

530.121

B-57v

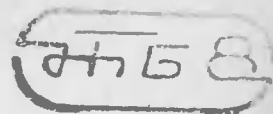
Ю. С. Владимиров

РАЗМЕРНОСТЬ
ФИЗИЧЕСКОГО
ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ
И ОБЪЕДИНЕНИЕ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

8596

8596

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1987



Владимиров Ю. С. Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. — М.: Изд-во МГУ, 1987.—215 с.

Книга посвящена систематическому рассмотрению многомерных теорий поля, объединяющих общую теорию относительности с теориями электромагнитного, электрослабого и сильного взаимодействий. В основу положены классические идеи Клиффорда, Эйнштейна, Калуцы—Клейна, Вейля и аффинная геометрия с кручением. Последовательно проанализированы достоинства и недостатки 5-мерной теории гравитации и электромагнетизма типа Калуцы—Клейна; 6-мерной модели гравитации и электромагнетизма с кручением. Последовательно проанализированы достоинства и недостатки 5-мерной теории гравитации и электромагнетизма типа Калуцы—Клейна; 6-мерной модели гравитации и электромагнетизма с кручением, содержащей основные элементы модели электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама; 7-мерной модели гравитации и электромагнетизма с кручением, описывающей три поколения элементарных частиц; 7-мерной модели гравитации и электромагнетизма с кручением, описывающей основные элементы классической (не квантовой) хромодинамики. Обсуждены перспективы объединения многомерных моделей различных взаимодействий.

Книга рассчитана на специалистов в области теоретической физики.

Библиогр. 117 назв.

Рецензенты: проф. В. И. Григорьев, проф. Н. В. Мицкевич

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение. История развития многомерных теорий поля	9
Глава 1. Гравитация и электромагнетизм в 4-мерном пространстве-времени	17
§ 1.1 Основные идеи и формулы общей теории относительности	17
§ 1.2. Монадный метод, или 1+3-расщепление в 4-мерном пространстве-времени	18
§ 1.3. Электродинамика в искривленном пространстве-времени	21
§ 1.4. Единая теория гравитации и электромагнетизма Вейля	22
§ 1.5. Конформные преобразования	26
§ 1.6. Пространства с кручением	27
§ 1.7. Двудный и тетрадный формализмы в общей теории относительности	30
§ 1.8. Уравнения Дирака в гравитационном и электромагнитном полях	33
§ 1.9. Аффинные геометрии и нелинейные уравнения поля	35
Глава 2. Единая 5-мерная теория гравитации и электромагнетизма	37
§ 2.1. Основные идеи 5-мерной теории гравитации и электромагнетизма	37
§ 2.2. 1+4-Расщепление 5-мерного риманова многообразия	39
§ 2.3. Единая 5-мерная теория Калуцы: ее достоинства и недостатки	43
§ 2.4. Конформное преобразование и условие квазицилиндричности по x^5	46
§ 2.5. Электрический заряд и замкнутость мира по пятой координате	50
§ 2.6. Конформно выделенное заряженное скалярное поле	53
§ 2.7. Кручение в 5-мерной теории	57
§ 2.8. Фермионная часть плотности лагранжиана	58
§ 2.9. Анализ описания фермионов в 5-мерной теории	61
§ 2.10. Обсуждение возможностей и недостатков 5-мерной теории	64
Глава 3. Вещественное фундаментальное скалярное поле в 5-мерной теории	68
§ 3.1. Проблемы «скаляризма» в многомерных теориях поля	63
§ 3.2. Конформно-соответствующие варианты 5-мерной теории	69
§ 3.3. Сферически-симметричные решения многомерных «уравнений Эйнштейна»	73
§ 3.4. Генерирование полей 5-мерными вращениями	76
§ 3.5. Возможные эффекты в 5-мерной теории, связанные скалярному полю	78
§ 3.6. Однородные изотропные космологические модели в 5-мерной теории	81
§ 3.7. Некоторые замечания о теориях со скалярным полем	85
Глава 4. 6-Мерная модель гравитации и электромагнетизма	88
§ 4.1. Модель электрослабого взаимодействия Вайнберга—Салама	88
§ 4.2. Гиперплотность лагранжиана 6-мерной модели	93
§ 4.3. 1+1+4-Расщепление 6-мерного многообразия	96
§ 4.4. Конформное преобразование и прием, соответствующий механизму Хиггса	99

§ 4.5.	Нейтральные векторные поля	102
§ 4.6.	Кручение и заряженные векторные поля	104
§ 4.7.	8-Компонентное спинорное поле (общие соотношения)	106
§ 4.8.	Фермионная часть гиперплотности лагранжиана	108
§ 4.9.	Взаимодействие фермионов с векторными полями	112
§ 4.10.	Массы покоя фермионов	117
§ 4.11.	Взаимодействие фермионов с векторными полями через аномальные магнитные моменты	121
§ 4.12.	Взаимодействие фермионов с гравитацией и с дополнительными геометрическими слагаемыми	121
§ 4.13.	Обсуждение результатов	122
Глава 5. 7-Мерная модель грави-электро-слабых взаимодействий, описывающая три поколения элементарных частиц		
§ 5.1.	Основные сведения о свойствах электрослабых взаимодействий трех поколений лептонов и кварков	125
§ 5.2.	Основные идеи 7-мерной модели грави-электро-слабых взаимодействий	125
§ 5.3.	1+1+1+4-Расщепление 7-мерного многообразия	128
§ 5.4.	Конформно выделенное скалярное поле	130
§ 5.5.	Нейтральные векторные поля метрического происхождения	133
§ 5.6.	Взаимодействие нейтральных векторных бозонов с частицами	135
§ 5.7.	Кручение и векторные заряженные W-бозоны	139
§ 5.8.	Определение цвета, ароматов, левых и правых компонент фермионов	143
§ 5.9.	Фермионная часть гиперплотности лагранжиана	146
§ 5.10.	Нейтральные и заряженные токи	151
§ 5.11.	Массы токовых кварков	154
§ 5.12.	Обсуждение результатов	156
Глава 6. Модель 7-мерной теории грави-электро-сильных взаимодействий		
§ 6.1.	Основные сведения из стандартной теории сильных взаимодействий	162
§ 6.2.	Основные идеи 7-мерной модели, содержащей хромодинамику	162
§ 6.3.	Электромагнитное поле и глюоны метрического происхождения	164
§ 6.4.	Кручение и «заряженные» глюоны	165
§ 6.5.	Гиперплотность лагранжиана глюонных полей	170
§ 6.6.	Массы покоя пражварков	173
§ 6.7.	Обсуждение результатов	174
Глава 7. На пути к теории Великого объединения		
§ 7.1.	Многомерные модели единой теории с размерностями, большими семи	176
§ 7.2.	О многомерных теориях с несколькими временноподобными координатами	178
§ 7.3.	Роль геометрических понятий и идей в объединении физических взаимодействий	178
§ 7.4.	Некоторые гипотезы и прогнозы	181
Заключение		
Приложение 1. Спиноры и алгебры Клиффорда в многообразиях различной размерности и сигнатуры		
Приложение 2. Метрический вариант введения W-бозонов		
Литература		

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга посвящена обсуждению проблемы размерности физического пространства-времени в связи с задачей объединения взаимодействий. В современной физической картине мира факт 4-мерности пространства-времени обычно постулируется. Эта аксиома отражает одно из наиболее удивительных и загадочных свойств мироздания. Почему пространство трехмерно и время одномерно? Над этим вопросом думали два столетия тому назад Кант и Лагранж, в прошлом столетии его обсуждали Б. Риман, Э. Мах, Г. Грассман; уже в нашем столетии было затрачено много усилий на его решение А. Эйнштейном, П. Эренфестом, А. Эддингтоном и многими другими. Постепенно постановка этой проблемы прояснялась и уточнялась. Сейчас она представляется так: каким образом можно объяснить размерность (4-мерие) классического пространства-времени, исходя из более элементарных физических понятий и закономерностей? Быстрое развитие теоретической физики и ситуация, сложившаяся в настоящий момент в этой области знаний, свидетельствуют о том, что созрели все условия для решения проблемы в ближайшее время.

Скорее всего для решения поставленной проблемы придется изменить наши представления о классическом пространстве-времени. В основу их понимания нужно будет положить закономерности, взятые из физики микромира. В искомой теории классические пространственно-временные представления не должны постулироваться, а должны возникать как нечто вторичное. Прежде всего это относится к возникновению понятия размерности — классическому 4-мерию. Другими словами, теория должна с необходимостью приводить именно к 4-мерной математической модели пространственно-временного многообразия, используемого для описания макроявлений.

Для реализации такой программы чрезвычайно важно выявить основные закономерности, которые лежат в фундаменте новой теории, в частности, усмотреть истоки возникновения наблюдаемого пространственного 3-мерия. Сложилась два конструктивных подхода к решению проблемы размерности. Первый состоит в изучении особенностей 4-мерной физической теории по сравнению с мыслимыми теориями в многообразиях иной размерности. При этом выделенные особенности изучаются на предмет возможности замены ими аксиомы 4-мерия.

Второй подход состоит в исследовании теорий размерности, большей четырех, в получении на их основе не только известных свойств 4-мерной теории, но и физических полей и понятий, соответствующих известным в физике взаимодействиям: электромагнитному, слабому, сильному.

В развитии *первого подхода* приняли участие А. Эддингтон, П. Эренфест, А. Эйнштейн и многие другие. Задача ставилась следующим образом: выбирался тот или иной фактор (или закон), который по мнению авторов мог в какой-то степени претендовать на фундаментальность, и исследовалось, зависит ли он от размерности многообразия. Выделялись такие, которые имеют место лишь в пространстве-времени четырех измерений или по крайней мере для которых четыре — граничная размерность, начиная или кончая которой эти факторы (или законы) справедливы.

В итоге этих исследований выявилась чрезвычайно любопытная картина уникальности нашего 4-мерного мира. Перечислим несколько таких особенностей [17].

а) 4-мерные многообразия имеют наименьшую размерность, начиная с которой теория Эйнштейна в вакууме содержательна. Это означает, что в многообразиях трех и меньшего числа измерений уравнения Эйнштейна типа $R_{\mu\nu}=0$ (в вакууме) уже диктуют плоский характер многообразия.

б) Размерность четыре является единственной, когда уравнения Максвелла в вакууме являются конформно инвариантными, т. е. не зависят от масштаба длин.

в) Как в плоском, так и в искривленном мире круговые орбиты пробных тел в центральном гравитационном поле (например, орбиты планет в поле Солнца) неустойчивы в многообразиях с $n \geq 5$ и устойчивы при $n \leq 4$, где n — размерность пространства-времени.

г) Только в пространстве-времени четырех измерений (и меньше) устойчивы атомы. В многообразиях большего числа измерений либо вовсе может не оказаться уровней энергии (нет связанных состояний), либо отрицательные уровни простираются до значения, равного минус бесконечности.

д) Принцип Гюйгенса справедлив лишь в пространствах четной размерности (т. е. четной размерности пространства-времени). Имеются особенности, выделяющие 3-мерное пространство.

е) Квантовая электродинамика перенормируема только в пространстве-времени с размерностями $n \leq 4$.

Этот список особенностей 4-мерия можно существенно продолжить. Более подробно можно ознакомиться с состоянием этого направления исследований в специальных обзорах и книгах [17, 35, 70]. Несмотря на затраченные значительные усилия, следует признать, что пока нет достаточных оснований считать какой-либо из предложенных факторов достойным для замены им постулата размерности $n=4$.

Второй подход к проблеме размерности возник в начале 20-х годов нашего столетия. Его основателями были Т. Калуца, О. Клейн и другие авторы. С их работ стала развиваться единая 5-мерная теория гравитации и электромагнетизма, а затем и других полей. На основе достижений этих исследований возникло принципиально иное направление мысли. Встали вопросы другого характера: что кроется за проявлениями 5-мерности физического пространства-времени? как совмещается рассмотрение многомерных теорий с установленными особенностями 4-мерного пространства-времени? почему дополнительные измерения имеют выделенный своеобразный характер? Далее оказалось, что пяти измерений мало. Спрашивается: что кроется за следующими измерениями? на каком числе измерений следует остановиться? есть ли вообще предел в числе измерений? и т. д. Рассмотрению этих и многих других вопросов, возникающих при развитии многомерных теорий, и посвящена предлагаемая книга.

Особо подчеркнем характерную черту нашего подхода к многомерным теориям. Она обусловлена изложенным выше пониманием проблемы размерности и вообще области применимости понятий классического пространства-времени. Каждое увеличение размерности связано с новым шагом в глубь микромира. Отсюда постоянное ощущение работы на грани возможностей классических геометрических представлений. Возникают чувства двоякого рода. С одной стороны, приходится удивляться, что, опираясь на геометрические (казалось бы, классические в своей основе) понятия, удастся так глубоко погрузиться не только в электромагнитные взаимодействия, но и в теорию слабых взаимодействий — дойти до геометрической интерпретации модели электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама — и пойти дальше — к теории сильных взаимодействий. С другой стороны, на каждом шагу приходится встречаться со своеобразием, особенностями понятий и проявлений новых измерений. Это создает атмосферу ожиданий увидеть за этими особенностями нарушение применимости классических понятий, проявление новых закономерностей и факторов, которые должны стать ключевыми в физике завтрашнего дня.

Такой подход диктует индуктивный метод как изучения многомерных теорий, так и их изложения в данной книге. Автору представляется более оправданным путь последовательного детального анализа возможностей, достоинств и недостатков (проблем) физических теорий пяти, шести (с разными возможными сигнатурами), семи и т. д. измерений. Уже сделанные шаги показывают, что по мере увеличения размерности накапливаются новые проблемы. Приходится нащупывать ряд все более специальных приемов и ограничений, допускающих переход от многомерных теорий к установленным на опыте свойствам и закономерностям реального мира. Происходит

своеобразное размывание привычного круга классических геометрических понятий. До какого шага окажутся полезными геометрические представления, покажет будущее. Установление этой грани чрезвычайно важно для решения проблемы размерности. Автору представляется, что важность решения этой фундаментальной проблемы даже превышает значимость актуальных задач, которые сегодня оказались завязанными с проблемой размерности: объединение гравитационных взаимодействий с электромагнитными, слабыми и сильными, устранение тех или иных расхождений из квантовой теории поля и т. д. По этой причине также представляется легковесным путь поспешного увеличения размерности пространственно-временного многообразия до 11, 16, 32 или еще большего числа измерений.

Материал данной книги представлен в духе продолжения и развития классической геометрической линии идей Б. Римана, Т. Калуцы, А. Эйнштейна, Ю. Б. Румера и других авторов в области многомерия. При этом в основу положены оригинальные результаты, полученные автором и его учениками на физическом факультете Московского университета. Широко использованы также работы других авторов. Многие вопросы, вошедшие в книгу, были разработаны в процессе чтения спецкурсов для студентов кафедры теоретической физики физического факультета МГУ.

Автор глубоко благодарен своим ученикам: В. И. Антонову, В. В. Кислову, А. Д. Попову, А. А. Рослому, В. Р. Гаврилову, А. В. Карнаухову и другим, вместе с которыми велись исследования проблемы размерности. Автор также благодарен коллегам проф. Н. В. Мицкевичу, проф. В. И. Родичеву и участникам семинара секции гравитации НТС Минвуза СССР за многократные плодотворные обсуждения затронутых в книге проблем.

Введение. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ МНОГОМЕРНЫХ ТЕОРИЙ ПОЛЯ

Появление представлений о многомерных пространствах ($n > 3$) следует рассматривать как важную веху в развитии учения о структуре физического пространства-времени. Пожалуй, рождение этой идеи можно поставить в один ряд с открытием неевклидовых геометрий. Трудно сказать, кому здесь принадлежит приоритет. Вполне отчетливо идеи многомерности были сформулированы в работах математиков прошлого века: Бернхардта Римана (1826—1866) [81], Германа Грассмана (1809—1877) [36], Артура Кэли (1821—1885) и других. Особо следует подчеркнуть роль Римана, введшего в своем знаменитом мемуаре «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», понятие « n -кратно протяженной величины». Он писал: «...общая концепция многократно протяженных величин, к которым относятся пространственные величины, оставалась вовсе не разработанной. В связи с этим я поставил перед собой задачу, — исходя из общего понятия о величине, сконструировать понятие многократно протяженной величины. Мы придем к заключению, что в многократно протяженной величине возможны различные мероопределения и что пространство есть не что иное, как частный случай трижды протяженной величины» [81, с. 18]. В завершении мемуара обсуждался вопрос о применимости геометрических понятий в бесконечно больших и бесконечно малых областях пространства, высказана мысль о возможной несправедливости допущений геометрии в бесконечно малом.

После работ названных авторов понятие размерности в математике претерпело ряд этапов конкретизации вплоть до строгого топологического определения размерности, данного в работах П. С. Урысона и К. Менгера в начале нашего столетия [37].

Отметим вклад Э. Маха в подготовку физиков к восприятию идей математиков о многомерии в своей области.

Еще в 1903 г. он писал, что, рассматривая атомы и молекулы, «мы не имеем более никакого права обязательно мыслить эти вещи в отношениях, в относительных положениях, соответствующих евклидову трехмерному пространству» [68, с. 81]. Сейчас физика ушла далеко вперед, однако теперь аналогичное можно сказать об отношениях между элементарными частицами: лептонами, кварками и др.

С другой стороны, нужно отметить, что задолго до этого Ж. Лагранж уже рассматривал в механике 4-мерные конфигурационные пространства. А в 1891 г. Ф. Клейн [55], обсуждая работы Гамильтона по оптике и механике, обращал внимание на представимость механических задач о движении материальной точки в виде задач оптики в соответствующих средах в пространстве высшего ($n > 3$) числа измерений. Однако эти результаты тогда воспринимались лишь как формальные построения.

Идея многомерия оказалась необходимой для создания специальной теории относительности, но не в духе увеличения числа пространственных измерений, а в смысле объединения трех пространственных и одного временного измерений в рамках одного 4-мерного многообразия. Здесь несомненна заслуга Г. Минковского. Известно, с каким трудом воспринимались принципы теории относительности, сколько дискуссий они вызвали.

Следующий важный шаг в развитии этого направления мысли был сделан уже в 1919 г. сразу же после создания общей теории относительности. Т. Калуцей была предложена геометризация электромагнитного поля в духе эйнштейновской теории тяготения с помощью увеличения на единицу числа пространственных координат. Предполагалось, что 5-мерное многообразие искривлено (риманово, точнее псевдориманово), и компоненты электромагнитного векторного потенциала A_μ представляются через компоненты 5-метрики $G_{5\mu}$, как гравитационное поле описывается компонентами 4-метрики $g_{\mu\nu}$. Известно, что первый вариант статьи Т. Калуцы был прислан Эйнштейну, который в своем письме от 21 апреля 1919 г. писал: «Сама идея, что величины электрического поля взаимосвязаны ... также часто и неизменно занимала меня. Однако мысль, что это может быть достигнуто посредством введения 5-мерного цилиндрического мира никогда не приходила мне в голову и кажется совершенно новой. Ваша идея мне сразу очень понравилась...» [40, р. 254]. Однако у Эйнштейна были замечания и вопросы по работе (которые, кстати сказать, стояли в течение нескольких последующих десятилетий). Работа Калуцы была опубликована в конце 1921 г. [49].

Затем в 20-х годах 5-мерную единую теорию гравитации и электромагнетизма развивали вслед за Калуцей О. Клейн [56], Л. де Бройль [10], А. Эйнштейн [111—116] и др. Сейчас в литературе 5-мерная теория называется теорией Калуцы—Клейна. Заслуга Клейна состоит в обобщении линеаризованного варианта теории Калуцы на общий случай. Из советских физиков единой 5-мерной теорией поля первыми стали заниматься В. А. Фок [103] и Г. А. Мандель [65]. В этот период был уточнен ряд элементов 5-мерной теории, вскрыты ее основные достоинства и недостатки (их обсуждение см. в § 2.1). Отметим, что В. А. Фок впервые пришел к уравнению

Клейна—Фока (к релятивистскому волновому уравнению для скалярных частиц с отличной от нуля массой покоя) через 5-мере.

В 30-х годах одной из важнейших проблем теоретической физики считался поиск единой теории гравитации и электромагнетизма. Наряду с другими вариантами (Вейля, Эддингтона и др.) многократно анализировалась 5-мерная теория. Делались настойчивые попытки преодолеть недостатки ее первых вариантов, в частности выяснить физический смысл пятой координаты или обосновать причины ее отсутствия в используемых уравнениях.

Среди наиболее интересных результатов следует выделить два. Первый был сделан в работах Эйнштейна и П. Бергмана [114] и А. Эйнштейна, В. Баргмана и П. Бергмана [115]. Он состоит в ослаблении условия цилиндричности (независимости) метрики по пятой координате. Вместо него было предложено условие периодичности по x^5 для компонент метрики. Полагалось, что мир замкнут по пятой координате с очень малым периодом по сравнению с макроскопическими масштабами. По этой причине зависимость от x^5 в привычных масштабах не наблюдается. Забегая вперед, отметим, что эта идея существенным образом использована в настоящей книге.

Второй результат также связан с поиском обоснования ненаблюдаемости пятой координаты. Он состоит в построении проективного варианта 5-мерия и начал развиваться с работ О. Веблена и Б. Гофмана [11]. Было предложено описывать 4-мерное многообразие посредством пяти однородных координат. На основе понятия проектора Д. ван Данцигом [38] была создана проективная дифференциальная геометрия. Затем И. Схоутен и ван Данциг [96, 97] применили этот математический аппарат для построения проективной теории гравитации и электромагнетизма. Некоторым промежуточным итогом явились обзорные работы по проективному формализму В. Паули [76], в которых введен ряд упрощений и сделана попытка учета спинорных полей.

После этих работ сложились две ветви развития 5-мерных теорий: первая вслед за Калуцей с условиями цилиндричности или цикличности по пятой координате, и вторая — проективный вариант. В дальнейшем было показано, что между этими двумя ветвями можно установить взаимно однозначное соответствие. А затем оказалось, что первая ветвь предоставляет больше возможностей для последующего обобщения теории. В этой книге изложение проведено в рамках первой ветви.

Нельзя сказать, что этот период исследований многомерия (20—30-е гг.) оказался бесплодным, как утверждали некоторые авторы. Теория значительно обогатилась рядом новых методов и приемов. В частности, в конце 30-х годов был развит метод 1+4-расщепления 5-мерного многообразия [6, 114], который впоследствии был переложен (или переоткрыт) в рам-

ках 4-мерия (метод 1+3-расщепления) для описания систем отсчета в общей теории относительности (см. § 1.2).

Следующий подъем интереса к 5-мерию наблюдался в конце 40-х — первой половине 50-х годов [5] и был связан с иными обстоятельствами. На этот период приходятся работы П. Йордана [44, 45], который предложил отказаться от старого ограничения на 5-мерие — условия, что пятнадцатая компонента 5-метрики постоянна ($G_{55} = -1$). В итоге получилась теория с дополнительным скалярным полем. В работах П. Йордана, И. Тири [98], К. Юста [117], Г. Людвига [64] и других авторов были исследованы физические возможности 5-мерной теории с новым гипотетическим скалярным взаимодействием, причем исследования велись в обеих ветвях 5-мерия. Было рассмотрено взаимодействие скалярного поля с обычными видами материи, найдены первые сферически-симметричные и космологические решения скалярно-тензорной теории гравитации. Тогда же была сделана попытка обосновать посредством скалярного поля гипотезу Дирака о возможном изменении гравитационной постоянной.

В связи с этим циклом работ следует отметить, что несколько позже К. Бранс и Р. Дикке [8], оттолкнувшись от 5-мерия, предложили теорию со скалярным полем, не связанным рамками геометрии. При этом они руководствовались соображениями в духе принципа Маха. Это значительно расширило формальные возможности теории и позволило в 60—70-х годах исследовать широкий круг задач и гипотез. Можно сказать, что работы в рамках теории, известной в литературе как скалярно-тензорная теория Бранса—Дикке или Йордана—Бранса—Дикке, продолжают до настоящего времени (при определенных ограничениях на значение характерной константы).

Для развития отечественных исследований в области многомерных теорий большое значение имел цикл исследований Ю. Б. Румера 50-х годов [85], затем оформленный в виде единственной монографии на эту тему на русском языке «Исследования по 5-оптике» [86]. Эти работы имели несколько характерных черт. Во-первых, как это отражено в названии книги, Румер исследовал вариант 5-мерия, называемый 5-оптикой, соответствующий идее Ф. Клейна прошлого века. Массивные частицы в 4-мерном мире рассматривались в 5-мерии как движущиеся по изотропным («световым») геодезическим. Приведя к ряду интригующих результатов, это направление исследований попало в тупик (см. обсуждение в § 7.2). Как видно с позиций сегодняшнего дня, это объясняется ограничением лишь пятью измерениями. В многообразиях большего числа измерений трудности 5-оптики устраняются [23]. Кроме того, следует отметить, что соображения оптики, т. е. постулирование изначального отсутствия масс покоя у частиц, сейчас широко используется в теоретической физике, например в мо-

дели электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама (до спонтанного нарушения симметрии) и в теории сильных взаимодействий. Видимо, в 50-х годах трудно было преодолеть барьер перехода к большим размерностям.

Другой характерной чертой работ Румера является попытка связать идею Эйнштейна—Бергмана о замкнутости мира по 5-й координате с закономерностями квантовой механики. Известно, что сами авторы не связали замкнутость с какими-либо определенными физическими обстоятельствами. Некоторые намеки на возможную физическую интерпретацию замкнутости (или цикличности по x^5) можно усмотреть в приеме Фока. Он состоит в постулировании экспоненциальной зависимости волновых функций частиц от пятой координаты вида $\sim \exp(imx^5)$, что приводит к массам покоя частиц. Использовалась также зависимость от x^5 вида $\sim \exp(ix^5)$, приводящая к электрическим зарядам. Все эти соображения будут существенно использованы в нашей книге. В связи со всем этим попытка Румера представляется интересной. Имеется ряд других характерных черт его исследований, например, интерпретация пятой координаты через классическое действие и др.

Далее в конце 50-х и в 60-х годах исследования многомерных теорий, продолжающие основную линию 5-мерия, оказались на заднем плане, хотя окончательно и не прекращались. Заметное внимание этой проблеме уделялось во Франции в группах А. Лихнеровича [63], М. Тоннеля [101] и др. Особо следует выделить работу И. Сурьо [95], где рассматривалась зависимость от x^5 всех компонент метрики и волновых функций частиц. Можно указать ряд работ, выполненных в ГДР Э. Шмутцером [108, 109] (в проективном варианте). Интересно заметить, что в работах нескольких авторов (Подоланский [78], Калицин [48]) уже изучались возможности физических приложений многомерных теорий шести и большего числа измерений.

В СССР серия работ по 5-мерию была выполнена Ю. П. Пытьевым [80] в МГУ. Тогда же В. И. Родичевым было предложено описывать электромагнитное поле 5-мерным тензором кручения.

Однако в это же время наблюдался подъем интереса к многомерии совсем под иным углом зрения, и он был вызван другими задачами. Проводились исследования многомерных импульсных пространств в связи с попытками устранения расходимостей из квантовой теории поля. Изучались возможности квантования пространства-времени или введения в теорию элементарной длины. Здесь следует назвать работы В. Г. Кадышевского [46].

По ряду объективных и субъективных причин в нашей стране многие результаты старых исследований по 5-мерным теориям были забыты или были известны далеко не полно. Начиная цикл исследований по 5-мерию в 70-х годах под не-

сколько иным углом зрения, на первых порах нам пришлось переоткрывать ряд старых результатов. Например, метод $1+n$ -расщепления был взят из 4-мерной теории хронометрических инвариантов и лишь затем было установлено его более раннее происхождение из 5-мерия. Аналогичное можно сказать и про скалярное поле, обязанное компоненте 5-метрики G_{55} . Однако это не было простым повторением старого. Был использован усовершенствованный в рамках 4-мерия монадный метод [1, 15], а скалярное поле было увязано с конформным фактором, в свое время введенным в теорию Вейлем [18]. В дальнейшем была использована более общая зависимость от пятой координаты [17] и процедура усреднения по периоду зависимости от x^5 и т. д. Все эти приемы составляют основу для изложения материала этой книги.

В 70-х годах интерес к многомерию возрос во всем мире в связи с развитием теории калибровочных полей, предложенной Янгом и Миллсом. Как известно, в основе этого направления лежит теория групп. Различные физические поля связываются с зависимостями групповых параметров от координат (локализация групп). Сначала рассматривались абелевы группы — таким образом можно прийти к теории электромагнитного поля и с некоторыми оговорками к теории гравитации. Затем были рассмотрены неабелевы калибровочные теории и поля, позволившие построить модель электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама, а затем перейти к хромодинамике — модели сильных взаимодействий. Довольно быстро было осознано, что многомерные теории типа Калуцы—Клейна можно понимать как геометризацию теорий калибровочных полей [88, 89]. Можно даже сказать, что в ряде отношений эти два вида теорий представляют собой два разных языка, описывающих одну и ту же физическую реальность. Однако существенное отличие состоит в том, что геометрические представления всегда рассматривались более фундаментальными, нежели вводимые на их основе физические конструкции.

Сейчас, видимо, можно сказать, что калибровочный подход не добавил ничего нового к известной теории гравитации, однако бесспорно, что именно с позиции этого подхода удалось продвинуться в построении теорий слабых (электрослабых) и сильных взаимодействий. Большие надежды возлагаются на калибровочный подход в деле построения теории великого объединения (всех известных взаимодействий). Исходя из понимания геометрии как «консерванта скоропортящихся физических идей», было выполнено значительное число работ по геометризации известных калибровочных теорий (см., например, [31, 107]). Теперь уже оказался преодоленным барьер ограниченный пятью измерениями. Широко стали использоваться многообразия большего числа измерений [40]. Именно в этом духе (геометризации теорий взаимодействий) изложена большая часть материала этой книги. В гл. 4 исследованы гео-

метрические модели в многообразии шести измерений, а в гл. 5 и 6 — семи измерений.

Другая причина, по которой сейчас теории типа Калуцы—Клейна оказались в центре внимания, — это современные исследования суперсимметричных теорий и теории супергравитации. В основе этого направления лежит найденный недавно способ симметричного рассмотрения бозонных и фермионных полей. Это достигается использованием в теории величин, зависящих как от обычных четырех пространственно-временных координат, так и дополнительных переменных, являющихся элементами алгебры Грассмана. Оказалось, что подобный прием в некотором смысле равносителен увеличению размерности используемого многообразия. Более того, было показано, что решение ряда вопросов теории супергравитации может быть облегчено использованием геометрических методов и многообразий размерности $n > 4$. В частности, таким образом разрабатывается представляющий сейчас перспективным вариант так называемой максимально расширенной супергравитации ($N=8$). При этом оказалось, что максимальное число измерений многообразия, из которого после размерной редукции (перехода к 4-мерию) получается разумная с точки зрения феноменологии теория, равно 11. Ряд вопросов этого подхода рассмотрен в сборнике статей [107]. Особого внимания в нем заслуживает работа Шерка.

Далее следует отметить еще одно направление мысли, более близкое к классической линии развития теории типа Калуцы—Клейна. Имеется в виду ряд работ по 6-мерию Ингрэма [42, 43] и Павшича [75], основанных на обобщении группы конформных преобразований. Уже давно обращалось внимание, что уравнения для безмассовых полей в 4-мерном плоском пространстве-времени инвариантны относительно более широкой группы преобразований, нежели группа Пуанкаре. Это 15-параметрическая группа конформных преобразований, изоморфная группе вращений 6-мерного многообразия с сигнатурой $(+ - - - - +)$. Переход к 6-мерию и его обобщение типа перехода от группы Лоренца в специальной теории относительности к группе допустимых координатных преобразований общей теории относительности лежат в основе упомянутых выше работ. Эти работы кратко обсуждены в § 7.2. Принципиально важным моментом этих теорий, отличающих их от упомянутых раньше, является появление в них второй временноподобной координаты.

Обзор работ по многомерию будет неполным, если не упомянуть еще одну линию исследований, исходящую от работ Р. Фейнмана 40-х годов по формулировке квантовой теории при помощи интегрирования по траекториям. Релятивизация этой теории и тем более переход к искривленному пространству-времени диктует использование дополнительного (к четырех пространственно-временным координатам) параметра эво-

люции [39, 13]. В большинстве работ применение такого параметра рассматривается как промежуточный формальный прием, завершающийся исключением параметра. Однако в совокупности с другими факторами, также приводящими к новой временноподобной координате, это обстоятельство заслуживает должного внимания.

Имеются и другие исследования, тесно связанные с проблемой размерности пространства-времени. Среди них имеются работы по описанию спиноров в многомерных многообразиях различной сигнатуры (см. приложение), исследования В. А. Фока [104], А. Барута [3, 4] и других авторов [25, 26] по $O(4)$ - и $O(4,2)$ -симметриям в задаче водородоподобных атомов и др. Сейчас вряд ли возможно охватить все такие вопросы в одной книге, особенно если иметь в виду, что исследования их интенсивно развиваются. Не претендуя на полноту, в этой книге сосредоточимся на обсуждении одного из подходов к многомерии, развиваемого на физическом факультете МГУ. Это направление исследований самым непосредственным образом связано с проблемой объединения известных физических взаимодействий.

Глава 1.

ГРАВИТАЦИЯ И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ В 4-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

§ 1.1. Основные идеи и формулы общей теории относительности

Известно, что идея искривленности пространства была выдвинута и математически развита задолго до создания общей теории относительности. В работах Римана, Клиффорда и других был четко поставлен вопрос о физических проявлениях искривления пространства. Теперь ясно, почему не смогли создать общую теорию относительности ни Клиффорд, ни Мах — необходимо было говорить не об искривлении 3-мерного пространства, а об искривленном 4-мерном пространстве-времени. Физическим проявлением искривленности явилась гравитация.

За подробным ознакомлением с аппаратом общей теории относительности и римановой геометрии отсылаем читателей к соответствующим учебникам и монографиям [17, 24, 69]. Здесь лишь напоминаются основные понятия и указываются используемые в дальнейшем обозначения. Ключевым понятием теории является метрика $g_{\mu\nu}$ — 10 функций от четырех координат, определяющих квадрат интервала между близкими точками-событиями

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.1.1)$$

Здесь и везде в дальнейшем греческие индексы пробегает значения: 0, 1, 2, 3. Теория гравитации имеет дело с тензорными величинами, ковариантными относительно группы допустимых 4-мерных координатных преобразований

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (1.1.2)$$

Ковариантные производные — операторы, приводящие к тензорным выражениям, — записываются в виде

$$\nabla_\sigma \underbrace{B_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}}_m \equiv B_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}{}_{;\sigma} = \frac{\partial B_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}}{\partial x^\sigma} + \underbrace{+\Gamma_{\sigma\lambda}^\alpha B_{\mu\nu\dots}^{\lambda\beta\dots}}_n + \dots - \underbrace{\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda B_{\lambda\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}}_m - \dots, \quad (1.1.3)$$

где $B_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}$ — произвольный тензор. Запятой в дальнейшем будут обозначаться частные производные: $B_{\mu\dots}^{\alpha\dots}{}_{;\sigma} = \partial B_{\mu\dots}^{\alpha\dots} / \partial x^\sigma$. Уравнения движения пробных материальных частиц в искривленном пространстве-времени могут быть получены из уравнений Эйнштейна. Они совпадают с уравнениями геодезических

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}, \quad (1.1.4)$$

где

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right)$$

символы Кристоффеля.

Уравнения Эйнштейна в самом общем виде записываются следующим образом:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.1.5)$$

где $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$; $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ — соответственно тензор Риччи и скалярная кривизна, получаемые сверткой тензора Римана — Кристоффеля

$$R^\lambda_{\mu\beta\nu} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\sigma\beta} - \Gamma^\sigma_{\mu\beta} \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}, \quad (1.1.6)$$

Λ — космологическая постоянная; $\kappa = 8\pi k/c^4$ — эйнштейновская, k — ньютоновская гравитационные постоянные; $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии — импульса негеометрической материи, включая электромагнитное поле. Как видно, в левой части уравнений Эйнштейна стоят геометрические величины, тогда как в правой — характеристики материальных объектов. Физический смысл уравнений Эйнштейна состоит в установлении зависимости метрических свойств пространства-времени (метрики $g_{\mu\nu}$) от свойств и распределения находящейся в нем материи.

Уравнения Эйнштейна могут рассматриваться либо как постулат (подход Эйнштейна), либо выводиться вариационным методом из соответствующей плотности функции Лагранжа (подход Гильберта). Оба подхода эквивалентны. В последнем случае плотность функции Лагранжа постулируется в виде

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa} (\Lambda - R) + L_M \right\}, \quad (1.1.7)$$

где L_M — лагранжиан всей внешней материи, включая электромагнитное поле, g — определитель матрицы, составленной из компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$. Для 4-мерного пространства-времени будет использована сигнатура (+ — — —).

§ 1.2. Монадный метод, или 1+3-расщепление в 4-мерном пространстве-времени

Важной составной частью современной общей теории относительности, позволяющей физически интерпретировать понятия теории и сопоставлять их измеряемым на опыте величинам, является *монадный метод* описания систем отсчета. Другими словами его можно назвать методом локального 1+3-расщеп-

ления 4-мерного многообразия на время и 3-мерные пространственные сечения системы отсчета. Он проявляет и подчеркивает различие между временной и пространственными координатами. Можно сказать, что в общей теории относительности реализуется диалектическое единство — равноправных в одних отношениях и существенно различных в других — четырех измерений (направлений).

Напомним, что впервые монадный метод стал развиваться в рамках 5-мерной единой теории гравитации и электромагнетизма с целью отделения 4-мерного пространства-времени от направления 5-й координаты и лишь позднее эти идеи были перенесены на аналогичное отделение направления временной координаты от пространственных. Кратко напомним основные элементы 4-мерного монадного метода в хронометрической калибровке, чтобы затем его применить в 5-мерной теории.

Суть монадного метода состоит в задании конгруэнции временноподобных мировых линий приборов системы отсчета и определении локальных ортогональных им пространственных сечений. Математический аппарат метода удобно представить в виде четырех составных частей [17].

1. **Алгебра.** Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ в каждой точке представляется в виде

$$g_{\mu\nu} = \tau_\mu \tau_\nu - h_{\mu\nu}, \quad (1.2.1)$$

где 4-мерный вектор τ_μ — монада — касателен к соответствующей линии конгруэнции и имеет физический смысл 4-скорости приборов системы отсчета. Он нормирован на +1 и ортогонален метрическому тензору $h_{\mu\nu}$ локального 3-мерного пространственного сечения:

$$\tau_\mu \tau^\mu = +1, \quad \tau^\mu h_{\mu\nu} = 0; \quad h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = 3. \quad (1.2.2)$$

В теории используются скаляры (сопоставляемые наблюдаемым) и пространственно-спроектированные тензоры. Первые строятся проектированием по всем компонентам тензоров на вектор τ^μ , вторые — проектированием на 3-мерные направления посредством $-h_{\mu\nu}$. Например, из произвольного вектора V_μ строятся величины: $V = V_\mu \tau^\mu$ и $\tilde{V}_\nu = -V_\mu h_\nu^\mu$.

В книге будет использована *калибровка монадного метода типа хронометрической*. Это означает, что выбираются такие координатные системы, в которых линии координаты x^0 совпадают с мировыми линиями конгруэнции системы отсчета. В этом случае из группы допустимых координатных преобразований (1.1.2) выделяются преобразования

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (1.2.3)$$

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3). \quad (1.2.4)$$

Здесь и в дальнейшем строчные латинские индексы принимают значения: 1, 2, 3. Используемые в теории величины — скаляры

и 3-мерные тензоры — инвариантны относительно преобразований (1.2.3) и ковариантны при 3-мерных преобразованиях (1.2.4). В данной калибровке компоненты монадных составляющих метрического тензора представляются через $g_{\mu\nu}$ в виде

$$\tau^\mu = g_0^\mu / \sqrt{g_{00}}, \quad \tau_\mu = g_{\mu 0} / \sqrt{g_{00}}; \quad h_{ik} = \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik}, \quad h^{ik} = -g^{ik}. \quad (1.2.5)$$

2. Задание монадных физико-геометрических тензоров. Имми являются 3-мерные тензоры, которые могут быть построены из первых производных от составляющих метрического тензора. Таковых в общем случае может быть только три:

$$F_\alpha = \tau^\nu (\tau_{\alpha,\nu} - \tau_{\nu,\alpha}); \quad A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (\tau_{\mu,\nu} - \tau_{\nu,\mu});$$

$$D_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (\tau_{\mu;\nu} + \tau_{\nu;\mu}). \quad (1.2.6)$$

Они имеют физический смысл соответственно: вектора ускорения, тензора угловой скорости вращения и тензора скоростей деформаций системы отсчета. Особо следует подчеркнуть, что 1+3-расщепление локально. В каждой точке имеется своя 3-мерная площадка, ортогональная линии τ . В общем случае невозможно провести огибающую 3-мерную поверхность к этим площадкам, т. е. пространственное сечение является не голономным. В случае если $A_{\mu\nu} = 0$, глобальная огибающая существует и можно говорить о глобальном расщеплении многообразия на время и совокупность 3-мерных пространственных сечений.

3. Операторы монадного дифференцирования — операторы, сохраняющие 3-мерный тензорный характер дифференцируемых 3-тензоров. Можно ограничиться следующими двумя операторами:

$$+\partial_\tau \tilde{B}_{k\dots}^{i\dots} = \tau^\mu \frac{\partial \tilde{B}_{k\dots}^{i\dots}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial \tilde{B}_{k\dots}^{i\dots}}{\partial x^0} \quad (1.2.7)$$

— оператор монадного временного дифференцирования, и

$$+\partial_i \tilde{B}_{k\dots}^{i\dots} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{g_{0i}}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^0} \right) \tilde{B}_{k\dots}^{i\dots} \quad (1.2.8)$$

— оператор хронометрически инвариантного пространственно-го дифференцирования.

4. Запись соотношений и уравнений теории в монадном виде. Все общековариантные соотношения могут быть записаны через скаляры, пространственно-спроектированные тензоры, физико-геометрические тензоры (1.2.6) и операторы монадного дифференцирования (1.2.7) и (1.2.8). Это относится, в частности, и к уравнениям геодезических, и к уравнениям Эйнштейна (1.1.5), и к тождествам общей теории относительности, и к

уравнениям всех полей (Клейна—Фока, Максвелла, Дирака и т. д.) в искривленном пространстве-времени.

Все выписанные здесь формулы будут иметь соответствующие аналоги как в 5-мерной теории (см. гл. 2), так и в 6- и 7-мерных теориях (см. гл. 4, 5).

§ 1.3. Электродинамика в искривленном пространстве-времени

В общепринятой теории электромагнитное поле рассматривается как внешнее к геометрическим пространственно-временным понятиям. Оно описывается векторным потенциалом A_μ , определенным с точностью до калибровочных (градиентных) преобразований

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \quad (1.3.1)$$

где f — некоторая скалярная функция координат. Инвариантный относительно этих преобразований тензор напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ записывается одинаково как в плоском, так и в искривленном пространстве-времени

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (1.3.2)$$

Первая пара уравнений Максвелла при наличии определения (1.3.2) является тождеством

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (1.3.3)$$

Вторая пара уравнений Максвелла записывается в виде

$$F_{;\nu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 4\pi j^\mu, \quad (1.3.4)$$

где j^μ — плотность электрического тока. Уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном и гравитационном полях обобщают уравнения геодезических (1.1.4)

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} + \frac{q}{mc^2} F_{\alpha}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad (1.3.5)$$

где q — электрический заряд, m — масса покоя частицы.

Поскольку A_μ рассматривается как негеометрическое поле, то оно входит в плотность лагранжиана (1.1.7) в часть L_M

$$\mathcal{L}_{эм} = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (1.3.6)$$

и в правую часть уравнений Эйнштейна (1.1.5) в виде тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (1.3.7)$$

Наша задача в гл. 2 и 4 будет состоять, в частности, в том, чтобы показать, что составные части вкладов (1.3.6) и (1.3.7) получаются из тензора кривизны многообразий большей размерности. Кроме того, нужно будет естественно с геометрической точки зрения прийти к калибровочным преобразованиям волновых функций заряженных полей

$$\Psi' = \Psi \exp \left(i \frac{e}{\hbar c} f \right) \quad (1.3.8)$$

при преобразованиях (1.3.1), а также нужно будет обосновать известную замену производных в присутствии электромагнитного поля

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \rightarrow \partial_{\mu}^{\dagger} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - i \frac{e}{\hbar c} A_{\mu}. \quad (1.3.9)$$

Забегая вперед, укажем, что последняя формула будет отождествлена с оператором типа (1.2.8) в 5-мерной теории.

Любопытный подход к электромагнитному полю в рамках 4-мерия развивался С. Мандельштамом [66] и некоторыми другими авторами. Предлагалось понимать электромагнитное поле как проявление неголономности 4-мерного пространства-времени для электрически заряженных частиц. Для реализации этой идеи Мандельштам развил специальную путезависимую формулировку электродинамики. Заметим, что неголономность 4-мерного пространства-времени можно описывать различным образом, в том числе и как неголономность 3-мерных пространственных сечений в монадном методе, кратко изложенном в предыдущем параграфе. Тогда тензор $F_{\mu\nu}$ играет роль, аналогичную тензору угловой скорости вращения $A_{\mu\nu}$, если смотреть на 4-мерие с позиции 5-мерной теории. Это может служить еще одним доводом в пользу перехода к теориям большей размерности.

§ 1.4. Единая теория гравитации и электромагнетизма Вейля

Еще до создания общей теории относительности, когда обсуждался вопрос о физических проявлениях неевклидовости пространства, Клиффордом уже была высказана мысль о возможной связи электромагнетизма с геометрией (искривленностью) пространства. Затем оказалось, что искривленность 4-мерного пространства-времени проявляется в виде гравитационных взаимодействий, но успех геометризации гравитации вдохновил

на дальнейшие поиски путей геометризации электромагнетизма. Первый реальный шаг в этом направлении сразу же после создания общей теории относительности был сделан Г. Вейлем. Он предложил обобщение 4-мерной римановой геометрии и дополнительные геометрические величины интерпретировал как электромагнитное поле.

Основная идея Вейля состояла в том, что длины тензоров при параллельном переносе могут изменяться: «В настоящей геометрии близкого действия должен быть лишь принцип переноса длины из одной точки в другую, бесконечно к ней близкую. И тогда оказывается столь же мало оснований предполагать заранее, что задача переноса длины из одной точки в другую, удаленную от нее на конечное расстояние, интегрируема, как и в задаче о переносе направления. Если устранить эту непоследовательность, то мы придем к геометрии, поразительным образом объединяющей (если ее применить к физическому миру) не только гравитационные, но и электромагнитные явления» [12, с. 515].

Поясним сказанное. Возьмем малое смещение $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ и параллельно перенесем его в близкую точку, отличающуюся от первой на координаты δx^{α} . Тогда имеем

$$\delta(ds^2) = \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - g_{\beta\nu} \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\beta} - g_{\mu\beta} \tilde{\Gamma}_{\nu\alpha}^{\beta} \right) dx^{\mu} dx^{\nu} \delta x^{\alpha} = g_{\mu\nu|\alpha} dx^{\mu} dx^{\nu} \delta x^{\alpha}, \quad (1.4.1)$$

где $\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\beta}$ — коэффициенты связности геометрии Вейля, отличающиеся от символов Кристоффеля; $g_{\mu\nu|\alpha}$ — ковариантная производная от $g_{\mu\nu}$ относительно связностей $\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha}^{\beta}$. Вейль постулировал, что изменение длины (1.4.1) представляется в виде

$$\delta(ds^2) = 2ds\delta(ds) = 2ds^2 \tilde{A}_{\alpha} \delta x^{\alpha}, \quad (1.4.2)$$

т. е. $g_{\mu\nu|\alpha} \equiv Q_{\mu\nu\alpha} = 2g_{\mu\nu} \tilde{A}_{\alpha}$. Получившийся вектор \tilde{A}_{α} с точностью до постоянного размерного множителя Вейль предложил интерпретировать как векторный потенциал электромагнитного поля. Следовательно, в такой теории изменение длин при параллельном переносе обусловлено электромагнитным полем. Какие еще факторы, кроме векторности \tilde{A}_{α} , по мнению Вейля, свидетельствовали в пользу этой физической интерпретации?

Как следствие изменчивости длин Вейль ввел в теорию еще одно преобразование (сверх допустимых координатных преобразований (1.1.2)) — так называемое *конформное преобразование*. Оно состоит в умножении длин на некоторую скалярную функцию координат χ :

$$ds = \chi ds, \quad (1.4.3)$$

что соответствует сохранению дифференциалов координат ($dx^\mu = dx^\mu$), но умножению компонент метрического тензора на множитель χ^2 :

$$g_{\mu\nu}^0 = \chi^2 g_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu 0} = \chi^{-2} g^{\mu\nu}. \quad (1.4.4)$$

Теперь посмотрим, что означают конформные преобразования при учете постулата (1.4.2). Из (1.4.2) имеем $\delta(ds)/ds = \tilde{A}_\alpha \delta x^\alpha$. Произведя конформное преобразование (1.4.3), находим, как изменяется при этом вектор \tilde{A}_α :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\alpha^0 \delta x^\alpha &= \frac{\delta(ds)}{ds} = \delta(\ln(ds)) = \delta(\ln ds) + \delta \ln \chi \rightarrow \\ \rightarrow \tilde{A}_\alpha^0 &= A_\alpha + \frac{\partial \ln \chi}{\partial x^\alpha}. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Обозначая $\ln \chi \equiv f(x)$, приходим к выводу, что в геометрии Вейля конформные преобразования соответствуют известным в стандартной электродинамике калибровочным преобразованиям (1.3.1). Отсюда следует, что тензор $F_{\mu\nu} = \partial \tilde{A}_\nu / \partial x^\mu - \partial \tilde{A}_\mu / \partial x^\nu$ инвариантен как относительно конформных, так и относительно калибровочных преобразований. Было предложено его понимать (с точностью до размерной константы) как тензор электромагнитного поля.

В теории Вейля, как и в общей теории относительности, изменение вектора B_μ при обносе по замкнутому контуру определяется формулой

$$\delta B_\mu = \frac{1}{2} \tilde{R}_{\nu\alpha\beta} B^\nu d\sigma^{\alpha\beta}, \quad (1.4.6)$$

где тензор кривизны $\tilde{R}_{\nu\alpha\beta}$ теперь строится по формуле (1.1.6) через коэффициенты связности $\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha}^\beta$. В общем случае он не является антисимметричным по первой паре индексов. Элементарные выкладки на основе формул (1.1.6) и (1.4.2) показывают, что симметричная часть (по первой паре индексов) имеет вид

$$\mathcal{F}_{\nu\mu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (\tilde{R}_{\nu\mu\alpha\beta} + \tilde{R}_{\mu\nu\alpha\beta}) = -g_{\mu\nu} \tilde{F}_{\alpha\beta}, \quad (1.4.7)$$

т. е. тензор электромагнитного поля в теории Вейля фактически содержится в тензоре кривизны. Тогда изменение длины вектора, обнесенного по замкнутому контуру, выражается через $F_{\alpha\beta}$:

$$\delta(B^2) = \mathcal{F}_{\nu\mu\alpha\beta} B^\nu B^\mu d\sigma^{\alpha\beta} = -B^2 \tilde{F}_{\alpha\beta} d\sigma^{\alpha\beta}. \quad (1.4.8)$$

Последующий анализ теории Вейля рассеял первоначальный оптимизм. Вскрылись следующие существенные недостатки.

1. В этой теории естественным образом не получаются уравнения Максвелла, так как скалярная кривизна, из которой вариационным методом следовало бы получать эти уравнения, имеет вид

$$\tilde{R} = R + 6\tilde{A}_\alpha^\alpha + 18\tilde{A}_\alpha \tilde{A}^\alpha, \quad (1.4.9)$$

вместо нужного согласно (1.1.7) и (1.3.6) $R + \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta}$. Приходилось либо искусственно вводить уравнения второй пары Максвелла, либо постулировать квадратичный по тензору кривизны лагранжиан. Но в последнем случае имеем квадратичный лагранжиан и для гравитационного поля, что приводит к дифференциальным уравнениям четвертого порядка для гравитации.

2. В теории не получаются естественным образом известные уравнения движения заряженных частиц в гравитационном и электромагнитном полях (1.3.5), так как коэффициенты связности $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu$ выражаются через символы Кристоффеля и вектор \tilde{A}_α :

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu,\alpha} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha} - g_{\mu\alpha} \tilde{A}_\nu - g_{\nu\alpha} \tilde{A}_\mu + g_{\mu\nu} \tilde{A}_\alpha, \quad (1.4.10)$$

тогда как «нужно», чтобы в связность входил тензор напряженности $F_{\mu\nu}$. Это также приходилось подправлять искусственным способом.

3. Предсказываемые теорией новые эффекты лежали за пределами возможностей эксперимента.

Несмотря на эти недостатки, теория Вейля оставила существенный след в теории пространства-времени. Во-первых, она продемонстрировала новый тип дифференциальной геометрии, более общий, чем риманова.

Вскоре после работ Вейля А. Эддингтон показал, что можно обобщить его геометрию, заменив условие (1.4.2) и (1.4.10) на более общее

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu,\alpha} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha} + Q_{\mu\nu\alpha} - Q_{\mu\alpha\nu} - Q_{\nu\alpha\mu}; \quad \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha}^\alpha = 2\tilde{A}_\mu, \quad (1.4.11)$$

где тензор $Q_{\mu\nu\alpha}$ уже не выражается в виде произведения $g_{\mu\nu}$ и \tilde{A}_α .

Во-вторых, в рамках этой теории были введены конформные преобразования (1.4.4), которые широко используются в современной теоретической физике. Они будут существенно использованы, хотя и в другом плане, в последующих главах книги. Теория Вейля здесь рассмотрена также в связи с тем, что значительное время она рассматривалась как основная конкурирующая с 5-мерным подходом Калуцы единая теория. В последующих главах будут подчеркнуты преимущества многомерного подхода, и, кроме того, в гл. 2 будет показано, что 5-мерие естественным образом объединяет идеи Калуцы и Вейля.

§ 1.5. Конформные преобразования

В связи с важностью для дальнейшего конформных преобразований более подробно остановимся на конформных трансформационных свойствах основных геометрических величин и физических полей. При этом дадим современную трактовку этих преобразований и запишем все формулы в предположении произвольной размерности n пространственно-временного многообразия.

Два римановых пространства с метрическими тензорами $g_{\alpha\beta}(x)$ и $g_{\alpha\beta}(x)$, определенными на одном и том же многообразии точек, называются *конформно-соответствующими*, если выполняется соотношение (1.4.4). В них углы между соответствующими парами векторов равны, т. е. являются конформно-инвариантными понятиями. Из определения (1.4.4) следуют соотношения между геометрическими величинами в конформно-соответствующих пространствах:

$$\begin{aligned} g_{\beta}^{\alpha} &= g_{\beta}^{\alpha}; \quad \sqrt{-g} = \chi^n \sqrt{-g}; \\ \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} &= \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \frac{1}{\chi} (g_{\beta}^{\alpha} \chi_{,\gamma} + g_{\gamma}^{\alpha} \chi_{,\beta} - g_{\beta\gamma} g^{\alpha\tau} \chi_{,\tau}); \\ R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} &= R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} + g_{\delta}^{\alpha} \sigma_{\beta\gamma} - g_{\gamma}^{\alpha} \sigma_{\beta\delta} + g^{\alpha\nu} (g_{\beta\gamma} \sigma_{\nu\delta} - g_{\beta\delta} \sigma_{\nu\gamma}) + \\ &+ (g_{\delta}^{\alpha} g_{\beta\gamma} - g_{\gamma}^{\alpha} g_{\beta\delta}) \Delta_1 \sigma; \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

$$\begin{aligned} R_{\beta\delta}^{\alpha} &= R_{\beta\delta}^{\alpha} - (n-2) \sigma_{\beta\delta} - [\Delta_2 \sigma + (n-2) \Delta_1 \sigma] g_{\beta\delta}; \\ R &= \chi^{-2} [R - 2(n-1) \Delta_2 \sigma - (n-1)(n-2) \Delta_1 \sigma], \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_1 \sigma &= \frac{1}{\chi^2} g^{\alpha\beta} \chi_{,\alpha} \chi_{,\beta}; \quad \Delta_2 \sigma = \frac{1}{\chi} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \chi - \frac{1}{\chi^2} g^{\alpha\beta} \chi_{,\alpha} \chi_{,\beta}; \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\chi^2} (\chi \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \chi - 2\chi_{,\alpha} \chi_{,\beta}); \quad \chi_{,\alpha} = \partial \chi / \partial x^{\alpha}. \end{aligned}$$

Из компонент тензора кривизны можно сконструировать конформно-инвариантный тензор

$$\begin{aligned} C_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} &= C_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} + \frac{1}{n-2} (g_{\gamma}^{\alpha} R_{\beta\delta} - g_{\delta}^{\alpha} R_{\beta\gamma} + R_{\gamma}^{\alpha} g_{\beta\delta} - R_{\delta}^{\alpha} g_{\beta\gamma}) + \\ &+ \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_{\delta}^{\alpha} g_{\beta\gamma} - g_{\gamma}^{\alpha} g_{\beta\delta}), \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

называемый *тензором Вейля*. Интересно отметить, что четырех — минимальная размерность, при которой тензор Вейля не

тривиален. В многообразиях трех измерений он тождественно равен нулю.

4-мерные многообразия являются единственными, в которых вторая пара уравнений Максвелла (1.3.4) в вакууме конформно-инвариантна. При этом, как и в теории Вейля, полагается, что ковариантные компоненты тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ конформно инвариантны. Указанную особенность 4-мерия легко проверить с помощью формул (1.5.1). Действительно, в метрике $g_{\mu\nu}$ вторая пара Максвелла имеет вид

$$F_{;\nu}^{\mu\nu} = \chi^{-4} \left(F_{;\nu}^{\mu\nu} - \frac{4\chi_{,\nu}}{\chi} F^{\mu\nu} + \frac{n\chi_{,\nu}}{\chi} F^{\mu\nu} \right) = 0. \quad (1.5.3)$$

Справа члены с $\chi_{,\nu}$ сокращаются только при $n=4$. В отличие от теории Вейля сейчас калибровочные преобразования векторного потенциала связываются не с конформными преобразованиями, а с иными обстоятельствами. Обычно полагают, что в 4-мерном пространстве-времени A_{μ} конформно-инвариантно. Заметим, что уравнения Эйнштейна не являются конформно-инвариантными.

Принято полагать, что уравнения для негеометрических безмассовых полей являются конформно-инвариантными. Исходя из этого уравнение для свободного скалярного поля φ записывается в виде

$$g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \varphi - \frac{1}{6} R \varphi + (mc/\hbar)^2 \varphi = 0. \quad (1.5.4)$$

Легко видеть, что при $m=0$ это уравнение будет конформно-инвариантным, если при преобразовании (1.4.4) φ изменяется по закону

$$\varphi = \chi^{-1} \varphi. \quad (1.5.5)$$

§ 1.6. Пространства с кручением

Следующим, качественно иным обобщением римановой геометрии явилась геометрия пространств с кручением, предложенная Э. Картаном в середине 20-х годов [51]. Поскольку эта геометрия будет играть важную роль в структуре многомерных моделей гравитационно-слабых и сильных взаимодействий, изложенной в гл. 4, рассмотрим здесь необходимые для дальнейшего положения геометрии с кручением.

Основная идея, приведшая к такой геометрии, состоит в дальнейшем после Вейля обобщении неметрической части коэффициентов связности $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}$ — точнее, в допущении, что $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}$ содержит как симметричную, так и несимметричную части. Не-

симметричная часть $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}$ является тензором и называется тензором кручения*

$$S_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} (\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} - \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\alpha}). \quad (1.6.1)$$

Геометрический смысл кручения состоит в нарушении параллелограмма. Например, если малое смещение dx^{μ} параллельно перенести вдоль смещения δx^{ν} , а затем наоборот δx^{ν} параллельно перенести вдоль dx^{μ} , то концы результирующих векторов dx'^{μ} и $\delta x'^{\nu}$ не сойдутся на величину $\Delta x^{\mu} = 2S_{\alpha}^{\mu} dx^{\alpha} \delta x^{\nu}$, где $d\sigma^{\alpha\beta}$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах dx^{μ} и δx^{ν} .

Тензор Римана—Кристоффеля $\tilde{R}^{\lambda}_{\alpha\mu\nu}$ в искривленном пространстве с кручением (аффинном пространстве) записывается через $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}$ точно так же, как в римановом пространстве тензор $R^{\lambda}_{\alpha\mu\nu}$ представляется через $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$. Особый интерес представляет случай, когда тензор кручения антисимметричен по всем трем индексам. Легко показать, что

$$\tilde{R}^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} = R^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} + \nabla_{\nu} S_{\alpha\mu}^{\lambda} - \nabla_{\mu} S_{\alpha\nu}^{\lambda} + S_{\alpha\mu}^{\sigma} S_{\sigma\nu}^{\lambda} - S_{\alpha\nu}^{\sigma} S_{\sigma\mu}^{\lambda}, \quad (1.6.2)$$

где $\nabla_{\nu} S_{\alpha\mu}^{\lambda}$ — ковариантная производная от $S_{\alpha\mu}^{\lambda}$ относительно символов Кристоффеля, кроме того использовано, что

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + S_{\mu\nu}^{\alpha}. \quad (1.6.3)$$

Для тензора Риччи и скалярной кривизны соответственно имеем

$$\tilde{R}_{\alpha\mu} = \tilde{R}^{\lambda}_{\alpha\lambda\mu} = R_{\alpha\mu} + \nabla_{\lambda} S_{\alpha\mu}^{\lambda} - S_{\alpha\lambda}^{\sigma} S_{\sigma\mu}^{\lambda}; \quad (1.6.4)$$

$$\tilde{R} = R - S_{\alpha\lambda\sigma} S^{\sigma\alpha\lambda}. \quad (1.6.5)$$

Последняя формула понадобится в дальнейшем для записи геометрической части плотности лагранжиана в многообразиях шести и семи измерений.

* Обобщая математические результаты исследования Вейля, Эддингтона, Э. Картана и других, полученные в основном при изучении возможных физических приложений, Схоутен в 30-х годах сформулировал ряд общих требований, которым должны удовлетворять дифференциальные геометрии. Он нашел, что такие геометрии характеризуются тремя и только тремя тензорными величинами — скоутенами: 1) $Q_{\mu\nu\alpha} = g_{\mu\nu|\alpha}$; 2) тензором кручения $S_{\mu\nu}^{\alpha}$; 3) тензором $W_{\mu\nu}^{\alpha} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} - \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\alpha}$, где $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}$ — коэффициенты связности, определяющие параллельный перенос ковариантных тензоров, $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}$ — коэффициенты связности для контравариантных тензоров. Каждый из трех скоутенов может быть нулевым, вырожденным (т. е. разбиваться на произведение двух тензоров, как в (1.4.2)) и общим. В итоге, беря все комбинации из этих трех тензоров и их трех частных случаев, приходим к 27 типам дифференциальных геометрий. Риманова геометрия представляется собой самый простой случай, когда все 3 скоутена равны нулю.

Антисимметричному по всем индексам тензору кручения можно сопоставить псевдовектор S^{ν} согласно равенству

$$S_{\alpha\beta\mu} = E_{\alpha\beta\mu\nu} S^{\nu}, \quad (1.6.6)$$

где $E_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ — антисимметричный по всем индексам тензор Леви-Чивиты, $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ — символ Леви-Чивиты с компонентами:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} +1, & \text{если компоненты приводятся к комбинации 0123} \\ & \text{четным числом перестановок;} \\ 0, & \text{если есть совпадающие индексы;} \\ -1, & \text{если компоненты приводятся к комбинации 0123} \\ & \text{нечетным числом перестановок.} \end{cases}$$

Инвариант $S_{\alpha\lambda\sigma} S^{\alpha\lambda\sigma}$ в (1.6.5) можно записать в ином виде:

$$S_{\alpha\beta\mu} S^{\alpha\beta\mu} = E_{\alpha\beta\mu\nu} E^{\alpha\beta\mu\lambda} S^{\nu} S_{\lambda} = -6 S_{\alpha} S^{\alpha}, \quad (1.6.7)$$

тогда плотность геометрического лагранжиана имеет вид

$$\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} {}^4\tilde{R} = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} ({}^4R + 6 S_{\alpha} S^{\alpha}). \quad (1.6.8)$$

Примечательным здесь является отсутствие динамической части для кручения, как и для неметрической части связности в геометрии Вейля (см. (1.4.9)).

С целью различных физических приложений анализировался ряд частных видов пространств с кручением. Упомянем, например, пространства абсолютного параллелизма (пространства Клиффорда), характеризующиеся условиями

$$\tilde{R}^{\mu}_{\alpha\beta\nu}(+) = \tilde{R}^{\mu}_{\alpha\beta\nu}(-) = 0, \quad (1.6.9)$$

где $\tilde{R}^{\mu}_{\alpha\beta\nu}(+)$ и $\tilde{R}^{\mu}_{\alpha\beta\nu}(-)$ отличаются знаками у тензоров кручения в связности $\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}$. Эти пространства интересны тем, что в них искривленность (метрическая часть кривизны) в определенном смысле компенсируется кручением (торсионной частью). Исследовались также многообразия с менее жесткой связью между метрической и торсионной частями кривизны, например, пространства нейтрального и полунейтрального типов [102] и др. В последующих главах также будут выбираться частные случаи многомерных пространств с кручением.

О взаимодействии физических полей с кручением можно сказать следующее. Скалярное поле в большинстве рассматривавшихся теорий не взаимодействует с кручением. Это связано с тем, что обычно ограничиваются лагранжианами с первыми производными от ϕ , куда вообще не входят связности. Электромагнитное поле не должно взаимодействовать с кручением, если сохранять условие калибровочной инвариантности. Спинорное поле взаимодействует только с полностью ан-

тисимметричной частью кручения. Это будет существенно использовано при построении единых многомерных теорий поля в гл. 4—7.

Отметим, что за прошедшее с 20-х годов время было выполнено значительное число работ в поисках физических проявлений возможной закрученности пространства-времени четырех измерений [9, 41, 79]. Среди них следует назвать аналогичные теории типа Эйнштейна—Картана. В них кручение связывалось с внутренним угловым моментом материи (спином), являющимся источником кручения. Однако эти исследования пока не привели к ощутимым результатам.

Следует также назвать цикл последних работ Эйнштейна по единым теориям гравитации и электромагнетизма на базе пространств с несимметричной метрикой. Антисимметричная часть метрики, которую предполагалось связать с тензором электромагнитного поля, можно трактовать как своеобразный потенциал поля кручения [83, 14]. Особого внимания заслуживают работы Р. Финкельштейна [102], в которых с помощью кручения делались попытки описать не только электромагнетизм, но и мезоны и другие виды материи. В гл. 2 и 4 будет проанализирована идея В. И. Родичева [83] об описании электромагнитного поля посредством кручения в 5-мерном многообразии.

§ 1.7. Диадный и тетрадный формализмы в общей теории относительности

При рассмотрении ряда задач как теории относительности, так и физики элементарных частиц, приходится отказываться от полной симметрии даже среди трех пространственных координат (направлений). Можно взять пример из обыденной жизни. Для нас, живущих на поверхности Земли, радиальное направление (направление вверх) явно неравноправно по отношению к двум оставшимся: запад—восток, юг—север. При более детальном анализе явлений на Земле, когда учитывается вращение Земли, проявляется неравноправность и этих двух направлений. Отсюда следует поучительное замечание, особенно полезное для осмысления выделенности дополнительных, пятой и шестой, координат, — нет априорной полной симметрии между всеми координатами и измерениями. Каждое измерение по своему выделено, обусловлено специфическими для него физическими обстоятельствами. О симметрии между тем или иным числом координат можно говорить лишь в связи с определенным кругом физических условий и задач, где она проявляется. Таким примером является симметрия между временной и пространственными координатами. Для описания нарушения этой симметрии в § 1.2 был использован монадный метод.

Для описания задач, где нужно выделить кроме временной еще одну пространственную координату (направление), полез-

но использовать *диадный метод*. Набросаем контуры этого метода или формализма (более подробно с ним можно познакомиться в [17]). В этом формализме метрический тензор представляется в виде

$$g_{\mu\nu} = \tau_\mu \tau_\nu - l_\mu l_\nu - \gamma_{\mu\nu}, \quad (1.7.1)$$

где τ_μ и l_μ — два ортонормированных вектора диады, нормальных к локальной 2-мерной площадке с метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\tau_\mu \tau^\mu = 1; \quad l_\mu l^\mu = -1; \quad \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} = 2; \quad \tau_\mu l^\mu = 0; \quad \tau_\mu \gamma^{\mu\nu} = l_\mu \gamma^{\mu\nu} = 0. \quad (1.7.2)$$

Диадный формализм строится по образцу и подобию монадного, только он значительно богаче. В нем больше возможных калибровок, больше физико-геометрических тензоров (11 вместо 3), больше операторов диадного дифференцирования (3 вместо 2). При изложении 6-мерной теории гравито-электро-слабых взаимодействий в гл. 4 будет использована калибровка, соответствующая дважды примененному хронометрическому методу, называемая в 4-мерии хронохронометрической. В этой калибровке диада задается в виде

$$\tau^\mu = g_0^\mu / \sqrt{g_{00}}; \quad l^\mu = \frac{*h_1^\mu}{\sqrt{*h_{11}}} = \left\{ \frac{g_{01}}{\sqrt{g_{00}(g_{01}^2 - g_{00}g_{11})}}; -\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{g_{01}^2 - g_{00}g_{11}}}; 0; 0 \right\}, \quad (1.7.3)$$

где $*h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \tau_\mu \tau_\nu$. В этой калибровке из множества допустимых преобразований координат выделяется класс

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3); \quad x'^1 = x'^1(x^1, x^2, x^3); \quad (1.7.4)$$

$$x'^\xi = x'^\xi(x^2, x^3), \quad \text{где } \xi = 2, 3. \quad (1.7.5)$$

В таком диадном формализме рассматриваются скалярные и тензорные величины и операторы, инвариантные относительно преобразований (1.7.4) и ковариантные при 2-мерных преобразованиях (1.7.5).

Когда выделяются три (а следовательно, и все четыре) координаты, следует использовать *тетрадный метод* (формализм). В нем все направления индивидуальны и в смысле одинаковой выделенности являются равноправными. Теперь уже неразумно каждому вектору тетрады присваивать свою коренную букву — их обозначения унифицируются в виде $g(\alpha)_\mu$, где (α) — номер вектора тетрады. Тогда метрический тензор представляется в виде

$$g_{\mu\nu} = g(\alpha)_\mu g(\alpha)_\nu = g(0)_\mu g(0)_\nu - g(1)_\mu g(1)_\nu - g(2)_\mu g(2)_\nu - g(3)_\mu g(3)_\nu, \quad (1.7.6)$$

где, очевидно, $g(0)_\mu \equiv \tau_\mu$, $g(1)_\mu \equiv l_\mu$.

В последовательном тетрадном формализме следует работать лишь со скалярными величинами, т. е. скалярами, полученными из тензоров проектированием по всем индексам на компоненты тетрады. В этом случае универсальные индексы заменяются на локальные (в скобках), указывающие, на какой вектор тетрады произведено проектирование, например $B_{\mu}g(\alpha)^{\mu} = B(\alpha)$. Однако часто имеют дело со смешанным тетрадным формализмом, когда у величин присутствуют индексы двух типов — локальные и универсальные.

В общем случае можно говорить об изменении направлений векторов тетрады, что описывается локальными поворотами, составляющими вторую группу преобразований

$$g(\alpha)_{\mu}^{\prime} = \omega(\alpha\beta) g(\beta)_{\mu} \quad (1.7.7)$$

— группу локальных ортогональных преобразований, где $\omega(\alpha\beta)$ — коэффициенты линейных преобразований.

В тетрадном формализме в качестве физико-геометрических тензоров выступают объекты неголономности

$$C_{\mu\nu}(\alpha) = -C_{\nu\mu}(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g(\alpha)_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g(\alpha)_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right). \quad (1.7.8)$$

В последовательном тетрадном формализме из них строятся 24 скаляра $C(\lambda\sigma, \alpha) = C_{\nu\mu}(\alpha) g(\lambda)^{\nu} g(\sigma)^{\mu}$.

Ковариантная производная величин с локальными и универсальными индексами определяется формулой

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma} B_{\nu\dots}^{\mu\dots}(\alpha\dots) &= \frac{\partial B_{\nu\dots}^{\mu\dots}(\alpha\dots)}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu} B_{\nu\dots}^{\lambda\dots}(\alpha\dots) + \dots - \\ &- \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} B_{\lambda\dots}^{\mu\dots}(\alpha\dots) - \dots - \Delta_{\sigma}(\alpha\beta) B_{\nu\dots}^{\mu\dots}(\beta\dots) - \dots, \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

где $\Delta_{\sigma}(\alpha\beta)$ — коэффициенты вращения Риччи, выполняющие по отношению к локальным индексам роль символов Кристоффеля, они связаны с последними соотношением

$$\Delta_{\nu}(\alpha\beta) = g(\beta)^{\mu} \frac{\partial g(\alpha)_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g(\alpha)_{\lambda} g(\beta)^{\mu} \quad (1.7.10)$$

Коэффициенты вращения Риччи выражаются через объекты неголономности следующим образом:

$$\Delta_{\mu,\alpha\nu} = g(\beta)_{\nu} C_{\alpha\mu}(\beta) + g(\beta)_{\alpha} C_{\mu\nu}(\beta) - g(\beta)_{\mu} C_{\nu\alpha}(\beta). \quad (1.7.11)$$

Наконец, запишем, как представляется скалярная кривизна через $\Delta_{\mu}(\alpha\beta)$

$$R = 2g(\beta)^{\nu} g(\alpha)^{\sigma} \frac{\partial \Delta_{\nu}(\alpha\beta)}{\partial x^{\sigma}} + \Delta(\beta\alpha\gamma) \Delta(\alpha\gamma\beta) + \Delta(\beta\gamma\beta) \Delta(\alpha\gamma\alpha). \quad (1.7.12)$$

§ 1.8. Уравнения Дирака в гравитационном и электромагнитном полях

Как известно, основные виды материи: лептоны, кварки, барионы — описываются спинорными волновыми функциями, поэтому о важности рассмотрения спинорных частиц в искривленном пространстве-времени (а затем в искривленных многообразиях большей размерности) говорить не приходится. Однако понятие спинора имеет смысл только в плоском пространстве-времени (о спинорах в плоских многообразиях большей размерности см. приложение), где определена группа преобразований Лоренца. Именно в связи с этим необходима тетрадная формулировка общей теории относительности, когда в каждой точке определено касательное плоское пространство-время с группой вращений (1.7.7), т. е. локально понятие спинора имеет смысл. При переходе от одной точки к другой, вообще говоря, меняется ориентация векторов тетрады и следует ожидать изменения компонент спиноров.

Вторым существенным обстоятельством при описании спиноров в искривленном пространстве-времени является характер в нем γ -матрицы. Теперь это переменные (4×4) -матрицы, зависящие от координат и связанные с римановым метрическим тензором соотношением

$$\gamma_{\mu}(x) \gamma_{\nu}(x) + \gamma_{\nu}(x) \gamma_{\mu}(x) = 2g_{\mu\nu}(x) I_4, \quad (1.8.1)$$

где I_4 — единичная (4×4) -матрица. Стандартные $\gamma(\alpha)$ -матрицы Дирака в том или ином представлении строятся из γ_{μ} посредством компонент тетрады

$$\gamma(\alpha) = \gamma_{\mu} g(\alpha)^{\mu}. \quad (1.8.2)$$

Кратко поясним, как определяется ковариантная производная от спинора в общей теории относительности [105, 92]. Для этого полагается, что при параллельном переносе спинорная (4-компонентная) волновая функция изменяется согласно общему линейному закону

$$\Psi(x+dx) = \Psi(x) + N_{\lambda} \Psi(x) dx^{\lambda}, \quad (1.8.3)$$

где N_{λ} — некоторая квадратная 4-рядная матрица (коэффициенты Фока—Иваненко). Далее используется тот факт, что из спинора можно построить вектор с локальным индексом $\bar{\Psi}\gamma(\alpha)\Psi$, а параллельный перенос и ковариантная производная от вектора известны (1.7.9). Из (1.8.3) и (1.7.9), где взято $B(\alpha) = \bar{\Psi}\gamma(\alpha)\Psi$, находится уравнение для матрицы N_{λ} :

$$\Delta_{\sigma}(\alpha\beta) \gamma(\beta) = \gamma(\alpha) N_{\sigma} + \gamma(0) N_{\sigma}^{\dagger} \gamma(0) \gamma(\alpha), \quad (1.8.4)$$

где N_{σ}^{\dagger} — матрица, эрмитово-сопряженная N_{σ} . Решением этого уравнения является

$$N_\sigma = i\tilde{A}_\sigma I_4 + 1/4 \Delta_\sigma(\mu\nu) \gamma(\mu) \gamma(\nu), \quad (1.8.5)$$

где \tilde{A}_σ — произвольный вектор. Подставляя (1.8.5) в (1.8.3) находим ковариантную производную от спинорной волновой функции:

$$\nabla_\mu \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} - i\tilde{A}_\mu \Psi - \frac{1}{4} \Delta_\mu(\alpha\beta) \gamma(\alpha) \gamma(\beta) \Psi; \quad (1.8.6)$$

$$\nabla_\mu \bar{\Psi} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x^\mu} + i\tilde{A}_\mu \bar{\Psi} - \frac{1}{4} \Delta_\mu(\alpha\beta) \bar{\Psi} \gamma(\alpha) \gamma(\beta).$$

Особое внимание здесь следует обратить на автоматически возникший вектор \tilde{A}_σ , характеризующий произвол, с каким найдено решение для N_σ . Это в свое время послужило основанием для построения своеобразной 4-мерной теории гравитации и электромагнетизма, в которой вектор \tilde{A}_σ через размерный коэффициент отождествлялся с электромагнитным векторным потенциалом A_σ в согласии с (1.3.9) $\tilde{A}_\sigma = -\frac{e}{\hbar c} A_\sigma$.

Заметим, что не следует преувеличивать этот факт. Вектор \tilde{A}_σ показывает лишь место, куда может быть поставлено электромагнитное поле. Обоснование глубокого единства электромагнитного поля и искривленности 4-мерного пространства-времени в формулах типа (1.8.6) проявляется в многомерных теориях размерности большей четырех.

На основании формул (1.8.6) легко записать вклад спинорного поля в негеометрическую часть плотности лагранжиана (1.1.7)

$$\mathcal{L}_s = \frac{i\hbar c}{2} \sqrt{-g} \left(\bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - \nabla_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi + \frac{imc}{\hbar} \bar{\Psi} \Psi \right), \quad (1.8.7)$$

где m — масса покоя спинорного поля. Из плотности лагранжиана вариационным методом легко найти вид уравнений Дирака в искривленном пространстве-времени в присутствии электромагнитного поля

$$\left\{ -i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{e}{\hbar c} A_\mu \gamma^\mu + \frac{i}{4} \Delta_{\mu\nu\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma + \frac{mc}{\hbar} \right\} \Psi = 0. \quad (1.8.8)$$

Подчеркнем характерные черты этого уравнения, которые отличают его от соответствующих уравнений в многомерных теориях (см. гл. 2, 4—6).

а) Масса покоя спинорной частицы введена феноменологически, тогда как в многомерных теориях она будет возникать из высших размерностей или косвенным образом из взаимодействия с другими полями.

б) Электромагнитное поле здесь введено как внешнее, негеометрическое поле. В многомерных теориях A_μ возникает из соответствующих компонент метрики, а электрический заряд — из замкнутости мира по дополнительным координатам.

§ 1.9. Аффинные геометрии и нелинейные уравнения поля

В следующих главах в рамках многомерных геометрий тензор кручения и понятия геометрии Вейля будут использоваться для геометризации ряда физических полей. Однако, оказывается они уже применялись в 4-мерной теории для геометрического обоснования или интерпретации некоторых слагаемых в лагранжианах и уравнениях, которые первоначально вводились искусственно на основе каких-то физических соображений. Имеются в виду нелинейные добавки в уравнении Дирака, на которые в свое время возлагались большие надежды.

В. И. Родичев одним из первых заметил, что кручением 4-мерного пространства-времени можно обосновать нелинейный набор добавок псевдовекторного типа. Этот результат поучителен в ряду отношений, поэтому остановимся на нем подробнее. В пространстве-времени с кручением производная от спинора (1.8.6) обобщается на выражение

$$\nabla_\mu \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \Psi - \frac{1}{4} \Delta_\mu(\alpha\beta) \gamma(\alpha) \gamma(\beta) \Psi - \frac{1}{4} S_{\mu\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \Psi. \quad (1.9.1)$$

Для простоты ограничимся плоским пространством-временем с полностью антисимметричным кручением и положим $A_\mu = 0$ и $m = 0$. Тогда плотность лагранжиана, состоящая из геометрической части (скалярной кривизны из (1.6.5)) и спинорного поля (1.8.7) принимает вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} S_{\alpha\beta\nu} S^{\alpha\beta\nu} + \frac{i\hbar c}{2} \left(\bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x^\mu} \gamma^\mu \Psi \right) - \frac{i\hbar c}{4} S_{\alpha\beta\nu} \bar{\Psi} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \Psi. \quad (1.9.2)$$

Вариация (1.9.2) по компонентам кручения приводит к алгебраическому соотношению

$$S_{\alpha\beta\nu} = \frac{i\hbar c \kappa}{4} \bar{\Psi} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\nu \Psi, \quad (1.9.3)$$

которое в 4-мерной теории послужило основанием для физического истолкования кручения как «собственного поля частицы» [82]. Ясно, что это связано с отсутствием динамических слагаемых для кручения в (1.9.2).

Вариация (1.9.2) по спинорному полю приводит к уравнению Дирака в пространстве-времени с кручением

$$\left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{i}{4} S_{\alpha\beta\nu} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \right) \Psi = 0. \quad (1.9.4)$$

Подставляя сюда выражение для кручения из (1.9.3), приходим к известному нелинейному спинорному уравнению Гейзенберга—Иваненко (с псевдовекторной нелинейной добавкой)

$$+i\gamma^\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} + \frac{3}{8} \kappa \hbar c (\Psi \gamma_\mu \gamma_5 \Psi) \gamma^\mu \gamma_5 \Psi = 0. \quad (1.9.5)$$

где использовано (1.6.6).

Легко показать [61], что аналогичное слагаемое в уравнении Дирака можно получить и в случае искривленного пространства-времени и в присутствии электромагнитного поля. Таким образом, введение нелинейного добавка псевдовекторного типа в уравнение Дирака равносильно в 4-мерном пространстве-времени допущению о закрученности этого многообразия.

В работах ряда авторов в уравнение Дирака аналогичным образом вводился нелинейный добавок векторного типа. В. Г. Кречетом [61] показано, что это равносильно допущению, что использованное 4-мерное пространство-время описывается геометрией Вейля. Этот результат легко усмотреть и того, что согласно изложенному в § 1.4 в (1.9.1) из вейлевской связности возникнет векторный добавок. Геометрическая часть лагранжиана согласно (1.4.9), как и в случае кручения, не содержит динамической части для вейлевского векторного поля. Это приведет к векторному алгебраическому соотношению типа (1.9.3), а его подстановка в уравнение Дирака — к сформулированному выше результату.

Глава 2.

ЕДИНАЯ 5-МЕРНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

§ 2.1. Основные идеи 5-мерной теории гравитации и электромагнетизма

Уже в первой работе Калуцы [49] было показано основное — общую теорию относительности и теорию электромагнитного поля Максвелла удастся объединить в рамках одной геометрической теории, если обобщить идеи Клиффорда—Эйнштейна на 5-мерный случай. Другими словами, мир следует описывать в рамках 5-мерного риманова пространственно-временного многообразия. Тогда из 15 компонент 5-мерного метрического тензора G_{AB} строятся как 10 компонент 4-мерного метрического тензора g_{ab} , так и 4 компоненты векторного электромагнитного потенциала A_a . При этом остается еще одна, пятнадцатая компонента метрического тензора G_{55} , которая считалась лишней и полагалась постоянной. В качестве уравнений поля предлагалось использовать либо 5-мерные «уравнения Эйнштейна», либо соответствующие им уравнения, получающиеся вариационным методом из плотности 5-мерной скалярной кривизны. В качестве уравнений движения частиц брались 5-мерные уравнения геодезических. При этом на 5-мерную метрику накладывалось существенное ограничение — постулировалось, что все компоненты 5-метрики не зависят от 5-й координаты. Это так называемое условие цилиндричности по x^5 .

В этой главе рассмотрим 5-мерную теорию, опираясь на идеи Калуцы, но с максимально общих позиций, используя современные методы и представления. Сейчас мы прекрасно знаем, что традиционные геометрические приемы не позволяют получить спинорную материю, поэтому «плотность» полного лагранжиана теории выбирается из двух частей — геометрической и внешней:

$$L = \sqrt{{}^5G^0} \left\{ \frac{1}{2\kappa} (\tilde{\Lambda} - {}^5\tilde{R}) + L_m \right\}, \quad (2.1.1)$$

где ${}^5G^0$ — определитель матрицы из компонент 5-мерного метрического тензора G_{AB} , ${}^5\tilde{R}$ — скалярная кривизна, L_m — лагранжиан спинорной материи, $\tilde{\Lambda}$ — затравочная космологическая «постоянная»; κ — эйнштейновская гравитационная посто-

янная. В этой и в следующей главах заглавные латинские индексы от A до J пробегают значения: 0, 1, 2, 3, 5.

Для перехода от 5-мерной теории к 4-мерной и для физической интерпретации геометрических величин необходимо использовать процедуру 1+4-расщепления. Как уже указывалось, прием 1+ n -расщепления многообразий впервые был предложен именно в работах по 5-мерию 30—40-х годов. В дальнейшем монадный метод был усовершенствован в рамках 4-мерной теории для описания систем отсчета. Теперь настало время применить его вновь для нужд построения многомерных единых теорий. В следующем параграфе это сделано в самом общем виде. Затем будет осуществлен переход к первоначальному варианту теории Калуцы—Клейна и будут перечислены обсуждавшиеся в литературе недостатки этого варианта.

Далее в этой главе будут рассмотрены более общие варианты 5-мерной теории, основанные на менее жестких ограничениях и на идеях последующих этапов развития теории. Прежде всего имеется в виду процедура конформного преобразования. Анализ 5-мерной теории показал, что отождествление геометрических величин с физическими можно производить не в метрике G_{AB}^0 исходного многообразия, как это делалось раньше, а после процедуры конформного преобразования. Эта процедура позаимствована из единой теории Вейля, и в этом смысле достигается слияние конкурировавших в свое время теорий. Все величины в исходной метрике в (2.1.1) отмечены значком «0» сверху.

Будет произведен отказ от условия цилиндричности по x^5 . Вместо него предложено использовать более общее условие квазцилиндричности, когда все компоненты исходной метрики зависят от x^5 , но после конформного преобразования эта зависимость устраняется. При этом конформный фактор специальным (циклическим) образом зависит от x^5 , что соответствует идее Эйнштейна и Бергмана 30-х годов о периодичности или замкнутости мира по 5-й координате. Подобная зависимость будет предполагаться и для негеометрической материи. Для перехода к стандартной 4-мерной теории будет производиться усреднение по x^5 , после чего останется зависимость только от четырех координат, однако везде останется пятая компонента импульса.

В § 2.7 теория обобщена на случай 5-мерного многообразия с кручением и проанализированы возможности отождествления компонент тензора кручения с какими-либо физическими полями. В (2.1.1) волной сверху над скалярной кривизной обозначено наличие кручения.

В заключительных параграфах этой главы рассмотрены спинорные поля в 5-мерных многообразиях.

§ 2.2. 1+4-расщепление 5-мерного риманова многообразия

Начнем систематическое рассмотрение возможностей 5-мерной теории с изложения процедуры 1+4-расщепления римановой геометрии в произвольной сигнатуре. Поскольку на первый взгляд возможны две сигнатуры 5-мерного многообразия $(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5)$: $(+---+)$ и $(+-----)$, в этом параграфе будем строить теорию сразу для обеих сигнатур. Во всех формулах верхний знак будет соответствовать первой сигнатуре, а нижний — второй. Целесообразно представить этот раздел в виде четырех составных частей, аналогично § 1.2.

1. Алгебра. Запишем 5-мерный метрический тензор G_{AB}^0 в виде

$$G_{AB}^0 = \pm \lambda_A^0 \lambda_B^0 + g_{AB}^0, \quad (2.2.1)$$

где λ_A^0 — монада (5-вектор); g_{AB}^0 — метрический тензор 4-мерного пространственно-временного сечения, ортогонального линиям λ . Напомним, что нулевой значок над величинами означает, что они взяты в исходной метрике. В дальнейшем будет произведено конформное преобразование к новой метрике без верхнего значка. Для составляющих метрического тензора справедливы соотношения

$$\lambda_A^0 \lambda_B^0 G^{AB} = \pm 1; \lambda_A^0 g^{AB} = 0; g_{AB}^0 g^{AB} = 4. \quad (2.2.2)$$

Произвольному 5-тензору $B_{D\dots}^C$ можно сопоставить скаляр и совокупность пространственно-временных тензоров равного и меньших рангов проектированием его посредством λ_B^0 и g_B^A :

$$B = B_{D\dots}^C \lambda_C^0 \dots \lambda^D \dots; \tilde{B}_{B\dots}^A = B_{D\dots}^C g_C^A \dots g_B^D \dots; \dots$$

Откалибруем монаду λ_A^0 следующим образом:

$$\lambda_B^0 = G_{5B}^0 / \sqrt{\pm G_{55}^0} \rightarrow \lambda_B = G_{5B}^0 / \sqrt{\pm G_{55}^0} \quad (2.2.3)$$

и введем обозначения: $\pm G_{55}^0 = \lambda_5^0{}^2$; $G_{5\mu}^0 = \lambda_5^0 \lambda_\mu^0$. Тогда составляющие метрического тензора будут иметь вид

$$\lambda_A^0 = \{G_{5\alpha}^0 / \sqrt{\pm G_{55}^0}; \pm \lambda_5^0\}; \lambda^A = \{0, 0, 0, 0, 1/\lambda_5^0\};$$

$$g_{\mu\nu}^0 = G_{\mu\nu}^0 - \frac{G_{5\mu}^0 G_{5\nu}^0}{G_{55}^0} = G_{\mu\nu}^0 \mp \lambda_\mu^0 \lambda_\nu^0; g_{5B}^0 = 0;$$

$$g^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}; g^{5\mu} = G^{5\mu}; g^{55} = (G_{55} G^{55} - 1)/\lambda_5^2;$$

$$g_{\nu}^{\mu} = G_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu}; g_{\mu}^5 = \mp \lambda_{\mu}/\lambda_5; g_5^B = 0.$$

В данной калибровке, соответствующей (точнее, предыдущей) хронометрической калибровке в методе хронометрических инвариантов (см. § 1.2), выделяется множество систем координат, связанных преобразованиями

$$x'^5 = x'^5(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5);$$

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^0, x^1, x^2, x^3).$$

Назовем калибровочно инвариантными (кл. и.) 4-тензорные величины, инвариантные при преобразованиях (2.2.5) и 4-мерно ковариантные относительно преобразований (2.2.6). Забегая вперед, отметим, что преобразования (2.2.5) соответствуют калибровочным электромагнитным преобразованиям. Физически значимыми в дальнейшем будем считать кл. (в указанном общем или частных случаях) 4-тензоры. Таковыми будут спроектированные на пространство-время тензорные величины с индексами 0, 1, 2, 3, т. е. выражения

$$\tilde{B}^{\mu\nu\dots} = \underbrace{B_{55\dots 5}^{\mu\nu\dots}}_n / (\pm G_{55})^{n/2} = B_{55\dots 5}^{\mu\nu\dots} / \lambda_5^n$$

или полученные из них величины опусканием индексов с помощью 4-мерного метрического тензора $g_{\mu\nu}$.

Видно, что компоненты $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ 4-мерного пространственно-временного метрического тензора образуют кл. 4-тензоры. Квадрат интервала 5-мерного риманова многообразия представляется в виде

$$dl^2 = G_{AB} dx^A dx^B = \pm (d\lambda)^2 + ds^2,$$

где $d\lambda = \lambda_B dx^B = G_{5B} dx^B / \lambda_5$ — интервал вдоль пятой координаты (кл. и. скаляр); $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ — интервал 4-мерного пространственно-временного сечения (в общем случае неголономного), ортогонального линиям λ .

2. Физико-геометрические 4-тензоры. Как и в 4-мерном случае (см. § 1.2) из компонент метрического тензора и производных первого порядка можно построить следующие кл. и. тензора

$$\Phi_A = \mp \lambda^B (\lambda_{A,B} - \lambda_{B,A}) \rightarrow \Phi_{\mu} = \frac{1}{\lambda_5} \left(\frac{\partial \lambda_{\mu}}{\partial x^{\mu}} \mp \frac{\partial \lambda_{\mu}}{\partial x^5} \right)$$

аналог вектора ускорения F_{μ} в 4-мерном случае;

$$\tilde{F}_{AB} = \pm \frac{1}{2} g_{AG}^C g_B^D (\lambda_{C,D} - \lambda_{D,C}) \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} =$$

$$= \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \lambda_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Phi_{\mu}^0 \lambda_{\nu}^0 - \Phi_{\nu}^0 \lambda_{\mu}^0 \right)$$

аналог тензора угловой скорости вращения $A_{\mu\nu}$;

$$\tilde{D}_{AB} = \frac{1}{2} (\lambda_{AB}^C + \lambda_{BA}^C + \lambda_{AC}^B) \rightarrow$$

$$\rightarrow \tilde{D}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\lambda_5} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^5}; D^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\lambda_5} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^5}$$

аналог тензора скоростей деформаций $D_{\alpha\beta}$.

3. Операторы дифференцирования. Будем пользоваться следующими двумя операторами, действующими на кл. и. 4-тензоры и сохраняющими их свойство калибровочной инвариантности.

а) Монодный оператор дифференцирования по пятой координате

$$\partial_5^{\mu} \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots} = \lambda^B \frac{\partial \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots}}{\partial x^B} = \frac{1}{\lambda_5} \frac{\partial \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots}}{\partial x^5}$$

Этот оператор не зависит от ранга и ковариантности дифференцируемой величины. Он соответствует оператору (1.3.9) в 4-мерии.

б) Оператор ковариантного пространственно-временного дифференцирования

$$\nabla_{\sigma}^{\mu} \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots} = \partial_{\sigma}^{\mu} \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots} + \underbrace{\Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots}}_n + \dots - \underbrace{\Gamma_{\sigma\nu}^{\nu} \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots}}_m - \dots,$$

где использованы обозначения

$$\partial_{\sigma}^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} - \frac{G_{\sigma 5}}{G_{55}} \frac{\partial}{\partial x^5} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \mp \frac{\lambda_{\sigma}}{\lambda_5} \frac{\partial}{\partial x^5}$$

— кл. и. оператор пространственно-временного дифференцирования;

$$\Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_{\lambda}^{\sigma} g_{\sigma\nu} + \partial_{\sigma}^{\lambda} g_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}^{\sigma} g_{\sigma\lambda})$$

— кл. и. 4-связность.

4. Основные соотношения, величины и уравнения 5-мерной теории в 1+4-расщепленном виде. Напомним, что термин

«1+4-расщепленный вид» означает, что выражения записаны лишь через скаляры, кл. и. 4-тензоры и введенные в п. 3 операторы дифференцирования.

а) Для записи геометрической части плотности лагранжиана нам потребуется значение *плотности 5-мерной скалярной кривизны*

$$\begin{aligned} \sqrt{{}^5G} \cdot {}^5R \equiv \sqrt{{}^5G} \cdot {}^5R_{AB} G^{AB} = \sqrt{-g} \lambda_5 [{}^4R \mp \Delta^2 \mp \tilde{D}_{\mu\nu} \tilde{D}^{\mu\nu} \mp \\ \mp \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - 2(\pm \partial_5^{\pm} \tilde{D} + \Phi_\alpha \Phi^\alpha + \nabla_\alpha^{\pm} \Phi^\alpha)], \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

где использовано, что в калибровке (2.2.3)

$$\sqrt{{}^5G} = \sqrt{-g \cdot \lambda_5}; \quad (2.2.17)$$

4R — 4-мерная скалярная кривизна, получающаяся из 4-мерного тензора Римана—Кристоффеля

$${}^4R_{\mu\nu\rho}^\sigma = \partial_\nu^+ \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\rho^+ \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^\sigma; \quad (2.2.18)$$

$${}^4R_{\mu\nu} = {}^4R_{\mu\nu\sigma}^\sigma; \quad {}^4R = {}^4R_{\alpha\beta}^{\alpha\beta};$$

$\tilde{D} = \tilde{D}_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$ — след тензора $\tilde{D}_{\alpha\beta}$. Остальные обозначения ясны из вышеизложенного.

б) 5-мерные уравнения типа уравнений Эйнштейна можно получить либо вариационным методом из (2.2.16), добавляя негеометризованную материю (будем ее в дальнейшем называть внешней), либо непосредственно постулируя 5-мерные «уравнения Эйнштейна» в виде

$${}^5R_{AB} - \frac{1}{2} G_{AB} {}^5R + \tilde{\Lambda} G_{AB} = \kappa Q_{AB}, \quad (2.2.19)$$

где $\tilde{\Lambda}$ — затравочная космологическая постоянная; $\kappa = 8\pi k/c^4$; Q_{AB} — 5-мерный тензор энергии-импульса внешней материи. Используя введенные кл. и. тензоры и операторы, эти уравнения можно записать в 1+4-расщепленном виде (10+4+1 уравнений):

$$\begin{aligned} {}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^4R + \tilde{\Lambda} g_{\mu\nu} = \pm \left[2\tilde{F}_{\mu\alpha} \tilde{F}_\nu^\alpha - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta} \right] + \kappa Q_{\mu\nu} + \\ + \Phi_\mu \Phi_\nu + \frac{1}{2} (\nabla_\mu^{\pm} \Phi_\nu + \nabla_\nu^{\pm} \Phi_\mu) - g_{\mu\nu} (\Phi_\alpha \Phi^\alpha + \nabla_\alpha^{\pm} \Phi^\alpha) + \\ + \tilde{D} (\tilde{F}_{\mu\nu} \pm \tilde{D}_{\mu\nu}) \mp 2\tilde{D}_{\mu\alpha} \tilde{D}_\nu^\alpha \pm \partial_5^{\pm} \tilde{D}_{\mu\nu} \mp \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\Delta^2 + \tilde{D}_{\alpha\beta} \tilde{D}^{\alpha\beta} + \\ + 2\partial_5^{\pm} \tilde{D}) + 2\tilde{F}_{\nu\alpha} \tilde{D}_{\mu\alpha}; \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

$$\nabla_\nu^{\pm} (\tilde{D}^{\mu\nu} \pm \tilde{F}^{\nu\mu} - \tilde{D} g^{\mu\nu}) \pm 2\tilde{\Phi}_\alpha \tilde{F}^{\alpha\mu} = \kappa Q_B^{\mu A}; \quad (2.2.21)$$

$$-\frac{1}{2} {}^4R \pm \frac{3}{2} \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta} \mp \tilde{\Lambda} \pm \frac{1}{2} (\Delta^2 - \tilde{D}_{\alpha\beta} \tilde{D}^{\alpha\beta}) = -\kappa Q_{AB} \lambda^A \lambda^B. \quad (2.2.22)$$

В окончательно сформулированной 5-мерной теории эти уравнения должны соответствовать: (2.2.20) — 10 уравнениям Эйнштейна (1.1.5) с вкладом в тензор энергии—импульса электромагнитного поля (1.3.7); (2.2.21) — должно соответствовать (1.3.4); (2.2.22) — уравнению некой скалярной материи вида (1.5.4).

в) Уравнения геодезических в 5-мерной теории

$$\frac{d^2 x^A}{dI^2} = -{}^5\Gamma_{BC}^A \frac{dx^B}{dI} \frac{dx^C}{dI} \quad (2.2.23)$$

где ${}^5\Gamma_{BC}^A$ — 5-мерные символы Кристоффеля) в кл. и. виде представляются как совокупность скалярного и векторного уравнений:

$$\frac{d^2 \lambda}{ds^2} = \left[1 \pm \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 \right] \left(\tilde{D}_{\mu\nu} u^\mu u^\nu - \frac{d\lambda}{ds} \Phi_\mu u^\mu \right); \quad (2.2.24)$$

$$\frac{dp^\mu}{ds} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta - 2 \frac{d\lambda}{ds} p^\nu (\tilde{F}_{\nu\mu} \pm \tilde{D}_\nu^\mu) \pm m \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 \Phi^\mu. \quad (2.2.25)$$

Здесь использованы обозначения

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}; \quad \frac{d\lambda}{ds} = \pm \lambda_5 \frac{dx^5}{ds} + \lambda_\mu u^\mu \quad (2.2.26)$$

— кл. и. компоненты 5-скорости и кл. и. компоненты 5-импульса $p^\mu = m u^\mu$, причем $m = m_0 / \sqrt{1 \pm (d\lambda/ds)^2}$, m_0 — введенная для удобства масса покоя частицы.

§ 2.3. Единая 5-мерная теория Калуцы: ее достоинства и недостатки

Даже беглое сопоставление полученных из 5-мерия уравнений со стандартными указывает на многочисленные удивительные аналогии, которые вряд ли могут быть случайными. В самых первых вариантах 5-мерной теории были сформулированы ограничения на геометрию и необходимые отождествления, которые привели к совпадению 5-мерных уравнений со стандарт-

ными. Рассмотрим переход от записанных уравнений к теории Калуцы.

Во-первых, в первых вариантах не использовались конформные преобразования, т. е. в предыдущих формулах нужно убрать значок «о». Во-вторых, $F_{\mu\nu}$ следует отождествить, используя размерный множитель, с тензором напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, а λ_μ — с векторным потенциалом A_μ .

В-третьих, для обеспечения нужного знака (минус) перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля (см. (1.3.7)) в правой части уравнений (2.2.20) следует выбрать 5-ю координату пространственноподобной, т. е. взять сигнатуру (+ — — — —).

В-четвертых, для того чтобы устранить симметричное тензорное поле $D_{\mu\nu}$, следует постулировать условие независимости 5-метрики от пятой координаты (условие цилиндричности по x^5).

В-пятых, для устранения векторного поля Φ_α достаточно кроме условия цилиндричности положить $G_{55} = \text{Const}$.

В итоге получается теория, в которой 4-мерный метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ и векторный электромагнитный потенциал A_α следующим образом выражаются через компоненты 5-метрики:

$$g_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - G_{5\alpha}G_{5\beta}; \quad A_\alpha = \frac{c^2}{2\sqrt{k}}G_{5\alpha}; \quad F_{\mu\nu} = \frac{c^2}{\sqrt{k}}\tilde{F}_{\mu\nu}. \quad (2.3.1)$$

Перечислим бесспорные классические результаты такой теории.

1. Пятнадцать 5-мерных «уравнений Эйнштейна» (2.2.19) в вакууме соответствуют 4-мерному электровакууму и распадаются на систему десяти 4-мерных стандартных уравнений Эйнштейна (1.1.5), систему четырех вакуумных уравнений второй пары Максвелла (1.3.4) и, вообще говоря, еще одно скалярное уравнение, следующее из (2.2.22).

2. В правой части получающихся 4-мерных уравнений Эйнштейна автоматически появляется известный тензор энергии-импульса электромагнитного поля (1.3.7).

3. Четыре из пяти уравнений геодезических (2.2.23) представляют собой в точности стандартные 4-мерные уравнения движения электрически заряженных частиц в гравитационном и электромагнитном полях (1.3.5).

4. При использовании условия цилиндричности по x^5 допустимые преобразования пятой координаты (2.2.5) следует сузить до

$$x'^5 = x^5 + f(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (2.3.2)$$

где f — функция лишь четырех пространственно-временных координат. С позиций 5-мерия A_α не является настоящим векто-

ром. Преобразования (2.3.2) генерируют известные в стандартной электродинамике градиентные преобразования векторного потенциала (1.3.1).

Насколько существенны эти результаты, можно судить, сравнивая 5-мерную теорию с конкурировавшей с ней единой теорией Вейля (см. § 1.4) и с другими теориями. Как правило, в последних подобных результаты достигались ценой ряда искусственных допущений. Все это заставляло несколько поколений теоретиков неоднократно возвращаться к анализу 5-мерных вариантов единых теорий.

Вместе с тем 5-мерная теория не завоевала всеобщего признания и не стала в свое время рабочим инструментом физиков. Перечислим главные недостатки первых вариантов 5-мерной теории, которые, по мнению Эйнштейна и других ведущих теоретиков, явились причиной этого.

1. Не был ясен физический смысл пятой координаты.

2. «Среди соображений, которые заставляют усомниться в этой теории, на первом месте стоит следующее: вряд ли разумно заменять четырехмерный континуум на пятимерный и затем искусственно налагать ограничение на одно из этих пяти измерений с тем, чтобы объяснить, почему оно не проявляет себя физически» [113, с. 347]. «Условие цилиндричности не является естественным даже формально» [113, с. 367].

3. «Не удается физически истолковать компоненту G_{55} » [113, с. 367].

4. Пятнадцатое уравнение налагало довольно жесткое условие связи между 4-мерной скалярной кривизной и инвариантом электромагнитного поля. Чтобы от него избавиться, предлагалось получать уравнения поля вариационным способом из лагранжиана — 5-мерной скалярной кривизны, в котором налагалось условие $G_{55} = \text{Const}$ до проведения вариационной процедуры. В итоге теория строилась на основе только 14 уравнений из 15.

5. Известно, что самого Эйнштейна не удовлетворяло до конца искусственное введение в правую часть его уравнений негеометрической величины — тензора энергии-импульса материи $T_{\mu\nu}$ (или Q_{AB} в 5-мерии). По его мнению, это нарушало стройность и целостность геометрического подхода. Поэтому он везде, где это было возможно, избегал употребления $T_{\mu\nu}$ внешней материи. Так же он относился и к правой части второй пары уравнений Максвелла. В связи с этим он писал, что уравнения субубо геометрической 5-мерной теории (без вклада Q_{AB}) «...не допускают отличных от нуля плотностей электрического заряда и тока» [113, с. 387]. «Последнее из уравнений Максвелла (в 5-мерной теории. — Ю. С. В.), выражающее равенство нулю дивергенции ковариантной плотности электрического поля, по-видимому, вообще исключает существование плотности заряда и, стало быть, электрически заряженных частиц» [113, с. 487].

6. Констатировалось, что в теории получено лишь формальное единство общей теории относительности и электродинамики Максвелла. Эйнштейн писал: «Цель Калуцы несомненно заключалась в том, чтобы прийти к новому физическому взгляду на гравитацию и электричество путем введения единой структуры пространства. Однако эта цель не была достигнута» [113, с. 497]. В частности, неоднократно отмечалось, что теория не дала каких-либо новых экспериментальных предсказаний, которые можно было бы имеющимися средствами подтвердить или опровергнуть.

7. Одновременно с работами 20—30-х годов по поиску единых теорий поля интенсивно развивалась квантовая теория. Ощущалась естественная потребность перебросить мостики между этими двумя направлениями исследований. Так, Эйнштейн писал: «...теория (5-мерная. — Ю. С. В.) приводит единым путем к уравнениям гравитационного и электромагнитного полей. Однако она ничего не дает для понимания природы корпускул, как и для понимания установленных в квантовой механике результатов» [113, с. 386].

8. Как уже отмечалось, в то время имелись альтернативные варианты объединения гравитации и электромагнетизма и не было ясно, какую из них следует предпочесть. Для последующего изложения примечательно, что Эйнштейн выделял две из них: «До сих пор были сделаны две довольно простые и естественные попытки связать гравитацию и электромагнетизм с помощью единой теории поля: одна — Вейлем, другая — Калуцей» [114, с. 492].

Как видно, в большинстве своем это довольно веские возражения. Заметим также, что различные варианты развития идей Калуцы порождали и новые недостатки. Впоследствии к ним добавились и иные, в частности, были открыты другие виды взаимодействий. Встал вопрос о построении единой теории, учитывающей слабые и сильные взаимодействия. К недостаткам 5-мерия в дальнейшем будем возвращаться еще не раз.

§ 2.4. Конформное преобразование и условие квазицилиндричности по x^5

Во многих более поздних вариантах 5-мерной теории также производилось отождествление геометрических величин с физическими сразу после процедуры 1+4-расщепления. Однако можно построить более богатую теорию, если учесть, что до отождествления можно сделать конформное преобразование от исходной 5-метрики $\overset{0}{G}_{AB}$ к новой:

$$\overset{0}{G}_{AB} = \chi^2 G_{AB} \rightarrow \overset{0}{G}{}^{AB} = \chi^{-2} G^{AB}; \quad \sqrt{\overset{0}{G}} = \chi^5 \sqrt{G}, \quad (2.4.1)$$

где χ — некоторая скалярная функция от всех пяти координат.

Заметим, что конформное преобразование можно производить как на 5-мерном уровне, до процедуры 1+4-расщепления, так и после расщепления. Первоначальное конформное преобразование, а затем 1+4-расщепление технически проще, но при записи конформно выделенной части нужны понятия 1+4-расщепления, поэтому было начато с последнего. Итак, пусть конформное преобразование сделано на 5-мерном уровне. Используя общие формулы конформного преобразования (1.4.4) и (1.5.1), имеем плотность скалярной кривизны

$$-\frac{1}{2\kappa} \sqrt{\overset{0}{G}} \overset{0}{5}R = -\frac{\sqrt{-g} \lambda_5}{2\kappa} \chi^3 \left[\overset{0}{5}R - 4G^{AB} \left(2 \frac{\nabla_A \nabla_B \chi}{\chi} + \frac{\chi_{,A} \chi_{,B}}{\chi^2} \right) \right], \quad (2.4.2)$$

где $\overset{0}{g}_{\mu\nu} = \chi^2 g_{\mu\nu}$ и $\overset{0}{\lambda}_A = \chi \lambda_A$. В конформно выделенной части произведем 1+4-расщепление и выделим 4-мерный дивергентный член согласно общей формуле

$$\sqrt{-g} \Lambda_\alpha B^\alpha = -\sqrt{-g} B^\alpha \nabla_\alpha A + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g} A B^\alpha), \quad (2.4.3)$$

где A и B^α — некоторые функции координат. Тогда из (2.4.2) получаем плотность геометрического лагранжиана в виде

$$-\frac{2\sqrt{-g} \lambda_5 \chi}{\kappa} \left[\frac{\chi^2}{4} \overset{0}{5}R + 3g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha^+ \chi) \partial_\beta^+ \chi + 2\chi \partial_5^+ \chi + (\partial_5^+ \chi)^2 \right] + \text{(дивергентный член)}. \quad (2.4.4)$$

Далее произведем существенное сужение 5-мерной теории — используем условие квазицилиндричности по 5-й координате. Оно состоит в том, что вся зависимость от пятой координаты допускается лишь в конформном факторе χ , тогда как 5-метрика G_{AB} , полученная после конформного преобразования, не зависит от x^5 . Дальнейшее 1+4-расщепление тогда существенно упрощается. Все слагаемые в компонентах тензора кривизны, содержащие $\overset{0}{D}_{\alpha\beta} \sim \partial g_{\alpha\beta} / \partial x^5$ и части из $\overset{0}{\Phi}_\mu$, включающие $\overset{0}{\partial} \lambda_\mu / \partial x^5$, автоматически учитываются лишь в конформно выделенной части. Монадный оператор ∂_5^+ (см. (2.2.14)) при действии на геометрические величины из метрики G_{AB} превращается в оператор частного дифференцирования. Кл. и 4-связности (2.2.15) превращаются в обычные 4-мерные символы Кристоффеля. В итоге 5-мерная скалярная кривизна в (2.2.16) записывается в 1+4-расщепленном виде следующим образом:

$$\overset{0}{5}R = \overset{4}{R} + \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - 2(\Phi_\alpha \Phi^\alpha + \nabla_\alpha \Phi^\alpha), \quad (2.4.5)$$

где $\Phi_\alpha = \frac{1}{\lambda_5} \frac{\partial \lambda_5}{\partial x^\alpha}$, ∇_α — оператор обычного 4-мерного ковариантного дифференцирования. 4-мерный тензор кривизны

(2.2.18) совпадает с известным в общей теории относительности выражением (1.1.6).

Для сохранения условия квазицилиндричности необходимо сузить выделенный класс преобразований 5-й координаты (2.2.5), как и в теории Калуцы, до (2.3.2). Это сужение класса преобразований вызывает расширение множества инвариантных при таких преобразованиях величин. Назовем величины, инвариантные при преобразованиях (2.3.2) и ковариантные относительно (2.2.6), специально калибровочно инвариантными (с. кл. и). В частности, с. кл. и. становятся компоненты $\overset{0}{G}_{55}$, а следовательно, и потенциал скалярного поля $\overset{0}{\lambda}_5$. Если теперь считать физически значимыми с. кл. и. величины, то таковых становится много. Так, ими являются все величины, получаемые из кл. и. умножением на произвольную функцию $\mathcal{F}(\lambda_5)$. В связи с этим возникает вопрос: какие конструкции из геометрических характеристик должны быть сопоставлены физическим величинам, главным образом 4-мерному метрическому тензору $g_{\mu\nu}$ и тензору электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$?

Для ответа на этот вопрос заметим, что введение функции $\mathcal{F}(\lambda_5)$ перед кл. и. 4-метрикой также означает конформное преобразование. Следовательно, имеем уже два преобразования с конформными факторами $\mathcal{F}(\lambda_5)$ и χ . Вряд ли имеет смысл рассматривать их как разные. Не лишаясь общности, можно положить, что $\mathcal{F}(\lambda_5)$ уже включено в χ , тогда 4-метрикой следует считать величину

$$g_{\mu\nu} = \frac{\overset{0}{g}_{\mu\nu}}{\chi^2} = G_{\mu\nu} - \frac{G_{5\mu}G_{5\nu}}{G_{55}}. \quad (2.4.6)$$

Электромагнитные величины можно определить из двух условий. Во-первых, потребуем, чтобы преобразования векторного потенциала A_α при (2.3.2) совпадали с обычными калибровочными преобразованиями (1.3.1). Во-вторых, потребуем, чтобы в 4-мерных уравнениях Эйнштейна перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля стоял стандартный размерный коэффициент. Эти условия приводят к отождествлению

$$\overset{0}{\lambda}_\mu = \frac{2\sqrt{k}}{c^2} \overset{0}{\lambda}_5 A_\mu \rightarrow A_\mu = \frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{G_{5\mu}}{2\sqrt{-G_{55}}} \frac{\chi}{\lambda_5}; \quad (2.4.7)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{k}}{c^2} \overset{0}{\lambda}_5 F_{\mu\nu}, \text{ где } F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}.$$

Видно, что при преобразованиях (2.3.2), как и требовалось,

$$\overset{0}{\lambda}'_\mu = \overset{0}{\lambda}_\mu - \overset{0}{\lambda}_5 \frac{\partial f}{\partial x^\mu}; \quad A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x^\mu},$$

где $\tilde{f} = -\frac{c^2}{2\sqrt{k}} f$. В обычной теории электромагнитный векторный потенциал конформно инвариантен. Кроме того, A_μ не должно зависеть от x^5 . Выражение (2.4.7) подсказывает, что следует выбрать

$$\chi = \overset{0}{\lambda}_5, \quad (2.4.8)$$

так как естественно полагать, что как 4-мерный метрический тензор, так и A_μ получаются одним и тем же конформным преобразованием из 5-метрики. Если это единообразие распространить и на пятнадцатую компоненту G_{55} , то удобно полагать, что

$$\overset{0}{G}_{55} = -\overset{0}{\lambda}_5^2 = -\chi^2 \rightarrow G_{55} = -1. \quad (2.4.9)$$

В этом случае из формул (2.4.6), (2.4.7) и (2.4.9) имеем окончательно

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{\overset{0}{G}_{55}} \left(\frac{\overset{0}{G}_{5\mu}\overset{0}{G}_{5\nu}}{\overset{0}{G}_{55}} - \overset{0}{G}_{\mu\nu} \right); \quad A_\mu = -\frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{\overset{0}{G}_{5\mu}}{\overset{0}{G}_{55}} = \frac{c^2}{2\sqrt{k}} G_{5\mu}. \quad (2.4.10)$$

Вследствие (2.4.9) напряженность скалярного поля Φ_α в (2.4.5) обращается в нуль.

В результате конформного преобразования и физического отождествления (2.4.10) пятнадцать 5-мерных «уравнений Эйнштейна» (2.2.20) — (2.2.22) соответственно принимают вид

$$\begin{aligned} {}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^4R + \tilde{\Lambda} \overset{0}{\lambda}_5^2 g_{\mu\nu} = & -\frac{2k}{c^4} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) + \\ & + \kappa T_{\mu\nu} + \frac{3}{\lambda_5} (\nabla_\mu^+ \nabla_\nu^+ \lambda_5 - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha^+ \nabla_\beta^+ \lambda_5) - \\ & - \frac{6}{\lambda_5^2} \nabla_\mu^+ \lambda_5 \nabla_\nu^+ \lambda_5 + 3g_{\mu\nu} \frac{\overset{0}{\lambda}_{5,5,5}}{\lambda_5}; \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

$$\begin{aligned} -\nabla_\nu F^{\nu\mu} - 3F^{\nu\mu} \frac{\nabla_\nu^+ \lambda_5}{\lambda_5} = & \frac{3c^2}{\sqrt{k}} g^{\mu\nu} \left(\frac{\nabla_\nu^+ \lambda_{5,5}}{\lambda_5} - 2 \frac{\overset{0}{\lambda}_{5,5} \nabla_\nu^+ \lambda_5}{\lambda_5} \right) + \\ & + \frac{c^2}{\sqrt{k}} \kappa Q_A^0 \lambda_{5,5}^3; \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

$$g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha}^{+} \nabla_{\beta}^{+} \lambda_5^0 - \frac{1}{6} {}^4R \lambda_5^0 - \left[\frac{k}{2c^4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{2\lambda_{5,5}^0}{\lambda_5^0} \right] \lambda_5^0 + \frac{1}{3} \tilde{\Lambda} \lambda_5^0 =$$

$$= -\frac{\kappa}{3} \lambda_5^0 Q_{AB} \lambda^A \lambda^B, \quad (2.4.13)$$

где $T_{\mu\nu} = Q_{AB} g_{\mu}^A g_{\nu}^B$ — 4-мерный тензор энергии-импульса внешней материи. Эти уравнения чрезвычайно похожи на стандартные уравнения соответственно Эйнштейна (1.1.5), Максвелла (вторая пара) (1.3.4) и уравнение Клейна—Фока (1.5.4) для скалярного поля λ_5 . Поле λ_5 при этом везде входит в правую часть как дополнительный вид материи (геометрического происхождения).

§ 2.5. Электрический заряд и замкнутость мира по пятой координате

Возникают естественные вопросы. Какой физический смысл имеет поле λ_5 ? Какой может быть зависимость λ_5 от координаты x^5 ? Чтобы ответить на них, сначала рассмотрим негеометрические заряженные поля в такой теории. Обратим внимание на поразительное сходство операторов дифференцирования в стандартной электродинамике (1.3.9) и операторов (2.2.14) в 5-мерной теории. Если в последних использовать отождествление согласно (2.4.10), то имеем

$$\partial_{\mu}^{+} \Psi = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{2\sqrt{k}}{c^2} A_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^5} \right) \Psi \leftrightarrow +\partial_{\mu} \Psi = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{ie}{\hbar c} A_{\mu} \right) \Psi, \quad (2.5.1)$$

где Ψ — волновая функция заряженного негеометрического поля. Операторы будут совпадать, если предположить зависимость Ψ от координаты x^5

$$\Psi = \psi(x^{\mu}) \exp\left(\frac{iec}{2\sqrt{k}\hbar} x^5\right), \quad (2.5.2)$$

где $\psi(x^{\mu})$ — часть полной функции, зависящая только от четырех пространственно-временных координат. Можно считать, что именно $\psi(x^{\mu})$ только и используется в стандартной теории. Легко видеть, что при преобразованиях 5-й координаты (2.3.2) автоматически получаем аналог калибровочных преобразований Ψ в стандартной электродинамике

$$\Psi \rightarrow \Psi \exp\left(\frac{iec}{2\sqrt{k}\hbar} f(x^{\mu})\right).$$

Из (2.5.2) следует, что в такой 5-мерной теории электрический заряд с точностью до размерной константы имеет смысл пятой компоненты 5-импульса $p_5 = ec/2\sqrt{k}$. Если в экспоненте (2.5.2) ввести целочисленный коэффициент ϵ_5 , фактически определяющий номер используемой гармоники в разложении Ψ в ряд Фурье по x^5 , то ϵ_5 определяет значение электрического заряда в единицах e :

$$Q = \epsilon_5. \quad (2.5.3)$$

Сопоставим 4-мерную векторную часть уравнений 5-геодезических (2.2.25) после конформного преобразования (2.4.1) и физического отождествления (2.4.10):

$$\frac{du^{\mu}}{ds} = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} u^{\alpha} u^{\beta} - \frac{2\sqrt{k}}{c^2} \frac{d\lambda}{ds} F^{\mu}_{\alpha} u^{\alpha} +$$

$$+ \left[1 - \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 \right] (\Phi^{\mu} - u^{\mu} \Phi_{\alpha} u^{\alpha}), \quad \text{где } u^{\alpha} = dx^{\alpha}/ds, \quad (2.5.4)$$

со стандартными уравнениями движения электрических зарядов в искривленном пространстве-времени (1.3.5). Первая строка (2.5.4) совпадает с (1.3.5), если положить

$$\frac{d\lambda}{ds} = -\frac{q}{2m\sqrt{k}}, \quad (2.5.5)$$

т. е. кл. и 5-я компонента 5-скорости с точностью до константы имеет смысл отношения электрического заряда к массе пробного тела. Смысл второй строки будет рассмотрен позже. Пятое (скалярное) уравнение 5-геодезической (2.2.24) описывает возможную зависимость отношения q/m от координат (см. § 3.4).

Исходя из сказанного естественно положить, что возможная зависимость λ_5 от x^5 соответствует электрической заряженности скалярного поля. Более того, разумно положить, что эта зависимость также имеет экспоненциальный характер. Подобную циклическую зависимость от x^5 можно трактовать в духе идеи Эйнштейна и Бергмана 30-х годов [114] о возможной замкнутости мира по 5-й координате.

Однако здесь следует вспомнить, что метрика (геометрия) имеет универсальный характер, тогда как в экспоненте заряд может быть как положительным, так и отрицательным. Кроме того, нельзя исключить возможность $Q=0$. Как совместить все это в конформном факторе? Оказывается, это можно сделать, но придется несколько расширить наше понимание геометрии. В этом и следующем параграфе изложим совокупность идей и процедур, связанных с таким обобщением. Забегая вперед, отметим, что в гл. 4, 5 оно будет самым непосредственным образом использовано для построения теории гравитационно-слабых взаимодействий.

Постулируем следующую зависимость χ от x^5 :

$$\chi = \lambda_5 = 1 + \Phi + b\varphi e^{-i\alpha x^5} - b\varphi^* e^{i\alpha x^5}, \quad (2.5.6)$$

где Φ — вещественное, а φ — комплексное скалярные поля зависящие только от четырех пространственно-временных координат; b — малая вещественная константа, определенная ниже; α — константа, которую в согласии с (2.5.1) и (2.5.2) следует положить

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} = \frac{ec}{2\sqrt{k}\hbar} \simeq 4 \cdot 10^{33} \text{ см}^{-1} \rightarrow e = \frac{2\sqrt{k}}{c^2} (\hbar c) \alpha, \quad (2.5.7)$$

т. е. период циклической зависимости χ от x^5 чрезвычайно мал и лишь множителем — корнем квадратным из постоянной тонкой структуры $\sqrt{e^2/\hbar c}$ — отличается от планковской длины

$$l_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{e^2}} \simeq 1,6 \cdot 10^{-33} \text{ см}. \quad (2.5.8)$$

Величина χ комплексная. Скалярное поле Φ представляет собой вещественную добавку к единице в конформном факторе. В этой главе будем полагать $\Phi=0$. Комплексное скалярное поле φ характеризует чисто мнимую часть χ ; сосредоточим внимание именно на нем. Введение мнимой части в конформный фактор представляет собой принципиальное обобщение теории — фактически переход к комплексной 5-метрике, однако это — специфическое, узкое обобщение, когда мнимая часть сохраняется только в конформном факторе. Мнимая часть обязана выбору знака минус в (2.5.6). Этот знак определяет положительность вклада скалярного поля λ_5 в тензор энергии-импульса в уравнениях Эйнштейна (2.4.11). В случае выбора знака

плюс вклад λ_5 был бы отрицательным.

Подставим (2.5.6) в геометрическое «действие»

$$S = -\frac{1}{2\kappa T} \int_0^T \int V_5^0 G^5 R dx^5 d^4x \equiv \int \mathcal{L} d^4x, \quad (2.5.9)$$

где согласно формулам (2.4.4), (2.4.5) и (2.4.10)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa T} \int_0^T \left[\chi^2 \left({}^4R + \frac{k}{c^4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) + 12g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha^+ \chi) \partial_\beta^+ \chi + \right. \\ & \left. + 8\chi \partial_5^{+2} \chi + 4(\partial_5^+ \chi)^2 \right] dx^5. \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Вслед за Эйнштейном и Бергманом будем полагать, что зависимость от пятой координаты в известных уравнениях не проявляется из-за того, что период T очень мал по сравнению

с теми масштабами, в которых используются стандартные уравнения, т. е. их можно считать усредненными по периоду T зависимости от x^5 . Проинтегрируем (2.5.10) по x^5 в пределах от 0 до $T=2\pi/\alpha$. При этом учтем, что

$$\int_0^T \exp(in\alpha x^5) dx^5 = 0 \text{ при } n = -2, -1, 1, 2, \dots,$$

т. е. отличный от нуля результат дают лишь слагаемые, где экспоненты с x^5 взаимно компенсируют друг друга. Это означает, что слагаемые, однородные по φ или φ^* , исчезают и остаются либо слагаемые, не содержащие φ , либо содержащие их в комбинации $\varphi^*\varphi$. В итоге получаем плотность геометрического лагранжиана

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \left\{ (1 - 6b^2\varphi^*\varphi) \left({}^4R + \frac{k}{c^4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) - \right. \\ & \left. - 24b^2 [g^{\mu\nu} (\partial_\mu^+ \varphi^*) \partial_\nu^+ \varphi - \alpha^2 \varphi^* \varphi] \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

$$\text{где } \partial_\nu^+ \varphi^* = \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + i \frac{2\sqrt{k}}{c^2} \alpha A_\nu \right) \varphi^*; \quad \partial_\nu^+ \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - i \frac{2\sqrt{k}}{c^2} \alpha A_\nu \right) \varphi$$

— стандартные операторы дифференцирования заряженного скалярного поля в электродинамике. Выражение (2.5.11) во многих отношениях соответствует стандартной 4-мерной плотности лагранжиана взаимодействующих гравитационного, электромагнитного и электрически заряженного скалярного полей.

§ 2.6. Конформно выделенное заряженное скалярное поле

Отвлечемся на время от внешней (негеометризованной) материи и проанализируем следствия, даваемые геометрической плотностью лагранжиана (2.5.11). Это позволит обсудить одну из гипотез геометризации материи.

Варируя (2.5.11) по A_ν , приходим к аналогу второй пары уравнений Максвелла (1.3.4), которое после отождествления константы

$$b^2 = \frac{\kappa}{24} \frac{\hbar^2}{m}, \quad (2.6.1)$$

где m — масса покоя заряженного поля φ , приводится к виду

$$\nabla_\nu \left\{ \left[1 - \frac{\kappa \hbar^2}{4m} \varphi^* \varphi \right] F^{\mu\nu} \right\} = \frac{4\pi i}{c} \frac{e\hbar}{2m} g^{\mu\nu} (\varphi^* \partial_\nu^+ \varphi - \varphi \partial_\nu^+ \varphi^*). \quad (2.6.2)$$

Легко видеть, что квадратную скобку слева можно положить равной единице, тогда это уравнение в точности совпадает со стандартным 4-мерным уравнением Максвелла. Совпадение со стандартной теорией имеет место и в классическом пределе. Чтобы убедиться в этом, во-первых, следует положить

$$\varphi = \sqrt{\rho} \exp(iS/\hbar), \quad (2.6.3)$$

где S — классическое действие, ρ — плотность вероятности нахождения частицы, и, во-вторых, устремить \hbar к нулю. Таким образом, из 5-мерной теории получаются уравнения Максвелла с электрическим током геометрического происхождения, чего не было в теории Калуцы и в последующих вариантах 5-мерной теории.

4-мерные уравнения Эйнштейна получаются варьированием (2.5.1) по $g^{\mu\nu}$. После стандартных вычислений, учитывая (2.6.1) находим

$$\begin{aligned} {}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^4R = & -\frac{2k}{c^4} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) + \\ & + \frac{\kappa \hbar^2}{2m \left(1 - \frac{\kappa \hbar^2}{4m} \varphi^* \varphi \right)} \left\{ \left[(\partial_{\mu}^{\dagger} \varphi^*) \partial_{\nu}^{\dagger} \varphi + (\partial_{\nu}^{\dagger} \varphi^*) \partial_{\mu}^{\dagger} \varphi - \right. \right. \\ & \left. \left. - g_{\mu\nu} \left(g^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha}^{\dagger} \varphi^*) \partial_{\beta}^{\dagger} \varphi - \frac{c^2 m^2}{\hbar^2} \varphi^* \varphi \right) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\kappa \hbar^2}{4m} \left[\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} (\varphi^* \varphi) - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} (\varphi^* \varphi) \right] \right\}. \quad (2.6.4) \end{aligned}$$

В классическом пределе при подстановке (2.6.3) эти уравнения переходят в стандартные уравнения Эйнштейна с обычными тензорами энергии-импульса электромагнитного поля и пылевой материи. Напомним критическое замечание Эйнштейна по отношению к 5-мерной теории Калуцы и вообще его неудовлетворенность феноменологическим характером правой части своих уравнений, стремление получить ее из геометрических соображений. Полученный здесь результат можно рассмотреть как в некотором роде реализацию намерений Эйнштейна. Уравнение для заряженного скалярного поля φ получается варьированием (2.5.11) по φ^* (и сопряженное — варьирование по φ):

$$g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha}^{\dagger} \nabla_{\beta}^{\dagger} \varphi - \frac{1}{4} \left({}^4R + \frac{\hbar}{c^4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \varphi + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \varphi = 0. \quad (2.6.5)$$

Это уравнение типа Клейна—Фока для комплексного скалярного поля (с отличной от нуля массой покоя), взаимодействующего с электромагнитным и гравитационным полями. Его особенностью является наличие коэффициента $1/4$ перед скалярной кривизной и инвариант $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$.

Заметим, что 14 уравнений (2.6.2) и (2.6.4) можно получить непосредственно из ранее записанных 5-мерных «уравнений Эйнштейна» соответственно из (2.4.11) и (2.4.12). Для этого нужно в них подставить (2.5.6) и произвести интегрирование по x^5 . Уравнение (2.6.5) в некотором смысле соответствует пятнадцатому уравнению (2.4.13) и может быть получено только вариационным методом.

Казалось бы, что программа Эйнштейна по геометризации правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна близка к осуществлению. Однако подобный вывод делать рано. Одним из существенных препятствий является тот факт, что масса m , входящая в уравнения (2.6.2), (2.6.4) и (2.6.5), жестко связана с электрическим зарядом частицы e и ньютоновской гравитационной постоянной k :

$$m = e/2\sqrt{k}. \quad (2.6.6)$$

Для заряда электрона $m \sim 10^{-6}$ г — это чрезвычайно большое значение по сравнению с массами покоя известных элементарных частиц. Оно лишь на порядок отличается от планковской массы m_0 :

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}} m_0, \quad \text{где } m_0 = \frac{\hbar}{l_0 c} = \sqrt{\frac{\hbar c}{k}} \simeq 2 \cdot 10^{-5} \text{ г}. \quad (2.6.7)$$

Конечно, можно было бы сказать много слов о том, что трудно было ожидать от 5-мерной теории получения спектра масс элементарных частиц, и о том, что это обстоятельство предпочтительнее того, что в стандартной теории масса покоя электромагнитного происхождения имеет бесконечно большое значение, и т. д. Однако все это не снимает задачи приведения массы к наблюдаемым значениям.

Один из путей ее решения основан на использовании космологической «постоянной» $\tilde{\Lambda}$ в (2.1.1). Заметим, что она входит

в произведении с $\sqrt{{}^5G} = \chi^5 \sqrt{{}^5G}$. После усреднения χ^5 по периоду x^5 останутся слагаемые нулевого, второго ($\sim b^2 \varphi^* \varphi$) и четвертого ($\sim b^4 (\varphi^* \varphi)^2$) порядков по φ . Из-за малости b достаточно ограничиться нулевым и вторым порядками. Необходимо удовлетворить двум условиям. Во-первых, нужно перенормировать почти планковское значение массы скалярной частицы до достаточно малого значения. Во-вторых, эффективное значение космологической постоянной должно быть чрезвычайно малым (видимо, нулем). Для выполнения их достаточно положить

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda(1 - \chi). \quad (2.6.8)$$

В этом случае из (2.5.11) с точностью до величин второй степени по b имеем плотность лагранжиана поля φ

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{12\sqrt{-g}}{\kappa} b^2 \left[g^{\mu\nu} (\partial_\mu^+ \varphi^*) \partial_\nu^+ \varphi - \left(\alpha^2 - \frac{5}{12} \Lambda \right) \varphi^* \varphi \right]. \quad (2.6.9)$$

т. е. масса покоя принимает перенормированное значение

$$m_1 = \sqrt{\frac{e^2}{4k} - \frac{5}{12} \frac{\Lambda \hbar^2}{c^2}}. \quad (2.6.10)$$

Результирующее значение космологической постоянной равно нулю.

Далее возникает следующий вопрос. Пусть выбором Λ массы m_1 в (2.6.10) можно сделать равной массе покоя любой наблюдаемой частицы. Спрашивается: какой именно? Ясно, что вклад $e^2/4k$ имеет универсальное значение, а космологическая постоянная одна, следовательно, использованный прием можно применить только один раз. Какая из известных частиц может претендовать на подобную выделенную роль? Оставаясь в рамках лишь программы объединения гравитационного и электромагнитного взаимодействий, ответить на этот вопрос не представляется возможным, а следовательно, и повисает в воздухе реализация таким путем программы Эйнштейна геометризации правых частей уравнений в полном объеме. Забегая вперед укажем, что в 6-мерной теории, объединяющей гравитационно-электромагнитное и слабое взаимодействия, не представляется труда назвать частицу, соответствующую полю φ (с поправками на 6-мерие) — это хиггсовский скалярный бозон.

Другим серьезным возражением принятию программы Эйнштейна является факт, что основные виды материи описываются спинорными волновыми функциями, для которых не имеет места в сугубо геометрическом подходе. Спинорная материя может быть введена в теорию только внешним образом. С этими тесно связаны и существенные идеологические соображения. Дело в том, что современная физическая картина мира опирается на три класса основных физических категорий: пространственно-временные понятия, поля — переносчики взаимодействий и частицы (на квантовом уровне это, по-видимому, фермионы). В общепринятом подходе все эти три класса категорий самостоятельны и несводимы друг к другу. Назовем этот подход первой концепцией. В литературе довольно широко представлены иные подходы, в которых делаются попытки положить в основу теории лишь два из трех названных классов физических категорий. Назовем второй концепцией подход Клиффорда—Уилера, когда в качестве основных классов категорий выступают пространственно-временные понятия и поля. Третий класс категорий — частицы — мыслится как возникающий из первых двух. Судя по всему, программа Эйнштейна должна быть отнесена именно ко второй концепции. Кроме этой следу-

ет назвать еще третью концепцию Маха—Фейнмана, которая реализована в так называемой теории прямого межчастичного взаимодействия [29] (электромагнитного, гравитационного, скалярного). В этом подходе основными категориями считаются понятия пространства-времени и частиц. Поля переносчиков взаимодействий выступают как нечто производное от первых. Можно указать и четвертую концепцию [29], основанную на оставшейся паре категорий. Исходя из сказанного, видимо, разумнее всего полагать, что программа Эйнштейна может претендовать лишь на геометризацию всех известных полей переносчиков взаимодействий: гравитационных, электромагнитных, слабых (векторных и скалярных бозонов) и сильных (глюонов). Это опять свидетельствует в пользу интерпретации полей типа φ как некоторых таких скалярных переносчиков взаимодействий.

§ 2.7. Кручение в 5-мерной теории

До сих пор рассматривалось 5-мерное риманово пространство. Обобщим геометрию на случай отличного от нуля кручения. Тогда тензор кручения войдет как в бозонную часть плотности лагранжиана, так и в фермионную — в ковариантную производную от спинора.

Вклад кручения в бозонную часть лагранжиана получается из скалярной 5-мерной кривизны ${}^0_5\tilde{R}$:

$${}^0_5\tilde{R} = {}^0_5R - {}^0_5S_{ABC} {}^0_5S^{ABC} \rightarrow L_S = \frac{\sqrt{{}^0_5G}}{2\kappa} {}^0_5S_{ABC} {}^0_5S^{ABC}. \quad (2.7.1)$$

Учитывая, что независимыми от метрики являются компоненты кручения ${}^0_5S_{BC}^A$, имеем

$$L_S = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \chi^3 {}^5S_{ABC} {}^5S^{ABC}. \quad (2.7.2)$$

Напомним, что здесь и в дальнейшем кручение полагается антисимметричным по всем индексам, т. е. характеризуется 10 компонентами. Представим ${}^5S_{ABC}$ через два 4-мерных тензора:

$$S(5)_{\alpha\beta} = {}^5S_{ABC} \lambda^A g^B g^C, \quad \tilde{S}_{\alpha\beta\gamma} = {}^5S_{ABC} g^A g^B g^C. \quad (2.7.3)$$

Антисимметричному по всем индексам 4-тензору $\tilde{S}_{\alpha\beta\gamma}$ можно сопоставить псевдовектор S^ν согласно (1.6.6), тогда (2.7.2) представляется в виде

$$L_S = -\frac{3\sqrt{-g}}{2\kappa} \chi^3 (S(5)_{\alpha\beta} S(5)^{\alpha\beta} + 2S_\alpha S^\alpha), \quad (2.7.4)$$

где учтено (1.6.7).

Два торсионных тензорных поля (2.7.3), вообще говоря, не зависят друг от друга и могут быть использованы для решения различных физических задач. Так, с помощью псевдовекторного поля S_α , как и в § 1.9, можно описать псевдовекторный нейтральный добавок в уравнении Дирака. $S(5)_{\alpha\beta}$ также может рассматриваться как антисимметричное тензорное поле без динамической части в лагранжиане.

Но можно поступить иначе — вслед за В. И. Родичевым представить $S(5)_{\alpha\beta}$ через векторный потенциал

$$S(5)_{\alpha\beta} = C \left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \right), \quad (2.7.5)$$

где C — некоторая размерная постоянная, A_α — векторный потенциал, трактованный в работе [83] как потенциал электромагнитного поля. В этом случае в (2.7.4) имеется динамическая часть поля A_α и отсутствует для него массовое слагаемое. Интерпретируя таким образом кручение, В. И. Родичев отказался от использования векторного поля λ_x метрического происхождения в противоположность теории Калуцы. В его работе рассматривалось плоское (в метрическом смысле) 5-мерное пространство-время. В этом можно усмотреть симметрию между торсионным и метрическим подходами к описанию векторного поля. Однако ничто не мешает одновременно рассмотреть метрическое и торсионное векторные поля. Тогда в 5-мерной теории будут присутствовать два векторных поля. Их больше чем необходимо для единой теории гравитации и электромагнетизма, но недостаточно для описания модели гравитационных и электрослабых взаимодействий. Как будет показано в следующей главе, в 6-мерной теории подобных полей уже больше, что и позволяет построить модель грави-электро-слабых взаимодействий.

§ 2.8. Фермионная часть плотности лагранжиана

Приступая к рассмотрению фермионной части плотности лагранжиана, заметим, что этот материал позволит вскрыть новые как сильные, так и слабые стороны 5-мерной теории. Последнее будем трактовать как доводы в пользу дальнейшего увеличения размерности.

Для описания фермионов за исходное выражение возьмем

$$L_F = \sqrt{{}^0_5 G} \frac{\hbar c}{2} \left(i \bar{\Psi} \gamma^A \nabla_A \Psi - \frac{m_0 c}{\hbar} \bar{\Psi} \beta \Psi \right) + \left(\text{эрмитово-сопряж. выражение} \right), \quad (2.8.1)$$

где m_0 — затравочная масса покоя 4-компонентного комплексного спинорного поля Ψ (вопрос о наблюдаемых значениях масс покоя будет обсужден ниже); β — некоторая постоянная

матрица, $\nabla_A \Psi$ — 5-мерная ковариантная производная от спинора, имеющая вид

$$\nabla_A \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x^A} - \frac{1}{4} \Delta_A (BC) \gamma^B \gamma^C \Psi - \frac{1}{4} S_{ABC} \gamma^B \gamma^C \Psi. \quad (2.8.2)$$

Значок «0» по-прежнему означает, что выражения взяты в исходной метрике G_{AB} . 5-Мерные коэффициенты вращения Риччи $\Delta_A (BC)$ обычным образом выражаются через компоненты пентады $G(B)_A$, которые удовлетворяют соотношениям

$$G(B)_A G(B)_C = G_{AC}; \quad G_A(B) G(C)^A = G(BC); \quad G(5)_A = \lambda_A. \quad (2.8.3)$$

Для 4-рядных матриц γ_A имеем

$$\gamma_A \gamma_B + \gamma_B \gamma_A = 2G_{AB} I_4. \quad (2.8.4)$$

Зависящие от координат матрицы γ_A связаны с постоянными матрицами $\gamma(B)$ — образующими алгебры Клиффорда $C(1, 4)$ — соотношением

$$\gamma_A = G(B)_A \gamma(B). \quad (2.8.5)$$

Матрицы $\gamma(v)$ выберем в обычно используемом представлении (см. приложение)

$$\gamma(5) \equiv \gamma_5 = i \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведем в (2.8.1) описанные выше процедуры: сначала конформное преобразование, затем 1+4-расщепление и усреднение по периоду зависимости от x^5 .

Конформное преобразование. В согласии с формулами (2.4.1) и (2.8.4) имеем

$$G(B)_A = \chi G(B)_A; \quad \gamma_A = \chi \gamma_A. \quad (2.8.6)$$

Используя эти формулы и (1.5.1), для коэффициентов вращения Риччи можно записать

$$\Delta_A (BC) = \Delta_A (BC) + \frac{\chi, D}{\chi} [G(C)_A G(B)^D - G(B)_A G(C)^D]. \quad (2.8.7)$$

Для записи ковариантной производной (2.8.2) понадобится формула

$$[G(C)_A G(B)^D - G(B)_A G(C)^D] \gamma^A \gamma(B) \gamma(C) = -8\gamma^D. \quad (2.8.8)$$

1+4-расщепление. В дополнение к приведенным ранее формулам запишем соотношения, специфические для фермионной части. Так, имеем оператор

$$\gamma^A \frac{\partial}{\partial x^A} = \tilde{\gamma}^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \lambda_\mu \frac{\partial}{\partial x^5} \right) - \gamma_5 \frac{\partial}{\partial x^5}, \quad (2.8.1)$$

где использованы обозначения

$$\gamma_5 \equiv \gamma^A \lambda_A = \gamma^\mu \lambda_\mu + \gamma^5 \lambda_5; \quad \tilde{\gamma}^\mu = \gamma^A g_A^\mu \equiv \gamma^\mu.$$

Из 5-мерных коэффициентов вращения Риччи находим

$$\begin{aligned} G(\alpha)^A \Delta_A(\beta\nu) &= \Delta(\alpha, \beta\nu); \quad \lambda^A \Delta_A(\alpha\beta) = -{}^5F(\alpha\beta); \\ G(\alpha)^A \Delta_A(\beta 5) &= {}^5F(\alpha\beta); \quad \lambda^A \Delta_A(\beta 5) = 0, \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

где $\Delta(\alpha, \beta\nu)$ — 4-мерные коэффициенты вращения Риччи (1.4.10), ${}^5F_{\alpha\beta} = \partial\lambda_\beta/\partial x^\alpha - \partial\lambda_\alpha/\partial x^\beta$. Здесь пока не использована формула (2.4.7) отождествления ${}^5F_{\alpha\beta}$ через тензор напряженности электромагнитного поля. Это будет сделано позже. Выпишем также промежуточные формулы

$$\begin{aligned} \Delta_A(BC) \gamma^A \gamma(B) \gamma(C) &= \Delta(\alpha, \beta\nu) \gamma(\alpha) \gamma(\beta) \gamma(\nu) - 1/2 {}^5F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5; \\ S_{ABC} \gamma^A \gamma^B \gamma^C &= \tilde{S}_{\alpha\beta\nu} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu - 3S(5)_{\alpha\beta} \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\beta. \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

Усреднение по координате x^5 . Согласно изложенному в § 2 постулируем следующую зависимость Ψ от координаты x^5 :

$$\Psi = \psi(x^\mu) \exp(i\alpha x^5). \quad (2.8.1)$$

Кроме того, учтем вид зависимости χ от x^5 согласно (2.5.6). При интегрировании (2.8.1) по x^5 все члены с экспонентами исчезают. В результате получаем фермионную часть плотности лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \frac{i\hbar c}{2} \sqrt{-g} \left\{ (\bar{\Psi} \gamma^\alpha \partial_\alpha^+ \Psi - \partial_\alpha^+ \bar{\Psi} \gamma^\alpha \Psi) + \right. \\ &+ 2i \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \bar{\Psi} \beta \Psi - \alpha \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi \right) - \frac{1}{2} (\Delta_{\alpha\beta\nu} + \tilde{S}_{\alpha\beta\nu}) \bar{\Psi} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \Psi + \\ &+ \frac{1}{2} (3S(5)_{\alpha\beta} + {}^5F_{\alpha\beta}) \bar{\Psi} \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \Psi \left. \right\} + \\ &+ (\text{слагаемые, пропорциональные } b^2 \varphi^* \varphi), \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

где

$$\partial_\alpha^+ \Psi = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i\alpha \lambda_\alpha \right) \Psi; \quad \partial_\alpha^+ \bar{\Psi} = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - i\alpha \lambda_\alpha \right) \bar{\Psi}$$

в согласии с (2.5.1).

§ 2.9. Анализ описания фермионов в 5-мерной теории

Проанализируем несколько вариантов теории в зависимости от значения тензора кручения, пренебрегая вкладом скалярного поля.

1. Пусть $S_{ABC} = 0$, тогда для сопоставления со стандартной теорией следует использовать ранее введенные отождествления λ_α , ${}^5F_{\alpha\beta}$, α с известными электромагнитными величинами согласно (2.4.10) и (2.5.7). Варьируя (2.8.13) по $\bar{\Psi}$ стандартным образом, получаем уравнение Дирака в форме

$$\left\{ -i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{e}{\hbar c} A_\mu \gamma^\mu + \frac{i}{4} \Delta_{\mu\nu\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma - \right. \\ \left. - \frac{i\sqrt{k}}{4c^2} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 + \left(\frac{ec}{2\sqrt{k}\hbar} \gamma_5 + \beta \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \right\} \Psi = 0. \quad (2.9.1)$$

Оно обобщает ранее записанное уравнение (1.8.8). В круглых скобках записана массовая матрица.

Рассмотрим два частных случая: а) $\beta = 1$ и б) $\beta = -\gamma(5)$. В обоих случаях массовая матрица в (2.9.1) не является диагональной. Однако ее можно диагонализировать преобразованием спинора

$$\Psi = S\Psi' = \exp(\Phi\gamma(5))\Psi', \quad (2.9.2)$$

где Φ подбирается так, чтобы коэффициент перед недиагональной частью обратился в нуль [22].

а) При $\beta = 1$ массовая матрица приводится к диагональному виду при $\text{tg } 2\Phi_\alpha = -e/2\sqrt{k}m_\alpha$. После такого преобразования уравнение (2.9.1) записывается в форме

$$\left\{ -i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{e}{\hbar c} A_\mu \gamma^\mu + \frac{i}{4} \Delta_{\mu\nu\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma - \right. \\ \left. - \frac{i\sqrt{k}}{4c^2} F_{\mu\nu} \frac{m_0 + \gamma(5)}{m_0} \frac{e}{2\sqrt{k}} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma(5) + \frac{cm_1}{\hbar} \right\} \Psi_1 = 0. \quad (2.9.3)$$

Здесь итоговая масса

$$m_1 = \sqrt{\frac{e^2}{4k} + m_0^2} \quad (2.9.4)$$

слагается из двух частей: вклада от электрического заряда $e/2\sqrt{k}$ и затравочной массы m_0 . Ясно, что первый вклад чрезвычайно велик по сравнению с наблюдаемой массой электрона, поэтому для согласования (2.9.3) со стандартным уравнением Дирака для электрона необходимо положить затравочную массу мнимой и имеющей порядок $e/2\sqrt{k}$. Тогда происходит пере-

нормировка массы. Заметим, что аналогичная ситуация имеет место и при выборе значения и знака перед затравочным массовым членом в 5-мерном уравнении Клейна—Фока. Та проблема возникла при обсуждении массы покоя скалярного поля ϕ в § 2.6.

Кроме проблемы перенормировки массы покоя при описании спиноров в 5-мерной теории возникает еще одно принципиальное обстоятельство. Оно связано с тем, что в (2.9.3) появилось дополнительное к (1.8.8) слагаемое (сумма скаляра и псевдоскаляра), описывающее взаимодействие фермиона с электромагнитным полем через аномальный магнитный момент (АММ). Характерно, что при наблюдаемом значении массы m_1 АММ очень велик — порядка e/mc^2 — значительно больше экспериментально наблюдаемых АММ реальных частиц.

б) При $\beta = -\gamma(5)$ диагонализация достигается при $\Phi_0 = -\pi/4$. В этом случае уравнение (2.9.1) принимает вид

$$\left\{ -i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{e}{\hbar c} A_\mu \gamma^\mu + \frac{i}{4} \Delta_{\mu\nu\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma - \frac{i\sqrt{k}}{4c^2} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + \frac{cm_2}{\hbar} \right\} \psi_2 = 0, \quad (2.9.5)$$

где итоговая масса

$$m_2 = \frac{e}{2\sqrt{k}} - m_0 \quad (2.9.6)$$

определяется разностью «электромагнитной массы» $e/2\sqrt{k}$ и затравочной массы m_0 . В дополнительном слагаемом (члене Паули—Фирца) АММ имеет величину $(e/mc^2)(m_2\sqrt{k}/e) \sim (e/mc^2) \cdot 10^{-23}$, на несколько порядков меньшую экспериментальной верхней границы АММ протона и электрона, т. е. не противоречит наблюдаемым данным. Важно отметить также, что этот член приводит к нарушению СР-инвариантности. Кроме того, известно, что при учете взаимодействия Паули—Фирца квантовая теория становится неперенормируемой. В работе Барута [3] приводится ряд доводов в пользу учета члена с АММ, вводимого им на основе иных соображений.

Соответственно этим двум возможностям частицы, описываемые уравнением (2.9.5), можно назвать обычными, а уравнением (2.9.3) — экзотическими, как это предлагает В. Г. Кадышевский [47]. Заметим, что в развиваемой им теории на основе иных соображений возникают частицы аналогичных двух типов.

2. Пусть 5-мерное пространство-время плоское, но $S_{ABC} \neq 0$. Остановимся на варианте В. И. Родичева. В нем $S(5)_{\alpha\beta}$ было представлено согласно (2.7.5) и, кроме того, было положено $S_\alpha = 0$. В этом случае фермионная часть плотности лагранжиана (2.8.13) принимает вид

$$\mathcal{L}_F = \frac{i\hbar c}{2} \left\{ \left(\bar{\psi} \gamma^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\alpha} \gamma^\alpha \psi \right) + 2i \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \bar{\psi} \beta \psi - \alpha \bar{\psi} \gamma_5 \psi \right) + \frac{3}{2} S(5)_{\alpha\beta} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \psi \right\}. \quad (2.9.7)$$

В нем отсутствуют известные слагаемые, описывающие взаимодействие спинорного поля с электромагнитным векторным потенциалом A_α (добавки в «удлиненной» производной (1.3.9)). Чтобы преодолеть эту трудность, искусственно вводился электромагнитный потенциал A_α на место произвольной векторной функции в определении ковариантной производной от спинора. Об этом уже говорилось в § 1.8. Подобный шаг представляется обоснованным. Нежелательным является также последний член в (2.9.7), который следует трактовать как взаимодействие спинорного поля с электромагнитным через аномальный магнитный момент. Забегая вперед, отметим, что в многообразиях большей размерности из тензора кручения можно построить 4-мерные векторы (например, $S(65)_\alpha$), которые могут выполнять роль недостающего в 5-мерии векторного потенциала в «удлиненной» производной.

3. Пусть тензор кручения S_{ABC} отличен от нуля и $\lambda_\alpha \neq 0$. Такой вариант теории можно было бы использовать для устранения трудностей с аномальными магнитными моментами. Для этого нужно выбрать частный вид поля кручения, такой, что $S_{\alpha\beta\nu} = 0$, но $S(5)_{\alpha\beta} \neq 0$, причем тензор $S(5)_{\alpha\beta}$ нужно связать с метрическим вектором примерно так, как это делал Родичев для A_α :

$$S(5)_{\alpha\beta} = C \left(\frac{\partial \lambda_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial x^\beta} \right) = C {}^5F_{\alpha\beta}. \quad (2.9.8)$$

Тогда векторное поле λ_α будет входить в плотность лагранжиана в слагаемые трех типов:

а) Члены с АММ:

$$\frac{i\hbar c}{4} \sqrt{-g} ({}^5F_{\alpha\beta} + 3S(5)_{\alpha\beta}) \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \psi.$$

Полагая $C = -1/3$, это выражение можно обратить в нуль.

б) Свободная часть плотности лагранжиана поля λ_α имеет вид

$$\mathcal{L}_\lambda = -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \left(\frac{1}{4} {}^5F_{\alpha\beta} {}^5F^{\alpha\beta} + 3S(5)_{\alpha\beta} S(5)^{\alpha\beta} \right). \quad (2.9.9)$$

Это выражение следует приравнять стандартному лагранжиану электромагнитного поля (1.3.6), откуда получится новое выражение λ_α через векторный электромагнитный потенциал A_α .

в) Взаимодействие фермионного и других полей с λ_α по-прежнему определяется ранее записанными выражениями (2.8.13). Для приведения их к стандартному виду с потенциалом A_α из

(2.9.9) следует переопределить константу α . Ситуация с массой покоя остается такой же, как и в варианте, описанном в п. 1.

4. Можно рассмотреть и более общие варианты теории, когда на тензор кручения накладываются иные ограничения. При этом возникают многочисленные вопросы о физической интерпретации дополнительных тензорных полей S_{α} , $S(5)_{\alpha\beta}$ и скалярного поля ϕ . Их слишком много, чтобы им дать интересующую в рамках задачи объединения лишь гравитационных и электромагнитных взаимодействий.

§ 2.10. Обсуждение возможностей и недостатков 5-мерной теории

После изложенного в этой главе вернемся к перечисленным в § 2.3 критическим замечаниям Эйнштейна и других авторов по первым вариантам 5-мерных теорий. Посмотрим, какие из них и насколько оказались преодоленными. Кроме того, добавим новые замечания.

1. Физический смысл пятой координаты связан с определением электрической заряженности частиц, так как заряды в теории возникают в результате дифференцирования волновых функций частиц по 5-й координате. Сам электрический заряд с точностью до размерной константы имеет смысл 5-й компоненты 5-импульса. В классическом пределе пятая компонента 5-скорости частиц соответствует отношению электрического заряда к массе частиц. Вследствие усреднения по малому периоду T пятая координата из окончательных уравнений исключается.

2. Вместо независимости величин по 5-й координате в рассмотренной теории использована специальная экспоненциальная зависимость всех компонент метрики от x^5 в конформном факторе. Эту зависимость можно трактовать как замкнутость мира по 5-й координате с очень малым периодом по сравнению с масштабами длин, с которыми имеем дело.

Выделенность, резкое отличие 5-й координаты от остальных не должны рассматриваться как недостаток теории. Всякая симметрия между различными координатами (измерениями) имеет место лишь в определенном круге задач, ситуаций. С этой точки зрения следует смотреть на пятое измерение как на выделенное в тех физических ситуациях, с которыми мы до сих пор имеем дело. Единое описание электромагнитных и гравитационных взаимодействий в теории Калуцы продемонстрировало обстоятельство, в которых проявляется симметрия пяти измерений.

Здесь уместно заметить, что перечисленные в предисловии особенности 4-мерных теорий ни в коем случае не закрывают путь для развития 5-мерных теорий типа Калуцы. Анализ особенностей 4-мерия опирался на три основных допущения: а) все 4 координаты (измерения) равноправны, б) физические величины

являются внешними к геометрии, в) выбиралась сигнатура $(+ - - - -)$. Из изложенного в этой главе видно, что первые два допущения в 5-мерной теории (принципиально!) не имеют места.

3. В этой главе основное внимание было уделено случаю, когда пятнадцатая компонента метрического тензора после конформного преобразования является постоянной. Возможное фундаментальное (безмассовое нейтральное) скалярное поле, связанное с G_{55} , обсуждено в гл. 3.

4. Отношение к пятнадцатому уравнению поля типа эйнштейновского в 5-мерной теории, видимо, имеет принципиальное значение. Оно тесно связано с выделенностью пятого измерения и с вопросом о пределах, в которых может реализовываться симметрия между пятью измерениями.

5. В этой главе показано, что в рамках 5-мерия в принципе можно получить геометризованные правые части (с некоторыми оговорками) как уравнений Эйнштейна, так и уравнений Максвелла. Можно считать, что в некотором роде удалось реализовать замысел Эйнштейна. Однако оказалось, что это относится к специальному виду материи, далеко не охватывающему все наблюдаемые ее формы. Исходя из этого и других общих соображений можно оспаривать правомерность идеи о геометризации всех видов материи. В § 2.6 было сказано о четырех концепциях построения физической картины мира. Подход Эйнштейна соответствует одной из них.

6. Если ограничиться только узкими рамками задачи объединения теорий гравитации и электромагнетизма, то можно было бы считать 5-мерный подход имеющим лишь методический интерес, пока не приведшим к новым экспериментально подтвержденным следствиям. Однако задачу следует понимать значительно шире. 5-мерную теорию нужно рассматривать как трамплин для броска в новые области знания. Оттолкнувшись от 5-мерия, можно надеяться на прогресс в обосновании размерности классического пространства-времени, на объединение других взаимодействий и на получение важных предсказаний на следующих этапах развития многомерной теории. Не вина исследователей 20—50-х годов, что так долго не удавалось пойти дальше.

7. В связи с критическим замечанием об отношении 5-мерия к квантовой теории следует заметить, что для многих авторов основным движущим мотивом изучения многомерных теорий сейчас является стремление построить квантовую теорию, свободную от расходимостей. К идеям многомерия приводят также исследования по супергравитации и другим проблемам квантовой физики.

8. Изложенная 5-мерная теория естественно объединяется с основной конкурировавшей с ней в 20-х годах единой теорией гравитации и электромагнетизма Вейля (см. § 1.4). Дело в том, что в этой теории существенным образом использовано

понятие конформного преобразования, введенного Вейлем. В частности, это приводит к следующему обстоятельству [18]. Запишем ковариантную производную от метрики $g_{\mu\nu}$ относительно символов Кристоффеля Γ_{BC}^A в исходной метрике. В итоге будем иметь

$$g_{\mu\nu|\sigma} = \tilde{\nabla}_\sigma^+ (\chi^{-2} g_{\mu\nu}^0) = -2\chi^{-1} g_{\mu\nu}^0 \left(\frac{\partial \chi}{\partial x^\sigma} + \frac{2\sqrt{k}}{c^2} A_\sigma \frac{\partial \chi}{\partial x^5} \right), \quad (2.10.1)$$

т. е. второе слагаемое справа в этой формуле соответствует определению ковариантной производной (1.4.1), (1.4.10) в 4-мерной геометрии Вейля.

Так обстоит дело со старыми замечаниями. Добавим к ним новые, возникшие в процессе дальнейшего анализа 5-мерия.

9. Условие замкнутости по 5-й координате (цикличности по x^5) приводит к чрезвычайно большому вкладу $\sim e/2\sqrt{k} \approx 10^{-6}$ в массы покоя элементарных частиц. Эта величина лишь на порядок отличается от массы Планка. Возникает задача перенормировки — вычитания из этого значения массы другой, также большой (но конечной!) величины. В этой главе это осуществлялось введением в уравнения или лагранжианы затравочных масс дающих обратный по знаку вклад в итоговое значение m . Однако эта процедура вряд ли может удовлетворить. В гл. 4 будет показано, что в многообразиях шести и семи измерений имеются другие, более содержательные приемы перенормировки масс.

10. При рассмотрении фермионов в 5-мерном пространстве времени возникает дополнительная проблема устранения чрезвычайно больших значений аномальных магнитных моментов частиц. Как показано в предыдущем параграфе, в рамках 5-мерия с ними можно бороться либо подходящим выбором матрицы перед затравочной массой, либо использованием специального вида кручения. В многообразиях большей размерности преодоление этой трудности достигается приемом, который не применим в 5-мерной теории.

11. Самым существенным является то, что со времен 20-х годов физика ушла далеко вперед. В дополнение к гравитационным и электромагнитным взаимодействиям стали известны слабые и сильные. Открыто множество элементарных частиц и переносчиков этих взаимодействий. Ныне в повестку дня поставлено построение теории, объединяющей все известные взаимодействия. Изложенная 5-мерная теория должна входить в искомую теорию Великого объединения как важный, но лишь только фрагмент.

12. В изложенной 5-мерной теории продемонстрировано появление новых полей: комплексного скалярного поля ϕ (в конформном факторе) и тензоров, обязанных кручению. В связи с этим возникла проблема физической интерпретации этих

полей и связанные с ней вопросы их наблюдаемости. Уже подчеркивалось, что в рамках задачи объединения только гравитационных и электромагнитных взаимодействий для этих дополнительных полей нет места, а для включения в общую схему других известных взаимодействий в 5-мерной теории их недостаточно. В 6- и 7-мерных теориях последнее вполне осуществимо.

Можно сделать и иные замечания, на взгляд автора, менее существенные. Подчеркнем, что как оставшиеся старые, так и новые проблемы следует рассматривать не в качестве доводов «за» или «против» перехода от 4-мерной теории к 5-мерной, а как свидетельства в пользу перехода к многообразиям еще большей размерности.

Глава 3. ВЕЩЕСТВЕННОЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ В 5-МЕРНОЙ ТЕОРИИ

§ 3.1. Проблемы «скаляризма» в многомерных теориях поля

Содержание этой главы в значительной степени находится вне основной линии книги — изучения многомерных геометрических моделей, объединяющих известные физические взаимодействия. Без ущерба для понимания дальнейшего при первом чтении эту главу можно пропустить и перейти к гл. 4. Тем не менее эта глава несет важную смысловую нагрузку. Во-первых в ней обсуждается самостоятельная ветвь многочисленных исследований дополнительного скалярного поля (эффектов «скаляризма») в многомерии, и, во-вторых, рассмотренное здесь тесно связано с обоснованием своеобразного подхода к вариационному принципу, использованного в дальнейшем.

В этой главе рассмотрим скалярное поле в 5-мерной теории, однако аналогично оно проявляется и в теориях большей размерности. Возникающие при этом проблемы имеют общий характер. Перечислим основные из них.

1. Проблема 15-го уравнения. Если исходить из многомерных уравнений типа эйнштейновских, то в 5-мерии их пятнадцать, и во всех присутствует как дополнительное скалярное поле пятнадцатая компонента метрики G_{55}^0 или λ_5^0 . Эти уравнения были записаны в § 2.4. В старых вариантах 5-мерия полагалось, что для получения стандартных 4-мерных уравнений нужно положить скалярное поле очень слабым или вообще отсутствующим, что соответствует постоянству λ_5^0 . Тогда 14 уравнений (2.4.11), (2.4.12) совпадут со стандартными, а из 15-го (2.4.13) в вакууме (точнее, электровакууме) получается условие, связывающее 4-мерную скалярную кривизну с инвариантом электромагнитного поля:

$${}^4R + 3 \frac{k}{c^4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.1.1)$$

С другой стороны, при свертке уравнений Эйнштейна (2.4.11) (также в электровакууме) получается ${}^4R=0$. Последнее совместно с (3.1.1) лишь в случае $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}=0$. Но это исключает многие электромагнитные поля, в частности кулоновское. По этой причине во многих вариантах 5-мерия исходили из вариационного принципа, полагая $G_{55}^0 = -1$ до варьирования плот-

ности лагранжиана, что приводило к 14 нужным уравнениям. Все это расценивалось как одно из слабых мест 5-мерия.

2. Если переменное скалярное поле не исключать, то следует его считать сопутствующим электромагнитному полю. Тогда возникает проблема описания источников скалярного поля. Здесь имеется произвол в выборе 5-мерной плотности лагранжиана материи, если исходить из вариационного принципа, или в выборе 5-мерного тензора энергии-импульса материи Q_{AB} в (2.4.11) — (2.4.13), если постулировать 5-мерные уравнения типа эйнштейновских. Ясно, что эти два канала должны быть эквивалентными. От решения этой задачи зависит, как могло бы проявляться скалярное поле и насколько существенны эффекты «скаляризма». Один из примеров ее решения дан в цикле работ Э. Шмүцера [110].

3. Допустим, мы согласились с наличием дополнительного скалярного поля, тогда возникает проблема наиболее адекватного его описания. Здесь имеется в виду, что, во-первых, скалярное поле обязано компоненте G_{55}^0 , и, во-вторых, при условии цилиндричности по 5-й координате, как отмечалось в § 2.4, возникает произвол в выборе одной из конформно соответствующих метрик. Вообще говоря, конформный фактор можно было бы считать еще одной дополнительной скалярной функцией. Однако ограничимся случаями, когда конформный фактор

является функцией от λ_5 . Встает вопрос: какова эта функция? Его обсуждению посвящен § 3.2 (см. также [34]).

4. Наконец, имеется проблема выявления наиболее характерных и значительных эффектов «скаляризма». Нужно указать такие явления и эксперименты, которые могли бы подтвердить или опровергнуть гипотезу существования дополнительных вещественных скалярных полей, обязанных многомерию.

Не претендуя на охват всех аспектов теорий со скалярным полем, ниже рассмотрим некоторые их характерные черты, наиболее интересные точные решения и ряд возможных эффектов.

§ 3.2. Конформно-соответствующие варианты 5-мерной теории

Начнем с замечания, что без учета соображений об электромагнитном взаимодействии и квазициклической зависимости 5-метрики от x^5 довольно трудно остановиться на выборе одной из конформно-соответствующих метрик (фактора $\mathcal{F}(\lambda_5^0)$ в § 2.4). Это нашло свое отражение в ряде вариантов 5-мерных теорий, развивавшихся разными авторами. В этом параграфе укажем несколько таких вариантов, оставивших заметный след в истории развития 5-мерных теорий.

а) Пусть $\mathcal{F}(\lambda_5^0) = 1$ (непосредственное отождествление физической метрики, получающейся после 1+4-расщепления 5-мерной геометрии). В этом случае уравнения (2.2.20) — (2.2.22) принимают вид

$${}^0_4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^0_4R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{2k}{c^4} \lambda_5^0 \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) + \kappa T'_{\mu\nu} + \frac{1}{\lambda_5^0} \left(\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \lambda_5^0 - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \lambda_5^0 \right); \quad (3.2.1)$$

$$-\nabla_{\nu} F^{\nu\mu} - 2\Phi_{\alpha} F^{\alpha\mu} = \frac{c^2}{\sqrt{k}} \kappa Q_A^{\mu} \lambda^A; \quad (3.2.2)$$

$$\frac{1}{2} {}^0_4R + \frac{3}{2} \frac{k}{c^4} \lambda_5^0 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \Lambda = \kappa Q_{AB} \lambda^A \lambda^B. \quad (3.2.3)$$

Здесь тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ определен согласно (2.4.7).

Именно этот вариант 5-мерия был предложен в работе Калуцы и затем в течение многих лет обсуждался многочисленными авторами (с различными предположениями о постоянстве или переменности компоненты G_{55}). Фактически он использовался также и Ю. Б. Румером в монографии [86].

Характерной чертой этого варианта является переменность гравитационной постоянной из-за множителя λ_5^0 в (3.2.1) справа перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля или в (3.2.3) слева перед электромагнитным инвариантом. Это обстоятельство использовалось для реализации гипотезы Дирака о возможности изменения фундаментальных физических констант.

б) Пусть $\mathcal{F}(\lambda_5^0) = \lambda_5^{-1}$, т. е. произведем конформное преобразование исходной метрики $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{\lambda_5^0}; \quad g^{\mu\nu} = \lambda_5^0 g^{\mu\nu}. \quad (3.2.4)$$

Тогда уравнения (2.2.20) — (2.2.22) запишутся следующим образом:

$${}^0_4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^0_4R + \frac{\Lambda}{\lambda_5^0} g_{\mu\nu} = -\frac{2k}{c^4} \lambda_5^0 \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) + \kappa T'_{\mu\nu} + \frac{3}{2\lambda_5^0} \left(\lambda_5^0 \lambda_{5,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \lambda_{5,\alpha} \lambda_{5,\beta} \right); \quad (3.2.5)$$

$$-\nabla_{\nu} (\lambda_5^0 F^{\nu\mu}) = \frac{c^2}{\sqrt{k}} \kappa \lambda_5^0 Q_A^{\mu} \lambda^A; \quad (3.2.6)$$

$$g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \lambda_5^0 + \left(\frac{1}{3} {}^0_4R + \frac{k}{c^4} \lambda_5^0 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \lambda_5^0 - \frac{3}{2\lambda_5^0} g^{\alpha\beta} \lambda_{5,\alpha} \lambda_{5,\beta} - \frac{2}{3} \Lambda = \frac{2}{3} \kappa Q_{AB} \lambda^A \lambda^B. \quad (3.2.7)$$

Характерной особенностью уравнений (3.2.5) — (3.2.7) является отсутствие гравитационной постоянной κ перед вкладом скалярного поля. Однако κ можно ввести, произведя преобразование

$$\lambda_5^0 = \exp \left(\sqrt{\frac{2\kappa}{3}} \cdot \varphi \right). \quad (3.2.8)$$

Тогда уравнения (3.2.5) и (3.2.7) в вакууме принимают вид (при использовании свертки уравнений (3.2.5)):

$${}^0_4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^0_4R + \frac{\Lambda}{\lambda_5^0} g_{\mu\nu} = -\frac{2k}{c^4} \lambda_5^0 \left(F_{\mu\nu} F^{\alpha}{}_{\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) + \kappa \left(\varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} \right); \quad (3.2.9)$$

$$g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \varphi + \frac{k}{c^4} \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \lambda_5^0 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \Lambda / \sqrt{6\kappa} \lambda_5^0 = 0. \quad (3.2.10)$$

Привлекательной чертой этого варианта 5-мерия является отсутствие вторых производных в тензоре энергии-импульса скалярного поля φ (в 3.2.9). Фактически именно так во всех учебниках записывается тензор энергии-импульса скалярного поля (с точностью до знака). Видимо это обстоятельство отчасти послужило основанием для выбора именно этого варианта 5-мерных теорий в работах [77]. Из иных соображений к этому варианту 5-мерия пришел Шмутцер в серии работ [110] (с некоторыми особенностями в определении уравнений движения частиц). Это отмечалось в работе [32].

в) Пусть $\mathcal{F}(\lambda_5^0) = \lambda_5^2$, т. е.

$$g_{\mu\nu} = \lambda_5^0 g_{\mu\nu}; \quad g^{\mu\nu} = \frac{1}{\lambda_5^2} g^{\mu\nu}. \quad (3.2.11)$$

Тогда 5-мерные «уравнения Эйнштейна» принимают вид

$${}^0_4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^0_4R + \Lambda \lambda_5^0 g_{\mu\nu} = -\frac{2k}{c^4} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) +$$

$$+ \kappa T_{\mu\nu} + \frac{3}{\lambda_5^0} (\nabla_\mu \nabla_\nu \lambda_5^0 - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \lambda_5^0) - 6 \frac{1}{\lambda_5^2} \lambda_{5,\mu} \lambda_{5,\nu}; \quad (3.2.12)$$

$$- \nabla_\nu F^{\nu\mu} - 3 F^{\nu\mu} \frac{\lambda_{5,\nu}^0}{\lambda_5^0} = \frac{c^2 \kappa}{\sqrt{k}} \lambda_5^3 Q_B^\mu \lambda_5^0; \quad (3.2.13)$$

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \lambda_5^0 - \frac{1}{6} \left({}^4 R + \frac{3k}{2c^4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \lambda_5^0 - \frac{1}{3} \Lambda \lambda_5^3 = \\ = - \frac{\kappa}{3} \lambda_5^3 Q_{AB} \lambda_5^0 \lambda_5^0. \quad (3.2.14)$$

Эти уравнения соответствуют записанным в гл. 2 уравнениям (2.4.11) — (2.4.13). На них будем опираться и в этой главе.

Перечислим характерные черты этих уравнений.

1) Скалярное уравнение (3.2.14) в вакууме (при $\Lambda=0$, $F_{\alpha\beta}=0$) представляет собой стандартное уравнение Клейна —

Фока для безмассового скалярного поля λ_5^0 .

2) Примечателен множитель $-1/6$ перед скалярной кривизной в (3.2.14), обычно вводимый в стандартной теории из соображений конформной инвариантности 4-мерного уравнения безмассового скалярного поля.

3) Наличие космологической постоянной Λ соответствует появлению в (3.2.14) нелинейного члена, пропорционального λ_5^3 и вводимого в нелинейной теории поля из других соображений.

4) Множитель перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля справа в (3.2.12) не содержит λ_5^0 , т. е. k является истинной гравитационной постоянной.

Еще раз подчеркнем, что преимуществом этого варианта является, во-первых, единообразие (с одним и тем же конформным множителем) в определении векторного электромагнитного потенциала A_μ в (2.4.10) и метрического тензора $g_{\mu\nu}$ в (3.2.11). Во-вторых, именно в этом варианте возможно обобщение конформного фактора на случай зависимости от x^5 , т. е. введение условия квазицилиндричности по x^5 . Следует также отметить, что отличие тензора энергии-импульса скалярного поля в (3.2.12) от обычно используемого в стандартной теории (как в (3.2.9)) не является недостатком теории. Известно, что во многих последних учебниках и книгах отмечалась неопределенность определения $T_{\mu\nu}$ скалярного поля, допускалось наличие в $T_{\mu\nu}$ вторых производных. Более того, даже указывалось на возможность установления истинного вида $T_{\mu\nu}$ скалярного поля лишь при построении объединенной теории полей с гравитационным [7]. Именно благодаря всем этим обстоятельствам в наших работах [17—23] использовался именно этот вариант (в) 5-мерной теории.

§ 3.3. Сферически-симметричные решения многомерных «уравнений Эйнштейна»

Рассмотрим цилиндрические по 5-й координате статические сферически-симметричные решения 5-мерных «уравнений Эйнштейна». Простейшее из них получается из 4-мерной метрики Шварцшильда добавлением компонент $G_{55} = -1$, $G_{5\mu} = 0$:

$$dI^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dx_0^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - dx_5^2. \quad (3.3.1)$$

К более общим решениям можно прийти различными способами: 1) либо непосредственно решать уравнения в вакууме (при $\Lambda=0$, $F_{\mu\nu}=0$) в любом из вариантов 5-мерия (т. е. решая уравнения (3.2.1) — (3.2.3), или (3.2.5) — (3.2.7), или (3.2.12) — (3.3.14)), как это делалось на основе варианта (а) независимо в работах [60, 62]; 2) либо использовать найденные ранее сферически-симметричные решения в скалярно-тензорных теориях гравитации при соответствующем 5-мерии значения константы ω . Любым из этих способов приходим к точному решению (вариант а):

$$dI^2 = \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{A-B} dx_0^2 - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{-A-B} dr_1^2 - \\ - r_1^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{1-A-B} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{2B} dx_5^2, \quad (3.3.2)$$

где \tilde{r}_g , A и B — константы, последние две связаны соотношением $A^2 + 3B^2 = 1$. Ясно, что (3.3.2) переходит в метрику Шварцшильда (3.3.1) при $B=0$, $A=1$. Видно также, что в варианте (в) эта метрика принимает вид

$$dI^2 = \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{2B} \left\{ \left[\left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{A-3B} dx_0^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{-A-3B} dr_1^2 - r_1^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{1-A-3B} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] - dx_5^2 \right\}. \quad (3.3.3)$$

Для удобства сопоставления 5-мерной теории с общей теорией относительности желательно записать 4-метрику варианта (в) (в квадратных скобках в (3.3.3)) в координатах кривизн, т. е. когда $g_{22} = -r^2$. Однако точно это можно сделать лишь в неявном виде [62], поэтому запишем ее в координатах кривизн приближенно. Переобозначим константы

$$\alpha = \frac{2B}{A-B} \rightarrow \tilde{r}_g = r_g \sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1};$$

$$A = \frac{\alpha + 2}{2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}}; B = \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}}$$

и преобразуем r_1 :

$$r^2 = r_1^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{1-A-3B}$$

Это преобразование входит в класс дозволённых преобразований (2.2.6). Легко видеть, что при $\alpha=0$ метрика (3.3.3) переходит в (3.3.1). Представим компоненты метрики в виде рядов по r_g/r . После несложных вычислений находим

$$ds^2 \simeq \left[1 - (1-\alpha)\frac{r_g}{r}\right] dx_0^2 - \left[1 + (1+2\alpha)\frac{r_g}{r}\right] dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2);$$

$$\lambda_5^0 \simeq 1 - \alpha \frac{r_g}{r} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \left(\frac{r_g}{r}\right)^2$$

В любой интерпретации и в любом варианте 5-мерной теории λ_5 описывает распределённое вокруг источника безмассовое скалярное поле. Константа α характеризует своеобразный скалярный заряд источника.

В связи с рассмотрением в следующих главах 6- и 7-мерных теорий приведем здесь аналогичные цилиндричные по дополнительным координатам статические сферически-симметричные решения многомерных вакуумных «уравнений Эйнштейна». Так, в 6-мерной геометрии с сигнатурой (+ — — — —) аналогом решения (3.3.2) (в варианте а) является 6-метрика [50]:

$$d\Sigma^2 = \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{A-B} dx_0^2 - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{-A-B} dr_1^2 - r_1^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{1-A-B} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{B+C} dx_5^2 - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{B-C} dx_6^2, \quad (3.3.7)$$

где \tilde{r}_g — константа; три константы A, B, C связаны одним соотношением

$$A^2 + 2B^2 + C^2 = 1.$$

Очевидно, что при $B=C$ метрика (3.3.7) переходит в тривиальное 6-мерное обобщение (3.3.1).

Для перехода к координатам кривизны в варианте типа (в) (когда $G_{55} = -1$), что опять можно сделать лишь приближенно, следует переопределить константы

$$\alpha = \frac{B+C}{A-C}; \beta = \frac{B-C}{A-C}; \tilde{r}_g = r_g \sqrt{1 + \alpha + \alpha^2 - \beta + \beta^2} \quad (3.3.8)$$

и ввести новую радиальную координату

$$r^2 = r_1^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{1-A-2B-C}$$

В итоге имеем 4-метрику и конформный фактор, соответственно разложенные в ряды по степеням r_g/r :

$$ds^2 \simeq \left[1 + (\alpha + \beta - 1)\frac{r_g}{r}\right] dx_0^2 - \left[1 + (2\alpha + 1)\frac{r_g}{r}\right] dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2);$$

$$\left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{B+C} \simeq 1 - \alpha \frac{r_g}{r} - \frac{1}{2} \alpha(\alpha+1) \left(\frac{r_g}{r}\right)^2. \quad (3.3.9)$$

Аналогично для 7-мерной геометрии с сигнатурой (+ — — — —) аналогом решений (3.3.2) и (3.3.7) (в варианте а) является сферически-симметричная 7-метрика

$$d\Sigma^2 = \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{A-B} dx_0^2 - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{-A-B} dr_1^2 - r_1^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{1-A-B} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{2B/3+C+D/3} dx_5^2 - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{2B/3-C+D/3} dx_6^2 - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r_1}\right)^{2B/3-2D/3} dx_7^2, \quad (3.3.10)$$

где четыре константы A, B, C, D связаны соотношением

$$A^2 + C^2 + \frac{5}{3}B^2 + \frac{1}{3}D^2 = 1.$$

При $D=B$ метрика (3.3.10) переходит в тривиальное 7-мерное обобщение метрики (3.3.7).

Дополнительные константы в метрике (3.3.10) соответствуют скалярным зарядам источников новых полей. Учет их означает описание все более тонких эффектов скалярных взаимодействий. Поскольку в настоящее время теория взаимодействий посредством фундаментального скалярного поля пока носит гипотетический характер, в этой главе ограничимся изучением самого грубого варианта скалярных взаимодействий — в рамках 5-мерной теории.

§ 3.4. Генерирование полей 5-мерными вращениями

В рассматриваемой 5-мерной теории существенно ограничение класса допустимых координатных преобразований до (2.2.5), (2.2.6), а точнее — до (2.3.2), (2.2.6). На языке монадного метода задания систем отсчета в хронометрической калибровке (в 4-мерии) такие преобразования не выводят за пределы используемой обобщенной (5-мерной) системы отсчета. Представляет интерес выяснить, какой физический смысл кроется за данным ограничением. С этой целью рассмотрим на простом частном примере, к каким физическим следствиям приводят преобразования, отличные от (2.2.5)—(2.2.6). Возьмем 5-мерную метрику Шварцшильда (3.3.1) и произведем линейное преобразование координат (квазиповорот в плоскости (x^0, x^5)):

$$\begin{aligned} x^0 &= \alpha_{00}x'^0 + \alpha_{05}x'^5; & x^5 &= \alpha_{50}x'^0 + \alpha_{55}x'^5; & x^i &= x'^i; \\ x'^0 &= (\alpha_{55}/\Delta)x^0 - (\alpha_{05}/\Delta)x^5; & x'^5 &= -(\alpha_{50}/\Delta)x^0 + (\alpha_{00}/\Delta)x^5, \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

где $\Delta = \alpha_{00}\alpha_{55} - \alpha_{05}\alpha_{50}$.

Очевидно, что в новых координатах метрика по-прежнему будет решением 5-мерных уравнений Эйнштейна, однако преобразование (3.4.1) выводит за пределы обобщенной системы отсчета, если придерживаться соглашения, что и в новой координатной системе производится описанная выше интерпретация компонент метрического тензора на основе калибровки (2.2.3). В новой системе координат

$$G_{05}^0 = \alpha_{00}\alpha_{05} - \alpha_{50}\alpha_{55} - \frac{rg}{r}\alpha_{00}\alpha_{05}; \quad G_{55}^0 = \alpha_{05}^2 - \alpha_{55}^2 - \frac{rg}{r}\alpha_{05}^2. \quad (3.4.2)$$

Наложим на коэффициенты линейного преобразования (3.4.1) два естественных асимптотических условия:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{00}^0 = 1; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} G_{55}^0 = -1,$$

которые соответствуют следующим соотношениям:

$$\alpha_{00}\alpha_{55} - \alpha_{05}\alpha_{50} = \pm 1; \quad \alpha_{55}^2 - \alpha_{05}^2 = 1. \quad (3.4.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_{55}^0 &= 1 + \alpha_{05}^2 \frac{rg}{r}; & \Phi_1 &= -\frac{\alpha_{05}^2}{2\left(1 + \frac{rg}{r}\alpha_{05}^2\right)} \frac{rg}{r^2}; \\ F_{01} &= -\frac{rgc^2}{2\sqrt{k}} \frac{\alpha_{05}\alpha_{55}}{r^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{rg}{r}\alpha_{05}^2\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Из (3.4.4) следует, что переход к новой обобщенной системе отсчета индуцирует иную физическую ситуацию — приводит к появлению электрического и скалярного полей, которых не было в первоначальной обобщенной системе отсчета. Из (3.4.4) находим, что значение возникшего электрического заряда q связано с коэффициентами линейного преобразования

$$q = -\frac{rgc^2}{2\sqrt{k}}\alpha_{05}\alpha_{55}, \quad \text{т. е. } \alpha_{05}\alpha_{55} = -\frac{q}{M\sqrt{k}}, \quad (3.4.5)$$

где M — масса центрального источника метрики (3.3.1). Из (3.4.3) и (3.4.5) находим значения двух коэффициентов

$$\alpha_{05}^2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4q^2}{kM^2}} - 1 \right); \quad \alpha_{55}^2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4q^2}{kM^2}} + 1 \right). \quad (3.4.6)$$

Пространственно-временная метрика в варианте (в) имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1 - \frac{rg}{r}}{r} dx_0^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{rg}{r}\right)\left(1 + \frac{rg}{r}\alpha_{05}^2\right)} - \\ &\quad - \frac{r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}{1 + \frac{rg}{r}\alpha_{05}^2}. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Перечислим характерные следствия из рассмотренного примера.

1. Линейные преобразования (3.4.1) вместе с переходом в новую обобщенную систему отсчета физически означают введение в центральный (ранее нейтральный) источник электрического заряда q , пропорционального массе источника M , причем коэффициент пропорциональности определяется коэффициентом линейного преобразования α_{05} . Очевидно, при $\alpha_{05} = 0$ электрическое поле не возникает, так как преобразование (3.4.1) принадлежит классу (2.2.5), (2.2.6).

2. Используя тетрадный (пентадный) метод в калибровке Ламе, находим, что наблюдаемая напряженность кулоновского поля в хронометрической к координатам (3.4.7) 4-мерной метрике системе отсчета имеет вид

$$E_r \approx \frac{q}{r^2} \left(1 - \frac{rg}{2r}\alpha_{05}^2 \right). \quad (3.4.8)$$

3. Возникшее электрическое поле порождает напряженность скалярного поля Φ_1 , которое также определяется электрическим зарядом центрального источника.

4. Более общее решение, зависящее от трех констант, можно получить аналогичным образом из метрики (3.3.2) или (3.3.3). Заметим, что подобным же образом можно генерировать и другие виды 4-метрики общей теории относительности в присутствии электромагнитного и скалярного полей [21], например метрики типа Керра—Ньюмена, волновые [84] и др.

§ 3.5. Возможные эффекты в 5-мерной теории, обязанные скалярному полю

Кратко рассмотрим поведение пробных тел в сферически-симметричной 5-метрике вида (3.3.6) (без электромагнитного поля). Для этого рассмотрим уравнения геодезических (2.2.24)—(2.2.25) при условии цилиндричности по 5-й координате (когда $D_{\mu\nu}=0$).

Скалярное (пятое) уравнение геодезической можно представить в виде

$$\frac{d}{ds} \ln \left| \frac{(d\lambda/ds)^2}{1 - (d\lambda/ds)^2} \right| = -2 \frac{d}{ds} \ln \lambda_5^0, \quad (3.5.1)$$

где пока не использован конкретный вид λ_5^0 . Интегрируя это уравнение, находим

$$\left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 = \frac{W_0}{\lambda_5^0 + W_0 (1 - \lambda_5^0)} = \frac{q^2}{4km^2}, \quad (3.5.2)$$

где W_0 — постоянная интегрирования. Таким образом, в общем случае отношение электрического заряда q к массе m частицы в 5-мерной теории становится переменной величиной и определяется скалярным полем λ_5^0 . Очевидно, что в отсутствие скалярного поля (когда $\lambda_5^0 = +1$) $q^2/4km^2 = W_0 = \text{const}$, как в теории Калуцы. Подставляя в (3.5.2) приближенное решение для λ_5^0 (3.3.6), получаем

$$\left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 \simeq W_0 \left[1 + \frac{\alpha r g}{r} (1 - W_0) \right]. \quad (3.5.3)$$

Оставляя анализ этого уравнения на будущее, займемся сначала пространственно-временными уравнениями геодезических.

Из уравнения геодезической (2.2.25) для угла θ находим, как и в 4-мерной метрике Шварцшильда, что если в начальный момент пробная частица двигалась в экваториальной «плоскости» ($\varphi_0 = \pi/2$, $d\theta/ds|_0 = 0$), то и вся траектория находится в этой «плоскости».

Из уравнения для угла φ вычисляем интеграл

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} \simeq \sigma \left[1 + \frac{\alpha}{2} (1 - W_0) \frac{r g}{r} \right], \quad (3.5.4)$$

где σ — постоянная интегрирования (удвоенная секторная скорость). Аналогично из уравнения (2.2.25) для $\mu=0$ находим

$$\frac{dx^0}{ds} \simeq V_0 \left[1 + \frac{r g}{r} - \frac{\alpha}{2} (1 + W_0) \frac{r g}{r} \right], \quad (3.5.5)$$

где V_0 — постоянная интегрирования.

Вместо оставшейся компоненты уравнения геодезической удобно использовать выражение для квадрата 4-интервала. Учитывая первые интегралы (3.5.3)—(3.5.5) и переходя от r к $u = 1/r$, получаем

$$\sigma^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] = V_0^2 - 1 + r_g u [1 + \alpha (3 - 3V_0^2 - W_0)] + r_g u^3 \sigma^2 (1 + 2\alpha). \quad (3.5.6)$$

Сравнивая (3.5.6) с соответствующим соотношением в стандартной общей теории относительности, получаем выражение для эффективной массы центрального источника

$$M_{\text{эф}} = \frac{r_g c^2}{2k} [(1 + 3\alpha) - \alpha (3V_0^2 + W_0)] = M_0 + M_1, \quad (3.5.7)$$

где M_1 — часть $M_{\text{эф}}$, зависящая от параметров пробной частицы. Это существенно новое свойство 5-мерной теории.

Вычисления, аналогичные стандартным в общей теории относительности, дают для смещения перигелия (Меркурия) значение (за один оборот)

$$\delta\varphi = \delta\varphi_{\text{ото}} (1 + 2\alpha), \quad (3.5.8)$$

где $\delta\varphi_{\text{ото}}$ — угловое смещение в общей теории относительности. Аналогично находим поправку к известному общерелятивистскому эффекту отклонения лучей света, проходящих вблизи Солнца,

$$\delta\beta = \delta\beta_{\text{ото}} (1 - \alpha/2), \quad (3.5.9)$$

где $\delta\beta_{\text{ото}}$ — угол отклонения в общей теории относительности.

Из формул (3.5.8) и (3.5.9) следует, что при достаточно малых значениях параметра α различия между классическими эффектами в общей теории относительности и в 5-мерной теории могут быть неощутимыми (см. [33]).

Значительно более существенные эффекты 5-мерия можно ожидать, используя пятое уравнение геодезической (3.5.3). Для

частиц с $q/\sqrt{km} \gg 1$ из (3.5.3) находим для отношения электрического заряда к массе в первом приближении по r_g/r :

$$\frac{q^2}{m^2} = \frac{q_0^2}{m_0^2} \left(1 - \alpha \frac{r_g}{r} \frac{c_0^2}{4km_0^2} \right). \quad (3.5.10)$$

Отсюда следует, что это отношение, измеренное на Земле, должно изменяться с высотой из-за влияния скалярного заряда Земли. Кроме того, это отношение должно изменяться вместе с изменением расстояния r от Земли до Солнца (из-за влияния скалярного заряда Солнца на отношение q/m). Учитывая, что орбита Земли — эллипс (максимальное расстояние в начале июля ~ 152 млн км и минимальное расстояние в начале января ~ 147 млн км), следует ожидать сезонных изменений отношения q/m для измерений, проведенных на Земле. При этом наиболее выгодно производить измерения для частиц с максимальным значением q/m , т. е. для электронов $e/m \approx 10^{18}$. Величина вариаций зависит от отношения r_g/r , а также от значения параметра α , который должен быть определен экспериментально.

Имеются косвенные указания на то, что определение α может быть произведено уже при существующей точности экспериментальных измерений [20]. При этом существенно, чтобы сопоставлялись результаты различных по физической природе экспериментов, в которых измеряются величины, зависящие от разных комбинаций констант q и m (теория допускает изменения как одной из них, так и вариации обеих). В качестве примера можно назвать измерения джозефсоновской частоты $2e/h$ или определения величины h/e^2 на основе квантового эффекта Холла. Тогда даже при сезонном изменении эталонов можно надеяться зарегистрировать предсказанный эффект за счет различного характера вариаций. Заметим, что величина эффекта зависит также от используемых в эталоне носителей заряда через их массу (различные отношения q/m в формуле (3.5.3)). Вариации q/m могли бы также сказаться при регулярных измерениях постоянной Ридберга для оптических переходов в атомах.

Следует отметить, что теоретический анализ имеющихся экспериментальных данных на предмет выделения данного эффекта затруднен тем, что в публикациях, как правило, отсутствуют указания на время года, когда были проведены соответствующие измерения. Анализ ряда результатов измерений джозефсоновской частоты, опубликованных в [52] и привязанных ко времени года, обнаруживает тенденцию зависимости частоты от времени года, причем именно указанного здесь характера [20].

Другое возможное проявление изменения q/m можно усмотреть в обсуждаемом геофизиками эффекте сезонной периодичности частоты землетрясений. Характерно, что этот эффект,

наблюдаемый синхронно в обоих полушариях, является твердо установленным и может быть объяснен с помощью формулы (3.5.3). Действительно, колебания отношения q/m повлекут за собой колебания упругих сил в коре Земли, противодействующих силам гравитационного сжатия, что приведет к сезонным колебаниям земной коры, изменению давления и может явиться спусковым механизмом землетрясений.

Заметим, что описанный здесь эффект является именно следствием единого геометрического описания гравитации и электромагнетизма и, как правило, не возникает в большинстве теорий с феноменологическим образом сконструированным лагранжианом для гравитационного, электромагнитного и скалярного полей. По этой причине можно утверждать, что экспериментальное обнаружение подобного эффекта явилось бы свидетельством в пользу 5-мерного пространства-времени.

§ 3.6. Однородные изотропные космологические модели в 5-мерной теории

Рассмотрим однородные изотропные космологические модели параллельно в двух ветвях 5-мерной теории: 1) с внешним тензором энергии-импульса материи Q_{AB} [16] и 2) в сугубо геометрической теории (когда справа в уравнениях Эйнштейна стоит лишь скалярное фундаментальное поле). Предположим в обеих ветвях, что в целом материя, заполняющая пространство, электрически нейтральна, т. е. $Q_5^{\mu} = Q_{55} = 0$, 5-метрика цилиндрична по 5-й координате, $F_{\mu\nu} = 0$. Кроме того, положим $\Lambda = 0$. Согласно соображениям предыдущих параграфов выберем вариант (в) метрики 4-мерных пространственно-временных сечений, т. е.

$$dI^2 = G_{AB}^0 dx^A dx^B = \lambda_5^0 G_{AB} dx^A dx^B = \lambda_5^0 \left\{ a^2 \left[dx_0^2 - dx_1^2 - \left(\frac{\sin^2 x_1}{\text{sh}^2 x_1} \right) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] - dx_5^2 \right\}, \quad (3.6.1)$$

где a и λ_5^0 — функции от x^0 . Представим λ_5^0 в виде $\lambda_5^0 = \exp \Phi$, где Φ — также функция от x^0 . Тогда уравнения (3.2.12), (3.2.14) записываются следующим образом:

$${}^4 R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} {}^4 R = 3 (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi) - 3 (\nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi + g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Phi \nabla_\beta \Phi) + \kappa T_{\mu\nu}; \quad (3.6.2)$$

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \Phi + g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Phi \nabla_\beta \Phi - 1/6 {}^4 R = 0. \quad (3.6.3)$$

В ветви 1 выберем тензор энергии-импульса пылевидной материи, который в сопутствующей системе отсчета имеет компоненты

$$T_{\mu\nu} \tau^\mu \tau^\nu = \rho c^2; \quad T_{\mu\nu} \tau^\mu h_k^\nu = 0; \quad T_{\mu\nu} h_i^\mu h_k^\nu = 0, \quad (3.6.4)$$

где $\rho(x^0)$ — плотность, τ — хронометрическим образом откалиброванная 4-скорость сопутствующей системы отсчета (см. § 1.2). Ясно, что в ветви 2 $T_{\mu\nu} \equiv 0$.

А. Закрытые однородные изотропные модели. Используя формулы для монадных 4-мерных величин (введенные в § 1.2), находим обладающие нетривиальным содержанием компоненты уравнений (3.6.2)–(3.6.3) (соответственно проекции на $\tau^{\mu\nu}$, $h_i^{\mu} h_k^{\nu}$ и (3.6.3)):

$$1 + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -3\dot{\Phi} \frac{\dot{a}}{a} - 2\dot{\Phi}^2 + \frac{\kappa \rho c^2 a^2}{3}; \quad (3.6.5)$$

$$-1 + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2 \frac{\ddot{a}}{a} = 3\ddot{\Phi} + 3\dot{\Phi} \frac{\dot{a}}{a} + 3\dot{\Phi}^2; \quad (3.6.6)$$

$$1 + \frac{\ddot{a}}{a} = -\ddot{\Phi} - 2\dot{\Phi} \frac{\dot{a}}{a} - \dot{\Phi}^2. \quad (3.6.7)$$

Начнем с решения уравнений, общих для обеих ветвей. Произведя замену переменных $ae^{\Phi} = e^{\mu}$, уравнение (3.6.7) приводим к виду

$$\ddot{\mu} + \dot{\mu}^2 + 1 = 0. \quad (3.6.8)$$

Его решение

$$e^{\mu} = ae^{\Phi} = A \sin(x^0 + C_1), \quad (3.6.9)$$

где A и C_1 — константы интегрирования. В дальнейшем будем считать начальную фазу $C_1 = 0$.

Умножим (3.6.7) на 3 и сложим с уравнением (3.6.6), тогда, введя обозначение $\dot{a}/a = z$ и используя (3.6.9), находим

$$\dot{z} - z^2 + 2 = -3z \operatorname{ctg} x^0. \quad (3.6.10)$$

Из множества решений этого уравнения выделим два, представляющих наибольший интерес:

$$z_1 = \operatorname{ctg} \frac{x^0}{2} \rightarrow a = a_0 (1 - \cos x^0); \quad \lambda_5^0 = \frac{A}{a_0} \operatorname{ctg} \frac{x^0}{2}; \quad (3.6.11)$$

$$z_2 = \frac{1 + \cos^3 x^0}{\sin x^0 \cos x^0} \rightarrow a = a_1 \frac{\sin^2 x^0}{\cos x^0}; \quad \lambda_5^0 = \frac{A}{a_1} \operatorname{ctg} x^0. \quad (3.6.12)$$

Теперь отдельно рассмотрим обе ветви 5-мерной теории:

1) Подставляя решения в уравнение (3.6.5), легко убедиться, что наличию внешнего материального источника соответствует лишь решение (3.6.11). Для плотности ρ имеем

$$\rho = \frac{3}{\kappa a_0^2 c^2 \sin^2 x^0 (2 - \cos x^0)}. \quad (3.6.13)$$

Эволюция этой закрытой модели описывается точно такими же уравнениями, что и закрытая модель Фридмана:

$$\begin{aligned} a &= a_0 (1 - \cos x^0); \\ \tau &= a_0 (x^0 - \sin x^0). \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

Полная масса

$$M = 2\pi^2 a^3 \rho = \frac{6\pi^2 a_0}{\kappa c^2} \left[1 - \frac{2 \cos x^0}{\sin^2 x^0} (1 - \cos x^0) \right] \quad (3.6.15)$$

изменяется от нуля до бесконечности при $x^0 = \pi$ и затем опять уменьшается до нуля при $x^0 = 2\pi$. Вместе с вкладом скалярного

поля λ_5^0 суммарная масса вселенной остается постоянной.

Особо следует отметить, что при $x^0 \rightarrow 0$ (π) скалярное поле λ_5^0 стремится к бесконечности: $\lambda_5^0 \simeq 2A/a_0 x^0$. Как отмечалось

в § 3.4, скалярное поле λ_5^0 определяет зависимость от координат (времени) отношения электрического заряда к массе. Условие вещественности значений характеристик заряженных частиц накладывает ограничения на интервал времени τ , в пределах которого сохраняется смысл вводимых понятий и уравнений. Из (3.5.2) следует, что при $W_0 > 1$ (что имеет место для реальных частиц) стандартные понятия теряют смысл раньше, чем возникают сингулярности.

2) Полностью геометризованной теории соответствует решение (3.6.12), при котором $\rho = 0$ и уравнение (3.6.5) выполняется тождественно. Эволюция такой гипотетической закрытой модели определяется следующими уравнениями в параметрическом виде:

$$a = a_1 \frac{\sin^2 x^0}{\cos x^0}; \quad (3.6.16)$$

$$\tau = a_1 \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{x^0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin x^0 \right].$$

Отсюда следует, что при $x^0 = \pi/2$ радиус мира становится бесконечным, однако это достигается за бесконечный интервал времени τ . Таким образом, в полностью геометризованной теории характер эволюции закрытой модели вселенной качественно иной, чем в модели Фридмана: модель бесконечно долго расширяется от сингулярного состояния.

Формально полагая правую часть (3.6.5) равной $\kappa c^2 \tilde{\rho}$, в данной модели получаем для эффективной плотности геометризованной материи

$$\tilde{\rho} = \frac{3(1 + 3 \cos^2 x^0)}{\kappa a_1^2 c^2 \sin^6 x^0}; \quad (3.6.17)$$

$\tilde{\rho}$ изменяется от бесконечности при $x^0=0$ до предельного значения $\tilde{\rho}=3/\kappa a_1^2 c^2$ при $x^0=\pi/2$.

Б. Открытые однородные изотропные модели находятся из уравнений

$$-1 + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -3\dot{\Phi} \frac{\dot{a}}{a} - 2\dot{\Phi}^2 + \frac{\kappa \rho c^2 a^2}{3}; \quad (3.6.18)$$

$$1 + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2 \frac{\ddot{a}}{a} = 3\ddot{\Phi} + 3\dot{\Phi} \frac{\dot{a}}{a} + 3\dot{\Phi}^2; \quad (3.6.19)$$

$$-1 + \frac{\ddot{a}}{a} = -\ddot{\Phi} - 2\dot{\Phi} \frac{\dot{a}}{a} - \dot{\Phi}^2. \quad (3.6.20)$$

Аналогичная замена $a e^\Phi = e^\mu$ приводит уравнение (3.6.20) к виду

$$\ddot{\mu} + \mu^2 - 1 = 0,$$

откуда находим

$$e^\mu = A \operatorname{sh} x^0; \quad \dot{\Phi} + \dot{a}/a = \operatorname{cth} x^0. \quad (3.6.21)$$

Из уравнения

$$\dot{z} - z^2 - 2 = -3z \operatorname{cth} x^0,$$

соответствующего (3.6.10), получаем

$$z_1 = \operatorname{cth} \frac{x^0}{2} \rightarrow a = a_0 (\operatorname{ch} x^0 - 1); \quad \lambda_5^0 = \frac{A}{a_0} \operatorname{cth} \frac{x^0}{2}; \quad (3.6.22)$$

$$z_2 = \frac{1 + \operatorname{ch}^2 x^0}{\operatorname{sh} x^0 \operatorname{ch} x^0} \rightarrow a = a_1 \frac{\operatorname{sh}^2 x^0}{\operatorname{ch} x^0}; \quad \lambda_5^0 = \frac{A}{a_1} \operatorname{cth} x^0. \quad (3.6.23)$$

Опять отдельно рассмотрим обе ветви 5-мерной теории:

1) Первое решение соответствует ветви теории с внешним материальным полем. Подставляя (3.6.22) в (3.6.18), находим для плотности ρ отрицательное значение

$$\rho = -\frac{3}{\kappa a_0^2 c^2 \operatorname{sh}^2 x^0 (\operatorname{ch} x^0 - 1)}, \quad (3.6.24)$$

что физически неприемлемо. Эволюция этой модели описывается точно такими же уравнениями, что и эволюция открытой модели Фридмана:

$$a = a_0 (\operatorname{ch} x^0 - 1); \quad \tau = a_0 (\operatorname{sh} x^0 - x^0). \quad (3.6.25)$$

Опять отметим, что вследствие (3.5.2) сингулярность плотности (3.6.24) лежит за пределами области вещественности отношения электрического заряда к массе пробных частиц.

2) Гипотетической полностью геометризованной теории соответствует решение (3.6.23), из которого находим закон эволюции открытой модели

$$a = a_1 \frac{\operatorname{sh}^2 x^0}{\operatorname{ch} x^0}; \quad \tau = a_1 \left(\operatorname{sh} x^0 - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{x^0} + \frac{\pi}{2} \right), \quad (3.6.26)$$

т. е., как и в открытой модели Фридмана, происходит бесконечно долгое расширение от сингулярного состояния. Опять формально вводя плотность скалярной материи, получаем

$$\tilde{\rho} = \frac{3(1 + 3 \operatorname{ch}^2 x^0)}{\kappa a_1^2 c^2 \operatorname{sh}^6 x^0}, \quad (3.6.27)$$

т. е. $\tilde{\rho}$ изменяется от бесконечности при $x^0=0$ до как угодно малых значений при достаточно больших x^0 .

Ряд других космологических моделей рассмотрен в [53].

§ 3.7. Некоторые замечания о теориях со скалярным полем

Перечислим ряд направлений исследований, где использовались скалярные поля и которые могут быть сопоставлены с изложенной здесь 5-мерной теорией.

1. Прежде всего следует еще раз напомнить, что обширный цикл работ по скалярно-тензорным теориям типа Бранса—Дикке имеет своим истоком именно 5-мерие. Как известно, в теории Бранса—Дикке скалярное поле вводится феноменологически с помощью специальной дополнительной константы ω . Ее предполагается найти из эксперимента. В 5-мерной теории подобной константы нет, однако появляется неопределенность в описании взаимодействия скалярного поля с внешней материей. Другим отличием является то, что в 5-мерной теории автоматически получается взаимодействие с электромагнитным полем, тогда как в теории Бранса—Дикке для этого необходимы дополнительные постулаты. (Обсуждение соотношения этих двух теорий можно найти в [72].)

2. В связи с обсуждавшейся в гл. 2 гипотезой грубого описания через поле λ_5 вещества следует отметить связь 5-мерной теории (с таким пониманием λ_5) с вариантом теории прямого межчастичного «гравитационного» взаимодействия Хойла и Нарликара [29, с. 73]. В обеих теориях структура членов в лагранжианах, содержащих скалярное поле, одинакова. Для отождествления 5-мерной теории без внешней материи с теорией Хойла и Нарликара в (3.2.12) следует положить $\lambda_5 = \Psi^{2/3}$.

3. Можно указать другой вариант 5-мерной теории, не такой экстремальный как только что упомянутый, но все же весьма специфичный. Он состоит в том, что допускается существование внешней материи, но именно с таким тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, что он полностью компенсируется отрицательным вкла-

дом скалярного поля λ_5 . Напомним, что в § 3.6 рассмотрены однородные изотропные космологические модели с сохраняющимся суммарным $T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}(\lambda_5)$. Этот вариант можно было бы связать с обсуждавшейся в литературе идеей о возникновении мира из вакуума и с некоторыми космологическими следствиями этой гипотезы (заметим, что ранее эта идея реализовывалась вводом в правую часть 4-мерных уравнений Эйнштейна скалярного поля с отрицательным вкладом в $T_{\mu\nu}$).

4. В настоящее время значительное внимание уделяется исследованиям проблемы квантования космологических моделей. В литературе с разных сторон анализировались в рамках общей теории относительности квантовая модель ДеВитта закрытой однородной изотропной вселенной и модель Мизнера однородной анизотропной вселенной. Известны трудности в этих исследованиях, связанные с проблемой введения времени. В изложенных выше 5-мерных космологических моделях появляется дополнительная степень свободы — компонента 5-метрики G_{55} , которая в совокупности с масштабным фактором $a(x^0)$ моделей Фридмана расширяет возможности построения квантовых космологических моделей, позволяет ввести время [19].

5. При использовании в 5-мерной теории зависимости от 5-й координаты появляется любопытная связь ее со стандартной 4-мерной теорией с космологической постоянной. Действительно, из структуры уравнений (2.4.11) — (2.4.13) без внешней материи следует, что зависимость λ_5 от 5-й координаты может быть выбрана в виде $\lambda_5 = \varphi(x^5) \exp(\alpha x^5)$, где α — вещественная или мнимая постоянная. Пусть электромагнитное поле отсутствует, $\Lambda = 0$ и $\lambda_5 = \exp(\alpha x^5)$. Тогда (2.4.12) выполняется тождественно, уравнения (2.4.11) принимают вид стандартных 4-мерных уравнений Эйнштейна с космологическим членом

$${}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^4R - 3\alpha^2 g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.7.1)$$

а (2.4.13) следует из (2.4.11). Известно много решений этих уравнений. От них можно перейти к решениям системы уравнений (2.4.11) — (2.4.13) с отличным от нуля электромагнитным полем и λ_5 , зависящим от всех координат, например, с помощью преобразований (3.4.1).

6. Имеется специфический вариант 5-мерной теории, развивавшийся Ю. Б. Румером [86], так называемая 5-оптика. В такой теории частицы движутся по изотропным геодезическим (в 5-мерном смысле). Из уравнений геодезических (2.5.4) легко усмотреть исчезновение членов со скалярным полем. Забегая вперед, укажем, что в § 7.2 рассмотрена 6-оптика с подобным же свойством.

7. В уже упоминавшемся цикле работ по 5-мерию Э. Шмунцера [110] использован имеющийся произвол в определении тензора энергии-импульса внешней материи и взаимодействия

ее со скалярным полем таким образом, чтобы из 5-мерных уравнений типа Эйнштейна стандартным образом получались уравнения движения частиц без слагаемых со скалярным полем. В таком варианте теории основные эффекты скалярного поля проявляются при рассмотрении электромагнитных взаимодействий.

Резюмируя изложенное в этой главе, можно утверждать:

а) Скалярное фундаментальное поле, возникающее в 5-мерных теориях, нуждается в дополнительных постулатах, доопределяющих его взаимодействие с источниками.

б) В настоящий момент нет твердо установленных данных, свидетельствующих о существовании фундаментального скалярного поля. Пока оно имеет гипотетический характер.

в) Наиболее подходящими для обнаружения скалярного поля следует считать эксперименты с электрически заряженными частицами. Скалярное поле могло бы проявиться в виде эффекта переменности отношения электрического заряда частиц к их массе.

Отсутствие эффектов «скаляризма», видимо, не следует считать доводом против многомерия. Скорее это нужно расценивать как свидетельство в пользу особого подхода к использованию вариационного принципа в 5-мерии.

Глава 4. 6-МЕРНАЯ МОДЕЛЬ
ГРАВИ-ЭЛЕКТРО-СЛАБЫХ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

§ 4.1. Модель электрослабого взаимодействия
Вайнберга—Салама

Излагаемая в этой главе геометрическая 6-мерная модель объединяет 5-мерную теорию электромагнитных и гравитационных взаимодействий с моделью электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама. На протяжении всей этой главы нам придется сопоставлять нашу теорию с моделью Вайнберга—Салама. Последняя неоднократно излагалась многими авторами в различных книгах [73, 93, 106]. Для удобства читателя в этом параграфе приведены в сжатом виде ключевые понятия и соотношения стандартной модели Вайнберга—Салама в используемых нами обозначениях и системе единиц. При этом разделим исходную $U(1) \times SU(2)$ -симметричную часть теории и теорию со спонтанно нарушенной симметрией (унитарную калибровку).

А. Девять членов плотности лагранжиана $U(1) \times SU(2)$ -симметричной теории [73]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & g^{\mu\nu} (\overset{\times\times}{\partial}_\mu \Phi^*) \overset{\times\times}{\partial}_\nu \Phi - \frac{1}{2} \lambda^2 \left(|\Phi|^2 - \frac{1}{2} \eta^2 \right)^2 - \\ & - \frac{1}{16\pi} F(B)_{\mu\nu} F(B)^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi} \text{Sp} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\hbar c \bar{L} \gamma^\mu \overset{\times\times}{\partial}_\mu L + \\ & + i\hbar c \bar{e}_R \gamma^\mu \overset{\times\times}{\partial}_\mu e_R + i\hbar c \bar{\nu}_R \gamma^\mu \overset{\times\times}{\partial}_\mu \nu_R - \\ & - f_e (\bar{L}_R \Phi + \bar{e}_R L \Phi^\times) - f_\nu (\bar{L}_\nu \nu_R \Phi_C + \bar{\nu}_R L \Phi_C^*) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

описывают а) изотопический дублет комплексных скалярных полей $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_0 \end{pmatrix}$, б) четыре вещественных векторных поля: B_a , отвечающее абелевой $U(1)$ -симметрии (изотопический синглет), и три поля $A(1)_a$, $A(2)_a$, $A(3)_a$, отвечающих локальной неабелевой $SU(2)$ -симметрии (изотопический триплет), в) изотопический дублет $L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$ левых компонент фермионов: левого нейтрино ν_L и левого электрона e_L , г) два изотопических синглета: правую компоненту нейтрино ν_R и правую компоненту электрона e_R . Все перечисленные поля первоначально безмассовые. Здесь использованы понятия локальной симметрии, которые подробно поясняться не будут; для нашей цели будет дос-

точно конкретизировать соответствующие члены плотности лагранжиана. Понятие изотопического пространства означает формальную, внешнюю к 4-мерному геометрическому пространству-времени конструкцию, позволяющую по известным рецептам единообразно описывать комплексы величин (за подробными разъяснениями отсылаем читателя к специальной литературе [73, 93]). В (4.1.1) использованы операторы $\overset{\times\times}{\partial}_\mu$ — удлиненные матричные производные, определяемые из принципов локальной симметрии относительно групп $U(1)$ и $SU(2)$:

$$\overset{\times\times}{\partial}_\mu = I_2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ig_1}{\hbar c} \frac{Y}{2} B_\mu - \frac{ig_2}{\hbar c} T(k) A(k)_\mu; \quad (4.1.2)$$

где Y — гиперзаряд, $T(k)$ — изотопический спин, g_1 — константа взаимодействия с векторным полем B_μ , g_2 — константа взаимодействия с векторными полями $A(k)_\mu$ (g_1 и g_2 не фиксируются теорией).

Последовательно кратко охарактеризуем все девять слагаемых.

Для комплексного скалярного поля $Y=1$ и $T(k) = \frac{1}{2} \sigma(k)$, где $\sigma(k)$ — матрицы Паули. Следовательно, (4.1.2) записывается в матричном виде

$$\overset{\times\times}{\partial}_\mu \Phi = \left(I_2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ig_1}{2\hbar c} B_\mu I_2 - \frac{ig_2}{2\hbar c} \sigma(k) A(k)_\mu \right) \begin{pmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.3)$$

Первый член в (4.1.1) описывает свободное движение скалярных полей и их взаимодействие с векторными полями. Второй член

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \lambda^2 \left(|\Phi|^2 - \frac{1}{2} \eta^2 \right)^2 = & -\frac{1}{2} \lambda^2 \left\{ (\Phi_+^* \Phi_+)^2 + (\Phi_0^* \Phi_0)^2 + \right. \\ & \left. + 2(\Phi_+^* \Phi_+) (\Phi_0^* \Phi_0) - \eta^2 (\Phi_+^* \Phi_+ + \Phi_0^* \Phi_0) + \frac{1}{4} \eta^4 \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

где λ , η — не фиксируемые теорией постоянные, существен для реализации механизма Хиггса спонтанного нарушения симметрии. Постоянная величина $-(1/8)\lambda^2\eta^4$, не существенная в отсутствие гравитационных взаимодействий, при переходе к плотности лагранжиана в искривленном многообразии соответствует появлению космологического члена в уравнениях Эйнштейна.

В третьем члене, описывающем свободное векторное поле B_μ , использовано обозначение

$$F(B)_{\mu\nu} = \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (4.1.5)$$

Выражение для матричных величин

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{ig_2}{\hbar c} (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu), \quad (4.1.6)$$

где

$$A_\mu = \frac{1}{2} (A(1)_\mu \sigma(1) + A(2)_\mu \sigma(2) + A(3)_\mu \sigma(3)),$$

описывает три взаимодействующих векторных поля $A(1)_\mu$, $A(2)_\mu$, $A(3)_\mu$. Легко показать, что

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8\pi} \text{Sp} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu} = & -\frac{1}{16\pi} \left\{ F(1)_{\mu\nu} F(1)^{\mu\nu} + F(2)_{\mu\nu} F(2)^{\mu\nu} + \right. \\ & + F(3)_{\mu\nu} F(3)^{\mu\nu} + \frac{4g_2}{\hbar c} [F(1)_{\mu\nu} A(2)^\mu A(3)^\nu + F(2)_{\mu\nu} A(3)^\mu A(1)^\nu + \\ & + F(3)_{\mu\nu} A(1)^\mu A(2)^\nu] + \frac{2g_2^2}{(\hbar c)^2} [A(1)_\mu A(1)^\mu A(2)_\nu A(2)^\nu + \\ & + A(1)_\mu A(1)^\mu A(3)_\nu A(3)^\nu + A(2)_\mu A(2)^\mu A(3)_\nu A(3)^\nu - \\ & \left. - (A(1)_\mu A(2)^\mu)^2 - (A(1)_\mu A(3)^\mu)^2 - (A(2)_\mu A(3)^\mu)^2 \right\}. \quad (4.1.7) \end{aligned}$$

В пятом слагаемом удлиненную производную следует записать с учетом того, что для левых спиноров $Y = -1$ и $T = \sigma/2$, т. е.

$$\partial_\mu^{\times\times} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} = \left(I_2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{ig_1}{2\hbar c} B_\mu - \frac{ig_2}{2\hbar c} A(k)_\mu \sigma(k) \right) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}. \quad (4.1.8)$$

Учитывая это, находим

$$\begin{aligned} i\hbar c \bar{L} \gamma^\mu \partial_\mu^{\times\times} L = & i\hbar c \left[\bar{\nu}_L \gamma^\mu \frac{\partial \nu_L}{\partial x^\mu} + \bar{e}_L \gamma^\mu \frac{\partial e_L}{\partial x^\mu} + \right. \\ & + \frac{ig_1}{4\hbar c} B_\alpha (\bar{\nu}_L \gamma^\alpha \nu_L + \bar{e}_L \gamma^\alpha e_L) - \frac{ig_2}{4\hbar c} A(3)_\alpha (\bar{\nu}_L \gamma^\alpha \nu_L - \bar{e}_L \gamma^\alpha e_L) - \\ & \left. - \frac{ig_2}{4\hbar c} A(2)_\alpha (i\bar{\nu}_L \gamma^\alpha e_L - i\bar{e}_L \gamma^\alpha \nu_L) - \frac{ig_2}{4\hbar c} A(1)_\alpha (\bar{\nu}_L \gamma^\alpha e_L + \bar{e}_L \gamma^\alpha \nu_L) \right]. \quad (4.1.9) \end{aligned}$$

Слагаемое для правого электрона записывается с учетом того, что $Y = -2$, $T = 0$, т. е.

$$\partial_\mu^{\times\times} e_R = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{ig_1}{\hbar c} B_\mu \right) e_R. \quad (4.1.10)$$

В итоге получаем

$$i\hbar c \bar{e}_R \gamma^\mu \partial_\mu^{\times\times} e_R = i\hbar c \left(\bar{e}_R \gamma^\mu \frac{\partial e_R}{\partial x^\mu} + \frac{ig_1}{\hbar c} \bar{e}_R \gamma^\mu e_R B_\mu \right). \quad (4.1.11)$$

В седьмом слагаемом для правого нейтрино ($Y=0$, $T=0$)

$$\partial_\mu^{\times\times} \nu_R = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \nu_R, \quad (4.1.12)$$

следовательно,

$$i\hbar c \bar{\nu}_R \gamma^\mu \partial_\mu^{\times\times} \nu_R = i\hbar c \bar{\nu}_R \frac{\partial \nu_R}{\partial x^\mu}. \quad (4.1.13)$$

При записи восьмого слагаемого следует учесть, что обозначение Φ^x соответствует транспонированию столбца Φ и переносу его через L влево. В итоге имеем

$$-f_e (\bar{L} e_R \Phi + \bar{e}_R L \Phi^x) = -f_e (\bar{\nu}_L e_R \Phi_+ + \bar{e}_L e_R \Phi_0 + \bar{e}_R \nu_L \Phi_+^* + \bar{e}_R e_L \Phi_0^*), \quad (4.1.14)$$

где f_e — не фиксируемая теорией постоянная.

В последнем слагаемом Φ_c зарядово сопряжено изоспину Φ , т. е. $\Phi_c = \begin{pmatrix} \Phi_0^* \\ -\Phi_+^* \end{pmatrix}$:

$$-f_\nu (\bar{L} \nu_R \Phi_c + \bar{\nu}_R L \Phi_c^x) = -f_\nu (\bar{\nu}_L \nu_R \Phi_0^* + \bar{\nu}_R \nu_L \Phi_0 - \bar{e}_L \nu_R \Phi_+^* - \bar{\nu}_R e_L \Phi_+), \quad (4.1.15)$$

где f_ν — также не фиксируемая теорией постоянная.

Б. Основные определения наблюдаемых величин. Из первичных констант взаимодействия g_1 и g_2 определяется угол Вайнберга θ_W так, что

$$\bar{g} = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}; \quad g_1 \bar{g} = \sin \theta_W; \quad g_2 \bar{g} = \cos \theta_W. \quad (4.1.16)$$

Экспериментально найдено, что $\theta_W \approx 30^\circ$. Из первичных векторных полей B_μ и $A(3)_\mu$ поворотом на угол Вайнберга определяются нейтральные векторные поля: A_μ — векторный потенциал электромагнитного поля и Z_μ — векторный потенциал нейтрального (становящегося массивным) бозона:

$$A_\mu = B_\mu \cos \theta_W + A(3)_\mu \sin \theta_W; \quad Z_\mu = -B_\mu \sin \theta_W + A(3)_\mu \cos \theta_W. \quad (4.1.17)$$

Величина \bar{g} в (4.1.16) характеризует взаимодействие с полем Z_μ , а взаимодействие с электромагнитным полем определяется электрическим зарядом

$$e = g_1 g_2 / \bar{g} = g_2 \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W = \bar{g} \sin \theta_W \cos \theta_W. \quad (4.1.18)$$

Полный электрический заряд частицы Q (в единицах e) определяется формулой

$$Q = T_3 + Y/2, \quad (4.1.19)$$

являющейся аналогом формулы Гелл-Манна — Нишиджимы для адронных изомультиплетов.

Отдельно запишем через введенные величины часть удлинненной производной (4.1.2), описывающую взаимодействие нейтральными векторными полями

$$\overset{\times\times}{\partial}_\mu \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{iQe}{\hbar c} A_\mu + \frac{ie}{\hbar c \sin \theta_W \cos \theta_W} (T_3 - Q \sin^2 \theta_W) Z_\mu. \quad (4.1.20)$$

Из оставшихся двух векторных полей $A(1)_\mu$ и $A(2)_\mu$ строятся два поля заряженных векторных бозонов

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (A(1)_\mu + iA(2)_\mu); \quad W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (A(1)_\mu - iA(2)_\mu). \quad (4.1.21)$$

В. Механизм Хиггса спонтанного нарушения симметрии. Не будем углубляться в обсуждение всех аспектов механизма Хиггса (см., например [73, 93]). Напомним лишь самые необходимые сведения. Так, используя локальную инвариантность, выбирают φ в виде

$$\varphi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \chi \end{pmatrix}, \quad (4.1.22)$$

где η — некоторая постоянная, χ — вещественное скалярное поле. Эта формула определяет так называемую унитарную калибровку теории. В ней плотность лагранжиана существенно упрощается. Отдельно выпишем в унитарной калибровке часть плотности лагранжиана, описывающую скалярное поле,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} (\overset{\times\times}{\partial}_\mu \varphi^*) \overset{\times\times}{\partial}_\nu \varphi - \frac{1}{2} \lambda^2 \left(|\varphi|^2 - \frac{1}{2} \eta^2 \right)^2 = \\ = g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial x^\mu} + \frac{i\bar{g}}{2\hbar c} Z_\mu \varphi_0^* \right) \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x^\nu} - \frac{i\bar{g}}{2\hbar c} Z_\nu \varphi_0 \right) + \\ + \frac{g_2^2}{4(\hbar c)^2} \varphi^* \varphi (A(1)_\mu A(1)^\mu + A(2)_\mu A(2)^\mu) - \frac{\lambda^2}{2} (\varphi_0^* \varphi)^2 + \\ + \frac{\lambda^2 \eta^2}{2} (\varphi_0^* \varphi) - \frac{\lambda^2 \eta^4}{8}. \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Из этой формулы и (4.1.22) легко видеть появление массовых членов для векторных полей:

$$\frac{\eta^2}{8(\hbar c)^2} [\bar{g}^2 Z_\mu Z^\mu + g_2^2 (A(1)_\mu A(1)^\mu + A(2)_\mu A(2)^\mu)]. \quad (4.1.24)$$

Отсюда следует, во-первых, что для электромагнитного поля A_μ массовые вклады не возникают. Во-вторых, нейтральное векторное поле приобретает массу покоя

$$m_Z c^2 = \frac{1}{2} \bar{g} \eta \hbar c. \quad (4.1.25)$$

В-третьих, заряженные векторные поля $A(1)_\mu$ и $A(2)_\mu$ (или W_μ^+ и W_μ^-) приобретают одинаковые массы покоя

$$m_W c^2 = \frac{1}{2} g_2 \eta \hbar c. \quad (4.1.26)$$

На основании этих формул можно записать

$$m_W / m_Z = g_2 / \bar{g} = \cos \theta_W, \quad (4.1.27)$$

т. е. угол Вайнберга θ_W определяет отношение масс заряженных векторных бозонов к массе нейтрального.

Из (4.1.23) можно найти также массу покоя хиггсовского скалярного бозона. Последние три слагаемых при учете (4.1.22) записываются в виде

$$-\frac{\lambda^2}{8} \chi^2 (2\eta + \chi)^2, \quad (4.1.28)$$

откуда находится масса покоя скалярного поля χ

$$m_H c^2 = \lambda \eta (\hbar c). \quad (4.1.29)$$

Легко видеть, что появление массы m_H имеет существенно иной характер, что проявляется в виде дополнительной константы λ , которая отсутствует в формулах (4.1.25) и (4.1.26). Следует обратить внимание также на тот факт, что константа $-\frac{1}{8} \lambda^2 \eta^4$, соответствующая затравочной космологической постоянной, полностью компенсируется постоянным слагаемым η в формуле (4.1.22).

Массы покоя электрона и нейтрино обязаны взаимодействию фермионов со скалярным полем и возникают таким же образом, как и массы покоя векторных бозонов. Из членов лагранжиана (4.1.14) и (4.1.15) при учете (4.1.22) соответственно находятся массы покоя электрона и нейтрино:

$$m_e c^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hbar c) f_e \eta; \quad (4.1.30)$$

$$m_\nu c^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hbar c) f_\nu \eta.$$

§ 4.2. Гиперплотность лагранжиана 6-мерной модели

Во введении и в гл. 2 неоднократно подчеркивалось, что дополнительные координаты в реальном мире оказываются выделенными по сравнению с четырьмя классическими пространственно-временными координатами, тогда как в исходных соотношениях все они равноправны. В соответствии с этим будем исходить из некоторого выражения, соответствующего в определенном ниже смысле лагранжиану обычной теории. В нем все 6 (или 7 в последующих главах) координат полностью эк-

вивалентны. Назовем это выражение *гиперплотностью* лагранжиана. Откажемся от непосредственного применения к нему вариационных принципов. Видимо, область их правомерности ограничена рамками 4-мерного многообразия. Не будем пытаться с помощью выводимых на их основе многомерных уравнений искать зависимости рассматриваемых величин от дополнительных координат. Вместо этого будем полагать, что имеются какие-то другие закономерности, которые диктуют те или иные зависимости от x^5, x^6 (и x^7). Будем искать их из соображений симметрии, простоты и соответствия со стандартной теорией. Произведя 1+1+4-расщепление и выбрав зависимости от дополнительных координат, будем усреднять гиперплотности по ним, т. е. проинтегрируем по области их значений. В итоге получится выражение, записанное через 4-мерные тензоры и зависящее лишь от четырех классических координат. Его будем понимать как *плотность* лагранжиана, сопоставляемого с плотностями функции Лагранжа стандартной теории. Ясно, что в получившемся выражении сохранится множество следов от исходного многомерия, которые будут отождествляться с феноменологически вводимыми физическими полями и понятиями.

В соответствии с этой программой выберем в качестве 6-мерной гиперплотности лагранжиана выражение, слагающееся из геометрической части и части спинорной материи [28]

$$L = \frac{\sqrt{-{}^0G}}{4} \left\{ \frac{1}{\kappa} (\tilde{\Lambda} - {}^0\tilde{R}) + i\hbar c \chi^\mu \bar{\Psi} \Gamma^0_M \nabla_M \Psi \right\} + \{э. с.\}, \quad (4.2.1)$$

где 0G — определитель матрицы из компонент 6-мерного метрического тензора ${}^0G_{MN}$ аффинного многообразия с сигнатурой (+ — — — —); ${}^0\tilde{R}$ — 6-мерная скалярная кривизна многообразия с кручением, распадающаяся на две части: метрическую (риманову) 0R и обусловленную кручением:

$${}^0\tilde{R} = {}^0R - {}^0S_{MNP} {}^0S^{MNP}, \quad (4.2.2)$$

${}^0S_{MNP}$ — полностью антисимметричный по всем индексам тензор кручения; Ψ — 8-компонентный спинор в 6-мерном многообразии; $\nabla_M \Psi$ — 6-мерная ковариантная производная от спинора

$$\nabla_M \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} - \frac{1}{4} \Delta_M(NP) \Gamma^0(N) \Gamma^0(P) \Psi - \frac{1}{4} {}^0S_{MNP} \Gamma^0_N \Gamma^0_P \Psi. \quad (4.2.3)$$

Здесь $\Delta_M(NP)$ — 6-мерные коэффициенты вращения Риччи, Γ^0_M — квадратные 8-рядные матрицы (функции от координат), связанные с метрическим тензором соотношением

$$\Gamma^0_M \Gamma^0_N + \Gamma^0_N \Gamma^0_M = 2G^0_{MN} \cdot I_8, \quad (4.2.4)$$

I_8 — 8-рядная единичная матрица; $\tilde{\Lambda}$ — космологическая «постоянная» (кавычки означают, что в общем случае в $\tilde{\Lambda}$ можно ввести конформный фактор — функцию координат). Показатель степени μ при χ в спинорной части — некоторая постоянная величина. Здесь и в дальнейшем заглавные латинские индексы от K до Z принимают шесть значений: 0, 1, 2, 3, 5, 6. Везде, как и ранее, будет использоваться гауссова система единиц; фундаментальные константы \hbar, c, κ имеют указанные ранее стандартные значения. Во всех формулах (4.2.1) — (4.2.4) нуль над величинами означает, что они взяты в исходной метрике, от которой затем будет сделано конформное преобразование к 6-метрике G_{MN} .

Задача этой главы состоит в том, чтобы показать, что из 6-мерных геометрических величин и 6-мерного спинора Ψ можно получить все ключевые понятия 4-мерной теории гравитационных взаимодействий и модели электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама. Кроме того, будет показано, что из (4.2.1) получаются выражения, соответствующие всем девяти членам плотности лагранжиана Вайнберга—Салама (4.1.1) в унитарной калибровке. Перечислим используемые для этого процедуры и приемы:

- 1) 1+1+4-расщепление (из 6-метрики получатся компоненты 4-мерной метрики и двух нейтральных векторных полей);
- 2) конформное преобразование (из конформного фактора получатся два скалярных бозона, соответствующие дублету бозонов в модели Вайнберга—Салама);
- 3) существенное использование тензора кручения (именно кручением обусловлено существование бозонов W_{α^\pm} ; введение W -бозонов через метрику см. в приложении 2);
- 4) постулирование специальной (циклической) зависимости величин от координат x^5 и x^6 (номера гармоник этой зависимости соответствуют значениям гиперзаряда и проекции T_3 изотопического спина);
- 5) усреднение плотности лагранжиана по малым периодам зависимости от пятой и шестой координат;
- 6) специальное представление 6-мерных спинорных функций через стандартные 4-компонентные волновые функции электрона и нейтрино.

Все эти процедуры, за исключением (3) и (6), аналогичны использованным в гл. 2 при изложении 5-мерной теории.

§ 4.3. 1+1+4-расщепление 6-мерного многообразия

Эту процедуру можно рассматривать как переформулировку на случай 6-мерия диадного формализма (см. § 1.7), развитого в 4-мерной общей теории относительности для описания специальных классов систем отсчета. Отметим, что процедура 1+1+4-расщепления и конформного преобразования можно производить в любой последовательности. Практически удобнее начинать с конформного преобразования именно на 6-мерном уровне (см. следующий параграф), однако при записи выражений с конформным фактором уже будут использоваться операторы и понятия, вводимые при расщеплении. Поэтому, как и при изложении 5-мерия, начнем с изложения процедуры 1+1+4-расщепления с той лишь разницей, что расщеплять будем уже метрику G_{MN} , полученную конформным преобразованием из G_{MN} . Опять целесообразно представить эту часть теории в четырех разделах.

Алгебра. Представим 6-мерный метрический тензор G_{MN} (при сигнатуре (+ - - - -)) в виде

$$G_{MN} = g_{MN} - \lambda_M \lambda_N - \sigma_M \sigma_N, \quad (4.3.1)$$

где g_{MN} — метрический тензор локального 4-мерного пространственно-временного сечения, λ_M и σ_M — два ортонормированных вектора диады, ортогональные 4-мерному пространственно-временному сечению:

$$\lambda_M \lambda^M = \sigma_M \sigma^M = -1; \quad \lambda_N \sigma^N = 0; \quad g_{MN} \lambda^N = g_{MN} \sigma^N = 0. \quad (4.3.2)$$

Используем калибровку диадного метода, соответствующую дважды последовательно примененной калибровке 5-мерной теории (см. § 2.2). Она соответствует хронохориметрической калибровке диады или дважды примененной хронометрической калибровке в 4-мерной общей теории относительности (с поправкой на сигнатуру выделяемых координат). Исходными формулами являются:

$$\begin{aligned} \sigma^N &= \frac{G_6^N}{\sqrt{-G_{66}}} \rightarrow \sigma_N = \frac{G_{N6}}{\sqrt{-G_{66}}}; \\ \lambda^N &= \frac{{}^5G_5^N}{\sqrt{-{}^5G_{55}}} \rightarrow \lambda_N = \frac{{}^5G_{5N}}{\sqrt{-{}^5G_{55}}}. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

где ${}^5G_{MN} = G_{MN} - \sigma_M \sigma_N$ — 5-мерный метрический тензор, полученный из 6-мерного процедурой 1+5-расщепления. 6-Вектор σ^N направлен вдоль линии 6-й координаты. Выпишем в этой калибровке представления всех составляющих метрического тензора:

$$g_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - \frac{G_{\alpha 6} G_{6\beta} G_{55} + G_{\alpha 5} G_{\beta 5} G_{66}}{G_{55} G_{66} - G_{56}^2} + \frac{G_{56} (G_{6\alpha} G_{5\beta} + G_{5\alpha} G_{6\beta})}{G_{55} G_{66} - G_{56}^2};$$

$$g^{N\alpha} = G^{N\alpha}; \quad g_{N5} = g_{N6} = 0; \quad g_5^\alpha = g_6^\alpha = 0; \quad g_\beta^\alpha = G_\beta^\alpha; \quad g_\alpha^5 = \lambda^5 \lambda_\alpha;$$

$$g_\alpha^6 = \sigma^6 \sigma_\alpha + \lambda^6 \lambda_\alpha;$$

$$\lambda_N = \left\{ \frac{G_{56} G_{6\alpha} - G_{66} G_{5\alpha}}{\sqrt{-G_{66}} \sqrt{G_{55} G_{66} - G_{56}^2}}; \frac{\sqrt{G_{55} G_{66} - G_{56}^2}}{\sqrt{-G_{66}}}; 0 \right\}; \quad (4.3.4)$$

$$\lambda^N = \left\{ 0; 0; 0; 0; \frac{\sqrt{-G_{66}}}{\sqrt{G_{55} G_{66} - G_{56}^2}}; \frac{G_{56}}{\sqrt{-G_{66}} \sqrt{G_{55} G_{66} - G_{56}^2}} \right\};$$

$$\sigma^N = \left\{ 0; 0; 0; 0; 0; \frac{1}{\sqrt{-G_{66}}} \right\}; \quad \sigma_N = \left\{ \frac{G_{6\alpha}}{\sqrt{-G_{66}}}; \frac{G_{56}}{\sqrt{-G_{66}}}; -\sqrt{-G_{66}} \right\}.$$

Ключевыми (основными) величинами будем считать следующие 21: $g_{\alpha\beta}$, λ_α , σ_α , λ^5 , λ^6 , σ^6 . Отметим, что $\sigma_5 = \lambda^6 / \lambda^5 \sigma^6$, $\lambda_5 = -1 / \lambda^5$, $\lambda_6 = 0$.

В данной калибровке диадного метода выделяется множество систем координат, связанных преобразованиями

$$x'^6 = x'^6(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5, x^6); \quad (4.3.5)$$

$$x'^5 = x'^5(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5);$$

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (4.3.6)$$

В дальнейшем будет использован такой частный случай 6-мерных многообразий, когда вся зависимость 6-мерного метрического тензора G_{NM} от 5-й и 6-й координат может быть выделена в виде конформного фактора (см. § 4.4), т. е. метрика G_{MN} , полученная после конформного преобразования, уже не зависит от x^5 и x^6 . Для того чтобы после координатных преобразований (4.3.5) зависимость от x^5 и x^6 не возникала, следует ограничиться более узкими преобразованиями вида

$$x'^6 = x^6 + c x^5 + f_1(x^0, x^1, x^2, x^3); \quad (4.3.7)$$

$$x'^5 = x^5 + f_2(x^0, x^1, x^2, x^3).$$

Преобразования (4.3.7) и (4.3.5) обобщают (соответствуют) известные калибровочные преобразования в электродинамике.

В излагаемой теории будут использоваться либо скаляры, получающиеся проектированием 6-мерных тензоров на направления векторов λ_N и σ_N , либо 4-мерные тензоры, образованные из 6-мерных тензоров проекторами g_α^N . Все такие величины будут инвариантны относительно преобразований (4.3.5) и 4-мерно ковариантны при преобразованиях (4.3.6). Ясно, что

именно таковыми являются компоненты 4-мерного метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta}$.

Квадрат интервала 6-мерного многообразия представляется в виде

$$d\Sigma^2 = G_{MN} dx^M dx^N = ds^2 - (d\lambda)^2 - (d\sigma)^2, \quad (4.3.8)$$

где $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ — интервал 4-мерного пространственно-временного сечения; $d\sigma = \sigma_N dx^N$ — интервал вдоль 6-й координаты; $d\lambda = \lambda_N dx^N = \lambda_A dx^A$ — смещение вдоль вектора λ^N .

Физико-геометрические 4-тензоры. Как и в 4-мерном случае из составляющих метрического тензора и их первых производных первого порядка в общем случае можно построить 11 различных 4-мерных тензоров, которые можно интерпретировать как физические поля. Однако в данном частном случае 6-мерной геометрии с цилиндричностью по x^5 и x^6 шесть тензоров тождественно обращаются в нуль. Остаются отличными от нуля только пять:

$$\begin{aligned} \bar{F}_\alpha &= g_\alpha^M \sigma^N (\sigma_{M,N} - \sigma_{N,M}) = -\sigma^6 \sigma_{6,\alpha}; \quad \bar{F}_\alpha = g_\alpha^M \lambda^N (\lambda_{M,N} - \lambda_{N,M}) = \\ &= -\lambda^N \lambda_{N,\alpha}; \quad \bar{Q}_\alpha = \frac{1}{2} g_\alpha^M \lambda^N (\sigma_{M,N} - \sigma_{N,M}) = -\frac{1}{2} \lambda^N \sigma_{N,\alpha}; \quad (4.3.9) \end{aligned}$$

$${}^5 F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g_\alpha^M g_\beta^N (\lambda_{M,N} - \lambda_{N,M}); \quad {}^6 F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g_\alpha^M g_\beta^N (\sigma_{M,N} - \sigma_{N,M}). \quad (4.3.10)$$

Первые три вектора представляют собой напряженности неких полей, обязанные переменности дополнительных компонент метрики G_{55} , G_{56} , G_{66} ; последние два антисимметричных тензора будут соответствовать нейтральным векторным полям модели Вайнберга—Салама.

Операторы диадного дифференцирования. Из всех возможных операторов дифференцирования 4-мерных тензоров, приводящих к 4-мерным выражениям, инвариантным относительно (4.3.5), выделим следующие три ключевых оператора:

$$\partial_6^{++} = \sigma^N \frac{\partial}{\partial x^N} = \sigma^6 \frac{\partial}{\partial x^6}; \quad \partial_5^{++} = \lambda^N \frac{\partial}{\partial x^N} = \lambda^5 \frac{\partial}{\partial x^5} + \lambda^6 \frac{\partial}{\partial x^6}; \quad (4.3.11)$$

$$\partial_\alpha^{++} = g_\alpha^N \frac{\partial}{\partial x^N} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \lambda^5 \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial x^5} + (\sigma^6 \sigma_\alpha + \lambda^6 \lambda_\alpha) \frac{\partial}{\partial x^6}. \quad (4.3.12)$$

Все эти операторы не зависят от ранга и ковариантности дифференцируемых величин (являются аналогами хронометрически инвариантных операторов временного (1.2.7) и пространственного (1.2.8) дифференцирования в общей теории относительности). Оператор (4.3.12) соответствует части удлиненной производной (4.1.20) в модели Вайнберга—Салама.

Из основных соотношений и уравнений 6-мерной теории в диадном виде ограничимся здесь самым необходимым: записью метрической (римановой) части скалярной кривизны

$${}^6 R = {}^4 R + {}^5 F_{\alpha\beta} {}^5 F^{\alpha\beta} + {}^6 F_{\alpha\beta} {}^6 F^{\alpha\beta} - 2\nabla_\alpha (\bar{F}^\alpha + \bar{F}^\alpha) - 2(\bar{F}_\alpha \bar{F}^\alpha + \bar{F}_\alpha \bar{F}^\alpha - \bar{Q}_\alpha \bar{Q}^\alpha), \quad (4.3.13)$$

где ${}^4 R$ — 4-мерная скалярная кривизна; ∇_α — оператор 4-мерного ковариантного дифференцирования. В общем же случае (если дифференцируемые величины зависят от x^5 и x^6) вид оператора ∇_α сложнее. В дальнейшем будем учитывать, что в данной калибровке

$$\sqrt{-{}^6 G} = \sqrt{-g} \lambda_5 \sigma_6, \quad (4.3.14)$$

где $\sqrt{-g}$ — корень из определителя 4-мерного метрического тензора.

§ 4.4. Конформное преобразование и прием, соответствующий механизму Хиггса

1. Произведем конформное преобразование исходной 6-метрики

$$G_{MN} = \chi^2 G_{MN} \rightarrow \overset{0}{G}{}^{MN} = \frac{1}{\chi^2} G^{MN}; \quad \sqrt{-\overset{0}{G}} = \chi^6 \sqrt{-G}. \quad (4.4.1)$$

где χ — скаляр, зависящий от всех шести координат. При этом будут преобразовываться практически все величины, входящие в (4.2.1). Здесь сосредоточим внимание на преобразовании римановой части скалярной кривизны в (4.2.2), откуда получается плотность функции Лагранжа для конформного поля χ .

Используя общую формулу конформного преобразования скалярной кривизны (1.5.1) для $n=6$, находим

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{-\overset{0}{G}}}{2\chi} {}^6 R = -\frac{\sqrt{-G}}{2\chi} \chi^4 \left({}^6 R - 10 G^{MN} \frac{\nabla_M \nabla_N \chi}{\chi} - 10 G^{MN} \frac{\chi_{,M} \chi_{,N}}{\chi^2} \right). \quad (4.4.2) \end{aligned}$$

Произведем 1+1+4-расщепление конформно выделенной части в (4.4.2). Кроме того, избавимся от вторых 4-мерных производных выделением дивергентных слагаемых. В итоге имеем вклад поля χ :

$$\begin{aligned} -\frac{5\sqrt{-G}}{\chi} \chi^2 \{ 2g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \chi) \partial_\beta \chi + \chi (\partial_5^2 \chi + \partial_6^2 \chi) + (\partial_5 \chi)^2 + (\partial_6 \chi)^2 \} + (\text{дивергентный член}). \quad (4.4.3) \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения предыдущего параграфа. В этом выражении, а также во всех последующих опущены слагаемые, содержащие производные от величин λ_5 и σ_6 . Как уже отмечалось, подобные слагаемые описывают эффекты «скаляризма», которые здесь не рассматриваются.

2. Постулируем следующую зависимость конформного фактора от x^5 и x^6 :

$$\chi = 1 + \Phi + b_0 [\varphi_0 \exp(i\alpha x^5 - i\beta x^6) - \varphi_0^* \exp(-i\alpha x^5 + i\beta x^6)] + b_+ [\varphi_+ \exp(i\alpha x^5 + i\beta x^6) - \varphi_+^* \exp(-i\alpha x^5 - i\beta x^6)], \quad (4.4.4)$$

где α , β , b_0 , b_+ — константы; φ_0 и φ_+ — комплексные скалярные поля, зависящие лишь от четырех пространственно-временных координат. Эти два поля соответствуют изотопическому дублету в модели Вайнберга—Салама. Подчеркнем, что знак минус перед комплексно сопряженными слагаемыми существен. Именно знак минус обеспечивает положительную определенность вклада скалярных полей в тензор энергии-импульса. Бесщественное скалярное поле Φ имеет тот же характер добавки в вещественную часть конформного фактора (фундаментально скалярное поле), что и в 5-мерии. В этой главе будем полагать $\Phi=0$. Как и прежде, поля φ_0 и φ_+ обязаны чисто мнимой добавке в конформном факторе.

Постулат (4.4.4) сопряжен с дальнейшим ограничением на допустимые преобразования координат x^5 и x^6 (4.3.7). Исключаются преобразования, перемешивающие координаты x^5 и x^6 . т. е. остаются

$$\begin{aligned} x'^6 &= x^6 + f_1(x^0, x^1, x^2, x^3); \\ x'^5 &= x^5 + f_2(x^0, x^1, x^2, x^3). \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Подставляя (4.4.4) в (4.4.3), во втором порядке по b_0 и b_+ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{20}{\kappa} \sqrt{-{}^6G} \{ b_0^2 [g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \varphi_0^*) \partial_\beta \varphi_0 - ((\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6)^2 + (\beta\sigma^6)^2) \varphi_0^* \varphi_0] + \\ & + b_+^2 [g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \varphi_+^*) \partial_\beta \varphi_+ - ((\alpha\lambda^5 + \beta\lambda^6)^2 + (\beta\sigma^6)^2) \varphi_+^* \varphi_+] \} + \\ & + (\text{дивергентные члены}) + (\dots) \exp(2i\alpha x^5 - 2i\beta x^6) + \dots + \\ & + (\dots) \exp(-2i\alpha x^5 - 2i\beta x^6), \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

где введенные в (4.4.6) операторы дифференцирования с учетом формулы (4.4.4) принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} + i\alpha \lambda^5 \lambda_\alpha \varphi \mp i\beta (\sigma^6 \sigma_\alpha + \lambda^6 \lambda_\alpha) \varphi; \\ \partial_\alpha \varphi^* &= \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\alpha} - i\alpha \lambda^5 \lambda_\alpha \varphi^* \pm i\beta (\sigma^6 \sigma_\alpha + \lambda^6 \lambda_\alpha) \varphi^*. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Здесь верхний знак относится к функции φ_0 , а нижний — к функции φ_+ . В формуле (4.4.6) не выписаны явно слагаемые с экспонентами по той причине, что окончательные формулы получаются усреднением по периодам пятой и шестой координат, обращая эти слагаемые в нуль.

3. Используем прием, соответствующий механизму Хиггса в модели Вайнберга—Салама. Он основан на следующих соображениях. Во-первых, в (4.4.4) имеется произвол в выборе констант b_0 и b_+ . Положим

$$b_+ = 0; \quad b_0 \neq 0. \quad (4.4.8)$$

Во-вторых, допустимыми преобразованиями координат (4.4.5) всегда можно добиться того, чтобы φ_0 было вещественным. В-третьих, следует допустить наличие постоянной составляющей поля φ_0 :

$$\varphi_0 = \eta_0 + \chi_0. \quad (4.4.9)$$

Совокупность условий (4.4.8) и (4.4.9) можно трактовать соответствующей переходу к унитарной калибровке (4.1.22) в модели Вайнберга—Салама.

Самым существенным для механизма Хиггса является противоположный знак в лагранжиане перед массовым слагаемым и наличие члена четвертой степени с соответствующим знаком. В связи с этим следует заметить, что (4.4.6) еще не описывает всех слагаемых со скалярным полем. В (4.2.1) включен

космологический член $\tilde{\Lambda}$. При нем стоит множитель $\sqrt{-{}^6G} = \chi^6 \sqrt{-{}^6G}$. После усреднения по x^5 и x^6 из него получаются слагаемые:

$$\begin{aligned} & - \frac{\sqrt{-{}^6G}}{2\kappa} \Lambda \chi^6 = \frac{\sqrt{-{}^6G}}{2\kappa} \{ -\Lambda + 30\Lambda b_0^2 \varphi_0^* \varphi_0 - \\ & - 60\Lambda b_0^4 (\varphi_0^* \varphi_0)^2 + 8\Lambda b_0^6 (\varphi_0^* \varphi_0)^3 \}, \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

где положено $\tilde{\Lambda} = -\Lambda$; $\Lambda > 0$. Складывая (4.4.6) с (4.4.10) и сопоставляя их с (4.1.23), легко видеть, что выбором Λ можно обеспечить нужные знаки перед слагаемыми второй и четвертой степени по φ_0 .

Однако этого мало. Необходимо достичь нескольких целей: а) описать механизм Хиггса; б) согласовать массовые вклады из (4.4.6) и $\tilde{\Lambda}$ с допустимыми значениями масс хиггсовского бозона $7 \text{ Гэв} < m_{Hc^2} < 1 \text{ Тэв}$ [73]; в) обеспечить достаточно малое значение эффективной космологической постоянной $|\Lambda_{\text{эф}}| < 2 \cdot 10^{-56} \text{ см}^{-2}$ [59]. Оказывается, всех этих целей можно достичь, выбирая $\tilde{\Lambda}$ в виде полинома по χ с подходящими значениями и знаками коэффициентов [54].

4. Для дальнейшего будет безразлично, использовать ли в полной мере механизм Хиггса в описанном выше смысле или ограничиться лагранжианом из (4.4.6) с вкладом из космологического члена для перенормировки массы скалярного бозона и эффективной космологической постоянной. Достаточно будет наличия постоянной составляющей η_0 в (4.4.9). Ниже показано, что она ответственна за возникновение массовых слагаемых для векторных и спинорных полей аналогично тому, как это получается в модели Вайнберга—Салама.

§ 4.5. Нейтральные векторные поля

В излагаемой модели физические нейтральные векторные поля строятся из компонент векторов диады λ_N и σ_N (т. е. из смешанных компонент 6-мерного метрического тензора G_{5N} и G_{6N}). Приступим к решению этой задачи.

1. Будем полагать, что взаимодействие с полем B_α обусловлено зависимостью величин от координаты x^5 . Тогда из сравнения формул (4.4.7) с нейтральной частью удлиненных производных (4.1.3) модели Вайнберга—Салама можно найти

$$B_\alpha = -\frac{2\alpha\lambda^5\hbar c}{g_1}\lambda_\alpha; \quad A(3)_\alpha = -\frac{2\beta\hbar c}{g_2}(\sigma^6\sigma_\alpha + \lambda^6\lambda_\alpha), \quad (4.5.1)$$

где g_1 и g_2 — известные константы взаимодействия с векторными полями B_α и $A(3)_\alpha$.

2. Из формулы (4.4.7) видно, что скалярное поле φ_0 взаимодействует с векторными полями метрического происхождения лишь в комбинации

$$Z_\alpha = \frac{1}{\zeta}[\lambda_\alpha(\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6) - \sigma_\alpha(\beta\sigma^6)], \quad (4.5.2)$$

где ζ — некоторая размерная постоянная, значение которой найдено ниже. Ясно, что Z_α должно быть отождествлено с полем нейтрального векторного бозона в модели Вайнберга—Салама.

3. Для определения вида A_α выделим из плотности скалярной кривизны (4.3.13) слагаемые, содержащие ${}^5F_{\alpha\beta}$ и ${}^6F_{\alpha\beta}$ (см. (4.3.10)), и приравняем их плотности стандартного лагранжиана физических полей A_α и Z_α (без массовых членов):

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\kappa}({}^5F_{\alpha\beta}{}^5F^{\alpha\beta} + {}^6F_{\alpha\beta}{}^6F^{\alpha\beta}) = \\ & = -\frac{1}{16\pi}[F(A)_{\alpha\beta}F(A)^{\alpha\beta} + F(Z)_{\alpha\beta}F(Z)^{\alpha\beta}], \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

$$\text{где } F(A)_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}; \quad F(Z)_{\alpha\beta} = \frac{\partial Z_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x^\beta}.$$

На языке монадного метода задания систем отсчета в общей теории относительности формула (4.5.3) связывает тензоры об-

общенных «угловых скоростей вращения» с двумя физическими полями. Представим векторный электромагнитный потенциал в виде

$$A_\alpha = \frac{1}{\zeta}[x\lambda^5\lambda_\alpha + y(\sigma^6\sigma_\alpha + \lambda^6\lambda_\alpha)],$$

где x и y — неизвестные коэффициенты. Потребовав, чтобы в уравнении (4.5.3) слева и справа совпадали коэффициенты при выражениях $F(B)_{\alpha\beta}F(B)^{\alpha\beta}$, $F(3)_{\alpha\beta}F(3)^{\alpha\beta}$ и $F(B)_{\alpha\beta}F(3)^{\alpha\beta}$, где

$$F(B)_{\alpha\beta} = \frac{\partial B_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial x^\beta}; \quad F(3)_{\alpha\beta} = \frac{\partial A(3)_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A(3)_\alpha}{\partial x^\beta},$$

приходим к трем уравнениям для величин: x , y и ζ . Решая их, получаем

$$\begin{aligned} A_\alpha &= -\frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{(\beta\sigma^6)\lambda_\alpha + (\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6)\sigma_\alpha}{\sqrt{(\beta\sigma^6)^2 + (\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6)^2}} = \\ &= -\frac{c^2}{2\sqrt{k}}(\lambda_\alpha \cos \theta_V + \sigma_\alpha \sin \theta_V); \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= \frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{(\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6)\lambda_\alpha - (\beta\sigma^6)\sigma_\alpha}{\sqrt{(\beta\sigma^6)^2 + (\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6)^2}} = \\ &= \frac{c^2}{2\sqrt{k}}(\lambda_\alpha \sin \theta_V - \sigma_\alpha \cos \theta_V); \end{aligned}$$

$$\zeta^2 = \frac{4k}{c^4}[(\beta\sigma^6)^2 + (\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6)^2],$$

где введен угол θ_V так, что

$$\sin \theta_V = \frac{\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6}{\sqrt{(\beta\sigma^6)^2 + (\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6)^2}}; \quad \cos \theta_V = \frac{\beta\sigma^6}{\sqrt{(\beta\sigma^6)^2 + (\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6)^2}}. \quad (4.5.5)$$

Этот угол определяет поворот от пространственно-временных компонент ортогональных 6-векторов λ_N и σ_N к векторным потенциалам A_α и Z_α . Заметим, что в общем случае угол θ_V отличается от угла Вайнберга θ_W , характеризующего поворот от векторов B_α и $A(3)_\alpha$ (см. (4.1.17)) к векторам A_α и Z_α . Соотношение между этими углами будет обсуждаться в § 4.9.

4. Из первого члена в конформно выделенной части плотности лагранжиана (4.4.6) возникает вклад в массу покоя Z -бозона

$$\frac{20}{\kappa} \sqrt{-{}^6G} b_0^2 \eta_0^2 \zeta^2 g^{\alpha\beta} Z_\alpha Z_\beta, \quad (4.5.6)$$

обязанный постоянной составляющей η_0 в (4.4.9). Для электромагнитного поля массовые слагаемые отсутствуют. Из (4.5.3)

и (4.5.6) находим, что масса покоя нейтрального векторного поля Z_α определяется выражением

$$m_Z c^2 = 4 \sqrt{5} \hbar c (b_0 \eta_0) \sqrt{(\beta \sigma^6)^2 + (\alpha \lambda^5 - \beta \lambda^6)^2}. \quad (4.5.7)$$

Согласно экспериментальным данным $m_Z c^2 \approx 93$ ГэВ. Отсюда можно оценить комбинацию констант

$$\hbar c (b_0 \eta_0) \sqrt{(\beta \sigma^6)^2 + (\alpha \lambda^5 - \beta \lambda^6)^2} \approx 10,4 \text{ ГэВ}. \quad (4.5.8)$$

§ 4.6. Кручение и заряженные векторные поля

Существенным моментом излагаемой модели является использование геометрии с кручением. Именно кручение в данном подходе ответственно за появление двух заряженных векторных бозонов. Покажем это.

Выделим из гиперплотности лагранжиана (4.2.1) бозонную часть, обязанную кручению. Согласно (4.2.2) она имеет вид

$$\frac{1}{2\kappa} \sqrt{-{}^0G} {}^0S_{MNP} {}^0S^{MNP}. \quad (4.6.1)$$

Здесь тензор кручения ${}^0S_{MNP}$ антисимметричен по всем трем индексам. Легко подсчитать, что в самом общем случае он характеризуется 20 различными компонентами.

Из 6-мерного тензора кручения с помощью диадных составляющих метрического тензора можно образовать четыре 4-мерных тензора:

$${}^0S(6)_{\alpha\beta} = {}^0S_{MNP} \sigma^M g_\alpha^N g_\beta^P; \quad {}^0S(5)_{\alpha\beta} = {}^0S_{MNP} \lambda^M g_\alpha^N g_\beta^P; \quad (4.6.2)$$

$${}^0S(65)_\alpha = {}^0S_{MNP} \sigma^M \lambda^N g_\alpha^P; \quad \tilde{{}^0S}_{\alpha\beta\nu} = {}^0S_{MNP} g_\alpha^M g_\beta^N g_\nu^P.$$

При выяснении закона изменения компонент кручения при конформных преобразованиях нужно иметь в виду, что тензор с компонентами ${}^0S_{MNP}$ по определению не зависит от метрики, а следовательно, не меняется при конформных преобразованиях. Полностью ковариантный тензор ${}^0S_{MNP} = {}^0S_{MNP}^K G_{KM}$ преобразуется так же, как метрика G_{KM} , т. е.

$${}^0S_{MNP} = \chi^2 S_{MNP}; \quad {}^0S(6)_{\alpha\beta} = \chi S_{\alpha\beta}; \quad {}^0S(5)_{\alpha\beta} = \chi S(5)_{\alpha\beta}; \quad (4.6.3)$$

$${}^0S(65)_\alpha = S(65)_\alpha; \quad \tilde{{}^0S}_{\alpha\beta\nu} = \chi^2 \tilde{S}_{\alpha\beta\nu}.$$

Антисимметричному тензору третьего ранга $\tilde{S}_{\alpha\beta\nu}$ в 4-мерном пространстве-времени опять сопоставим псевдовектор S_ν сог-

ласно (1.6.6). Таким образом, из 20 компонент тензора ${}^0S_{MNP}$ строятся два антисимметричных тензорных поля $S(6)_{\alpha\beta}$ и $S(5)_{\alpha\beta}$ (6+6=12 компонент) и 2 поля $S(65)_\alpha$ и S_α (4+4=8 компонент). В итоге (4.6.1) в 4-мерных величинах принимает вид

$$-\frac{\sqrt{-{}^0G}}{2\kappa} \chi^4 (3S(6)_{\alpha\beta} S(6)^{\alpha\beta} + 3S(5)_{\alpha\beta} S(5)^{\alpha\beta} - 6S(65)_\alpha S(65)^\alpha + 6S_\alpha S^\alpha). \quad (4.6.4)$$

Далее нужно распорядиться предоставляемыми геометрией довольно широкими возможностями для получения соответствия с известной физической теорией. При этом встают следующие задачи.

а) Из компонент кручения нужно сформировать два 4-мерных векторных поля $A(1)_\alpha$ и $A(2)_\alpha$, недостающих в метрической части.

б) Компоненты тензора кручения входят в (4.6.4) алгебраически, тогда как физические векторные поля в лагранжиане Вайнберга—Салама (4.1.3) описываются членами с производными. Как это согласовать?

в) В стандартной теории векторные поля $A(1)_\alpha$ и $A(2)_\alpha$ являются заряженными — в нашем подходе это означает специальную зависимость кручения от дополнительных координат. Каким образом она вводится?

г) Необходимо получить отличные от нуля массы покоя заряженных векторных бозонов.

д) Нужно так определить векторные бозоны, чтобы получить известное взаимодействие их с фермионными полями.

Для решения задач (а), (в), (г) и (д) достаточно представить $S(65)_\alpha$ и S_α в виде

$$S(65)_\alpha = C_S [(A(1)_\alpha + iA(2)_\alpha) e^{2i\beta x^0} + (A(1)_\alpha - iA(2)_\alpha) e^{-2i\beta x^0}]; \quad (4.6.5)$$

$$S_\alpha = C'_S [(A(1)_\alpha - iA(2)_\alpha) e^{2i\beta x^0} + (A(1)_\alpha + iA(2)_\alpha) e^{-2i\beta x^0}],$$

где C_S и C'_S — некоторые размерные постоянные, значения которых будут обсуждены ниже. Легко видеть, что так определенные компоненты кручения являются вещественными. Переход от потенциалов $A(1)_\alpha$ и $A(2)_\alpha$ к комплексным векторным полям, непосредственно описывающим заряженные W -бозоны, осуществляется как в стандартной теории согласно (4.1.21).

Для решения задачи (б) следует использовать подход В. И. Родичева [83], а также [14], состоящий в представлении тензора кручения в виде производных от потенциалов. Поскольку в общем случае 4-мерные тензоры $S(6)_{\alpha\beta}$ и $S(5)_{\alpha\beta}$ независимы от $S(65)_\alpha$ и S_α , то имеется большой произвол в определении $S(6)_{\alpha\beta}$ и $S(5)_{\alpha\beta}$ через потенциалы $A(1)_\alpha$ и $A(2)_\alpha$. Любое такое определение означает сужение класса используемых геометрий,

т. е. выбор частного случая пространств с кручением. Этим произволом можно воспользоваться, чтобы получить часть из тензоров $F_{\mu\nu}$ согласно (4.1.6):

$$S(5)_{\alpha\beta} = C \left[F(1)_{\alpha\beta} + \frac{g_2}{\hbar c} (A(2)_{\alpha} A(3)_{\beta} - A(3)_{\alpha} A(2)_{\beta}) \right] \cos 2\beta x^6; \quad (4.6.6)$$

$$S(6)_{\alpha\beta} = C \left[F(2)_{\alpha\beta} + \frac{g_2}{\hbar c} (A(3)_{\alpha} A(1)_{\beta} - A(1)_{\alpha} A(3)_{\beta}) \right] \cos 2\beta x^6,$$

$$\text{где } F(S)_{\alpha\beta} = \frac{\partial A(s)_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial A(s)_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}; \quad (s=1, 2);$$

C — размерная постоянная, $A(3)_{\alpha}$ — векторный потенциал метрического происхождения.

Используя введенные определения, можно записать плотность лагранжиана свободных векторных полей $A(1)_{\alpha}$ и $A(2)_{\alpha}$, получаемую из (4.6.4) усреднением по дополнительным координатам. Очевидно, что первые два слагаемых в (4.6.4) дадут динамические части, а последние два — массовые вклады:

$$-\frac{3\sqrt{-cG}}{2\kappa} \{C^2(F(1)_{\alpha\beta} F(1)^{\alpha\beta} + F(2)_{\alpha\beta} F(2)^{\alpha\beta}) - 4(C_S^2 - C_S'^2)[A(1)_{\alpha} A(1)^{\alpha} + A(2)_{\alpha} A(2)^{\alpha}]\}. \quad (4.6.7)$$

Размерную константу C в (4.6.7) можно определить, потребовав, чтобы динамические части векторных полей $A(1)_{\alpha}$ и $A(2)_{\alpha}$ входили в плотность лагранжиана с теми же коэффициентами, что и в стандартной теории:

$$-\frac{1}{16\pi} = -\frac{3C^2}{2\kappa} \rightarrow C = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{3} c^2}. \quad (4.6.8)$$

Из (4.6.7) следуют значения масс покоя заряженных векторных W -бозонов

$$m_W c^2 = \frac{\sqrt{6} c^2}{\sqrt{k}} (\hbar c) \sqrt{C_S^2 - C_S'^2}. \quad (4.6.9)$$

Ясно, что коэффициент перед корнем соответствует значению массы покоя порядка планковской. Полагая константы C_S и C_S' достаточно близкими друг другу, можно произвести перенормировку массы до любого значения, в том числе до экспериментально наблюдаемого значения $m_W c^2 \approx 82 \text{ ГэВ}$.

§ 4.7. 8-Компонентное спинорное поле (общие соотношения)

Переходя к рассмотрению фермионов в 6-мерном многообразии, прежде всего необходимо осветить следующие вопросы.

1. Представление матриц $\Gamma(N)$. В формуле (4.2.3) уже были использованы проекции 6-мерных Γ -матриц на касательное мно-

гообразии $\Gamma(N) = \Gamma_M g^M(N)$. Матрицы $\Gamma(N)$ являются постоянными образующими алгебры Клиффорда $C(1,5)$ (см. приложение), соответствующей используемой в этой главе 6-мерной геометрии с сигнатурой $(+ - - - -)$. Выберем следующее представление:

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma_M g(\alpha)^M = \begin{pmatrix} 0 & \gamma(\alpha) \\ \gamma(\alpha) & 0 \end{pmatrix}; \quad (4.7.1)$$

$$\Gamma(5) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_5 \\ \gamma_5 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma(6) = \begin{pmatrix} 0 & -I_4 \\ I_4 & 0 \end{pmatrix},$$

где I_4 — 4-рядная единичная матрица, $\gamma(\alpha)$ — постоянные 4-рядные матрицы Дирака, $\gamma_5 = i \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$. Это представление характерно одинаковой блочной структурой всех матриц, удобной для дальнейшего расщепления 8-рядных величин на 4-рядные.

2. Левые и правые компоненты спиноров. Из представления (4.7.1) видно, что 8-компонентные Ψ -функции естественным образом представляются через две 4-компонентные функции:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi(1) \\ \Psi(2) \end{pmatrix} \rightarrow \bar{\Psi} = \Psi^+ \Gamma(0) = (\bar{\Psi}(2), \bar{\Psi}(1)), \quad (4.7.2)$$

где $\bar{\Psi}(s) = \Psi^+(s) \gamma(0)$; $s=1, 2$. Разложим компоненты 4-рядных функций на левые и правые составляющие согласно стандартным формулам:

$$\Psi_L(s) = \frac{1}{2} (1 + i\gamma_5) \Psi(s) \rightarrow \bar{\Psi}_L(s) = \frac{1}{2} \bar{\Psi}(s) (1 - i\gamma_5); \quad (4.7.3)$$

$$\Psi_R(s) = \frac{1}{2} (1 - i\gamma_5) \Psi(s) \rightarrow \bar{\Psi}_R(s) = \frac{1}{2} \bar{\Psi}(s) (1 + i\gamma_5),$$

тогда имеем для (4.7.2)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L(1) + \Psi_R(1) \\ \Psi_L(2) + \Psi_R(2) \end{pmatrix}; \quad \bar{\Psi} = (\bar{\Psi}_L(2) + \bar{\Psi}_R(2); \bar{\Psi}_L(1) + \bar{\Psi}_R(1)). \quad (4.7.4)$$

3. Зависимость Ψ -функций от x^5 и x^6 . Мы подошли к принципиально важному моменту, когда необходимо ответить на вопрос о физическом смысле гармоник зависимостей от координат x^5 и x^6 — величин, рассматриваемых здесь и в других параграфах. Напомним, что во второй главе при обсуждении 5-мерной теории целочисленный коэффициент e_5 в экспоненте при $i\alpha x^5$ в (2.5.3) интерпретировался как электрический заряд частицы Q . В излагаемой здесь 6-мерной модели постулируем,

что целочисленный коэффициент ϵ_5 в экспоненте при $i\alpha x^5$ соответствует гиперзаряду Y , а целочисленный коэффициент ϵ_6 при $i\beta x^6$ — удвоенной проекции изотопического спина T_3 в модели Вайнберга—Салама. Тогда записанная ранее формула (4.1.19) для значения электрического заряда частиц (в единицах e) представляется в 6-мерной модели в виде

$$Q = Y/2 + T_3 = 1/2(\epsilon_5 + \epsilon_6). \quad (4.7.5)$$

Зная эмпирически установленные значения Y и T_3 левых и правых компонент частиц, в согласии со сформулированным правилом произведем следующее отождествление $\Psi_L(s)$ и $\Psi_R(s)$ с волновыми функциями нейтринного ν и электронного e полей:

$$\Psi_L(s) = (a_{Ls}\nu_L e^{i\beta x^6} + b_{Ls}e_L e^{-i\beta x^6}) e^{-i\alpha x^5};$$

$$\Psi_R(s) = a_{Rs}\nu_R + b_{Rs}e_R e^{-2i\alpha x^5}, \quad \text{где } s = 1, 2; \quad (4.7.6)$$

здесь $a_{Ls}, a_{Rs}, b_{Ls}, b_{Rs}$ — постоянные коэффициенты, определяемые из условий нормировки и соображений соответствия получаемых формул со стандартными в модели Вайнберга—Салама.

Данные о зависимостях от x^5 и x^6 всех введенных выше величин согласно формулам (4.4.4), (4.5.4), (4.6.5) и (4.7.6) сведены в табл. 1. Из таблицы видно, что сформулированное выше правило присвоения гармоник выполняется как для бозонов, так и для фермионов. В гл. 5 будет продолжено обсуждение используемых в многомерных моделях гармоник с привлечением дополнительных понятий и соображений.

Еще раз подчеркнем, что в теории используется циклическая зависимость от x^5 и x^6 с очень малым периодом по сравнению с теми масштабами, с которыми мы обычно имеем дело. Для перехода к стандартной плотности лагранжиана нужно произвести усреднение по периодам зависимостей от x^5 и x^6 . При этом уничтожаются все слагаемые, содержащие экспоненты, однако останутся гармоники ϵ_5 и ϵ_6 , интерпретируемые как гиперзаряд и проекция изоспина.

Очевидно, что изложенное можно переформулировать так, что координаты x^5 и x^6 поменяются местами, т. е. гиперзаряд можно связать с гармоникой зависимости от шестой координаты, а T_3 — с гармоникой зависимости от пятой координаты.

§ 4.8. Фермионная часть гиперплотности лагранжиана

При записи фермионной части гиперплотности лагранжиана (4.2.1) ключевой является формула для ковариантной производной от спинора (4.2.3). Ограничиваясь пока в (4.2.1) слагаемыми без эрмитово-сопряженной части, произведем кон-

Таблица 1

Основные определения	Частицы	Зависимость от x^5	Гиперзаряд Y	Зависимость от x^6	Проекция изоспина T_3
$\Psi_L(s) = a_{Ls}\nu_L e^{-i\alpha x^5 + i\beta x^6} + b_{Ls}e_L e^{-i\alpha x^5 - i\beta x^6}$	изодублет ν_L	$e^{-i\alpha x^5}$	-1	$e^{i\beta x^6}$	$+\frac{1}{2}$
	e_L	$e^{-i\alpha x^5}$	-1	$e^{-i\beta x^6}$	$-\frac{1}{2}$
$\Psi_R(s) = a_{Rs}\nu_R + b_{Rs}e_R e^{-2i\alpha x^5}$	синглеты ν_R	e^0	0	e^0	0
	e_R	$e^{-2i\alpha x^5}$	-2	e^0	0
$\chi = 1 + b_0(\varphi_0 e^{i\alpha x^5 - i\beta x^6} - \varphi_0^* e^{-i\alpha x^5 + i\beta x^6}) + b_+(\varphi_+ e^{i\alpha x^5 + i\beta x^6} - \varphi_+^* e^{-i\alpha x^5 - i\beta x^6})$	изодублет φ_0	$e^{i\alpha x^5}$	1	$e^{-i\beta x^6}$	$-\frac{1}{2}$
	φ_+	$e^{i\alpha x^5}$	1	$e^{i\beta x^6}$	$+\frac{1}{2}$
$S(65)_\alpha = C_S [A(1)_\alpha + iA(2)_\alpha] e^{2i\beta x^6} + (A(1)_\alpha - iA(2)_\alpha) e^{-2i\beta x^6}$	изотриплет $A(1)_\alpha$	e^0	0	$e^{2i\beta x^6}$	+1
	$A(2)_\alpha$	e^0	0	$e^{-2i\beta x^6}$	-1
	$A(3)_\alpha$	e^0	0	e^0	0
$A(3)_\alpha = -\frac{2\alpha\hbar c}{g_2} (\lambda^6 \lambda_\alpha + \sigma^6 \sigma_\alpha)$ $B_\alpha = -\frac{2\alpha\hbar c}{g_1} \lambda^5 \lambda_\alpha$	B_α	e^0	0	e^0	0

формное преобразование и 1+1+4-расщепление последовательно для трех составных частей справа в (4.2.3).

Для записи первой части прежде всего нужно использовать формулу 1+1+4-расщепления

$$\begin{aligned} \overset{0}{\Gamma}{}^M \frac{\partial}{\partial x^M} = \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \lambda^5 \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial x^5} + (\sigma^6 \sigma_\alpha + \lambda^6 \lambda_\alpha) \frac{\partial}{\partial x^6} \right] - \\ - \sigma^6 \Gamma(6) \frac{\partial}{\partial x^6} - \Gamma(5) \left(\lambda^5 \frac{\partial}{\partial x^5} + \lambda^6 \frac{\partial}{\partial x^6} \right). \end{aligned} \quad (4.8.1)$$

Далее нужно учесть формулы конформного преобразования:

$$\overset{0}{\tilde{\Gamma}}{}^\alpha = \overset{0}{\Gamma}{}^N g_N^\alpha = \chi^{-1} \tilde{\Gamma}{}^\alpha; \quad \overset{0}{\sigma}{}^N = \chi^{-1} \sigma^N; \quad \overset{0}{\lambda}{}^N = \chi^{-1} \lambda^N.$$

Для записи второй составной части прежде всего нужно учесть формулу конформного преобразования коэффициентов вращения Риччи (2.8.7), изменив индексы на 6-мерные. Поскольку $\overset{0}{\Delta}{}_M(NP)$ умножается на произведение из трех Γ -матриц, понадобится промежуточная формула

$$(G(P)_M G(N)^L - G(N)_M G(P)^L) \Gamma^M \Gamma(N) \Gamma(P) = -10 \Gamma^L \quad (4.8.2)$$

В итоге для этой части имеем вклад в гиперплотность лагранжиана

$$\begin{aligned} - \frac{i \sqrt{-6G}}{16} (\hbar c) \chi^{5+\mu} \left(\Delta_M(NP) \bar{\Psi} \Gamma^M \Gamma(N) \Gamma(P) \Psi - \right. \\ \left. - 10 \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial x^L} \bar{\Psi} \Gamma^L \Psi \right). \end{aligned} \quad (4.8.3)$$

Произведем 1+1+4-расщепление получившегося выражения. Учтем, что

$$\begin{aligned} \Delta_M(NP) \Gamma^M \Gamma(N) \Gamma(P) = g^{ML} \Delta_M(NP) \Gamma_L \Gamma(N) \Gamma(P) - \\ - \lambda^M \Delta_M(NP) \Gamma(5) \Gamma(N) \Gamma(P) - \sigma^M \Delta_M(NP) \Gamma(6) \Gamma(N) \Gamma(P). \end{aligned} \quad (4.8.4)$$

Далее нужно конкретизировать отдельные составляющие 6-мерных коэффициентов вращения Риччи. Это достигается с помощью представления их через объекты неголономности в согласии с формулой (1.7.11) из общей теории относительности. Элементарные вычисления приводят к выражениям:

$$\begin{aligned} G(\alpha)^M \Delta_M(\beta\nu) = \Delta(\alpha, \beta\nu); \\ G(\alpha)^M \Delta_M(\beta 5) = {}^5 F(\alpha\beta); \\ G(\alpha)^M \Delta_M(\beta 6) = {}^6 F(\alpha\beta); \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \sigma^M \Delta_M(\alpha\beta) = -{}^5 F(\alpha\beta); \\ \sigma^M \Delta_M(\beta 5) = \frac{1}{2} \lambda^M G(\beta)^\alpha \frac{\partial \sigma_M}{\partial x^\alpha}; \\ \sigma^M \Delta_M(\beta 6) = \sigma^6 G(\beta)^\alpha \frac{\partial \sigma_6}{\partial x^\alpha}; \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \lambda^M \Delta_M(\alpha\beta) = -{}^5 F(\alpha\beta); \\ \lambda^M \Delta_M(\beta 5) = \lambda^M G(\beta)^\alpha \frac{\partial \lambda_M}{\partial x^\alpha}; \\ \lambda^M \Delta_M(\beta 6) = \frac{1}{2} \lambda^M G(\beta)^\alpha \frac{\partial \sigma_M}{\partial x^\alpha}; \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \sigma^N \Delta_N(56) = 0; \\ \lambda^N \Delta_N(56) = 0; \\ G(\alpha)^N \Delta_N(56) = \\ = -\frac{1}{2} \lambda^N G(\alpha)^\beta \frac{\partial \sigma_N}{\partial x^\beta}. \end{aligned} \right. \quad (4.8.5)$$

Здесь $\Delta(\alpha, \beta\nu)$ — 4-мерные коэффициенты вращения Риччи;

$${}^5 F(\alpha\beta) = {}^5 F_{\mu\nu} g(\alpha)^\mu g(\beta)^\nu; \quad {}^6 F(\alpha\beta) = {}^6 F_{\mu\nu} g(\alpha)^\mu g(\beta)^\nu,$$

${}^5 F_{\mu\nu}$ и ${}^6 F_{\mu\nu}$ определяются формулами (4.3.10), т. е. выражаются через нейтральные векторные поля.

Подставляя формулы (4.8.5) в (4.8.4) и собирая вместе с (4.8.3), запишем вторую составную часть фермионной гиперплотности лагранжиана в виде

$$\begin{aligned} - \frac{i}{16} \sqrt{-6G} \hbar c \chi^{5+\mu} \left\{ \Delta(\alpha, \beta\nu) \bar{\Psi} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\nu) \Psi - \right. \\ - {}^5 F(\alpha\beta) \bar{\Psi} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(5) \Psi - {}^6 F(\alpha\beta) \bar{\Psi} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(6) \Psi - \\ - \lambda^N G(\beta)^\alpha \frac{\partial \sigma_N}{\partial x^\alpha} \bar{\Psi} \Gamma(\beta) \Gamma(5) \Gamma(6) \Psi + \\ \left. + 2 \left(\lambda^N \frac{\partial \lambda_N}{\partial x^\alpha} + \sigma^6 \frac{\partial \sigma_6}{\partial x^\alpha} \right) G(\beta)^\alpha \bar{\Psi} \Gamma(\beta) \Psi - \right. \\ - \frac{10}{\chi} \left[\frac{\partial \chi}{\partial x^\alpha} + \lambda^5 \lambda_\alpha \frac{\partial \chi}{\partial x^5} + (\sigma^6 \sigma_\alpha + \lambda^6 \lambda_\alpha) \frac{\partial \chi}{\partial x^6} \right] \bar{\Psi} \tilde{\Gamma}^\alpha \Psi + \\ \left. + \frac{10}{\chi} \left[\sigma^6 \frac{\partial \chi}{\partial x^5} \bar{\Psi} \Gamma(6) \Psi + \left(\lambda^5 \frac{\partial \chi}{\partial x^5} + \lambda^6 \frac{\partial \chi}{\partial x^6} \right) \bar{\Psi} \Gamma(5) \Psi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.8.6)$$

Для записи третьей составной части (с кручением) необходимо использовать следующую формулу 1+1+4-расщепления:

$$\begin{aligned} {}^6 S_{MNP} \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^P = -3S(6)_{\alpha\beta} \tilde{\Gamma}^\alpha \tilde{\Gamma}^\beta - 3S(5)_{\alpha\beta} \tilde{\Gamma}^\alpha \tilde{\Gamma}^\beta + \\ + 6S(65)_\beta \Gamma(6) \Gamma(5) \tilde{\Gamma}^\beta + \tilde{S}_{\alpha\beta\gamma} \tilde{\Gamma}^\alpha \tilde{\Gamma}^\beta \tilde{\Gamma}^\gamma. \end{aligned} \quad (4.8.7)$$

Учитывая формулы конформного преобразования кручения (4.6.3), находим результирующее выражение

$$-\frac{3i}{8} \sqrt{-g} \hbar c \chi^{5+\mu} \left[S(65)_{\alpha} \bar{\Psi} \Gamma(6) \Gamma(5) \tilde{\Gamma}^{\alpha} \Psi + \frac{1}{6} \bar{S}_{\alpha\beta\nu} \bar{\Psi} \tilde{\Gamma}^{\alpha} \tilde{\Gamma}^{\beta} \tilde{\Gamma}^{\nu} \Psi - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (S(6)_{\alpha\beta} \bar{\Psi} \tilde{\Gamma}^{\alpha} \tilde{\Gamma}^{\beta} \Gamma(6) \Psi + S(5)_{\alpha\beta} \bar{\Psi} \Gamma(5) \tilde{\Gamma}^{\alpha} \tilde{\Gamma}^{\beta} \Psi) \right]. \quad (4.8.8)$$

Перейдем к обсуждению смысла слагаемых, входящих в формулы (4.8.1), (4.8.6) и (4.8.8). Все эти слагаемые можно разложить в ряд по величине $b_0 \eta_0$, характеризующей взаимодействие со скалярным полем φ_0 . Нас будут интересовать нулевые (для описания токов) и вторые (для массовых вкладов) порядки. Их можно классифицировать следующим образом:

а) слагаемое, описывающее свободные фермионные поля, — первый член в первой строке (4.8.1);

б) слагаемые, описывающие прямое взаимодействие фермионов с векторными полями, — оставшиеся члены в первой строке (4.8.1) и первая строка в (4.8.8);

в) «массовые» вклады (даются слагаемыми с дифференцированиями по x^5 и x^6 , не содержащими пространственно-временных проекций Γ -матриц) — вторая строка в (4.8.1) и пятая строка в (4.8.6);

г) слагаемые, описывающие дополнительные взаимодействия фермионов с векторными полями через аномальные моменты (в частности, электрический и магнитный), — вторая строка в (4.8.6) и вторая строка в (4.8.8) (все они содержат квадратично пространственно-временные компоненты матриц $\tilde{\Gamma}^{\alpha}$);

д) слагаемое, описывающее прямое взаимодействие фермионов с гравитационным полем, — первая строка в (4.8.6);

е) дополнительные к стандартной теории слагаемые, описывающие взаимодействие фермионов со «скалярными» компонентами 6-метрики: $\lambda^5, \lambda^6, \sigma^6$ (содержат производные от этих компонент) — третья строка в (4.8.6);

ж) оставшиеся слагаемые — четвертая строка в (4.8.6) — описывают взаимодействие фермионов со скалярным полем (через производные $d\varphi/dx^{\alpha}$) либо взаимодействия фермионов с нейтральными векторными полями в более высоких порядках по $b_0 \eta_0$, чем члены группы б.

Конечно, все слагаемые в более высоких приближениях описывают как взаимодействие со скалярным полем φ_0 (точнее, с χ_0), так и с гравитационным полем (через добавки в компонентах тетрады $g(\beta)_{\alpha}$).

§ 4.9. Взаимодействие фермионов с векторными полями

Выделим из фермионной части гиперплотности лагранжиана (4.2.1) члены, описывающие свободные фермионы (без «массовых» членов) и взаимодействие их с нейтральными векторными

ми полями, т. е. полями метрического происхождения. Запишем их в нулевом приближении по $b_0 \eta_0$:

$$\frac{i \sqrt{-g}}{4} \hbar c \left\{ \left(\bar{\Psi} \tilde{\Gamma}^{\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x^{\alpha}} \tilde{\Gamma}^{\alpha} \Psi \right) + \right. \\ \left. + \lambda^5 \lambda_{\alpha} \left(\bar{\Psi} \tilde{\Gamma}^{\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial x^5} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x^5} \tilde{\Gamma}^{\alpha} \Psi \right) + \right. \\ \left. + (\sigma^6 \sigma_{\alpha} + \lambda^6 \lambda_{\alpha}) \left(\bar{\Psi} \tilde{\Gamma}^{\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial x^6} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x^6} \tilde{\Gamma}^{\alpha} \Psi \right) \right\}. \quad (4.9.1)$$

Характерным общим свойством всех слагаемых является то, что в них Γ -матрицы входят квадратично (с учетом матрицы $\Gamma(0)$ в определении $\tilde{\Psi}$). Это означает, что в выбранном представлении (4.7.1) не будет перекрестных членов из компонент $\Psi(1)$ и $\Psi(2)$.

Кроме того, все парные комбинации из Ψ -функций будут состоять либо только из левых, либо только из правых спиноров:

$$\bar{\Psi}(s) \gamma_{\mu} \Psi(s) = \bar{\Psi}_L(s) \gamma_{\mu} \Psi_L(s) + \bar{\Psi}_R(s) \gamma_{\mu} \Psi_R(s), \quad (4.9.2)$$

так как

$$\bar{\Psi}_L(s) \gamma_{\mu} \Psi_R(s) = \bar{\Psi}_R(s) \gamma_{\mu} \Psi_L(s) = 0,$$

где $\gamma_5^2 = -1$, $s=1, 2$. Здесь и в дальнейшем будем обозначать постоянные матрицы Дирака в стандартном представлении обычным образом, т. е. $\gamma(\mu) \rightarrow \gamma^{\mu}$. Используя вид матриц $\tilde{\Gamma}^{\alpha}$, структуру этих членов можно представить на примере второго в (4.9.1):

$$\sqrt{-g} \lambda_5 \sigma_6 \frac{i \hbar c}{4} (\lambda^5 \lambda_{\alpha}) \left[\left(\bar{\Psi}_L(1) \gamma^{\alpha} \frac{\partial \Psi_L(1)}{\partial x^5} - \frac{\partial \bar{\Psi}_L(1)}{\partial x^5} \gamma^{\alpha} \Psi_L(1) \right) + \right. \\ \left. + \left(\bar{\Psi}_L(2) \gamma^{\alpha} \frac{\partial \Psi_L(2)}{\partial x^5} - \frac{\partial \bar{\Psi}_L(2)}{\partial x^5} \gamma^{\alpha} \Psi_L(2) \right) + \right. \\ \left. + \left(\bar{\Psi}_R(1) \gamma^{\alpha} \frac{\partial \Psi_R(1)}{\partial x^5} - \frac{\partial \bar{\Psi}_R(1)}{\partial x^5} \gamma^{\alpha} \Psi_R(1) \right) + \right. \\ \left. + \left(\bar{\Psi}_R(2) \gamma^{\alpha} \frac{\partial \Psi_R(2)}{\partial x^5} - \frac{\partial \bar{\Psi}_R(2)}{\partial x^5} \gamma^{\alpha} \Psi_R(2) \right) \right]. \quad (4.9.3)$$

Отличие видов первого и третьего членов будут состоять, во-первых, во множителе перед квадратной скобкой и, во-вторых, в координате, по которой происходит дифференцирование. При этом вторая строка для третьего члена обратится в нуль из-за того, что Ψ_R не зависит от координаты x^6 .

Дальнейшая задача состоит в подстановке в выражения типа (4.9.3) формул для Ψ (4.7.6) и в усреднении по координатам x^5 и x^6 . Последнее означает, что нужно оставить лишь те слагаемые, у которых показатели экспонент компенсируют друг друга. Это автоматически приводит к тому, что останутся только слагаемые, пропорциональные $\bar{v}_L v_L$, $\bar{e}_L e_L$, $\bar{v}_R v_R$ и $\bar{e}_R e_R$. Для их конкретной записи достаточно использовать нормировку коэффициентов в первом члене (для свободных фермионов):

$$\begin{aligned} a_{L1}^* a_{L1} + a_{L2}^* a_{L2} &= 2; & a_{R1}^* a_{R1} + a_{R2}^* a_{R2} &= 2; \\ b_{L1}^* b_{L1} + b_{L2}^* b_{L2} &= 2; & b_{R1}^* b_{R1} + b_{R2}^* b_{R2} &= 2. \end{aligned} \quad (4.9.4)$$

В итоге имеем результат

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \hbar c \left[\left(\bar{v}_L \gamma^\alpha \frac{\partial v_L}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \bar{v}_L}{\partial x^\alpha} \gamma^\alpha v_L \right) + \left(\bar{v}_R \gamma^\alpha \frac{\partial v_R}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \bar{v}_R}{\partial x^\alpha} \gamma^\alpha v_R \right) + \right. \\ & \left. + \left(\bar{e}_L \gamma^\alpha \frac{\partial e_L}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \bar{e}_L}{\partial x^\alpha} \gamma^\alpha e_L \right) + \left(\bar{e}_R \gamma^\alpha \frac{\partial e_R}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \bar{e}_R}{\partial x^\alpha} \gamma^\alpha e_R \right) \right] + \\ & + \hbar c \left[\alpha \lambda^5 \lambda_\alpha (\bar{v}_L \gamma^\alpha v_L + \bar{e}_L \gamma^\alpha e_L) + 2 \alpha \lambda^5 \lambda_\alpha \bar{e}_R \gamma^\alpha e_R - \right. \\ & \left. - \beta (\sigma^6 \sigma_\alpha + \lambda^6 \lambda_\alpha) (\bar{v}_L \gamma^\alpha v_L - \bar{e}_L \gamma^\alpha e_L) \right], \end{aligned} \quad (4.9.5)$$

здесь опущен множитель $\sqrt{-{}^6G}$.

Первые две строки в (4.9.5) представляют собой стандартные члены лагранжиана свободных фермионных полей v и e , а последние две описывают взаимодействие с нейтральными векторными полями. Используя определения A_α и Z_α через компоненты диады λ_α и σ_α (4.5.4), запишем эту часть лагранжиана взаимодействия в виде

$$\begin{aligned} & - \frac{4\sqrt{k}}{c^2} \hbar c \frac{(\alpha\lambda^5)(\beta\sigma^6)}{\sqrt{(\beta\sigma^6)^2 + (\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6)^2}} A_\alpha (\bar{e}_L \gamma^\alpha e_L + \bar{e}_R \gamma^\alpha e_R) + \\ & + \frac{4\sqrt{k}}{c^2} \hbar c \sqrt{(\beta\sigma^6)^2 + (\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6)^2} Z_\alpha \times \\ & \times \left\{ \left(\frac{1}{2} + 0 \right) (\bar{v}_L \gamma^\alpha v_L) + (0 + 0) (\bar{v}_R \gamma^\alpha v_R) + \right. \\ & + \left(-\frac{1}{2} + \frac{(\alpha\lambda^5) \sin \theta_V}{\sqrt{(\beta\sigma^6)^2 + (\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6)^2}} \right) (\bar{e}_L \gamma^\alpha e_L) + \\ & \left. + \left(0 + \frac{(\alpha\lambda^5) \sin \theta_V}{\sqrt{(\beta\sigma^6)^2 + (\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6)^2}} \right) (\bar{e}_R \gamma^\alpha e_R) \right\}. \end{aligned} \quad (4.9.6)$$

Сравнение этой формулы с (4.1.20) в модели Вайнберга—Салама, во-первых, свидетельствует об их соответствии и о согла-

сии выбранной в (4.7.6) зависимости от координат x^5 и x^6 со значениями T_3 частиц в стандартной теории. Во-вторых, из сопоставления следует геометрическая интерпретация используемых в теории зарядов. Так, для электрического заряда e и заряда \bar{g} , определяющего взаимодействие с Z -бозоном, соответственно имеем

$$e = \frac{4\sqrt{k}}{c^2} \hbar c \frac{(\alpha\lambda^5)(\beta\sigma^6)}{\sqrt{(\beta\sigma^6)^2 + (\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6)^2}}; \quad (4.9.7)$$

$$\bar{g} = \frac{4\sqrt{k}}{c^2} \hbar c \sqrt{(\beta\sigma^6)^2 + (\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6)^2} \approx \frac{e}{\sin \theta_V \cos \theta_V}, \quad (4.9.8)$$

где $\sin \theta_V$ и $\cos \theta_V$ определены в (4.5.5).

В-третьих, сравнение формул (4.9.6) и (4.1.20), а также ряда других позволяет зафиксировать используемые в 6-мерной модели константы. Так, не уменьшая общности, везде можно положить $\alpha = \beta$, так как α и β везде входят в комбинации с величинами λ^5 , λ^6 и σ^6 . При отождествлении α и β все различие переносится на «скалярные» компоненты диады. Кроме того, для более полного соответствия формул естественно положить диагональную составляющую 6-метрики λ^6 равной нулю. В этом случае определение электромагнитного векторного потенциала A_α в 6-мерной модели и в модели Вайнберга—Салама полностью совпадают и вследствие (4.5.1) $B_\alpha \sim \lambda_\alpha$ и $A(3)_\alpha \sim \sigma_\alpha$. Экспериментально установлено, что $\theta_W \approx 30^\circ$. В 6-мерной модели это означает

$$\sin \theta_W = \sin \theta_V = \frac{\lambda^5}{\sqrt{(\sigma^6)^2 + (\lambda^5)^2}} \approx \frac{1}{2} \rightarrow (\sigma^6)^2 \approx 3(\lambda^5)^2. \quad (4.9.9)$$

Без ущерба для общности можно положить

$$\lambda^5 \approx 1; \quad \sigma^6 \approx \sqrt{3}; \quad \lambda^6 = 0, \quad (4.9.10)$$

тогда

$$e = \frac{2\sqrt{3k}}{c^2} (\hbar c) \alpha; \quad \bar{g} = \frac{8\sqrt{k}}{c^2} (\hbar c) \alpha = \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W}. \quad (4.9.11)$$

Отсюда и из (4.5.8), кроме того, имеем

$$\alpha \approx 1,7 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-1}; \quad b_0 \eta_0 \approx 1,6 \cdot 10^{-17}. \quad (4.9.12)$$

Взаимодействие с W -бозонами описывается членами с кручением и определяется слагаемыми в гиперплотности лагранжиана (в нулевом порядке по $b_0 \eta_0$):

$$- \frac{3i\hbar c}{4} \sqrt{-{}^6G} \left\{ S(65)_\alpha \bar{\Psi} \Gamma(6) \Gamma(5) \tilde{\Gamma}^\alpha \Psi + \frac{1}{6} \tilde{S}_{\alpha\beta\gamma} \bar{\Psi} \tilde{\Gamma}^\alpha \tilde{\Gamma}^\beta \tilde{\Gamma}^\gamma \Psi \right\}. \quad (4.9.13)$$

Здесь оба слагаемых содержат четвертые степени Γ -матриц (с учетом матрицы $\Gamma(0)$ в определении $\bar{\Psi}$). Опять это означает отсутствие перекрестных членов из компонент $\Psi(1)$ и $\Psi(2)$.

При записи первого члена в (4.9.13) следует учесть, что в выбранном представлении Γ -матриц

$$3S(65)_\alpha \bar{\Psi} \Gamma(6) \Gamma(5) \tilde{\Gamma}^\alpha \Psi = 3S(65)_\alpha \bar{\Psi} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\alpha \gamma_5 \\ -\gamma^\alpha \gamma_5 & 0 \end{pmatrix} \Psi, \quad (4.9.14)$$

а для второго члена с учетом формулы (1.6.6) имеем

$$\frac{1}{2} \tilde{S}_{\alpha\beta\nu} \bar{\Psi} \tilde{\Gamma}^\alpha \tilde{\Gamma}^\beta \tilde{\Gamma}^\nu \Psi = 3S_\alpha \bar{\Psi} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\alpha \gamma_5 \\ \gamma^\alpha \gamma_5 & 0 \end{pmatrix} \Psi. \quad (4.9.15)$$

Все парные комбинации из 4-компонентных функций будут состоять либо только из левых, либо только из правых спиноров, причем

$$\bar{\Psi}(s) \gamma_\mu \gamma_5 \Psi(s) = i(-\bar{\Psi}_L(s) \gamma_\mu \Psi_L(s) + \bar{\Psi}_R(s) \gamma_\mu \Psi_R(s)), \quad (4.9.16)$$

так как

$$\bar{\Psi}_L(s) \gamma_\mu \gamma_5 \Psi_R(s) = \bar{\Psi}_R(s) \gamma_\mu \gamma_5 \Psi_L(s) = 0.$$

Используя эти формулы, запишем (4.9.13) в виде

$$-\frac{3}{4} \sqrt{-{}^6G} \hbar c [S(65)_\alpha (-\bar{\Psi}_L(1) \gamma^\alpha \Psi_L(1) + \bar{\Psi}_L(2) \gamma^\alpha \Psi_L(2)) + S_\alpha (\bar{\Psi}_L(1) \gamma^\alpha \Psi_L(1) + \bar{\Psi}_L(2) \gamma^\alpha \Psi_L(2))]. \quad (4.9.17)$$

Примечательно, что здесь вообще отсутствуют правые компоненты фермионов. Это произошло потому, что Ψ_R не содержит зависимости от x^6 , которая могла бы скомпенсировать $\exp(2i\beta x^6)$, содержащуюся в кручении. После подстановки формул (4.6.5) в (4.9.17) и усреднения по координатам x^5 и x^6 , находим, что остаются только слагаемые, пропорциональные $\bar{e}_{L\nu L}$ и \bar{v}_{LeL} , т. е.

$$-\frac{3}{2} \sqrt{-{}^6G} \hbar c C_S \left\{ (\bar{v}_L, \bar{e}_L) \left[A(1)_\alpha \begin{pmatrix} 0 & a_{L2}^* b_{L2} \\ b_{L2}^* a_{L2} & 0 \end{pmatrix} + A(2)_\alpha \begin{pmatrix} 0 & -ia_{L1}^* b_{L1} \\ ib_{L1}^* a_{L1} & 0 \end{pmatrix} \right] \gamma^\alpha \begin{pmatrix} v_L \\ e_L \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.9.18)$$

где на основании того, что константы C_S и $C_{S'}$ близки друг другу (см. (4.6.9)), положено $C_S = C_{S'}$.

Легко видеть, что для соответствия (4.9.18) со стандартным выражением из (4.1.9)

$$\frac{g_2}{4} (\bar{v}_L, \bar{e}_L) [A(1)_\alpha \sigma(1) + A(2)_\alpha \sigma(2)] \gamma^\alpha \begin{pmatrix} v_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad (4.9.19)$$

следует положить

$$a_{L2}^* b_{L2} = a_{L1}^* b_{L1} = 1. \quad (4.9.20)$$

Из сравнения (4.9.18) и (4.9.19) можно определить значение константы

$$-C_S \approx -C_{S'} = \frac{g_2}{6\hbar c} = \frac{1}{3} \frac{e}{\hbar c}, \quad (4.9.21)$$

где положено $g_2 = e/\sin\theta_w$. Таким образом, значение C_S не предсказывается 6-мерной теорией, а находится из соответствия со стандартной.

§ 4.10. Массы покоя фермионов

Собирая все массовые вклады из (4.8.1) и (4.8.6) и добавляя ферминово сопряженные выражения, находим

$$-\frac{i}{4} \sqrt{-{}^6G} \hbar c \left\{ \lambda^5 \left[\chi^{5+\mu} \bar{\Psi} \Gamma(5) \frac{\partial \Psi}{\partial x^6} - (\chi^*)^{5+\mu} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x^6} \Gamma(5) \Psi \right] + \frac{5}{2} \left(\chi^{4+\mu} \frac{\partial \chi}{\partial x^6} - (\chi^*)^{4+\mu} \frac{\partial \chi^*}{\partial x^6} \right) \bar{\Psi} \Gamma(5) \Psi \right\} + \\ + \sigma^6 \left[\chi^{5+\mu} \bar{\Psi} \Gamma(6) \frac{\partial \Psi}{\partial x^6} - (\chi^*)^{5+\mu} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x^6} \Gamma(6) \Psi \right] + \\ + \frac{5}{2} \left(\chi^{4+\mu} \frac{\partial \chi}{\partial x^6} - (\chi^*)^{4+\mu} \frac{\partial \chi^*}{\partial x^6} \right) \bar{\Psi} \Gamma(6) \Psi \left. \right\}. \quad (4.10.1)$$

Из-за четного числа Γ -матриц (включая $\Gamma(0)$ в определении $\bar{\Psi}$) опять не будут перепутываться слагаемые $\Psi(1)$ и $\Psi(2)$. При записи слагаемых с $\Gamma(5)$ следует учесть, что

$$\bar{\Psi}(s) \gamma_5 \Psi(s) = i(\bar{\Psi}_L(s) \Psi_R(s) - \bar{\Psi}_R(s) \Psi_L(s)), \quad (4.10.2)$$

так как

$$\bar{\Psi}_L(s) \gamma_5 \Psi_L(s) = \bar{\Psi}_R(s) \gamma_5 \Psi_R(s) = 0.$$

При записи слагаемых с $\Gamma(6)$ следует использовать формулу

$$\bar{\Psi}(s) I_4 \Psi(s) = \bar{\Psi}_L(s) \Psi_R(s) + \bar{\Psi}_R(s) \Psi_L(s). \quad (4.10.3)$$

Поскольку все слагаемые содержат перекрестные комбинации из левых и правых компонент, то вследствие определения (4.7.6) экспоненциальные множители в спинорных слагаемых в нулевом порядке по $b_0 \eta_0$ не могут скомпенсировать друг друга. Значит, компенсация может быть достигнута лишь в первом порядке по $b_0 \eta_0$ за счет скалярных слагаемых из конформ-

ного фактора. Выделим из множителей с величинами χ и χ^* (4.10.1) члены первого порядка по b_0 :

$$\chi^{5+\mu} \approx 1 + b_0(5 + \mu) [\varphi_0 \exp(i\alpha x^5 - i\beta x^6) - \varphi_0^* \exp(-i\alpha x^5 + i\beta x^6)];$$

$$\chi^{4+\mu} \frac{\partial \chi}{\partial x^5} - (\chi^*)^{4+\mu} \frac{\partial \chi^*}{\partial x^5} \approx$$

$$\approx 2ib_0\alpha [\varphi_0 \exp(i\alpha x^5 - i\beta x^6) + \varphi_0^* \exp(-i\alpha x^5 + i\beta x^6)]; \quad (4.10.4)$$

$$\chi^{4+\mu} \frac{\partial \chi}{\partial x^6} - (\chi^*)^{4+\mu} \frac{\partial \chi^*}{\partial x^6} \approx$$

$$\approx -2ib_0\beta [\varphi_0 \exp(i\alpha x^5 - i\beta x^6) + \varphi_0^* \exp(-i\alpha x^5 + i\beta x^6)].$$

Подставляя формулы (4.10.2) — (4.10.4) и (4.7.6) в (4.10.1), после усреднения по координатам x^5 и x^6 получаем массовый вклад в плотность лагранжиана

$$\frac{i}{4} \sqrt{-G} (\hbar c) b_0 \eta_0 \mu \{ \alpha \lambda^5 [-\bar{e}_L e_R (b_{L1}^* b_{R1} + b_{L2}^* b_{R2}) + \bar{e}_R e_L (b_{R1}^* b_{L1} + b_{R2}^* b_{L2}) - \bar{\nu}_L \nu_R (a_{L1}^* a_{R1} + a_{L2}^* a_{R2}) + \bar{\nu}_R \nu_L (a_{R1}^* a_{L1} + a_{R2}^* a_{L2})] -$$

$$- i\beta \sigma^6 [\bar{e}_L e_R (b_{L1}^* b_{R1} - b_{L2}^* b_{R2}) + \bar{e}_R e_L (b_{R1}^* b_{L1} - b_{R2}^* b_{L2}) + \bar{\nu}_L \nu_R (a_{L1}^* a_{R1} - a_{L2}^* a_{R2}) + \bar{\nu}_R \nu_L (a_{R1}^* a_{L1} - a_{R2}^* a_{L2})] \}. \quad (4.10.5)$$

Полученное выражение характерно тем, что оно пропорционально μ — показателю степени конформного фактора, введенного в (4.2.1) искусственным образом перед спинорной частью гиперплотности лагранжиана. Если χ^μ не вводить, то массы фермионов будут равны нулю. Этот результат обусловлен тем, что конформные факторы со степенью, характерной для данной размерности ($6-1=5$), в членах с производными от Ψ -функций в точности сокращаются с вкладами от конформной части коэффициентов вращения Риччи (см. характерный коэффициент $5/2$ для данной размерности в (4.10.1)). Заметим, что подобная теорема имеет место и для других размерностей, в частности справедлив подобный же результат в 7-мерной модели.

В связи с изложенным вырисовываются два канала введения отличных от нуля масс покоя фермионов в не квантованной вторично теории. Первый канал основан на введении коэффициента χ^μ в гиперплотности лагранжиана (4.2.1), что было сделано в приведенных выкладках. Второй канал состоит в изменении определения зависимостей (4.7.6) от координат x^5 и x^6 для левых и правых компонент спиноров. Обсудим эти два канала.

Первый канал. Допустим, что $|\mu|=1$. В этом случае при учете условий нормировки (4.9.4), а также (4.9.20) и (4.5.8)

из (4.10.5) следует ожидать значения масс покоя фермионов

$$mc^2 \approx (\hbar c) b_0 \eta_0 \alpha (0,5 \div 1) \approx 2,6 \div 5,2 \text{ ГэВ}. \quad (4.10.6)$$

Эти массы сравнимы с массами кварков 2-го и 3-го поколений, т. е. чрезвычайно велики по сравнению с массами электрона и нейтрино. Следовательно, для получения масс лептонов таким способом нужно положить степень μ чрезвычайно малой.

Второй канал соответствует $\mu=0$ и основан на таком изменении определения (4.7.6), которое бы не сказалось заметным образом на определении нейтральных и заряженных токов лептонов, рассмотренных в предыдущем параграфе. В частности, можно положить, что левые и правые компоненты фермионов описываются не одним набором гармоник ϵ_5 и ϵ_6 , а их совокупностью, не нарушающей правило (4.7.5) для электрических зарядов. Можно допустить, что имеет место пересечение гармоник для левых и правых компонент с чрезвычайно малым весовым вкладом. Например, (4.7.6) можно заменить на

$$\Psi_L(s) = a_{Ls} \nu_L (e^{-i\alpha x^5 + i\beta x^6} + b_0 \eta_0 f_\nu) + b_{Ls} e_L (e^{-i\alpha x^5 - i\beta x^6} + b_0 \eta_0 f_e e^{-2i\alpha x^5}); \quad (4.10.7)$$

$$\Psi_R(s) = a_{Rs} \nu_R (1 + b_0 \eta_0 f_\nu e^{-i\alpha x^5 + i\beta x^6}) + b_{Rs} e_R (e^{-2i\alpha x^5} + b_0 \eta_0 f_e e^{-i\alpha x^5 - i\beta x^6}),$$

где f_ν и f_e — некоторые постоянные. В этих формулах введены дополнительные пересекающиеся гармоники, отличающиеся от основных на гармоники хиггсовского скалярного бозона φ_0 , и соответственно введены присущие им коэффициенты $b_0 \eta_0$. Подобное изменение Ψ -функций приведет к появлению несущественных добавок второго порядка малости по $b_0 \eta_0$ в членах, обязанных коэффициентам вращения Риччи, и одновременно к возникновению несокращающихся членов 1-го порядка по $b_0 \eta_0$ из выражений с производными от Ψ . Они и будут определять значения масс частиц.

Если бы пересекающиеся гармоники были одного порядка с основными, то это приводило бы к массам покоя фермионов порядка планковских. Коэффициент $b_0 \eta_0$ перенормирует массы до значений (4.10.6), т. е. масс токовых кварков, а малые коэффициенты f_ν и f_e уменьшают массы до значений масс лептонов. Для согласия с экспериментальными данными для лептонов первого поколения следует полагать $f_e \approx 10^{-4}$ и $f_\nu \approx 0 \div 10^{-8}$. Очевидно, что примесь гармоник с такими малыми весовыми вкладами практически не скажется на взаимодействии фермионов с нейтральными и заряженными векторными бозонами. Ясно, что константы f_ν и f_e имеют тот же характер, что и одноименные константы в (4.1.1) в стандартной теории.

§ 4.11. Взаимодействие фермионов с векторными полями через аномальные магнитные моменты

Выделим из (4.8.6) и (4.8.8) слагаемые, описывающие взаимодействие фермионов с векторными полями через аномальные моменты:

$$\frac{i}{8} \sqrt{-G} \hbar c \chi^5 \{ {}^5 F_{\alpha\beta} \bar{\Psi} \Gamma (5) \tilde{\Gamma}^\alpha \tilde{\Gamma}^\beta \Psi + {}^6 F_{\alpha\beta} \bar{\Psi} \Gamma (6) \tilde{\Gamma}^\alpha \tilde{\Gamma}^\beta \Psi + 3S(5)_{\alpha\beta} \bar{\Psi} \Gamma (5) \tilde{\Gamma}^\alpha \tilde{\Gamma}^\beta \Psi + 3S(6)_{\alpha\beta} \bar{\Psi} \Gamma (6) \tilde{\Gamma}^\alpha \tilde{\Gamma}^\beta \Psi \}. \quad (4.11.1)$$

Используя представление Γ -матриц (4.7.1), для второго и четвертого слагаемых имеем

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \Gamma (6) \tilde{\Gamma}^\alpha \tilde{\Gamma}^\beta \Psi &= \bar{\Psi}_L(1) \gamma_\alpha \gamma_\beta \Psi_R(1) + \bar{\Psi}_R(1) \gamma^\alpha \gamma^\beta \Psi_L(1) - \\ &- \bar{\Psi}_L(2) \gamma^\alpha \gamma^\beta \Psi_R(2) - \bar{\Psi}_R(2) \gamma^\alpha \gamma^\beta \Psi_L(2), \end{aligned} \quad (4.11.2)$$

где использовано, что

$$\bar{\Psi}_L(s) \gamma^\alpha \gamma^\beta \Psi_L(s) = \bar{\Psi}_R(s) \gamma^\alpha \gamma^\beta \Psi_R(s) = 0.$$

Аналогично для первого и третьего слагаемых имеем

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \Gamma (5) \tilde{\Gamma}^\alpha \tilde{\Gamma}^\beta \Psi &= i [\bar{\Psi}_L(1) \gamma^\alpha \gamma^\beta \Psi_R(1) - \bar{\Psi}_R(1) \gamma^\alpha \gamma^\beta \Psi_L(1) + \\ &+ \bar{\Psi}_L(2) \gamma^\alpha \gamma^\beta \Psi_R(2) - \bar{\Psi}_R(2) \gamma^\alpha \gamma^\beta \Psi_L(2)]. \end{aligned} \quad (4.11.3)$$

Как и в предыдущем параграфе, во всех выражениях содержатся перекрестные слагаемые из левых и правых компонент спиноров. Для нейтральных векторных полей (первое и второе слагаемое в (4.11.1)) это сразу же означает, что экспоненциальные множители в спинорных слагаемых могут быть скомпенсированы только за счет экспонент в факторе χ^5 . Для заряженных векторных полей учет их зависимости от x^6 в виде $\exp(\pm 2i\beta x^6)$ также диктует привлечение экспоненциальных вкладов от скалярных полей. Следовательно, из гиперплотности лагранжиана (4.11.1) не получится величин нулевого порядка по $b_0 \eta_0$, какие возникали из части лагранжиана (4.9.1), а получатся, как минимум, выражения первого порядка по $b_0 \eta_0$.

Подставляя (4.11.2) и (4.11.3) в (4.11.1) и используя выражения (4.7.6), легко найти слагаемые, описывающие взаимодействие с нейтральными векторными полями. Последние записываются с помощью формул

$$\begin{aligned} {}^5 F_{\alpha\beta}^\lambda &= -\frac{\sqrt{k}}{c^2} [\sin \theta_W F(Z)_{\alpha\beta} - F(A)_{\alpha\beta} \cos \theta_W]; \\ {}^6 F_{\alpha\beta} &= \frac{\sqrt{k}}{c^2} [F(Z)_{\alpha\beta} \cos \theta_W + F(A)_{\alpha\beta} \sin \theta_W]. \end{aligned} \quad (4.11.4)$$

Из (4.11.1) — (4.11.4) находим оценку для аномальных магнитных моментов

$$\Delta \mu \approx \frac{\sqrt{k}}{e} m (b_0 \eta_0). \quad (4.11.5)$$

Это чрезвычайно малая величина. Таким образом, аномально большие моменты в 6-мерной модели не возникают в отличие от 5-мерной теории, где не было различия в левых и правых компонентах в экспоненциальной зависимости от x^5 .

Аналогичные выкладки позволяют получить выражения для взаимодействия фермионов с заряженными W -бозонами. Легко показать, что такие слагаемые имеют тот же порядок малости, что и (4.11.5).

§ 4.12. Взаимодействие фермионов с гравитацией и дополнительными геометрическими слагаемыми

Выделим слагаемые плотности лагранжиана из (4.8.6), описывающие взаимодействие фермионов с гравитационным полем и компонентами 6-метрики $\lambda^5, \lambda^6, \sigma^6$ в нулевом приближении по $b_0 \eta_0$:

$$\begin{aligned} &- \frac{i}{8} \sqrt{-g} \lambda_5 \sigma_6 (\hbar c) \left[\Delta(\alpha, \beta\nu) \bar{\Psi} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\nu) \Psi + \right. \\ &+ \left. 2 \left(\lambda^N \frac{\partial \lambda_N}{\partial x^\alpha} + \sigma^6 \frac{\partial \sigma_6}{\partial x^\alpha} \right) \bar{\Psi} \tilde{\Gamma}^\alpha \Psi - \lambda^N \frac{\partial \sigma_N}{\partial x^\alpha} \bar{\Psi} \tilde{\Gamma}^\alpha \Gamma(5) \Gamma(6) \Psi \right]. \end{aligned} \quad (4.12.1)$$

Фактически эти слагаемые описывают взаимодействие через производные со следующими двумя блоками 6-мерной метрики: $\left(\frac{g_{\mu\nu}}{|\lambda, \sigma} \right)$. Рассмотрим в отдельности каждое из этих слагаемых.

1. Первое слагаемое описывает именно гравитационное взаимодействие. Используя представление Γ -матриц, легко показать, что

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\nu) \Psi &= \bar{\Psi}_L(1) \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \Psi_L(1) + \bar{\Psi}_R(1) \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \Psi_R(1) + \\ &+ \bar{\Psi}_L(2) \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \Psi_L(2) + \bar{\Psi}_R(2) \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \Psi_R(2), \end{aligned} \quad (4.12.2)$$

так как

$$\bar{\Psi}_L(s) \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \Psi_R(s) = \bar{\Psi}_R(s) \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \Psi_L(s) = 0.$$

Расписывая 4-компонентные функции $\Psi(s)$ и производя интегрирование по x^5 и x^6 , находим выражение

$$-\frac{i}{4} \sqrt{-g} \lambda_5 \sigma_6 \Delta_{\alpha, \beta \nu} [(\bar{\nu}_L \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \nu_L + \bar{\nu}_R \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \nu_R) + (\bar{e}_L \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu e_L + \bar{e}_R \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu e_R)], \quad (4.12.3)$$

совпадающее с известным в стандартной 4-мерной теории лагранжианом взаимодействия фермионов с гравитационным полем через коэффициенты вращения Риччи (см. (1.8.8)).

2. Для записи второго слагаемого в (4.12.1) учтем ранее уже использованную формулу (4.9.2). После простых преобразований приходим к результату:

$$-\frac{i}{2} \sqrt{-g} \lambda_5 \sigma_6 \left(\lambda^5 \frac{\partial \lambda_5}{\partial x^\alpha} + \lambda^6 \frac{\partial \lambda_6}{\partial x^\alpha} + \sigma^6 \frac{\partial \sigma_6}{\partial x^\alpha} \right) \times [(\bar{\nu}_L \gamma^\alpha \nu_L + \bar{\nu}_R \gamma^\alpha \nu_R) + (\bar{e}_L \gamma^\alpha e_L + \bar{e}_R \gamma^\alpha e_R)]. \quad (4.12.4)$$

Ясно, что таких слагаемых в стандартной 4-мерной теории в принципе нет. Из формул (4.12.3) и (4.12.4) видно совершенно одинаковое взаимодействие с геометрическими слагаемыми как электронов, так и нейтрино, как их левых, так и их правых компонент.

3. Для записи третьего слагаемого в (4.12.4) следует воспользоваться ранее приведенными формулами (4.9.14) и (4.9.15), приводящими к тому, что останутся лишь слагаемые, пропорциональные $\bar{\nu}_L \gamma^\alpha \nu_L$, $\bar{\nu}_R \gamma^\alpha \nu_R$, $\bar{e}_L \gamma^\alpha e_L$ и $\bar{e}_R \gamma^\alpha e_R$. Вследствие того что согласно (4.9.14)

$$\bar{\Psi} \tilde{\Gamma}^\alpha \Gamma(5) \Gamma(6) \Psi = -\bar{\Psi} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\alpha \gamma_5 \\ -\gamma^\alpha \gamma_5 & 0 \end{pmatrix} \Psi,$$

компоненты $\bar{\Psi}(1) \gamma^\alpha \gamma_5 \Psi(1)$ входят с обратным знаком по отношению к компонентам $\bar{\Psi}(2) \gamma^\alpha \gamma_5 \Psi(2)$, а те и другие описывают одинаковое взаимодействие с геометрическими слагаемыми, результирующее значение будет тождественно равно нулю. Вклада от последнего слагаемого не будет.

Еще раз следует подчеркнуть, что выражениями (4.12.3) и (4.12.4) не ограничиваются все взаимодействия фермионов с геометрией (гравитацией). Практически во всех ранее выписанных выражениях присутствовали сомножители типа $\tilde{\Gamma}^\alpha \partial / \partial x^\alpha$. В основном нами рассмотренном приближении полагалось $\tilde{\Gamma}^\alpha \rightarrow \Gamma(\alpha)$. На самом деле везде следовало бы писать $\Gamma(\alpha) g(\alpha)^\beta$, где компоненты тетрады $g(\alpha)^\beta$ также являются характеристиками гравитационного поля.

§ 4.13. Обсуждение результатов

Подводя итог изложенному, можно утверждать, что модель электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама в унитарной калибровке довольно полно вкладывается в 6-мерную гео-

метрию с кручением и с внешней спинорной материей. При этом на геометрической основе достигается естественное совмещение ряда идей и вариантов объединения взаимодействий: а) 5-мерной теории гравитации и электромагнетизма Калуцы—Клейна, б) модели электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама, в) теории Вейля, основанной на конформном преобразовании, г) теории с кручением типа Эйнштейна—Картана—Родичева, д) теории спиноров в многомерных многообразиях. Подчеркнем еще раз истоки использованных здесь приемов.

1. Скалярные поля φ_0 и φ_+ , соответствующие хиггсовским, возникли из конформного фактора, с помощью которого делалось преобразование от исходной метрики G_{MN}^0 к физически интерпретируемой G_{MN} . Здесь можно усмотреть обобщение идей Вейля.

2. Нейтральные векторные поля B_μ и $A(3)_\mu$ (или Z_α и A_z) определялись 4-мерными компонентами двух метрических 6-векторов λ_N и σ_N , ортогональных друг другу, и 4-мерному локальному пространственно-временному сечению. Это отождествление выполнено в духе теории Калуцы—Клейна.

3. Заряженные векторные бозоны $A(1)_\mu$ и $A(2)_\mu$ (или W_μ^+ и W_μ^-) геометрически интерпретировались через компоненты тензоров кручения. Изложенное непосредственно относится к многолетним дискуссиям (с 20-х годов) о возможных проявлениях закрученности пространства-времени.

4. Феноменологически вводимые характеристики элементарных частиц: гиперзаряд Y и проекция изоспина T_3 — интерпретировались как номера гармоник специальной циклической зависимости 6-мерных величин от дополнительных координат, соответственно x^5 и x^6 . Циклическая зависимость взята из наших исследований [17] по 5-мерной теории гравитации, электромагнетизма и электрически заряженной материи, которая в свою очередь навеяна идеей Эйнштейна и Бергмана [114] о замкнутости пространства-времени по пятой координате.

5. 4-Компонентные волновые функции электрона и нейтрино образуют в виде специальной комбинации единый 8-компонентный спинор в 6-мерном многообразии. Этот вывод связан с серией работ [58, 90, 91] по применению алгебр Клиффорда для описания фермионов в многомерных многообразиях различной сигнатуры (см. приложение).

6. Если бы не учитывались вклады от космологической «постоянной», то масса скалярного бозона имела бы порядок планковской [30]. Это созвучно идеям ряда авторов о планкеонах, максимонах [67] или фридмонах, вводимых из совершенно других соображений. Заметим, что в работах К. П. Станюковича и его учеников [94] планкеоны трактовались как 4-мерные полузамкнутые образования. В нашем подходе имеется вклад в массы покоя скалярных бозонов, обязанный замкнуто-

сти 6-мерного многообразия лишь по дополнительным — пятой и шестой пространственным координатам.

Особо следует подчеркнуть, что изложенная здесь 6-мерная модель не заменяет модель электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама, а, скорее, представляет собой рассмотрение ее содержания под иным, геометрическим углом зрения.

Изложенная здесь теория обладает рядом недостатков. Отметим некоторые из них:

1. В 6-мерной модели масса W -бозона вводится способом, отличным от стандартного. Известное соотношение $m_W/m_Z = \cos \theta_W$ в 6-мерной модели вводится как ограничение на, вообще говоря, произвольное значение m_W .

2. Видимо, правильнее говорить о вложении модели Вайнберга—Салама в 6-мерную модель, так как в последней из конформного фактора получается множество слагаемых более высокой степени по скалярному полю. Они ответственны за перенормируемость 6-мерной теории.

3. В бозонном секторе 6-мерной модели отсутствует ряд членов стандартной теории, описывающих взаимодействие нейтральных векторных полей с заряженными.

4. 6-мерная теория не пошла дальше стандартной модели Вайнберга—Салама. В частности, хотелось бы иметь теорию, описывающую не один дублет фермионных полей, а всю совокупность трех поколений как лептонов, так и кварков.

Видимо, имеются и другие слабые стороны 6-мерной модели. В то же время 6-мерный геометрический подход обладает рядом несомненных достоинств. Кроме перечисленных в начале этого параграфа следует отметить, что с помощью 6-мерия можно надеяться перейти к исследованию новых факторов, связывающих макромир (космологию) с микромиром. В частности, имеется в виду актуальная проблема связи «начальных стадий» эволюции Вселенной с этапами выделения различных взаимодействий. Видимо, нет оснований рассматривать Вселенную на ранних стадиях ее развития 4-мерной.

Глава 5.

7-МЕРНАЯ МОДЕЛЬ ГРАВИ-ЭЛЕКТРО-СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ТРИ ПОКОЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

§ 5.1. Основные сведения о свойствах электрослабых взаимодействий трех поколений лептонов и кварков

Цель этой главы — исследовать на основе уже использованных ранее методов и понятий более богатую 7-мерную модель, охватывающую все множество эмпирически найденных лептонов и кварков и учитывающую все известные свойства гравитационных и электрослабых взаимодействий этих частиц.

Напомним необходимые сведения из физики электрослабых взаимодействий, дополняющие § 4.1. В настоящий момент известны шесть видов лептонов (иначе, имеются лептоны шести ароматов), образующих три поколения:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}.$$

Их можно назвать соответственно первым (электронным), вторым (мюонным) и третьим (тау-лептонным) поколениями. Все лептоны обладают спином $1/2$; верхние лептоны нейтральны (три вида нейтрино), нижние обладают единичным отрицательным электрическим зарядом. Нижние лептоны существенно различаются массами покоя. В настоящее время нет общепризнанного теоретического обоснования существования этих трех поколений. Обычно указывается на неясность ролей этих поколений в общей структуре мира.

Согласно современным данным все сильно взаимодействующие частицы — адроны (барионы и мезоны) имеют кварковую структуру. Представителями адронов в слабых взаимодействиях являются кварки. Аналогично лептонам имеются кварки шести ароматов, также разбивающихся на три поколения:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}.$$

Пять из них уже надежно открыты, относительно последнего, t -кварка, имеются данные, свидетельствующие в пользу его существования. Все они обладают спином $1/2$. Известно, что все верхние кварки (u, c, t) обладают электрическим зарядом $Q = +2/3$, тогда как нижние кварки (d, s, b) имеют электрический заряд $Q = -1/3$. Примечателен факт дробности электрического заряда, а также то, что заряды верхних и нижних кварков отличаются друг от друга на единицу. Последнее характерно также и для лептонов. Все кварки имеют отличную

от нуля массу покоя, причем различаются два вклада в общую массу кварка: а) масса токового («голового») кварка, обязанная электрослабому взаимодействию (она различается от 5 и 7 МэВ для кварков 1-го поколения до 18 и 4,8 ГэВ для кварков 3-го поколения); б) масса блокового кварка (обязанная сильному взаимодействию (она примерно на 300 МэВ превышает массу токового кварка) [74].

Здесь же следует напомнить, что согласно современной хромодинамике кварки характеризуются также тремя цветами (цветовыми зарядами): красным, желтым и синим. По этой причине говорят о цветовом триplete кварков q^i , где i пробегает три значения (пусть $i=1$ соответствует красному цвету, $i=2$ — желтому и $i=3$ — синему). Цветовые заряды антикварков отличаются от зарядов кварков. Их можно назвать соответственно антикрасным (зеленым), антижелтым (фиолетовым) и антисиним (оранжевым). Таким образом, учитывая еще 6 возможных ароматов, имеем $3 \times 6 = 18$ различных кварков.

Взаимодействие с промежуточным нейтральным векторным Z -бозоном осуществляется через нейтральные токи. Согласно современным данным имеет смысл рассматривать 12 нейтральных токов, образованных одинаковыми входящими и выходящими частицами: 6 лептонных нейтральных токов (типа $\bar{\nu}_e \nu_e$, $\bar{e} e$ и т. д.) и 6 кварковых нейтральных токов (типа $\bar{u} u$, $\bar{d} d$, ...). Характерно, что в теории не должны возникать нейтральные токи, как лептонные, так и кварковые, в которых перемешиваются частицы из разных поколений (т. е. типа $\bar{e} \mu$, $\bar{\nu}_e \nu_\mu$, $\bar{u} s$ и т. д.). Этот факт будем называть в дальнейшем правилом запрета для нейтральных токов.

Известно, что нейтральные токи включают в себя как левые, так и правые компоненты спинорных частиц. В самом общем виде нейтральный ток может быть записан в виде суммы следующих 12 членов:

$$j_\alpha^0 = \sum_{i=1}^{12} (g_L^i \bar{\Psi}_i O_\alpha^L \Psi_i + g_R^i \bar{\Psi}_i O_\alpha^R \Psi_i), \quad (5.1.1)$$

где индекс i соответствует 6 ароматам лептонов и 6 ароматам кварков: операторы O_α^L для левых компонент и O_α^R для правых компонент имеют ранее определенный в (4.7.3) вид:

$$O_\alpha^L = \gamma_\alpha (1 + i\gamma_5); \quad O_\alpha^R = \gamma_\alpha (1 - i\gamma_5),$$

а g_L^i и g_R^i — численные коэффициенты, принимающие для лептонов и кварков следующие значения:

$$\begin{aligned} g_L^i &= 1/2; & g_R^i &= 0 & \text{для } i &= \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau \\ g_L^i &= -1/2 + \sin^2 \theta_W; & g_R^i &= \sin^2 \theta_W & \text{для } i &= e, \mu, \tau; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_L^i &= +1/2 - (2/3) \sin^2 \theta_W; & g_R^i &= - (2/3) \sin^2 \theta_W & \text{для } i &= u, c, t; \\ g_L^i &= -1/2 + (1/3) \sin^2 \theta_W; & g_R^i &= + (1/3) \sin^2 \theta_W & \text{для } i &= d, s, b. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Здесь θ_W — по-прежнему обозначает угол Вайнберга.

Взаимодействие с промежуточными заряженными векторными W -бозонами описывается через заряженные токи, причем заряженные токи образуются только левыми компонентами спиноров. Согласно экспериментальным данным для лептонов имеются только три заряженных тока, в которые входят пары лептонов только из одного поколения, причем эти три тока везде входят совершенно симметричным образом:

$$j_\alpha^i = \bar{e} O_\alpha^L \nu_e + \bar{\mu} O_\alpha^L \nu_\mu + \bar{\tau} O_\alpha^L \nu_\tau. \quad (5.1.3)$$

Отсутствие токов, включающих частицы из разных поколений, будем называть правилом запрета для заряженных лептонных токов.

В отличие от лептонов для кварков имеются 9 заряженных токов, так что каждый кварк может образовывать заряженный ток как с партнером из своего, так и из других поколений. Говорят о перемешивании кварков в заряженных токах:

$$j_\alpha^i = \bar{d}' O_\alpha^L u + \bar{s}' O_\alpha^L c + \bar{b}' O_\alpha^L t, \quad (5.1.4)$$

где d' , s' , b' — ортонормированные линейные комбинации d , s и b -кварков. Это перемешивание принято описывать с помощью трех углов Эйлера θ_1 , θ_2 , θ_3 и фазового множителя $e^{i\delta}$. Из экспериментальных данных следует, что все углы θ_i малы, т. е. перемешивание кварков можно описать формулой

$$(\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}) \begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_1 s_3 \\ -s_1 & 1 & s_3 + s_2 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & -s_2 - s_3 e^{i\delta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad (5.1.5)$$

где $s_i = \sin \theta_i$. Для значений s_i известны оценки [74]:

$$\begin{aligned} \theta_1 &\approx 13^\circ; & s_1 &\approx 0,231 \pm 0,003; \\ 0,02 &< |s_2| < 0,09; & |s_3| &< 0,04; & |\delta| &\leq 0,4. \end{aligned}$$

Если пренебречь значениями s_2 и s_3 , то останется наиболее существенный угол θ_1 , называемый углом Каббиво. Он описывает перемешивание кварков из первого и второго поколений, т. е.

$$d' = d \cos \theta_1 + s \sin \theta_1; \quad s' = -d \sin \theta_1 + s \cos \theta_1. \quad (5.1.6)$$

Важно напомнить также о строгой цветовой симметрии всех токов. Она означает, что выражения для кварковых токов сле-

дует понимать как сумму из трех цветовых слагаемых; например, для заряженного тока $\bar{u}d$ имеем

$$\bar{u}d = \sum_{i=1}^3 \bar{u}^i d_i = \bar{u}^1 d_1 + \bar{u}^2 d_2 + \bar{u}^3 d_3.$$

Такие выражения принято называть бесцветными. Бесцветными также являются адроны, которые строятся из кварков трех цветов симметричным образом.

§ 5.2. Основные идеи 7-мерной модели гравитро-электро-слабых взаимодействий

Перечисленные в § 4.1 и § 5.1 понятия и свойства теории электрослабых взаимодействий всех поколений лептонов и кварков здесь будут описаны в рамках 7-мерной теории с гиперплотностью лагранжиана

$$L = \frac{\sqrt{g}}{4} \left[\frac{1}{\kappa} (\tilde{\Lambda} - \tilde{R}) + i\hbar c \chi^u \bar{\Psi} \Gamma_{\nabla M}^0 \Psi \right] + [\text{э. с.}] \quad (5.2.1)$$

аналогично (4.2.1). Здесь использованы те же обозначения, что и в § 4.2, с той только разницей, что все величины и операторы становятся 7-мерными. Чтобы не вводить новых обозначений, положим, что в этой главе прописные латинские индексы от K до Z пробегают 7 значений: 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7. Будем использовать 7-метрику с сигнатурой (+ — — — — —). По-прежнему будет рассматриваться аффинная геометрия с кручением. Напомним, что в 7-мерном многообразии спиноры Ψ имеют 8 компонент. Переход от гиперплотности лагранжиана (5.2.1) к лагранжиану 4-мерной теории осуществляется при помощи процедур типа ранее рассмотренных, т. е. 1+1+1+4-расщепления 7-мерных величин и операторов и конформного преобразования от исходных выражений (с индексом «0» сверху) к непосредственно физически интерпретируемым. Существенную роль играет процедура усреднений по периодам циклических зависимостей от трех дополнительных координат: x^5, x^6, x^7 .

Ключевым постулатом развиваемой здесь модели является утверждение:

Электрические заряды и вся совокупность ароматов (в частности, поколений) лептонов и кварков, а также три цвета кварков определяются возможными гармониками циклических зависимостей 7-мерных спиноров от трех дополнительных координат: x^5, x^6, x^7 .

Сформулированное утверждение в полной мере справедливо и для бозонов, в частности для определения электрических зарядов составляющих конформного фактора и кручения.

Подчеркнем, что этот постулат является дальнейшим обобщением постулата (2.5.3) 5-мерной теории Калуцы—Клейна, утверждавшего, что электрический заряд Q частиц определяется целочисленным коэффициентом ϵ_5 в циклической зависимости величин от 5-й координаты. В предыдущей главе при описании классической модели электрослабых взаимодействий для одного поколения частиц был сделан следующий шаг: было постулировано (4.7.5), т. е. Q определялось полусуммой целочисленных гармоник зависимостей от двух дополнительных координат: x^5 и x^6 . В этой главе делается еще один шаг — постулируется, что электрический заряд частиц определяется формулой

$$Q = 1/3 (\epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7), \quad (5.2.2)$$

где ϵ_5, ϵ_6 и ϵ_7 — целочисленные гармоники зависимостей от трех дополнительных координат: x^5, x^6, x^7 . Естественной мотивировкой такого постулата явился эмпирический факт, что электрические заряды кварков имеют значения $-1/3$ и $+2/3$.

Аналогично тому, как в 6-мерии через две гармоники ϵ_5 и ϵ_6 удалось описать феноменологические понятия гиперзаряда и проекции изоспина, так в 7-мерной модели с помощью комбинаций и значений трех гармоник можно описать все указанные в ключевом постулате понятия теории электрослабых взаимодействий. Подробно это описано в § 5.8. Забегая вперед, отметим, что для этого нужно должным образом выделять последовательно одну из трех гармоник (дополнительных координат).

В 7-мерной модели возникает качественно иная ситуация со скалярными бозонами. Соображения симметрии диктуют введение большего числа нейтральных бозонов типа хиггсовских.

Принципиальным оказался вопрос о физическом отождествлении векторных полей метрического происхождения. По-прежнему эти поля связываются с нейтральными векторными бозонами. Особенностью 7-мерной модели явилось наличие трех таких полей, тогда как для реализации классической модели Вайнберга—Салама достаточно лишь двух нейтральных векторных полей.

Полностью антисимметричный 7-мерный тензор кручения после 1+1+1+4-расщепления распадается на значительно большее число 4-мерных тензорных величин, нежели в 6-мерной теории. Важно должным образом распорядиться этим материалом так, чтобы естественным образом были определены потенциалы W -бозонов, их динамическая и массовая части.

В дополнении к геометрической интерпретации углов типа Вайнберга (в 7-мерной модели это уже не один угол) необходимо геометрически интерпретировать углы типа Каббиво и правила запрета для заряженных лептонных токов. Решение последних вопросов тесно связано с системой распределения гармоник фермионов по ароматам.

Имеются и другие особенности, не встречавшиеся в моделях пяти и шести измерений. Все составные части 7-мерной модели излагаются ниже примерно в том же порядке, как и в предыдущих главах.

§ 5.3. 1+1+1+4-Расщепление 7-мерного многообразия

Процедура 1+1+1+4-расщепления осуществляется методом, обобщающим изложенный в § 4.3 диадный метод. Основные черты, составные части и калибровка этого метода совершенно аналогичны ранее изложенным. Приведем основные формулы и операторы 1+1+1+4-расщепленной теории.

Алгебра. Метрический тензор 7-мерного многообразия в используемой сигнатуре представляется в виде

$${}^7G_{MN} = g_{MN} - \lambda_M \lambda_N - \sigma_M \sigma_N - \omega_M \omega_N, \quad (5.3.1)$$

где g_{MN} — метрический тензор локального 4-мерного пространственно-временного сечения, λ_M , σ_M и ω_M — три ортонормированных пространственноподобных вектора триады, ортогональные 4-мерному пространственно-временному сечению:

$$\lambda_N \lambda^N = \sigma_N \sigma^N = \omega_N \omega^N = -1; \quad (5.3.2)$$

$$\lambda_N \sigma^N = \lambda_N \omega^N = \sigma_N \omega^N = 0; \quad \lambda_N g^{MN} = \dots = 0.$$

Используем калибровку, соответствующую трижды последовательно примененной (типа хронометрической) калибровке 5-мерной теории (см. § 2.2). Исходными формулами (на первом этапе расщепления) являются

$$\omega^N = \frac{{}^7G_7^N}{\sqrt{-{}^7G_{77}}} \rightarrow \omega_N = \frac{{}^7G_{N7}}{\sqrt{-{}^7G_{77}}}. \quad (5.3.3)$$

Для остальных двух векторов триады имеют место формулы

$$\sigma^N = \frac{{}^6G_6^N}{\sqrt{-{}^6G_{66}}} = \left\{ 0, 0, 0, 0; 0, \frac{\sqrt{-G_{77}}}{\sqrt{G_{77}G_{66} - G_{67}^2}}; \frac{G_{67}}{\sqrt{-G_{77}(G_{66}G_{77} - G_{67}^2)}} \right\}, \quad (5.3.4)$$

$$\sigma_N = \frac{{}^6G_{N6}}{\sqrt{-{}^6G_{66}}} = \left\{ \frac{G_{7\alpha}G_{67} - G_{6\alpha}G_{77}}{\sqrt{-G_{77}(G_{66}G_{77} - G_{67}^2)}}; \frac{G_{76}G_{76} - G_{66}G_{77}}{\sqrt{-G_{77}(G_{66}G_{77} - G_{67}^2)}}; \frac{\sqrt{G_{66}G_{77} - G_{67}^2}}{\sqrt{-G_{77}}}; 0 \right\};$$

$$\lambda^N = \frac{{}^5G_5^N}{\sqrt{-{}^5G_{55}}} = \{0, 0, 0, 0; \lambda^5, \lambda^6, \lambda^7\}, \quad (5.3.5)$$

$$\lambda_N = {}^5G_5^N / \sqrt{-{}^5G_{55}} = \{\lambda_\alpha; \lambda_5, 0, 0\},$$

где

$$\lambda_\alpha = [G_{\alpha 6}G_{66}G_{77} - G_{\alpha 6}G_{67}^2 + G_{\alpha 6}G_{67}G_{57} - G_{\alpha 6}G_{77}G_{56} + G_{\alpha 7}G_{67}G_{56} - G_{\alpha 7}G_{66}G_{57}] [G_{66}G_{77} - G_{67}^2]^{-1/2} \cdot [G_{55}G_{66}G_{77} - G_{55}G_{67}^2 - G_{66}G_{57}^2 - G_{77}G_{56}^2 + 2G_{67}G_{57}G_{56}]^{-1/2},$$

остальные также довольно громоздкие компоненты $\lambda_5, \lambda^5, \lambda^6, \lambda^7$ выписывать не будем. Компоненты 4-метрики g_{MN} легко находятся из записанных здесь формул. В качестве коренных будем использовать следующие: $g_{\alpha\beta}, \lambda_\alpha, \sigma_\alpha, \omega_\alpha; \lambda^5, \lambda^6, \lambda^7, \sigma^6, \sigma^7, \omega^7$. Отметим, что

$$\lambda_5 = -1/\lambda^5; \quad \sigma_5 = \lambda^6/\lambda^5\sigma^6; \quad \sigma_6 = -1/\sigma^6; \quad (5.3.6)$$

$$\omega_5 = (\sigma^6\lambda^7 - \sigma^7\lambda^6)/\lambda^5\sigma^6\omega^7; \quad \omega_6 = \sigma^7/\sigma^6\omega^7; \quad \omega_7 = -1/\omega^7.$$

Кроме того, в дальнейшем будем учитывать, что

$$g^{N\alpha} = G^{N\alpha}; \quad g_5^\alpha = g_6^\alpha = g_7^\alpha = 0; \quad g_{N5} = g_{N6} = g_{N7} = 0; \quad (5.3.7)$$

$$g_\alpha^6 = G_\alpha^6; \quad g_\alpha^5 = \lambda^5\lambda_\alpha; \quad g_\alpha^6 = \lambda^6\lambda_\alpha + \sigma^6\sigma_\alpha;$$

$$g_\alpha^7 = \lambda^7\lambda_\alpha + \sigma^7\sigma_\alpha + \omega^7\omega_\alpha.$$

В данной калибровке триадного метода в общем случае выделено множество систем координат, связанных преобразованиями:

$$x'^5 = x'^5(x^\alpha, x^5), \quad x'^6 = x'^6(x^\alpha, x^5, x^6), \quad (5.3.8)$$

$$x'^7 = x'^7(x^\alpha, x^5, x^6, x^7);$$

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (5.3.9)$$

В исходном виде 7-мерной теории используются величины и операторы, инвариантные при преобразованиях (5.3.8) и ковариантные относительно преобразований четырех координат (5.3.9). Однако затем, когда вводится постулат квазицилиндричности по x^5, x^6, x^7 , преобразования (5.3.8) следует сузить до линейных по дополнительным координатам и с произвольными функциями $f_5(x^\alpha), f_6(x^\alpha)$ и $f_7(x^\alpha)$ соответственно в формулах (5.3.8). Далее, для использования ключевого постулата о физическом смысле гармоник ϵ_5, ϵ_6 и ϵ_7 нужно еще более ограничить преобразования, исключив перемешивания дополнитель-

ных координат. В итоге вместо (5.3.8) останутся преобразования

$$\begin{aligned} x'^5 &= x^5 + f_5(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad x'^6 = x^6 + f_6(x^0, x^1, x^2, x^3), \\ x'^7 &= x^7 + f_7(x^0, x^1, x^2, x^3), \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

обобщающие калибровочные преобразования в электродинамике.

Физико-геометрические тензоры. Из множества физико-геометрических тензоров триадного формализма нас будут интересовать лишь три антисимметричных тензора второго ранга:

$$\begin{aligned} {}^5F_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g_\mu^N g_\nu^P (\lambda_{N,P} - \lambda_{P,N}) \equiv \frac{1}{2} \lambda_5 F(5)_{\mu\nu}; \\ {}^6F_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g_\mu^N g_\nu^P (\sigma_{N,P} - \sigma_{P,N}) = \frac{1}{2} (\sigma_5 F(5)_{\mu\nu} + \sigma_6 F(6)_{\mu\nu}); \\ {}^7F_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g_\mu^N g_\nu^P (\omega_{N,P} - \omega_{P,N}) = \frac{1}{2} (\omega_5 F(5)_{\mu\nu} + \\ &+ \omega_6 F(6)_{\mu\nu} + \omega_7 F(7)_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

где

$$F(a)_{\mu\nu} = \frac{\partial g_\nu^a}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_\mu^a}{\partial x^\nu}, \quad a = 5, 6, 7.$$

Эти три тензора будут соответствовать напряженностям трех нейтральных полей данной модели грави-электро-слабых взаимодействий. Ряд векторных полей триадного формализма, не выписанных здесь, могут соответствовать полям 7-мерного «скаляризма», описывающим возможную переменность (зависимость от первых четырех координат) компонент метрики G_{55}, \dots, G_{77} .

Операторы триадного дифференцирования, как и прежде, не зависят от ранга и ковариантности дифференцируемых 4-тензоров и сохраняют их 4-мерный тензорный характер. В качестве ключевых следует выделить следующие четыре оператора:

$$\begin{aligned} \partial_7 &= \omega^N \frac{\partial}{\partial x^N} = \omega^7 \frac{\partial}{\partial x^7}, \quad \partial_6 = \sigma^N \frac{\partial}{\partial x^N} = \sigma^6 \frac{\partial}{\partial x^6} + \sigma^7 \frac{\partial}{\partial x^7}, \\ \partial_5 &= \lambda^N \frac{\partial}{\partial x^N} = \lambda^5 \frac{\partial}{\partial x^5} + \lambda^6 \frac{\partial}{\partial x^6} + \lambda^7 \frac{\partial}{\partial x^7}, \\ \partial_\alpha &= g_\alpha^N \frac{\partial}{\partial x^N} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + g_\alpha^5 \frac{\partial}{\partial x^5} + g_\alpha^6 \frac{\partial}{\partial x^6} + g_\alpha^7 \frac{\partial}{\partial x^7}. \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Наибольший интерес в дальнейшем будет представлять последний оператор, соответствующий части удлинненных производных в калибровочных теориях.

Из основных соотношений и уравнений 7-мерной теории в триадном виде ограничимся здесь самым необходимым, т. е. запишем плотность метрической (римановой) части скалярной кривизны

$$\begin{aligned} \sqrt{{}^7G} {}^7R &= \sqrt{-g} \lambda_5 \sigma_6 \omega_7 ({}^4R + {}^5F_{\alpha\beta} {}^5F^{\alpha\beta} + {}^6F_{\alpha\beta} {}^6F^{\alpha\beta} + \\ &+ {}^7F_{\alpha\beta} {}^7F^{\alpha\beta} + \dots). \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Здесь не выписаны члены, описывающие эффекты «скаляризма». Остальные нужные выражения в триадном виде будут выписываться по мере надобности.

§ 5.4. Конформно выделенное скалярное поле

В рассматриваемой 7-мерной модели, как и ранее, важную роль играет скалярное поле, соответствующее хиггсовскому и вводимое посредством процедуры конформного преобразования. Отличие от 6-мерной модели состоит в коэффициентах, зависящих от размерности, и, что самое существенное, в характере зависимостей скалярных полей от дополнительных координат.

Произведем конформное преобразование от исходной 7-метрики ${}^0G_{MN}$:

$${}^0G_{MN} = \chi^2 \cdot {}^7G_{MN} \rightarrow {}^7G^{MN} = \chi^{-2} \cdot {}^7G^{MN}, \quad (5.4.1)$$

где скалярный конформный фактор χ , как и прежде, зависит от всех координат, тогда как компоненты метрики ${}^7G_{MN}$ от дополнительных координат не зависят. Учтя формулу (1.5.1), получаем вклад в гиперплотность геометрического лагранжиана, обусловленный метрической частью,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\kappa} \sqrt{{}^7G} \cdot {}^7R &= -\frac{\sqrt{{}^7G}}{2\kappa} \chi^5 \left({}^7R - 12G^{MN} \frac{V_M V_N \chi}{\chi} - \right. \\ &\left. - 18G^{MN} \frac{\chi_{,M} \chi_{,N}}{\chi^2} \right). \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Здесь ковариантные производные являются 7-мерными относительно метрики ${}^7G_{MN}$.

Используя формулы предыдущего параграфа, произведем $1+1+1+4$ -расщепление. После довольно громоздких выкладок, выделения дивергентных членов (в 4-мерном смысле) и исключения слагаемых, которые заведомо дадут нуль при усреднении по дополнительным координатам, получаем гиперплотность лагранжиана конформно выделенного скалярного поля

$$\begin{aligned} -\frac{3}{\kappa} \sqrt{{}^7G} \chi^3 \{ 5g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \chi) \partial_\beta \chi + 2\chi (\partial_5^2 \chi + \partial_6^2 \chi + \partial_7^2 \chi) + \\ + 3[(\partial_5 \chi)^2 + (\partial_6 \chi)^2 + (\partial_7 \chi)^2] \} + (\text{дивергентный член}). \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Выберем зависимость χ от дополнительных координат, руководствуясь следующими соображениями. Во-первых, гармоники $\varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7$ должны быть подобраны так, чтобы вводимые скалярные поля были нейтральными. Именно они играют ключевую роль как в стандартной теории, так и в развиваемой здесь 7-мерной модели. Во-вторых, потребуем, чтобы выполнялась симметрия по всем трем дополнительным координатам. Эти условия еще не фиксируют гармоники. Недостающие условия вытекают из учета всего комплекса зависимостей от дополнительных координат вводимых в модели величин. По совокупности всех таких соображений постулируем χ в виде

$$\begin{aligned} \chi = & 1 + \tilde{b}_7 [\varphi_7 \exp(2i\alpha x^5 - 2i\beta x^6) - \varphi_7^* \exp(-2i\alpha x^5 + 2i\beta x^6)] + \\ & + \tilde{b}_6 [\varphi_6 \exp(-2i\alpha x^5 + 2i\omega x^7) - \varphi_6^* \exp(2i\alpha x^5 - 2i\omega x^7)] + \\ & + \tilde{b}_5 [\varphi_5 \exp(2i\beta x^6 - 2i\omega x^7) - \varphi_5^* \exp(-2i\beta x^6 - 2i\omega x^7)]. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Здесь φ_5, φ_6 и φ_7 — три в общем случае комплексных скалярных поля, зависящих лишь от четырех обычных пространственно-временных координат; \tilde{b}_5, \tilde{b}_6 и \tilde{b}_7 — три вещественные постоянные (как будет видно из последующего, они много меньше единицы); α, β, ω — константы, определяющие периоды зависимостей всех величин от дополнительных координат. В дальнейшем будем полагать $\alpha = \beta = \omega$, однако постараемся все-таки писать формулы в максимально общем виде. Подчеркнем, что, как и в 6-мерии, скалярные поля описываются чисто мнимым добавком в конформном факторе.

Подставим (5.4.4) в (5.4.3) и усредним по дополнительным координатам. Оставим слагаемые минимальной, т. е. второй, степени по \tilde{b}_5, \tilde{b}_6 и \tilde{b}_7 . В итоге получаем вклад в плотность лагранжиана

$$\begin{aligned} & \frac{30}{\kappa} \sqrt{7G} \{ \tilde{b}_5^2 [g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \varphi_5^*) \partial_\beta \varphi_5 - 4\varphi_5^* \varphi_5 ((\beta\lambda^6 - \omega\lambda^7)^2 + \\ & + (\beta\sigma^6 - \omega\sigma^7)^2 + (\omega\omega^7)^2)] + \\ & + \tilde{b}_6^2 [g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \varphi_6^*) \partial_\beta \varphi_6 - 4\varphi_6^* \varphi_6 ((\alpha\lambda^5 - \omega\lambda^7)^2 + (\omega\sigma^7)^2 + (\omega\omega^7)^2)] + \\ & + \tilde{b}_7^2 [g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \varphi_7^*) \partial_\beta \varphi_7 - 4\varphi_7^* \varphi_7 ((\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6)^2 + (\beta\sigma^6)^2)] \}, \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

где операторы в случае $\alpha = \beta = \omega$ имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \varphi_5 & = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + 2i\alpha Z(5)_\alpha \right) \varphi_5, \quad \partial_\alpha \varphi_6 = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + 2i\alpha Z(6)_\alpha \right) \varphi_6, \\ \partial_\alpha \varphi_7 & = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + 2i\alpha Z(7)_\alpha \right) \varphi_7. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Здесь введены специальные обозначения для характерных комбинаций:

$$Z(5)_\alpha = g_\alpha^6 - g_\alpha^7, \quad Z(6)_\alpha = -g_\alpha^5 + g_\alpha^7, \quad Z(7)_\alpha = g_\alpha^5 - g_\alpha^6. \quad (5.4.7)$$

Как и в случае 6-мерной модели, будем использовать прием, соответствующий механизму Хиггса. Так, используя произвол в выборе дополнительных координат (5.3.10), функциями $f_i(x^\alpha)$ можно распорядиться так, чтобы скалярные поля φ_5, φ_6 и φ_7 стали вещественными. Кроме того, следует положить, что все скалярные поля имеют постоянную составляющую:

$$\varphi_5 = \eta_5 + \chi_5; \quad \varphi_6 = \eta_6 + \chi_6; \quad \varphi_7 = \eta_7 + \chi_7, \quad (5.4.8)$$

где χ_5, χ_6, χ_7 — три вещественных скалярных поля, аналогичных одному вещественному полю в модели Вайнберга—Салама.

Далее следует учесть, что (5.4.5) еще не содержит всех слагаемых со скалярным полем. Они имеются еще в космологическом члене

$\sqrt{{}^0_7 G} \tilde{\Lambda} / 2\kappa = \sqrt{{}^7 G} \tilde{\Lambda} \chi^7 / 2\kappa$. Относительно выбора $\tilde{\Lambda}$ в виде многочлена по χ и условий, которые при этом нужно удовлетворить, можно сказать примерно то же самое, что и в § 4.4. Для дальнейшего будет существовать лишь наличие постоянных составляющих в (5.4.8). В связи с тем что они будут везде входить вместе с коэффициентами \tilde{b}_i , введем обозначения

$$b_5 = \tilde{b}_5 \eta_5; \quad b_6 = \tilde{b}_6 \eta_6; \quad b_7 = \tilde{b}_7 \eta_7.$$

Для упрощения всех последующих выкладок ограничимся случаем, когда недиагональные (скалярные) компоненты триады λ^6, λ^7 и σ^7 много меньше диагональных ($\lambda^5, \sigma^6, \omega^7$), т. е. во всех формулах ими будем пренебрегать:

$$\lambda^6 \approx \lambda^7 \approx \sigma^7 \approx 0. \quad (5.4.9)$$

§ 5.5. Нейтральные векторные поля метрического происхождения

В 7-мерной модели после 1+1+1+4-расщепления появляются три векторных поля метрического происхождения: $\lambda_\alpha, \sigma_\alpha, \omega_\alpha$. Встает задача физически интерпретировать эти поля, в частности выделить из них комбинации, описывающие векторный потенциал A_α электромагнитного поля и поле известного бозона Z_α . Кроме того, следует обсудить смысл и роль дополнительно векторного поля.

Поскольку в определении электрического заряда (5.2.2) три гармоники $\varepsilon_5, \varepsilon_6$ и ε_7 входят симметричным образом, естественно положить, что векторный потенциал электромагнитного поля A_α строится симметричным образом относительно векторов триады:

$$A_\alpha = x_5 g_\alpha^5 + x_6 g_\alpha^6 + x_7 g_\alpha^7, \quad (5.5.1)$$

где g_α^A определены в (5.3.7), а x_5, x_6 и x_7 — коэффициенты, которые предстоит найти. В предыдущем параграфе уже указывались три векторные комбинации $Z(5)_\alpha, Z(6)_\alpha$ и $Z(7)_\alpha$, которые связаны одним алгебраическим соотношением. Выберем две независимые величины, пусть таковыми будут $Z(5)_\alpha$ и $Z(6)_\alpha$. Естественно положить, что два искомого поля, назовем их $Z(1)_\alpha$ и $Z(2)_\alpha$, представляют собой алгебраические комбинации от $Z(5)_\alpha$ и $Z(6)_\alpha$:

$$\begin{aligned} Z(1)_\alpha &= y_5 Z(5)_\alpha + y_6 Z(6)_\alpha = -y_6 g_\alpha^5 + y_5 g_\alpha^6 + (y_6 - y_5) g_\alpha^7, \\ Z(2)_\alpha &= z_5 Z(5)_\alpha + z_6 Z(6)_\alpha = -z_6 g_\alpha^5 + z_5 g_\alpha^6 + (z_6 - z_5) g_\alpha^7, \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

где постоянные коэффициенты y_5, y_6, z_5 и z_6 также предстоит найти.

Для нахождения коэффициентов потребуем, чтобы динамическая часть трех искомого полей

$$-\frac{\sqrt{7G}}{16\pi} (\mathcal{F}(A)_{\mu\nu} \mathcal{F}(A)^{\mu\nu} + \mathcal{F}(1)_{\mu\nu} \mathcal{F}(1)^{\mu\nu} + \mathcal{F}(2)_{\mu\nu} \mathcal{F}(2)^{\mu\nu}) \quad (5.5.3)$$

$$\left(\text{где } \mathcal{F}(A)_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}; \mathcal{F}(s)_{\mu\nu} = \frac{\partial Z(s)_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial Z(s)_\mu}{\partial x^\nu}; s = 1, 2 \right)$$

совпадала с частью плотности (5.3.13), обусловленной антисимметричными физико-геометрическими тензорами:

$$-\frac{\sqrt{7G}}{2\kappa} ({}^5F_{\alpha\beta} \cdot {}^5F^{\alpha\beta} + {}^6F_{\alpha\beta} \cdot {}^6F^{\alpha\beta} + {}^7F_{\alpha\beta} \cdot {}^7F^{\alpha\beta}). \quad (5.5.4)$$

Выразим все антисимметричные тензоры через три тензора $F(5)_{\mu\nu}, F(6)_{\mu\nu}$ и $F(7)_{\mu\nu}$ (см. (5.3.11)) и приравняем коэффициенты в (5.5.3) и (5.5.4) при одинаковых квадратичных слагаемых вида $F(5)_{\mu\nu} F(5)^{\mu\nu}, F(5)_{\mu\nu} F(6)^{\mu\nu}, \dots$ (всего 6 выражений). При этом используем (5.4.9). Тогда имеем 6 уравнений для 7 коэффициентов:

$$\begin{aligned} (55) \rightarrow x_5^2 + y_6^2 + z_6^2 &= \frac{c^4}{4k} \lambda_5^2, \\ (66) \rightarrow x_6^2 + y_5^2 + z_5^2 &= \frac{c^4}{4k} \sigma_6^2, \\ (77) \rightarrow x_7^2 + (y_6 - y_5)^2 + (z_6 - z_5)^2 &= \frac{c^4}{4k} \omega_7^2, \\ (56) \rightarrow x_5 x_6 - y_5 y_6 - z_5 z_6 &= 0, \\ (57) \rightarrow x_5 x_7 - y_6 (y_6 - y_5) - z_6 (z_6 - z_5) &= 0, \\ (67) \rightarrow x_6 x_7 + y_5 (y_6 - y_5) + z_5 (z_6 - z_5) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

Переходя к новому набору из 6 неизвестных:

$$x_5, x_6, x_7, \quad u^2 = y_6^2 + z_6^2, \quad v^2 = y_5^2 + z_5^2, \quad \omega^2 = y_5 y_6 + z_5 z_6,$$

систему уравнений (5.5.5) приводим к виду

$$\begin{aligned} x_5^2 + u^2 &= \frac{c^4}{4k} \lambda_5^2, & x_5 x_6 &= \omega^2, \\ x_6^2 + v^2 &= \frac{c^4}{4k} \sigma_6^2, & x_5 x_7 &= u^2 - \omega^2, \\ x_7^2 + u^2 + v^2 - 2\omega^2 &= \frac{c^4}{4k} \omega_7^2, & x_6 x_7 &= v^2 - \omega^2. \end{aligned}$$

Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} x_5 &= \frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{\lambda_5^2}{\sqrt{\lambda_5^2 + \sigma_6^2 + \omega_7^2}}, & x_6 &= \frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{\sigma_6^2}{\sqrt{\lambda_5^2 + \sigma_6^2 + \omega_7^2}}, \\ x_7 &= \frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{\omega_7^2}{\sqrt{\lambda_5^2 + \sigma_6^2 + \omega_7^2}}; \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

$$u = \frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{\sqrt{(\lambda_5 \omega_7)^2 + (\lambda_5 \sigma_6)^2}}{\sqrt{\lambda_5^2 + \sigma_6^2 + \omega_7^2}} = \sqrt{y_6^2 + z_6^2},$$

$$v = \frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{\sqrt{(\lambda_5 \sigma_6)^2 + (\sigma_6 \omega_7)^2}}{\sqrt{\lambda_5^2 + \sigma_6^2 + \omega_7^2}} = \sqrt{y_5^2 + z_5^2},$$

$$\omega = \frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{\lambda_5 \sigma_6}{\sqrt{\lambda_5^2 + \sigma_6^2 + \omega_7^2}} = \sqrt{y_5 y_6 + z_5 z_6} \quad (5.5.7)$$

при промежуточном результате

$$x_5 + x_6 + x_7 = \frac{c^2}{2\sqrt{k}} \sqrt{\lambda_5^2 + \sigma_6^2 + \omega_7^2}. \quad (5.5.8)$$

Из (5.5.1) и (5.5.6) сразу же следует выражение для электромагнитного векторного потенциала

$$A_\alpha = -\frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{\lambda_5 \lambda_\alpha + \sigma_6 \sigma_\alpha + \omega_7 \omega_\alpha}{\sqrt{\lambda_5^2 + \sigma_6^2 + \omega_7^2}}. \quad (5.5.9)$$

Поскольку A_α не выражается через векторы $Z(5)_\alpha, Z(6)_\alpha$ и $Z(7)_\alpha$, для которых хиггсовские скалярные поля дают массовые вклады из (5.4.5)

$$\frac{120\alpha^2}{\kappa} \sqrt{7G} [b_5^2 Z(5)_\alpha Z(5)^\alpha + b_6^2 Z(6)_\alpha Z(6)^\alpha + b_7^2 Z(7)_\alpha Z(7)^\alpha], \quad (5.5.10)$$

следует вывод, что поле A_α является безмассовым.

Для нахождения явного вида полей $Z(1)_\alpha$ и $Z(2)_\alpha$ нужно найти 4 коэффициента y_5, y_6, z_5, z_6 , однако трех уравнений (5.5.7) для этого недостаточно. Необходимо еще одно уравнение. Выберем в качестве такого уравнения условие разделимости массовых вкладов в (5.5.10) для полей $Z(1)_\alpha$ и $Z(2)_\alpha$. Для этого перепишем (5.5.10) через векторы $Z(1)_\alpha$ и $Z(2)_\alpha$, используя формулы:

$$Z(5)_\alpha = \frac{z_6 Z(1)_\alpha - y_6 Z(2)_\alpha}{y_5 z_6 - y_6 z_5}, \quad Z(6)_\alpha = \frac{-z_5 Z(1)_\alpha + y_5 Z(2)_\alpha}{y_5 z_6 - y_6 z_5}.$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned} & \frac{240\alpha^2 k}{\pi c^4} \sqrt{7G} \frac{\lambda_5^2 + \sigma_6^2 + \omega_7^2}{\lambda_5^2 \sigma_6^2 \omega_7^2} \{Z(1)_\alpha Z(1)_\alpha [b_5^2 z_6^2 + b_6^2 z_5^2 + b_7^2 (z_5 - z_6)^2] + \\ & + Z(2)_\alpha Z(2)_\alpha [b_5^2 y_6^2 + b_6^2 y_5^2 + b_7^2 (y_5 - y_6)^2] - \\ & - 2Z(1)_\alpha Z(2)_\alpha [b_5^2 z_6 y_6 + b_6^2 y_5 z_5 + b_7^2 (y_5 - y_6)(z_5 - z_6)]\}, \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

где использовано, что из (5.5.7) следует

$$(y_5 z_6 - y_6 z_5)^2 = u^2 v^2 - \omega^4 = \frac{c^8}{16k^2} \frac{\lambda_5^2 \sigma_6^2 \omega_7^2}{\lambda_5^2 + \sigma_6^2 + \omega_7^2}. \quad (5.5.12)$$

Таким образом, недостающим уравнением на коэффициенты является

$$b_5^2 z_6 y_6 + b_6^2 y_5 z_5 + b_7^2 (y_5 - y_6)(z_5 - z_6) = 0. \quad (5.5.13)$$

Решение системы уравнений (5.5.7) и (5.5.13) громоздко, поэтому в явном виде его выписывать не будем.

Из (5.5.11) имеем выражения для квадратов масс покоя двух Z -бозонов через коэффициенты:

$$m_1^2 c^4 = 240 \frac{8k\alpha^2 (\hbar c)^2}{c^4} \cdot \frac{\lambda_5^2 + \sigma_6^2 + \omega_7^2}{(\lambda_5 \sigma_6 \omega_7)^2} [b_5^2 z_6^2 + b_6^2 z_5^2 + b_7^2 (z_5 - z_6)^2], \quad (5.5.14)$$

$$m_2^2 c^4 = 240 \frac{8k\alpha^2 (\hbar c)^2}{c^4} \frac{\lambda_5^2 + \sigma_6^2 + \omega_7^2}{(\lambda_5 \sigma_6 \omega_7)^2} [b_5^2 y_6^2 + b_6^2 y_5^2 + b_7^2 (y_5 - y_6)^2].$$

Оказывается, массы можно найти, не имея явного вида коэффициентов. Для этого нужно выражения из (5.5.13) отдельно сложить и умножить, воспользовавшись формулами (5.5.7) и (5.5.13):

$$\begin{aligned} (m_1^2 + m_2^2) c^4 &= 480\alpha^2 (\hbar c)^2 [b_5^2 ((\sigma^6)^2 + (\omega^7)^2) + \\ & + b_6^2 ((\omega^7)^2 + (\lambda^5)^2) + b_7^2 ((\sigma^6)^2 + (\lambda^5)^2)], \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

$$\begin{aligned} (m_1 m_2 c^4)^2 &= (480\alpha^2)^2 (\hbar c)^4 (b_5^2 b_6^2 + b_5^2 b_7^2 + b_6^2 b_7^2) \times \\ &\times [(\lambda^5 \sigma^6)^2 + (\lambda^5 \omega^7)^2 + (\sigma^6 \omega^7)^2]. \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений относительно масс имеет вид

$$m_{1,2} c^2 = 4\sqrt{15} \alpha (\hbar c) \sqrt{A \mp \sqrt{A^2 - 4B^2}}, \quad (5.5.16)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} A &= b_5^2 [(\sigma^6)^2 + (\omega^7)^2] + b_6^2 [(\omega^7)^2 + (\lambda^5)^2] + b_7^2 [(\lambda^5)^2 + (\sigma^6)^2], \\ B^2 &= (b_5^2 b_6^2 + b_5^2 b_7^2 + b_6^2 b_7^2) [(\lambda^5 \sigma^6)^2 + (\lambda^5 \omega^7)^2 + (\sigma^6 \omega^7)^2]. \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

Таким образом, можно сделать вывод: если излагаемая здесь 7-мерная модель верно отражает свойства реального мира, то кроме экспериментально обнаруженного нейтрального векторного Z -бозона ($Z(1)_\alpha$) должен существовать еще нейтральный векторный бозон ($Z(2)_\alpha$) масса покоя которого больше массы покоя обнаруженного Z -бозона [27].

§ 5.6. Взаимодействие нейтральных векторных бозонов с частицами

Рассмотрим дополнительные слагаемые в удлинненной производной (5.3.12). При этом по-прежнему будем полагать, что $\alpha = \beta = \omega$; тогда

$$\begin{aligned} \partial_\alpha &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + g_\alpha^5 \frac{\partial}{\partial x^5} + g_\alpha^6 \frac{\partial}{\partial x^6} + g_\alpha^7 \frac{\partial}{\partial x^7} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i\alpha (\epsilon_5 g_\alpha^5 + \epsilon_6 g_\alpha^6 + \epsilon_7 g_\alpha^7), \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

где введены гармоники дифференцируемой функции. Используя ранее введенные формулы (5.5.1) и (5.5.2), легко найти выражения компонент g_α^N через поля $A_\alpha, Z(1)_\alpha$ и $Z(2)_\alpha$:

$$\begin{aligned} g_\alpha^5 &= \frac{1}{x_5 + x_6 + x_7} \times \\ &\times \left\{ A_\alpha + \frac{Z(1)_\alpha [x_6 (z_5 - z_6) + x_7 z_5] - Z(2)_\alpha [x_6 (y_5 - y_6) + x_7 y_5]}{y_5 z_6 - y_6 z_5} \right\}, \\ g_\alpha^6 &= \frac{1}{x_5 + x_6 + x_7} \times \\ &\times \left\{ A_\alpha + \frac{Z(1)_\alpha [x_5 (z_6 - z_5) + x_7 z_6] - Z(2)_\alpha [x_5 (y_6 - y_5) + x_7 y_6]}{y_5 z_6 - y_6 z_5} \right\}, \\ g_\alpha^7 &= \frac{1}{x_5 + x_6 + x_7} \times \\ &\times \left\{ A_\alpha + \frac{-Z(1)_\alpha (x_5 z_5 + x_6 z_6) + Z(2)_\alpha (x_5 y_5 + x_6 y_6)}{y_5 z_6 - y_6 z_5} \right\}. \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

Подставляя эти выражения в (5.6.1), имеем

$$\begin{aligned} \partial_\alpha = & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{i\alpha(\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7)}{x_5 + x_6 + x_7} A_\alpha + \\ & + \frac{i\alpha Z(1)_\alpha}{y_5 z_6 - y_6 z_5} \left[\frac{\varepsilon_5 + \varepsilon_6}{2} (z_5 + z_6) + \frac{\varepsilon_5 - \varepsilon_6}{2} (z_5 - z_6) - \right. \\ & \left. - \frac{(\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7)(x_5 z_5 + x_6 z_6)}{x_5 + x_6 + x_7} \right] - \\ & - \frac{i\alpha Z(2)_\alpha}{y_5 z_6 - y_6 z_5} \left[\frac{\varepsilon_5 + \varepsilon_6}{2} (y_5 + y_6) + \frac{\varepsilon_5 - \varepsilon_6}{2} (y_5 - y_6) - \right. \\ & \left. - \frac{(\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7)(x_5 y_5 + x_6 y_6)}{x_5 + x_6 + x_7} \right]. \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

где комбинации констант $x_5 + x_6 + x_7$ и $y_5 z_6 - y_6 z_5$ соответственно определяются формулами (5.5.8) и (5.5.12). Отсюда легко найти выражение для электрического заряда e :

$$e = \frac{6\sqrt{k}\alpha(\hbar c)}{c^2 \sqrt{\lambda_6^2 + \sigma_6^2 + \omega_7^2}}. \quad (5.6.4)$$

В дополнение к электрическому заряду Q согласно (5.2.2) естественно ввести еще два заряда Q_1 и Q_2 , соответственно пропорциональные $\varepsilon_5 + \varepsilon_6$ и $\varepsilon_5 - \varepsilon_6$. Однако тогда возникает затруднение при сопоставлении формулы (5.6.3) со стандартными формулами (4.1.20) и (5.1.2), характеризующими взаимодействие с Z -бозоном. Все значительно упрощается, если рассмотреть частный случай, когда, например,

$$z_5 - z_6 = 0. \quad (5.6.5)$$

Как легко видеть из формулы (5.5.2), это соответствует тому, что вектор $Z(2)_\alpha$ пропорционален $Z(7)_\alpha$ — одной из трех характерных комбинаций, упоминавшихся в § 5.4. В этом случае (5.6.5) может быть использовано в качестве недостающего, четвертого, уравнения к системе (5.5.7), более жесткого, нежели (5.5.13). Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} z_5 = z_6 = & \frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{(\lambda^5)^2 + (\sigma^6)^2}}, \\ y_5 = & \frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{(\lambda^5)^2}{\sqrt{[(\lambda^5)^2 + (\sigma^6)^2][(\lambda^5 \sigma^6)^2 + (\lambda^5 \omega^7)^2 + (\sigma^6 \omega^7)^2]}}, \\ y_6 = & -\frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{(\sigma^6)^2}{\sqrt{[(\lambda^5)^2 + (\sigma^6)^2][(\lambda^5 \sigma^6)^2 + (\lambda^5 \omega^7)^2 + (\sigma^6 \omega^7)^2]}}. \end{aligned} \quad (5.6.6)$$

Отсюда, используя (5.5.2), сразу же можно записать явные выражения для векторов $Z(1)_\alpha$ и $Z(2)_\alpha$:

$$\begin{aligned} Z(1)_\alpha = & \frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{(\sigma^6)^2 \lambda^5 \lambda_\alpha + (\lambda^5)^2 \sigma^6 \sigma_\alpha - [(\lambda^5)^2 + (\sigma^6)^2] \omega^7 \omega_\alpha}{\sqrt{[(\lambda^5)^2 + (\sigma^6)^2][(\lambda^5 \sigma^6)^2 + (\lambda^5 \omega^7)^2 + (\sigma^6 \omega^7)^2]}}, \\ Z(2)_\alpha = & \frac{c^2}{2\sqrt{k}} \frac{-\lambda^5 \lambda_\alpha + \sigma^6 \sigma_\alpha}{\sqrt{(\lambda^5)^2 + (\sigma^6)^2}}. \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

Заметим, что при использовании (5.6.5) условие (5.5.13) остается, однако теперь оно существенно упрощается до

$$b_5^2 y_6 + b_6^2 y_5 = 0 \rightarrow b_5^2 (\lambda^5)^2 = b_6^2 (\sigma^6)^2 \quad (5.6.8)$$

и принимает характер соотношения, связывающего значения коэффициентов b_5 и b_6 с диагональными составляющими метрики λ^5 и σ^6 . До использования формулы (5.6.5) все эти величины полагались независимыми.

Для упрощения формул и наглядности удобно ввести углы, соответствующие углу Вайнберга в стандартной теории. Для этого отложим по трем взаимно перпендикулярным направлениям значения соответственно $1/\lambda^5$, $1/\sigma^6$, $1/\omega^7$. Определим углы θ_5 , θ_6 и θ_7 соответственно между осями 5, 6 и 7 и вектором с компонентами $\{1/\lambda^5, 1/\sigma^6, 1/\omega^7\}$. Кроме того, введем угол θ_{56} между осью 5 и вектором с компонентами $\{1/\lambda^5, 1/\sigma^6, 0\}$. Тогда имеем, в частности:

$$\begin{aligned} \sin \theta_7 = & \frac{\sqrt{\lambda_5^2 + \sigma_6^2}}{\sqrt{\lambda_5^2 + \sigma_6^2 + \omega_7^2}} = \frac{\omega^7 \sqrt{(\lambda^5)^2 + (\sigma^6)^2}}{\sqrt{(\lambda^5 \sigma^6)^2 + (\lambda^5 \omega^7)^2 + (\sigma^6 \omega^7)^2}}, \\ \sin \theta_{56} = & -\frac{\sigma_6}{\sqrt{\lambda_5^2 + \sigma_6^2}} = \frac{\lambda^5}{\sqrt{(\lambda^5)^2 + (\sigma^6)^2}}. \end{aligned} \quad (5.6.9)$$

Выражения для трех нейтральных полей через углы записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_\alpha = & \frac{c^2}{2\sqrt{k}} (\lambda_\alpha \cos \theta_5 + \sigma_\alpha \cos \theta_6 + \omega_\alpha \cos \theta_7) = \\ = & \frac{c^2}{2\sqrt{k}} [\sin \theta_7 (\lambda_\alpha \cos \theta_{56} + \sigma_\alpha \sin \theta_{56}) + \omega_\alpha \cos \theta_7], \\ Z(1)_\alpha = & \frac{c^2}{2\sqrt{k}} [\cos \theta_7 (\lambda_\alpha \cos \theta_{56} + \sigma_\alpha \sin \theta_{56}) - \omega_\alpha \sin \theta_7], \\ Z(2)_\alpha = & \frac{c^2}{2\sqrt{k}} (-\lambda_\alpha \sin \theta_{56} + \sigma_\alpha \cos \theta_{56}). \end{aligned} \quad (5.6.10)$$

Учитывая введенные здесь углы и условия (5.6.5), формулу (5.6.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \partial_\alpha = & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i \frac{Qe}{\hbar c} A_\alpha + i \frac{e}{\hbar c} \frac{1}{\sin \theta_7 \cos \theta_7} (T_3 - Q \sin^2 \theta_7) Z(1)_\alpha - \\ & - i \frac{e}{\hbar c} \frac{1}{\sin \theta_7 \sin 2\theta_{56}} (Q_2 - T_3 \cos 2\theta_{56}) Z(2)_\alpha, \end{aligned} \quad (5.6.11)$$

где использованы обозначения для дополнительных зарядов:

$$T_3 = (\varepsilon_5 + \varepsilon_6)/3, \quad Q_2 = (\varepsilon_5 - \varepsilon_6)/3. \quad (5.6.12)$$

Сравнивая (5.6.11) с формулами стандартной теории (например, с (4.1.20)), находим, что T_3 действительно соответствует проекции изотопического спина, а угол θ_7 — углу Вайнберга θ_w . Очевидно, что угол θ_{56} не имеет аналога в стандартной теории — он характеризует взаимодействие частиц со вторым Z -бозоном. В настоящий момент нет экспериментальных данных, позволяющих зафиксировать значение угла θ_{56} .

Имеет смысл обсудить еще более частный случай теории, когда все постоянные, связанные со скалярными бозонами, равны друг другу:

$$b_5 = b_6 = b_7 \equiv b \rightarrow \lambda^5 = \sigma^6. \quad (5.6.13)$$

Тогда из (5.6.9) сразу же следует, что $\theta_{56} = \pi/4$, выражения для векторов A_α и $Z(1)_\alpha$ примут стандартный вид, когда в качестве $A(3)_\alpha$ выступает вектор

$$A(3)_\alpha = \frac{c^2}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\lambda_\alpha + \sigma_\alpha). \quad (5.6.14)$$

Несколько упрощается часть формулы (5.6.11), описывающая взаимодействие с вектором $Z(2)_\alpha$:

$$-i \frac{e}{\hbar c} \frac{1}{\sin \theta_7} Q_2 Z(2)_\alpha. \quad (5.6.15)$$

Кроме того, используя значение угла Вайнберга $\theta_7 = \theta_w \simeq 30^\circ$, из (5.6.9) находим соотношение между λ^5 и ω^7 :

$$\lambda^5 = \sigma^6 = \sqrt{6} \omega^7. \quad (5.6.16)$$

В рассматриваемом частном случае существенно упрощаются формулы для масс Z -бозонов. Действительно, в формулах (5.5.17) имеем

$$A = 26b^2 (\omega^7)^2, \quad B^2 = 144b^4 (\omega^7)^4,$$

$$\sqrt{A^2 - 4B^2} = 10b^2 (\omega^7)^2.$$

В итоге получаем для масс Z -бозонов формулу

$$m_{1,2} c^2 = 4 \sqrt{15} \alpha (\hbar c) b \omega^7 \sqrt{26 \mp 10}, \quad (5.6.17)$$

т. е.

$$m_1 c^2 = 16 \sqrt{15} b (\hbar c) \alpha \omega^7;$$

$$m_2 c^2 = 24 \sqrt{15} b (\hbar c) \alpha \omega^7.$$

Отсюда можно сделать вывод: если в природе реализуется этот частный случай (или имеет место ситуация, близкая к нему), то масса второго векторного Z -бозона в полтора раза больше массы уже обнаруженного Z -бозона (с $m_1 c^2 \sim 93$ ГэВ) и примерно равна 140 ГэВ.

§ 5.7. Кручение и векторные заряженные W -бозоны

Аналогично предыдущей главе определим векторные заряженные W -бозоны через компоненты кручения. Задача этого параграфа состоит в том, чтобы, во-первых, показать, как это конкретно нужно сделать, и, во-вторых, доказать, что благодаря наличию в 7-мерии большего числа компонент кручения можно устранить ряд отмеченных ранее недостатков 6-мерия.

После конформного преобразования и всевозможных проектирований 7-мерного тензора ${}^7S_{MNP}$ посредством векторов триады и 4-мерных проекторов g_α^N получаем восемь 4-мерных тензоров различного ранга:

$$\tilde{S}_{\alpha\beta\nu} = {}^7S_{MNP} g_\alpha^M g_\beta^N g_\nu^P = E_{\alpha\beta\nu\mu} S^\mu; \quad (5.7.1)$$

$$S(5)_{\alpha\beta} = {}^7S_{MNP} \lambda^M g_\alpha^N g_\beta^P, \quad S(6)_{\alpha\beta} = {}^7S_{MNP} \sigma^M g_\alpha^N g_\beta^P; \quad (5.7.2)$$

$$S(7)_{\alpha\beta} = {}^7S_{MNP} \omega^M g_\alpha^N g_\beta^P;$$

$$S(65)_\alpha = {}^7S_{MNP} \sigma^M \lambda^N g_\alpha^P, \quad S(75)_\alpha = {}^7S_{MNP} \omega^M \lambda^N g_\alpha^P; \quad (5.7.3)$$

$$S(76)_\alpha = {}^7S_{MNP} \omega^M \sigma^N g_\alpha^P; \quad (5.7.4)$$

$$S(765) = {}^7S_{MNP} \omega^M \sigma^N \lambda^P. \quad (5.7.5)$$

Гиперплотность лагранжиана, обязанная кручению, имеет вид (4.6.1) и записывается через введенные тензоры следующим образом:

$$\begin{aligned} L_S = & - \frac{3\sqrt{7}G}{2\kappa} \chi^5 \{ 2S_\alpha S^\alpha + 2S(765) S(765) + \\ & + [S(5)_{\alpha\beta} S(5)^{\alpha\beta} + S(6)_{\alpha\beta} S(6)^{\alpha\beta} + S(7)_{\alpha\beta} S(7)^{\alpha\beta}] - \\ & - 2[S(65)_\alpha S(65)^\alpha + S(75)_\alpha S(75)^\alpha + S(76)_\alpha S(76)^\alpha] \}. \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

В формулах (5.7.1)–(5.7.5) все величины распределены на несколько групп по ролям, которые они играют в излагаемой модели. Три векторных поля $S(76)_\alpha$, $S(75)_\alpha$ и $S(65)_\alpha$ сопоставляются с потенциалами $A(1)_\alpha$, $A(2)_\alpha$, $A(3)_\alpha$ модели Вайнбер-

га — Салама. Три антисимметричных тензорных поля $S(5)_{\alpha\beta}$, $S(6)_{\alpha\beta}$ и $S(7)_{\alpha\beta}$ будут описывать вклады в динамическую часть лагранжиана векторных полей $A(i)_{\alpha}$. Наконец, одна скалярная величина $S(765)$ будет давать вклад в космологическую посто-
янную.

Заряженные векторные W -бозоны имеют электрический заряд $Q = \pm 1$, следовательно, кручение должно зависеть от дополнительных координат. При выборе гармоник будем руководствоваться следующими соображениями. Во-первых, должна быть справедливой формула (5.2.2) для Q . Во-вторых, потребуем, чтобы все три дополнительные координаты входили симметричным образом. В-третьих, естественно полагать, что используются минимально возможные значения гармоник. Кроме того, следует учесть весь комплекс определений кварков и лептонов в соответствии с их ароматами и цветами (см. § 5.8). Все эти соображения приводят к представлению двух векторных компонент кручения в виде

$$S(76)_{\alpha} = 2C_S A(1)_{\alpha} \cos(\alpha x^5 + \beta x^6 + \omega x^7),$$

$$S(75)_{\alpha} = 2C_S A(2)_{\alpha} \cos(\alpha x^5 + \beta x^6 + \omega x^7), \quad (5.7.6)$$

где C_S — размерный коэффициент, определенный ниже.

Относительно третьей векторной компоненты $S(65)_{\alpha}$ заметим следующее. Вследствие определения Ψ -функций, данного в § 5.9, возможная заряженная составляющая $S(65)_{\alpha}$ оказывается несущественной. Положим $S(65)_{\alpha}$ нейтральной и представим в виде

$$S(65)_{\alpha} = \sqrt{2} C_S \tilde{A}(3)_{\alpha}, \quad (5.7.7)$$

где $\tilde{A}(3)_{\alpha}$ — векторный потенциал некоторого нового поля.

Из определений (5.7.6) и (5.7.7) следует, что последняя строка в (5.7.5) после усреднений по дополнительным координатам в нулевом порядке по b дает следующий массовый вклад:

$$\frac{6}{\kappa} \sqrt{g} C_S^2 [A(1)_{\alpha} A(1)^{\alpha} + A(2)_{\alpha} A(2)^{\alpha} + \tilde{A}(3)_{\alpha} \tilde{A}(3)^{\alpha}]. \quad (5.7.8)$$

Аналогичное выражение встречалось в 6-мерной модели, и оно соответствовало массовому вкладу порядка планковского.

Перенормировка массы может быть осуществлена, как и в 6-мерной модели, с помощью специального определения компоненты кручения S_{α} :

$$S_{\alpha} = C_S' [\sqrt{2} \tilde{A}(3)_{\alpha} + (A(1)_{\alpha} + iA(2)_{\alpha}) \exp(i\alpha x^5 + i\beta x^6 + i\omega x^7) + (A(1)_{\alpha} - iA(2)_{\alpha}) \exp(-i\alpha x^5 - i\beta x^6 - i\omega x^7)], \quad (5.7.9)$$

где C_S' — размерная величина, близкая по значению к C_S . Можно было бы распорядиться этими коэффициентами, как в § 4.6, однако можно достичь еще большего соответствия с мо-

делью Вайнберга — Салама, если воспользоваться следующими соображениями.

Из формул в конформно соответствующих метриках

$$S_{\alpha\beta\nu}^0 = \chi^2 S_{\alpha\beta\nu}; \quad S_{\alpha\beta\nu}^0 = E_{\alpha\beta\nu\mu}^0 S^{\mu}; \quad E_{\alpha\beta\nu\mu}^0 = \chi^4 E_{\alpha\beta\nu\mu} \quad (5.7.10)$$

следует $S_{\nu}^0 = S_{\nu}$. По этой причине будем полагать, что в (5.7.9) коэффициент C_S' не содержит χ , т. е. является постоянной величиной. Как уже отмечалось, S_{NP}^M не зависит от метрики, т. е. является конформно-инвариантной величиной. Будем полагать, что физически отождествляемая величина получается после свертки верхнего индекса с одним из векторов триады: λ_M^0, σ_M^0 или ω_M . Тогда коэффициент C_S в (5.7.6) и в (5.7.7) должен содержать χ^{-1} . С учетом § 5.10 положим

$$C_S = \chi C_S = \frac{g_2}{3\hbar c} = 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{k}}{c^2} \alpha \omega^7. \quad (5.7.11)$$

Тогда из вида гиперплотности (5.7.5) следует, что массовые вклады для трех полей $A(1)_{\alpha}$, $A(2)_{\alpha}$ и $\tilde{A}(3)_{\alpha}$ будут пропорциональны величине

$$\chi^3 - \chi^5 \rightarrow (1 - 2C_S^2 \varphi^2) - (1 - 2C_S^2 \varphi^2) = 14\varphi^2, \quad (5.7.12)$$

где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m , φ^2 — собирательное обозначение суммы квадратов трех скалярных полей. Полагая, что динамическая часть лагранжиана для $A(1)_{\alpha}$ и $A(2)_{\alpha}$ имеет должный вид, в итоге получаем формулу для масс заряженных W -бозонов

$$m_W c^2 = 12\sqrt{21} (\hbar c) b \alpha \omega^7. \quad (5.7.13)$$

Здесь использовано (5.6.13). Сравнивая это выражение со значением для массы $Z(1)$ -бозона (5.6.17), имеем

$$\frac{m_W}{m_{Z(1)}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{21}{20}} \simeq 1,025 \cdot \cos 30^\circ, \quad (5.7.14)$$

т. е. находится в хорошем соответствии с выводами модели Вайнберга — Салама. Из (5.7.12) видно, что массы W -бозонов, как и массы Z -бозонов, обусловлены скалярными полями.

Три тензорные компоненты кручения (5.7.2) можно определить для соответствия с (4.1.6) в модели Вайнберга — Салама в виде

$$S(5)_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{3} c^2} \left\{ \frac{\partial A(1)_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial A(1)_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{g_2}{\hbar c} [A(2)_{\alpha} \tilde{A}(3)_{\beta} - \tilde{A}(3)_{\alpha} A(2)_{\beta}] \right\} \cos(\alpha x^5 + \beta x^6 + \omega x^7),$$

$$\begin{aligned}
S(6)_{\alpha\beta} &= \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{3}c^2} \left\{ \frac{\partial A(2)_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A(2)_\alpha}{\partial x^\beta} + \right. \\
&+ \left. \frac{g_2}{\hbar c} [\tilde{A}(3)_\alpha A(1)_\beta - A(1)_\alpha \tilde{A}(3)_\beta] \right\} \cos(\alpha x^5 + \beta x^6 + \omega x^7), \\
S(7)_{\alpha\beta} &= \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{3}c^2} \left\{ \frac{\partial \tilde{A}(3)_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \tilde{A}(3)_\alpha}{\partial x^\beta} + \right. \\
&+ \left. \frac{g_2}{\hbar c} [A(1)_\alpha A(2)_\beta - A(2)_\alpha A(1)_\beta] \right\}.
\end{aligned}
\tag{5.7.15}$$

§ 5.8. Определение цвета, ароматов, левых и правых компонент фермионов

Как уже отмечалось в § 5.2, феноменологически вводимые понятия теории электрослабых взаимодействий — цвет, поколения, ароматы и другие — в 7-мерной модели могут быть определены как признаки, по которым классифицируется множество возможных целочисленных гармоник $\epsilon_5, \epsilon_6, \epsilon_7$. Предлагается следующий вариант классификации возможных комбинаций гармоник для кварков: за исходное берется определение электрического заряда в 7-мерии (5.2.2), тогда для всех верхних кварков комбинации из трех гармоник должны удовлетворять условию

$$Q = 1/3 (\epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7) = +2/3, \tag{5.8.1}$$

а для нижних кварков — условию

$$Q = 1/3 (\epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7) = -1/3. \tag{5.8.2}$$

Представим каждую комбинацию гармоник в виде суммы из трех вкладов: а) цветовых меток, б) ароматических меток и в) киральных добавок. Пусть *цветовые метки* означают следующие три комбинации вкладов (соответственно по координатам x^5, x^6, x^7): $(+1, 0, 0)$ — для $i=1$, т. е. красного цвета; $(0, +1, 0)$ — для $i=2$, т. е. желтого цвета; $(0, 0, +1)$ — для $i=3$, т. е. синего цвета. Учитывая коэффициент $1/3$ в формулах (5.8.1) и (5.8.2), констатируем, что цветовые метки дают одинаковый вклад $+1/3$ в электрический заряд кварков любого аромата, цвет определяется положением единицы в написанных выше комбинациях.

Пусть *ароматические метки* составляют оставшийся в суммах вклад в величину заряда Q кварков и образованы из минимальных нечетных чисел (т. е. из ± 1) для верхних кварков и из минимальных четных чисел (т. е. из 0 и -2) для нижних кварков. Учитывая, что суммарный вклад ароматических меток для верхних кварков равен $+1/3$, имеем три возможные комбинации из единиц. Пусть комбинация гармоник $(+1, +1, -1)$ соответствует первому поколению — u -кварку (выделена x^7), комбинация гармоник $(+1, -1, +1)$ соответст-

вует второму поколению — s -кварку (выделена x^6) и $(-1, +1, +1)$ — третьему поколению — t -кварку (выделена x^5). Суммарный вклад ароматических меток для нижних кварков равен $-2/3$. Аналогично пусть нижний кварк первого поколения (d -кварк) соответствует выделенной координате x^7 — ему сопоставляется комбинация $(0, 0, -2)$; нижнему кварку второго поколения (s -кварку) сопоставляется комбинация $(0, -2, 0)$ и b -кварку сопоставляется комбинация $(-2, 0, 0)$. Собирая вместе цветовые и ароматические метки, получаем базисные комбинации для всех 18 видов кварков, рассматриваемых в теории электрослабых взаимодействий. Все эти комбинации изображены в табл. 2. Очевидно, что все они различны. Для антикварков определяется свой набор из 18 комбинаций гармоник.

Легко видеть, что приведенные в табл. 2 комбинации гармоник ни в коей мере не исчерпывают всего множества комбинаций, удовлетворяющих условиям (5.8.1) и (5.8.2). Можно указать бесконечный ряд иных комбинаций. Из всех таких комбинаций выделим подмножество, для которого сохраняется смысл определения цветовых меток. Нетрудно сообразить, что все это подмножество может быть образовано из приведенных в таблице добавлением к ним всех возможных комбинаций, состоящих только из четных гармоник и обладающих нулевой суммой. Назовем все такие добавки *киральными*. Они могут быть построены из гармоник определенных ранее в (5.4.4) скалярных бозонов и всевозможных их сумм. (Поскольку на самом деле речь идет о вкладах в циклические зависимости по дополнительным координатам, то правильнее говорить о произведениях экспонент.) Обозначим базис множества киральных добавок следующим образом:

$$\Phi_5 = \exp(2i\beta x^6 - 2i\omega x^7), \quad \Phi_6 = \exp(-2i\alpha x^5 + 2i\omega x^7), \tag{5.8.3}$$

$$\Phi_7 = \exp(2i\alpha x^5 - 2i\beta x^6).$$

Согласно изложенному в рассматриваемом варианте модели все верхние кварки характеризуются двумя нечетными и одной четной гармониками, а все нижние кварки характеризуются двумя четными и одной нечетной гармониками. Цвет однозначно определяется выделенной гармоникой по четности. Пересечений по цветам у кварков различных ароматов нет.

Зависимость волновых функций кварков q различных поколений (левых L , правых R , цвета i) от координат x^5, x^6, x^7 определим в виде разложения в ряд по Φ_i из (5.8.3), вообще говоря бесконечного:

$$\begin{aligned}
\Psi(q_L) &= q_L(x^\mu) \Phi(q, i) \left[a_{0L}(q, i) + \sum_{l=5}^7 a_L(q, il) \Phi_l + \right. \\
&+ \left. \sum_l \sum_j a_L(q, i, l, j) \Phi_l \Phi_j + \dots \right],
\end{aligned}
\tag{5.8.4}$$

Таблица 2

	Частицы	Q	Ароматические метки			Кварки			Антикварки		
			ϵ_5	ϵ_6	ϵ_7	ϵ_5	ϵ_6	ϵ_7	ϵ_5	ϵ_6	ϵ_7
Цветовые метки	q_1	$+\frac{1}{3}$	0	0	0	+1	0	0	-1	0	0
	q_2					0	+1	0	0	-1	0
	q_3					0	0	+1	0	0	-1
1-е поколение	u_1	$+\frac{2}{3}$	+1	+1	-1	+2	+1	-1	-2	-1	+1
	u_2					+1	+2	-1	-1	-2	+1
	u_3					+1	+1	0	-1	-1	0
	d_1	$-\frac{1}{3}$	0	0	-2	+1	0	-2	-1	0	+2
	d_2					0	+1	-2	0	-1	+2
	d_3					0	0	-1	0	0	+1
2-е поколение	c_1	$+\frac{2}{3}$	+1	-1	+1	+2	-1	+1	-2	+1	-1
	c_2					+1	0	+1	-1	0	-1
	c_3					+1	-1	+2	-1	+1	-2
	s_1	$-\frac{1}{3}$	0	-2	0	+1	-2	0	-1	+2	0
	s_2					0	-1	0	0	+1	0
	s_3					0	-2	+1	0	+2	-1
3-е поколение	t_1	$+\frac{2}{3}$	-1	+1	+1	0	+1	+1	0	-1	-1
	t_2					-1	+2	+1	+1	-2	-1
	t_3					-1	+1	+2	+1	-1	-2
	b_1	$-\frac{1}{3}$	-2	0	0	-1	0	0	+1	0	0
	b_2					-2	+1	0	+2	-1	0
	b_3					-2	+1	0	+2	-1	0

где $q_L(x^\mu)$ — 4-мерная часть волновой функции, $\Phi(q, i)$ — ароматические и цветовые метки кварка, определенные в табл. 2, $a_L(q, i, l)$ — коэффициенты разложения Ψ по Φ_L . Очевидно, что коэффициенты разложения удовлетворяют условию нормировки

$$a_{0L}^*(q, i) a_{0L}(q, i) + \sum_l a_L^*(q, i, l) a_L(q, i, l) + \dots = 1. \quad (5.8.5)$$

Аналогичные соотношения имеют место для правых компонент частиц.

Поскольку ароматические метки в отдельности для верхних и нижних частиц (кварков) отличаются на элементы базиса виртуальных добавок (5.8.3) и их много, распределение всех возможных комбинаций по поколениям является нетривиальной задачей. В связи с этим сформулируем основные требования, которым должны удовлетворять определения поколений в (5.8.4).

1. Функции $\Psi(q_{Li})$ для разных поколений должны быть ортогональны в смысле

$$\int \bar{\Psi}(q) \Psi(q') dx^5 dx^6 dx^7 = 0, \quad (5.8.6)$$

если кварки q и q' принадлежат разным поколениям. Очевидно, что это условие будет выполняться, если функции (5.8.4) кварков не содержат одинаковых комбинаций гармоник. Последнее автоматически приводит к выполнению правил запрета для нейтральных токов.

2. Воспользуемся тем, что в рассматриваемой здесь модели естественно возникает новый заряд $Q_2 = (\epsilon_5 - \epsilon_6)/3$, который должен иметь некий физический смысл. Сформулируем гипотезу: номер поколения частицы (кварка или лептона) определяется знаком усредненного значения заряда Q_2 : для первого поколения $Q_2 = 0$, для второго поколения $Q_2 > 0$, для третьего поколения $Q_2 < 0$. Легко видеть, что для указанных выше ароматических меток кварков всех трех поколений, как верхних, так и нижних, это правило строго выполняется: $Q_2 = 0$ для 1-го поколения; $Q_2 = +2/3$ для 2-го поколения и $Q_2 = -2/3$ для 3-го поколения. Усредненное или наблюдаемое значение Q_2 понимается в обычном квантовомеханическом смысле, причем для среднего значения от суммы трех цветов.

3. Определение левых и правых компонент частиц всех ароматов связано со значением заряда $T_3 = (\epsilon_5 + \epsilon_6)/3$, соответствующим проекции изотопического спина стандартной теории. Положим

$$T_3 = \frac{1}{3} \left[\sum_l (\epsilon_5 + \epsilon_6)_l a^*(q, l) a(q, l) + \dots \right]. \quad (5.8.7)$$

4. Определение левых компонент частиц с отличным от нуля коэффициентом $a_{0L}(q, i)$ в (5.8.4) согласно табл. 2 гарантирует наличие однородных (внутри одного поколения) заряженных токов. Перемешивание кварков из разных поколений (повлечение углов типа Каббиво) зависит от выбора гармоник в определении левых компонент. Комбинации гармоник правых компонент должны быть подобраны так, чтобы для них отсутствовали заряженные токи.

5. Относительно соотношения комбинаций гармоник для левых и правых компонент одного аромата можно сказать то же

самое, что отмечалось в § 4.10 при обсуждении способов введения масс частиц. Либо пересечений нет, тогда массы могут вводиться за счет показателя степени μ в соответствующем множителе в (5.2.1), либо могут быть пересечения с чрезвычайно малым коэффициентом.

Сформулированный здесь набор требований к определениям частиц не является достаточно жестким, чтобы однозначно задать наборы гармоник, соответствующих различным поколениям и левым, правым компонентам. Тем более их недостаточно, чтобы определить коэффициенты разложения $a_l(q, i, l, \dots)$ в (5.8.4). Опираясь на ряд дополнительных соображений (соображения симметрии, простоты, ограничиваясь разумным числом наименьших гармоник), можно указать более или менее приемлемые варианты определения частиц, которые могли бы служить грубым приближением описания кварков. Для них удается получить значения масс, углы Каббико, однако в рамках используемого круга идей выбор варианта неоднозначен.

Определения лептонов обладают рядом особенностей. Аналогично кваркам будем полагать, что комбинации их гармоник определяются суммой, только не из трех, а двух вкладов: а) ароматических меток и б) киральных меток. Опять каждый лептон будет определяться совокупностью наборов гармоник.

При определении ароматических лептонных меток будем руководствоваться следующими соображениями:

1. Поскольку электрический заряд для верхних лептонов (нейтрино) равен нулю, то согласно (5.2.2) для них должно быть

$$Q = \frac{1}{3}(\epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7) = 0. \quad (5.8.8)$$

Для нижних лептонов с зарядом минус единица

$$Q = \frac{1}{3}(\epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7) = -1. \quad (5.8.9)$$

2. Лептоны не участвуют в сильных взаимодействиях, для них нет цветовых меток (они бесцветны). Следовательно, в согласии с ранее данным определением цветов все гармоники лептонов могут быть либо только четными, либо только нечетными. Очевидно из (5.8.8), что для *верхних* лептонов гармоники могут быть только *четными*, а для *нижних* лептонов согласно (5.8.9) — только *нечетными*. Заметим, что адроны, образуемые из бесцветных комбинаций кварков, согласно изложенному также должны характеризоваться либо только четными, либо только нечетными наборами гармоник.

3. Естественно использовать минимально возможные по модулю значения гармоник.

4. Для трех поколений ароматические метки должны различаться и соответствовать явной выделенности одной из них. Две оставшиеся гармоники естественно полагать равными друг другу.

5. Набор разностей между соответствующими гармониками верхних и нижних лептонов внутри одного поколения должен совпадать с комбинацией гармоник заряженного W -бозона. Это требование диктуется взаимодействием заряженных токов с W -бозонами.

Этим требованиям удовлетворяют ароматические метки лептонов, указанные в табл. 3. Легко видеть, что это определение находится в согласии с определением ароматических меток для кварков.

Киральные вклады, как и для кварков, строятся из наборов гармоник скалярных бозонов (5.8.3), т. е. являются четными с нулевым электрическим зарядом. Они не могут изменить соотношений (5.8.8) и (5.8.9). Ясно, что благодаря киральным вкладам каждому лептону сопоставляется, вообще говоря, бесконечный набор комбинаций гармоник вида, определяемого формулой (5.8.4).

Требования, предъявляемые к распределению гармоник со степенями Φ_l по поколениям, примерно те же самые, что и для кварков. Отличие состоит в большей разнесенности друг от друга ароматических меток лептонов. Кроме того, согласно современным представлениям, не должно быть перемешивания поколений лептонов при образовании заряженных токов. Это означает, что если при определении левых компонент лептонов в 7-мерной модели даже появится перемешивание, то численное значение углов типа угла Каббико должно быть очень малым.

Таблица 3

Поколение	Частица	ϵ_5	ϵ_6	ϵ_7
1	ν_e	+2	+2	-4
	e^-	+1	+1	-5
2	ν_μ	+2	-4	+2
	μ^-	+1	-5	+1
3	ν_τ	-4	+2	+2
	τ^-	-5	+1	+1

§ 5.9. Фермионная часть гиперплотности лагранжиана

Перейдем к рассмотрению фермионной части гиперплотности лагранжиана в (5.2.1). Оператор ковариантного дифференцирования ∇_M в (5.2.1) по-прежнему имеет вид (4.2.3). Произведем 1+1+1+4-расщепление основных выражений, входящих в (4.2.3). Очевидно, что все получаемые при этом формулы аналогичны записанным в предыдущей главе с поправками на большую размерность. Так, имеем

$${}^7\Gamma^N \frac{\partial}{\partial x^N} = {}^7\tilde{\Gamma}^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \lambda_\alpha \lambda^5 \frac{\partial}{\partial x^5} + \sigma_\alpha \sigma^6 \frac{\partial}{\partial x^6} + \omega_\alpha \omega^7 \frac{\partial}{\partial x^7} \right) - \left[\Gamma(5) \lambda^5 \frac{\partial}{\partial x^5} + \Gamma(6) \sigma^6 \frac{\partial}{\partial x^6} + \Gamma(7) \omega^7 \frac{\partial}{\partial x^7} \right], \quad (5.9.1)$$

где по-прежнему ${}^7\tilde{\Gamma}^\alpha = {}^7\Gamma^N g_N^\alpha$. Ясно, что слагаемые верхней строки описывают, во-первых, свободные поля фермионов (первое слагаемое) и, во-вторых, взаимодействие с электромагнитным полем и полями нейтральных векторных бозонов $Z(1)_\alpha$ и $Z(2)_\alpha$. Вид удлиненной производной был записан в (5.6.11). Слагаемые нижней строки (5.9.1) соответствуют массовым вкладам для фермионов.

При записи члена с коэффициентом вращения Риччи в (4.2.3) по-прежнему следует использовать формулу конформного преобразования $\Delta_M(NP)$ (2.8.7). Для записи произведения $\Delta_M(NP)$ с тремя Γ -матрицами существенна формула, заменяющая (2.8.8) в 5-мерии и (4.8.2) в 6-мерии

$$[G(P)_M G(N)^L - G(N)_M G(P)^L] \Gamma^M \Gamma(N) \Gamma(P) = -12 \Gamma^L. \quad (5.9.2)$$

При 1+1+1+4-расщеплении следует учитывать формулу

$$\begin{aligned} \Delta_M(NP) \Gamma^M \Gamma(N) \Gamma(P) &= g^{ML} \Delta_M(NP) \Gamma_L \Gamma(N) \Gamma(P) - \\ &- \lambda^M \Delta_M(NP) \Gamma(5) \Gamma(N) \Gamma(P) - \sigma^M \Delta_M(NP) \Gamma(6) \Gamma(N) \Gamma(P) - \\ &- \omega^M \Delta_M(NP) \Gamma(7) \Gamma(N) \Gamma(P). \end{aligned} \quad (5.9.3)$$

Далее в этой главе будем пренебрегать производными от компонент триады $\lambda_5, \sigma_6, \omega_7$, так как последние соответствуют эффектам «скаляризма». Это означает, что будут учитываться только следующие проекции $\Delta_M(NP)$:

$$\begin{aligned} G(\alpha)^M \Delta_M(\beta\nu) &= \Delta(\alpha, \beta\nu), \quad G(\alpha)^M \Delta_M(\beta 5) = {}^5F(\alpha\beta), \\ G(\alpha)^M \Delta_M(\beta 6) &= {}^6F(\alpha\beta), \quad G(\alpha)^M \Delta_M(\beta 7) = {}^7F(\alpha\beta), \\ \lambda^M \Delta_M(\alpha\beta) &= -{}^5F(\alpha\beta), \quad \sigma^M \Delta_M(\alpha\beta) = -{}^6F(\alpha\beta), \\ \omega^M \Delta_M(\alpha\beta) &= -{}^7F(\alpha\beta), \end{aligned} \quad (5.9.4)$$

где все обозначения остались те же, что и в (4.8.5); ${}^7F(\alpha\beta)$ определено в (5.3.11).

В итоге имеем вклад в гиперплотность лагранжиана от членов с коэффициентами вращения Риччи (без добавления эрмитово-сопряженного выражения):

$$\begin{aligned} &- \frac{i}{16} V^{\sqrt{7}G} (\hbar c) \chi^{6+\mu} \left\{ \Delta(\alpha, \beta\nu) \bar{\Psi} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\nu) \Psi - \right. \\ &- [{}^5F(\alpha\beta) \bar{\Psi} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(5) \Psi + {}^6F(\alpha\beta) \bar{\Psi} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(6) \Psi + \\ &+ {}^7F(\alpha\beta) \bar{\Psi} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(7) \Psi] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{12}{\chi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x^\alpha} + \lambda_\alpha \lambda^5 \frac{\partial \chi}{\partial x^5} + \sigma_\alpha \sigma^6 \frac{\partial \chi}{\partial x^6} + \omega_\alpha \omega^7 \frac{\partial \chi}{\partial x^7} \right) \bar{\Psi} \tilde{\Gamma}^\alpha \Psi + \\ &+ \frac{12}{\chi} \left(\lambda^5 \frac{\partial \chi}{\partial x^5} \bar{\Psi} \Gamma(5) \Psi + \sigma^6 \frac{\partial \chi}{\partial x^6} \bar{\Psi} \Gamma(6) \Psi + \omega^7 \frac{\partial \chi}{\partial x^7} \bar{\Psi} \Gamma(7) \Psi \right\}. \end{aligned} \quad (5.9.5)$$

Здесь первое слагаемое описывает известное взаимодействие фермионов с гравитационным полем, вторая группа слагаемых (в квадратных скобках) описывает взаимодействие спиноров с электромагнитным полем и нейтральными векторными бозонами через аномальные магнитные моменты. Третья группа слагаемых дает вклад в нейтральные токи, пропорциональный b , т. е. ими можно пренебречь по сравнению с вкладом из (5.9.1). Наконец, последняя группа слагаемых относится к массовым вкладам для фермионов.

Произведя 1+1+1+4-расщепление в выражении ${}^8S_{MNP} \Gamma^M \Gamma^N \Gamma^P$, находим вклад в гиперплотность лагранжиана от членов с кручением (без добавления эрмитово-сопряженного выражения):

$$\begin{aligned} &- \frac{3i}{8} V^{\sqrt{7}G} (\hbar c) \chi^{6+\mu} \left\{ [S(65)_\alpha \bar{\Psi} \Gamma(6) \Gamma(5) \tilde{\Gamma}^\alpha \Psi + \right. \\ &+ S(75)_\alpha \bar{\Psi} \Gamma(7) \Gamma(5) \tilde{\Gamma}^\alpha \Psi + S(76)_\alpha \bar{\Psi} \Gamma(7) \Gamma(6) \tilde{\Gamma}^\alpha \Psi] - \\ &- \frac{1}{2} [S(5)_{\alpha\beta} \bar{\Psi} \Gamma(5) \tilde{\Gamma}^\alpha \tilde{\Gamma}^\beta \Psi + S(6)_{\alpha\beta} \bar{\Psi} \Gamma(6) \tilde{\Gamma}^\alpha \tilde{\Gamma}^\beta \Psi + \\ &+ S(7)_{\alpha\beta} \bar{\Psi} \Gamma(7) \tilde{\Gamma}^\alpha \tilde{\Gamma}^\beta \Psi] + S(765) \bar{\Psi} \Gamma(7) \Gamma(6) \Gamma(5) \Psi + \\ &+ \frac{1}{6} \tilde{S}_{\alpha\beta\nu} \bar{\Psi} \tilde{\Gamma}^\alpha \tilde{\Gamma}^\beta \tilde{\Gamma}^\nu \Psi \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.9.6)$$

Здесь первая группа слагаемых (в первых квадратных скобках) описывает взаимодействие заряженных токов с векторными W -бозонами. Вторая группа слагаемых описывает взаимодействие фермионов с W -бозонами через аномальные моменты. Предпоследнее слагаемое относится к массовым вкладам для фермионов.

Используем прежнее представление для шести восьмирядных Γ -матриц (4.7.1), тогда седьмая матрица имеет вид

$${}^7\Gamma(7) = i \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix}. \quad (5.9.7)$$

Квадрат этой матрицы равен минус единице, как и должно быть для пространственноподобного направления.

Совершенно так же, как и в 6-мерной модели, 8-компонентные Ψ -функции расщепляем на две 4-компонентные части

$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi(1) \\ \Psi(2) \end{pmatrix}$ и при помощи формул (4.7.3) и (4.7.4) произведем расщепление на левые и правые компоненты.

Существенно новым элементом 7-мерной теории является способ отождествления двух 4-компонентных спиноров $\Psi(1)$ и $\Psi(2)$ с Ψ -функциями кварков и лептонов различных ароматов. Будем полагать, что $\Psi(1)$ описывает только верхние частицы всех поколений:

$$\Psi(1) = \Psi(u) + \Psi(c) + \Psi(t) + \Psi(\nu_e) + \Psi(\nu_\mu) + \Psi(\nu_\tau), \quad (5.9.8)$$

тогда как $\Psi(2)$ описывает только нижние частицы всех поколений:

$$\Psi(2) = \Psi(d) + \Psi(s) + \Psi(b) + \Psi(e^-) + \Psi(\mu^-) + \Psi(\tau^-). \quad (5.9.9)$$

Это отождествление тесно связано с выбранным представлением Γ -матриц и обусловлено рядом обстоятельств. Забегая вперед, назовем основные из них. Во-первых, именно при таком отождествлении наиболее рельефно проявляются элементы соответствия 7-мерной модели стандартной $SU(2)$ -симметричной теории при описании взаимодействия с векторными полями $A(i)_\alpha$. Во-вторых, именно в этом случае пропадают чрезвычайно большие вклады в массы покоя частиц, обусловленные большой постоянной составляющей в скалярной составляющей компоненте кручения $S(765)$. Имеются и другие доводы в пользу такого отождествления Ψ -функций.

§ 5.10. Нейтральные и заряженные токи

Взаимодействие фермионов с электромагнитным полем и нейтральными векторными бозонами метрического происхождения определяются нейтральными токами, которые обязаны слагаемым из (5.9.1). Будем учитывать лишь члены нулевого порядка по b . Используя формулы разбиения Ψ на левые и правые части, а также представления матриц $\tilde{\Gamma}^\alpha$, получаем гиперплотность лагранжиана с интересующими здесь нас нейтральными токами

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{нейтр}} = & \frac{i}{4} V \sqrt{G} (\hbar c) g_\alpha^n \left\{ \left[\bar{\Psi}_L(1) \gamma^\alpha \frac{\partial \Psi_L(1)}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{\Psi}_L(1)}{\partial x^n} \gamma^\alpha \Psi_L(1) \right] + \left[\bar{\Psi}_L(2) \gamma^\alpha \frac{\partial \Psi_L(2)}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{\Psi}_L(2)}{\partial x^n} \gamma^\alpha \Psi_L(2) \right] + \right. \\ & + \left[\bar{\Psi}_R(1) \gamma^\alpha \frac{\partial \Psi_R(1)}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{\Psi}_R(1)}{\partial x^n} \gamma^\alpha \Psi_R(1) \right] + \\ & \left. + \left[\bar{\Psi}_R(2) \gamma^\alpha \frac{\partial \Psi_R(2)}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{\Psi}_R(2)}{\partial x^n} \gamma^\alpha \Psi_R(2) \right] \right\}, \quad (5.10.1) \end{aligned}$$

где индекс n пробегает три значения: 5, 6, 7.

Из вида (5.10.1) следует, во-первых, что в этой части гиперплотности лагранжиана, как и положено, содержатся произведения Ψ -функций верхних частиц только с верхними и нижних частиц только с нижними. Во-вторых, очевидно, из-за того, что наборы гармоник различных частиц не пересекаются, после усреднения по дополнительным координатам из выражения (5.10.1) останутся только члены, содержащие квадратичные слагаемые лишь одинаковых частиц, т. е. правила запретов для нейтральных токов будут выполняться.

Используя формулы (5.6.11), (5.6.12) и (5.6.15), легко показать, что из плотности лагранжиана (5.10.1) и определений для кварков и лептонов, данных в § 5.8, следуют стандартные выражения для взаимодействия всего комплекса рассматриваемых частиц, во-первых, с электромагнитным полем и, во-вторых, с нейтральным векторным бозоном $Z(1)_\alpha$. Однако, кроме того, появляются члены, описывающие взаимодействие нейтральных токов с полем второго нейтрального векторного бозона $Z(2)_\alpha$ вида

$$\frac{e}{\sin \theta_7} \sum_{i=1}^{12} Q_2^i (\bar{\Psi}_i O_\alpha^L \Psi_i + \bar{\Psi}_i O_\alpha^R \Psi_i) Z(2)_\alpha, \quad (5.10.2)$$

где опять использованы обозначения § 5.1, т. е. индекс i соответствует шести ароматам лептонов и шести ароматам кварков. Согласно высказанной гипотезе $Q_2^i = 0$ для частиц первого поколения (ν_e, e, u, d); $Q_2^i > 0$ для частиц второго поколения (ν_μ, μ, c, s); $Q_2^i < 0$ для частиц третьего поколения (ν_τ, τ, t, b).

Взаимодействие фермионов с W -бозонами определяется заряженными токами, которые обязаны слагаемым с кручением, т. е. из (5.9.6). Будем учитывать лишь члены нулевого порядка по b . Опять используем формулы разбиения Ψ на левые и правые компоненты, а также формулы (4.9.16). После необходимых выкладок находим часть плотности лагранжиана, описывающую взаимодействие фермионов с полями из кручения:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FS} = & -\frac{3}{4} V \sqrt{G} (\hbar c) \left\{ (\bar{\Psi}_L(1), \bar{\Psi}_L(2)) \times \right. \\ & \times \left[S_\alpha I_2 - S(65)_\alpha \sigma(3) - S(75)_\alpha \sigma(2) + S(76)_\alpha \sigma(1) \right] \gamma^\alpha \begin{pmatrix} \Psi_L(1) \\ \Psi_L(2) \end{pmatrix} - \\ & - (\bar{\Psi}_R(1), \bar{\Psi}_R(2)) \left[-S_\alpha I_2 - S(65)_\alpha \sigma(3) + S(75)_\alpha \sigma(2) + \right. \\ & \left. + S(76)_\alpha \sigma(1) \right] \gamma^\alpha \begin{pmatrix} \Psi_R(1) \\ \Psi_R(2) \end{pmatrix} \left. \right\}, \quad (5.10.3) \end{aligned}$$

где $\sigma(i)$ — матрицы Паули.

Поскольку матрицы I_2 и $\sigma(3)$ имеют отличные от нуля элементы только на главной диагонали, то первые два слагаемых в каждой квадратной скобке образуют произведения либо толь-

ко из верхних, либо только из нижних частиц. Это соответствует вкладам в определение нейтральных токов. В итоге в 7-мерной теории имеются возможности для описания двух дополнительных нейтральных векторных полей $Z(2)_\alpha$ и $\tilde{A}(3)_\alpha$. Встает вопрос: насколько они соответствуют реальности?

Оставшаяся пара слагаемых в каждой квадратной скобке образует произведения верхних частиц с нижними, т. е. описывает взаимодействия заряженных токов с W -бозонами. Сравнивая их с плотностью лагранжиана (4.1.1) модели Вайнберга — Салама, видим, что определения $S(75)_\alpha$ и $S(76)_\alpha$ согласно (5.7.6) и отождествления $\Psi(1)$ и $\Psi(2)$ соответственно с верхними и нижними частицами наиболее непосредственно отвечают принципу соответствия 7-мерной модели теории Вайнберга — Салама.

Условия на определения левых и правых компонент частиц, изложенные в § 5.8, приводят к исчезновению взаимодействия правых компонент с полем кручения, а следовательно, и с полем заряженных W -бозонов. Таким образом, взаимодействие с W -бозонами описывается следующими членами в плотности лагранжиана:

$$\mathcal{L}_{FW} = -\frac{3}{4} V^2 G (\hbar c) \left\{ (\bar{\Psi}_L(1), \bar{\Psi}_L(2)) \times \right. \\ \left. \times [S(75)_\alpha \sigma(2) + S(76)_\alpha \sigma(1)] \gamma^\alpha \begin{pmatrix} \Psi_L(1) \\ \Psi_L(2) \end{pmatrix} \right\}. \quad (5.10.4)$$

Используя формулы (5.7.6), из сравнения (5.10.4) с плотностью лагранжиана Вайнберга — Салама (4.1.1) находим значение коэффициента C_S , приведенное в (5.7.11).

Подставляя в (5.10.4) любое конкретное определение левых компонент кварков, можно определять соответствующие этому определению значения углов типа угла Каббико. Как уже отмечалось, удастся подобрать гармоники и коэффициенты для частиц, приводящие к более или менее реалистическим значениям углов.

§ 5.11. Массы токовых кварков

Как уже отмечалось в § 5.9, массовые вклады дают все три типа слагаемых в гиперплотности лагранжиана (5.9.1), (5.9.5) и (5.9.6), однако следует учесть, что скалярная компонента кручения $S(765)$ в (5.9.6) входит вместе с произведением матриц

$$\Gamma(7) \Gamma(6) \Gamma(5) = -i \begin{pmatrix} \gamma_5 & 0 \\ 0 & \gamma_5 \end{pmatrix}.$$

Учитывая еще матрицу $\Gamma(0)$ в определении $\bar{\Psi}$ и отождествле-

ние 8-компонентной Ψ -функции, находим, что слагаемые с кручением перемешивают верхние и нижние частицы. Положив

$$S(765) = a = \text{const}, \quad (5.11.1)$$

находим, что при усреднении по дополнительным координатам нечем скомпенсировать гармоники типа W -бозонных. Следовательно, массовый вклад из (5.9.6) пропадает. По этой же причине после усреднения выпадут все слагаемые из (5.9.1) и (5.9.5), содержащие матрицу $\Gamma(7)$ (т. е. дифференцирования по x^7).

Для записи оставшихся слагаемых следует учесть формулы (4.10.2) и (4.10.3). Подставим их в гиперплотность лагранжиана и явно воспроизведем эрмитово-сопряженные части. В итоге для верхних частиц массовые слагаемые находятся в виде

$$\frac{1}{4} V^2 G (\hbar c) \left\{ \lambda^5 \left[\left(\chi^{6+\mu} \bar{\Psi}_L(1) \frac{\partial \Psi_R(1)}{\partial x^5} - (\chi^*)^{6+\mu} \frac{\partial \bar{\Psi}_L(1)}{\partial x^5} \Psi_R(1) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\chi^{6+\mu} \bar{\Psi}_R(1) \frac{\partial \Psi_L(1)}{\partial x^5} - (\chi^*)^{6+\mu} \frac{\partial \bar{\Psi}_R(1)}{\partial x^5} \Psi_L(1) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \left(\chi^{5+\mu} \frac{\partial \chi}{\partial x^5} - (\chi^*)^{5+\mu} \frac{\partial \chi^*}{\partial x^5} \right) (\bar{\Psi}_L(1) \Psi_R(1) - \bar{\Psi}_R(1) \Psi_L(1)) \right] - \right. \\ \left. - i \sigma^6 \left[\left(\chi^{6+\mu} \bar{\Psi}_L(1) \frac{\partial \Psi_R(1)}{\partial x^6} - (\chi^*)^{6+\mu} \frac{\partial \bar{\Psi}_L(1)}{\partial x^6} \Psi_R(1) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\chi^{6+\mu} \bar{\Psi}_R(1) \frac{\partial \Psi_L(1)}{\partial x^6} - (\chi^*)^{6+\mu} \frac{\partial \bar{\Psi}_R(1)}{\partial x^6} \Psi_L(1) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \left(\chi^{5+\mu} \frac{\partial \chi}{\partial x^6} - (\chi^*)^{5+\mu} \frac{\partial \chi^*}{\partial x^6} \right) (\bar{\Psi}_L(1) \Psi_R(1) + \bar{\Psi}_R(1) \Psi_L(1)) \right] \right\}. \quad (5.11.2)$$

Совершенно аналогично выглядят массовые слагаемые для нижних частиц. Отличие будет состоять лишь в знаке перед второй квадратной скобкой.

Анализ записанного выражения позволяет сделать следующие утверждения.

а) Массовые вклады для кварков слагаются из трех частей — из-за цветовых меток отдельно для каждого из трех цветов.

б) В выражениях первого порядка по b результаты дифференцирования ароматических и цветовых меток фермионов по x^5 и x^6 сокращаются внутри каждой круглой скобки, т. е. остаются вклады только от дифференцирований киральных добавок.

в) В первом порядке по b существенно упрощаются выражения, содержащие производные от конформного фактора:

$$\chi^{5+\mu} \frac{\partial \chi}{\partial x^n} - (\chi^*)^{5+\mu} \frac{\partial \chi^*}{\partial x^n} \approx 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^n} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^n} \right),$$

где $n=5, 6$; $\varphi = b(\Phi_5 + \Phi_6 + \Phi_7)$; Φ_5, Φ_6, Φ_7 определены в (5.8.3).

г) Оставляя нулевой и первый порядок по b , имеем разложения

$$\chi^{6+\mu} \approx 1 + (6+\mu)(\varphi - \varphi^*); \quad (\chi^*)^{6+\mu} = 1 - (6+\mu)(\varphi - \varphi^*).$$

Пользуясь сформулированными утверждениями, легко доказать, что в 7-мерной модели для первого порядка по b имеют место соотношения

$$\begin{aligned} & \chi^6 \bar{\Psi}_L(s) \frac{\partial \Psi_R(s)}{\partial x^n} - (\chi^*)^6 \frac{\partial \bar{\Psi}_L(s)}{\partial x^n} \Psi_R(s) + \\ & + 3 \left(\chi^{5+\mu} \frac{\partial \chi}{\partial x^n} - (\chi^*)^{5+\mu} \frac{\partial \chi^*}{\partial x^n} \right) \bar{\Psi}_L(s) \Psi_R(s) = \\ & = 6 \left[(\varphi - \varphi^*) \left(\bar{\Psi}_L(s) \frac{\partial \Psi_R(s)}{\partial x^n} + \frac{\partial \bar{\Psi}_L(s)}{\partial x^n} \Psi_R(s) \right) + \right. \\ & \left. + \bar{\Psi}_L(s) \Psi_R(s) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^n} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^n} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.11.3)$$

где опять $n=5, 6$; $s=1, 2$. То же самое получится при замене местами индексов L и R . Этот результат полностью соответствует изложенному в § 4.10: массы частицы обращаются в нуль, если нет пересечений в гармониках для левых и правых компонент частиц и если показатель степени μ в (5.11.2) равен нулю. Отсюда, как и в 6-мерной модели, следуют два способа введения отличных от нуля масс фермионов: через показатель степени μ и с помощью пересечения гармоник в определении левых и правых компонент частиц. В последнем случае коэффициент при пересекающихся гармониках должен быть чрезвычайно малым. Напомним, что при коэффициенте порядка единицы получаются массы порядка планковских.

§ 5.12. Обсуждение результатов

Из изложенного в этой главе видно, что модель электрослабых взаимодействий Вайнберга — Салама довольно естественно вкладывается в 7-мерную геометрическую модель. При этом характер решения комплекса встающих задач остается примерно таким же, как для 6-мерной модели, см. § 4.13. Однако ясно, что рамки 7-мерной модели значительно шире 6-мерной. Это позволило, во-первых, устранить ряд недостатков 6-мерной модели, в частности ввести с помощью (5.7.15) недостающие сла-

гаемые, соответствующие $SU(2)$ -симметрии модели Вайнберга — Салама. Во-вторых, это позволило естественным образом ввести в модель не один дублет спинорных частиц, а наборы пар из трех поколений (лептонные и кварковые). Причем показано, что 7-мерная модель диктует наличие именно трех поколений, ни больше, ни меньше. В-третьих, принятие 7-мерной модели неизбежно приводит к предсказанию ряда новых полей и свойств, отсутствующих в стандартной модели электрослабых взаимодействий.

Кратко перечислим основные предсказания, сделанные в этой главе.

1. Если 7-мерная модель верно отражает закономерности реального мира, то должен существовать второй нейтральный векторный бозон $Z(2)_\alpha$, имеющий метрическое происхождение. Довольно естественные предположения приводят к оценке его массы покоя $m_2 c^2 \sim 140$ ГэВ.

2. Следует говорить не о дублете, а о триplete скалярных бозонов типа хиггсовских. Все они вводятся посредством конформного фактора и имеют нулевой электрический заряд*.

3. Из компонент тензора кручения получаются три векторных поля. В соответствии с моделью Вайнберга — Салама два из них заряжены, а одно нейтрально. Однако нейтральное поле не участвует в определении векторного потенциала электромагнитного поля.

4. Три гармоники ϵ_5, ϵ_6 и ϵ_7 зависимостей от дополнительных координат определяют три квантовых числа: электрический заряд Q , проекцию изотопического спина T_3 и новый заряд Q_2 , характеризующий взаимодействие с $Z(2)$ -бозоном. Высказана гипотеза, что этот заряд определяет принадлежность частиц к одному из трех поколений. Для частиц первого поколения $Q_2 = 0$.

5. 7-Мерная модель дает возможность описать не только три поколения частиц, но и еще один признак, по которому ряд частиц распределяется также на три класса. Этот признак интерпретирован как цвет кварков. Последнее позволяет надеяться на объединение в рамках 7-мерия электрослабых и сильных взаимодействий.

Вместе с тем следует еще раз перечислить основные сделанные в этой главе ограничения и допущения, позволившие довести выводы до численных оценок; без них могли бы получиться более общие модели.

1) Для получения максимально близкого соответствия со стандартной формулой (4.1.20), описывающей взаимодействие с Z -бозоном, в (5.6.3) было принято условие (5.6.5), фактически развязывающее взаимодействия частиц с $Z(1)_\alpha$ - и $Z(2)_\alpha$ -бозонами. Оно приводит к существенным упрощениям и позволяет

* Введение электрически заряженных скалярных бозонов вызвало бы диссонанс с другими положениями данной модели.

считать Q_2 всецело характеристикой взаимодействия с $Z(2)$ -бозоном.

2) На начальных этапах в модели присутствовали три параметра b_5 , b_6 и b_7 , определяющие весовые вклады трех скалярных бозонов. Было принято предположение: $b_5=b_6=b_7$. Именно это условие ответственно за довольно изящную оценку масс покоя двух Z -бозонов.

3) В общем случае в 7-мерной модели вместо одного угла Вайнберга θ_W возникают несколько углов, выражающиеся через два основных θ_7 и θ_{56} . Эти углы определяются отношениями диагональных составляющих 7-метрики: λ^5 , σ^6 и ω^7 . Только что указанные ограничения позволяют зафиксировать $\theta_{56}=\pi/4$, тогда θ_7 соответствует углу Вайнберга: $\theta_7=\theta_W\approx 30^\circ$, что приводит к соотношению $\lambda^5=\sigma^6=\sqrt{6}\omega^7$.

4) В данной 7-мерной модели остался произвол в физическом отождествлении нейтрального векторного поля, возникающего из кручения.

5) Примечателен использованный постулат, что в 8-компонентной спинорной функции $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi(1) \\ \Psi(2) \end{pmatrix}$ 4-компонентная функция $\Psi(1)$ описывает только верхние частицы всех трех поколений, а $\Psi(2)$ — только нижние. Этот постулат обеспечивает максимальное соответствие 7-мерной модели стандартной теории. Кроме того, он приводит к выпаданию вклада в массы покоя от дифференцирования по x^7 и отсутствию планковского вклада в массы от компоненты кручения $S(765)$.

6) В 7-мерной модели элементарным частицам соответствует не один, а несколько (ряд) наборов гармоник. Предполагалось, что в каждом таком наборе для одной и той же частицы выполняется соотношение $Q=(e_5+e_6+e_7)/3$ для значения известного электрического заряда, тогда как заряды T_3 и Q_2 могут оказаться имеющими усредненные значения, определяемые всем множеством дозволённых наборов гармоник.

При построении всякой физической теории, когда приходится выбирать один вариант из множества возможностей, немаловажным является тезис Дирака о «математическом изяществе» физических законов. Значительная часть полученных здесь формул, как представляется автору, удовлетворяет этому тезису. Некоторые нарекания может вызвать часть материала, где используется тензор кручения. В связи с этим следует еще раз подчеркнуть, что в данной геометрической модели заряженные векторные бозоны нельзя описывать посредством метрических величин. Согласно ключевому положению развиваемых моделей заряженность соответствует наличию зависимости от дополнительных координат. Ее введение в метрику приводит к множеству трудностей, тогда как в кручении это можно сделать безболезненно. Следовательно, описание W -бозонов посредством кручения не только экономит размерности, но и необходимо для описания их электрического заряда.

К недостаткам изложенной классической (неквантовой) модели можно отнести отсутствие окончательной фиксации гармоник, соответствующих левым и правым компонентам частиц, и более детальное их распределение по поколениям. Анализ показал, что имеются конкретные частные примеры таких наборов, приводящие к стандартным значениям T_3 и разумным значениям нового заряда Q_2 . В изложенной модели не сделано также окончательного выбора одного из двух механизмов ввода ненулевых масс покоя спинорных частиц. Видимо, в рамках используемых здесь классических методов и соображений не представляется возможным решить подобные задачи. Их решение следует ожидать от квантового варианта многомерной теории.

Глава 6. МОДЕЛЬ 7-МЕРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИ-ЭЛЕКТРО-СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

§ 6.1. Основные сведения из стандартной теории сильных взаимодействий

Цель этой главы — обсуждение на основе ранее использованных методов и понятий 7-мерной геометрической модели, объединяющей гравитационные, электромагнитные и сильные взаимодействия (подчеркнем — без слабых взаимодействий). Как и в предыдущих главах, начнем с изложения необходимого минимума сведений из стандартной классической (не вторично-квантованной) модели сильных взаимодействий, именуемой хромодинамикой [2, 74, 93, 106].

В основе современной теории сильных взаимодействий лежат представления о кварковой структуре адронов, т. е. мезонов и барионов — сильно взаимодействующих частиц. Еще раз напомним, что кварки обладают тремя цветами (цветовыми зарядами), т. е. образуют цветовой триплет q_i (где $i=1, 2, 3$). В цветовом пространстве вводятся преобразования между тремя компонентами q_i . Говорят, что цветовой триплет кварков преобразуется по фундаментальному представлению группы $SU(3)$ (триплет антикварков преобразуется по сопряженному представлению).

Поскольку группа $SU(3)$ имеет 8 генераторов и 8 соответствующих вещественных параметров, то согласно идеологии калибровочной теории переносчиками сильных взаимодействий являются 8 векторных полей. Кванты этих полей $\mathcal{A}(a)_\mu$ — глюоны выполняют роль фотонов в электромагнитных взаимодействиях и векторных (нейтральных и заряженных) бозонов в слабых взаимодействиях. Основными свойствами глюонов является то, что они безмассовы, электрически нейтральны, характеризуются цветовыми зарядами и сильно взаимодействуют друг с другом.

Плотность лагранжиана сильных взаимодействий строится по аналогии с теориями электромагнитных (1.3.6) и электро-слабых (4.1.1) взаимодействий:

$$\mathcal{L} = i\hbar c \bar{q}^\mu \overset{\times\times}{\partial}_\mu q - \frac{1}{8\pi} \text{Sp} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (6.1.1)$$

где q понимается как столбец из трех 4-компонентных функций (массовые члены здесь опущены). Операторы $\overset{\times\times}{\partial}_\mu$ представляют собой «удлиненные» (матричные) производные, аналогичные

использованным ранее (1.3.9) и (4.1.2), только более сложные:

$$\overset{\times\times}{\partial}_\mu = I_3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ig_3}{\hbar c} \frac{1}{2} \lambda(a) \mathcal{A}(a)_\mu, \quad (6.1.2)$$

где I_3 — единичная 3-рядная матрица, g_3 — константа сильных взаимодействий, индекс a пробегает 8 значений: 1, 2, 3, ..., 8; $\lambda(a)$ — 8 матриц Гелл-Манна, обычно выбираемых в следующем представлении:

$$\begin{aligned} \lambda(1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda(2) = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda(4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda(5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda(6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda(7) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda(8) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Эти матрицы удовлетворяют соотношениям:

$$\text{Sp} \lambda(a) \lambda(b) = 2\delta(ab), \quad [\lambda(a) \lambda(b)]_- = 2if(abc) \lambda(c), \quad (6.1.4)$$

$$[\lambda(a) \lambda(b)]_+ = \frac{4}{3}\delta(ab) + 2d(abc) \lambda(c),$$

где $f(abc)$ — структурные константы группы $SU(3)$ (антисимметричные по всем индексам), $d(abc)$ — константы, симметричные по всем индексам. Тензор $F_{\mu\nu}$ в (6.1.4) определяется аналогично теории электро-слабых взаимодействий (4.1.6) через матричные векторные потенциалы глюонных полей $A_\mu = \frac{1}{2} \mathcal{A}(a)_\mu \lambda(a)$:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{ig_3}{\hbar c} [A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu]. \quad (6.1.5)$$

Все адроны представляются в виде бесцветных комбинаций кварков. Барионам (B) соответствуют тройные комбинации

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} q^i q^j q^k \varepsilon_{ijk}, \quad (6.1.6)$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный символ Леви-Чивиты. Мезоны (M) строятся из совокупностей парных выражений из кварков:

$$M = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{q}_i q^i = \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{q}_1 q_1 + \bar{q}_2 q_2 + \bar{q}_3 q_3). \quad (6.1.7)$$

Заметим, что условие бесцветности запрещает множество конструкций, например, типа $q^i q^j$ или $\bar{q}^i q^j q^k$, однако допускает су-

ществование систем вида $qqqqqq$ (дибарион), $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ (димезон) и т. д.

Для сильных взаимодействий характерны независимость от значений электрических зарядов и ароматов частиц, а также полная симметрия для левых и правых компонент спиноров.

§ 6.2. Основные идеи 7-мерной модели, содержащей хромодинамику

В основу рассматриваемой модели положим 7-мерную гиперплотность лагранжиана, близкую к (5.2.1),

$$L = \frac{1}{4} \sqrt{\tilde{g}} \left[\frac{1}{\kappa} (\Lambda - \tilde{r}\tilde{R}) + i\hbar c \tilde{\Psi} \tilde{\Gamma}^M \tilde{\nabla}_M \tilde{\Psi} \right] + (\text{э. с.}), \quad (6.2.1)$$

где использованы в принципе те же обозначения, что и в § 5.2; $\tilde{\nabla}_M$ по-прежнему означает оператор ковариантного дифференцирования спиноров в 7-мерном многообразии с кручением. Различие состоит, во-первых, в том, что в данной модели компоненты 7-метрики отличаются от значений, указанных в предыдущей главе. Главным образом это относится к составляющим 7-метрики: $\tilde{\lambda}^5, \tilde{\sigma}^6, \tilde{\omega}^7, \dots$, что отображено в формуле (6.2.1) значком тильда над величинами, зависящими от метрики. Во-вторых, принципиально важным моментом данной модели является отсутствие конформного преобразования от исходных компонент метрики к физически интерпретируемому (в формуле (6.2.1), нет значков «0» над величинами в отличие от (5.2.1)). В хромодинамике не фигурируют хиггсовские скалярные поля — видимо, это существенный атрибут именно теории электрослабых взаимодействий.

В этой главе будет соблюдаться максимально близкое соответствие определениям, данным в предыдущей главе. В частности, остается в точности то же самое определение цветов кварков через зависимость от трех дополнительных координат: x^5, x^6, x^7 . Однако здесь речь будет идти об идеализированных кварках, очищенных от понятий ароматов, присущих теории электрослабых взаимодействий. По этой причине правильнее называть такие частицы пракварками. В согласии со сказанным определим пракварки трех цветов в виде

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x^\mu) \exp(i\alpha x^5), & q_2 &= q_2(x^\mu) \exp(i\beta x^6), \\ q_3 &= q_3(x^\mu) \exp(i\omega x^7), \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

где $q_i(x^\mu)$ — части кварковых волновых функций, зависящие от четырех классических пространственно-временных координат. Формула (5.2.2) для значений электрического заряда Q остается в силе. Это значит, что пракварки обладают электрическим зарядом $Q=1/3$.

В согласии с определением 8-компонентных спиноров (5.9.8) и (5.9.9) представим спинорные функции Ψ в виде

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi(1) \\ \Psi(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_L(1) + \Psi_R(1) \\ \Psi_L(2) + \Psi_R(2) \end{pmatrix}, \quad (6.2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Psi_L(1) \\ \Psi_L(2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}q_{1L} + a_{12}q_{2L} + a_{13}q_{3L} \\ a_{21}q_{1L} + a_{22}q_{2L} + a_{23}q_{3L} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Psi_R(1) \\ \Psi_R(2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{11}q_{1R} + b_{12}q_{2R} + b_{13}q_{3R} \\ b_{21}q_{1R} + b_{22}q_{2R} + b_{23}q_{3R} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь $a_{1i}, a_{2i}, b_{1i}, b_{2i}$ — некоторые комплексные коэффициенты, значения которых будут конкретизированы ниже. Подчеркнем равноправность вхождения трех цветов пракварков в верхнюю и нижнюю компоненты — это отражает независимость хромодинамики от ароматов частиц.

Принципиально важным элементом модели является выбор геометрических понятий для описания 8 глюонов. Из вида матриц Гелл-Манна (6.1.3) следует, что глюоны можно разделить на два класса. Первый класс состоит из 6 глюонов — им соответствуют матрицы с отличными от нуля элементами вне главной диагонали. Такие глюоны перепутывают пракварки разных цветов. Согласно определению (6.2.2) глюоны этого класса должны содержать зависимость от дополнительных координат. Легко понять, что эта зависимость определяется выражениями, одинаковыми для левых и правых компонент:

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 \gamma^\mu q_2 &\sim \exp(-i\alpha x^5 + i\beta x^6), \\ \bar{q}_1 \gamma^\mu q_3 &\sim \exp(-i\alpha x^5 + i\omega x^7), \\ \bar{q}_2 \gamma^\mu q_3 &\sim \exp(-i\beta x^6 + i\omega x^7) \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

и сопряженными им. Неоднократно подчеркивалось, что зависимость от дополнительных координат не вводилась нами в метрику, следовательно, эти 6 глюонов могут описываться только компонентами кручения. Оставшиеся два глюона $\mathcal{A}(3)_\alpha$ и $\mathcal{A}(8)_\alpha$ соответствуют матрицам Гелл-Манна $\lambda(3)$ и $\lambda(8)$ с отличными от нуля элементами на главной диагонали. Они образуют второй класс глюонов, который, как будет показано ниже, должен описываться величинами метрического характера.

§ 6.3. Электромагнитное поле и глюоны метрического происхождения

Начнем с рассмотрения нейтральных полей, получающихся из 7-метрики. Как и в предыдущих главах, прежде всего необходимо произвести $1+1+1+4$ -расщепление 7-мерных величин. Очевидно, что будут справедливы все формулы § 5.3 с той лишь разницей, что составляющие метрики $\tilde{\lambda}^5, \tilde{\sigma}^6, \dots$ следует писать

Частица	ε_5	ε_6	ε_7	Q	Q_3	Q_8
q_1	+1	0	0	+1/3	+1/3	+1/3
q_2	0	+1	0	+1/3	-1/3	+1/3
q_3	0	0	+1	+1/3	0	-2/3

с волной. По-прежнему из 7-метрики возникают три нейтральных векторных поля. В данной модели их следует сопоставить вектору потенциалу электромагнитного поля A_α и потенциалам двух глюонных полей $\mathcal{A}(3)_\alpha$ и $\mathcal{A}(8)_\alpha$.

Принципиально важным является вопрос о выборе конкретного представления указанных трех физических полей через три вектора триады λ_α , σ_α и ω_α . Напомним, что аналогичная задача представления потенциалов электромагнитного поля и Z-бозонов через векторы триады решалась в 6- и 7-мерных моделях гравитно-электро-слабых взаимодействий с помощью хиггсовских скалярных бозонов. Электромагнитным потенциалом являлась такая комбинация из векторов триады, для которой отсутствовали массовые вклады (последние же следовали из выражений для скалярного поля). Оставшиеся ортогональные комбинации определяли потенциалы Z-бозонов. В данной 7-мерной модели хиггсовские скалярные бозоны отсутствуют и, следовательно, такой прием непригоден. Вместо него используем условие, что взаимодействие глюонов $\mathcal{A}(3)_\alpha$ и $\mathcal{A}(8)_\alpha$ с кварками определяется матрицами Гелл-Манна $\lambda(3)$ и $\lambda(8)$.

С этой целью запишем вид взаимодействия полей A_α , $\mathcal{A}(3)_\alpha$ и $\mathcal{A}(8)_\alpha$ с кварками в стандартной теории в специализированной для этой цели форме

$$\begin{aligned}
& QeA_\alpha(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3) \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \gamma^\alpha \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \\
& + g_3 \mathcal{A}(3)_\alpha(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3) \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^\alpha \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \\
& + \frac{g_3}{\sqrt{3}} \mathcal{A}(8)_\alpha(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3) \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \gamma^\alpha \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad (6.3.1)
\end{aligned}$$

где g_3 — константа сильных взаимодействий. Напомним, что в 7-мерной геометрической модели взаимодействие частиц с метрическими полями определяется видом зависимости частиц от дополнительных координат. Зная зависимость q_i от x^5 , x^6 , x^7 и выражение для электрического заряда Q , из сопоставления первого слагаемого в (6.3.1) с остальными двумя легко записать два дополнительных заряда Q_3 и Q_8 , соответствующих матрицам Гелл-Манна $\lambda(3)$ и $\lambda(8)$:

$$Q = 1/3(\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7); \quad Q_3 = 1/3(\varepsilon_5 - \varepsilon_6); \quad Q_8 = 1/3(\varepsilon_5 + \varepsilon_6 - 2\varepsilon_7). \quad (6.3.2)$$

Отсюда легко записать значения всех трех зарядов кварков (см. табл. 4).

Зная выражения для зарядов Q , Q_3 и Q_8 , легко записать соответствующие этим зарядам векторные поля. Для этого нужно

приравнять удлиненную производную ∂_α из (5.3.12) соответствующей части удлиненной производной (6.1.2) (при этом, как и ранее, полагаем $\alpha = \beta = \omega$):

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i\alpha(\varepsilon_5 \tilde{g}_\alpha^5 + \varepsilon_6 \tilde{g}_\alpha^6 + \varepsilon_7 \tilde{g}_\alpha^7) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i\alpha(Q\tilde{A}_\alpha + Q_3\tilde{\mathcal{A}}(3)_\alpha + Q_8\tilde{\mathcal{A}}(8)_\alpha), \quad (6.3.3)
\end{aligned}$$

где \tilde{A}_α , $\tilde{\mathcal{A}}(3)_\alpha$ и $\tilde{\mathcal{A}}(8)_\alpha$ отличаются некоторыми размерными коэффициентами от соответствующих физических потенциалов A_α , $\mathcal{A}(3)_\alpha$, $\mathcal{A}(8)_\alpha$. Приравняв коэффициенты слева и справа отдельно при гармониках ε_5 , ε_6 и ε_7 , находим систему уравнений для полей:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_\alpha + \tilde{\mathcal{A}}(3)_\alpha + \tilde{\mathcal{A}}(8)_\alpha &= 3\tilde{\lambda}^5 \lambda_\alpha, \\
\tilde{A}_\alpha - \tilde{\mathcal{A}}(3)_\alpha + \tilde{\mathcal{A}}(8)_\alpha &= 3\tilde{\sigma}^6 \sigma_\alpha, \\
\tilde{A}_\alpha - 2\tilde{\mathcal{A}}(8)_\alpha &= 3\tilde{\omega}^7 \omega_\alpha.
\end{aligned} \quad (6.3.4)$$

Решение системы имеет вид

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_\alpha &= \tilde{\lambda}^5 \lambda_\alpha + \tilde{\sigma}^6 \sigma_\alpha + \tilde{\omega}^7 \omega_\alpha, \quad \tilde{\mathcal{A}}(3)_\alpha = 3/2(\tilde{\lambda}^5 \lambda_\alpha - \tilde{\sigma}^6 \sigma_\alpha), \\
\tilde{\mathcal{A}}(8)_\alpha &= 1/2(\tilde{\lambda}^5 \lambda_\alpha + \tilde{\sigma}^6 \sigma_\alpha - 2\tilde{\omega}^7 \omega_\alpha).
\end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Перейдем к обсуждению вклада свободных полей \tilde{A}_α , $\tilde{\mathcal{A}}(3)_\alpha$ и $\tilde{\mathcal{A}}(8)_\alpha$ в плотность геометрического лагранжиана. Это позволит найти коэффициенты, связывающие их с физическими полями. Для этого введем тензоры

$$\tilde{\mathcal{F}}(A)_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{A}_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \tilde{A}_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad \tilde{\mathcal{F}}(3)_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}(3)_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}(3)_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad (6.3.6)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(8)_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}(8)_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}(8)_\alpha}{\partial x^\beta}$$

и приравняем геометрическое выражение (5.3.13) комбинации инвариантов из (6.3.6) с неизвестными пока коэффициентами x, y, z :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{8\kappa} \left[\frac{1}{(\tilde{\lambda}^5)^2} F(5)_{\mu\nu} F(5)^{\mu\nu} + \frac{1}{(\tilde{\sigma}^6)^2} F(6)_{\mu\nu} F(6)^{\mu\nu} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\tilde{\omega}^7)^2} F(7)_{\mu\nu} F(7)^{\mu\nu} \right] = x \tilde{\mathcal{F}}(A)_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{F}}(A)^{\mu\nu} + \\ & + y \tilde{\mathcal{F}}(3)_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{F}}(3)^{\mu\nu} + z \tilde{\mathcal{F}}(8)_{\mu\nu} \tilde{\mathcal{F}}(8)^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Выразим тензоры (6.3.6) через величины $F(5)_{\mu\nu}$, $F(6)_{\mu\nu}$ и $F(7)_{\mu\nu}$ из (5.3.11) и приравняем отдельно коэффициенты при $F(5)_{\mu\nu} F(5)^{\mu\nu} \equiv (55)$, $F(6)_{\mu\nu} F(6)^{\mu\nu} \equiv (66)$, ... слева и справа в (6.3.7). В итоге получаем 6 уравнений. Смешанные уравнения для (56), (57) и (67) имеют вид

$$x - 9/4y + z/4 = 0, \quad x - z/2 = 0, \quad x - z/2 = 0,$$

откуда следуют соотношения

$$x = z/2, \quad y = z/3. \quad (6.3.8)$$

Однородные уравнения для (55), (66) и (77) соответственно означают

$$\begin{aligned} x + 9/4y + z/4 &= 1/8\kappa (\tilde{\omega}^7)^2, \quad x + 9/4y + z/4 = 1/8\kappa (\tilde{\sigma}^6)^2, \\ x + z &= 1/8\kappa (\tilde{\lambda}^5)^2. \end{aligned}$$

Они совместны при

$$(\tilde{\omega}^7)^2 = (\tilde{\sigma}^6)^2 = (\tilde{\lambda}^5)^2 \quad (6.3.9)$$

и вместе с (6.3.8) позволяют определить неизвестные коэффициенты

$$x = \frac{1}{24\kappa (\tilde{\lambda}^5)^2}; \quad y = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{24\kappa (\tilde{\lambda}^5)^2}; \quad z = 2 \cdot \frac{1}{24\kappa (\tilde{\lambda}^5)^2}. \quad (6.3.10)$$

Потребуем, чтобы напряженности свободных физических полей входили в гиперплотность лагранжиана с коэффициентом $\sqrt{7\tilde{G}}/16\pi$, как должно быть согласно (6.1.1). Из (6.3.7) и (6.3.10) находим, что это означает

$$\tilde{A}_\alpha = \pm \frac{2\sqrt{3k}}{c^2} \tilde{\lambda}^5 A_\alpha, \quad \tilde{\mathcal{A}}(3)_\alpha = \pm \frac{3\sqrt{2k}}{c^2} \tilde{\lambda}^5 \mathcal{A}(3)_\alpha, \quad (6.3.11)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(8)_\alpha = \pm \frac{\sqrt{6k}}{c^2} \tilde{\lambda}^5 \mathcal{A}(8)_\alpha.$$

В итоге можем записать

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \pm \frac{c^2}{2\sqrt{3k}} (\lambda_\alpha + \sigma_\alpha + \omega_\alpha), \\ \mathcal{A}(3)_\alpha &= \pm \frac{c^2}{2\sqrt{2k}} (\lambda_\alpha - \sigma_\alpha), \\ \mathcal{A}(8)_\alpha &= \pm \frac{c^2}{2\sqrt{6k}} (\lambda_\alpha + \sigma_\alpha - 2\omega_\alpha). \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Подставим (6.3.11) в (6.3.3) и потребуем, чтобы коэффициент перед потенциалом $\mathcal{A}(3)_\alpha$ совпадал с константой сильных взаимодействий g_3 :

$$g_3 = \frac{\sqrt{2k}}{c^2} \alpha (\hbar c) \tilde{\lambda}^5, \quad \text{или} \quad \tilde{\lambda}^5 = \frac{g_3 c^2}{\sqrt{2k} \alpha (\hbar c)}. \quad (6.3.13)$$

Легко видеть, что тогда согласно (6.3.11) перед потенциалом $\mathcal{A}(8)_\alpha$ в (6.3.3) будет стоять коэффициент $g_3/\sqrt{3}$, как и должно быть для соответствия с формулой (6.3.1) стандартной теории.

Очевидно, что в плотности лагранжиана свободных полей A_α , $\mathcal{A}(3)_\alpha$ и $\mathcal{A}(8)_\alpha$ отсутствуют массовые слагаемые. Хиггсовского скалярного поля нет, и им неоткуда появиться. Это согласуется с представлениями стандартной теории, в которой массы покоя глюонов равны нулю.

Сопоставим полученные результаты с соответствующими выражениями из 7-мерной модели гравито-электро-слабых взаимодействий. Из сравнения формул для A_α из (6.3.12) и (5.5.9) находим, что они совпадают, если в гл. 5 положить $\lambda^5 = \sigma^6 = \omega^7$. Потенциал глюона $\mathcal{A}(3)_\alpha$ соответствует потенциалу векторного бозона $Z(2)_\alpha$, более того, как видно из формул (6.3.12) и (5.6.7), они совпадают, если $\lambda^5 = \sigma^6$. Аналогично потенциал глюона $\mathcal{A}(8)_\alpha$ совпадает с $Z(1)_\alpha$ при $\lambda^5 = \sigma^6 = \omega^7$. Очевидно также соответствие зарядов Q_3 и Q_2 , введенных в этой и в предыдущей главах. Заряд Q_8 соответствует проекции изотопического спина T_3 и совпадает с выражением $3(T_3 - Q \sin^2 \theta_7)$ в формуле (5.6.11), если в последней положить $\lambda^5 = \sigma^6 = \omega^7$. Действительно, из (5.6.9) тогда имеем $\sin \theta_7 = \sqrt{2/3}$ и

$$T_3 - Q \sin^2 \theta_7 = \frac{1}{3} (\epsilon_5 + \epsilon_6) - \frac{(\epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7)}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} (\epsilon_5 + \epsilon_6 - 2\epsilon_7).$$

Особо следует обсудить соотношение величин электрического заряда e , получающихся в этих двух моделях. После подстановки (6.3.11) в (6.3.3) находим, учитывая (6.3.13),

$$\tilde{e} = \frac{2\sqrt{3k}}{c^2} (\hbar c) \alpha \tilde{\lambda}^5 = \sqrt{6} g_3. \quad (6.3.14)$$

Эта величина не совпадает с электрическим зарядом e из (5.6.4), т. е. в такой модели следует говорить о «сильном элект-

ромагнитном взаимодействии», которое при переходе к электро-слабым взаимодействиям неким образом экранируется. Последнее выражается в переходе от значений $\lambda^5 = \sigma^6 = \omega^7$ к иным значениям составляющих метрики $\lambda^5, \sigma^6, \omega^7$, которые и определяют наблюдаемое значение e по формуле (5.6.4).

§ 6.4. Кручение и «заряженные» глюоны

Глюоны, содержащие указанные в (6.2.4) зависимости от дополнительных координат (в этом смысле «заряженные»), будем описывать посредством кручения. Для компонент кручения справедливы формулы (5.7.1)–(5.7.4), где проекторы \tilde{g}_α^N и составляющие триады имеют иные значения, указанные выше.

Первоочередной задачей является конкретное представление компонент $S(65)_\alpha, S(75)_\alpha$ и $S(76)_\alpha$ через 6 глюонных потенциалов. При ее решении будем руководствоваться следующими двумя основными соображениями. Во-первых, взаимодействие прарковов с глюонами должно быть определено в согласии с соответствующими 6 недиагональными матрицами Гелл-Манна из (6.1.3). Во-вторых, будем стремиться согласовать содержание данной главы с предыдущей. Напомним, что в гл. 5 4-компонентные части полного спинора описывали: $\Psi(1)$ — верхние частицы, а $\Psi(2)$ — нижние частицы. Как уже отмечалось, сильные взаимодействия не зависят от ароматов, т. е. должна выполняться эквивалентность в описании взаимодействия с глюонами как верхних частиц между собой, нижних частиц между собой, так и между верхними и нижними частицами.

Воспользуемся формулой (5.9.6), описывающей в общем случае 7-мерной модели взаимодействие спинорных частиц с кручением. Ограничимся сначала ее частью для левых спиноров, раскрыв явный вид матриц Паули:

$$L_{FS} = -\frac{3}{4} \sqrt{\tilde{G}} (\hbar c) \left\{ (\bar{\Psi}_L(1), \bar{\Psi}_L(2)) \left[S_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - S(65)_\alpha \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + S(75)_\alpha \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + S(76)_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \gamma^\alpha \begin{pmatrix} \Psi_L(1) \\ \Psi_L(2) \end{pmatrix} \right\}. \quad (6.4.1)$$

Отсюда видно, что компоненты S_α и $S(65)_\alpha$ описывают взаимодействие верхних частиц с верхними и нижних частиц с нижними, тогда как пара компонент $S(75)_\alpha$ и $S(76)_\alpha$ описывает взаимодействие верхних частиц с нижними. Это означает, что эти пары компонент кручения в отдельности должны включать в себя все 6 видов глюонов.

Отдельно рассмотрим вклад первой пары: S_α и $S(65)_\alpha$. Подставляя в (6.4.1) формулы (6.2.2) и (6.2.3), находим интересующую нас часть гиперплотности лагранжиана

$$-\frac{3}{4} \sqrt{\tilde{G}} (\hbar c) \left\{ [S_\alpha (a_{11}^* a_{12} + a_{21}^* a_{22}) - S(65)_\alpha (a_{11}^* a_{12} - a_{21}^* a_{22})] \times \bar{q}_{1L} \gamma^\alpha q_{2L} \exp(-i\alpha x^5 + i\beta x^6) + [S_\alpha (a_{11}^* a_{13} + a_{21}^* a_{23}) - S(65)_\alpha (a_{11}^* a_{13} - a_{21}^* a_{23})] \times \bar{q}_{1L} \gamma^\alpha q_{3L} \exp(-i\alpha x^5 + i\omega x^7) + [S_\alpha (a_{12}^* a_{13} + a_{22}^* a_{23}) - S(65)_\alpha (a_{12}^* a_{13} - a_{22}^* a_{23})] \times \bar{q}_{2L} \gamma^\alpha q_{3L} \exp(-i\beta x^6 + i\omega x^7) + (\text{к. с.}) \right\}. \quad (6.4.2)$$

В согласии с определением матриц Гелл-Манна в хромодинамике взаимодействие с шестью глюонами отдельно для верхних и нижних частиц описывается формулой

$$(g_3/2) \left[\bar{q}_{1L} \gamma^\alpha q_{2L} (\mathcal{A}(1)_\alpha - i\mathcal{A}(2)_\alpha) + \bar{q}_{1L} \gamma^\alpha q_{3L} (\mathcal{A}(4)_\alpha - i\mathcal{A}(5)_\alpha) + \bar{q}_{2L} \gamma^\alpha q_{3L} (\mathcal{A}(6)_\alpha - i\mathcal{A}(7)_\alpha) + (\text{к. с.}) \right]. \quad (6.4.3)$$

Из сопоставления (6.4.2) с (6.4.3) следует, что S_α должно иметь вид

$$S_\alpha = 2/3 g_3 \left\{ (\mathcal{A}(1)_\alpha - i\mathcal{A}(2)_\alpha) \exp(i\alpha x^5 - i\beta x^6) + (\mathcal{A}(4)_\alpha - i\mathcal{A}(5)_\alpha) \exp(i\alpha x^5 - i\omega x^7) + (\mathcal{A}(6)_\alpha - i\mathcal{A}(7)_\alpha) \exp(i\beta x^6 - i\omega x^7) + (\text{к. с.}) \right\}. \quad (6.4.4)$$

Компоненту $S(65)_\alpha$ выберем пропорциональной S_α . Из приведенных формул следуют условия на коэффициенты a_{1i} и a_{2i} :

$$a_{11}^* a_{12} = a_{21}^* a_{22} = 1, \quad a_{11}^* a_{13} = a_{21}^* a_{23} = 1, \quad a_{12}^* a_{13} = a_{22}^* a_{23} = 1. \quad (6.4.5)$$

Вклад от $S(65)_\alpha$ сокращается.

Аналогично для вклада компонент $S(75)_\alpha$ и $S(76)_\alpha$ имеем

$$-\frac{3}{4} \sqrt{\tilde{G}} (\hbar c) \left\{ [iS(75)_\alpha (a_{11}^* a_{22} - a_{21}^* a_{12}) + S(76)_\alpha (a_{11}^* a_{22} + a_{21}^* a_{12})] \times \bar{q}_{1L} \gamma^\alpha q_{2L} \exp(-i\alpha x^5 + i\beta x^6) + [iS(75)_\alpha (a_{11}^* a_{23} - a_{21}^* a_{13}) + S(76)_\alpha (a_{11}^* a_{23} + a_{21}^* a_{13})] \times \bar{q}_{1L} \gamma^\alpha q_{3L} \exp(-i\alpha x^5 + i\omega x^7) + [iS(75)_\alpha (a_{12}^* a_{23} - a_{22}^* a_{13}) + S(76)_\alpha (a_{12}^* a_{23} + a_{22}^* a_{13})] \times \bar{q}_{2L} \gamma^\alpha q_{3L} \exp(-i\beta x^6 + i\omega x^7) + (\text{к. с.}) \right\}. \quad (6.4.6)$$

Сопоставляя это выражение со стандартным (6.4.3), можно установить подходящее представление компонент $S(75)_\alpha$ и $S(76)_\alpha$ через потенциалы глюонов. Достаточно положить

$$S(75)_\alpha = S(76)_\alpha = -(g_3/3) \{ (\mathcal{A}(1)_\alpha - i\mathcal{A}(2)_\alpha) \exp(i\alpha x^5 - i\beta x^6) + (\mathcal{A}(4)_\alpha - i\mathcal{A}(5)_\alpha) \exp(i\alpha x^5 - i\omega x^7) + (\mathcal{A}(6)_\alpha - i\mathcal{A}(7)_\alpha) \exp(i\beta x^6 - i\omega x^7) + (\text{к. с}) \}. \quad (6.4.7)$$

Тогда получаем условия на коэффициенты a_{1i} и a_{2i} :

$$a_{11}^* a_{22} - a_{21}^* a_{12} = a_{11}^* a_{23} - a_{21}^* a_{13} = a_{12}^* a_{23} - a_{22}^* a_{13} = -i, \quad (6.4.8)$$

$$a_{11}^* a_{22} + a_{21}^* a_{12} = a_{11}^* a_{23} + a_{21}^* a_{13} = a_{12}^* a_{23} + a_{22}^* a_{13} = 1.$$

Для правых компонент спиноров предполагается та же самая зависимость от дополнительных координат (6.2.4), что и для левых, следовательно, они также взаимодействуют с кручением. Для них имеет место формула для гиперплотности лагранжиана, аналогичная (6.4.1), с той разницей, что перед компонентами кручения S_α , $S(65)_\alpha$ и $S(75)_\alpha$ изменится знак на противоположный. При прежнем определении компоненты $S(65)_\alpha$ (6.4.4) для коэффициентов b_{1i} и b_{2i} получаются условия, аналогичные (6.4.5). Точно так же при определениях $S(75)_\alpha$ и $S(76)_\alpha$ согласно (6.4.7) имеем условия

$$b_{11}^* b_{22} - b_{21}^* b_{12} = b_{11}^* b_{23} - b_{21}^* b_{13} = b_{12}^* b_{23} - b_{22}^* b_{13} = +i, \quad (6.4.9)$$

$$b_{11}^* b_{22} + b_{21}^* b_{12} = b_{11}^* b_{23} + b_{21}^* b_{13} = b_{12}^* b_{23} + b_{22}^* b_{13} = 1.$$

Эти условия совместны (см. конкретное решение в (6.6.5)).

Приведенные здесь формулы свидетельствуют о полной симметрии взаимодействия с глюонами как левых, так и правых компонент спиноров.

Обратим внимание на то, что 6 матрицам Гелл-Манна $\lambda(1)$, $\lambda(2)$, $\lambda(4)$, $\lambda(5)$, $\lambda(6)$, $\lambda(7)$ — в данной модели соответствуют экспоненциальные выражения

$$\begin{aligned} \phi_{71} &= \exp(i\alpha x^5 - i\beta x^6), \quad \phi_{61} = \exp(-i\alpha x^5 + i\omega x^7), \\ \phi_{51} &= \exp(i\beta x^6 - i\omega x^7). \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

Действительно, сравнивая (6.4.4) и (6.4.7) с определениями (6.1.2) в хромодинамике, находим соответствия

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1)_\alpha &\rightarrow \phi_{71} \rightarrow \lambda(1), \quad \mathcal{A}(2)_\alpha \rightarrow -i\phi_{71} \rightarrow \lambda(2), \\ \mathcal{A}(4)_\alpha &\rightarrow \phi_{61} \rightarrow \lambda(4), \quad \mathcal{A}(5)_\alpha \rightarrow i\phi_{61} \rightarrow \lambda(5), \\ \mathcal{A}(6)_\alpha &\rightarrow \phi_{51} \rightarrow \lambda(6), \quad \mathcal{A}(7)_\alpha \rightarrow -i\phi_{51} \rightarrow \lambda(7). \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

очевидные соотношения между экспоненциальными выражениями

$$\phi_{71}\phi_{61} = \phi_{51}^*; \quad \phi_{71}\phi_{51} = \phi_{61}^*; \quad \phi_{61}\phi_{51} = \phi_{71}^* \quad (6.4.12)$$

соответствуют коммутаторам $[\lambda(\alpha), \lambda(\beta)]$ — рассматриваемых здесь 6 матриц Гелл-Манна из (6.1.4).

§ 6.5. Гиперплотность лагранжиана глюонных полей

Гиперплотность лагранжиана глюонов определяется, во-первых, метрической частью, обсужденной в § 6.3, и, во-вторых, вкладом кручения, которые определяются формулой, аналогичной (5.7.5):

$$\begin{aligned} L_S &= -(3/2\kappa) \sqrt{7\tilde{G}} \{ 2S_\alpha S^\alpha + 2S(765) S(765) + \\ &+ [S(5)_{\alpha\beta} S(5)^{\alpha\beta} + S(6)_{\alpha\beta} S(6)^{\alpha\beta} + S(7)_{\alpha\beta} S(7)^{\alpha\beta}] - \\ &- 2[S(65)_\alpha S(65)^\alpha + S(75)_\alpha S(75)^\alpha + S(76)_\alpha S(76)^\alpha] \}. \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

Если отдельных компонент кручения в целом те же, что и в предыдущей главе. Так, третья строка в (6.5.1) соответствует массовым вкладам. После усреднения по дополнительным координатам из нее получается выражение

$$\frac{4}{3\kappa} \sqrt{7\tilde{G}} g_3^2 (1 + 2C_{65}^2) \sum_s \mathcal{A}(s)_\alpha \mathcal{A}(s)^\alpha, \quad (6.5.2)$$

где $s=1, 2, 4, 5, 6, 7$; C_{65} — коэффициент в ранее постулированном соотношении

$$S(65)_\alpha = C_{65} S_\alpha. \quad (6.5.3)$$

Соответствующие им массы, порядка планковских, как и в гл. 5, компенсируются компонентой S_α , определенной в (6.4.4). Ее вклад в плотность лагранжиана

$$-\frac{18}{3\kappa} \sqrt{7\tilde{G}} g_3^2 \sum_s \mathcal{A}(s)_\alpha \mathcal{A}(s)^\alpha. \quad (6.5.4)$$

зная, что в хромодинамике массы всех глюонов равны нулю, из уравнения (6.5.2) и (6.5.4) находим $C_{65} = 1/\sqrt{2}$.

Компоненту $S(765)$ следует выбрать постоянной

$$S(765) = a = \text{const}. \quad (6.5.5)$$

она дает вклад в космологическую постоянную. Поскольку ре-

зультурующее значение $\Lambda_{\text{эф}}$ с высокой степенью точности равно нулю, из (6.5.5), (6.5.1) и (6.2.1) вытекает соотношение

$$\Lambda_{\text{эф}} = \Lambda - 12a_1 = 0. \quad (6.5.6)$$

Динамические и нелинейные слагаемые для глюонных полей, соответствующие квадрату (6.1.5), получаются из тензорных компонент кручения $S(5)_{\alpha\beta}$, $S(6)_{\alpha\beta}$ и $S(7)_{\alpha\beta}$. При их записи следует иметь в виду соответствия между матрицами Гелл-Манна и экспонентами (6.4.11). Определению матричных напряженностей $F_{\mu\nu}$ из (6.1.5) соответствует задание тензорных компонент кручения в виде динамических частей типа

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\mathcal{A}(1)_\beta - i\mathcal{A}(2)_\beta) - \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\mathcal{A}(1)_\alpha - i\mathcal{A}(2)_\alpha) \right\} \exp(i\alpha x^5 - i\beta x^6)$$

в совокупности с нелинейными антисимметричными комбинациями из глюонных потенциалов с такими же экспоненциальными множителями типа

$$(g_3/4) [(\mathcal{A}(4)_\alpha - i\mathcal{A}(5)_\alpha), (\mathcal{A}(6)_\beta - i\mathcal{A}(7)_\beta)] \exp(i\alpha x^5 - i\beta x^6).$$

§ 6.6. Массы покоя пракварков

Отдавая себе отчет в ограниченности рассматриваемой здесь классической модели сильных взаимодействий, тем не менее обсудим возможности, предоставляемые этой моделью, для введения масс пракварков. Прежде всего следует отметить, что вследствие определения Ψ -функции (6.2.3) теряют силу соображения, изложенные в § 5.11, т. е. возможны массовые вклады двух видов:

1) вклады порядка планковских за счет дифференцирования Ψ -функций по координатам x^5 , x^6 , x^7 (причем следует подчеркнуть, что в отличие от предыдущей главы будет существенно и дифференцирование по x^7);

2) вклад от постоянной составляющей a_1 скалярной компоненты кручения $S(765)$ в (6.5.5) (из соображений соответствия с содержанием предыдущей главы и из (6.5.6) следует ожидать этот вклад также порядка планковского).

Введение искусственным образом затравочной массы m_0 как в 4-мерной теории поля, здесь обсуждать не будем.

Выпишем соответствующую названным вкладам часть гиперплотности лагранжиана

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \sqrt{7G} (\hbar c) \left\{ \tilde{\lambda}^5 \left(\bar{\Psi} \Gamma(5) \frac{\partial \Psi}{\partial x^5} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x^5} \Gamma(5) \Psi \right) + \right. \\ & + \tilde{\sigma}^6 \left(\bar{\Psi} \Gamma(6) \frac{\partial \Psi}{\partial x^6} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x^6} \Gamma(6) \Psi \right) + \tilde{\omega}^7 \left(\bar{\Psi} \Gamma(7) \frac{\partial \Psi}{\partial x^7} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x^7} \Gamma(7) \Psi \right) + 3S(765) \bar{\Psi} \Gamma(7) \Gamma(6) \Gamma(5) \Psi \right\}. \end{aligned}$$

Далее следует использовать представление Γ -матриц, определенные Ψ -функций (6.2.3) и формулы (4.7.3) для записи комбинаций из левых и правых компонент фермионов. Из определения зависимости пракварков от дополнительных координат (6.2.2) сразу же следует, что дифференцирование по x^5 в (6.6.1) дает вклад в массу только пракварка q_1 , дифференцирование по x^6 — в массу только пракварка q_2 и дифференцирование по x^7 — в массу пракварка q_3 . После усреднений по дополнительным координатам получаем массовые вклады в плотности лагранжианов соответственно для трех цветов пракварков:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(1)_M &= \frac{1}{2} (\hbar c) \bar{q}_{1L} q_{1R} \left[i\tilde{\lambda}^5 \alpha (a_{11}^* b_{11} + a_{21}^* b_{21}) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} iS(765) (a_{11}^* b_{21} + a_{21}^* b_{11}) \right] + (\text{к. с.}), \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(2)_M &= \frac{1}{2} (\hbar c) \bar{q}_{2L} q_{2R} \left[\tilde{\sigma}^6 \beta (a_{12}^* b_{12} - a_{22}^* b_{22}) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} iS(765) (a_{12}^* b_{22} + a_{22}^* b_{12}) \right] + (\text{к. с.}), \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(3)_M &= \frac{1}{2} (\hbar c) \bar{q}_{3L} q_{3R} \left[\tilde{\omega}^7 \omega (a_{13}^* b_{23} - a_{23}^* b_{13}) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} iS(765) (a_{13}^* b_{23} + a_{23}^* b_{13}) \right] + (\text{к. с.}), \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

де по-прежнему следует полагать $\alpha = \beta = \omega$; $|\tilde{\lambda}^5| = |\tilde{\sigma}^6| = |\tilde{\omega}^7|$. Выписанные в § 6.4 условия на коэффициенты a_{1i} , a_{2i} , b_{1i} и b_{2i} (6.4.5), (6.4.8), (6.4.9) можно удовлетворить, выбирая их в виде

$$a_{11} = a_{12} = a_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i), \quad a_{21} = a_{22} = a_{23} = 1, \quad (6.6.5)$$

$$b_{11} = b_{12} = b_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i - 1), \quad b_{21} = b_{22} = b_{23} = 1.$$

Подставляя (6.6.5) в (6.6.2)–(6.6.4), соответственно находим для выражений в квадратных скобках, определяющих значения масс

$$\begin{aligned} & \frac{1+i}{\sqrt{2}} (\sqrt{2} \alpha \tilde{\lambda}^5 - 3a_1), \quad \frac{1+i}{\sqrt{2}} (-\sqrt{2} \beta \tilde{\sigma}^6 - 3a_1), \\ & \frac{1+i}{\sqrt{2}} (0 - 3a_1). \end{aligned} \quad (6.6.6)$$

Отсюда видно, что, полагая вклад от кручения $3a_1$ близким по модулю величине $\sqrt{2} \alpha \tilde{\lambda}^5$, можно для q_1 перенормировать планковские вклады до любого реалистического значения, на-

пример, до масс блоковых кварков $\sim 300 \text{ МэВ}$. Более того, выбирая $\alpha\tilde{\lambda}^5 = -\beta\tilde{\sigma}^6$, можно перенормировать и массу пра-кварка q_2 . Оставшееся значение массы пра-кварка q_3 при выбранных коэффициентах (6.6.5) имеет порядок планковской массы.

§ 6.7. Обсуждение результатов

Исходя из изложенного в этой главе можно утверждать, что с помощью сформулированных в этой книге методов удастся построить 7-мерную геометрическую модель, содержащую в себе наиболее существенные элементы хромодинамики. Еще раз подчеркнем характерные черты этой модели:

1. Принципиально важным является одинаковое определение цвета кварков как в 7-мерной модели гравитационно-электро-слабых, так и в 7-мерной модели гравитационно-электро-сильных взаимодействий. Это может служить основой для объединения всех четырех взаимодействий именно в рамках 7 измерений.

2. Примечателен способ описания глюонов. Оказался применимым метод, использованный в 6- и 7-мерных моделях гравитационно-слабых взаимодействий, — разделение единого (с позиции калибровочного подхода) комплекса векторных полей на две части: метрическую и обязанную кручению. Критерием такого разделения является независимость или зависимость переносчиков взаимодействий от дополнительных координат. На языке сопутствующих глюонам матриц Гелл-Манна это означает диагональность или недиагональность соответствующих матриц. При этом два глюона метрического происхождения $\mathcal{A}(3)_\alpha$ и $\mathcal{A}(8)_\alpha$ соответствуют двум Z-бозонам из гл. 5. Шесть оставшихся глюонов описываются компонентами кручения аналогично векторам $A(i)_\alpha$ (W-бозонам) в гл. 5. Это также является немаловажным обстоятельством для обсуждения проблемы объединения двух 7-мерных моделей.

3. Электромагнитное поле возникает в обеих 7-мерных моделях совершенно идентичным образом. Определяющие его комбинации из метрической триады отличаются только значениями диагональных составляющих метрики: λ^5 , σ^6 , ω^7 .

4. Диагональные составляющие 7-метрики определяют как значения углов типа Вайнберга, так и константы взаимодействия: e , g_1 , g_2 (в модели гравитационно-слабых взаимодействий) и g_3 (в модели с сильным взаимодействием). Углы типа Вайнберга, вообще говоря, имеются и в рассмотренной в этой главе модели. Они характеризуются относительными значениями $\tilde{\lambda}^5$, $\tilde{\sigma}^6$, $\tilde{\omega}^7$, и вследствие соотношения $|\tilde{\lambda}^5| = |\tilde{\sigma}^6| = |\tilde{\omega}^7|$ принимают значения $\theta_7 = \arcsin \sqrt{2/3}$ и $\theta_{56} = \pi/4$. Модуль же этих составляющих 7-метрики определяет константу сильных взаимодействий g_3 согласно (6.3.13).

5. Примечательным является то, что в данной 7-мерной модели электрический заряд $\tilde{e} = \sqrt{6}g_3$, т. е. имеет порядок заряда

сильных взаимодействий. В связи с этим заметим, что наблюдаемым значением электрического заряда может быть лишь величина, вычисленная на основе объединенной теории всех взаимодействий.

6. Существенным отличием 7-мерной модели гравитационно-электро-сильных взаимодействий от 6- и 7-мерной моделей в гл. 4 и 5 является отсутствие в ней конформного преобразования и соответствующего ему хиггсовского скалярного поля.

7. Сопоставим способы отождествлений 4-компонентных составляющих 8-компонентного спинора $\Psi(1)$ и $\Psi(2)$ с функциями физических полей, использованные в гл. 5 (см. (5.9.8), (5.9.9)) и в гл. 6 (см. (6.2.3)). Они взаимно дополняют и оправдывают друг друга. Из этих отождествлений в совокупности с определениями кручения через физические поля следует известное в хромодинамике свойство независимости сильных взаимодействий от ароматов.

8. В рассмотренной в этой главе 7-мерной модели левые и правые компоненты спиноров имеют одинаковые гармоники по дополнительным координатам. Это согласуется с использованным в гл. 4 и 5 принципом различия левых и правых компонент частиц на киральные добавки, определяемые гармониками скалярных бозонов. В данной модели нет скалярных бозонов — отсюда и совпадение гармоник, и известная в хромодинамике симметрия между левыми и правыми компонентами. С другой стороны, подобная симметрия приводит к известному еще в 5-мерных теориях факту появления планковских вкладов в массы частиц. В 5-мерной теории это приводило к большим трудностям. В 7-мерной модели это уже не так страшно из-за наличия скалярной компоненты кручения.

По поводу изложенной здесь 7-мерной модели можно высказать ряд критических замечаний. В частности, нельзя забывать об ограниченности классических (неквантовых) методов исследования. Окончательные выводы о значениях масс и зарядов можно надеяться получить лишь в квантовом варианте теории.

Дальнейшая задача состоит в совмещении двух 7-мерных моделей. Ряд соображений о путях ее решения в роли классических (неквантовых) методов исследований высказан в следующей главе.

§ 7.1. Многомерные модели единой теории
с размерностями, большими семи

Мы вплотную подошли к задаче номер один современной теоретической физики — проблеме объединения всех четырех известных взаимодействий. В большом объеме литературы представлено множество точек зрения на решение этой проблемы. Среди них видное место занимают исследования по многомерным единым теориям. Как правило, авторы публикаций исходят из отличных от наших соображений и мыслят решение проблемы в рамках 10, 11, 16 или даже 32 измерений. В этой главе продолжим обсуждение возможностей объединения всех взаимодействий в рамках сформулированных здесь идей и постараемся обходиться как можно меньшим числом измерений.

Имеются два пути дальнейших исследований: а) оставаться в рамках 7 измерений и сосредоточить усилия на совмещении 7-мерных моделей, изложенных в гл. 5 и 6; б) используя опыт построения 7-мерных моделей, попытаться объединить взаимодействия в рамках модели большей размерности.

К обсуждению первого пути мы еще вернемся ниже; в этом параграфе кратко рассмотрим возможности второго пути. Задачу будем понимать следующим образом. Будем полагать, что семь измерений ответственны за проявления гравитационно-слабых взаимодействий, а следующие дополнительные измерения ответственны за сильные взаимодействия. Сразу же возникает вопрос: насколько следует увеличить размерность? Анализ показывает, что 8-мерной теории для этой цели, видимо, недостаточно. В рамках 9 измерений эта программа может быть реализована используемыми здесь методами. Будем полагать, что многообразие 9 измерений обладает сигнатурой (+ — — —; — — —; — — —), и зависимость от координат x^8 и x^9 определяет участие частиц в сильных взаимодействиях.

Следует сразу же отметить, что, встав на этот путь, нужно будет внести ряд изменений в описание частиц, изложенное в предыдущих главах. Так, в гл. 5 в определение гармоник кварков согласно табл. 2 были заложены цветовые метки, которые потом были положены в основу 7-мерной модели гравитационно-сильных взаимодействий. Теперь же эти метки следует включить непосредственно в правило задания ароматов (поколений) частиц. Наиболее просто это можно было бы сделать, изменив знаки у всех ароматических меток в таблице и при этом перевернув их: гармоники с обратным знаком нижних

кварков станут гармониками верхних, а гармоники с обратным знаком верхних — гармониками нижних.

Не будем здесь останавливаться на процедуре 1+1+1+1+1+4-расщепления 9-мерного многообразия. Она производится аналогично предыдущим случаям. Опуская все тонкости, связанные с конформными преобразованиями, сосредоточимся на факторах, обязанных восьмой и девятой координатам. Основными являются две взаимосвязанные задачи: какой должна быть зависимость кварков от x^8 и x^9 , и как описать восемь глюонов? Опираясь на опыт

Таблица 5

Частица	ϵ_8	ϵ_9	Q_8	Q_9
q_1	+1	+1	+1	0
q_2	-1	+1	0	-1
q_3	0	-2	-1	+1
$A(1)_\alpha, A(2)_\alpha$	-2	0	-1	-1
$A(4)_\alpha, A(5)_\alpha$	-1	-3	-2	+1
$A(6)_\alpha, A(7)_\alpha$	+1	-3	-1	+2

предыдущих глав, постулируем, что глюоны $A(3)_\alpha$ и $A(8)_\alpha$ описываются метрической частью геометрии, тогда как 6 оставшихся глюонов по-прежнему объяснены кручением.

Начнем с глюонов метрического происхождения. Положим, что $A(3)_\alpha$ определяется 4-мерной частью монады вдоль восьмой координаты, т. е. $A(3)_\alpha \sim g_\alpha^8$, тогда как $A(8)_\alpha$ определяется монадой вдоль девятой координаты, т. е. $A(8)_\alpha \sim g_\alpha^9$. Опираясь на ключевое положение об определенности сильных взаимодействий зависимостью от

x^8 и x^9 , вспомним определение диагональных матриц Гелл-Манна $\lambda(3)$ и $\lambda(8)$, а также формулу (6.3.1) из стандартной теории. Из (6.3.1) сразу же следует вид зависимостей кварков от x^8 и x^9 :

$$q_1 \sim \exp(i\omega_8 x^8 + i\omega_9 x^9), \quad q_2 \simeq \exp(-i\omega_8 x^8 + i\omega_9 x^9), \quad (7.1.1)$$

$$q_3 \sim \exp(0 - 2i\omega_9 x^9),$$

где ω_8 и ω_9 — константы, определяющие зависимости от x^8 и x^9 . Как и ранее, будем полагать $\alpha = \beta = \omega = \omega_8 = \omega_9$. Из гармоник ϵ_8 и ϵ_9 удобно образовать два заряда, аналогичные ранее определенным Q, Q_2 и T_3 :

$$Q_8 = 1/2(\epsilon_8 + \epsilon_9); \quad Q_9 = 1/2(\epsilon_8 - \epsilon_9). \quad (7.1.2)$$

Тогда для кварков в соответствии с (7.1.1) можно записать заряды в виде табл. 5.

Зная выражения для зарядов, можно записать соответствующие им векторные поля метрического происхождения.

Для этого нужно записать 9-мерную удлиненную производную $\partial_\alpha(9)$ и сравнить ее с соответствующей частью из стандартной теории электрослабых и сильных взаимодействий:

$$\begin{aligned}\partial_\alpha(9) &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i\alpha(\varepsilon_5 g_\alpha^5 + \varepsilon_6 g_\alpha^6 + \varepsilon_7 g_\alpha^7) + i\alpha(\varepsilon_8 g_\alpha^8 + \varepsilon_9 g_\alpha^9) = \\ &= \partial_\alpha(7) + i\alpha(\varepsilon_8 \tilde{\mathcal{A}}(3)_\alpha + \varepsilon_9 \tilde{\mathcal{A}}(8)_\alpha) = \\ &= \partial_\alpha(7) + i\alpha Q_8 \tilde{B}(8)_\alpha + i\alpha Q_9 \tilde{B}(9)_\alpha,\end{aligned}\quad (7.1.3)$$

где $\partial_\alpha(7)$ — часть удлиненной производной, соответствующая 7-мерной модели грави-электро-слабых взаимодействий (5.6.3), тильды над величинами означают их соответствие стандартным с точностью до размерного множителя, а векторы $\tilde{B}(8)_\alpha$ и $\tilde{B}(9)_\alpha$ определяются в виде

$$\tilde{B}(8)_\alpha = g_\alpha^8 + g_\alpha^9, \quad \tilde{B}(9)_\alpha = g_\alpha^8 - g_\alpha^9. \quad (7.1.4)$$

Полагая $g_\alpha^8 = l(8)_\alpha l(8)^8$ и $g_\alpha^9 = l(9)_\alpha l(9)^9$, где $l(8)_\alpha$ и $l(9)_\alpha$ — аналоги величин λ_α , σ_α , ω_α , а $l(8)^8$ и $l(9)^9$ — аналоги λ^5 , σ^6 , ω^7 , легко видеть, что диагональные составляющие метрики $l(8)^8$ и $l(9)^9$ вместе со значением α определяют константу сильных взаимодействий g_3 .

Легко убедиться, что из метрической части скалярной кривизны следует динамическая часть вида $F(3)_{\alpha\beta} F(3)^{\alpha\beta}$ и $F(8)_{\alpha\beta} F(8)^{\alpha\beta}$ для глюонов $\mathcal{A}(3)_\alpha$ и $\mathcal{A}(8)_\alpha$.

«Заряженные» шесть глюонов описываются кручением, они зависят от координат x^8 и x^9 , причем эта зависимость однозначно определяется из табл. 5. Из представления оставшихся шести матриц Гелл-Манна по-прежнему следует, что эти глюоны во всех соотношениях выступают парами и для них имеют место следующие зависимости от x^8 и x^9 :

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}(1)_\alpha - i\mathcal{A}(2)_\alpha) &\sim \exp(-2i\omega_8 x^8), \\ (\mathcal{A}(4)_\alpha - i\mathcal{A}(5)_\alpha) &\sim \exp(-i\omega_8 x^8 - 3i\omega_9 x^9), \\ (\mathcal{A}(6)_\alpha - i\mathcal{A}(7)_\alpha) &\sim \exp(i\omega_8 x^8 - 3i\omega_9 x^9).\end{aligned}\quad (7.1.5)$$

Используя определения зарядов (7.1.2), их зарядовые свойства можно представить в виде табл. 5.

4-мерных проекций 9-мерного тензора кручения ${}^9S_{NP}^M$ значительно больше, чем нужно для описания динамической части плотности лагранжиана и для перенормировки масс покоя до нулевого значения. Не вдаваясь в подробности, отметим, что в такой 9-мерной модели спинорные функции имеют 16 компонент. Разбивая их на совокупность из четырех 4-компонентных функций, ими можно описать как слабо-, так и сильно-взаимодействующие частицы.

Не закрывая этот путь исследований, выскажем относительно него ряд замечаний.

1. Подобная 9-мерная модель содержит в себе намного больше дополнительных полей (из компонент кручения) и возможностей, чем это необходимо для описания известных на сегодняшний день физических полей.

2. В табл. 5 специально выписаны гармоники и заряды кварков и глюонов в 9-мерной модели. Сравнение их с аналогичными значениями в 7-мерной модели свидетельствует о большей, если можно так выразиться, красоте 7-мерия. Тезис математического изящества теории немаловажен при выборе одного из нескольких предварительных вариантов.

3. 9-мерная модель, обсуждаемая здесь, больше имеет характер механического сложения двух известных теорий, нежели теории, претендующей на вскрытие более глубоких свойств мироздания. Если встать на подобный путь, то ничто не мешает еще более увеличить размерность и ввести новые типы взаимодействий и полей.

4. Всякое увеличение размерности — чрезвычайно серьезный шаг, и прежде чем его сделать, следует убедиться, что исчерпаны все возможности в рамках меньшего числа измерений. Соображения, высказанные в § 6.7 и другие, свидетельствуют о больших возможностях развития теории в рамках 7 измерений.

§ 7.2. О многомерных теориях с несколькими временноподобными координатами

До сих пор мы ограничивались рассмотрением теорий в многообразиях с одной временноподобной координатой x^0 . Однако в ряде публикаций [42, 43, 75] изучались многообразия с двумя и даже большим числом временноподобных координат. Высказывались теоретические соображения в пользу таких теорий. Кратко обсудим это направление.

Наиболее часто приводится довод, основанный на дальнейшем углублении связи между идеями Вейля о конформных преобразованиях и идеями Калуцы увеличения размерности. Имеется в виду наличие 15-параметрической группы конформных преобразований в 4-мерном плоском пространстве-времени. Подчеркивается, что 6-параметрические преобразования Лоренца впервые были найдены как группа преобразований координат, относительно которой инвариантны уравнения Максвелла. И лишь спустя некоторое время было установлено, что пространство и время образуют единое 4-мерное многообразие. Полагается, что в каком-то смысле аналогичная ситуация складывается и сейчас, но для $n > 4$. Уже в течение ряда лет обращается внимание, что основные уравнения физи-

ки (для безмассовых полей) в плоском пространстве-времени инвариантны относительно более широкой, нежели группа Лоренца, 15-параметрической группы конформных преобразований.

Напомним, что эта группа складывается из следующих четырех подгрупп: а) 6-параметрической группы Лоренца: $x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$; б) 4-параметрической группы трансляций: $x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$; в) 1-параметрической группы дилатаций: $x'^{\mu} = \rho x^{\mu}$ и г) нелинейной 4-параметрической группы специальных конформных преобразований (СКП): $x'^{\mu} = (x^{\mu} - c^{\mu} x^2) / (1 - 2c_{\nu} x^{\nu} + c^2 x^2)$, где $x^2 = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$; $c^2 = g_{\mu\nu} c^{\mu} c^{\nu}$.

Было замечено, что все эти разнородные по форме преобразования (вращения и трансляции, линейные и нелинейные) могут быть единообразно записаны в виде линейных преобразований типа группы Лоренца, если перейти к многообразию шести измерений с сигнатурой $(+---+)$. При этом 4-мерному многообразию $\{x^{\mu}\}$ сопоставляются точки, лежащие на изотропном конусе в 6-мерном многообразии ${}^6G_{ab} \tilde{x}^a \tilde{x}^b = 0$. Здесь и далее в этом параграфе латинские индексы a, b, c, d пробегает значения 0, 1, 2, 3, 4, 5; ${}^6G_{ab}$ — 6-мерная плоская метрика. Напомним, что во всех предыдущих главах индекс «4» пропускался. В более ранних исследованиях автора он сохранялся за второй временноподобной координатой.

Указанное соответствие между плоскими 4- и 6-мерными многообразиями послужило отправной точкой для построения ряда вариантов 6-мерных единых теорий, отличающихся от рассмотренных в гл. 4. В этих теориях от однородных координат на конусе переходят ко всему множеству точек 6-мерного многообразия с данной сигнатурой. Далее производится обобщение 6-мерного плоского многообразия на 6-мерное искривленное аналогично переходу от пространства-времени Минковского к пространству-времени общей теории относительности. При этом группа 6-мерных псевдовращений обобщается на группу допустимых 6-мерных координатных преобразований

$$x'^a = x'^a(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5), \quad (7.2.1)$$

как группа Лоренца обобщается на группу допустимых преобразований (1.1.2). Изучался вопрос о возможных следствиях таких теорий и о необходимых ограничениях в них для перехода к известным теориям гравитации и электромагнетизма. Из таких теорий наибольшего внимания заслуживают две серии работ: Павшича [75] и Ингрэхэма [42, 43]. С помощью методов и понятий, введенных в этой книге, рассмотрим некоторые характерные черты подобных теорий. Для наших целей достаточно ограничиться шестью измерениями.

Используем диадный метод (1+1+4-расщепление) в данной сигнатуре. Будут иметь место формулы, аналогичные при-

веденным в § 4.3. Так, метрический тензор представляется в виде

$${}^0G_{ab} = g_{ab} + \zeta_a \zeta_b - \lambda_a \lambda_b, \quad (7.2.2)$$

где ζ_a — 6-вектор вдоль линии x^4 ; для него и других составляющих справедливы соотношения

$$\zeta_a \zeta^a = +1; \lambda_a \lambda^a = -1; \zeta_a \lambda^a = 0; \zeta_a g^{ab} = 0. \quad (7.2.3)$$

Здесь значок «0» над величинами опять подчеркивает тот факт, что используется процедура конформного преобразования. Ограничимся преобразованиями лишь с вещественным конформным фактором ϕ :

$${}^0G_{ab} = \phi^2 G_{ab}; \lambda_a = \phi \lambda_a; \zeta_a = \phi \zeta_a. \quad (7.2.4)$$

В рассматриваемой теории следует использовать калибровку типа хронохориометрической, изложенной в [17], т. е. диада задается в виде

$$\zeta_a^0 = {}^6G_{4a}^0 / \sqrt{{}^6G_{44}^0}; \lambda_a^0 = {}^5G_{5a}^0 / \sqrt{-{}^5G_{55}^0}, \quad (7.2.5)$$

где $A=0, 1, 2, 3, 5$.

Для 6-мерной скалярной кривизны, входящей в гиперплотность лагранжиана, будет справедлива формула типа (4.3.13)

$${}^6R = {}^4R + {}^5F_{\alpha\beta} {}^5F^{\alpha\beta} - {}^4F_{\alpha\beta} {}^4F^{\alpha\beta} + \dots, \quad (7.2.6)$$

где

$${}^5F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g_{\alpha}^a g_{\beta}^b (\lambda_{a,b} - \lambda_{b,a}); \quad {}^4F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g_{\alpha}^a g_{\beta}^b (\zeta_{a,b} - \zeta_{b,a}).$$

Характерным свойством всех теорий с дополнительными временноподобными координатами является отрицательный знак перед соответствующим инвариантом (в данном случае это — ${}^4F_{\alpha\beta} {}^4F^{\alpha\beta}$), т. е. такие поля входят с противоположным знаком в тензор энергии-импульса. Это приводит к серьезным трудностям. Именно по этой причине в теории Калуцы было использовано 5-мерие с дополнительным пространственноподобным измерением, по этой же причине во всех предыдущих главах мы ограничивались только пространственноподобными дополнительными измерениями. Зная это, Павшич и Ингрэхем применяли подобную теорию для описания лишь одного дополнительного — электромагнитного поля, а второе поле исключалось специальным постулатом, что 6-метрика имеет вид

$${}^6G_{ab} = \begin{pmatrix} {}^0G_{AB} & 0 \\ 0 & \zeta_a \zeta_b \end{pmatrix}. \quad (7.2.7)$$

где ${}^5G_{AB}$ — 5-мерная часть, аналогичная рассмотренной в гл. 2.

Другая характерная черта подобных теорий связана с видом уравнений геодезических. Рассмотрим 6-мерное уравнение геодезических

$$\frac{d^2x^a}{dz^2} = - {}^0\Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{dz} \frac{dx^c}{dz}, \quad (7.2.8)$$

где dz — 6-мерный интервал

$$dz^2 = {}^0G_{ab} dx^a dx^b = ds^2 + d\zeta^2 - d\lambda^2, \quad (7.2.9)$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad d\zeta = \zeta_a dx^a; \quad d\lambda = \lambda_a dx^a.$$

Последовательно произведем в этом уравнении 1+1+4-расщепление, конформное преобразование согласно (7.2.4) и используем условие (7.2.7). В итоге получаем систему уравнений [23]:

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} = - \left[1 - \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^2 \right] \Phi_{\nu} u^{\nu} \frac{d\zeta}{ds}, \quad (7.2.10)$$

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2} = - \left[1 - \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^2 \right] \Phi_{\nu} u^{\nu} \frac{d\lambda}{ds}, \quad (7.2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \frac{u^\mu}{1 - (d\lambda/ds)^2} \frac{d\lambda}{ds} \frac{d^2\lambda}{ds^2} = - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} u^{\alpha} u^{\beta} - \\ - \frac{2\sqrt{k}}{c^2} \frac{d\lambda}{ds} F_{\alpha}^{\mu} u^{\alpha} + \\ + \left[1 - \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^2 \right] \left(\Phi^{\mu} - \frac{1}{1 - (d\lambda/ds)^2} \Phi_{\nu} u^{\nu} u^{\mu} \right), \end{aligned} \quad (7.2.12)$$

где компоненты 6-скорости имеют вид

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}; \quad \frac{d\lambda}{ds} = - \frac{dx^5}{ds} + \frac{2\sqrt{k}}{c^2} A_{\mu} u^\mu; \quad \frac{d\zeta}{ds} = \frac{dx^4}{ds};$$

$\Phi_{\nu} = \frac{1}{\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu}$ — вектор напряженности вещественного скалярного поля;

$F_{\nu\mu} = \frac{c^2}{\Phi\sqrt{k}} {}^0F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля.

Из формул (7.2.10) — (7.2.12) следует, что при условии

$$1 - \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^2 = 0, \quad (7.2.13)$$

т. е. когда геодезическая является изотропной (в 6-мерном смысле), две дополнительные компоненты 6-скорости $d\zeta/ds$ и $d\lambda/ds$ становятся постоянными, а в уравнении (7.2.12) исчезают члены, содержащие напряженность скалярного поля. Это уравнение тогда полностью совпадает с уравнением движения заряженной частицы в искривленном пространстве-времени стандартной 4-мерной теории (1.3.5), если положить, как и раньше, $d\lambda/ds = -q/2m\sqrt{k}$, где m — масса рассматриваемой частицы. Соотношение (7.2.13) представляет собой условие на две константы; зная $d\lambda/ds$, можно найти

$$\frac{d\zeta}{ds} = \sqrt{\frac{q^2}{4km^2} - 1}, \quad (7.2.14)$$

т. е. в совокупности две константы $d\lambda/ds$ и $d\zeta/ds$ характеризуют две физические величины: электрический заряд q и массу m .

В связи с изложенным результатом уместно вспомнить исследования по 5-оптике Ю. Б. Румера [85, 87]. Неудача варианта 5-мерной теории Румера была обусловлена, в частности, тем, что в 5-оптике

$$dI^2 = ds^2 - d\lambda^2 = 0 \rightarrow 1 - (d\lambda/ds)^2 = 0, \quad (7.2.15)$$

т. е. пятая компонента 5-скорости $d\lambda/ds$ равна единице, что не позволяло описать электрический заряд частиц. Румер пытался найти выход из этого затруднения путем специфического отождествления дополнительных компонент 5-метрики

$$G_{5\mu} \sim \frac{q}{mc^2} A_{\mu},$$

где q и m — электрический заряд и масса частицы. Но тогда метрика пространственно-временного многообразия оказывалась связанной со свойствами рассматриваемой пробной частицы, т. е. многообразие становилось конфигурационным. Но теория должна описывать не одну частицу, а множество различных частиц, поэтому кроме конфигурационных постулировалось и универсальное пространство-время. Однако, как совместить эти пространства, осталось загадкой (по-видимому, неразрешимой в рамках 5-мерия). В 6-мерной теории с сигнатурой (+---+), как видно из изложенного, подобной проблемы не возникает.

Следует также подчеркнуть, что в 6-оптике исчезает вклад скалярного поля в уравнения движения. Это обстоятельство некоторыми рассматривается как положительное свойство теории, соответствующее постоянству с высокой степенью точности электрического заряда и масс частиц. Если отказаться от условия 6-оптики (7.2.13), то, как и в гл. 3, фундаментальное скалярное поле приводит к переменности электрического заряда и масс частиц.

На изложенные свойства 6-оптики с данной сигнатурой можно смотреть как на еще один способ перенормировки почти планковских значений масс, возникающих в многомерных моделях из-за дифференцирования по x^5, x^6, \dots . Действительно, например, для скалярного негеометрического поля Ψ достаточно выбрать волновую функцию в виде

$$\Psi = \psi(x^\mu) \exp\left(\frac{iec}{2\sqrt{k}\hbar} x^5 + \frac{igc}{2\sqrt{k}\hbar} x^4\right), \quad (7.2.16)$$

где g — новый заряд, соответствующий временноподобному измерению. Тогда 6-мерное волновое уравнение

$${}^6G^{ab}\nabla_a\nabla_b\Psi=0 \quad (7.2.17)$$

с упрощенным видом метрики (7.2.7) представляется в форме

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu^+\nabla_\nu^+\Psi - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_5^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_4^2} = 0, \quad (7.2.18)$$

где ∇_μ^+ имеет прежний вид (2.5.11). Последние два слагаемых при (7.2.16) приводят к эффективной массе покоя

$$m = \frac{1}{2\sqrt{k}}\sqrt{e^2 - g^2}. \quad (7.2.19)$$

Этот механизм перенормировки масс можно было бы продемонстрировать и на примере спинорного поля [22].

Резюмируя изложенное, можно утверждать:

1. Многомерные теории с несколькими временноподобными координатами непригодны для описания дополнительных физических полей вследствие неверного знака в тензоре энергии-импульса у полей обязанных временноподобным монадам.

2. Отмеченную выше привлекательность теорий с двумя временноподобными направлениями, видимо, следует расценивать с той точки зрения, что в них перенормировка планковских масс имитирует перенормировки, осуществляемые какими-либо другими способами, например, механизмом типа хиггсовского или постоянной составляющей кручения.

3. Не исключено, что при дальнейшем развитии теории понадобятся новые механизмы переопределения больших масс. В качестве такового может оказаться пригодным и использование теорий со вторым временем. Имея в виду изложенное в гл. 5 и 6, это соответствовало бы переходу от семи к восьми измерениям. Во всех подобных случаях такой переход хотелось бы воспринимать не как вычислительный формальный прием, а как шаг, связанный с открытием новых сторон реального мира. Введение второго времени ведет к слишком далеко идущим следствиям во всем нашем миропонимании, поэтому такой шаг должен быть достаточно веско обоснован.

§ 7.3. Роль геометрических понятий и идей в объединении физических взаимодействий

Завершая изложение очерченного здесь круга представлений многомерии, следует еще раз подчеркнуть, что наш подход зиждется на классические идеи Калуцы о физических взаимодействиях как проявлениях дополнительных измерений (аффинного) пространственно-временного многообразия. Для описания известных на сегодняшний день видов физических взаимодействий и их основных свойств потребовалось обобщить 4-мерную теорию Калуцы в ряде направлений. Во-первых, понадобились многообразия еще большей размерности — шести и семи измерений. Во-вторых, для описания хиггсовских скалярных полей были использованы идеи Вейля о конформных преобразованиях. В-третьих, вместо условия цилиндричности по дополнительной координате существенно была использована зависимость физических и части геометрических величин от дополнительных координат. В-четвертых, для описания заряженных векторных полей оказалось необходимым применить многообразия с кручением. Только так удастся удовлетворительным образом ввести в геометрические величины нужную зависимость от x^5, x^6, x^7 при условии цилиндричности G_{MN} .

Приведенная здесь геометрическая интерпретация известных физических полей и понятий, вплоть до электрического заряда, проекции изотопического спина и т. д., на наш взгляд, соответствует программе геометризации физики, которую выдвинули крупнейшие физики прошлого и которую развивают многие известные теоретики в настоящее время.

Вместе с тем характерной чертой нашего подхода является убежденность в том, что классические пространственно-временные представления вместе со всеми геометрическими понятиями не являются первичными, из которых должно следовать все остальное. Изложенный выше геометрический подход, видимо, отражает важный, исторически обусловленный, но временный этап в развитии наших представлений о физической картине мира. На его смену идет новый этап — поиск более первичных представлений, из которых бы следовали классические пространственно-временные понятия. Но нельзя вступать в него, отказавшись сразу от всего предыдущего. Наиболее разумно продвигаться, придерживаясь на первых этапах классических геометрических представлений как некой путеводной нити. Но при этом следует считать не только возможным, но и нужным отрываться от этой нити всякий раз, когда открываются другие способы более полного описания физической реальности. Именно в этом смысле нужно понимать ряд приемов, использованных в этой книге.

Одним из них является использование комплексного конформного фактора. Классическая геометрия сформулирована в рамках множества вещественных величин: координат, мет-

рики, кривизны, кручения и т. д. Казалось бы, комплексный конформный фактор противоречит этому или должен диктовать радикальную переработку всей геометрии в комплексных величинах. Здесь этого не делается. Комплексный конформный фактор оправдан результатом — получаются скалярные поля, соответствующие хиггсовским в стандартной теории (вещественный конформный фактор соответствовал бы неверному знаку в тензоре энергии-импульса скалярных полей). Кроме того, проделанное ничему не противоречит, так как стандартный геометрический лагранжиан получается лишь после выделения вещественной части и усреднения по дополнительным координатам.

Другим примером является отказ от применения вариационного принципа к гиперплотности лагранжиана, зависящей от дополнительных координат. Применение вариационных принципов за пределами стандартной области их использования по крайней мере должно рассматриваться как дополнительный постулат. Аналогичное можно сказать о постулатах зависимости спиноров и геометрических величин в гиперплотности лагранжиана от дополнительных координат.

Из изложенного следует подход к ряду проблем, диаметрально противоположный подходу многих авторов. Так, множество работ посвящено попыткам обоснования так называемой компактификации (свертки, замыкания) многомерного пространства-времени по дополнительным координатам (на ранних стадиях Вселенной?). В основу этих работ заложены представления о доминантности (первичности) свойств четырех классических пространственно-временных измерений. Отсюда и постановка вопроса: как и когда произошло отклонение свойств дополнительных измерений (координат) от оставшихся незамкнутыми четырех классических? А, может быть, более правомочно подходить к данной проблеме с противоположной стороны: считать свойства классического пространства-времени вторичными, т. е. считать нужным обосновывать разомкнутость по четырем классическим измерениям?

Аналогичное можно сказать относительно дискуссии о том, противоречат или нет уравнения поля те или иные постулаты об экспоненциальной зависимости величин от дополнительных координат. При этом обычно полагают, что уже имеются многомерные уравнения поля типа эйнштейновских. Как уже подчеркивалось, в нашем подходе вариационные принципы применяются только на 4-мерном уровне, следовательно, и 4-мерные уравнения поля возникают только после $1+1+1+1+4$ -расщепления и усреднения по дополнительным координатам. В результате снимаются вопросы о совместности, но вместо них ставятся проблемы поиска обоснованных принципов выбора экспоненциальных зависимостей в рамках многомерного многообразия вместе с проблемами обоснования классического 4-мерия.

Можно указать и ряд других задач, допускающих альтернативные подходы. Видимо, складывающаяся здесь ситуация схожа с теми, которые возникали при созревании каждой очередной радикальной ломки представлений. Так было при становлении квантовой механики, когда на квантованные орбиты электронов в атомах можно было смотреть с позиций классической физики и постулатов зарождавшейся квантовой теории. Так было и с многочисленными парадоксами при становлении теории относительности.

Другой характерной чертой нашего подхода является не противопоставление геометрического подхода более общепринятому калибровочному, а включение всех его результатов в геометрическую модель. Данные калибровочного подхода служат в качестве условий, позволяющих сузить и конкретизировать более широкие геометрические возможности до рамок, соответствующих физической теории. Видимо, можно утверждать, что геометрический и калибровочный подходы следует рассматривать как две стороны одной медали. Уже это очень важно. Известно, что взгляды на одни и те же явления и факты с разных точек зрения неоднократно являлись плодотворными.

Однако нам представляется, что значение многомерного геометрического подхода выходит далеко за рамки методического интереса. Это не просто переформулировка теории с одного языка на другой. Главное состоит в том, что рассмотренный здесь подход связывает задачу объединения физических взаимодействий с фундаментальной проблемой теоретического обоснования 4-мерия наблюдаемого классического пространства-времени.

Скорее всего в итоге разносторонних исследований данного круга проблем будет найдена некая третья теоретическая схема (теория), которая будет проецироваться на групповые представления как известная калибровочная теория, а на геометрические — видимо, как нечто близкое к изложенному здесь. Вопрос состоит в том, насколько плодотворным окажется каждый из известных сейчас подходов на пути к искомой теории?

Наконец, следует еще раз подчеркнуть классический (не вторично-квантованный) характер использованных здесь методов, отсюда следует ограниченность рассмотренных многомерных моделей. Искомая теория Великого объединения, несомненно, должна быть квантовой. Тем не менее многие аспекты классической и квантовой теории находятся в тесной связи друг с другом, и прояснение ряда вопросов на классическом уровне может способствовать более успешному решению их в квантовом варианте.

Одним из уроков данного классического подхода может служить отношение к расходимостям в квантовой теории. При переходе от гиперплотности лагранжиана многомерной теории

к 4-мерной плотности лагранжиана проводилось усреднение по малым периодам зависимостей величин от дополнительных координат. Полагалось, что стандартные уравнения имеют смысл лишь для масштабов длин, существенно больших периодов зависимостей от x^5, x^6, x^7 . В обычной же теории поля основные расходимости возникают при интегрировании матричных элементов, вплоть до нулевых значений пространственно-временных координат. Это вступает в противоречие со сделанными допущениями в многомерной теории. В классическом варианте многомерной теории расходимости не возникали. Вместо них везде появлялись массы порядка планковских. Перенормировка понималась как переход от большого, но конечного планковского значения массы к меньшим значениям. Можно предположить, что в квантовом варианте теории удастся реализовать нечто аналогичное.

§ 7.4. Некоторые гипотезы и прогнозы

В настоящее время несомненен интерес к многомерным единым теориям, а следовательно, естественна потребность в новых идеях и гипотезах, составляющих самые предварительные этапы последующих исследований. Рассчитывая на снисхождение читателя, автор считает уместным завершить эту книгу рядом таких гипотез относительно возможностей объединения моделей гравитационно-электро-слабых и гравитационно-электро-сильных взаимодействий в рамках семи измерений. Уже отмечалась близость разобранных моделей во многих отношениях. Так, в обеих имеются практически совпадающие комбинации метрического происхождения, соответствующие потенциалу электромагнитного поля. Оставшиеся комбинации также очень близки и соответствуют в одной модели Z-бозонам, в другой — глюонам. Несомненна аналогия в ролях кручения.

Обращает на себя внимание то, что гармоники скалярных бозонов ϕ_5, ϕ_6, ϕ_7 в модели гравитационно-электро-слабых взаимодействий ровно в два раза больше гармоник недиагональных глюонов в гл. 6. В связи с этим, может быть, следует предположить, что хиггсовские скалярные поля не являются первичными, а обусловлены нелинейными взаимодействиями между глюонами? Действительно, из пар глюонов можно образовать различные комбинации, в том числе свернутые по векторным индексам и удвоенные по гармоникам в согласии с (6.4.13):

$$\begin{aligned} \phi_5 \exp(2i\beta x^6 - 2i\omega x^7) &\rightarrow (c_{51} \mathcal{A}(6)_\alpha \mathcal{A}(6)^\alpha + c_{52} \mathcal{A}(7)_\alpha \mathcal{A}(7)^\alpha + \\ &+ c_{53} \mathcal{A}(6)_\alpha \mathcal{A}(7)^\alpha) \exp(2i\beta x^6 - 2i\omega x^7), \\ \phi_6 \exp(-2i\alpha x^5 + 2i\omega x^7) &\rightarrow (c_{61} \mathcal{A}(4)_\alpha \mathcal{A}(4)^\alpha + c_{62} \mathcal{A}(5)_\alpha \mathcal{A}(5)^\alpha + \\ &+ c_{63} \mathcal{A}(4)_\alpha \mathcal{A}(5)^\alpha) \exp(-2i\alpha x^5 + 2i\omega x^7), \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

$$\begin{aligned} \phi_7 \exp(2i\alpha x^5 - 2i\beta x^6) &\rightarrow (c_{71} \mathcal{A}(1)_\alpha \mathcal{A}(1)^\alpha + c_{72} \mathcal{A}(2)_\alpha \mathcal{A}(2)^\alpha + \\ &+ c_{73} \mathcal{A}(1)_\alpha \mathcal{A}(2)^\alpha) \exp(2i\alpha x^5 - 2i\beta x^6), \end{aligned}$$

где c_{5i}, c_{6i}, c_{7i} — некоторые коэффициенты.

Напомним, что в гл. 5 комбинации из триады метрического происхождения, соответствующие Z-бозонам, выделялись из образованных их взаимодействия со скалярными бозонами, приводящего к отличному от нуля массам покоя. Согласно только что сказанному это может служить основанием для следующей гипотезы: Z-бозоны являются не чем иным, как проявлением глюонов, взаимодействующих с другими глюонами. Их массы обусловлены нелинейным взаимодействием глюонов друг с другом.

Примечательно также различие диагональных составляющих дополнительных компонент 7-метрики: λ^5, σ^6 и ω^7 в гравитационно-электро-слабых и в гравитационно-электро-сильных взаимодействиях. Если изложенный здесь подход отражает реальность, то переход от составляющих метрики в гл. 6 к величинам гл. 5

$$\tilde{\lambda}^5 \rightarrow \lambda^5, \quad \tilde{\sigma}^6 \rightarrow \sigma^6, \quad \tilde{\omega}^7 \rightarrow \omega^7$$

также должен быть обязан нелинейным взаимодействиям глюонов. Изменение этих составляющих в свою очередь ответственно за переход от константы сильных взаимодействий g_3 к константам e и g_1, g_2 электрослабых взаимодействий, а также за значения углов типа Вайнберга.

Можно также предположить, что кварки, определенные в гл. 5, наделенные ароматами и участвующие в электрослабых взаимодействиях, сами представляют собой сложные образования из трех прачварков.

Другой набор гипотез относится к природе лептонов. Напомним, что в § 5.9 был использован подход к определению частиц с позиций сопоставления их с возможными комбинациями гармоник по дополнительным координатам. Вообще говоря, хотелось бы располагать исчерпывающими данными, какие комбинации возможны, а какие нет. Пока же мы вправе обсуждать все возможности по крайней мере для низших значений гармоник. При определении кварков в § 5.8 были использованы возможные комбинации, составленные из двух четных и одной нечетной или двух нечетных и одной четной гармоник и дающие электрический заряд $-1/3$ и $+2/3$ (для античастиц реализуются заряды $+1/3$ и $-2/3$). При определении лептонов там же были использованы комбинации только из четных или только нечетных гармоник с зарядами 0 и ± 1 . Однако это далеко не все возможности. Остались пробелы. В частности, пока не были задействованы комбинации, составленные из двух четных и одной нечетной или двух нечетных и одной четной гармоник и дающие электрический заряд $Q=0$ или $Q=\pm 1$. Может оказаться, что по неизвестным пока нам

причинам в природе имеется запрет на такие комбинации. Но может его и не быть. Тогда можно высказать гипотезу о возможности существования частиц с целочисленными электрическими зарядами $Q=0$ и $Q=-1$ и смешанными по четности наборами гармоник.

Легко видеть, что такие частицы очень похожи на набор кварков, рассмотренных в § 5.8. Они могут обладать тремя цветами и шестью ароматами в точности в том же смысле, что и кварки, образующие адроны. Более того, комбинации гармоник этих 18 видов новых кварков можно образовать в точности так же, как и адронные кварки из тех же меток трех типов: а) цветовых, б) ароматических и в) киральных, — с той только разницей, что цветовые метки для них нужно брать со знаком минус. Тогда цветовые метки, добавляясь к совершенно тем же ароматическим меткам, приводят соответственно к электрическим зарядам $Q=0$ и $Q=-1$. Не представляет труда построить для них таблицу, соответствующую таблице 2.

Можно пойти еще дальше, опираясь на то, что барионы образованы бесцветными комбинациями из трех кварков и обладают согласно сказанному в § 5.8 лишь только нечетными или только четными гармониками. Можно высказать гипотезу, что лептоны, аналогично барионам, строятся из бесцветных комбинаций троек новых кварков с целочисленными электрическими зарядами. Тогда естественно называть новые кварки лептонными в отличие от известных кварков, которые логично называть адронными.

На этом, видимо, следует остановиться, так как высказываемые гипотезы все дальше и дальше отстоят от имеющегося на сегодняшний день экспериментального материала, а одни лишь логические соображения, не откорректированные опытными данными, могут увести далеко в сторону.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С позиций сегодняшнего дня довольно отчетливо видны причины, не позволившие в свое время 5-мерной теории поля стать рабочим инструментом физиков. В проявлениях пятого измерения оказались спрессованными факторы, видимо, обязанные трем дополнительным пространственноподобным измерениям. И вскрыть это мешало, во-первых, отсутствие экспериментального материала о свойствах слабых и сильных взаимодействий и, во-вторых, высокий психологический барьер, который приходилось преодолевать при переходе к каждому новому измерению: в начале века к четвертому (создание теории относительности), затем к пятому (развитие теории Калуцы—Клейна), шестому, ... Сейчас можно сказать, что эти психологические барьеры сняты. Возникла даже противоположная тенденция — слишком легкого увеличения размерности. Но это уже другая крайность. Исходя из изложенного, можно полагать, что для объединения известных четырех видов физических взаимодействий достаточно семи, а с учетом замечаний § 7.2, возможно, восьми измерений. В последнем случае любопытно отметить своеобразное удвоение классического пространства-времени как по числу измерений, так и по сигнатуре.

Подводя итог, можно сказать, что в этой книге преследовались несколько целей. Во-первых, ставилась задача продолжить линию классических исследований по геометризации физики, начатую еще Клиффордом, Эйнштейном, Калуцей и Вейлем и развивавшуюся затем многими другими авторами, до уровня современных знаний. В гл. 4 было показано, что модель электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама может быть описана с помощью 6-мерного многообразия аффинной связности с кручением, а в гл. 6 продемонстрировано, что основные элементы хромодинамики можно смоделировать с помощью 7-мерной геометрии.

Во-вторых, на основе апробированных методов было произведено обобщение 6-мерной геометрической модели грави-электро-слабых взаимодействий на 7-мерную модель с целью включить в единую схему все три известных поколения лептонов и кварков. Показано, что это можно сделать и что в этой модели допускается существование новых нейтральных векторных бозонов и естественно возникает новый заряд Q_2 . В гл. 5 высказана гипотеза, что поколения различаются значениями

этого заряда и, как следствие, взаимодействием с дополнительными нейтральными векторными бозонами.

Кроме того, в гл. 7 на основе построенных 7-мерных моделей гравито-электро-слабых и гравито-электро-сильных взаимодействий сделана попытка выделить более элементарные понятия, которые могли бы составить фундамент будущей объединенной теории.

В заключение хотелось бы выразить надежду, что осознание несомненной связи задачи объединения физических взаимодействий с проблемой размерности физического пространства-времени позволит сделать важный шаг в решении фундаментальной проблемы обоснования наблюдаемой 4-мерности классического пространства-времени.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. СПИНОРЫ И АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА В МНОГООБРАЗИЯХ РАЗЛИЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ И СИГНАТУРЫ

П.1. Алгебры Клиффорда и их общие свойства

В этой книге большое внимание уделено описанию фермионов (спинорных частиц) в пространственно-временных многообразиях различной размерности (и сигнатуры). В связи с этим уместно дать определение и изложить ряд общих свойств спиноров. Понятие спинора математически корректно определяется через единственное неприводимое представление алгебры Клиффорда (если она проста). Напомним, что в физической литературе обычно говорят о спинорном представлении группы $SO(p, q)$ (в частности, группы Лоренца $SO(3, 1)$), либо дважды накрывающей ее группы $Spin(p, q)$, генерируемой подалгеброй алгебры Клиффорда $C(p, q)$. При этом оказываются завуалированными соотношения между размерностью и сигнатурой пространственно-временного многообразия, с одной стороны, и числом компонент и видом соответствующих ему спиноров, с другой стороны. Подход к спинорам при помощи алгебр Клиффорда над полем вещественных чисел проясляет однозначную связь между этими двумя видами понятий.

Более того, оказывается, что обычно используемые в физике для описания фермионов в 4-мерном пространстве-времени спиноры не являются характерными для используемой размерности и сигнатуры. Это позволило ряду авторов утверждать, что уже в стандартных уравнениях Дирака применяются спиноры, присущие многообразию не четырех, а пяти измерений [91].

1. В литературе приводится множество эквивалентных определений алгебр Клиффорда; выберем опирающееся на определение *общей алгебры*. Последняя определена, если:

во-первых заданы два множества элементов:

а) a_1, a_2, \dots , принадлежащих некоторому полю A ;

б) b_1, b_2, \dots , принадлежащих некоторому множеству B ;

во-вторых, для этих множеств определены три операции:

1) умножения элементов $b_i \in B$ на элементы $a_k \in A$ ($a_k b_i$);

2) сложения, т. е. образования векторов линейного пространства:

$$y = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots; \quad (\text{П.1})$$

3) умножения элементов $b_i \in B$ друг на друга, не выводящее за пределы линейного пространства:

$$b_i b_j = \sum_k C_{ij}^k b_k, \quad (\text{П.2})$$

где C_{ij}^k принадлежат полю A .

Конкретизируя специальные свойства множеств B , A и вид коэффициентов C_{ij}^k , можно получить частные случаи общей алгебры: алгебры Клиффорда, Грассмана, Ли, Фробениуса и др.

2. Так алгебры Клиффорда $C(p, q)$ получаются тогда, когда множество B определяется n элементами (образующими алгебры Клиффорда) e_i , произведения которых (третья операция) обладают свойствами:

$$\begin{aligned} e_i^2 &= +1, & \text{если } i=1, 2, 3, \dots, p; \\ e_i^2 &= -1, & \text{если } i=p+1, p+2, \dots, n; \quad (q=n-p); \\ e_i e_j + e_j e_i &= 0, & \text{если } i \neq j. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Легко понять, что (П.3) полностью определяет как само множество B (вид и число его элементов), так и операцию умножения (П.2). Множество B состоит из 2^n элементов:

$$1, e_i, e_i e_j, e_i e_j e_k, \dots, e_1 e_2 \dots e_n, \quad (\text{П.4})$$

где везде $i < j < k < \dots \leq n$. В качестве поля A используется поле действительных чисел R . Вместо него можно было бы взять поле комплексных чисел C , тогда это будут алгебры Клиффорда над полем комплексных чисел $C^c(n)$. Таким образом, алгебра Клиффорда $C(p, q)$ образует 2^n -мерное векторное пространство с базисом (П.4). Произвольный элемент алгебры может быть записан в виде

$$y = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i e_i + \sum_{i < j} \alpha_{ij} e_i e_j + \dots + \alpha_\omega e_1 e_2 \dots e_n. \quad (\text{П.5})$$

Произведение всех n образующих играет особую роль в теории алгебр Клиффорда; для него используется специальное обозначение: $e_1 e_2 \dots e_n \equiv \omega$. Из (П.3) следует, что его квадрат определяется числами n и q :

$$\omega^2 = (-1)^{n(n-1)/2} (-1)^q. \quad (\text{П.6})$$

3. Алгебры Клиффорда тесно связаны с действительными векторными пространствами $V^{p,q}$ (размерности $n=p+q$ и сигнатуры $p-q$), которые используются для описания n -мерных пространственно-временных многообразий. Очевидно, что $V^{p,q}$ можно рассматривать как подпространство алгебры Клиффорда, натянутое на образующие алгебры $\{e_i\}$.

Линейное пространство алгебры Клиффорда разлагается на прямую сумму линейных подпространств, каждое из кото-

рых натянуто на базисные элементы, образованные из произведения k образующих $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_k$; k фиксировано для каждого подпространства):

$$C(p, q) = \sum_{k=0}^n \oplus C^k. \quad (\text{П.7})$$

Размерность каждого подпространства $\dim C^k = n! / k!(n-k)!$. Элементы C^0 образуют скаляры, C^1 — векторы, C^2 — антисимметричные тензоры второго ранга, ..., C^n — псевдоскаляры в пространственно-временном многообразии размерности n .

Подпространства $C^+ = \sum_{k-\text{четн.}} \oplus C^k$ и $C^- = \sum_{k-\text{нечетн.}} \oplus C^k$ пространства алгебры Клиффорда называются соответственно четным и нечетным подпространствами. При этом $C = C^+ \oplus C^-$. Подпространство четных элементов C^+ является подалгеброй алгебры C .

4. Центром алгебры Z называется такое подмножество элементов этой алгебры, что для всех элементов алгебры $y \in C(p, q)$ и $z \in Z$ имеет место $zy = yz$. Можно показать, что центр Z алгебры $C(p, q)$ является одномерным (т. е. $Z = R \cdot 1$), если размерность пространства $p+q$ четна, и является двумерным (над полем R , т. е. $Z = R \cdot 1 \oplus R \omega$), если размерность n нечетна.

5. Произведения алгебр. Для алгебр можно определить операцию произведения. Чтобы пояснить это, рассмотрим две алгебры: $C(p, q)$ и $C(0, 2)$ соответственно с наборами генераторов $\{e_i\}$ и $\{e_1, e_2\}$. Из этих наборов можно образовать новый набор $\{1 \otimes e_1, 1 \otimes e_2, e_i \otimes e_1 e_2\} = \{\tilde{e}_j\}$, $j=1, 2, \dots, p+q+2$, являющийся набором образующих алгебры Клиффорда $C(q, p+2)$. Следовательно, произведение алгебр $C(p, q) \otimes C(0, 2) \simeq C(q, p+2)$. Здесь значок \simeq означает изоморфизм. Аналогично можно доказать и другие формулы. Выпишем простейшие из них (формулы редукции):

$$\begin{aligned} C(p, q) \otimes C(0, 2) &\simeq C(q, p+2), \\ C(p, q) \otimes C(2, 0) &\simeq C(q+2, p), \\ C(p, q) \otimes C(1, 1) &\simeq C(p+1, q+1). \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Применяя эти формулы, можно выразить произвольную алгебру Клиффорда $C(p, q)$ через произведение простейших алгебр и алгебры с одним нулевым параметром, например, если $p > q$, имеем

$$C(p, q) \simeq C(p-q, 0) \otimes \underbrace{C(1, 1) \otimes \dots \otimes C(1, 1)}_q. \quad (\text{П.9})$$

Наконец, без доказательства упомянем теорему периодичности

по модулю 8 [58]: Все алгебры $C(0, n)$ и $C(n, 0)$ периодичны по модулю 8 так, что имеют место формулы

$$C(0, n+8) \simeq C(0, n) \otimes C(0, 8);$$

$$C(n+8, 0) \simeq C(n, 0) \otimes C(8, 0).$$

(П.10)

Приведенные здесь формулы (П.8)—(П.10) значительно упрощают рассмотрение произвольных алгебр, сводя их к простым.

П.2. Матричные представления и классификация алгебр Клиффорда над полем вещественных чисел

Известно, что алгебры Клиффорда можно реализовать в виде алгебры квадратных матриц. Эта реализация связана с понятием представления алгебры (любой, не обязательно алгебры Клиффорда), формулируемым следующим образом. Пусть K^s — векторное пространство конечной размерности s , где K — поле действительных чисел R , поле комплексных чисел C или тело кватернионов H . Соответственно R^s , C^s и H^s являются вещественным, комплексным и кватернионным пространствами размерности s . Множество всех эндоморфизмов $\text{End } K^s$ ($\text{End } K^s : K^s \rightarrow K^s$) пространства K^s отождествляется с алгеброй $\mathfrak{M}(s, K)$ квадратных матриц порядка s над полем (или телом) K . Линейное представление алгебры C в K^s является гомоморфизмом C в $\mathfrak{M}(s, K)$ ($= \text{End } K^s$) и, обратно, всякий гомоморфизм алгебры C в $\mathfrak{M}(s, K)$ является линейным представлением C в K^s (теорема Бернсайда). Размерность s пространства K^s (называемого пространством представления) называется *размерностью представления*.

Матричное представление $\mathfrak{M}(s, K)$ алгебры Клиффорда $C(p, q)$ полностью определяется размерностью $n = p + q$ пространства $V^{p, q}$ и его сигнатурой $p - q$. Без доказательств приведем ряд математических сведений о свойствах матриц и матричных представлений алгебр Клиффорда.

1. Так как согласно формулам редукции (П.8) алгебры большей размерности выражаются через произведения алгебр меньшей размерности, то прежде всего следует указать матричные представления простейших алгебр Клиффорда:

$C(1, 0) \simeq R \oplus R$, т. е. алгебра изоморфна сумме двух полей вещественных чисел. Дело в том, что эта алгебра имеет одну образующую e_1 , для которой $e_1^2 = 1$, но, кроме того, единица уже содержится в алгебре по ее определению,

$C(0, 1) \simeq C$ — эта алгебра изоморфна полю комплексных чисел,

$C(0, 2) \simeq H$ — эта алгебра изоморфна телу кватернионов (обсуждение образующих этой алгебры см. в П. 4),

$C(2, 0) \simeq \mathfrak{M}(2, R)$ — изоморфна алгебре 2×2 -матриц из поля вещественных чисел,
 $C(1, 1) \simeq C(2, 0) \simeq \mathfrak{M}(2, R)$.

2. Для произведений матричных алгебр, т. е. матричных представлений алгебр Клиффорда, имеют место следующие формулы (законы композиции):

$$\mathfrak{M}(n, R) \otimes R \simeq \mathfrak{M}(n, R),$$

$$\mathfrak{M}(n, R) \otimes \mathfrak{M}(m, R) \simeq \mathfrak{M}(mn, R), \quad C \otimes C \simeq C \oplus C,$$

$$\mathfrak{M}(n, R) \otimes C \simeq \mathfrak{M}(n, C), \quad H \otimes C \simeq \mathfrak{M}(2, C),$$

(П.11)

$$\mathfrak{M}(n, R) \otimes H \simeq \mathfrak{M}(n, H), \quad H \otimes H \simeq \mathfrak{M}(4, R).$$

3. Матричные представления алгебр $C(n, 0)$, $C(0, n)$ и комплексифицированной алгебры Клиффорда $C^c(p+q) = C(p, q) \otimes C$ для $1 \leq n \leq 8$ выписаны в виде табл. 6 [90].

Таблица 6

n	$C(n, 0)$	$C(0, n)$	$C^c(n)$
1	$R \oplus R$	C	$C \oplus C$
2	$\mathfrak{M}(2, R)$	H	$\mathfrak{M}(2, C)$
3	$\mathfrak{M}(2, C)$	$H \oplus H$	$\mathfrak{M}(2, C) \oplus \mathfrak{M}(2, C)$
4	$\mathfrak{M}(2, H)$	$\mathfrak{M}(2, H)$	$\mathfrak{M}(4, C)$
5	$\mathfrak{M}(2, H) \oplus \mathfrak{M}(2, H)$	$\mathfrak{M}(4, H)$	$\mathfrak{M}(4, C) \oplus \mathfrak{M}(4, C)$
6	$\mathfrak{M}(4, H)$	$\mathfrak{M}(8, R)$	$\mathfrak{M}(8, C)$
7	$\mathfrak{M}(8, C)$	$\mathfrak{M}(8, R) \oplus \mathfrak{M}(8, R)$	$\mathfrak{M}(8, C) \oplus \mathfrak{M}(8, C)$
8	$\mathfrak{M}(16, R)$	$\mathfrak{M}(16, R)$	$\mathfrak{M}(16, C)$

4. Матричные представления всех алгебр Клиффорда $C(p, q)$ с $n \leq 8$, многие из которых представляют физический интерес, выписаны в табл. 7 [91].

5. Вид матричных представлений алгебр Клиффорда с $n > 8$ можно легко найти с помощью приведенной в П.1 теоремы

Таблица 7

	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=6$	$q=7$	$q=8$
$p=0$	$C(0,0)$ R	$C(0,1)$ C	$C(0,2)$ H	$C(0,3)$ $H \oplus H$	$C(0,4)$ $\mathfrak{M}(2, H)$	$C(0,5)$ $\mathfrak{M}(4, C)$	$C(0,6)$ $\mathfrak{M}(8, R)$	$C(0,7)$ $\mathfrak{M}(8, R) \oplus \mathfrak{M}(8, R)$	$C(0,8)$ $\mathfrak{M}(16, R)$
$p=1$	$C(1,0)$ $R \oplus R$	$C(1,1)$ $\mathfrak{M}(2, R)$	$C(1,2)$ $\mathfrak{M}(2, C)$	$C(1,3)$ $\mathfrak{M}(2, H)$	$C(1,4) \oplus \mathfrak{M}(2, H) \oplus \mathfrak{M}(2, H)$	$C(1,5)$ $\mathfrak{M}(4, H)$	$C(1,6)$ $\mathfrak{M}(8, C)$	$C(1,7)$ $\mathfrak{M}(16, R)$	$C(1,8)$ $\mathfrak{M}(16, R) \oplus \mathfrak{M}(16, R)$
$p=2$	$C(2,0)$ $\mathfrak{M}(2, R)$	$C(2,1) \oplus \mathfrak{M}(2, R) \oplus \mathfrak{M}(2, R)$	$C(2,2)$ $\mathfrak{M}(4, R)$	$C(2,3)$ $\mathfrak{M}(4, C)$	$C(2,4)$ $\mathfrak{M}(4, H)$	$C(2,5) \oplus \mathfrak{M}(4, H) \oplus \mathfrak{M}(4, H)$	$C(2,6)$ $\mathfrak{M}(8, H)$	$C(2,7)$ $\mathfrak{M}(16, C)$	$C(2,8)$ $\mathfrak{M}(32, R)$
$p=3$	$C(3,0)$ $\mathfrak{M}(2, C)$	$C(3,1)$ $\mathfrak{M}(4, R)$	$C(3,2) \oplus \mathfrak{M}(4, R) \oplus \mathfrak{M}(4, R)$	$C(3,3)$ $\mathfrak{M}(8, R)$	$C(3,4)$ $\mathfrak{M}(8, C)$	$C(3,5)$ $\mathfrak{M}(8, H)$	$C(3,6) \oplus \mathfrak{M}(8, H) \oplus \mathfrak{M}(8, H)$	$C(3,7)$ $\mathfrak{M}(16, H)$	$C(3,8)$ $\mathfrak{M}(32, C)$
$p=4$	$C(4,0)$ $\mathfrak{M}(2, H)$	$C(4,1)$ $\mathfrak{M}(4, C)$	$C(4,2)$ $\mathfrak{M}(8, R)$	$C(4,3) \oplus \mathfrak{M}(8, R) \oplus \mathfrak{M}(8, R)$	$C(4,4)$ $\mathfrak{M}(16, R)$	$C(4,5)$ $\mathfrak{M}(16, C)$	$C(4,6)$ $\mathfrak{M}(16, H)$	$C(4,7) \oplus \mathfrak{M}(16, H) \oplus \mathfrak{M}(16, H)$	$C(4,8)$
$p=5$	$C(5,0)$ $\mathfrak{M}(2, H) \oplus \mathfrak{M}(2, H)$	$C(5,1)$ $\mathfrak{M}(4, H)$	$C(5,2)$ $\mathfrak{M}(8, C)$	$C(5,3)$ $\mathfrak{M}(16, R)$	$C(5,4) \oplus \mathfrak{M}(16, R) \oplus \mathfrak{M}(16, R)$	$C(5,5)$ $\mathfrak{M}(32, R)$	$C(5,6)$ $\mathfrak{M}(32, C)$	$C(5,7)$	$C(5,8)$
$p=6$	$C(6,0)$ $\mathfrak{M}(4, H)$	$C(6,1) \oplus \mathfrak{M}(4, H) \oplus \mathfrak{M}(4, H)$	$C(6,2)$ $\mathfrak{M}(8, H)$	$C(6,3)$ $\mathfrak{M}(16, C)$	$C(6,4)$ $\mathfrak{M}(32, R)$	$C(6,5) \oplus \mathfrak{M}(32, R) \oplus \mathfrak{M}(32, R)$	$C(6,6)$	$C(6,7)$	$C(6,8)$
$p=7$	$C(7,0)$ $\mathfrak{M}(8, C)$	$C(7,1)$ $\mathfrak{M}(8, H)$	$C(7,2) \oplus \mathfrak{M}(8, H) \oplus \mathfrak{M}(8, H)$	$C(7,3)$ $\mathfrak{M}(16, H)$	$C(7,4)$ $\mathfrak{M}(32, C)$	$C(7,5)$	$C(7,6)$	$C(7,7)$	$C(7,8)$
$p=8$	$C(8,0)$ $\mathfrak{M}(16, R)$	$C(8,1)$ $\mathfrak{M}(16, C)$	$C(8,2)$ $\mathfrak{M}(16, H)$	$C(8,3) \oplus \mathfrak{M}(16, H) \oplus \mathfrak{M}(16, H)$	$C(8,4)$	$C(8,5)$	$C(8,6)$	$C(8,7)$	$C(8,8)$

периодичности по модулю 8. Оказывается, вид матричного представления любой алгебры зависит только от двух параметров: $n=p+q$ и $p-q \pmod{8}$. Этот результат представлен в виде табл. 8. В этой таблице использовано обозначение: $[n/2]$ — означает целую часть числа $n/2$, например при $n=5$ имеем $[5/2]=2$.

Таблица 8

$p-q \pmod{8}$	$C(p, q, p+q=n)$
0	$\mathfrak{M}(2^{n/2}, R)$
1	$\mathfrak{M}(2^{n/2}, R) \oplus \mathfrak{M}(2^{n/2}, R)$
2	$\mathfrak{M}(2^{n/2}, R)$
3	$\mathfrak{M}(2^{n/2}, C)$
4	$\mathfrak{M}(2^{n/2-1}, H)$
5	$\mathfrak{M}(2^{n/2-1}, H) \oplus \mathfrak{M}(2^{n/2-1}, H)$
6	$\mathfrak{M}(2^{n/2-1}, H)$
7	$\mathfrak{M}(2^{n/2}, C)$

П.3. Обсуждение основных типов алгебр Клиффорда

В соответствии с общим определением пространства представления алгебры спинорами, соответствующими пространству $V^{p,q}$, будут векторы (вектор-столбцы), принимающие значение в поле (теле) K , т. е. поле R , поле C или теле кватернионов H . Число компонент вектора равно порядку s матриц представления. Введем обозначения: $\Psi(R^s)$, $\Psi(C^s)$ и $\Psi(H^s)$ — соответственно для s -компонентных столбцов пространств R^s , C^s , H^s . (Заметим, что спиноры $\Psi(H^s)$ в физике обычно не рассматриваются.)

Как уже отмечалось, характер $\Psi(K^s)$ существенно зависит от размерности $p+q$ и сигнатуры $p-q$ многообразия $V^{p,q}$. Все алгебры Клиффорда (и соответствующие им спиноры) можно разделить на четыре типа, характерные соотношением между алгеброй $C(p, q)$ и ее четной подалгеброй C^+ (между спинорами алгебры $C(p, q)$ и спинорами ее подалгебры $C^+(p, q)$).

1. Размерность $n=p+q$ многообразия $V^{p,q}$ четна и $\omega_n^2 = -1$. В этом случае алгебра Клиффорда $C(p, q)$ является простой (т. е. не содержит инвариантных подпространств, отличных от $\{0\}$ и самой алгебры $C(p, q)$), следовательно, она имеет только одно (с точностью до эквивалентности) неприводимое представление $\mathfrak{M}(s, K)$. Векторы пространства K^s , в котором действует представление $\mathfrak{M}(s, K)$, называются спинорами, а пространство K^s — пространством спиноров. Центр Z алгебры $C(p, q)$ генерируется единицей и изоморфен полю действительных чисел R .

Центр Z^+ четной подалгебры C^+ генерируется единицей и ω_n и изоморфен полю комплексных чисел C . Очевидно, что так как n — четно, то $\omega_n \in C^+$. Отсюда следует, что подалгебра C^+ также проста, т. е. сужение представления алгебры $C(p, q)$ на ее четную подалгебру C^+ является также неприводимым.

2. Размерность многообразия $V^{p,q}$ четна и $\omega_n^2 = +1$. В этом случае также алгебра $C(p, q)$ является простой, т. е. имеется только одно неприводимое представление $\mathfrak{M}(s, K)$. Центр Z алгебры изоморфен полю действительных чисел R , ω_n принадлежит нечетному подпространству C^- .

Центр Z^+ четной подалгебры C^+ изоморфен $R \oplus R$. Подалгебра C^+ не является простой, т. е. приводима и представляется в виде суммы двух простых идеалов

$$C^+ \simeq C^+(1 - \omega_n) \oplus C^+(1 + \omega_n). \quad (\text{П.12})$$

Сужение неприводимого спинорного представления $\mathfrak{M}(s, K)$ алгебры $C(p, q)$ на C^+ является суммой двух неэквивалентных абсолютно неприводимых представлений. Элементы подпространств, в которых осуществляются эти два представления, называются *полуспинорами*. В физике представление (П.12) называется *представлением Вейля*, а соответствующий ему спинор — *вейлевским*. Пространство K^s вейлевских спиноров разбивается на два подпространства полуспиноров:

$$K_+^s = (1 - \omega_n)K^s, \quad K_-^s = (1 + \omega_n)K^s. \quad (\text{П.13})$$

Полуспиноры $\Psi^+ \in K_+^s$ и $\Psi^- \in K_-^s$ преобразуются независимо при преобразованиях четной подалгебры C^+ , содержащей группу $\text{Spin}(p, q)$. А так как $\text{Spin}(p, q)$ является спинорным представлением группы $SO(p, q)$, то Ψ^+ и Ψ^- будут преобразовываться независимо относительно $SO(p, q)$.

В вейлевском представлении все матрицы группы $\text{Spin}(p, q)$ имеют блочно-диагональный вид: $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$, что выполняется, если все матричные представления образующих алгебры $C(p, q)$ можно выбрать в блочно-диагональном виде $\gamma \sim \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$. Элемент объема ω_n играет роль известной матрицы γ_5 (см. формулы (4.8.9) и (4.90)).

3. Размерность многообразия $V^{p,q}$ нечетна и $\omega_n^2 = -1$. В этом случае алгебра Клиффорда $C(p, q)$ проста, т. е. имеет единственное неприводимое представление. Центр Z алгебры генерируется 1 и ω_n и изоморфен полю комплексных чисел C . ω_n принадлежит подпространству C^- .

Четная подалгебра C^+ также проста и допускает только одно неприводимое представление \mathfrak{M} , действующее на пространстве спиноров K^s . Центр Z^+ подалгебры C^+ изоморфен R . Для алгебр $C(p, q)$ и C^+ имеем соотношение

$$C(p, q) \simeq C^+ \otimes C \simeq C^+ \otimes C(0, 1). \quad (\text{П.14})$$

4. Размерность многообразия $V^{p,q}$ нечетна и $\omega_n^2 = +1$. В этом случае центр Z алгебры $C(p, q)$ изоморфен $R \oplus R$, следовательно, C не проста, т. е. ее можно разбить на два простых идеала

$$C \simeq C(1 - \omega_n) \oplus C(1 + \omega_n). \quad (\text{П.15})$$

Подалгебра C^+ — проста, ее центр Z^+ изоморфен R . Неприводимое спинорное представление подалгебры C^+ может быть расширено на всю алгебру $C(p, q)$ в точности двумя способами. При этом

$$C(p, q) \simeq C^+ \otimes Z \simeq C^+ \otimes (R \oplus R) \simeq C^+ + C^+.$$

Несколько слов следует сказать об алгебрах, имеющих вещественные матричные представления: $\mathfrak{M}(s, R)$ и $\mathfrak{M}(s, R) \oplus \mathfrak{M}(s, R)$. Хотя последние алгебры и не являются полными матричными алгебрами над R , они тем не менее являются матричными алгебрами над R . В физике все эти представления называются *майорановскими*, им соответствуют вещественные спиноры. Обычно майорановское представление связывается с инвариантностью относительно оператора зарядового сопряжения C . Из табл. 7 и 8 видно, что неприводимые представления Майорана возможны только в многообразиях с сигнатурой $p - q = 0 \pmod{8}$, а вполне приводимое представление Майорана — при сигнатуре $p - q = 1 \pmod{8}$.

Заметим, что при переходах от алгебр $C(p, q)$ к их четным подалгебрам в качестве образующих C^+ можно выбрать $n - 1$ элементов, содержащих в качестве слагаемого выделенное (любое) e_k :

$$e_k e_1, e_k e_2, e_k e_3, \dots, e_k e_n. \quad (\text{П.16})$$

Очевидно, что из этих элементов можно составить любое парное произведение $e_i e_j$, не содержащее e_k :

$$(e_k e_i)(e_k e_j) = -(e_k e_k)(e_i e_j) = \begin{cases} e_i e_j, & \text{если } e_k^2 = -1; \\ -e_i e_j, & \text{если } e_k^2 = +1. \end{cases}$$

Следовательно, из элементов (П.16) можно образовать любой элемент базиса C^+ , т. е. построить всю подалгебру C^+ . В качестве e_k может быть выбрана любая образующая из $\{e\}$, т. е. возможные n способов перехода разбиваются на два класса:

а) элемент e_k имеет положительный квадрат, тогда имеем переход

$$C(p, q) \rightarrow C^+ \simeq C(q, p - 1); \quad (\text{П.17})$$

б) элемент e_k имеет отрицательный квадрат, тогда

$$C(p, q) \rightarrow C^+ \simeq C(p, q - 1). \quad (\text{П.18})$$

Для каждой подалгебры имеется своя четная подалгебра с теми же самыми законами соответствия (П.17) и (П.18). Это приводит к цепочкам выделения из каждой алгебры всех ее возможных подалгебр.

П. 4. Примеры матричных представлений алгебр Клиффорда

Рассмотрим явный вид матричных представлений алгебр $C(p, q)$, соответствующих физически наиболее важным пространственно-временным многообразиям. При этом обратим внимание на то, что в общем случае алгебры $C(p, q)$ и $C(q, p)$ существенно различаются, так же как и соответствующие им спиноры. Напомним, что в геометрии выбор сигнатуры в виде, например, $(+---)$ ничем не отличается от сигнатуры $(-+++)$ и является чисто условным. Будем придерживаться индуктивного метода изложения, т. е. от меньших размерностей будем переходить к большим.

1. Многообразия одного измерения уже рассмотрены в П.1.

2. $n=2$.

а) $C(2, 0)$ соответствует 2-мерному евклидову пространству (сигнатура $(++)$). Представление алгебры майорановское, в качестве образующих можно выбрать две матрицы Паули:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \sigma_1; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \sigma_3 \rightarrow \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \omega_2^2 = -1.$$

Спиноры $\Psi(R^2)$ представляют собой 2-компонентные вещественные столбцы.

б) $C(1, 1)$ имеет представление, одновременно являющееся и вейлевским и майорановским. Образующие также можно построить из матриц Паули:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \sigma_1; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i \sigma_2 \rightarrow \omega_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \omega_2^2 = 1.$$

Спиноры $\Psi(R^2)$ представляют собой 2-компонентные вещественные столбцы, каждая компонента которых преобразуется независимо при вращениях $SO(1, 1)$.

в) Алгебра $C(0, 2)$ пространства V^{02} изоморфна алгебре кватернионов H , и соответствующий ей спинор $\Psi(H^1) \equiv H$ также является кватернионом. Алгебра кватернионов может быть реализована как подалгебра алгебры $\mathfrak{M}(2, C)$.

3. $n=3$.

а) Алгебра $C(3, 0)$ соответствует 3-мерному евклидову пространству (сигнатура $(+++)$). $C(3, 0)$ можно понимать как

комплексификацию алгебр Клиффорда 2-мерного пространства:

$$C(3, 0) \simeq C(2, 0) \otimes C \simeq C(1, 1) \otimes C \simeq C(0, 2) \otimes C.$$

Как известно, в качестве образующих матричного представления $\mathfrak{M}(2, C)$ удобно использовать набор матриц Паули:

$$e_1 \equiv \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 \equiv \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad e_3 \equiv \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (\text{П.19})$$

$\omega_3^2 = -1$. Спинорами 3-мерного пространства являются $\Psi(C^2)$. В силу изоморфизма $\mathfrak{M}(2, C) \simeq SL(2, C)$ они являются спинорами группы $SL(2, C)$. При этом сужение представления до $\text{Spin}(3) \simeq SU(2)$ дает представление группы $SO(3) \simeq SU(2)/Z_2$. Эти факты общеизвестны.

Следует особо подчеркнуть, что пример данной алгебры отчетливо демонстрирует, что комплексификация алгебры (в данном случае $n=2$) означает переход к многообразию на одно измерение больше (в данном случае к $n=3$).

б) Алгебра $C(2, 1)$ вполне приводима, ее матричное представление имеет блочно-диагональный вид $\begin{pmatrix} \mathfrak{M}(2, R) & 0 \\ 0 & \mathfrak{M}(2, R) \end{pmatrix}$.

Действительно, в качестве матричных представлений ее образующих можно взять

$$e_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}; \quad e_3 = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix} \rightarrow \omega_3 = I_4, \quad \omega_3^2 = +1.$$

Спинор $\Psi(R^4)$ представляется в виде $\Psi(R^4) = \begin{pmatrix} \Psi_1(R^2) \\ \Psi_2(R^2) \end{pmatrix}$, где

каждая пара $\Psi_i(R^2)$ преобразуется независимо при преобразованиях ее четной подалгебры C^+ .

в) Об алгебре $C(0, 3)$, также вполне приводимой, можно сказать то же самое, что и о $C(2, 1)$, с той лишь разницей, что $\Psi(H^2)$ является столбцом из двух кватернионов, преобразующихся также независимо.

4. $n=4$.

а) Алгебра $C(3, 1)$ соответствует физическому 4-мерному пространству-времени с сигнатурой $(-+++)$. Эта алгебра имеет майорановское матричное представление $\mathfrak{M}(4, R)$. Образующие γ -матрицы в представлении Майорана обычно берутся в виде [71, с. 65]:

$$e_1 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}; \quad e_2 = -i\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$e_3 = i\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$e_4 = \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \omega_4 = \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \omega_4^2 = -1. \quad (\text{П.20})$$

Майорановский спинор $\Psi(R^4)$ представляет собой 4-компонентный столбец из действительных величин.

б) Алгебра $C(1, 3)$, которая из общих соображений размерности и сигнатуры также могла бы соответствовать 4-мерному классическому пространству-времени, в физике обычно не используется, так как имеет представление в пространстве кватернионов H^2 . Можно выбрать представление $\mathfrak{M}(2, H)$ в виде подалгебры алгебры $\mathfrak{M}(4, C)$.

Изложенные свойства алгебр $C(3, 1)$ и $C(1, 3)$ показывают, что классическому 4-мерному пространству-времени не соответствуют обычно используемые в физике 4-компонентные комплексные спиноры Дирака.

5. $n=5$. 4-Компонентные комплексные спиноры возникают лишь в 5-мерных пространственно-временных многообразиях и соответствуют они алгебрам Клиффорда: $C(4, 1)$, $C(2, 3)$, $C(0, 5)$. Матричные представления всех этих алгебр можно формально рассматривать как получающиеся при комплексификации матричных представлений алгебр, соответствующих 4-мерным многообразиям. Однако, как и в случае двух и трех измерений, это соответствует реальному увеличению размерности на единицу.

Подчеркнем следующие три обстоятельства.

1) Во всех трех алгебрах в качестве образующих выступают именно все пять γ -матриц Дирака (с точностью до множителя i):

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_0 &= \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = -i \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.21})$$

Здесь $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = \gamma_5^2 = -1$; $\gamma_0^2 = +1$. В этом смысле можно сказать, что в стандартной теории используется не полный набор γ -матриц Дирака.

2) Ниоткуда априори не следует, какие образующие — пространственноподобные или временноподобные (и в каком относительном количестве) — строятся из этих γ -матриц. Это определяется из дополнительных соображений о нужной сигнатуре (достигается множителем i перед соответствующей матрицей).

3) Поскольку здесь рассматриваются алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел, то в сигнатурах алгебр $C(4, 1)$, $C(2, 3)$ и $C(0, 5)$ произведения любых четырех образующих будут отличаться от оставшейся, пятой образующей на множитель, пропорциональный i . Это означает, что никакая из образующих не может быть получена из других четырех с по-

мощью их линейных комбинаций и их произведений с коэффициентами из поля вещественных чисел. Заметим, что в стандартной теории соотношение $\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ имеет место в сигнатуре $(+---)$, т. е. $p-q=-3$.

а) Алгебра $C(4, 1)$ соответствует физически интересному случаю — 5-мерному многообразию с сигнатурой $(-++++)$. В качестве матричного представления пяти образующих следует взять матрицы:

$$e_0 = i\gamma_0, \quad e_1 = i\gamma_1; \quad e_2 = i\gamma_2; \quad e_3 = i\gamma_3, \quad e_5 = i\gamma_5 \rightarrow \omega_5 = -iI_4.$$

б) Алгебры $C(1, 4)$ и $C(5, 0)$ являются вполне приводимыми. Их матричные представления $\mathfrak{M}(2, H) \oplus \mathfrak{M}(2, H)$ дают интересный пример 4-компонентных спиноров, если их рассматривать как подалгебры высшей размерности.

6. $n=6$.

а) Алгебра $C(4, 2)$ представляет интерес в связи с обсуждавшимися в § 7.2 многообразиями с двумя временноподобными координатами, причем она соответствует лишь одной из возможностей выбора сигнатуры: $(++++--)$. Эта алгебра имеет майорановское матричное представление. В качестве образующих можно выбрать

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= - \begin{pmatrix} 0 & \gamma_0 \\ \gamma_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = i \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = i \begin{pmatrix} 0 & \gamma_5 \\ \gamma_5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix}, \\ \Gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_6 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Майорановский спинор $\Psi(R^8)$ представляется в виде столбца из 8 вещественных чисел.

б) Алгебры $C(1, 5)$ и $C(5, 1)$ соответствуют 6-мерному пространственно-временному многообразию, использованному в гл. 4 для построения модели грави-электро-слабых взаимодействий. Из табл. 4 видно, что обеим алгебрам отвечает матричное представление $\mathfrak{M}(4, H)$, т. е. спинор — 4-компонентный кватернион. Используемые в гл. 4 комплексные волновые функции находятся в таком же отношении к кватернионным, как и в стандартной 4-мерной теории (см. алгебру $C(1, 3)$). Образующие (4.7.1) принадлежат подалгебрам 7-мерных алгебр $C(1, 6)$ или $C(5, 2)$, имеющих матричное представление $\mathfrak{M}(8, C)$.

Исходя из изложенного в этой книге можно допустить следующую цепочку переходов между алгебрами Клиффорда и соответствующими им многообразиями и спинорами. За исходную берется алгебра Клиффорда $C(1, 6)$ с фактически использованным в гл. 5 и 6 представлением $\mathfrak{M}(8, C)$. Затем последовательно выделяются образующие с отрицательным квадратом:

$$C(1, 6) \rightarrow C(1, 5) \rightarrow C(1, 4) \rightarrow C(1, 3).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. МЕТРИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ
ВВЕДЕНИЯ W-БОЗОНОВ

1. Подчеркнем, что на протяжении всей книги использовалось условие цилиндричности метрики G_{MN} , полученной в результате конформного преобразования из исходной метрики G_{MN} . При этом ограничении единственной возможностью введения заряженных W-бозонов (и части глюонов) было определение их через тензор кручения. Назовем этот вариант введения W-бозонов *торсионным*. На этом пути пришлось ввести ряд постулатов относительно представления кручения через потенциалы $A(1)_\alpha$ и $A(2)_\alpha$, тем не менее такие модели обладают рядом недостатков, отмеченных в § 4.13 и в § 5.12.

Анализ возможностей многомерных геометрических моделей показал, что можно получить более удачные варианты введения W-бозонов в рамках чисто метрического подхода (без использования кручения), если при этом отказаться от условия цилиндричности метрики G_{MN} по дополнительным координатам. В *метрических* вариантах теории заряженные W-бозоны вводятся как векторные поля при гармониках от дополнительных координат в разложениях компонент λ_α и σ_α . При этом все изложенное в книге относительно нейтральных векторных полей остается в силе. Подобные варианты теории при дополнительном условии вещественности полей λ_α и σ_α исследовались В. В. Кисловым, А. В. Каменевым и И. В. Тарановым. Было показано, что в итоге получается вариант физической теории, близкий к объединенной модели гравитационных и электрослабых взаимодействий, однако в нем реализуется $SU(1,1) \times U(1)$ -симметрия. Рядом недостатков обладает и смешанный, *торсионно-метрический* вариант, рассмотренный нами с В. Р. Гавриловым.

2. Наиболее удачным вариантом, свободным от упоминавшихся недостатков, оказался метрический вариант, развитый автором совместно с А. О. Мирошником. Кратко изложим его суть на примере 6-мерной модели гравитационно-слабых взаимодействий. В его основе лежат: а) отказ от условия цилиндричности по дополнительным координатам в определении компонент составляющих 6-мерного метрического тензора λ_α и σ_α ; б) отказ от условия вещественности компоненты σ_α . Последнее не является необычным для моделей, рассмотренных выше. Так, конформные факторы χ в (4.4.4) и в (5.4.4) уже содержали мнимые части.

Можно показать, что для выполнения $SU(2) \times U(1)$ -симметрии в 6-мерной теории следует положить

$$\lambda_\alpha = -(2\sqrt{k}/c^2) \{B_\alpha + i\sqrt{3}/2 [W_\alpha^+ \exp(2i\beta x^6) - W_\alpha^- \exp(-2i\beta x^6)]\}, \quad (П.22)$$

$$\sigma_\alpha = -(2\sqrt{k}/c^2) \{A(3)_\alpha + (i/\sqrt{2}) [W_\alpha^+ \exp(2i\beta x^6) + W_\alpha^- \exp(-2i\beta x^6)]\},$$

где использованы обозначения гл. 4. Здесь компоненты λ_α вещественны. Эта формула согласуется с (4.5.1) для нейтральных полей. Непосредственно подставляя (П.22) в комбинацию ${}^5F_{\alpha\beta} {}^5F^{\alpha\beta} + {}^6F_{\alpha\beta} {}^6F^{\alpha\beta}$, входящую в определение скалярной кривизны (4.3.13), можно убедиться, что в итоге получается в точности $SU(2) \times U(1)$ -симметричное выражение $\sim \text{Sp } F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ модели Вайнберга — Салама, приведенное в (4.1.7).

Легко понять, откуда возникают в геометрической модели неабелевы квадратичные добавки, соответствующие определению $F_{\mu\nu}$ в стандартной теории. Для этого достаточно взять прежнее определение, например ${}^5F_{\alpha\beta}$, согласно (4.3.10)

$$\begin{aligned} {}^5F_{\alpha\beta} &= (1/2) g_\alpha^M g_\beta^N (\lambda_{M,N} - \lambda_{N,M}) = \\ &= (1/2) [(\lambda_{\alpha,\beta} - \lambda_{\beta,\alpha}) + \sigma^6 (\sigma_\beta \lambda_{\alpha,6} - \sigma_\alpha \lambda_{\beta,6})]. \end{aligned} \quad (П.23)$$

Здесь последние два слагаемые согласно определениям (П.22) содержат компоненты полей $A(i)_\alpha$ квадратично, аналогично формуле (4.1.6) в модели Вайнберга — Салама.

3. В данном метрическом варианте теории массовые вклады для W-бозонов не нужно подгонять соотношением констант, как это делалось в § 4.6. Теперь они возникают автоматически, как и для Z-бозона, с помощью механизма типа хиггсовского. При этом нужно только естественным образом доопределить производные от поля φ в (4.4.7) с учетом комплексности вектора σ_α :

$$+\partial_\alpha \varphi = \varphi_{,\alpha} + i\alpha \lambda^5 \lambda_\alpha \varphi - i\beta \sigma^6 \sigma_\alpha \varphi; \quad (П.24)$$

$$+\partial_\alpha \varphi^* = \varphi^*_{,\alpha} - i\alpha \lambda^5 \lambda_\alpha \varphi^* + i\beta \sigma^6 \sigma_\alpha^* \varphi^*.$$

В итоге из формулы (4.4.6) получается значение массы W-бозонов

$$m_W c^2 = 2\sqrt{10} \hbar c (b_0 \eta_0) \alpha [3(\lambda^5)^2 + (\sigma^6)^2]^{1/2}. \quad (П.25)$$

Учитывая полученное в (4.5.7) выражение для массы Z-бозона, находим

$$m_W/m_Z = [3(\lambda^5)^2 + (\sigma^6)^2]^{1/2} / [2[(\lambda^5)^2 + (\sigma^6)^2]]^{1/2}. \quad (П.26)$$

Легко видеть, что это отношение при учете (4.9.9) совпадает со стандартным выражением (4.1.27) (т. е. с $\cos \theta_W$) в модели Вайнберга — Салама только при $\theta_W = 30^\circ$. Следовательно, теперь не только достигается полное соответствие 6-мерной геометрической модели гравитационно-слабых взаимодействий с моделью Вайнберга — Салама, но и из условия совпадения соответствующих формул однозначно определяется значение угла Вайнберга ($\theta_W = 30^\circ$), которое в стандартной теории не фиксируется.

4. Наконец, можно показать, что в данном метрическом варианте введения W-бозонов автоматически получается стан-

дартное взаимодействие дублета фермионов ν_e и e^- с совокупностью всех векторных полей B_α и $A(i)_\alpha$, вводимых посредством (П.22). Для этого нужно сохранить все изложенное в § 4.7 о зависимости волновых функций фермионов от x^6 и x^7 и переписать первую строку в (4.8.1) с учетом переопределения λ_α и σ_α . При этом только вместо условия на коэффициенты (4.9.20) следует писать

$$b^*_{L_1} a_{L_1} + b^*_{L_2} a_{L_2} = -2i. \quad (\text{П.27})$$

В итоге оказывается, что так полученное выражение эквивалентно формулам (4.9.17), описывающим взаимодействие с W -бозонами торсионного происхождения и вводимым посредством (4.8.8).

Заметим, что изложенный здесь метрический вариант введения W -бозонов в 6-мерной модели гравитационно-электро-слабых взаимодействий может быть обобщен и на случай 7-мерной модели гравитационно-электро-слабых взаимодействий, изложенной в гл. 5, а также использован для введения «недиагональных» глюонов в 7-мерной модели гравитационно-электро-сильных взаимодействий, изложенной в гл. 6. При этом все сказанное там о скалярных и нейтральных векторных полях остается в силе.

Представляется любопытным уже неоднократно встречавшееся в литературе соответствие (иногда даже в каком-то смысле эквивалентность) между ролями кручения и метрики. Так было в пространствах абсолютного параллелизма, изучавшихся в 30-х годах в целях ряда физических приложений, где вклады в тензор кривизны от кручения и римановой части взаимно компенсировались. Другой пример представляет упомянутая в § 2.7 попытка В. И. Родичева описать в 5-мерной теории электромагнитное поле не метрическим образом, а посредством кручения. Аналогичным образом следует воспринимать соотношение между торсионным вариантом введения W -бозонов в гл. 4 и 5 и метрическим вариантом, описанным в этом приложении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонов В. И., Владимиров Ю. С. Калибровочно-инвариантная 5-мерная теория гравитации // Тезисы 3-й Сов. грав. конф. Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1972, с. 19—23.
2. Андреев И. В. Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях. М.: Наука, 1981.
3. Барут А., Борнзин Г. (Barut A., Bornzin G.) $O(4,2)$ -formulation of the symmetry breaking in relativistic Kepler problems with or without magnetic charges // Journ. Math. Phys., 1971, vol. 12, p. 841—846.
4. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. М.: Мир, 1980.
5. Бергман П. Единые теории поля. УФН, 1980, т. 132, № 1, с. 177—190.
6. Бергман П. Г. Введение в теорию относительности. М.: ИЛ, 1947.
7. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию [квантованных полей]. М.: Наука, 1973.
8. Бранс К., Дикке Р. (Brans C., Dicke R. H.) Mach's principle and a relativistic theory of gravitation // Phys. Rev., 1961, v. 124, p. 925—935.
9. Бродский А. М., Иваненко Д., Соколик Г. А. (Brodskii A. M., Ivanenko D., Sokolik G. A.) A new conception of the gravitational field // Acta Phys. Hung., 1962, T. XIV, F. 1, p. 21—25.
10. Бройль Л. де (De Broglie L.) L'Univers a cinq dimensions et la mecanique ondulatoire // Journ. Phys. Rad., 1927, ser. VI, v. VIII, p. 65—73.
11. Веблен О. (Veblen O.) Projektive Relativitätstheorie. Berlin, 1933.
12. Вейль Г. Гравитация и электричество // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 513—528.
13. Вилковийский Г. А. О квантовании частицы во внешнем гравитационном поле // ТМФ, 1971, т. 8, № 3, с. 359—368.
14. Владимиров Ю. С. Новая интерпретация поля кручения // Известия вузов. Физика, 1963, № 2, с. 133—140.
15. Владимиров Ю. С., Антонов В. И. 5-мерная скалярно-тензорная теория гравитации // Вестник Моск. ун-та. Сер. физ. и астр., 1974, № 1, с. 54—64.
16. Владимиров Ю. С., Антонов В. И. Связь локальных и глобальных свойств материи в 5-мерной теории поля // Проблемы теории грав. и элем. част., вып. 8, М.: Атомиздат, 1977, с. 162—168.
17. Владимиров Ю. С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982.
18. Владимиров Ю. С. (Vladimirov Yu. S.) The unified field theory, combining Kaluza's 5-dimensional and Weyl's conformal theories // GRG, 1982, vol. 14, N 12, p. 1167—1181.
19. Владимиров Ю. С., Кислов В. В. Квантование однородной изотропной космологической модели в пятимерной теории поля // ТМФ, 1982, т. 53, № 1, с. 43—54.
20. Владимиров Ю. С., Кислов В. В. К вопросу об изменении e/m в пятимерной теории гравитации, электромагнетизма и скалярного поля // Вестник Моск. ун-та. Сер. физ. и астр., 1982, № 6, с. 18—21.

21. Владимиров Ю. С., Попов А. Д. Некоторые точные решения 5-мерной теории поля // Проблемы теории грав. и элем. част. М.: Энергоиздат, 1982, вып. 13, с. 66—75.
22. Владимиров Ю. С., Попов А. Д. Уравнение Дирака в 5- и 6-мерных искривленных пространственно-временных многообразиях // Вестник Моск. ун-та. Сер. физ. и астр., 1984, т. 25, № 5, с. 47—52.
23. Владимиров Ю. С., Козленков А. А. 6-Оптика и единая теория гравитации и электромагнетизма // Известия вузов. Физика, 1984, № 12, с. 36—40.
24. Владимиров Ю. С., Мицкевич Н. В., Хорски Я. Пространство, время, гравитация. М.: Наука, 1984.
25. Владимиров Ю. С., Кислов В. В. Пятимерие и теория атома водорода // Вестник Моск. ун-та. Сер. физ. и астр., 1984, т. 25, № 1, с. 11—17.
26. Владимиров Ю. С., Кислов В. В. Заряд ядра в задаче атома водорода как собственное значение 6-мерных уравнений в импульсном пространстве // Известия вузов. Физика, 1985, № 4, с. 66—69.
27. Владимиров Ю. С. Нейтральные векторные поля в 7-мерной теории грави-электро-слабых взаимодействий.—Препринт физич. ф-та Моск. ун-та, № 16/1986, 1986.
28. Владимиров Ю. С. 6-мерное объединение теории Калуцы—Клейна и модели Вайнберга—Салама. Препринт физич. ф-та Моск. ун-та, № 16/1985, 1985.
29. Владимиров Ю. С., Турыгин А. Ю. Теория прямого межчастичного взаимодействия. М.: Энергоатомиздат, 1986.
30. Владимиров Ю. С. Планковские массы и многомерные теории поля. // Проблемы теории гравит. и элем. част. М.: Энергоатомиздат, 1986, вып. 17, с. 66—74.
31. Введение в теорию Калуцы—Клейна (An introduction to Kaluza—Klein theory), Ed. H. C. Lee, Singapore, World Scientific, 1982.
32. Гаврилов В. Р., Карнаухов А. В. О соответствии последних вариантов 5-мерных теорий // Известия вузов. Физика, 1984, № 8, с. 45—50.
33. Гасперини М. (Gasperini M.) Constraints on unified theories from the experimental tests of the equivalence principle // GRG, 1984, vol. 16, № 11, p. 1031—1037.
34. Гладуш В. Д. Пятимерная теория взаимодействующих скалярного, электромагнитного и гравитационного полей // Известия вузов. Физика, 1979, № 11, с. 58—65.
35. Горелик Г. Е. Размерность пространства.—М.: Изд-во Моск. ун-та 1983.
36. Грассман Г. (Grassman H.) Die lineale Ausdehnungslehre. Ein neuer Zweig der Mathematik, Gesammelte Schriften, Bd 1. Leipzig, 1894.
37. Гуревич В., Волмен Г. Теория размерности. М.: ИЛ, 1948.
38. Данциг Д. ван (Van Dantzig D.) Die projektive Relativitätstheorie. // Proc. Nederl. Akad. Wetensch. Amsterdam, 1932, Bd 35, S. 524—534.
39. ДеВитт Б. С. (DeWitt B. S.) Dynamical theory in curved spaces // Rev. Mod. Phys., 1957, vol. 29, p. 377—397.
40. Единые теории поля более четырех измерений (Unified field theories of more than four dimensions), Eds. V. De Sabbata and E. Schmutzer. Singapore; World Scientific, 1983.
41. Иваненко Д. Д., Пронин П. И., Сарданашвили Г. А. Калибровочная теория гравитации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.
42. Ингрэхэм Р. Л. (Ingraham R. L.) Conformal relativity. I—VI // Nuovo Cim., 1978, v. 46B, N 1, p. 1—15; 1978, v. 46B, N 1, p. 16—32; 1978, v. 46B, N 2, p. 217—260; 1978, v. 46B, N 2, p. 261—286; 1978, v. 47B, N 2, p. 151—191; 1979, v. 50B, N 2, p. 233—270.
43. Ингрэхэм Р. Л. (Ingraham R. L.) Free-field equations of conformal relativity in Riemannian formalism I—II // Nuovo Cim., 1982, v. 68B, N 2, p. 203—217; 1982, v. 68B, N 2, p. 218—234.
44. Йордан П. (Jordan P.) Bemerkungen zur Kosmologie // Ann. der Phys., 1939, Bd 36, S. 64—70.
45. Йордан П. (Jordan P.) Erweiterung der projektiven Relativitätstheorie // Ann. der Phys., 1947, Bd 1, S. 219—228.
46. Кадышевский В. Г. Спектр масс частиц в [теориях с фундаментальной длиной // ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 1885—1887.
47. Кадышевский В. Г. Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // ЭЧАЯ, 1980, т. 11, № 1, с. 5—87.
48. Калицин Н. С. Об одной единой теории поля // Известия Болг. Акад. наук, сер. физ., 1959, т. 7, с. 219—235.
49. Калуца Т. К. К проблеме единства физики // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 529—534.
50. Каменев А. В. Точное статистическое сферически-симметричное решение 6-мерных уравнений Эйнштейна // Проблемы гравитации и теории относительности. М.: Изд-во УДН им. П. Лумумбы, 1986, с. 20—25.
51. Картан Э. Об обобщении понятия римановой кривизны и о пространствах с кручением // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: 1979, с. 535—537.
52. Квантовая метрология и фундаментальные константы. М.: Мир, 1981.
53. Кислов В. В., Сазонов А. А. Новые космологические решения в пятимерной теории поля // Исследования по классич. и квант. теории поля. Днепропетровск: Изд-во Днепр. гос. ун-та, 1983, с. 14—21.
54. Кислов В. В. Размерность пространства-времени и объединение гравитационного, электромагнитного и скалярного полей. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, М., 1985.
55. Клейн Ф. О новых английских работах по механике // Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1960.
56. Клейн О. (Klein O.) Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie // Zeits. f. Physik, 1926, Bd 37, S. 895.
57. Кодос А., Детвилер С. (Chodos A., Detweiler S.) Where has the fifth dimensional gone? // Phys. Rev., D. 1980, v. 21, N 8, p. 2167—2170.
58. Кокуре Р. (Coquereaux R.) Modulo 8 periodicity of real Clifford algebras and particle physics // Phys. Rev., 1982, v. 115B, N 5, p. 389—395.
59. Космология. Теория и наблюдения. М.: Мир, 1978.
60. Крамер Д. (Kramer D.) Axialsymmetrische Stationäre Lösungen der Projektiven Feldtheorie // Acta Phys. Polon., 1971, Bd 2, F. 6, S. 807—811.
61. Кречет В. Г. Нелинейные волновые поля и геометрия пространства-времени // Проблемы теории гравит. и элем. частиц, вып. 13. М.: Энергоатомиздат, 1982, с. 60—66.
62. Легкий А. И. Точное статическое сферически-симметричное решение 5-мерных уравнений Эйнштейна // Проблемы теории гравит. и элем. част. М.: Атомиздат, 1979, вып. 10, с. 149—153.
63. Лихнерович А. (Lichnerowicz A.) Theories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme. P.: Masson Cie, 1954.
64. Людвиг Г. (Ludwig G.) Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie. Braunschweig, 1951.
65. Мандель Г. (Mandel H.) Zur Herleitung der Feldgleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie // Zeits. f. Physik, 1926, Bd 39, s. 136; 1927, Bd 45, s. 285; 1929, Bd 56, s. 838.
66. Мандельштам С. (Mandelstam S.) Quantization of the gravitational field // Ann. of Phys., 1962, vol. 19, p. 25—66.
67. Марков М. А. Может ли гравитационное поле оказаться [существенным в теории элементарных частиц? // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 467—478.
68. Мах Э. Познание и заблуждение // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 73—84.
69. Мицкевич Н. В. Физические поля в общей теории относительности. М.: Наука, 1969.
70. Мостепаненко А. М., Мостепаненко М. В. Четырехмерность пространства и времени. М.—Л.: Наука, 1966.
71. Мэттьюс П. Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц. М.: ИЛ, 1959.

72. Мус А. Е., Ахнер Х. Ф. (Moose A. E., Ahner H. F.) On global inequivalence of five-dimensional and Brans-Dicke theories // Phys. Rev., 1982, v. D26, p. 1275—1279.
73. Окунь Л. Б. Лептоны и кварки. М.: Наука, 1981.
74. Окунь Л. Б. Физика элементарных частиц. М.: Наука, 1984.
75. Павшич М. (Pavsic M.) Unified theory of gravitation and electromagnetism, based on conformal group $SO_{4,2}$ // Nuovo Cim., 1977, vol. 41B, N 2, p. 397—427.
76. Паули В. (Pauli W.) Über die Formulierung der Naturgesetze mit fünf homogen koordinaten // Ann. der Phys., 1933, Bd 18, S. 305—372.
77. Пижо П. (Pigeaud P.) Unified fields in pentadimensional theory // Repts. Math. Phys., 1978, vol. 14, N 2, p. 261—284.
78. Подоланский Дж. (Podolanski J.) Six-dimensional field theory // Proc. Roy. Soc., 1950, vol. 201, p. 234.
79. Пономарев В. Н., Барвинский А. О., Обухов Ю. Н. Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитации. М.: Энергоатомиздат, 1984.
80. Пытьев Ю. П. Пятимерная релятивистская схема. 1—3 // Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ. и астрон., 1966, № 2, с. 102—108; 1966, № 5, с. 70—80; 1967, N1, с. 73—81.
81. Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 18—33.
82. Родичев В. И. Пространство с кручением и нелинейные уравнения поля // ЖЭТФ, 1961, т. 40, вып. 5, с. 1469—1472.
83. Родичев В. И. Пространство с кручением и обобщенные уравнения спинорного поля // Известия вузов. Физика, 1963, № 2, с. 122—124.
84. Рослый А. А. Применение 5-мерной теории поля для нахождения точных решений стандартных уравнений Эйнштейна—Максвелла // Известия вузов. Физика, 1981, № 9, с. 91—94.
85. Румер Ю. Б. Физический смысл пятимерного пространства в 5-оптике // ЖЭТФ, 1953, т. 24, вып. 3, с. 312—318.
86. Румер Ю. Б. Исследования по 5-оптике. М.: ГИТТЛ, 1956.
87. Румер Ю. Б. Принципы сохранения и свойства пространства и времени // Пространство, время, движение. М.: Наука, 1971, с. 107—166.
88. Салам А., Стрэдди Дж. (Salam A., Strathdee J.) On Kaluza—Klein theory // Ann. of Phys., 1982, vol. 141, p. 316—352.
89. Салам А. Унификация сил // Фундаментальная структура материи. М.: Мир, 1984, с. 173—203.
90. Салингарес Н. (Salingaros N.) Realization, extension, and classification of certain physically important groups and algebras // Journ. Math. Phys., 1981, vol. 22, N 2, p. 226—232.
91. Салингарес Н. (Salingaros N.) On the classification of Clifford algebras and their relation to spinor in n dimensions // Journ. Math. Phys., 1982, vol. 23, N 1, p. 1—7.
92. Соколов А., Иваненко Д. Квантовая теория поля. М.—Л.: ГИТТЛ, 1952, с. 643—653.
93. Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В. Калибровочные поля. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
94. Станюкович К. П., Мельников В. Н. Гидродинамика, поля и константы в теории гравитации. М.: Энергоатомиздат, 1983.
95. Сурьо И. М. (Souriau J. M.) Five-dimensional relativity // Nuovo Cim., 1963, vol. 30, N 2, p. 565—578.
96. Схоутен Дж. А., Данциг Д. ван (Schouten J. A., van Dantzig D.) Generelle Feldtheorie // Zeits. f. Physik, 1932, Bd 78, S. 639—667.
97. Схоутен Дж. А. (Schouten J. A.) On meson fields and conformal transformations // Rev. Modern Phys., 1949, vol. 21, N 3, p. 421—424.
98. Тири И. (Thiry Y.) Les équations de la théorie unitaire de Kaluza // Compt. rend. Akad. S. Paris, 1948, v. 226, p. 216.
99. Тирринг В. (Tirring W.) Five-dimensional theories and CP-violation // Acta Phys. Austr., Suppl. IX, 1972, p. 256—271.

100. Тирринг В. (Tirring W.) Remark on five-dimensional relativity in: The Physicists conception of nature. Ed. by J. Mehra, D. Reidel; Dordrecht, 1973, p. 199—201.
101. Тоннелья М. А. (Tonnelat M. A.) Les Théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation. P.: Gauthier-Villars, 1965, 522 p.
102. Финкельштейн Р. (Finkelstein R.) Spinor fields in spaces with torsion // Ann. of Phys., 1961, vol. 12, p. 200—221.
103. Фок В. А. (Fock V.) Zur Schrödingerischen Wellenmechanik // Zeits. für Phys., 1926, Bd 38, N 3, S. 242—250.
104. Фок В. А. Атом водорода и неевклидова геометрия // Изв. АН СССР, отд. техн. наук, 1935, № 2, с. 169—174.
105. Фок В. А., Иваненко Д. Д. (Fock V., Ivanenko D.) Geometrie quantique lineaire et déplacement parallele // Compt. Rend. Acad. Sci., Paris, 1929, v. 188, t. 1470—1472. См. также Фок В. А. Геометризация дираковской теории электрона // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 415—432.
106. Хуанг К. Кварки, лептоны и калибровочные поля. М.: Мир, 1985.
107. Шерк Дж. Расширенная суперсимметрия и теория расширенной супергравитации // Геометрические идеи в физике. М.: Мир, 1983, с. 203—239.
108. Шмутцер Э. (Schmutzer E.) Beitrag zur projektiven Relativitätstheories // Z. Phys., 1957, Bd 149, N 3, S. 329—339; 1959, Bd 154, N 3, S. 312—318.
109. Шмутцер Э. (Schmutzer E.) Relativistische Physik. Leipzig, 1968.
110. Шмутцер Э. (Schmutzer E.) Projectiv unified field theory. I—V // Exp. Techn. Phys., 1980, Bd 28, S. 395—402, 499—508; 1981, Bd 29, S. 129—136, 337—341, 463—480.
111. Эйнштейн А., Громмер Я. Доказательство несуществования всюду регулярного центрально-симметричного поля в теории поля Т. Калуцы. (1923) // Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 2. М.: Наука, 1966, с. 130—133.
112. Эйнштейн А. К теории связи гравитации и электричества Калуцы. (1927) // Там же, с. 190—196.
113. Эйнштейн А., Майер В. Единая теория гравитации и электричества. I—II. (1931) // Там же, с. 347—348; с. 366—386; с. 386—398.
114. Эйнштейн А., Бергман П. Обобщение теории электричества Калуцы. (1938) // Там же, с. 492—513.
115. Эйнштейн А., Бергман В., Бергман П. О пятимерном представлении гравитации электричества (1941) // Там же, с. 543—554.
116. Эйнштейн А., Паули В. Несуществование регулярных стационарных решений релятивистских уравнений поля. (1943) // Там же, с. 560—567.
117. Юст К. (Just K.) Neue Feldgleichungen zur Jordanschen Gravitations-Theorie // Zeits. f. Physik, 1955, Bd 140, S. 485—493.

ba
v.

та
р-
fu
//
//
Г.
Эт
у
19

Э
по
ст
тв
в
к

н
z
л
s
г
а
v
р
с
1

МОНОГРАФИЯ

Юрий Сергеевич Владимиров

РАЗМЕРНОСТЬ ФИЗИЧЕСКОГО
ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ
И ОБЪЕДИНЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Зав. редакцией *С. И. Зеленский*
Редактор *Г. Е. Горелик*
Обложка художника *Н. Н. Сенько*
Художественный редактор *Ю. М. Добрянская*
Технический редактор *К. С. Чистякова*
Корректоры *М. И. Эльмус, С. Ф. Будаева*

ИБ № 2644

Сдано в набор 17.11.86.
Подписано в печать 12.06.87.
Л-62165 Формат 60×90/16 Бумага тип. № 3.
Гарнитура литературная. Высокая печать
Усл. печ. л. 13,5 Уч.-изд. л. 13,46
Тираж 2500 экз. Заказ 536. Изд. № 4226
Цена 2 р. 30 к.

Ордена «Знак Почета» издательство
Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.
Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы