_0+y_1)/2|}^{(y_1-y_0)/2}\left\{\left[w^2-\left(\eta_n-\frac{y_0+y_1}{2}\right)^2\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[\left(\frac{y_1-y_0}{2}\right)^2-w^2\right]\right\}^{1/2}\frac{dw}{w}. \tag{42.094}$$

Воспользуемся теперь формулой

$$\int\limits_q^p[(x^2-q^2)(p^2-x^2)]^{1/2}\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{4}(p-q)^2. \tag{42.10}$$

Тогда правая часть равенства (42.09) примет вид

$$\lim_{A\to\infty}\frac{\pi}{2A}\sum_{|\xi_n|<A}\left[\frac{y_1-y_0}{2}-\left|\eta_n-\frac{y_0+y_1}{2}\right|\right]^2=$$
$$=\pi\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\sum_{|\xi_n|<A}\text{меньшее из чисел } (\eta_n-y_0)^2,\ (\eta_n-y_1)^2. \tag{42.11}$$

Этот предел всегда существует, если $y_0$ и $y_1$ лежат внутри интервала $a<y<b$, на любом внутреннем интервале которого функция $f(x+iy)$ равномерно принадлежит $L_2$ и удовлетворяет условиям, следующим за формулой (41.06) предыдущего параграфа. На интервале $a+\varepsilon<y<b-\varepsilon$ имеем равномерно

$$\overline{\lim_{A\to\infty}}\frac{1}{2A}\sum_{|\xi_n|<A}1<\text{const.}\,(y_1-y_0) \tag{42.12}$$

в соответствии с (42.09) и (42.11), поскольку $(\eta_n-y_0)^2>\varepsilon^2$,

$(\eta_n - y_1)^2 > \varepsilon^2$. Дальнейшим следствием из этих формул является

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon}\left[\int\limits_{y_1-\varepsilon}^{y_1} + \int\limits_{y_0}^{y_0+\varepsilon}\right] \lg \left\{ \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\, dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(x + i\,\frac{y_0+y_1}{2}\right)\right|^2 dx} \right\} =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \left\{ - \sum_{|\xi_n^{\mathrm{I}}|<A} (2\eta_n^{\mathrm{I}} - 2y_1 + \varepsilon) + \sum_{|\xi_n^{\mathrm{II}}|<A} (2\eta_n^{\mathrm{II}} + 2y_0 - \varepsilon) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{|\xi_n^{\mathrm{III}}|<A} (\eta_n^{\mathrm{III}} - y_0)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{|\xi_n^{\mathrm{IV}}|<A} (\eta_n^{\mathrm{IV}} - y_1)^2 \right\}. \qquad (42.13)$$

Здесь $\{\xi_n^{\mathrm{I}} + i\eta_n^{\mathrm{I}}\}$ — нули функции $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi + z)\, d\Psi(\xi, \alpha)$ в полосе

$$\frac{y_0+y_1}{2} \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant y_1 - \varepsilon,$$

$\{\xi_n^{\mathrm{II}} + i\eta_n^{\mathrm{II}}\}$ — нули в полосе $\left(y_0 + \varepsilon,\ \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\right)$,

$\{\xi_n^{\mathrm{III}} + i\eta_n^{\mathrm{III}}\}$ — нули в полосе $(y_0,\ y_0 + \varepsilon)$

и

$\{\xi_n^{\mathrm{IV}} + i\eta_n^{\mathrm{IV}}\}$ — нули в полосе $(y_1 - \varepsilon,\ y_1)$.

Вспомним, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)|^2 e^{-2uy}\, du, \qquad (42.14)$$

причем эта функция непрерывна по $y$, и что

$$\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u\,|\varphi(u)|^2\,e^{-2uy}\,du. \quad (42.15)$$

Из формулы (42.13), если мы положим $\varepsilon\to 0$ и учтем (42.12), будет следовать, что

$$\frac{1}{4\pi}\lg\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy_0)|^2\,dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy_1)|^2\,dx}{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{i(y_0+y_1)}{2}\right)\right|^2dx\right]^2}=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\left\{-\sum_{|\xi_n^{\mathrm{I}}|<A}(\eta_n^{\mathrm{I}}-y_1)+\sum_{|\xi_n^{\mathrm{II}}|<A}(\eta_n^{\mathrm{II}}-y_0)\right\}. \quad (42.16)$$

Заменим теперь $y_0$ на $y_0+\varepsilon$, а $y_1$ на $y_1-\varepsilon$. Будем иметь

$$\frac{1}{4\pi}\lg\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+i(y_0+\varepsilon))|^2\,dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+i(y_1-\varepsilon))|^2\,dx}{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{i(y_0+y_1)}{2}\right)\right|^2dx\right]^2}=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\left\{-\sum_{|\xi_n^{\mathrm{I}}|<A}(\eta_n^{\mathrm{I}}-y_1+\varepsilon)+\sum_{|\xi_n^{\mathrm{II}}|<A}(\eta_n^{\mathrm{II}}-y_0-\varepsilon)\right\}, \quad (42.161)$$

где $\{\xi_n^{\mathrm{I}}+i\eta_n^{\mathrm{I}}\}$ — нули функции $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi+z)\,d\Psi(\xi,\alpha)$ в полосе $\frac{1}{2}(y_0+y_1)\leqslant\operatorname{Im}z\leqslant y_1-\varepsilon$, а $\{\xi_n^{\mathrm{II}}+i\eta_n^{\mathrm{II}}\}$—

нули в полосе $\left(y_0+\varepsilon,\ \frac{1}{2}(y_0+y_1)\right)$. Истолковывая $\{\xi_n^{III}+i\eta_n^{III}\}$ и $\{\xi_n^{IV}+i\eta_n^{IV}\}$, как и выше, мы видим, что

$$\frac{1}{4\pi}\lg\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy_0)|^2\,dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy_1)|^2\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+i(y_0+\varepsilon))|^2\,dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+i(y_1-\varepsilon))|^2\,dx}=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left\{\frac{-\varepsilon}{2A}\left\{\sum_{|\xi_n^{I}|<A}1+\sum_{|\xi_n^{II}|<A}1\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2A}\left\{\sum_{|\xi_n^{III}|<A}(\eta_n^{III}-y_1+\varepsilon)-\sum_{|\xi_n^{IV}|<A}(\eta_n^{IV}-y_0-\varepsilon)\right\}\right\}. \tag{42.162}$$

Как и раньше, используя (42.12), получаем

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2A}\sum_{|\xi_n|<A}1=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\lg\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+i(y_0+\varepsilon))|^2\,dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+i(y_1-\varepsilon))|^2\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy_0)|^2\,dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy_1)|^2\,dx}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\frac{d}{dy}\lg\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2\,dx\right]_{y=y_0}-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{d}{dy}\lg\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2\,dx\right]_{y=y_1}\right\}. \tag{42.163}$$

Таким образом, в силу (42.15) и (42.14) имеем

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} -2u\,|\varphi(u)|^2 e^{-2uy_1}\,du}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)|^2 e^{-2uy_1}\,du} - \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} -2u\,|\varphi(u)|^2 e^{-2uy_0}\,du}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)|^2 e^{-2uy_0}\,du}\right\} =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \sum_{|\xi_n|<A} 1. \quad (42.17)$$

Мы можем теперь высказать наш результат в виде теоремы.

Теорема L. *Пусть*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^2\,|f(x+iy)|^2\,dx < \text{const.} \quad (a<y<b), \quad (42.18)$$

*и пусть*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)\,|f'(x+iy)|^2\,dx < \text{const.} \quad (a<y<b). \quad (42.19)$$

*Пусть*

$$f(z) = \underset{A\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-A}^{A} \varphi(u)\,e^{iuz}\,du \quad (42.20)$$

*для любых абсцисс при $a<y<b$. Тогда число нулей функции*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi+z)\,d\Psi(\xi,\alpha) \quad (42.21)$$

*в полосе $y_0 < \operatorname{Im} z < y_1$ $(a<y_0<y_1<b)$ между абсциссами $-A$ и $A$ асимптотически равно*

$$\frac{A}{2\pi}\left\{\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} 2u\,|\varphi(u)|^2 e^{-2uy_0}\,du}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)|^2 e^{-2uy_0}\,du} - \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} 2u\,|\varphi(u)|^2 e^{-2uy_1}\,du}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)|^2 e^{-2uy_1}\,du}\right\}. \quad (42.22)$$

Эта теорема для случайных функций является точным двойником некоторых недавних теорем Бора и Йессена для почти периодических функций*). Оба эти класса теорем основаны на использовании формулы Йенсена. Йессен использует специальную формулу Йенсена для нулей в бесконечной полосе, которая содержит в себе средние и может быть доказана путем аппроксимации такой области областью, заключенной между двумя окружностями, и конформного отображения такой области. Мы используем классическую формулу Йенсена, интегрируя ее по параметрам, определяющим центр круга, к которому она применяется. Мы уверены, что наши методы можно непосредственно применить к тому типу задач, который изучался Бором и Йессеном.

*) Ср. с работой Б. Йессена, которая должна появиться в «Journal of Mathematics and Physics» Массачусетского технологического института.

## ЛИТЕРАТУРА


A. S. Besicovitch, Almost periodic functions, Cambridge, 1932, стр. 10.

G. D. Birkhoff, Proceedings of the National Academy of Sciences (USA), vol. 17 (1931), стр. 650—660.

A theorem on series of orthogonal functions with an application to Sturm-Liouville series, Proceedings of the National Academy of Sciences (USA), vol. 3 (1917), стр. 656.

S. Bochner, Inversion formulae and unitary transformations, Annals of Mathematics, (2), vol. 34 (1934), стр. 111—115.

Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932. (Русский перевод: С. Бохнер, Лекции об интегралах Фурье, Физматгиз, М., 1962, сделан с американского издания: S. Bochner, Lectures on Fourier Integrals, Princeton, 1959.)

Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, Fundamenta Mathematicae, vol. 20 (1933), стр. 262—276.

H. Bohr and B. Jessen, Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion, Acta Mathematica, vol. 54 (1930), стр. 1—35; vol. 58 (1932), стр. 1—55.

E. Borel, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 27 (1909), стр. 247—271.

I. W. Busbridge, On general transforms of the Fourier type, Journal of the London Mathematical Society, vol. 9 (1934), стр. 179—187.

T. Carleman, Les Fonctions Quasi-Analitiques, Paris, 1926.

P. J. Daniell, A general form of integral, Annals of Mathematics, (2), vol. 19 (1918), стр. 279—294.

Integrals in an infinite number of dimensions, Annals of Mathematics, (2), vol. 20 (1919), стр. 281—288.

Further properties of the general integral, Annals of Mathematics, (2), vol. 21 (1920), стр. 203—220.

A. Denjoy, Comptes Rendus, vol. 173, стр. 1329.

P. Dienes, The Taylor Series, Oxford, 1931, стр. 372 и след.

A. Einstein, Annalen der Physik, Bd. 17 (1905), стр. 549 и след; Bd. 19 (1906), стр. 371 и след.

G. H. Hardy, A theorem concerning Fourier transforms, Journal of the London Mathematical Society, vol. 8. (1933), стр. 227—231.

G. H. Hardy and E. C. Titchmarsh, A class of Fourier kernels, Proceedings of the London Mathematical Society, (2), vol. 35 (1932), стр. 116—155.

E. Hopf, Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern, Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1928, Nr. XVIII.

Mathematisches zur Strahlungsgleichgewichtstheorie der Fixsternatmosphären, Mathematische Zeitschrift, Bd. 33 (1931), стр. 109.

Complete transitivity and the ergodic principle, Proceedings of the National Academy of Sciences (USA), vol. 18 (1932), стр. 204—209.

A. E. Ingham, The Distribution of Primes, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 30, глава III, § 7. (Русский перевод: Ингам А. Е., Распределение простых чисел, М., 1936.)

B. Jessen, Статья будет напечатана в «Journal of Mathematics and Physics» Массачусетского технологического института.

Bidrag til Integralteorien for Funktioner af unendelig mange Variable, Copenhagen, 1930.

C. Jordan, Statistique Mathématique, Paris, 1927, стр. 105 и след.

A. Khintchine, Zu Birkhoff's Lösung des Ergodenproblems, Mathematische Annalen, Bd. 107 (1933), стр. 285—288.

K. Knopp, Theory and Application of Infinite Series, London, 1928.

A. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, М., 1936.

E. Landau, Beiträge zur analytischen Zahlentheorie, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 26 (1908), стр. 218.

Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 1929.

N. Levinson, On a theorem of Carleman, Proceedings of the National Academy of Sciences (USA), vol. 20 (1934), стр. 523—525.

P. Lévy, Sur la convergence absolue des séries de Fourier, Comptes Rendus, vol. 196 (1933), стр. 463.

M. S. Mandelbrojt, Sur l'unicité des séries de Fourier, Journal de l'Ecole Polytechnique, (2), cahier 32 (1934).

J. Mercer, On the limits of real variants, Proceedings of the London Mathematical Society, (2), vol. 5. (1907), стр. 206—224.

G. W. Morgan, A note on Fourier transforms, Journal of the London Mathematical Society, vol. 9 (1934), стр. 187—193.

C. H. Müntz, Über den Approximationssatz von Weierstrass, Schwarz's Festschrift, Berlin, 1914, стр. 303—312.

R. E. A. C. Paley and N. Wiener, Notes on the theory and application of Fourier transforms, Notes I—II, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 35 (1933), стр. 348—355; Notes III—VII, там же, vol. 35 (1933), стр. 761—791.

R. E. A. C. Paley, N. Wiener and A. Zygmund, Notes on random functions, Mathematische Zeitschrift, Bd. 37 (1933), стр. 647—668.

R. E. A. C. Paley and A. Zygmund, On some series of functions, Proceedings of the Cambridge Phylosophical Society, vol. 26, стр. 337—357, 458—474, vol. 28, стр. 190—205.

J. Perrin, Atoms, перевод Хэммика (D. Ll. Hammick), второе английское издание, Лондон, 1923, стр. 110 и след. Русский перевод: И. А. Соколова: Ж. Перрэн, Атомы, Государственное издательство, М., 1924.

M. Plancherel, Sur les formules de réciprocité du type de Fourier, Journal of the London Mathematical Society, vol. 8 (1933), стр. 220—226.

Contribution à l'étude de la representation d'une function arbitraire par des intégrales définies, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 30 (1910), стр. 289—335.

G. Pólya, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 40 (1931), 2-te Abteilung, стр. 80, проблема 105; см. также проблему 108 (стр. 81).

H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Mathematische Annalen, Bd. 87 (1922), стр. 112—138.

L. L. Silverman, On the consistency and equivalence of certain generalized definitions of the limit of a function of a continuous variable, Annals of Mathematics, (2), vol. 21 (1920), стр. 128—140.

M. von Smoluchowski, Die Naturwissenschaften, Bd. 6. (1918), стр. 253—262.

H. Steinhaus, Sur la probabilité de la convergence de séries, Studia Mathematica, vol. 2 (1930), стр. 21—39.

W. Stepanoff, Sur quelques généralisations des fonctions presque-périodiques, Comptes Rendus, vol. 181, стр. 90—92.

O. Szász, Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen, Mathematische Annalen, Bd. 77 (1916), стр. 482—496.

Über die Approximation stetiger Funktionen durch gegebene Funktionenfolgen, Mathematische Annalen, Bd. 104 (1931), стр. 155—160.

E. C. Titchmarsh, The zeros of certain integral functions, Proceedings of the London Mathematical Society, (2), vol. 25 (1926), стр. 283—302.

On integral functions with real negative zeros, Proceedings of the London Mathematical Society, (2), vol. 26 (1927), стр. 185—200.

A proof of a theorem of Watson, Journal of the London Mathematical Society, vol. 8 (1933), стр. 217—220.

The theory of Functions, Oxford, 1932. Русский перевод Е. Титчмарш, Теория функций, М., 1951.

C. J. de la Vallée Poussin, Comptes Rendus, vol. 176 (1923), стр. 635.

V. Volterra, Leçons sur les Equations Intégrales et les Equations Intégro-Differentielles, Paris, 1913.

J. L. Walsh, A generalization of the Fourier cosine series, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 22 (1921), стр. 230—239.

G. N. Watson, General transforms, Proceedings of the London Mathematical Society, (2), vol. 35 (1932), стр. 156—199.

J. M. Whittaker, On the cardinal function of interpolation theory, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, (2), vol. 1 (1927), стр. 41—47.

The «Fourier» theory of the cardinal function, там же, (2), vol. 1 (1928), стр. 169—177.

The lower order of integral functions, Journal of the London Mathematical Society, vol. 8. (1933), стр. 20—27.

D. V. Widder, The inversion of the Laplace integral and the related moment problem, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 36 (1934), стр. 107—201.

N. Wiener, A new method in Tauberian theorems, Journal of Mathematics and Physics of the Massachusetts Institute of Technology, vol. 7 (1928), стр. 161—184.

Tauberian theorems, Annals of Mathematics, (2), vol. 33 (1932), стр. 1—100.

Generalized harmonic analysis, Acta Mathematica, vol. 55 (1930), стр. 117—258.

The Fourier Integral and Certain of its Applications. Cambridge, 1933. (Русский, перевод: Н. Винер, Интеграл Фурье и некоторые его применения, Физматгиз, 1963.)

On the closure of certain assemblages of trigonometrical functions, Proceeding sof the National Academy of Sciences (USA), vol. 13 (1927), стр. 27.

N. Wiener and E. Hopf, Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1931, стр. 696.

# АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

*Норберт Винер, Раймонд Пэли*

Преобразование Фурье в комплексной области

М., 1964 г., 268 стр.

Редактор *А. П. Баева*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректор *Т. С. Плетнева*

---

Сдано в набор 13/VI 1964 г. Подписано к печати 18/VIII 1964 г. Бумага $84 \times 108/_{32}$. Физ. печ. л. 8,38. Условн. печ. л. 13,73. Уч.-изд. л. 11,99. Тираж 10 000 экз. Цена книги 80 коп. Заказ № 253.

---

Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Московская типография № 16
«Главполиграфпрома» Государственного
комитета Совета Министров СССР по печати.
Москва, Трехпрудный пер., 9.