М. Я. Выгодский

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА в ДРЕВНЕМ МИРЕ

*

1941

М. Я. ВЫГОДСКИЙ

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА В ДРЕВНЕМ МИРЕ

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1941 ЛЕНИНГРАД

Редактор *А. Юшкевич.* Подписано к печати 24 мая 1941 г. $15^{7}/_{8}$ печ. л., 18,25 авт.
47300 тип. зн. в печ. л. Тираж 15000 экз.

А 30581 Цена книги 8

Тип. арт. „Советский Печатник". Ленинград, Моховая, 40. Заказ № 6384.

ОТ АВТОРА

Эта книга обращается к широкому кругу читателей; предполагаемая ею подготовка не выходит за пределы программы средней школы. Я надеюсь, что она будет доступна и учащемуся старших классов средней школы. Но в особенности я имел в виду преподавателя математики в школе. Вряд ли нужно распространяться о том, как нужна нашему школьному учителю книга, по которой он мог бы познакомиться с историей преподаваемого им предмета. Но, пожалуй, не лишним будет вкратце охарактеризовать установки, из которых, по мнению автора, должна такая книга исходить и которые автор стремился осуществить.

В огромном большинстве популярных книг стремления авторов не идут дальше того, чтобы в доступной и занимательной форме изложить определенный круг научных сведений. Обосновывать излагаемые факты и теории обычно считается излишним. Научно-популяриая книга обычно противопоставляется научной. Читателю научно-популярной книги приходится верить автору на слоао во всем: и в верности сообщаемых фактов, и в правильности их освещения, и в указании породивших их причин.

Такое изложение имеет смысл в тех случаях, когда факты являются твердо установленными, когда они достаточно освещены в литературе и когда совершенно ясны их причины и обстоятельства возникновения. Но история элементарной математики имеет дело с событиями столь давними и столь мало исследованными, что изложение ее в указанном духе приводит к печальным последствиям. Читатель никогда не может быть уверенным в том, что сообщаемые ему сведения являются фактами, а не предположениями автора. Кроме того, он не знает, насколько удалился автор от стиля и метода подлинника, стремясь говорить с читателем на привычном читателю современном математическом языке.

В основу этой книги положено стремление познакомить читателя с фактическим материалом по первоисточникам. Это не значит, что книга представляет собой хрестоматию по истории математики. Читатель найдет здесь связное изложение материала, стремящееся дать по возможности цельную картину истории арифметики и алгебры в древнем мире, выяснить обстоятельства и причины возникновения и развития различных приемов счета и методов решения задач. При больших пробелах в наших знаниях по истории математики в древности нельзя было обойтись без привлечения гипотетических соображений; но всюду, где это делается, об этом полным голосом говорится. Разбираются также и те из высказывавшихся в литературе точек зрения, которые кажутся автору неправильными.

Большое число цитат из первоисточников позволит читателю самому судить о том, насколько правильно то или иное суждение, а литературные указания помогут тому, кто захочет расширить и углубить свои знания по затрагиваемым вопросам.

Так как язык и методы древних авторов непривычны для современного читателя, я не мог обойтись без обстоятельного разбора и пояснения приводимых текстов. Без этого книга не могла бы быть популярной.

По кругу затрагиваемых вопросов первые две главы этой книги совпадают с книгой О. Нейгебауера „Лекции по истории античных математических наук", т. I. Но в „Лекциях" Нейгебауера фактический материал в большинстве случаев дается в модернизированном изложении, тогда как в моей книге центральное место принадлежит воспроизведению документальных данных. При этом, мне кажется, моя книга будет доступнее для широкого читателя, чем книга Нейгебауера.

По арифметике и алгебре стран древнего Востока — Египта и Вавилона — в этой книге читатель найдет, конечно, не весь, но, как мне кажется, основной фактический материал. К сожалению, по отношению к древней Греции мне не удалось дать все, что хотелось бы и что было бы необходимо. Именно, совершенно без рассмотрения осталась арифметика пифагорейской школы и алгебра Диофанта. Откладывать выход книги до того времени, когда мне удастся литературно обработать этот материал, значило бы задержать ее выход надолго. Поэтому я решился на издание этой книги в настоящем виде, несмотря на ее неполноту, полагая, что изложенный здесь материал обладает все же некоторой цельностью.

Как сказано, книга эта рассчитана на широкого читателя. Надеюсь, однако, что специалисты-математики и историки также найдут в ней для себя кое-что интересное.

К сожалению, мне не довелось изучить языков древних египтян и древних вавилонян, так что я вынужден опираться на переводы математических текстов древнего Востока. Что же касается главы, посвященной арифметике древних греков, то она написана на основе изучения источников на языке оригинала. Ознакомлением с древнегреческим языком я обязан любезной помощи проф. С. Я. Лурье, руководившего моими занятиями. Ему я выражаю глубокую благодарность.

Приношу также искреннюю признательность проф. С. А. Яновской, с исключительным вниманием читавшей рукопись этой книги, за ряд ценных замечаний и советов.

М. Выгодский.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I

Арифметика древних египтян

§ 1. Условия развития математики в древнем Египте. Источники . . 7
§ 2. Нумерация 11
§ 3. Действия над целыми числами 13
§ 4. Каноническое представление дробей 16
§ 5. Деление целого числа на целое в общем случае 18
§ 6. Таблица деления $2:k$ 20
§ 7. Схема вспомогательных вычислений в таблице $2:k$ 25
§ 8. Сложение и вычитание дробей 28
§ 9. Исчисление кучи 32
§ 10. Исчисление кучи и метод ложного положения 37
§ 11. Арифметическая прогрессия 39
§ 12. Вопрос об уровне развития математики в древнем Египте . . 42
§ 13. Геометрическая прогрессия 44
§ 14. Объем усеченной пирамиды и вопрос о существовании алгеброобразных методов в древнем Египте 50
§ 15. Косвенные доводы в пользу предположения о высоком уровне развития древнеегипетской математики 54

ГЛАВА II

Вавилонская арифметика и алгебра

§ 1. Источники 57
§ 2. Нумерация 61
§ 3. Происхождение шестидесятерично-позиционной системы . . . 66
§ 4. Сложение и вычитание 70
§ 5. Таблицы умножения 72
§ 6. Таблицы обратных величин. Деление 76
§ 7. Происхождение таблиц умножения. Теория Нейгебауера и ее критика 86
§ 8. Происхождение таблиц умножения. Точка зрения автора . . . 92
§ 9. Математические задачи клинописных текстов 96
§ 10. Исчисление процентов 97
§ 11. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Суммирование ряда квадратов 102
§ 12. Синтетические методы решения задач 107
§ 13. Геометрические задачи как источник и материал для применения алгебраических методов 117
§ 14. Извлечение квадратного корня 120
§ 15. Геометрические задачи, приводящие к полному квадратному уравнению 124
§ 16. Отвлеченные задачи, приводящие к квадратному уравнению. Системы уравнений и методы их решения 135
§ 17. Кубические уравнения 149
§ 18. Была ли алгебра вавилонян геометрической? 160
§ 19. Параллель между вавилонской математикой и египетской . . . 164

ГЛАВА III

Арифметика древних греков

§ 1. Устный и пальцевый счет 168
§ 2. Абак 170
§ 3. Аттическая нумерация 173
§ 4. Ионийская нумерация 176
§ 5. Происхождение ионийской нумерации 179
§ 6. Запись больших чисел 186
§ 7. „Октады" Архимеда и „тетрады" Аполлония 188
§ 8. Действия с целыми числами 192
§ 9. „Обыкновенные" и „основные" дроби 198
§ 10. Шестидесятеричные дроби 204
§ 11. Умножение шестидесятеричных чисел 212
§ 12. Деление шестидесятеричных чисел 214
§ 13. Общая оценка древнегреческой арифметики 216
§ 14. Извлечение квадратного корня у Архимеда 219
§ 15. Рациональные приближения для отношения диагонали квадрата к его стороне 228
§ 16. Архимедовы приближения для отношения $\sqrt{3}:1$ 234
§ 17. Процесс извлечения квадратного корня у Теона Александрийского 238
§ 18. Процесс извлечения квадратного корня у Герона 243
§ 19. Извлечение кубического корня 248

ГЛАВА I

Арифметика древних египтян

§ 1. Условия развития математики в древнем Египте. Источники

Древние греки, математическая культура которых оказала столь большое влияние на науку западноевропейских народов и явилась фундаментом, на котором построена современная математика, считали себя учениками египтян.

Еще Геродот утверждал, что греки заимствовали свои первые геометрические познания у египтян: „Они (египетские жрецы) говорили, что царь разделил землю между всеми египтянами, дав каждому по равному прямоугольному участку; из этого он создал себе доходы, приказав ежегодно вносить налог. Если же от какого-нибудь надела река отнимала что-нибудь, то владелец, приходя к царю, сообщал о происшедшем. Царь же посылал людей, которые должны были осмотреть участок земли и измерить, насколько он стал меньше, чтобы владелец вносил с оставшейся площади налог, пропорциональный установленному. Мне кажется, что так и была изобретена геометрия, которая затем из Египта была перенесена в Элладу“ [1]).

Условия развития математики в древнем Египте охарактеризованы здесь в несколько наивной форме, но по существу правильно. В древней стране культурного земледелия математические знания должны были зародиться в очень отдаленные времена, в эпоху первых династий фараонов или еще раньше. Государственная организация земледельческих работ, сбор налогов, ведение отчетности — все эти операции, планомерно проводимые с помощью многочисленных кадров специально обучаемых чиновников, были бы совершенно немыслимы без систематизации основных арифметических и геометрических фактов, без их теоретического осмысливания. Величественные архитектурные сооружения мемфисского периода воздвигались несомненно под руководством людей, сведущих в математике. Пирамида первого фараона IV династии Хуфу (Хеопса) была построена, примерно, за $3^1/_2$ тысячи лет до нашей эры; таким образом уже в это время математика египтян должна была стоять на значительной высоте. К сожалению, в сравнительно немногочисленных письменных

---

1) Herodot, II, 109.

памятниках этой отдаленной эпохи нет почти никаких данных о состоянии математических знаний древних египтян. Встречаются лишь записи чисел, позволяющие судить о нумерации египтян и о древнейших формах числовых знаков.

Зато от более поздних времен до нас дошли не только „косвенные" документальные данные, к числу которых относятся юридические документы и хозяйственные записи, содержащие математические расчеты, но и специально математическая литература, своего рода математические учебники, или, лучше сказать, учебные пособия. В ряде случаев мы имеем только небольшие отрывки из литературных произведений этого рода, но два произведения дошли до нас почти неповрежденными. Как и все египетские тексты, эти произведения написаны на папирусе.

Наиболее обширным по количеству содержащегося в нем материала является „папирус Райнда" (Rhind), названный так по имени первого своего владельца. Он хранится в Британском музее в Лондоне. Текст его был впервые расшифрован и издан Эйзенлором в 1870 г. вместе с немецким переводом [1]).

Второй математический папирус находится в нашей стране и хранится в Московском музее изящных искусств. Расшифровка его была начата академиком Б. А. Тураевым в 1917 г. Смерть Тураева прервала эту работу, она была закончена академиком В. В. Струве в 1927 г. [2]).

Эпоха, в которую написаны наши математические папирусы, определяется специалистами лишь приблизительно. Их относят, примерно, к XVIII веку до н. э. Очень вероятно, впрочем, что содержание этих папирусов восходит к эпохе, гораздо более древней, чем время их написания. Во всяком случае, математические познания, которые мы в них находим, безусловно не являлись новыми открытиями для современников. Напротив, они были освящены традицией глубокой давности. Не даром решение большинства задач начинается почти всегда словами: „делай, как делается".

Несомненно, математические папирусы, известные нам, представляют собой не научные трактаты, а практические руководства, и

---

[1]) Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter; übersetzt und erklärt von A. Eisenlohr, Leipzig 1877. С этого немецкого перевода сделан был перевод папируса Райнда на русский язык проф. В. В. Бобыниным. Читатель найдет его в работе В. В. Бобынина „Математика древних египтян" (Москва 1880 г.). Позднейшая критика перевода Эйзенлора сделала необходимым новое издание текста и перевода. В 1923 г. эта работа была выполнена Питом в Англии (T. E. Peet, The Rhind Mathematical Papyrus, Liverpool, University Press, 1923), а в 1929 г. группой авторов в США (Chace, Bull, Manning and Archibald, The Rhind Mathematical Papyrus, Ohio, Oberlin 1929).

[2]) Текст и немецкий перевод Московского папируса были изданы в 1930 г. за границей: W. W. Struve, Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. A. B. I, Berlin, J. Springer, 1930. Русского издания мы, к сожалению, до сих пор не имеем.

рассчитаны они не на сведущих читателей, а на заурядного ученика. В них мы находим правила, или, вернее, образцы элементарных арифметических расчетов и решение разнообразных задач как отвлеченного, так и конкретного содержания: задачи на раздел имущества, на вычисление вместимости амбара, площади поля, объема корзины и т. д.

В математических папирусах не раз затрагиваются вопросы геометрического характера, и подчас они имеют значительный исторический интерес; но всегда мы имеем здесь дело с задачами на вычисление; центральным пунктом задачи является ее арифметическое решение. И вообще в известных нам папирусах мы не встречаем тенденции к выделению геометрических вопросов в самостоятельную область науки. Таким образом в вышеприведенное суждение Геродота приходится внести поправку: древние греки, заимствуя у египтян геометрические сведения, должны были познакомиться и с их арифметикой. И если в греческой геометрии мы не находим почти никаких следов египетского влияния, то в вычислительной технике древних греков египетское влияние, как мы в дальнейшем увидим, сказалось в очень значительной степени.

Когда нынешний читатель впервые знакомится с текстом математических папирусов, ему прежде всего бросается в глаза совершенно необычная для него форма изложения. Ниже будут даны образцы задач, взятые из Лондонского и Московского папирусов, из которых читатель ближе познакомится со стилем египетских математических текстов. Сейчас мы заметим только, что сообщаемые в них решения изложены сугубо догматически.

Не дается не только каких-либо „доказательств“ или обоснований, но даже и формулировки правила, которое должен усвоить учащийся; приводится только ход решения типовой задачи при заданных числовых условиях.

Совершенно очевидно, что сочинение такого рода предназначалось не для целей общего образования, не для воспитания навыков в математическом мышлении, а должно было служить вспомогательным предметом профессионального образования.

На какую же категорию читателя рассчитаны эти учебные руководства? „Лови гадов, мышей; выпалывай сорные травы засвежо; получай обильную пряжу. Проси у бога Ра тепла, ветра и высокой воды“. Эти заключительные слова папируса Райнда давали некоторым авторам повод полагать, что папирус адресуется к земледельцу. Однако невозможно допустить, чтобы египетский крестьянин имел возможность пройти курс математики в том объеме, который содержится в папирусе Райнда. „У земледельца вечное платье. Его здоровье — как у человека, лежащего подо львом. Едва он вернулся домой, как ему опять надо уходить“ [1]) — так характеризует некий Дуау, египтянин той же эпохи, положение крестьянина.

[1]) Древний мир. Изборник источников по культурной истории Востока, Греции и Рима. Под редакцией Б. А. Тураева и И. Н. Бороздина, ч. I, Москва 1915, стр. 25.

В древнем Египте, конечно, наука была недоступна ни крестьянину, ни ремесленнику. Но в стране фараонов существовала довольно значительная профессиональная группа, которой математические знания или, вернее, навыки, были действительно необходимы. Это были писцы — профессия, которая в древнем Египте была гораздо более ответственной, чем в более близкие к нам времена. Роль египетского писца может быть сравнена, пожалуй, с ролью бухгалтера в крупной хозяйственной единице. Это был и законовед, и статистик, и вычислитель, и он занимал весьма привилегированное общественное положение. Упомянутый выше Дуау своему сыну Пиопи предназначал именно эту карьеру. Посылая его в „дом учения писанию", он написал для сына наставление. В красочных выражениях изображается в этом документе безотрадная жизнь крестьянина, каменщика, садовника, кузнеца, ювелира и людей многих других профессий. О профессии же писца говорится следующее: „Обрати свое сердце к книгам... Как в воде, плавай в книгах — ты найдешь там наставление: «если писец находится при дворе, он не будет в нем нищим, но насытится». Я не знаю другой должности, которая могла бы дать повод к подобному изречению, поэтому внушаю тебе любить книги, как родную мать, и излагаю тебе все преимущества знающих их... Нет писца, лишенного пропитания от достояния царского дома. Богиня рождения дает обилие писцу, его ставят во главе суда. Благодарят бога его отец и мать — он направлен на путь жизни" [1]).

Писец должен был обладать значительными математическими навыками и в совершенстве владеть ими. Об этом свидетельствует хотя бы такое характерное поучение, которое опытный писец обращает к своему коллеге, упрекая его в невежестве:

„Я хочу объяснить Тебе, в чем Твоя сущность, когда Ты говоришь: «Я полномочный писец войска».

„Тебе дают озеро, которое Ты должен выкопать. Тогда Ты приходишь ко мне, чтобы осведомиться насчет провианта для солдат. Ты говоришь: «Вычисли его мне». Ты неисправен по своей должности, и то, что я Тебя должен поучать выполнению Твоих обязанностей, обрушится на Твой же затылок.

„Иди сюда, я скажу Тебе кое-что в дополнение к тому, что Ты сказал. Я ставлю Тебя в затруднительное положение, когда я (заставляю Тебя представить себе следующее): Ты — царский писец, Ты приведен к окну (для аудиенции) для какого-нибудь замечательного дела... Необходимо сделать укрепление в 730 локтей длины и 55 локтей ширины, состоящее из 120 ящиков, наполненных балками и камышом; в верхней части его высота 60 локтей, в середине 30 локтей с... в 15 локтей, и его... имеет 5 локтей. Спрашивают у генералов, сколько для этого укрепления потребно кирпичей, и собра-

[1]) Древний мир. Изборник источников по культурной истории Востока, Греции и Рима. Под редакцией Б. А. Тураева и И. Н. Бороздина, ч. I. стр. 25.

лись все писцы, и ни один из них ничего не знает, они все полагаются на Тебя и говорят: «Мой друг, Ты — опытный писец, так реши же быстро для нас»... Не допусти, чтобы о Тебе сказали: «Есть также и такие вещи, которых и Ты не знаешь»"[1]).

Мы видим, таким образом, что от профессионального писца, царского чиновника древнего Египта, требовались разнообразные математические навыки; он не должен был ударить лицом в грязь, оказавшись беспомощным и решении какой-либо задачи. В частности, всевозможные выкладки, сиязанные с расчетом продовольствия, обложения налогом, измерения площадей и объемов, писец должен был выполнять быстро. Отсюда понятно, почему задачи, имеющие отношение к сельскому хозяйству, одному из важнейших источников дохода царской казны, составляют значительную часть содержания математических папирусов.

Наряду с задачами, содержание которых носит практический характер, в папирусах мы находим и явно надуманные, имеющие характер „развлекательных задач" (см., например, нижеприводимую задачу о семи кошках). В этом также нет ничего удивительиого; такого рода задачи помещались во все эпохи в самых практически ориентированных руководствах. Назначение их совершенно понятно: они служат целям тренировки учащегося.

После этих общих замечаний о наших источниках я перехожу к характеристике тех математических знаний древних египтян, о которых эти источники нас информируют.

§ 2. Нумерация

Система нумерации древних египтян оставалась, как свидетельствуют многочисленные памятники, по существу неизменной в течение трех тысячелетий. Менялась только форма числовых знаков. Это изменение совершалось параллельно с эволюцией египетского письма.

В иероглифическом письме знаки имели вид рисунков, изображавших людей, животных, птиц, насекомых, предметы обихода и т. д. Когда-то эти знаки служили для изображения соответствующих им понятий, но в иероглифическом письме они уже приобрели фонетический смысл и читались как слоги, а в иных случаях даже как буквы (начальные слоги или буквы соответствующих слов). Числовые знаки, употреблявшиеся в иероглифическом письме, также имели вид рисунков; некоторые из этих рисунков сохраняли внешнее сходство с конкретными предметами.

Для единицы употребляется знак |; как и во многих других системах нумерации, этот знак и в египетской нумерации произошел, несомненно, от примитивного обозначения чисел зарубками.

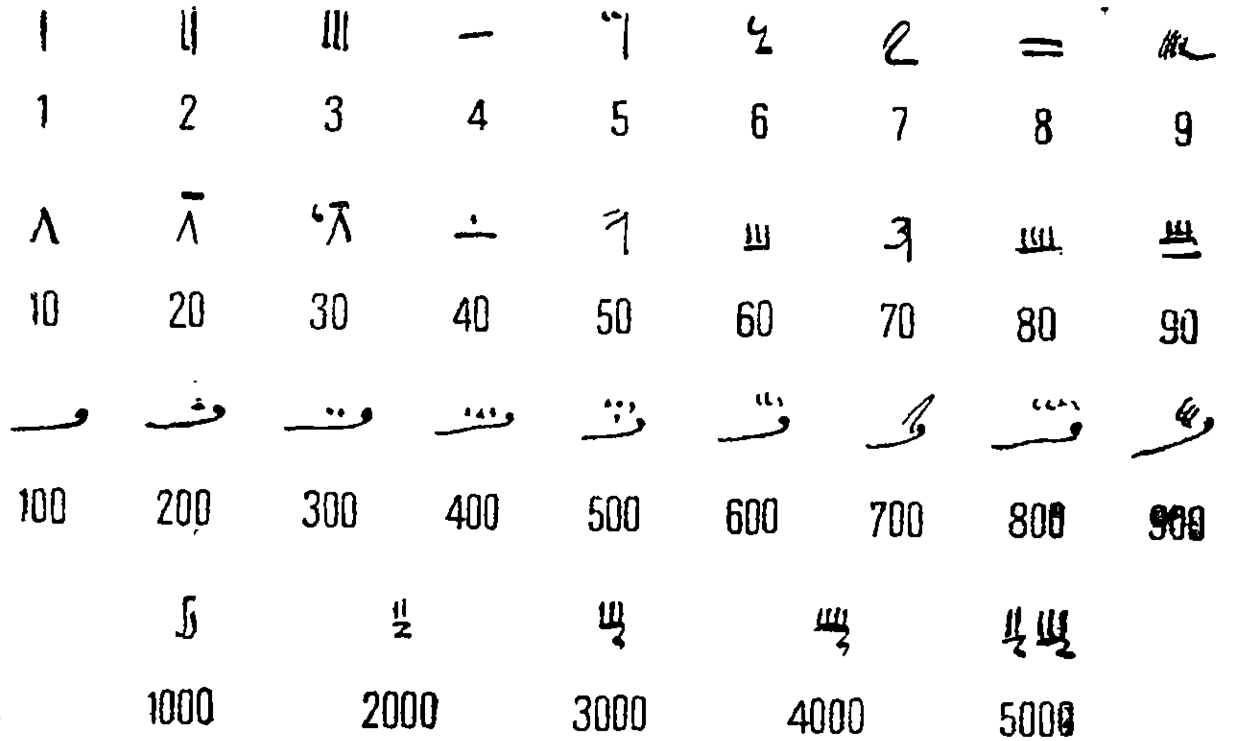
[1]) Этот отрывок из хрестоматии Эрмана я цитирую по русскому переводу указанной выше книги Нейгебауера (стр. 136).

Таким образом, для него не приходится искать смыслового значения. Иероглифический знак десятки 𓎆, вероятно, имел прежде смысловое значение; какое именно — остается невыясненным.

Сотня изображалась знаком 𓍢, имевшим значение „измерительиая веревка“. Тысяча изображалась знаком 𓆼, символизировавшим неопределенное множество; 10 000 — знаком 𓂭 — поднятый кверху палец. Существовали даже знаки для ста тысяч (сидящая лягушка) и миллиона (человек с поднятыми руками).

В начертании целых чисел строго применялся поразрядный десятичный принцип. Числа, меньшие десяти, обозначались простым повторением знака единицы (например, ||||| = 5). Таким же образом повторялись знаки десятки, сотни и т. д. в многоразрядных числах: записывалось подряд нужное число знаков для каждого разряда. Так, число 233 запишется в иероглифических обозначениях следующим образом: 𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆|||. Замечу, кстати, что направление иероглифического письма не было вполне определенным; следующие друг за другом знаки располагались по большей части в вертикальные колонны, читавшиеся сверху вниз; переход от предшествующей колонны к следующей совершался справа налево, т. е. в направлении, противоположном принятому у нас. Однако, когда это представлялось почему-либо более удобным, применяли и иные способы расположения; строки располагались, например, горизонтально, а не вертикально; направление чтения также изменялось иногда на обратное (и тогда все знаки подвергались зеркальному отображению). Все же основным направлением являлось направление справа налево. Для нас интересно отметить то, что направление, в котором понижались в числовых записях разряды чисел, всегда совпадало с направлением строки, т. е. в этом отношении соблюдался тот же принцип, что и в нашей нумерации (этому же принципу, кстатн сказать, следуют все исторически известные способы нумерации).

По мере распространения письма на бумаге (папирусе), иероглифическое письмо, характерное для надписей на стенах, постепенно преобразовывалось в так называемое иератическое; в иератическом письме знаки терялн вид рисунков, из которых они произошли и с которыми они сохраняли уже лишь отдаленное сходство. Параллельно с этим шла и эволюция формы числовых знаков. Сравнение иероглифических числовых знаков с иератическими делает несомненным, что последние образовались из упрощения первых, а не представляют собой нового изобретения. Однако многие обозначения изменились настолько сильно, что приобрели новый характер: благодаря значительному сокращению письма повторяющиеся знаки одного и того же разряда слились воедино, так что получилась цифровая десятичная система, которая отличается от нашей только отсутствием в ней позиционного принципа. О виде иератических цифр может дать представление следующая таблица, в которой даны цифры в той форме, в которой они записываются в папирусе Райнда[1]):



§ 3. Действия над целыми числами

Если числовые обозначения египтян были близки по своему характеру к нашим, то вычислительные операции, выполняемые при письменном счете, носили совершенно своеобразный характер.

Что касается сложения и вычитания целых чясел[2]), то в этих действиях не приходится отметить ничего примечательного. При описанной выше системе обозначений они не должны были представлять никаких затруднений для вычисляющего. В иероглифической системе обозначений сложение, например, сводится к простому присчитыванию знаков одинакового разряда и замене десяти знаков низшего разряда одним знаком высшего — точь-в-точь, как это делается на счетах.

Замечу попутно, что у египтян существовал и счетный прибор, аналогичный нашим счетам. Вероятно, он отличался от счетов тем, что камешки, которые служили для обозначения единиц различных разрядов, не передвигались по скрепляющей их нити, а клались в отделения счетной доски. Все, что известно нам об этом приборе, сводится к замечанию Геродота, что египтяне „считают с помощью

---

1) Eisenlohr, Ein math. Handbuch der alten Aegypter, Leipzig 1877, стр. 8—9. Там же приведены и цифры, содержащиеся в других источниках. См. также Cantor, Vorlesungen über geschichte der Mathematik, т. I (приложение).

2) О записи дробей и выполнении операций над ними будет сказано ниже.

камешков, передвигая руку справа налево, тогда как эллины ведут ее слева направо"[1]).

Умножение целых чисел египетский вычислитель выполнял с помощью своеобразного приема, восходящего, повидимому, к глубокой древности. В основе этого приема лежит операция *удвоения*, играющая во всей вычислительной технике египтян ведущую роль.

Пусть, например, нужно умножить 213 на 37. Египетский вычислитель составляет таблицу:

/1	213
2	426
4	852
/8	1 704
16	3 408
/32	6 816

в ней каждое последующее число правого (при египетском направлении письма — левого) столбца получается удвоением предшествующего. (Повидимому, результат получился с помощью двух равных чисел.) В левом столбце помещаются соответствующие множители вида 2^k; таблица продолжается до тех пор, пока в левом столбце не появится наибольшее из чисел 2^k, меньших, чем множитель 37. В данном случае таким наибольшим числом является $32 = 2^5$.

Это наибольшее число левого столбца отмечается наклонной черточкой. Такой же черточкой отмечаются и некоторые другие числа левого столбца, выбираемые таким образом, чтобы сумма отмеченных чисел давала множитель. В данном случае отмечаются еще 4 и 1, ибо $32 + 4 + 1 = 37$.

Нетрудно видеть, что применяемое здесь разложение данного целого числа (37) на сумму слагаемых вида 2^k всегда возможно и единственно (по существу мы здесь имеем представление данного числа по двуричной системе счисления). Практически оно легко осуществляется: достаточно итти в левом столбце снизу наверх, пропуская те числа, прибавление которых к сумме предыдущих дает число, превышающее заданное.

Произведя указанным способом разметку чисел в левом столбце, вычислитель должен был еще составить сумму стоящих против них чисел правого столбца; полученный ответ записывался снизу, так что вся выкладка имела вид:

/1	213
2	426
/4	852
8	1 704
16	3 408
/32	6 816
вместе	7 881

[1]) Herodot, II, 36. Насколько счет камешками был распространен у народов древности, можно судить по тому, что термин „калькуляция", перешедший во все европейские языки с латинского языка и равнозначущий термину „подсчет", означает буквально „счет камешками" (точнее всего было бы перевести его: „камешкование"), ибо латинское слово calculus означает „камешек". В древнегреческом языке имеется аналогичное явление. „Класть камешки" (ψήφους τιθέναι) означает „считать".

Таков общий прием умножения целых чисел в египетской математике; иногда на помощь ему приходит использование специальных свойств числа 10 в десятичной системе счисления. Так, например, умножение 80 на 14 по общему способу производилось бы так:

1	80
/2	160
/4	320
/8	640
всего	1 120

Но египетский вычислитель в одном из подобных случаев поступает следующим образом:

1	80
/10	800
2	160
/4	320
всего	1 120

Использование особенностей десятичной системы нумерации, которое лежит в основе нынешнего способа умножения, в египетской вычислительной технике совершается лишь в отдельных случаях: основным же приемом является „двоичная" операция.

Эта операция является основной и в других арифметических действиях; в частности, при делении целых чисел, которое совершается способом, совершенно аналогичным способу умножения. Если, например, требовалось разделить 7881 на 213, то египетский вычислитель составлял таблицу

1	213
2	426
4	852
8	1 704
16	3 408
32	6 816

тождественную вышеприведенной. Продолжается она до тех пор, пока следующее удвоение не даст в правом столбце числа, большего, чем делимое 7 881. Затем число 7 881 разлагается на сумму чисел, принадлежащих правому столбцу, так же, как это при умножении делалось по отношению к числу 37 с числами левого столбца. Если как в данном случае, деление выполняется нацело, то указанное разложение осуществляется до конца, и сумма соответствующих чисел левого столбца $(32 + 4 + 1)$ дает искомый результат. Если же деление не выполняется нацело, то указанный прием выбора чисел правого столбца (пропуск тех чисел, прибавление которых к сумме предыдущих дает числа, большие делимого) также приводит к отбору чисел в левом столбце. Только теперь сумма этих чисел дает лишь целую часть частного.

Получение дробной части, с точки зрения нынешнего вычислителя, не представляет никаких особенных затруднений: остаток дает числитель, а делитель служит знаменателем дробной части результата. Но египетский вычислитель подходил к вопросу иначе, ибо его способ представления дробей существенно отличался от ныне употребительных.

§ 4. Каноническое представление дробей

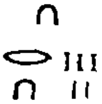
Египтяне, повидимому, не знали ни „систематических“ (например, десятичных), ни „обыкновенных“ дробей. По крайней мере мы не находим нигде в древнеегипетских источниках никаких следов этих образований. Это отнюдь не означает, что египтяне не могли бы сказать, что некоторая величина составляется, например, семикратным повторением десятой доли другой величины. Но такое констатирование не было еще с точки зрения египетского вычислителя „каноническим“ представлением одной величины в долях другой, принятой за единицу. Другими словами, если указанное выше соотношение между двумя величинами тем или иным путем было установлено, то оно еще не давало в глазах египтянина *окончательного выражения числа*. Точно так же, если кто-нибудь из нас нашел бы, что некоторая величина равна сумме половины и трети единицы, он представил бы ее „числом“ $\frac{5}{6}$, т. е. каноническим представлением искомой величины, выражающим, что она равна пятикратно взятой шестой доли единицы.

Замечательно, что для египетского вычислителя дело обстояло в данном случае прямо противоположным образом. Найдя, что некоторая величина составляет пять шестых долей единицы, он находил отсюда „числовое“ выражение ее, смысл которого состоял в том, что она представлялась суммой половины единицы и трети ее! И вообще, всякую дробную часть единицы египетский вычислитель выражал совокупностью (суммой) „основных“ дробей. Этот способ и давал каноническое выражение дробного числа. „Основными“ дробями, за единственным исключением, о котором будет сейчас сказано, являлись дроби, которые в нашей записи имеют вид $\frac{1}{k}$ (k — целое число), т. е. k-е доли единицы.

Для обозначения этих „единичных“ дробей египтяне писали число, которое мы ставим в знаменателе, а над ним (или перед ним) помещали знак , который означал также и определенную меру емкости (примерно, 0,17 *л*). Повидимому, это обозначение сначала было знаком этой именованной величины, а лишь впоследствии получило отвлеченный смысл.

Таким образом,  обозначало $\frac{1}{5}$

 » $\frac{1}{10}$

 » $\frac{1}{15}$.

Эти иероглифические обозначения в иератическом письме подверглись, разумеется, таким же изменениям, как и знаки для соответствующих целых чисел (при этом овальный символ дроби преобразовался в точку); образцы написания дробей в папирусе Райнда даны в следующей таблице[1]):

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

Следуя Нейгебауеру, я буду передавать эти обозначения единичных дробей символами $\overline{5}\left(=\frac{1}{5}\right)$, $\overline{10}\left(=\frac{1}{10}\right)$, $\overline{15}\left(=\frac{1}{15}\right)$ и т. д.

Для наиболее простых дробей существовали особые „индивидуальные" обозначения. Именно, дробь $\frac{1}{2}$ обозначалась иероглифом , по смыслу означавшим понятие „половина" или „сторона"; дробь $\frac{2}{3}$ обозначалась символом ; в общей системе записи дробей этот символ должен был бы обозначать половину, но никакого смешения на этой почве произойти не могло, так как для половины существовал, как мы видели, особый знак. Эти обозначения для $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$ возникли в отдаленное время, когда общего представления о дроби еще не существовало и когда знали только „простейшие" дроби. К числу этих „простейших" дробей относились, конечно, и дроби $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$. Для них также существовали особые обозначения: $=\frac{1}{3}$; $=\frac{3}{4}$[2]; $\times=\frac{1}{4}$; в позднейшее время $\frac{3}{4}$ стали составлять из основных дробей, следуя общему принципу, так что $\frac{3}{4}$ записывались как $\times$; самостоятельно же знак $\times$ перестал

---

[1]) О дробях второй половины этой строкн см. ниже.

[2]) Может возникнуть вопрос, как возникли обозиачения $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$, столь обманчнвые по своему виду. Их сходство с обозначениями дробей $\frac{1}{k}$ не случайно. И там, и здесь символом обозначается „часть". Но в то время как символ означает „четвертая" часть $\left(\frac{1}{4}\right)$, символ означает три части (а не третья часть), а символ — две части. При этом подразумевается, что три части берутся из четырех, а две из трех, т. е. „k частей" озиачает „k частей из $(k+1)$". В египетской записи дробей этот способ применяется лишь к случаю $k=2$; $k=3$. В иекоторых языках, например в греческом, сохранились аналогичные наименования и для больших значений k. В греческом языке $\frac{4}{5}$ называется „четыре части". См. Нейгебауер, Лекции по истории античных математических наук, т. I, ОНТИ, 1937, стр. 103—108.

употребляться, и вместо него появился знак  , следующий общему правилу начертания единичных дробей.

Раньше было сказано, что „основными“ дробями, т. е. дробями, суммой которых египтяне представляли каждое дробное число, служили единичные дроби — за единственным исключением, о котором теперь и уместно сказать.

Этим исключением является дробь $\frac{2}{3}$, которая фигурирует постоянно в качестве основной. Объясняется это, конечно, тем, что с древнейших времен, когда в сознании существовало лишь небольшое число индивидуальных дробей и отсутствовало еще общее понятие дроби, величина $\frac{2}{3}$ упрочилась в качестве индивидуального числа. Такую же роль должна была бы играть и величина $\frac{3}{4}$, для которой, однако, как мы только что видели, утвердилось представление в виде суммы половины и четверти. Вероятно, вытеснению дроби $\frac{3}{4}$ из числа основных дробей способствовала возможность простого „канонического“ представления: $\frac{3}{4} = \overline{2}\,\overline{4}$.

Может быть, возникает вопрос, почему дробь $\frac{2}{3}$ не могла быть с таким же успехом вытеснена представлением ее в виде $\frac{2}{3} = \overline{3}\,\overline{3}$. Дело в том, что египтяне, как правило, не пользовались представлением дроби в виде суммы *одинаковых* основных дробей. Так, например, дробь $\frac{2}{5}$ представляется не в виде $\overline{5}\,\overline{5}$, а всегда в виде $\overline{3}\,\overline{15}$. Естественно, что и для изображения дроби $\frac{2}{3}$ не применялось разложение $\overline{3}\,\overline{3}$ и, хотя она и преобразуется иной раз при вычислениях к виду $\overline{2}\,\overline{6}$, но наряду с этим продолжает постоянно играть роль основной дроби, удерживая свое индивидуальное обозначение, которое, следуя Нейгебауеру, мы будем в дальнейшем изображать символом $\overline{\overline{3}}$.

В итоге вышеизложенного мы можем сказать, что каноническим выражением дроби служило у египтян представление ее в виде совокупности (различных между собой) основных дробей, каковыми являлись (в окончательной стадии развития) единичные дроби вида $\overline{k}\left(\frac{1}{k}\right)$ и дробь $\overline{\overline{3}}\left(\frac{2}{3}\right)$.

§ 5. Деление целого числа на целое в общем случае

Возвратимся теперь к вопросу о делении целых чисел. Мы видели, что для получения целой части результата служил процесс удвоения. Дробная часть частного должна была, как мы только что видели, получить канонический вид, т. е. изобразиться с помощью ряда основных дробей. В основе нахождения этого ряда, в особенности при определении первых, главных его членов лежит процесс, обратный удвоению — образование половин; наряду с этим часто встречается, впрочем, и образование третей[1]). В простейшем случае, когда делитель есть степень двух, „двоичный“ процесс ведет всегда к цели и всегда применяется последовательно. Например, нужно найти частное 19 : 8. Составляем таблицу:

1	8
/2	16
$\overline{2}$	4
/$\overline{4}$	2
/$\overline{8}$	1

в которой удвоение совершается лишь один раз, так как следующее дало бы число, большее делимого. Затем совершается деление пополам, продолжающееся до тех пор, пока справа не получится 1. Целая часть результата (2) находится по изложенному выше правилу: вычитая из делимого (19) частное произведение (16), находим 3; это число нужно аддитивно составить из чисел правой колонны, — так как последняя содержит только степени числа 2, то это возможно единственным способом: $3 = 2 + 1$. Отмечая соответствующие строки косыми черточками, находим, что частное выражается „смешанным числом“ $2\ \overline{4}\ \overline{8}$.

Когда делитель не есть степень двух, то, очевидно, результат не мог получаться только одним процессом образования половин. В этом случае образование половин прерывается в „нужный момент“, по большей части тогда, когда получается первое число, меньшее делимого, и для выражения остающейся части делимого в долях делителя подыскиваются „удобные“ основные дроби. Например, при делении 180 : 250 (задача 56 папируса Райнда) вычислитель поступает так (см. нижеприводимую схему). Отыскивается половина от 250, получается 125. Остаток 55. Повидимому, рассматривая этот остаток как сумму $50 + 5$ (такое представление соответствует египетской нумерации), он берет теперь пятую и пятидесятую часть делителя, из которых составлен остаток. Все вычисление выглядит так:

1	250
/$\overline{2}$	125
/$\overline{5}$	50
/$\overline{50}$	5

Результат деления, следовательно, представляется дробью $\overline{2}\ \overline{5}\ \overline{50}$. Нетрудно видеть, что при такого рода подысканиях ответ, вообще говоря, не будет однозначным. Так, например, результат деления 5 : 12 можно представить двояко: $\overline{3}\ \overline{12}$ и $\overline{4}\ \overline{6}$, смотря по тому, как разбить число 5 на слагаемые, являющиеся делителем числа 12, т. е. представить ли его в виде:

$$5 = 4 + 1 \quad \text{или} \quad 5 = 3 + 2.$$

[1]) Пример этого будет приведен несколько дальше.

Кроме того, как правило, такое разбиение и не всегда возможно. Другими словами, вообще говоря, нельзя построить схему деления таким образом, чтобы в правом ее столбце были только целые числа и делимое получалось бы в виде суммы, члены которой принадлежали бы правому столбцу[1]).

Поэтому непосредственный подбор основных дробей, составляющих результат, в общем случае был, несомненно, очень трудным делом. Отсюда, вероятно, возникла идея составления подсобных таблиц, в которых содержались бы готовые результаты некоторых „опорных" операций.

Такой опорной операцией в египетской вычислительной технике служит деление $2:k$, где k — нечетные целые числа (если k есть четное число $2k'$, то результат сразу представляется основной дробью $\overline{k'}$). В самом деле, для египетской вычислительной техники естественно каждое целое число представлять с помощью последовательных удвоений (начиная от единицы) в виде суммы степеней числа 2. Таким образом, вопрос о делении произвольного числа сводится к вопросу о делении чисел вида 2^k; например,

$$13:17=(8+4+1):17=8:17+4:17+1:17.$$

Пусть мы имеем таблицу, содержащую результаты деления $2:k$ для всех нечетных k, и пусть требуется найти $4:k_1$. Выписываем из нашей таблицы (при $k=k_1$) частное $2:k_1$; пусть оно составлено, скажем, из трех основных дробей вида $\frac{1}{k}$:

$$2:k_1=\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}.$$

Тогда, очевидно,

$$4:k_1=\frac{2}{l_1}+\frac{2}{l_2}+\frac{2}{l_3}.$$

Если среди чисел l имеются четные, то соответствующие величины $\frac{2}{l}$ прямо являются основными дробями; если же нет, то снова пользуемся таблицей чисел $2:k$, и тогда частное $4:k_1$ представится в виде суммы основных дробей. Среди них могут попасться одинаковые, и тогда необходимо дополнительное преобразование, но оно уже не представляет принципиальных трудностей и для нас поэтому неинтересно.

§ 6. Таблица деления $2:k$

Итак, с помощью таблиц, содержащих готовые результаты деления $2:k$, египетский вычислитель мог выполнять единым систематическим способом деление любого целого числа на любое целое. Такую сводку результатов „опорных" операций $(2:k)$ мы действи-

[1]) Будучи различными между собой, как этого требует египетская вычислительная техника.

тельно находим в наших источниках. В папирусе Райнда, который с этого и начинается, содержится наиболее богатый материал, охватывающий все нечетные числа до 101 включительно.

Если мы оставим пока в стороне пояснительные вспомогательные вычисления, сопровождающие некоторые результаты, и расположим окончательные результаты по обычной для нас форме, то таблицу эту можно будет представить следующим образом:

k	$2\overline{k}$	k	$2\overline{k}$
3	$\overline{2}\ \overline{6}$	53	$\overline{30}\ \overline{318}\ \overline{795}$
5	$\overline{3}\ \overline{15}$	55	$\overline{30}\ \overline{330}$
7	$\overline{4}\ \overline{28}$	57	$\overline{38}\ \overline{114}$
9	$\overline{6}\ \overline{18}$	59	$\overline{36}\ \overline{236}\ \overline{531}$
11	$\overline{6}\ \overline{66}$	61	$\overline{40}\ \overline{244}\ \overline{488}\ \overline{610}$
13	$\overline{8}\ \overline{52}\ \overline{104}$	63	$\overline{42}\ \overline{126}$
15	$\overline{10}\ \overline{30}$	65	$\overline{39}\ \overline{195}$
17	$\overline{12}\ \overline{51}\ \overline{68}$	67	$\overline{40}\ \overline{335}\ \overline{736}$
19	$\overline{12}\ \overline{76}\ \overline{114}$	69	$\overline{46}\ \overline{138}$
21	$\overline{14}\ \overline{42}$	71	$\overline{40}\ \overline{568}\ \overline{710}$
23	$\overline{12}\ \overline{276}$	73	$\overline{60}\ \overline{219}\ \overline{292}\ \overline{365}$
25	$\overline{15}\ \overline{75}$	75	$\overline{50}\ \overline{150}$
27	$\overline{18}\ \overline{54}$	77	$\overline{44}\ \overline{308}$
29	$\overline{24}\ \overline{58}\ \overline{174}\ \overline{232}$	79	$\overline{60}\ \overline{237}\ \overline{316}\ \overline{790}$
31	$\overline{20}\ \overline{124}\ \overline{155}$	81	$\overline{54}\ \overline{162}$
33	$\overline{22}\ \overline{66}$	83	$\overline{60}\ \overline{332}\ \overline{415}\ \overline{498}$
35	$\overline{30}\ \overline{42}$	85	$\overline{51}\ \overline{255}$
37	$\overline{24}\ \overline{111}\ \overline{296}$	87	$\overline{58}\ \overline{174}$
39	$\overline{26}\ \overline{78}$	89	$\overline{60}\ \overline{356}\ \overline{534}\ \overline{890}$
41	$\overline{24}\ \overline{246}\ \overline{328}$	91	$\overline{70}\ \overline{130}$
43	$\overline{42}\ \overline{86}\ \overline{129}\ \overline{301}$	93	$\overline{62}\ \overline{186}$
45	$\overline{30}\ \overline{90}$	95	$\overline{60}\ \overline{380}\ \overline{570}$
47	$\overline{30}\ \overline{141}\ \overline{470}$	97	$\overline{56}\ \overline{679}\ \overline{776}$
49	$\overline{28}\ \overline{196}$	99	$\overline{66}\ \overline{198}$
51	$\overline{34}\ \overline{102}$	101	$\overline{101}\ \overline{202}\ \overline{303}\ \overline{606}$

В других известных нам папирусах мы встречаем те же разложения, так что они носят как бы характер технических стандартов. А между тем с чисто математической точки зрения разложение частного $2:k$ на основные дроби возможно произвести бесконечно многими способами и часто даже среди этих способов можно указать такие, в которых число членов ряда не больше, чем в стандартном разложении. Так, например, для $2:35$ мы находим в таблице результат

$$\overline{30}\ \overline{42}\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{42}\right).$$

Между тем тот же результат можно было бы представить еще так:

$$2:35 = \overline{21}\ \overline{105}$$

$$2:35 = \overline{20}\ \overline{140}$$

$$2:35 = \overline{18}\ \overline{630}$$

Спрашивается, можно ли установить общий для всей таблицы закон ее составления; по крайней мере не наблюдаются ли в таблице какие-нибудь закономерности, которые дали бы возможность обнаружить способ ее исторического возникновения?

Некоторые закономерности здесь нетрудно отметить, и уже первые исследователи обратили на них внимание. Легко, например, видеть, что для всех k, кратных трем, разложение $2:k$ получается по формуле

$$2:3n = \overline{2n}\ \overline{6n}, \tag{1}$$

т. е.

$$2\cdot\frac{1}{3n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}.$$

Иными словами, все эти разложения получаются из разложения $2:3 = \overline{2}\ \overline{6}$ путем увеличения всех „знаменателей" в одно и то же нечетное число раз.

Такую же закономерность можно усмотреть и для k, кратных 5 (и некратных 3). Именно, значительное их число следует формуле

$$2:5n = \overline{3n} + \overline{15n}, \tag{2}$$

т. е.

$$2\cdot\frac{1}{5n} = \frac{1}{3n} + \frac{1}{15n}.$$

Действительно, такие именно разложения содержатся в таблице для $n = 1, 5, 13, 17$. Однако для $n = 7, 11, 19$ мы имеем другие разложения. При $n = 11$, т. е. при $k = 55$, мы имеем разложение

$$2:55 = \overline{30} + \overline{330},$$

следующее тому же закону, что разложение

$$2:11 = \overline{6} + \overline{66};$$

точно так же при $n = 19$, т. е. при $k = 95$, разложение следует тому же закону, что $2:19$.

Что же касается случая $n = 7$, т. е. $k = 35$, то, как легко убедиться, оно не следует ни закону разложения $2:5$, ни закону разложения $2:7$.

Из этих замечаний вытекает, что таблицы величин $2:k$ возникли, во всяком случае, не по замыслу единого конструктора. Очевидно, они являются сводкой возникших в различное время частных правил. Нужно думать, что таблицы эти являются продуктом очень длительного исторического процесса. Можно попытаться объяснить наличную структуру таблицы, показав в ней следы определенных „формаций". Однако и при таком „расслоении таблицы" не удается отыскать сколько-нибудь простых *однозначных* алгоритмов, комбинациями которых можно было бы получить если не всю таблицу, то хотя бы большинство ее результатов.

Правда, в последнее время Нейгебауером[1]) была сделана попытка указать такие алгоритмы. Я не имею возможности излагать здесь теорию Нейгебауера ввиду ее чрезвычайной громоздкости. Укажу лишь, что он различает в таблице в основном две части: одну, дающую разложения в „легко обозримых" случаях, более древнего происхождения, и другую, дающую остальные разложения, появившиеся в более позднее время. Нейгебауер полагает, что указанные им две закономерности (для первой и второй группы) позволяют объяснить все разложения таблицы, за исключением последнего ($2:101$), которое он считает позднейшим искажением[2]). Однако это неверно; каждый, давший себе труд проштудировать указанные два десятка страниц книги Нейгебауера, убедится в том, что многие результаты таблицы не укладываются в схему Нейгебауера никоим образом. Сюда относятся, например: из первой группы разложение $2:35$ (по теории Нейгебауера следовало бы иметь $\overline{21}\ \overline{105}$ или, с некоторой натяжкой, $\overline{20}\ \overline{140}$, но никак не $\overline{30}\ \overline{42}$, которое мы находим в таблице); из второй группы (в которой следовало бы ожидать меньшего количества неправильностей!) разложения $2:17$, $2:19$, $2:23$, $2:43$, $2:51$, $2:79$, $2:89$, $2:91$, $2:97$ и др.

Уже этих примеров достаточно, чтобы опровергнуть утверждение Нейгебауера, что его теория охватывает все результаты таблицы, кроме одного.

Но если бы даже этих несоответствий не было, теория Нейгебауера была бы неудовлетворительна потому, что она совершенно не раскрывает *ход рассуждения*, которым могли руководствоваться египетские вычислители, устанавливая табличные разложения.

Рассуждение, предлагаемое Нейгебауером, по своему характеру совершенно не укладывается в рамки примитивно арифметических соображений, на базе которых только и могли возникнуть рассматриваемые таблицы. По крайней мере Нейгебауер и не пытается перевести свои преобразования на язык древнеегипетской математики. Между тем, как упоминалось выше, в египетском тексте, кроме

---

1) „Лекции", стр. 165—185.

2) „Лекяии", стр. 178 и 182.

результатов, сведенных нами в таблицу, содержатся еще пояснительные вычислительные схемы, сопровождающие отдельные результаты. Естественнее всего, казалось бы, в этих именно схемах искать ответ на вопрос, как получены результаты таблиц (об этих схемах см. ниже). Так именно и поступали все предшественники Нейгебауера. Но Нейгебауер в своих „Лекциях" даже не упоминает о существовании указанных схем! В своей же большой статье, посвященной вычислительной технике древних египтян, он освобождает себя от рассмотрения пояснительных схем, заявляя, что „вспомогательные вычисления таблицы $2:n$ папируса Райнда имеют формальный, чисто проверочный характер, который ничего не позволяет узнать относительно первоначального способа нахождения $2:n$"[1]. В качестве единственного аргумента, обосновывающего этот уничтожающий вывод, Нейгебауер ссылается на то обстоятельство, что *однотипные* результаты таблицы, например разложения частных вида $2:3n$, сопровождаются *различно* построенными пояснительными схемами. Однако этот аргумент имел бы какую-нибудь силу лишь в том случае, если бы было законным предполагать однозначный характер тех алгоритмов, которыми шли составители египетских таблиц. Нейгебауер, действительно, ищет такие алгоритмы, но, как было указано, даже с помощью очень громоздкого аппарата не приходит к цели.

Между тем, существование таких алгоритмов и само по себе является невероятным для того „доисторического" времени, когда создавались таблицы $2:k$. А приори представляется естественным, что эти таблицы возникали в результате длинного ряда *попыток*, а не на основе заранее продуманного плана.

Однако вместе с тем естественно ожидать, что все эти попытки могли исходить из более или менее *однородных* вычислительных приемов, так что отсутствие единого *алгоритма* отнюдь не должно означать отсутствие единой *схемы* вычисления. И, действительно, во вспомогательных вычислениях, о которых мы упоминали, мы можем без труда усмотреть наличие основной схемы, выступающей в разнообразных вариантах. При выборе этих вариантов часто обнаруживается „произвол" вычислителя, т. е. часто не видно никаких оснований для предпочтения наличного варианта другому возможному. И тем не менее огромное большинство вспомогательных расчетов следуют единой *общей схеме*[2]).

---

[1]) Arithmetik und Rechnentechnik der Ägypter. Quellen und Studien, Abt. B, B. I, 1930, S. 367.

[2]) Некоторые из результатов $2:k$ даны в папирусе Райнда без всяких пояснений, однако и для них можно восстановить вспомогательное вычисление, следующее той же общей схеме. Некоторые выкладки отступают от общей схемы, но это относится как раз к простейшим случаям, в которых результаты могли получаться „непосредственно". В более же сложных случаях, когда результат не очевиден и когда его нужно было искать во вспомогательных выкладках, можно наблюдать совершенно выдержанную единую линию построения схемы.

§ 7. Схема вспомогательных вычислений в таблице $2:k$

Лучше всего показать эту схему на примерах. В качестве первого примера возьмем пояснительную выкладку для деления 2 на 17.

Вот эта выкладка (с сохранением оригинального расположения вычислительной схемы[1]).

Дели 2 на 17		$\overline{12}$ $\quad$ $\overline{51}$	$\overline{68}$	
		$1\ \overline{3}\ \overline{12}$ $\quad$ $\overline{3}$	$\overline{4}$	
Вычисление	$1 \quad 17$	$\overline{3} \quad 5\ \overline{\overline{3}}$	$\overline{12} \quad 1\ \overline{4}\ \overline{6}$	$1\ \overline{17}$
	$\overline{\overline{3}} \quad 11\ \overline{3}$	$\overline{6} \quad 2\ \overline{2}\ \overline{3}$	остаток $\quad \overline{3}\ \overline{4}$	$2\ \overline{34}$
				$/3\ \overline{51} \quad \overline{3}$
				$/4\ \overline{68} \quad \overline{4}$

При внимательном рассмотрении этой схемы мы, несмотря на скупость словесного текста, вряд ли ошибемся в истолковании содержащейся здесь вычислительной схемы.

В первой строке мы имеем готовый результат, выражающий, что 2 составляется из суммы 12-ой, 51-ой и 68-ой доли числа 17. Совокупность таких результатов мы свели выше в таблицу.

Во второй строке указывается, чему равна каждая из упомянутых долей числа 17. Так, 12-ая доля есть $1\ \overline{3}\ \overline{12}$; найти это число не составляло затруднения: оно есть двенадцатая часть числа $17 = 12 + 5$, так что целая его часть — единица; дробная же часть должна быть найдена разложением 5 на два слагаемых, каждое из которых есть делитель 12. Здесь положено $5 = 4 + 1$. Сообразно с этим двенадцатая часть от 17 есть $1\ \overline{3}\ \overline{12}$. Два остальных результата находятся совсем просто.

Нужно полагать, что подразумевается еще не указанное прямо суммирование чисел второй строки. Обнаруживая, что $1\ \overline{3}\ \overline{12} + \overline{3} + \overline{4} = 2$, мы убеждаемся в правильности выполненного деления. Убедиться в этом египетскому вычислителю было нетрудно (ниже будет сказано о сложении и вычитании дробей), так как дроби здесь очень простые.

Таким образом, первые две строки дают результат деления 2 на 17 и проверку его. В нижележащих колоннах показано, как найти результат. В первых трех колоннах проделывается, как легко видеть, та же операция дробления пополам, какую мы видели в примере деления $19:8$. Только здесь это дробление пополам начинается не сразу, а после предварительного образования двух третей (вторая строка первой колонны). Вместо того, чтобы образовывать половину от двух третей (первая строка второй колонны), казалось бы проще образовать сразу треть от 17. Но, по непонятной причине, египетский вычислитель всегда перед тем, как образовать $\frac{1}{3}$, образует $\frac{2}{3}$, хотя бы,

[1]) Eisenlohr, стр. 37; Peet, The Rhind math. papyrus, London, 1923, стр. 39, факсимиле на таблице A.

как в данном, например, случае, этот результат самостоятельного значения в дальнейшем ходе вычисления не имел.

Дробление пополам совершается в данном случае три раза; вообще же оно продолжается до тех пор, пока соответствующая доля делителя не станет впервые меньше числа 2 (меньше делимого), или, что то же, пока она не попадет в интервал (1; 2). Результат в данном случае таков. Двенадцатая доля 17 составляет $1\,\overline{4}\,\overline{6}$ (первая строка третьей колонны). Дальнейшее рассуждение, безусловно, строится следующим образом: нам нужно получить не $1\,\overline{4}\,\overline{6}$, а 2; значит, нужно в долях 17 выразить еще остаток $2 - 1\,\overline{4}\,\overline{6}$. Этот остаток $\overline{3}\,\overline{4}$ и дается во второй строке третьей колонны. Опять-таки и здесь вычитание для египетского вычислителя очень просто; поэтому нет нужды отражать его детали в схеме. Чтобы не прерывать изложения, мы пока не будем касаться того, как оно выполнялось.

Представление остатка в долях целого делителя не представляет уже никаких затруднений, коль скоро остаток представлен в виде суммы единичных дробей. Ясно, что единица составляет семнадцатую долю семнадцати (это записано в первой строке последнего столбца); следовательно, $\overline{3}$ будет выражено долей, „наименованием" которой будет произведение 3×17, а $\overline{4}$ — долей, наименование которой — 4×17. Это и записано в последних двух строках четвертой колонны. Дроби $\overline{3}$ и $\overline{4}$ записаны справа (следовало бы для единства схемы и в первой строке справа поставить единицу); слева же указаны множители 3 и 4, на которые должно множиться число 17[1]).

Может быть, покажется неясным, для чего служит *вторая* строка последней колонны. Но, вспомнив то, что выше было сказано об умножении на целое число, читатель сейчас же найдет правильный ответ на этот вопрос: здесь соблюдена обычная схема умножения, согласно которой для умножения на 3 нужно *удвоить* множимое (17) и зетем сложить произведения 1×17 и 2×17.

Рассмотрим еще один случай, в котором поясняется деление $2:13 = \overline{8}\,\overline{52}\,\overline{104}$[2]). Пояснительная выкладка здесь лаконичнее (во многих случаях, как было указано, она вовсе отсутствует) и имеет вид:

1	13
$\overline{2}$	6 $\overline{2}$
$\overline{4}$	3 $\overline{4}$
/$\overline{8}$	1 $\overline{2}$ $\overline{8}$
/$\overline{52}$	$\overline{4}$
/$\overline{104}$	$\overline{8}$

Она, как мы видим, еще более похожа на схему деления 19 : 8, в ней нет образования $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$, дробление пополам начинается

---

[1]) Напоминаю, что в папирусе нашим левым колоннам отвечают правые, и обратно.

[2]) Eisenlohr, стр. 37; Peet, стр. 39.

с самого начала и по общему правилу продолжается до того, пока получится число, заключенное между 1 и 2. В данном случае (четвертая строка) получается $1\,\overline{2}\,\overline{8}$, это составляет восьмую долю от 13. А нам нужно выразить в долях числа 13 не $1\,\overline{2}\,\overline{8}$, а 2. Поэтому снова вычисляется разность (соответствующее указание опущено!); она записывается по-египетски $\overline{4}\,\overline{8}$. Эти именно числа мы и находим в последних двух строках правой колонны. Слева даны их выражения в долях тринадцати; для этого выполняется умножение 4×13 и 8×13. Схема умножения опущена, и слева прямо выписаны недостающие доли.

Как мы видим из этих двух примеров (число их можно было бы значительно увеличить), наш источник недвусмысленно указывает на существование единой вычислительной схемы, внутри которой остается еще значительный элемент произвола в выборе вариантов. В самом деле, произвол начинается уже с первого шага: в одних случаях дробление пополам начинается сразу; в других (их значительно больше) предварительно находится $\frac{2}{3}$; в третьих, наконец, первый член разложения получается путем дробления на какое-нибудь иное число частей. Бывают случаи, когда образование первого члена диктуется наличием соответствующих простых множителей в делителе; тогда индивидуальный подход к образованию первой дроби в некотором смысле может предопределяться. Но чем, например, объяснить, что первый член разложения $2:17$ получается с помощью образования $\frac{2}{3}$, а первый член частного $2:13$ находится чистым „двоичным" способом? Ведь число 17 не делится нацело на 3, чтобы можно было заранее мотивировать необходимость использования третичного дробления.

Если бы мы попробовали применить к делению $2:17$ чистый двоичный способ нахождения первого члена, то, оперируя по той же схеме, мы нашли бы

$$\begin{array}{ccc}
1 & 17 & \\
\overline{2} & 8 & \overline{2} \\
\overline{4} & 4 & \overline{4} \\
\overline{8} & 2 & \overline{8} \\
\overline{16} & 1 & \overline{16}
\end{array}$$

Остаток $(2 - 1\,\overline{16})$ в нынешней записи будет $\frac{15}{16}$. В каноническом виде он представляется наиболее просто в виде $(1+2+4+8):16 = \overline{2}\,\overline{4}\,\overline{8}\,\overline{16}$. Это число, выраженное в долях семнадцати, дает $\overline{34}\,\overline{68}\,\overline{136}\,\overline{272}$, так что мы получили бы результат $2:17 = \overline{16}\,\overline{34}\,\overline{68}\,\overline{136}\,\overline{272}$ гораздо более громоздким, чем предыдущий.

Руководствовался ли египетский вычислитель какими-нибудь общими критериями, чтобы заранее выбрать тот путь, который зафиксирован таблицей, или он просто из ряда попыток останавливался на дающей „наилучший“ результат? Я думаю, что только второе допущение правдоподобно. Но по какому признаку один результат был „лучше“ другого? (число членов, во всяком случае, не является достаточным признаком, так как для многих делений возможны различные разложения с равными числами членов; см. выше о делении $2:35$). И действительно ли вычислитель всегда выбирал между *всеми* разложениями с минимальным числом членов? На эти вопросы при нынешнем состоянии наших знаний о математике древних египтян нельзя дать определенного ответа.

Как бы то ни было, при нахождении первого члена разложения мы имеем, безусловно, наличие произвола в выборе варианта схемы.

Но произвол имеется и при определении „остаточных“ членов. Действительно, нахождение остатка не является вполне однозначной операцией в египетской вычислительной технике. Ведь этот остаток должен быть представлен в каноническом виде; а это представление неоднозначно часто даже при минимальном числе членов разложения. Так, в первом нашем примере $(2:17)$ остаток $2-1\ \overline{4}\ \overline{6}$ представлялся в виде $\overline{3}\ \overline{4}$; в нашей системе представления дробей он выразился бы дробью $\frac{7}{12}$; но эту дробь можно представить в каноническом виде также и разложением $\overline{2}\ \overline{12}$, которое в известном смысле даже „лучше“, потому что первый член дает лучшее приближение. Однако, как мы видим, египетский вычислитель предпочел разложение $\overline{3}\ \overline{4}$[1]).

Чтобы уяснить себе, в каком именно пункте *египетской* вычислительной схемы появлялся этот произвол, мы должны познакомиться с техникой нахождения остатка, т. е. с вычитанием. Техника вычитания дробей, естественно, должна быть аналогична технике сложения их, вернее сказать, технике преобразования агрегата основных дробей к более простому виду. Таким образом мы займемся сейчас вопросом о выполнении операций, соответствующих сложению и вычитанию дробей в нашей арифметике.

§ 8. Сложение и вычитание дробей

Мы видели, какое важное значение имеет в египетской технике деления $2:k$ нахождение разности между числом 2 и „смешанной“ дробью с целой частью 1; другими словами — нахождение разности между 1 и правильной дробью. Вероятно, именно поэтому папирус Райнда содержит несколько задач, специально посвященных вопросу о „дополнении“ некоторой „правильной“ дроби до 1. Рассмотрим

[1]) Нужно заметить, что это — преобладающая тенденция, которая была отмечена уже Эйзенлором. Египетский вычислитель, как правило, предпочитает разложение делимого возможно более близкое к делению пополам (но ни в каком случае не ровно пополам). Однако встречаются и отступления от этого правила. С одним из них мы уже познакомились, рассматривая деление $2:17$; там первое число второй строки $1\ \overline{3}\ \overline{12}$ могло бы быть представлено иначе: $1\ \overline{4}\ \overline{6}$.

здесь одну из них (задачу 23)[1]). Здесь требуется дополнить до 1 дробь $\overline{4}\,\overline{8}\,\overline{10}\,\overline{30}\,\overline{45}$. Чтобы сделать процесс вычисления более обозримым, мы сопоставим его сначала чисто формально с вычислением, обычным в нашей арифметической технике.

Для выполнения требуемого действия мы привели бы дроби $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{45}$ к общему знаменателю, за каковой приняли бы число 360; мы получили бы дополнительные множители 90, 45, 36, 120, 8, сумму которых 299 нужно было бы „дополнить“ до 360.

Египетский вычислитель поступает так, как будто в качестве общего знаменателя выбрано число 45! Разумеется, дополнительные множители не будут тогда целыми. В египетских обозначениях они представятся числами $11\,\overline{4}$; $5\,\overline{2}\,\overline{8}$; $4\,\overline{2}$; $1\,\overline{2}$; 1.

Эти числа мы находим в папирусе надписанными под соответствующими им основными дробями:

$$\begin{array}{ccccc} \overline{4} & \overline{8} & \overline{10} & \overline{30} & \overline{45} \\ 11\,\overline{4} & 5\,\overline{2}\,\overline{8} & 4\,\overline{2} & 1\,\overline{2} & 1 \end{array}$$

причем числа верхней строки, как и весь основной текст папируса, написаны черной тушью, а числа нижней строки — красной.

Вместо того чтобы дополнять данное число (стоящее в верхней строке) до 1, египетский вычислитель нашел более удобным дополнить его лишь до $\overline{\overline{3}}$, т. е. сумму „красных“ чисел не до 45, а лишь до 30. Ясно, что дополнение до единицы получится отсюда добавлением *основной* дроби $\overline{3}$, что и делается в конце вычисления. Как производится дополнение до $\overline{\overline{3}}$, в решении не говорится, а дается прямо ответ $\overline{9}\,\overline{40}$.

Совершенно ясно, однако, как этот ответ получается. Сумма красных чисел дает $23\,\overline{2}\,\overline{4}\,\overline{8}$. Дополнение до 30 находится тотчас же без вспомогательных выкладок $30 - 23\,\overline{2}\,\overline{4}\,\overline{8} = 6\,\overline{8}$. Теперь нужно $6\,\overline{8} : 45$ представить в каноническом виде. Из $6\,\overline{8}$ выделяется совершенно естественно число 5, как делитель числа 45; $6\,\overline{8} = 5 + 1\,\overline{8}$; $\frac{6\,\overline{8}}{45} = \frac{5}{45} + \frac{1\,\overline{8}}{45}$. Число 5 содержится в 45 9 раз, число же $1\,\overline{8}$ — 40 раз ($8 \cdot 1\,\overline{8} = 9$; $5 \cdot 9 = 45$). Так получается

$$\frac{6\,\overline{8}}{45} = \overline{9}\,\overline{40}.$$

Задача заключается проверкой, которая состоит в том, что в верхней строке пишутся все основные дроби, как данные, так и найденные в виде дополнения ($\overline{9}\,\overline{40}\,\overline{3}$), в нижней — сост-

[1]) Eisenlohr, стр. 59; Peet, стр. 59.

ветственные им красные числа; запись гласит:

$$\begin{array}{cccccccc} \overline{4} & \overline{8} & \overline{9} & \overline{10} & \overline{30} & \overline{40} & \overline{45} & \overline{3} \\ 11\,\overline{4} & 5\,\overline{2}\,\overline{8} & 5 & 4\,\overline{2} & 1\,\overline{2} & 1\,\overline{8} & 1 & 15 \end{array}$$

Мы видим, что схема вычисления очень напоминает нам процесс приведения дробей к общему знаменателю. Но правильно ли будет видеть здесь этот процесс? Я думаю, что нет.

Действительно, о приведении дробей к одному знаменателю уместно говорить лишь в том случае, когда вообще существуют „обыкновенные" дроби; другими словами, когда деление $\frac{a}{b}$ рассматривается не только как процесс, но и как *результат* этого процесса, как некоторое *число*. Несущественно, называется ли он „числом" или как-нибудь иначе и, вообще, имеет ли он какое-нибудь название; существенно вот что: является ли представление с помощью пары $\left(\frac{a}{b}\right)$ каноническим выражением дроби или нет. Как мы видели, в египетской вычислительной технике оно таковым не является. Следовательно, там нет понятия, соответствующего нашему понятию рационального числа. Следовательно, нет основания говорить и о знаменателе несуществующего рационального числа. Нет основания говорить и о „приведении к общему знаменателю". Правда, в рассмотренной нами операции *мы* можем усмотреть аналогию с приведением к общему знаменателю; но египетскому вычислителю такая точка зрения должна была быть совершенно чуждой. Если обратить еще внимание на то, что в рассмотренном нами и в ряде других примеров в роли „числителей" выступают не целые числа, а смешанные дроби, то наше утверждение получит еще больше правдоподобия.

Но если вычислительный процесс, выше изложенный, исторически неправильно толковать как процесс приведения дробей к общему знаменателю, то как же в таком случае представить себе концепцию египетского вычислителя? Какую роль играют „красные числа" при вычитании (и сложении) дробей?

Повидимому, мы здесь имеем процесс, построенный по аналогии с раздроблением именованных чисел. Здесь уместно отметить, что во многих из „конкретных" египетских задач, сохраненных нашими папирусами, возникает вопрос о переводе мер из одного наименования в другое. Часто при этом дробные доли мер высшего наименования оказываются целыми числами мер низшего наименования. Учтем также, что самое понятие „отвлеченной" дроби возникло, без всякого сомнения, из образования простейших долей общеупотребительных мер длины, веса и т. д. И тогда представится вполне естественным предположение, что при сложении и вычитании дробей египтяне применяли процесс, „отвлеченный" от операций раздробления и превращения мер, т. е. процесс пропорционального *увеличения* и *уменьшения* слагаемых и вычитаемых. Элемент отвлечения проявляется в том, что „коэфициент пропорциональности" не связывается теперь непременно с общеупотребительным соотношением единиц, а выбирается *произвольно*, применительно к данным в задаче долям с тем, чтобы преобразовать их либо в целые числа, *либо в такие доли, операции с которыми не вызывают затруднений*.

С точки зрения этой гипотезы мы должны смотреть на „красные числа“, как на *иное выражение* (в другом масштабе) стоящих сверху черных чисел. „Коэфициент пропорциональности“ представляется тем „черным“ числом, которое стоит над красной единицей. Таким образом вычислитель должен был рассуждать так: нужно дополнить до $^2/_3$ дроби $\overline{4}\ \overline{8}\ \overline{10}\ \overline{30}\ \overline{45}$. Выполним раздробление, приняв единицу за 45 более мелких долей (выбор числа 45 естественно мотивируется тем, что самая мелкая доля в нашей задаче есть $\overline{45}$). Тогда нужно будет дополнить до 30 число, получаемое из сложения „красных чисел“, которые возникают из „черных“ по схеме:

Черные . . .	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{30}$	$\overline{45}$
Красные . . .	$11\ \overline{4}$	$5\ \overline{2}\ \overline{8}$	$4\ \overline{2}$	$1\ \overline{2}$	1

т. е. нужно дополнить до 30 число $23\ \overline{2}\ \overline{4}\ \overline{8}$. Это дополнение есть $6\ \overline{8}$. Теперь нужно выразить дополнение в прежних мерах, т. е. разделить $6\ \overline{8}$ на 45. Несомненно, египетский вычислитель мог бы (и в других случаях он поступает соответствующим образом) заменить это деление делением целых чисел. Если бы он взял в качестве коэфициента пропорциональности число, равное наименьшему кратному данных долей, он вообще не получил бы дробей. Но, очевидно, такая дробь, как $\overline{8}$, его нисколько не смущает, и он выполняет деление с помощью „индивидуального“ приема, который мы уже разобрали: делимое расчленяется на части, легко выражаемые в долях делителя: $6\ \overline{8} = 5 + 1\ \overline{8}$. Числа же 5 и $1\ \overline{8}$ составляют девятую и сороковую части числа 45. Итак, искомое дополнение есть $\overline{9}\ \overline{40}$.

В качестве второго примера применения „красных чисел“ рассмотрим сложение дробей, производимое в задаче 34 папируса Райнда[1]). В этой задаче искалось число, которое вместе со своей половиной и четвертью дает сумму 10. Египетский автор нашел (каким путем — будет ниже сказано), что искомое число равно $5\ \overline{2}\ \overline{7}\ \overline{14}$. Теперь выполняется проверка. Вот, как она выглядит:

$$\begin{array}{lll|ll}
/1 & & 5\ \overline{2} & \overline{7} & \overline{14} \\
/\overline{2} & & 2\ \overline{2}\ \overline{4} & \overline{14} & \overline{28} \\
/\overline{4} & & 1\ \overline{4}\ \overline{8} & \overline{28} & \overline{56}
\end{array}$$

Всего $9\ \overline{2}\ \overline{8}$; остаток $\overline{4}\ \overline{8}$

$$\begin{array}{lcccccc|cc}
 & \overline{7} & \overline{14} & \overline{14} & \overline{28} & \overline{28} & \overline{56} & \overline{4} & 14 \\
\text{(красные числа)} & 8 & 4 & 4 & 2 & 2 & 1 & \overline{8} & 7
\end{array}$$

Всего 21

---

[1]) Eisenlohr, стр. 74; Peet, стр. 70.

В первых трех строках выписаны величины найденного числа, его половины и четверти. Вертикальной черты в оригинале нет; она добавлена нами для указания, что простейшие доли ($\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{8}$), стоящие влево от нее, суммируются устно; получается 9 $\overline{2}$ $\overline{8}$. Это мы и читаем в четвертой строке; при указании на остаток имеется в виду, конечно, остаток до 10. Он находится также устно: дроби очень просты. Сложение долей, стоящих справа от вертикальной строки, происходит в двух последних строках с помощью дробления „черной" единицы на 56 „красных". Сумма этих красных чисел равна 21. Обратного перехода в черные не дается. Напротив, ранее найденный остаток $\overline{4}$ $\overline{8}$ выражается сам в красных единицах (правая половина двух нижних строк). Получаем $14+7=21$ красных единиц, что совпадает с подсчетом красных чисел. Таким образом проверка выполнена.

Для нас этот пример поучителен потому, что в нем совершенно ясно видно, что „красные числа" не выступают в роли числителей новых дробей, а служат просто для сравнения двух результатов, которые получены различными путями, но должны быть тождественными.

§ 9. Исчисление кучи

Обратимся теперь к условию задачи 34 папируса Райнда и познакомимся с методом решения этой задачи и ей подобных. В папирусе Райнда задач этого типа имеется полтора десятка (задачи 24—38), в Московском папирусе — три задачи; в других математических папирусах мы также встречаем подобные задачи. В один тип их объединяет постановка вопроса: разыскивается совершенно отвлеченное число, не связанное ни с какими определенными объектами (в большинстве других египетских задач все данные и искомые конкретны). Оно задается словесным требованием, которому на нашем языке соответствовало бы уравнение типа

$$mx+nx+px+b=c;$$

чаще всего мы имеем $b=0$. Словесное выражение задачи носит стандартный характер; неизвестное число обозначается термином „куча" *'ḥ'* [1]; условие звучит, например, так: „куча, ее $\overline{2}$, ее $\overline{4}$, ее целое составляет 10". Таково условие задачи 34 папируса Райнда; точно так же формулируются и остальные задачи на „исчисление кучи", содержащиеся в этом папирусе. Форма аналогичных задач в других папирусах мало отличается от этой [2]).

---

[1]) Другой смысл термина *'ḥ'* = множество; читается этот термин обычно как „hau"; как указывает Нейгебауер (цит. соч., стр. 127), это чтение носит совершенно произвольный характер.

[2]) Вот, например, задача 19 Московского папируса: „Форма вычисления кучи; считаемая 1 $\overline{2}$ раза, вместе с 4 она дошла до 10". ($1^1/_2x+4=10$.) Struve, стр. 112.

Что касается методов решения этой группы задач, то они различны даже в пределах одного и того же папируса; правда, в литературе делались попытки рассматривать приемы решения различных задач „исчисления кучи“, как частные случаи одного и того же метода, но, как мы ниже убедимся, эти попытки неосновательны.

В основном мы имеем два существенно отличных пути, которому следует решение задач на „кучу“. Один из них по идее не отличается от того, которым стали бы решать подобную задачу мы. Он и применяется к решению задачи 34 папируса Райнда. Условие ее в современной записи гласит:

$$x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=10.$$

Теперешний школьник будет решать эту задачу так: он сложит коэфициенты $1+{}^1/_2+{}^1/_4={1}^3/_4$ и разделит 10 на ${1}^3/_4$. Египетскому вычислителю незачем было в данном случае производить „сложение“, ибо $1\ \overline{2}\ \overline{4}$ представляло собой уже каноническую запись числа; оставалось только делить $10:1\ \overline{2}\ \overline{4}$. Это деление, как мы знаем, египтяне осуществляли с помощью удвоений.

Вот, что мы читаем в папирусе:

/1		$1\ \overline{2}\ \overline{4}$
2		$3\ \overline{2}$
/4		7
$/\overline{7}$		$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{28}$	$\overline{2}$
$/\overline{2}$	$\overline{14}$	1

Вместе куча $5\ \overline{2}\ \overline{7}\ \overline{14}$

В первых трех строках мы имеем обычное удвоение, начинающееся от единицы. Дальше удваивать не нужно, так как нужно набрать в сумме 10. Отмечаем черточками первую и третью строку; нетрудно устно сосчитать, что сумма $7+1\ \overline{2}\ \overline{4}=8\ \overline{2}\ \overline{4}$ недостает до 10 на $1\ \overline{4}$. Чтобы получить это число суммированием чисел правой колонны, египетский вычислитель берет седьмую часть единицы; ей соответствует справа $\overline{4}$. Как получено это число — ничего не сказано; может быть делением $1\ \overline{2}\ \overline{4}$ на 7 с помощью „красных“ чисел, может быть „обращением“ третьей строки — этот вопрос мы можем оставить открытым. Здесь, во всяком случае, мы имеем вычислительную уловку, к которым так охотно прибегает египетский вычислитель, сочетая употребление искусственных приемов с пользованием установленной схемой.

Дальше идет снова удвоение; только вместо $\frac{2}{7}$ берется каноническое представление этой дроби (см. таблицу на стр. 21) $\overline{4}\ \overline{28}$, нужные нам ${1}^1/_4$ получаются в правой колонке от сложения четвертой и шестой строк; поэтому соответствующие числа левой колонки отмечаются наклонными штрихами. Результат сложения всех отмеченных штрихами чисел $5\ \overline{2}\ \overline{7}\ \overline{14}$ и есть частное от деления 10 на $1\ \overline{2}\ \overline{4}$.

Таким образом мы видим, что египетское решение этой задачи отличается от современного лишь постольку, поскольку техника египетского деления отличалась от теперешней.

Но вот возьмем задачу 24 того же папируса (с таким же успехом мы могли бы взять и любую из задач 25—29). Она гласит: „Куча, ее $\overline{7}$, ее целое, составляет 19“.

Как мы видим, эта задача нисколько не сложнее, чем задача 34, и решать ее можно было бы, идя по такому же пути.

Между тем здесь применяется иной способ, получивший в более позднее время название „правила ложного положения“.

Посмотрим прежде всего, как записано решение в папирусе. Там мы читаем [1]):

/1	7	1	8	/$\overline{4}$	2	/1	$2\ \overline{4}\ \overline{8}$	
/$\overline{7}$	1	/2	16	/$\overline{8}$	1	/2	$4\ \overline{2}\ \overline{4}$	
		$\overline{2}$	4			/4	$9\ \overline{2}$	
						$\overline{7}$	$2\ \overline{4}\ \overline{8}$	Вместе 19

„Делай, как делается; куча: $16\ \overline{2}\ \overline{8}$“.

Эту запись никаким образом, очевидно, нельзя истолковать как деление 19 на $1\ \overline{7}$. Попробуем в ней разобраться; мы убедимся без труда, что в приведенной схеме заключено следующее рассуждение: пусть искомое число равно 7. Тогда его седьмая часть есть 1 (первая колонна). Тогда сумма „кучи“ и ее седьмой части есть 8. А должна она быть 19. Во сколько же раз больше должна быть сумма? На этот вопрос отвечают вторая и третья колонны. В них делится 19 на 8 по способу удвоения и дробления пополам. В отмеченных черточками строках сумма чисел правой половины есть как раз 19. Значит, частное будет $2\ \overline{4}\ \overline{8}$. Наконец, следует последний этап рассуждения. При „ложном“ предположении, что „куча“ равна 7, мы получили 8. „Истинная“ сумма (19) больше, чем „ложная“ в $2\ \overline{4}\ \overline{8}$ раз. Значит, и истинная величина кучи во столько же раз больше. Поэтому нужно перемножить $2\ \overline{4}\ \overline{8}$ и 7. Это действие выполняется в последней колонне; умножение совершается обычным способом: с помощью удвоений. Результат $16\ \overline{2}\ \overline{8}$ записан в конце в виде указания ответа; непосредственный же итог трех строк четвертого столбца не подведен может быть потому, что в четвертом столбце предварительно делается проверка. Именно, к „куче“ нужно прибавить ее седьмую часть, которая при „ложном“ положении принималась за единицу; теперь она также увеличивается в $2\ \overline{4}\ \overline{8}$ раз; предпоследняя строка,

---

[1]) Eisenlohr, стр. 61; Peet, стр. 61. Я сохраняю то расположение материала, которое имеется в оригинале.

таким образом, означает, что седьмая часть *кучи* составляет $2\ \overline{4}\ \overline{8}$, а вместе с самой кучей (т. е. после сложения с вышестоящими числами правой половины) дает 19. Итак, ответ правилен; он записывается в конце вместе с традиционным поучением: „делай, как делается“, приглашающим ученика усвоить вышеприведенную схему.

Как мы видим, прием, применяемый при решении задачи 24, состоит в том, что для неизвестной величины берется по существу произвольное значение (разумеется, при этом выборе сообразуются с особенностями входящих в задачу чисел, стараясь, например, избавиться от дробей). Когда в результате предписанных действий получается не то число, которое требуется условием, то испробованное „ложное“ значение неизвестного и соответствующие значения его частей подвергаются пропорциональному исправлению. Этот способ имеет некоторое родство с методом „красных чисел“; родство это состоит в том, что и там и здесь налицо пропорциональные исправления целого и частей. Различие в том, что в способе красных чисел коэфициент пропорциональности заранее известен; здесь же он отыскивается из сравнения данных условия с результатом использования взятой „на пробу“ величины.

Этим же способом ложного положения в папирусе Райнда решены и задачи 25—29. Аналогичные решения задач такого же типа мы находим и в других папирусах. Замечательно то, что они все довольно „просты“, т. е. части неизвестного, фигурирующие в них, выражаются простыми долями, и число этих частей невелико. Например, задача 26 папируса Райнда имеет в переводе на наш язык вид

$$x+\overline{2}x=16;$$

она решается „ложным положением“ $x=2$.

Наряду с этими „простыми“ задачами есть задачи несколько более сложные. Например, в задаче 33 папируса Райнда ищется „куча“, которая вместе с $\overline{\overline{3}}$ ее, половиной и одной седьмой должна составить 37, т. е.

$$x+\overline{\overline{3}}x+\overline{2}x+\overline{7}x=37.$$

Казалось бы, нужно было ожидать и здесь применения принципа ложного положения; за „пробное“ значение можно было бы принять, скажем, $x=42$. Однако вычислитель предпочитает здесь пойти по пути непосредственного деления 37 на $1\ \overline{\overline{3}}\ \overline{2}\ \overline{7}$, причем это деление начинается с обычной операции удвоения; *метод красных чисел будет применяться лишь к остатку.*

Начало схематической записи имеет такой вид:

1	1	$\overline{\overline{3}}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	1	42	
2	4	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{28}$	/$\overline{\overline{3}}$	28	
4	9	$\overline{6}$	$\overline{14}$		$\overline{2}$	21	
8	18	$\overline{3}$	$\overline{7}$		/$\overline{4}$	10 $\overline{2}$	
16	36	$\overline{\overline{3}}$	$\overline{4}$	$\overline{28}$	/$\overline{28}$	1 $\overline{2}$	Вместе 40; остаток 2
(красные числа)		28	10 $\overline{2}$	1 $\overline{2}$			

Поясним ее. Начнем с нашего левого столбца. При переходе от первой строки ко второй, т. е. при первом удвоении, используется таблица $2:k$, где для $2:7$ дан результат $\overline{4}\ \overline{28}$. Остальные удвоения делаются „непосредственно“: $2\times\overline{\overline{3}}=1\ \overline{3}$; $2\times\overline{2}=1$; две целые единицы этих произведений присчитываются к целой части.

При переходе от второй строки к третьей совершаются операции: $2\times\overline{28}=\overline{14}$; $2\times\overline{4}=\overline{2}$; $2\times\overline{3}=\overline{\overline{3}}$; последние два результата сводятся вместе $\overline{2}+\overline{\overline{3}}=1\ \overline{6}$. Последнее преобразование очень часто применяется в египетской вычислительной технике и не сопровождается пояснениями, как общеизвестное.

Переход от третьей строки к четвертой не требует пояснений; при переходе от четвертой к последней строке снова используется табличный результат $2:7=\overline{4}\ \overline{28}$.

Итак, взяв делитель 16 раз, мы получили $36\ \overline{\overline{3}}\ \overline{4}\ \overline{28}$, и нужно подсчитать его дополнение до 37, т. е. дополнение до 1 числа $\overline{\overline{3}}\ \overline{4}\ \overline{28}$; это дополнение затем нужно будет выразить в долях делителя $1\ \overline{\overline{3}}\ \overline{2}\ \overline{7}$.

Теперь-то и выступают на сцену „красные числа“. Они, как и всегда, представляют собой пропорциональное изменение „черных“. А так как в данном случае речь идет о выражении остатка в долях делителя, то достаточно выразить тот и другой в единицах „красного“ масштаба; обратного перехода делать не придется, ибо для египетского вычислителя было, конечно, совершенно ясным, что выражение одной величины в долях другой не зависит от выбора масштаба.

Отсюда становится ясным дальнейший ход выкладки: 1) Черная единица раздробляется на 42 красные (первая строка второго столбца); находятся выражения дробей $\overline{\overline{3}}\ \overline{4}\ \overline{28}$ в красных единицах — в правом столбце изображены этапы этого раздробления; нужные слагаемые, как всегда, отмечены штрихами; их сумма $28+10\ \overline{2}+1\ \overline{2}=40$ записана также в правом столбце. Эти же красные числа подписаны под соответствующими черными в левом столбце. 2) Отыскивается дополнение до черной единицы, т. е. до 42 красных; записан остаток $42-40=2$. 3) Делитель $1\ \overline{\overline{3}}\ \overline{2}\ \overline{7}$ выражается в красных единицах.

Схемы последнего преобразования делителя в тексте задачи 33 нет; но, очевидно, дело здесь только в оплошности переписчика, перенесшего схему не на свое место; действительно, в тексте другой задачи (№ 38) помещена совершенно не связанная с ее текстом схема, имеющая вид:

1	42	
$\overline{\overline{3}}$	28	
$\overline{2}$	21	
$\overline{7}$	6	Вместе 97[1])

[1]) В египетском тексте здесь вместо 97 ошибочно стоит 99.

Итак, остаток имеет 2 красные единицы, а делитель 97. Нужно, следовательно, разделить $2:97$ или, что то же, дважды взять долю 97; результат находится по таблице (стр. 21) $2:97 = \overline{56}\ \overline{679}\ \overline{776}$.

В схеме задачи 33 этот этап отражен следующими двумя строками:

$$\begin{array}{ccccc} \overline{97} & & & \overline{42} & 1 \\ \overline{56} & \overline{679} & \overline{776} & \overline{21} & 2 \end{array}$$

которые, очевидно, нужно понимать так: $\frac{1}{97}$ доля делителя есть 1 красная единица, т. е. $\overline{42}$ доля черной. Это записано в первой строке; вторая же содержит удвоение предыдущей (с использованием таблицы $2:k$).

Таким образом „куча" выражается числом

$$16\ \ \overline{56}\ \ \overline{679}\ \ \overline{776}$$

которое мы и находим в папирусе в качестве ответа [1]). Затем делается проверка. На ней мы не будем останавливаться.

§ 10. Исчисление кучи и метод ложного положения

В только что разобранной задаче и задачах ей подобных некоторые историки, следуя Кантору [2]), усматривали свидетельство того, что у древних египтян существовала теория уравнений с одним неизвестным первой степени. Это мнение мотивировалось тем, что в ряде задач папируса Райнда правило ложного положения заведомо не применяется, и уравнение типа

$$ax = b$$

решается „по формуле" $x = \frac{b}{a}$.

В Московском папирусе (расшифрованном уже после смерти Кантора) мы находим задачу 19, которая переводится на современный язык уравнением [3])

$$(1 + \overline{2})\,x + 4 = 10$$

и решается так:

$$10 - 4 = 6; \qquad x = 6 \cdot \overline{\overline{3}} = 4.$$

---

[1]) Пример этот разобран у Нейгебауера (стр. 159—161 русского издания цит. соч.). С трактовкой этого примера я в общем согласен; но я никак не могу понять, зачем нужно для объяснения выбора эквивалента 1 : 42 между черными и красными числами „продвигаться в обратном порядке, отправляясь от вспомогательных чисел последней строки". На мой взгляд выбор этого эквивалента не нуждается ни в каких обоснованиях. Вычислитель выбирает то число, которое ему кажется удобным для выражения остатка и делимого в целых числах или в несложных дробях.

[2]) См. Cantor, Vorles. üb. Gesch. d. Math., т. I, 1907, стр. 74—77.

[3]) Формулировку ее в египетском тексте см. выше, стр. 32 (сноска 2).

Здесь мы, таким образом, могли бы усмотреть для уравнения

$$ax + c = b$$

решение „по формуле“

$$\frac{b-c}{a}.$$

В противовес Кантору Роде [1]) и Бобынин [2]) утверждали, что во всех задачах на „исчисление кучи“ применяется правило ложного положения, но только в задачах типа 33 в качестве пробы берется единица.

Однако весь смысл применения правила простого ложного положения состоит в том, чтобы в качестве пробы взять „подходящее“ число. Единица же, например в задаче 33 папируса Райнда, является заведомо неподходящей пробой. И вообще остается неясным, как нужно решить задачу для того, чтобы она с вышеупомянутой точки зрения не казалась решенной с помощью ложного положения.

Конечно, представляется соблазнительным для всей группы задач на „исчисление кучи“ указать единый метод решения; задачи же, подобные 24, безусловно решаются в папирусе Райнда с помощью ложного положения. Таким образом напрашивается мысль видеть в решении задачи 33 также ложное положение $x=1$. А так как задача 33 (и ей подобные) сложнее всех тех, где употребляется ложное положение, отличное от $x=1$, то напрашивается мысль связать употребление „ложного положения“ $x=1$ с обнаружением преимуществ, якобы доставляемых этой пробой. Так и аргументируют свою точку зрения защитники упомянутой точки зрения. В. В. Бобынин, например, пишет: „Употребление единицы в значении постоянной попытки ни в каких случаях не должно быть рассматриваемо как нарушение принципа наивыгоднейших чисел. Напротив, как состоявшееся вследствие обнаружения *двух доставляемых им важных выгод*, оно является прямым приложением этого принципа“. Выгоды же Бобынин видит: 1) в ненужности проверки; 2) в сведении действий, ведущих к определению неизвестного, только к „делению суммы, данной в задаче, на сумму, доставленную попыткой“ [2]).

Но тогда сразу возникает вопрос: почему же „важные выгоды“, обнаруженные при решении одних задач, не используются при решении других? Иными словами, почему „ложное положение“ $x=1$ не делается при решении всех задач на „исчисление кучи“? В. В. Бобынин отвечает на этот вопрос так: выгоды употребления единицы „оставались смутными для сознания счетчиков... или, другими словами,... мало возвышались над порогом сознания“.

Итак, египетскому вычислителю отказывается в наличии элементарной сознательности: обнаружить выгоды он может, использовать

---

[1]) L. Rodet, Les prétendus problèmes d'algèbre du manuel du calculateur Égyptien, Journal Asiatique, 1882, стр. 512.

[2]) В. В. Бобынин, Математика древних египтян, 1882. Древнеегипетская математика в эпоху владычества гиксов, Журн. Мин. нар. просвещ., 1909, стр. 313.

их в ряде задач умеет, а распространить „постоянную попытку", дающую „важные выгоды", на все без исключения случаи у него сознательности нехватает!

На самом же деле употребление ложного положения $x=1$ *никаких* выгод по сравиению с другими попытками, вообще говоря, не представляет. Именно поэтому, вероятно, *сначала* в папирусе Райнда показывается способ ложного положения, как более удобный с точки зрения египетской техники способ расчета. Но, будучи простым *для расчета*, он является для египетского вычислителя более *трудным по идее*. Поэтому он показан на сравнительно простых прямерах. Способ же деления, не нуждаясь ни в каких особых рассуждениях, показан на примерах, могущих служить упражнением в технике деления с довольно громоздкими делителями.

Таким образом точка зрения Роде-Бобынина отпадает целиком.

Что касается точки зрения Кантора, то она представляется мне безусловно правильной в том смысле, что египтянам приписывается *сознательное* применение некоторого общего алгоритма к решению задач, приводящихся в современной математике к решению уравнения с одним неизвестным. Но для того чтобы утверждать, как это делает Кантор, что египтянам было знакомо *понятие* уравнения и что мы не приписываем *им ничего чуждого для них*, когда называем исчисление „кучи" решением уравнения[1], — для этого материал известных нам папирусов не дает прямых оснований.

Действительно, задачи эти *слишком просты*, чтобы была какаянибудь потребность рассматривать их решеиия как частные случаи решения уравнения. Конечно, задачу „два человека могут в день вырыть 4 $м^3$ земли; сколько может вырыть в то же время один?" можно выразить уравнением $2x=4$ и „решить" это уравнение. Но это можно сделать лишь *после того*, как метод уравнений возник и примеиялся с действительным успехом при решении более трудных задач. В противном случае нет почвы для появления общего метода, и нет никакой возможности рассматривать с точки зрения общего метода решение данной частной задачи.

Мы должны поэтому обратиться к более трудным задачам и посмотреть, что дают нам содержащиеся в тексте решения для суждения о методе, которым эти задачи решаются.

§ 11. Арифметическая прогрессия

С этой целью мы возьмем задачу 64 папируса Райнда, наиболее замысловатую нз всех тех известных нам задач, для которых источники дают, если не метод, то схему решения. В этой задаче требуется разделнть 10 мер зерна между 10 лицами так, чтобы доли этих лиц, выражаясь современным языком, образовывали арифметическую прогрессию с разностью $^1/_8$ меры.

---

[1]) Cantor, Vorlesungen, т. I, 1922, стр. 77.

Вот текст задачи и ее решения [1]).

„Пример распределения разностей.

Пусть тебе сказано: разделить 10 мер ячменя между 10 человеками; разница между каждым человеком и его соседом составляет $\overline{8}$ меры ячменя. Средняя доля есть 1 мера [2]). Вычти 1 из 10. Остаток есть 9. Составь половину разницы; это есть $\overline{16}$. Возьми ее 9 раз; это дает $\overline{2}\ \overline{16}$. Приложи это к средней доле; вычитай для каждого лица по $\overline{8}$ меры, пока не достигнешь конца“.

Затем приводятся все десять долей и делается проверка сложением; сумма оказывается, как и должно быть, равной 10.

Приступая к разбору приведенного текста, заметим прежде всего, что здесь излагается, несомненно, *типичная* задача; об этом свидетельствует уже самое заглавие. Поэтому мы можем видеть здесь правило решения одной из задач на арифметическую прогрессию.

За отсутствием символических обозначений правило решения здесь, как и в других задачах, дается на числах. Несмотря на возможность недоразумения, происходящего от того, что и число мер, и число людей в задаче одинаково, ход решения вполне ясен. Его можно представить следующим образом; обозначим через s сумму убывающей арифметической прогрессии ($s = 10$), через n число ее членов ($n = 10$), через d абсолютное значение ее разности ($d = \overline{8}$), через a_1, $a_2, \ldots, a_n$ — ее члены, начиная с наибольшего.

Ход решения таков:

1) Образуется среднее арифметическое

$$s : n = 10 : 10 = 1.$$

2) Из числа членов отнимается единица: $n - 1 = 10 - 1 = 9$.

3) Составляется полуразность прогрессии $d : 2 = \overline{8} : 2 = \overline{16}$.

4) Полуразность умножается на число членов без одного:

$$\frac{d}{2}(n-1) = \overline{16} \cdot 9 = \overline{16}(8+1) = \overline{2}\ \overline{16}.$$

5) Прибавлением результата к среднему арифметическому находится первый член прогрессии

$$a_1 = \frac{s}{n} + \frac{d}{2}(n-1) = 1 + \overline{2}\ \overline{16} = 1\ \overline{2}\ \overline{16}\,.$$

6) Остальные члены находятся последовательным вычитанием разности

$$a_2 = a_1 - d = 1\ \overline{2}\ \overline{16} - \overline{8} = 1\ \overline{4}\ \overline{8}\ \overline{16},$$

$$a_3 = a_2 - d = 1\ \overline{4}\ \overline{8}\ \overline{16} - \overline{8} = 1\ \overline{4}\ \overline{16}$$

и так далее.

---

[1]) Eisenlohr, стр. 159; Peet, стр. 107.

[2]) В тексте описка: стоит „2 меры“.

Как мы видим, в основу вычисления положено правило, соответствующее формуле

$$a_1 = \frac{s}{n} + \frac{d}{2} \ (n-1).$$

Однако ход решения ясно показывает, что мы здесь отнюдь не имеем дела с алгебраической трактовкой вопроса, исходящей из общих соотношений между величинами a, n, d, s и оперирующей преобразованиями этих соотношений, ведущими к решению данной задачи.

Нет, мы имеем дело с самым обычным „арифметическим“ рассуждением; оно, правда, нигде не изложено, — таков, как мы видели, весь стиль египетских математических сочинений, но его очень легко восстановить.

Рассуждение основывается, несомненно, на том, что среднее арифметическое всех членов прогрессии тождественно со средним арифметическим ее равноотстоящих от конца членов. Такая закономерность легко обнаруживается на числовых примерах и не могла быть неизвестной вычислителю, в искусности которого читатель не раз имел случай убедиться. Таким образом величина $\frac{s}{n}$ дает среднее арифметическое крайних членов; значит, наибольший член превосходит величину $\frac{s}{n}$ на столько же, на сколько эта последняя превосходит наименьший член, т. е. на величину, вдвое меньшую, чем разность между наибольшим и наименьшим членами. А эта последняя образуется $(n-1)$-кратным повторением разности прогрессии. Следовательно, разность между наибольшим членом и $\frac{s}{n}$ составляет $\frac{(n-1)d}{2}$, так что $\frac{s}{n} + \frac{(n-1)\,d}{2}$ есть искомая величина наибольшего члена [1]).

Таково повидимому, было рассуждение, легшее в основу приведенного нами решения. Если это правильно то здесь не может быть речи об алгебраическом решении. Тем более не приходится видеть этого решения в более простых задачах „исчисления кучи“ [2]).

---

[1]) Интересно обратить внимание на то, что вместо того чтобы помножить d на $(n-1)$ и затем разделить произведение пополам, в египетском тексте производится сначала деление d пополам и затем уже умножение на $(n-1)$. Мы лишний раз убеждаемся в том, что египетские вычислители были хорошо знакомы с общими законами арифметических операций.

[2]) Насколько неправомерно стремление вывести все вычисления египетских текстов из одной „универсальной“ идеи, игнорируя то обстоятельство, что в наших текстах воспитывается в учащемся именно умение уловить специфические приемы решения, свидетельствует, между прочим, и попытка В. В. Бобыни противопоставить точке зрения Кантора „универсальную“ теорию примата „метода попыток“. Так, он даже приведенную только что задачу 64 папируса Райнда, где, очевидно, ни о каких „попытках“ нет и речи, считает решенной с помощью попыток. Вот его истолкование: „За исходную попытку принимался результат уравнивания всех членов прогрессии или, другими словами, принятие каждого из них равным среднему арифметическому всех членов... Выяснение перед сознанием счетчика отличительных признаков искомых чисел должно было показать ему, что второй

§ 12. Вопрос об уровне развития математики в древнем Египте

Выводы, к которым мы пришли в §§ 9—11, можно вкратце сформулировать следующим образом: *при решении задач египетский автор не следует какому-либо единому плану; каждый вопрос решается наиболее „подходящим" для него способом. Среди этих способов мы встречаем и способ ложного положения, фигурирующий опять-таки не в качестве универсального приема, а в качестве облегчающей решение замены искомых величин величинами, им пропорциональными. Способ „красных чисел" мы можем рассматривать как одно из применений этой замены. Среди задач на „исчисление кучи" мы встречаем и такие, решение которых воспроизводит порядок обычных для нас преобразований, ведущих к решению уравнения. Однако в силу особой простоты таких задач в решении их нельзя усмотреть сознательного включения их в общую теорию уравнений. В изложении метода решения более сложных задач также нет оснований усматривать наличие алгебраического способа; здесь мы имеем дело лишь с частным рассуждением, относящимся к задаче определенного типа.*

Все это говорит за то, что и Лондонский и Московский папирусы представляют собой учебные пособия по вычислнтельной технике и ее применению к решению „типовых" задач. Иными словами, здесь мы имеем в своеобразном изложении то, что сейчас составляет содержание курса арифметики начальной школы.

член прогрессии меньше первого на $^1/_8$, третий на $^2/_8$, четвертый на $^3/_8$ и т. д. до последнего, который должен быть менее первого на $^9/_8$. Затем счетчику оставалось только заметить, что увеличение доставленного исходною попыткою первого члена на полуразность ($^1/_{16}$), отнятую от последнего члена, делает разность между обоими членами равною $^1/_8$, чтобы притти к заключению, что для установления между ними требуемой разности $^9/_8$ нужно к первому члену (1) или среднему арифметическому всех членов прогрессии приложить отнятое от последнего члена произведение полуразности $^1/_{16}$ на 9. После определения таким образом первого члена прогрессии для получения остальных оставалось только последовательно отнимать от него по $^1/_8$, как это и производится в упомянутой выше второй части данного в папирусе Райнда решения задачи". В этом. объяснении совершенно не принимается во внимание одно из требований задачи, именно, что сумма прогрессии должна равняться 10. Правда, это число было использовано для образования „попытки". Однако сущность всякого ложного положения состоит в том, что эта попытка приводится затем в соответствие с условиями задачи (которым она, вообще говоря, может не удовлетворять). В нарисованном же Бобыниным процессе отсутствует самое главное: каким образом „сознанию счетчика" стало известно, что в результате последовательного прибавления $^1/_8$ он получит сумму долей, непременно равную 10? А если это ему было заранее известно, то ему совершенно не было необходимости прибегать к попыткам, так как свойства арифметической прогрессии, необходимые для прямого решения задачи, в этом случае уже поднялись бы выше „порога сознания".

Позволяет ли это утверждать, что древнеегипетская математика эпохи составления наших математических папирусов не поднялась до постановки и решения вопросов алгебраического характера? Иными словами, можем ли мы утверждать, что в дошедших до нас источниках с их сравнительно элементарными приемами решения задач отражен уровень всей древнеегипетской науки? Современные исследователи отвечают на этот вопрос утвердительно. И более всего странно, что такого же взгляда придерживается Нейгебауер, первый выдвинувший вопрос о переоценке математической науки вавилонян, в которой он справедливо усматривает развитую алгебраическую культуру. Но, по мнению Нейгебауера, „в Египте весь уровень математики на целую ступень ниже, чем в Вавилоне: для Египта вообще нет оснований предполагать постановку чисто алгебраических вопросов; здесь преодолеваемая трудность еще состоит в том, чтобы овладеть действиями над числами" [1]).

Вопреки этому я хочу показать, что у нас есть основания *предполагать* постановку алгебраических вопросов в древнем Египте. Мы располагаем еще недостаточным материалом для того, чтобы с несомненностью констатировать ее. Однако историк должен считаться, особенно при случайном характере его информации, не только с твердо установленными фактами, но и с правдоподобными гипотезами.

Мы видели, что египетские математические тексты содержат либо схему решения, либо его словесный рецепт, но не содержат ни анализа задачи, ни обоснования приведенного рецепта. Значит ли это, что египетские вычислители не производили анализа и не умели обосновать решения? Отнюдь нет. Напротив, из приведенных примеров видно, что в основе решения каждой задачи лежит продуманный план, который по принятой педагогической традиции не излагается (чем вызвана такая традиция — к этому вопросу мы еще вернемся в дальнейшем). Отсюда вывод: если среди имеющихся у нас древнеегипетских задач мы находим такие, методическое решение которых требует высокого уровня математических знаний и для них дан правильный ответ, то мы имеем право заключить о том, что соответствующий уровень науки был в Египте достигнут. Отсутствие объяснения не должно рассматриваться, как свидетельство о том, что ответ получен эмпирически. Наоборот, чем *меньше* объяснений дано, тем больше оснований предполагать планомерное решение „трудной" задачи, ибо египетский „учебник", очевидно, рассчитан на элементарное обучение и потому более трудные вещи должны были излагаться более догматически. Проведем здесь такую параллель: в наших школьных учебниках арифметики для большинства правил даются обычно некоторые обоснования. Они излагаются, конечно, на частных числовых примерах, что, однако, не дает оснований думать, что в современной науке они не обоснованы более общим способом. Но, например, для обращения

---

[1]) „Лекции", стр. 138 русского перевода.

периодической десятичной дроби в простую всегда указывается *только* правило, ибо обоснование его потребовало бы суммирования геометрической прогрессии.

Так вот предположим, что до будущего историка математики через 40 веков дойдет из всей нашей математической литературы только несколько школьных учебников арифметики. Тогда из того, что обращение периодической дроби в простую в них будет дано в более догматической форме, чем вопросы более легкие, он сможет сделать правильное заключение о том, что современная математическая наука опиралась не только на индуктивные соображения, но имела и какие-то общие дедуктивные методы и, в частности, владела теорией бесконечной геометрической прогрессии.

§ 13. Геометрическая прогрессия

Эта параллель взята мною не без умысла. Дело в том, что в папирусе Райнда имеется задача (№ 79)[1], изложенная, правда, в чрезвычайно скупой форме, но, несомненно, требующая нахождения суммы геометрической прогрессии.

Вот текст задачи:

Опись домашнего хозяйства

1	2 801	дома	7
2	5 602	кошки	49
4	11 204	мыши	343
Вместе	19 607	ячмень	2 401[2])
		меры	16 807
		Вместе	19 607

Формулировка условия задачи, как мы видим, отсутствует, но вряд ли она по существу отличается от той, которую еще полвека назад указал Роде[3]). Именно, очевидно, мы имеем дело с задачей-шуткой: имеется 7 домов, в каждом 7 кошек, каждая кошка съедает по 7 мышей; каждая мышь съедает 7 колосьев ячменя; каждый колос, если посеять его зерна, даст 7 мер зерна. Найти сумму общего числа домов, кошек, мышей, колосьев и мер.

Как мы видим, искомая сумма (19 607) получается двумя различными способами: сначала умножением неизвестно откуда взятого числа 2 801 на 7 (по обычной схеме умножения), а затем — непосредственным сложением чисел домов, кошек и т. д., т. е. степеней числа 7. Не может быть сомнений в том, что второй способ представляет проверку первого, согласно обычной схеме вычислений папируса Райнда.

---

[1]) Peet, стр. 121—122. У Эйзенлора (стр. 202—204) некоторые слова текста остались нерасшифрованными.

[2]) В оригинале 2 301; что это описка, ясно из величины суммы.

[3]) Journal Asiatique, 1881, стр. 450 и след.

Как ни скудны указания текста на способ решения задачи, мы все же можем сделать из этой задачи некоторые выводы.

Прежде всего, не может быть сомнения в том, что здесь мы имеем облеченную в „занимательную“ форму отвлеченную задачу на геометрическую прогрессию. Это вытекает хотя бы из того, что само по себе бессмысленно складывать числа разнородных предметов.

Далее, очевидно, что при устном преподавании сообщался какой-то способ составления числа 2801, более короткий, чем вычисление суммы исходной прогрессии. В противном случае не было никакого смыла задавать задачу, ибо непосредственно ее решение принципиальных трудностей не представляет никаких.

Вопрос только в том, каков был способ получения числа 2801. Бобынин [1]) и Роде [2]) считают, что это было составление суммы

$$1+7+7^2+7^3+7^4.$$

Кантор [3]) считает возможным, что здесь вычислялось выражение

$$\frac{7^5-1}{7-1}.$$

Это последнее представляется мне более вероятным. Во-первых, вычисление суммы

$$1+7+7^2+7^3+7^4$$

с последующим ее умножением на 7 нисколько не короче непосредственного суммирования

$$7+7^2+7^3+7^4+7^5.$$

Во-вторых, если бы, действительно, расчет велся по такой схеме, не было бы оснований для пропуска соответствующей „немой“ вычислительной схемы $1+7+49+343+2401=2801$, которая почти не отличалась бы от схемы приведенной проверки. Напротив, вычислительная схема для выкладки

$$\frac{7^5-1}{7-1}$$

нуждается в некоторых пояснениях; ее при египетской системе вычислений труднее было бы кратко записать так, чтобы общий закон вычисления выступил с ясностью. Это могло быть поводом для того, чтобы ее опустить. Не исключена также возможность, что она содержалась в первоначальном тексте, а потом была опущена именно потому, что переписчик не разобрался в ней.

---

1) В. В. Бобынин, Древнеегипетская математика в эпоху владычества гиксов, Журн. Мин. нар. просвещ., 1909, № 11, стр. 19—20.

2) См. сноску 3) на предыдущей странице.

3) Cantor, т. I, 1922, стр. 81.

Если допущение Кантора верно, то и его утверждение, что здесь „просвечивает" знание общей формулы, нужно признать правильным.

Противники этого мнения ссылаются обычно на то, что задачи, очень схожие с задачей 79 папируса Райнда, встречаются в литературе других народов и там решаются без помощи общей формулы. Роде, например, указывает на одну задачу из „Книги абака" Леонардо Пизанского (1201 г.); Бобынин — на древнерусскую задачу, записанную в одной рукописи XVII века.

Однако рассмотрение этих задач, на мой взгляд, не только не говорит в пользу их толкования, а скорее, напротив, делает более вероятным предположение о наличии у египтян общей формулы для суммы геометрической прогрессии. Начнем с древнерусской задачи. Вот ее текст [1]):

„Идут семь баб; у всякой бабы по семи посохов; на всяком посохе по семи сучков; на всяком сучке по семи кошелей; во всяком кошеле по семи пирогов; во всяком пироге по семи воробьев; во всяком воробье по семи пупков и всего $7+49+343+2\,401+16\,807+$ $+117\,649+823\,543=960\,799$".

Как мы видим, здесь, действительно, нет следа формулы суммирования. Но зато дан только *один* способ вычисления суммы. А в папирусе Райнда их *два*. Поэтому во всяком случае эта задача ничего не говорит в пользу точки зрения Бобынина (как увидим ниже, говорит, может быть, *против* нее).

Вот задача Леонардо [2]): „Семь старух идут в Рим; каждая из них имеет 7 посохов; на каждом посохе 7 мешков; в каждом мешке 7 хлебов; в каждом хлебе 7 ножичков; у каждого ножичка 7 ножен. Ищется сумма всего вышепоименованного" [3]).

Леонардо Пизанский сначала решает эту задачу непосредственным вычислением: $7+49+343+2\,401+16\,807+117\,649=137\,256$. Но, говорит он, вычисление можно вести и иным путем. Второй предлагаемый им способ строится на таком рассуждении. Пусть имеем только одну старуху; она имеет 7 посохов; общее число предметов

$$7\cdot 1+1=8.$$

Такое же количество предметов имелось бы, если бы у нас был один посох с семью мешками. Но посохов 7; значит, при семи посохах имеем

$$8\cdot 7=56$$

---

[1]) Бобынин, Журн. Мин. нар. просвещ., 1909, № 11, стр. 19.

[2]) Бобынин, Журн. Мин. нар. просвещ., 1909, № 11, стр. 19; см. также Cantor, т. II, 1913, стр. 26.

[3]) Septem vetulae vadunt Romam; quarum quaelibet habet burdones 7; et in quilibet burdone sunt sacculi 7; et in quolibet sacculo panes 7; et quilibet panis habet cultellos 7; et quilibet cultellus habet vaginas 7. Quaeritur summa omnium praedictorum.

посохов и мешков. К этому числу добавим единицу (предположенное число старух):

$$8 \cdot 7 + 1 = 57.$$

То же число предметов имеем при одном посохе с его мешками и хлебами. Для семи же посохов имеем

$$57 \cdot 7 = 399$$

посохов, мешков и хлебов. Присчитаем еще старуху:

$$57 \cdot 7 + 1 = 400.$$

И так далее:

$$400 \cdot 7 + 1 = 2\,801$$

есть число всех предметов, начиная с одной старухи и кончая всеми ее посохами, мешками, хлебами и ножами.

$$7 \cdot 2\,801 + 1 = 19\,608$$

есть то же число вместе с ножнами.

Последнее число помножается на 7, так как в действительности число старух не 1, а 7. Окончательно получаем

$$19\,608 \cdot 7 = 137\,256.$$

Как мы видим, Леонардо Пизанский дает два способа вычисления, оба основанные на повторном суммировании, причем порядок изложения таков, что второй является как бы проверкой первого, а не наоборот. Заметим также, что последнее действие совпадает с действнем, указанным в папирусе Райнда для задачи о кошках, мышах и т. д.

Если уже искать в „Книге абака“ ключ к пониманию произведення, старшего его на три тысячи лет, то нужно предположить, что египетский вычислитель применял тот же хитроумный, но длинный и мало практичный способ вычисления. Однако тогда остается неясным, почему этот длинный путь не освещен ни единым указанием в египетском источнике.

Но согласимся с тем, что между „Книгой абака“ и древнеегипетским папирусом, действительно, существует такая близость в трактовке этой задачи, которая позволяет по приемам Леонардо судить о приемах египетского вычислителя. Но и тогда мы имеем право предполагать, что правило сокращенного вычисления суммы прогрессии египтянам было известно. Дело в том, что Леонардо его, безусловно, знает и применяет, например, в решении знаменитой задачи о числе зерен, потребном для того, чтобы покрыть 64 клетки шахматной доски, кладя на одну клетку 1 зерно, на другую 2, на третью 4, на четвертую 8 и т. д. Да и мог ли Леонардо, несомненно изучавший Евклида, не знать доказанного в девятой книге „Начал" правила суммирования произвольной геометрической прогрессии?

Но, конечно, из сравнения содержания двух аналогичных задач ничего нельзя заключить о степени близости их решения. Однако, аналогию папируса Райнда с „Книгой абака" можно и даже должно использовать в другом направлении. Оба эти произведения принадлежат к одной и той же группе произведений математической литературы: догматическим руководствам, в которых все правила даются в форме ремесленных рецептов, как правило, без всякого основания. Образцы такой литературы мы имеем в большом числе из различных эпох, и общие всем им черты мы можем с полным правом использовать для объяснения встречающихся в некоторых из них пробелов. В древнегреческой литературе образчиком таких произведений может служить, например, „Геометрия" Герона, особенно ценная тем, что, написанная в эллинистическом Египте, она явно сохраняет старинные традиции фараоновского Египта. В литературе раннего Возрождения мы имеем „Книгу абака" Леонардо Пизанского (1202). В эпоху позднего Возрождения — „Энциклопедию" Пачиоло в Италии (1494), „Арифметику" Ризе в Германии (1524) и много других сочинений.

В зависимости от потребности времени и читательской установки они дают более или менее обширный материал, излагают его более или менее обстоятельно, но общим их признаком является то, что правила геометрии, арифметики и алгебры даются без всякого обоснования. Однако авторы их всегда знают гораздо больше, чем сообщают, и умеют трактовать научные вопросы с гораздо большей общностью и глубиной, чем можно думать по их руководствам. Для Герона, Леонардо Пизанского, Пачиоло, Ризе и др. это не подлежит никакому сомнению. Вот почему мы *вправе это предположить* и для Ахмеса, названного в папирусе Райнда составителем этого руководства.

Учтя это, заметим, что, с другой стороны, из самой постановки вопроса, подобного задаче 79 Лондонского папируса, несомненно вытекает, что ее „первоавтор" обладал искусным приемом общего ее решения. В самом деле, какой иначе смысл ставить такую задачу? Ведь дать ее верный ответ не представляет никакого труда для того, кому под силу решить, например, задачу 33 того же папируса. Единственный смысл помещения ее заключается в том, чтобы указать *сокращенный* метод решения.

То, что у Леонардо Пизанского второй способ не короче первого, а в русской рукописи дано только одно решение непосредственным сложением, отнюдь не противоречит сказанному. Действительно, в XIII и XVII веках задача о суммировании степени 7 стала *традиционной*; она получила повсеместное распространение в самых широких массах, но несомненно, что она растекалась волнообразно из одного источника. Крайне вероятно, что в Россию эта задача проникла прямым или косвенным путем с Запада, где имела широкое распространение „Книга абака"; эта последняя в огромнейшей своей части

Снимок с Московского папируса
(Задача 14).

опирается на арабские источники IX—X веков, а влияние египетской культуры на арабскую (прямое или через греческую) не подлежит сомнению. Как бы то ни было, в Европе задача суммирования степеней 7 в ее традиционной форме приобрела настолько широкое распространение, что приобрела самодовлеющий интерес. Мы видим, что в русской рукописи она осложнена большим количеством огромных по тому времени чисел и преобразовалась в задачу на поражающие воображение числа. У Леонардо она использована для демонстрации косвенной проверки.

В папирусе же Райнда числа невелики: древнеегипетские источники гораздо более раннего времени „свободно" оперируют числами порядка миллион, и для строителей колоссальных пирамид упражнение на сложение чисел, дающих в сумме 16 807, было поистине детским. С другой стороны, нет оснований полагать, что задача эта попала к египтянам из страны более высокой культуры. Вот почему крайне вероятно, что составители задачи имели в виду демонстрировать специальное правило, преподносившееся в элементарном учебнике, конечно, без всяких доказательств, но выведенное планомерно из общих рассуждений. Гадать, каковы именно были эти рассуждения, мы не будем, но они могли в основном совпадать с теми, которые проводятся в наших учебниках алгебры; разумеется, они должны были вестись на словах и на числовых примерах, а не на символах; но общность метода могла выявляться вполне[1]).

---

[1]) С. А. Яновская, читавшая рукопись моей работы перед сдачей ее в печать, сделала мне по поводу этого допущения ряд возражений; в основном они сводятся к следующему: 1) вычисление выражения $\frac{7^5-1}{7-1}$ при египетской технике вычислений не проще, а сложнее, чем непосредственное суммирование $7+7^2+7^3+7^4+7^5$; 2) способы вычисления $7+7^2+7^3+$ $+7^4+7^5$ и $7(1+7+7^2+7^3+7^4)$ отличаются друг от друга настолько, что один из этих приемов может быть использован для проверки другого.

Я должен признать, что эти соображения представляют, действительно, сильный аргумент против гипотезы Кантора, которой я отдавал предпочтение перед гипотезой Бобынина-Роде. Верно, что деление на 6 по египетской схеме связано с длинной выкладкой, лишающей связанный с ним способ вычислений тех преимуществ, которые он имеет при нашей вычислительной технике. Поэтому аргументы, приведенные мною в пользу теории Кантора, значительно ослабляются. Но даже если принять вместе с В. В. Бобыниным, Роде и С. А. Яновской, что число 2 801 получено непосредственным суммированием $1+7+7^2+7^3+7^4$, то и в этом случае основной мой вывод остается правильным. Именно, мы должны тогда принять, что факт тождественности выражения $7(1+7+7^2+7^3+7^4)$ с выражением $7+7^2+$ $+\cdots+7^5$ и другие аналогичные факты были хорошо известны древним египтянам; а это уже означает наличие знакомства с общими законами преобразований. Конечно, само по себе это еще далеко не алгебра, а лишь ее самые первые зачатки. Но приводимая ниже задача об усеченной пирамиде (рассматриваемая мною далее), а также исторические аналогии (см. ниже) позволяют предполагать, что этим не ограничивались знания древних египтян.

Конечно, это только *предположение*. С другой стороны, остается совершенно открытым вопрос, как далеко шли алгеброобразные методы египтян, и я отнюдь не утверждаю, что египтяне владели алгеброй так, как мы, или хотя бы так, как владели ей Диофант и арабские математики.

§ 14. Объем усеченной пирамиды и вопрос о существовании алгеброобразных методов в древнем Египте

Если бы задача 79 папируса Райнда была единственной, планомерное решение которой требует более высокого уровня знаний, то и этого было бы достаточно для того, чтобы гипотеза о наличии у египтян „алгеброобразных“ методов приобрела некоторую вероятность.

Но эта вероятность еще более возрастает, когда мы знакомимся с задачей 14 Московского папируса [1]), где речь идет о вычислении объема усеченной пирамиды с квадратными основаниями. Правило, по которому вычисляется этот объем, может быть переведено на наш язык формулой

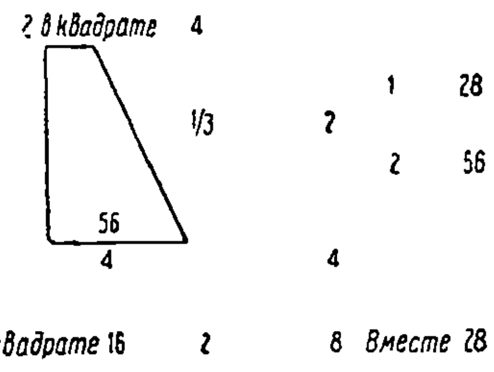
$$v = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2),$$

где h — высота усеченной приамиды, а a и b — стороны квадратов, являющихся ее основаниями.

Вот текст задачи и ее решения:

„Форма вычисления усеченной пирамиды [2]).

Если тебе называют усеченную пирамиду шести локтей в высоту, 4 (локтей) в нижней стороне, 2 в верхней стороне, вычисляй с этой 4, возводя ее в квадрат [3]). Получается 16. Удвой 4; получается 8. Вычисляй с этой 2, возведя ее в квадрат; получается 4. Сложи эти 16 с этими 8 и с этими 4; получается 28. Вычисли $\overline{3}$ от 6; получается 2. Вычисли 28 2 раза; получается 56. Смотри: она есть 56. Ты нашел правильно“ [4]).



Черт. 1.

В папирусе этот текст сопровождается чертежом, воспроизводимым здесь с заменой египетских числовых знаков арабскими цифрами (черт. 1). При чертеже, как обычно, помещена и вычислительная схема.

Не может быть никаких сомнений в том, что правило, изложенное в Московском папирусе на числовом примере, носит вполне общий характер. С другой стороны, это правило нельзя рассматривать как приближенную оценку, случайно совпавшую с точной формулой.

---

[1]) Московский папирус был, разумеется, неизвестен Бобынину, Роде и Кантору.

[2]) В египетском тексте понятие „усеченная пирамида“ передано пиктографически: нарисована трапеция.

[3]) В египетском тексте возведение в квадрат всегда обозначается термином, означающим буквально „прохождение мимо“.

[4]) W. W. Struve, Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. A, B. I, стр. 135.

Для этого оно слишком сложно. Эта формула несомненно получена с помощью некоторого рассуждения.

Какого же характера могло быть это рассуждение? Ясно, что из знания объема усеченной квадратной пирамиды вытекает умение определить объем полной пирамиды, по крайней мере такой, в основании которой лежит квадрат (по правилу $v = \frac{h}{3}a^2$) [1]). Но исторически, конечно, эта последняя формула должна была возникнуть раньше. Вот почему можно считать вероятным, что объем усеченной пирамиды был получен именно с использованием формулы объема пирамиды. Кстати, так именно выводится эта формула у Герона Александрийского, который в ряде других случаев бесспорно опирается на древнеегипетскую традицию [2]).

Как же, спросит читатель, получалось правило для объема пирамиды? Ведь вывод его требует применения бесконечного процесса. Нейгебауер считает, что правило было получено для частного случая, в котором не требуется применять бесконечный процесс, а затем перенесено без достаточного основания на общий случай. Возможно, впрочем, и другое предположение: правило было выведено для достаточно общего случая путем, скажем, разбиения призмы на три равновеликие пирамиды. Равновеликость этих последних могла мотивироваться равновеликостью оснований и равенством высот. „Строгое" доказательство последнего предложения, конечно, требует бесконечного процесса. Но оно в ту пору, когда, конечно, логического анализа предпосылок еще не существовало, принималось за „очевидный" факт (каковым оно, в действительности, и является для человека, имеющего опыт в нахождении объемов тел).

Итак, мы должны принять, что египтяне знали правило определения объема пирамиды и можем предположить, что путем разбиения усеченной пирамиды на призму и пирамиды получался объем усеченной пирамиды. Однако вычисления, предписываемые формулой, выполняются *не в таком порядке*, который непосредственно соответствовал бы какому-нибудь из разбиений усеченной пирамиды на части призматической или пирамидальной формы. Поэтому *мы вынуждены* принять, что правило задачи 14 Московского папируса получено путем алгебраического преобразования. Выполнялось ли оно на символах (что крайне мало вероятно) или на словах (как в арабской алгебре), с помощью геометрических образов (как у Евклида) или на частных

---

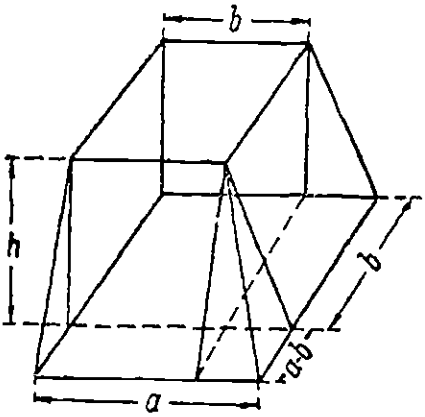
[1]) В таком виде эта формула нигде в известных нам текстах не встречается, но рассмотрение пирамиды как частного случая усеченной пирамиды ($b = 0$) вполне „в стиле" египетской математики, в которой, например, треугольник рассматривается как частный случай четырехугольника.

[2]) Соответствующее место из „Метрики" Герона читатель найдет у Г. Вилейтнера, „Хрестоматия по истории математики", М. 1936, ч. II, отрывок VIII. Я не привожу его ввиду длинноты. Отличие порядка вычислений у Герона от порядка, предписываемого Московским папирусом, объясняется тем, что Герон имеет дело с треугольной усеченной пирамидой, а не с квадратной.

числовых образцах, играющих роль иллюстрации общего правила (что мне кажется наиболее вероятным), — это вопрос особый. Но что это преобразование было алгебраическим в том смысле, *что пользовалось осознанными общими законами тождественных преобразований*, — это не подлежит для меня сомнению.

Какими именно преобразованиями пользовались египтяне для вывода формулы усеченной пирамиды? Ответ на этот вопрос зависит, конечно, от того, как представлять себе разбиение усеченной пирамиды и, значит, в большой мере от того, как представлять себе форму пирамиды, фигурирующей в задаче Московского папируса.

Форма чертежа, приложенного к выкладке, и некоторые доводы, опирающиеся на соображения о форме египетских сооружений (а вероятно также и стремление допустить минимум преобразований), побудила Нейгебауера принять, что усеченная пирамида нашей задачи должна иметь две „вертикальные“ боковые грани и две наклонные (черт. 2) [1]).



Черт. 2.

Тогда усеченная пирамида разбивается на прямоугольный параллелепипед, две треугольные призмы и пирамиду. Если приложить надлежащим образом одну из треугольных призм к другой, оставив вторую на прежнем ее положении, то обе призмы вместе с прямоугольным параллелепипедом образуют новый прямоугольный параллелепипед высоты h, в основании которого будет прямоугольник со сторонами a и b. Объем такого прямоугольного параллелепипеда hab. Остается еще пирамида со стороной основания $a-b$. Ее объем $\frac{1}{3}h(a-b)^2$. Следовательно, объем усеченной пирамиды

$$\frac{h}{3}[3ab+(a-b)^2],$$

и формула

$$\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$$

предполагает, таким образом, умение произвести преобразование

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

---

1) Я не подвергаю сомнению это допущение, хотя оно кажется мне мало обоснованным; действительно, все чертежи египетских математических текстов выполнены схематично и очень несовершенно. Поэтому ссылка на чертеж мало убедительна (это признает и Нейгебауер). Что касается формы сооружений, то ниоткуда не вытекает, что усеченная пирамида в задаче 14 Московского папируса изображает именно угол наклонной стены, как полагает Нейгебауер. Для меня, однако, вопрос не имеет существенного значения, так как при всяких других предположениях мы a fortiori придем к тем же выводам.

Это и принимает Нейгебауер, замечая, что подобное разложение засвидетельствовано в одном из египетских математических папирусов (Берлинском) [1]).

Однако это не мешает Нейгебауеру несколькими строками ниже заявить: „в формуле М 14 [2]) нет ничего такого, что могло бы заставить нас существенно изменить развитый нами выше взгляд на египетскую математику".

На мой взгляд, однако, умение выполнять преобразование

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

и

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \;{}^{3})$$

свидетельствует о значительном развитии алгебраических методов. Действительно, в рамках элементарных арифметических процедур, может быть, и могла возникнуть формула „сокращенного" умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

поскольку при умножении постоянно используется дистрибутивность по отношению к сложению [4]), но в хорошо известной нам технике египетского умножения никогда не применяется дистрибутивность относительно вычитания. Откуда же могла возникнуть формула

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2?$$

На этот вопрос может быть только один ответ: только благодаря *осознанной необходимости* выполнять тождественные преобразования с общими величинами. А эта необходимость появляется тогда, когда решается не вопрос о нахождении по данным величинам результата заданных действий, а обратная задача о нахождении неизвестной величины (или величин) по данной величине результата действий или, пользуясь нынешним термином, при решении уравнений.

Поэтому, хотя у нас нет прямых свидетельств наличия алгебраических постановок вопроса в математике древних египтян, однако задача 14 Московского папируса дает нам второе основание предположить их существование [5]).

---

[1]) Нейгебауер, Лекции, стр. 145—146 русского издания.

[2]) М 14 — сокращенное обозначение задачи 14 Московского папируса.

[3]) Как раз это последнее преобразование может подразуме-аться задачей 1 Берлинского папируса, на которую ссылается Нейгебауер и которая содержит преобразование $(\overline{2} + \overline{4})^2 = \overline{2} + \overline{16}$.

[4]) Я очень сомневаюсь даже в этом, ибо умножение $(a+b)(c+d)$ совершенно неразумно выполнять путем раскрытия скобок, если речь идет о действиях с *даными* числами.

[5]) Авторы, которые а приори отвергают такую возможность, будучи вынужденными объяснить решение задачи 14 Московского папируса, должны искать выход из затруднения в предположении, что правило, столь ясно

§ 15. Косвенные доводы в пользу предположения о высоком уровне развития древнеегипетской математики

В Московском папирусе есть еще задача 10, которая могла бы свидетельствовать о высоком уровне древнеегипетской математики. Я говорю „могла бы", потому что текст ее различно толкуется разными авторами. Согласно толкованию издателя папируса акад. В. В. Струве [1]) речь идет об определении поверхности полушария с диаметром $d = 4^1/_2$ локтя и ход решения истолковывается как умноже-

изложенное в тексте задачи, выведено применительно к очень частному случаю, в котором указанный в тексте вычислительный процесс может быть обоснован элементарными соображениями. Наиболее поучительным примером таких толкований может служить объяснение, недавно предложенное Э. Бортолотти. (E. Bortolotti, La scienza algebraica degli egiziani e dei babilonesi. Memorie della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, серия IX, том II, 1934/35, стр. 32—37.) Бортолотти считает, что вычислительный процесс задачи 14 выведен из числовых данных $a = 4$, $b = 2$. Из соображений подобия египтяне, по мнению Бортолотти, должны были заключить прежде всего, что при усечении полной пирамиды ее высота была разделена пополам; поэтому объем полной пирамиды в 8 раз больше объема усеченной.

Значит, объем усеченной пирамиды в 7 раз больше объема усекаемой. Так рассуждал, по мнению Бортолотти, египетский вычислитель, и, соответственно с этим, вычисление должно было состоять в том, чтобы взять семикратно объем усекаемой пирамиды. В тексте задачи 14 итальянский историк усматривает полное подтверждение своей конструкции. Если согласиться с ним, то выходит, что сначала берется семикратно площадь основания усекаемой пирамиды, т. е. помножается на 7 число $2^2 = 4$. Это умножение производится по схеме

$$\begin{array}{rr} /1 & 4 \\ /2 & 8 \\ /4 & 16 \\ \hline 7 & 28 \end{array}$$

Затем уже производится умножение числа 28 на треть высоты $\frac{6}{3} = 2$, и благополучно получается 56.

Бортолотти „сосчитал правильно"; но мог ли так считать египетский вычислитель? Прежде всего, если рассуждение его соответствовало рассуждению Бортолотти, то почему умножение велось в порядке $4 \times 7 \times \frac{6}{3}$, а не $4 \times \frac{6}{3} \times 7$? Конечно, от изменения порядка сомножителей произведение не изменяется, но какие основания были этот порядок изменять?

Еще более странным должно представиться с точки зрения Бортолотти объяснение Московского папируса, сопровождающее образование числа 28. Оно, действительно, составлено из слагаемых $4 + 8 + 16$, но опять слагаемые идут в обратном порядке: $16 + 8 + 4$. Более того, прямо говорится, что 16 получено как 4^2 (а не удвоением числа 8). После этого ясно, что объяснение Бортолотти совершенно неудовлетворительно. Если же к этому добавить, что оно могло бы годиться лишь для случая $\frac{a}{b} = 2$, то искусственный его характер становится совершенно несомненным.

[1]) W. W. Struve, цит. соч., стр. 157—169.

ние диаметра полушария на длину полукруга, образующего полушарие [1]). Другие авторы дают иное истолкование, согласно которому поверхность, о которой идет речь, не есть вовсе полушарие, и ход вычисления понимается иначе, так что „формула" принимает иной вид, хотя числовой ответ (32) и остается тем же.

Нейгебауер признает, что если толкование Струве было бы верно, то это означало бы, „что все наши взгляды на общий уровень египетской математики необходимо изменить в корне, а это оказалось бы в полном противоречии с выводами из остального материала, содержащегося в источниках" [2]). Последняя фраза очень хорошо характеризует слишком тенденциозный подход Нейгебауера к математике древних египтян, ибо ни в каком *противоречии с правильными* выводами из остального материала египетских источников толкование Струве (правильно ли оно или нет — другой вопрос) находиться не может.

О чем свидетельствует „остальной материал" египетских источников? Согласимся на минуту, что и задача 79 папируса Райнда, и задача 14 Московского папируса *не содержат* никаких намеков на высокий уровень египетской математики. Из этого следовало бы только то, что вопрос о наличии более тонких методов остается совершенно открытым — не более, и никакого противоречия с утверждением, что египтяне знали *и более* тонкие вещи, не получается. А теперь учтем, что упомянутые задачи наводят, как было показано, на предположение о существовании алгебраических методов; учтем, что характер изложения делает несомненным, что составители руководств знали, во всяком случае, больше, чем сказано в тексте [3]), и толкование Струве окажется совершенно не исключенным.

---

[1]) Заметим, что для вычисления площади круга в папирусе Райнда предписывается возвести в квадрат $\frac{8}{9}$ диаметра, что дало бы для числа π значение $4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2=3{,}16\ldots$ Как мы видим, значение очень точное. Струве принимает его в реконструкции задачи 10 для получения длины полуокружности.

[2]) Нейгебауер, „Лекции", стр. 146.

[3]) Это вытекает не только из стиля, который за догматической формой, несомненно, скрывает наличие теоретической аргументации, но и из того, что в наших текстах содержится заведомо не все, что было известно египтянам. Так, например, в текстах нигде не применяется теорема Пифагора. Между тем, египтяне должны были ее знать, по крайней мере для частных случаев (например, знаменитый „египетский" треугольник со сторонами 3, 4, 5 — о нем свидетельствуют греческие авторы). Интересно отметить, что размеры усыпальницы фараона в Хеопсовой пирамиде составляют (в метрах) $5{,}23\times10{,}46\times5{,}86$ (в египетских „локтях" $10\times20\times11{,}12$), так что высота 5,86 *м* практически равна половине диагонали основания. Вряд ли это соотношение случайно, так как отношение 2 : 1, соблюдаемое между сторонами двух прямоугольников (основания и диагонального сечения), скорее всего имело характер отношения, освященного культом.

Помимо вышеприведенных оснований я хочу указать еще на одно, едва ли не самое сильное. Для древнего Вавилона наличие высокой математической культуры совершенно бесспорно в настоящее время, хотя еще $1^1/_2$—2 десятка лет назад никто не мог подозревать тех достижений вавилонской математической культуры, которые были обнаружены в недавнее время [1]). Можем ли мы „а приори" поставить египетскую математику на голову ниже вавилонской? Ведь во всех остальных областях культуры эти две страны стояли на равной высоте. Кроме того, между этими странами существовало и культурное общение, так что трудно допустить, чтобы распространенные в Вавилоне методы могли бы остаться неизвестными в Египте. И действительно, присматриваясь к задачам, известным нам из вавилонских текстов, мы находим среди них такие, которые схожи по содержанию с египетскими. Особенно интересно то, что сходство таких задач обнаруживается не только в содержании, но и в методе решения. Наконец, и форма изложения там и здесь одна и та же.

Все это говорит *против* предположения о том, что египетская математика была на голову ниже вавилонской.

А теперь посмотрим, что представляла собой математика древнего Вавилона.

---

[1]) Проф. Тураев, крупнейший знаток древнего Вавилона, писал в своей „Истории древнего Востока": „Математические тексты (вавилонян) представляют большей частью собрания примеров и вычислений. Последние доходили до 12 960 000, т. е. 3600 в квадрате. Имеются таблицы не только умножения и деления, но даже квадратов, кубов и кубических корней. Конечно, все это было получено примитивным путем сложения и вычитания(?)". (Цитирую по изданию 1935 г., т. I, стр. 147; это издание воспроизводит текст, издавный при жизни автора в последний раз в 1917 г.)

ГЛАВА II

Вавилонская арифметика и алгебра

§ 1. Источники

Несколько расплывчатым термином „вавилонская математика“ обозначают математическую культуру, создавшуюся в течение многих веков на территории Двуречья (Месопотамии). В создании этой культуры, как и вообще „вавилонской культуры“, принимали участие многочисленные национальные группы, сменявшие друг друга в роли господствующих народов. Здесь, в низовьях Тигра и Евфрата, создавалась письменность, памятники которой по своему возрасту старше всех известных нам и относятся примерно к XXXV веку до н. э. Эта письменность — так называемая клинопись — была создана сумерийцами, древнейшими обитателями Месопотамии. Появившийся в этой стране около XX века до н. э. новый народ — аккадяне, подчинив и растворив в своей среде сумерийцев, воспринял их культуру и поднял ее на новую, более высокую ступень. Вместе с письменностью сумерийцев аккадяне заимствовали и их числовые знаки, и, вероятно, в эту эпоху была создана „вавилонская система“ нумерации, едва ли не самая своеобразная из всех исторически известных систем. Вслед за аккадянами господствующее положение последовательно занимали касситы и ассирийцы. В последний период господства ассирийцев их царство разрослось в мировую державу и вместе с тем „вавилонская“ культура распространилась на огромной территории и должна была оставить стойкие следы всюду, куда она проникала. Действительно, клинописное письмо, например, широко распространилось по всей передней Азии; заимствованное персами, оно должно было достичь границ Индии. Можно думать, что и вавилонская математическая культура получила столь же широкое распространение. Однако об этом мы в настоящее время не имеем почти никаких сведений.

Все наши источники (за исключением одного) имеют родиной территорию Двуречья. Эти источники открыты совсем недавно.

До 1916 года были известны лишь очень немногие документы, относящиеся к вавилонской математике. Они сводились к небольшому числу таблиц умножения, квадратов и кубов, а также таблиц метрологических, служивших для перевода одних мер в другие. Впервые таблицы такого рода были открыты в 1854 г. Гинксом

(Hinks). Из них уже можно было установить характерные особенности вавилонской системы нумерации и сделать некоторые заключения о вычислительной технике древних вавилонян[1]). Но лишь с 1916 г. начинается расшифровка вавилонских математических текстов, содержащих решение ряда интереснейших задач. В опубликовании и изучении этих документов в течение двенадцати лет, с 1916 по 1928 г., руководящая роль принадлежала французскому ассириологу Тюро-Данжену (Thureau-Dangin). С 1929 г. стали появляться многочисленные публикации Нейгебауера, которому история математики обязана фундаментальной работой, сводящей все прежде опубликованные материалы и содержащей как фотовоспроизведения всех известных клинописных математических текстов, так и их транскрипцию, перевод и комментарии. Эта работа появилась в 1935 г.[2]), вскоре после выхода его лекций по истории математики египтян и вавилонян, на которые мы уже многократно ссылались.

В результате упомянутых исследований мы располагаем по истории вавилонской математики материалом гораздо более обширным и по количеству источников, и по охватываемому ими периоду, чем по истории математики в древнем Египте. И все же этот материал еще далеко не полон. Нужно думать, что среди огромного количества (около 100 000) клинописных текстов, уже добытых в результате раскопок, имеется еще значительное число математических.

„Полная невозможность ориентироваться в инвентаре большей части музеев и глубокое отвращение их руководящих органов к подобного рода текстам, — с горечью сообщает Нейгебауер[3]), — является причиной того, что о развитии математического мышления в древнем Востоке мы знаем так мало — много меньше того, что мы знали бы, если бы единственной препятствующей причиной были случайности, поведшие к гибели значительной части текстов".

Таким образом возможность пополнения числа математических клинописных текстов не только не исключается, но является вполне реальной. Что касается известного и изученного материала, то он содержит около 250 текстов, не считая многочисленных метрологических таблиц.

Материалом для клинописного письма, если не считать фундаментальных построек с начертанными на них надписями, служили с глубокой древности глиняные дощечки, а также глиняные призмы, на которых особыми палочками выдавливались буквы и цифры; затем

---

[1]) История открытия вавилонской системы нумерации изложена Wieleitner'ом в книжке „Geschichte der Entdeckung des babylonischen Sexagesimalsystem", Berlin 1930.

[2]) Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung A, 3 Band. Mathematische Keilschrifttexte Herausgegeben und bearbeitet von O. Neugebauer. Kopenhagen, Berlin 1935 (2 тома). В дальнейшем цитируется: „Математические клинописные тексты".

[3]) Нейгебауер, Лекции, стр. 230 русского перевода.

они подвергались обсушиванию или обжиганию. Именно этой техникой письма и обусловлена клинообразная форма его знаков. Математические тексты также нанесены на глиняных дощечках и призмах. Натуральная величина глиняных дощечек с математическими текстами колеблется в довольно широких пределах: самые маленькие таблицы имеют размеры примерно 5×5 *см*; наиболее крупные примерно 20×20 *см*. Обычно они имеют несколько продолговатую форму. Направление клинописного письма в древнейшее время было вертикальным (сверху вниз); последовательные колонны шли справа налево.

По мере того как клинопись теряла характер письма рисунками и становилась буквенным письмом (этот процесс заканчивается примерно к XXX веку до н. э.), все чаще, для удобства письма, дощечки поворачивали, чтобы первая (правая) колонна становилась верхней строкой. Этот поворот должен был производиться против часовой стрелки, и горизонтальная строка должна была итти слева направо. Таким и является направление письма в позднейших текстах, в частности, и в математических.

Из двух с половиной сотен известных нам математических текстов примерно 50 являются „текстами" в узком смысле, т. е. содержат задачи и их решения. Остальные представляют собой таблицы, которые, как мы увидим, играли очень действенную роль в вавилонской вычислительной технике. На небольшой сравнительно площади этих текстов помещается, однако, довольно значительный по объему материал. Так, общее число решенных задач, снабженных подробным указанием хода решения (анализа решения вавилонские, как и египетские математические тексты не содержат) доходит до 500. Такое большое количество материала умещается на небольшом „листаже" отчасти благодаря сжатости формулировок, главным же образом благодаря компактности, присущей клинописному письму; в ряде случаев наблюдается сознательное стремление максимально экономить материал за счет убористости почерка. Насколько это достигает цели, можно судить по тому, что один из текстов, имеющих в натуре площадь в 5×5 *см*, т. е. столько, сколько отнимает 14 строк наиболее экономного нашего набора, занимает более $1^1/_2$ страниц формата этой книги в транскрипции, т. е. при воспроизведении буквами латинского алфавита клинописных знаков; в переводе же на русский язык этот текст, чтобы смысл его был вполне однозначным, потребует еще больше места — не менее $2^1/_2$ страниц.

Давность наших математических клинописных текстов во многих случаях не может быть установлена с безусловностью вследствие того, что для большей их части сейчас нельзя установить места их обнаружения. Лишь незначительная часть имеет источником научно организованные раскопки; остальные приобретались из рук местных жителей, заботившихся только о получении выгодного дохода от продажи случайно разысканных памятников старины. Особенно печальные для историка последствия проистекают из происходившего при этом разъединения комплектов клинописных таблиц. Из-за этого обстоятельства остаются неизвестными взаимные связи между отдельными текстами.

Тем не менее в ряде случаев удалось определить эпоху составления многих текстов, и можно во всяком случае констатировать, что среди чисто математических текстов древнейшие относятся к эпохе Хаммурапи, т. е. примерно к XVIII веку до н. э. В эту эпоху уже завершился период усвоения сумерийской культуры аккадянами. Говоря о „чисто математических" текстах, мы имеем в виду тексты, содержащие специально подобранные задачи и таблицы, служащие пособием при вычислениях. Помимо этого, имеется ряд „хозяйственных" документов (записи расходов, юридические акты и т. п.), из которых можно почерпнуть сведения о математических знаниях их составителей. Среди этих последних имеются и более древние документы, относящиеся к сумерийской эпохе, так что мы можем получить некоторые сведения и о предшествующих этапах развития математики в Месопотамии. Итак, древность наших источников по истории вавилонской математики примерно такова же, как и по истории математики Египта. Но в то время как для древнего Египта чисто математические тексты относятся почти исключительно к началу второго тысячелетия до н. э., вавилонские источники не исчерпываются этой эпохой; напротив, наиболее значительная их часть относится к эпохе касситов (примерно, 1800 - 1200 гг. до н. э.), а некоторые, несомненно (на это указывают, например, упоминающиеся в тексте собственные имена), составлены в персидскую (600—300 гг. до н. э.) и даже в эллинистическую (после 300 г. до н. э.) эпоху. Таким образом вавилонская математика существовала еще в эпоху Архимеда! И „вавилонской" она была не только по территориальному признаку; отличительные особенности ее — система нумерации, техника вычислений, стиль изложения, терминология, круг задач, приемы их решения — во всем сохраняли единство и преемственность.

Дошедшие до нас математические клинописные тексты, так же как и египетские математические папирусы, несомненно предназначались для целей обучения. На это указывают прежде всего прямые обращения к учащемуся. Если египетский автор предпосылает решениям задач многозначительное „делай, как делается" или заканчивает их словами: „видишь, ты решил правильно", то в вавилонских текстах автор все время обращается к читателю в повелительном тоне: „прибавь", „отними", „поступай так при твоем решении" и т. д. Далее, на одной дощечке помещаются часто задачи, расположенные совершенно беспорядочно; это свидетельствует о том, что здесь мы имеем сборник упражнений, а не научный трактат или даже систематический курс. Наконец, почти во всех задачах числовые данные, несомненно, специально подобраны так, чтобы в наиболее трудных пунктах (например, при извлечении квадратного корня) получался „круглый" результат или чтобы выкладки с большими числами приводили к ответу с небольшими числами.

Как мы видели, в египетских математических текстах в ходе решения задачи обычно приводятся и схемы некоторых вычислений (например, умножения целых чисел или преобразования дробей). В противоположность этому в вавилонских текстах даются только готовые результаты отдельных действий. Объясняется это тем, что в вавилонской вычислительной технике гораздо бо́льшую роль, чем в египетской, играли таблицы, благодаря которым учащийся или прямо мог найти готовые результаты, или ему оставалось проделать совершенно простой подсчет. Множество таких таблиц дошло до нас. Не менее, чем для 180 таких таблиц можно с полной уверенностью указать их назначение. Естественно начать ознакомление с вавилонской математикой именно с этих таблиц, в которых содержится почти исключительно числовой материал. Но прежде нужно познакомиться с вавилонским способом записи чисел. К этому мы и переходим.

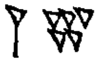
§ 2. Нумерация

Для записи целых чисел вавилоняне в течение всего того периода, от которого мы имеем математические тексты, пользовались по существу только двумя знаками, из комбинаций которых составлялись все числовые знаки. Один из них, взятый изолированно, представляет единицу; он, как и египетский знак единицы, имеет форму вертикальной черты; благодаря упомянутым выше особенностям техники письма эта черта имеет форму клина, обращенного острием книзу: 𒁹 $= 1$. Второй основной знак, изолированно взятый, представляет число 10. Он выдавливался в глине косо наклоненной палочкой; палочка эта имела призматическую форму, и след получал, примерно, такую форму: 𒌋 $= 10$. В наиболее древних (нематематических) текстах, относящихся к четвертому тысячелетию до н. э., т. е. более, чем на 1000 лет, предшествующих древнейшим из известных нам математических текстов, встречается еще знак для числа 100, имеющий вид кружка. В позднейшие эпохи этот знак исчезает совершенно.

С помощью знаков единицы и десятки все целые числа до 59 включительно записываются по десятичной системе совершенно так же, как и в египетской нумерации, т. е. знаки 𒁹 и 𒌋 повторяются надлежащее число раз. Так,

𒐈 $= 3$, 𒌋𒌋 $= 20$, 𒌍𒐖 $= 32$.

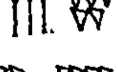
Когда знак десятки или единицы повторяется четыре и более раз, запись, как и в египетском письме, становится более компактной, однако основные знаки остаются легко различимыми. Например, 𒐊 $= 5$, 𒐐 $= 50$. Число 60 изображается, однако, не шестикратным повторением знака десятки, а знаком единицы! В древнейших текстах (нематематических) этот знак, когда он употребляется для обозначения числа 60, имеет более значительные размеры, чем знак единицы, так что, хотя форма их и одинакова, но они все же отличны друг от друга и имеют абсолютиое значение. В более поздних текстах, в частности, в математических, различие в величине совершенно исчезает, и знак для 60 ничем не отличается от знака для единицы. Образование числовых знаков от 60 до $2\cdot 60-1=119$ совершается путем приписывания к знаку 60 справа от него обозначения остающегося числа, меньшего шестидесяти. Между знаком 60 и приписываемыми знаками оставляется интервал, больший, чем между остальными, так что, например,

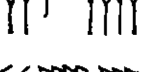
 $=63$;  $=65$,

и эти числа не могут читаться, как 4 и 6. Еще примеры:

 $=80$,  $=114$.

Таким образом запись чисел от 61 до 119 не могла вызывать никаких сомнений. Что же касается записи числа 60, то ее, как было сказано, нельзя по внешнему виду отличить от знака единицы, так что „абсолютное“ значение этой цифры можно установить только по общему смыслу текста. То же самое имеет место и в отношении чисел, кратных шестидесяти. Число $2\cdot 60=120$ обозначается так же, как и 2, т. е. двумя знаками единицы; число $3\cdot 60=180$ обозначается так же, как и 3, и т. д. до $59\cdot 60=3\,540$. Остальные целые числа в интервале между 60 и $60\cdot 60=3\,600$ записываются, как и рассмотренные уже числа интервала (60, 120), по шестидесятеричному позиционному принципу, т. е. ближайшее меньшее число вида $60\cdot k$ (k — целое число, меньшее, чем 60) записывается так же, как число k; остающееся число, которое тоже меньше 60, приписывается к нему справа, отделяясь некоторым промежутком. Так, например

 $=3\cdot 60+5=185$,

 $=5\cdot 60+8=308$,

 $=38\cdot 60+3=2\,283$,

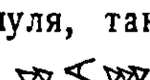
 $=11\cdot 60+22=682$.

Обратим внимание на то, что в этом способе записи мы имеем своеобразное сочетание шестидесятеричного принципа с десятичным. Но лишь в шестидесятеричных разрядах проводится позиционный принцип; для десятеричных разрядов сохраняются особые обозначения десятков и единиц. Поэтому мы имеем основание назвать вавилонский способ записи чисел шестидесятеричной позиционной системой нумерации, или, короче, просто шестидесятеричной системой; нужно, однако, иметь в виду, что при отсутствии какого бы то ни было эквивалента для нашего нуля, стоящего на последнем месте, эта позиционная система лишена абсолютности.

Для чисел, превосходящих $60 \cdot 60 - 1$, применяется та же шестидесятеричная позиционная система нумерации; однако здесь следует особо отметить употребление междуразрядного нуля. Поэтому мы должны будем специально остановиться на вопросе о записи больших целых чисел. Всякое такое число A можно представить (в современных обозначениях) в виде:

$$A = a_1 + a_2 60 + a_3 60^2 + \cdots + a_n 60^{n-1},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — целые числа, меньшие, чем 60, некоторые из которых могут быть равны нулю; a_n предполагается не равным нулю. Будем называть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ „цифрами" 1-го, 2-го, ..., n-го разряда. Принцип вавилонской записи чисел состоит в том, что выписываются слева направо через заметные интервалы цифры n-го, $(n-1)$-го, $(n-2)$-го и т. д. разряда с помощью знаков единицы и десятки. Если, начиная с некоторого разряда, все подряд цифры низшего разряда равны нулю, то запись обрывается, и отсутствие низших разрядов ничем не отмечается. Так, если $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 21$, $a_4 = 8$, т. е. $A = 21 \cdot 60^2 + 8 \cdot 60^3 = 1\,803\,600$, то вавилонская запись будет ; эта же самая запись может представлять с равным правом и число $21 \cdot 60 + 8 \cdot 60^2 = 30\,060$ и $21 + 8 \cdot 60 = 501$ и все числа вида $(21 + 8 \cdot 60)\, 60^k$ (k — целое число). Поэтому естественно назвать такое число 1 803 600 „двузначным" (а не четырехзначным) в шестидесятеричной системе нумерации.

В ранних математических текстах встречаются и такие числа, в которых, как видно из контекста, отсутствуют единицы одного из промежуточных разрядов, и тем не менее это никак не отмечается в записи. Скажем, число $2 + 3 \cdot 60^2 = 10\,802$ записывается в виде , т. е. так же, как записывалось бы и число $2 + 3 \cdot 60 = 182$ (и вообще числа вида $182 \cdot 60^k$); величина интервала, разделяющая цифры разрядов, ничем не отличается от обычной, так что чтение чисел еще более затрудняется: каждое двузначное число не только содержит в скрытом виде неопределенный множитель 60^k, но и может быть понимаемо, как трехзначное и даже многозначное. Этот недостаток в вавилонской нумерации был со временем устранен. В более поздних текстах мы находим систематически употребляющийся знак отделения , играющий роль нашего нуля, так что число 10 802 должно было записываться уже в виде , т. е. представляться не двузначным, а трехзначным числом [1]).

[1]) Нейгебауер („Лекции", стр. 21) указывает, что древнейший из текстов, содержащий знак нуля, относится, повидимому, к персидской эпохе. Но и в документах заведомо более раннего времени отсутствие нуля там,

Разумеется, знак нуля мог появиться не раньше, чем вошли в частное употребление большие числа, т. е. числа, значительно превышающие $60^2 = 3\,600$. В связи с этим интересно заметить, что уже в древнейших математических текстах в вычисление вводятся систематически числа, имеющие три шестидесятеричных разряда, и числа, превосходящие 100 000, встречаются среди них довольно часто.

Так как вычислительная техника в вавилонской математике существенно опирается на шестидесятерично-позиционную нумерацию, то для адэкватного ее понимания необходимо при передаче вавилонских текстов сохранить ее характерные свойства. Нет нужды как-либо передавать вавилонскую запись внутри каждого разряда, ибо она несущественна для понимания методов вавилонского счета. Поэтому мы будем записывать каждую шестидесятеричную „цифру" по нашей системе. Но мы должны сохранить шестидесятеричное написание многоразрядных чисел. Сообразно с этим, следуя Нейгебауеру, мы будем записывать число 185 в виде 3,5; число 682 в виде 11,22 и т. д., вводя запятую вместо междуразрядного промежутка. Число 7 203 мы запишем в виде 2,0,3, заменяя нашим нулем вавилонский разделительный знак. Строго говоря, следовало бы сохранить за этими записями их многозначность, т. е. считать, что 3,5 изображает не только 185, но и все числа вида $185 \cdot 60^k$. Однако, во избежание недоразумений, будем в таких случаях писать справа нули, так что, например, $185 \cdot 60 = 11\,100$ будем записывать в виде 3,5,0, а число $185 \cdot 60^2 = 666\,000$ в виде 3,5,0,0. Будем, однако, помнить, что в вавилонской записи этим нулям справа ничего не соответствует, а что с чисто математической точки зрения любое вавилонское вычисление можно истолковать в такой записи многими способами, приписывая к каждому входящяму в выкладку числу некоторое количество „нулевых" разрядов справа.

Вавилонская математика извлекла из обрисованной выше позиционной системы нумерации все те выгоды, которые она могла дать. Именно, по шестидесятеричному основанию она построила не только изображение целых чисел, но и изображение дробей, совершенно аналогично тому, как наша десятично-позиционная система используется для систематического представления дроби (десятичные дроби). Так, число $2\frac{3}{5}$, которое мы систематически записываем в виде 2,6,

---

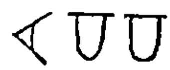
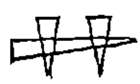
где он должен был бы стоять в промежуточных разрядах, наблюдается очень редко. Правда, мы не знаем и случаев, когда он встречался бы раньше персидской эпохи. Мне кажется, можно предположить, что составители текстов сознательно избегали таких числовых заданий, которые требовали бы употребления в ходе выкладки междуразрядного нуля (см. выше, стр. 62). Если это так, то редкие случаи действительного отсутствия знака разделения могли бы быть объяснены небрежностью писавшего. Кстати сказать, почти во всех текстах содержится много ошибок, несомненно являющихся „описками", так как неверные промежуточные результаты не влияют на результаты окончательные, не содержащие ошибок. Поэтому вопрос об эпохе возникновения разделительного знака правильнее было бы считать открытым.

вавилонский вычислитель представлял в виде $2\frac{36}{60}$ и записывал , т. е. так же, как записал бы и целое число $156 = 2\cdot 60 + 36$. Здесь снова выступает многозначность вавилонской записи. Эта многозначность последовательно проводится и дальше, так что приведенная только что запись может обозначать не только 156 и $2\frac{3}{5}$, но также и $\frac{13}{300} = \frac{2}{60} + \frac{36}{60^2}$ и $\frac{13}{1800} = \frac{2}{60^2} + \frac{36}{60^3}$ и т. д.

Сообразно с этим мы должны были бы все эти дроби передавать записью 2,36. Однако, по тем же мотивам, по которым мы вводили нули справа для обозначения абсолютной позиции целого числа, мы введем знак, аналогичный нашей запятой, отделяющий целую часть от дробной; в качестве такового возьмем точку с запятой (запятая уже использована как междуразрядный знак). Таким образом $2\frac{3}{5}$ запишем в виде 2;36. Соответственно придется $\frac{13}{30} = \frac{2}{60} + \frac{36}{60^2}$ изобразить в виде 0;2,36, а число $\frac{13}{1800} = \frac{2}{60^2} + \frac{36}{60^3}$ в виде 0;0,2,36 [1]).

Все сказанное выше относительно междуразрядного нуля остается в силе и для дробей, так что, например, запись 2;0,15,0,6 означает $2 + 15\cdot 60^{-2} + 6\cdot 60^{-4}$; повторим, что лишь эти междуразрядные нули имеют эквивалент в вавилонских источниках; остальные же нули привносятся нашей транскрипцией.

Представление дробей в шестидесятеричной системе является единственным общим способом, применяемым в вавилонской математике. Лишь для некоторых, наиболее простых дробей, *наряду* с систематическим представлением употребляется и несистематическое. Такими дробями являются $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, которые, как мы видели, и в египетской нумерации занимали исключительное положение. Эти дроби в вавилонском письме имеют индивидуальные обозначения, а именно:

Дроби	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Древнейшее, сумерийское начертание			
Позднейшее, аккадское			

[1]) Кроме этой транскрипции Нейгебауера, существует еще транскрипция Тюро-Данжена, в которой для обозначения шестидесятеричных разрядов используются знаки градуса, минуты, секунды и т. д.; так, число $2\cdot 60^2 + 5\cdot 60 + 7 + 11\cdot 60^{-1} + 46\cdot 60^{-2}$ в этой транскрипции записывается так: $2''5'7^{\circ}11'46''$.

В аккадских текстах встречаются индивидуальные обозначения и для дробей $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{11}{12}$. В математических текстах они почти не употребляются. То обстоятельство, что индивидуальные обозначения дробей получили столь малое развитие, не может быть объяснено иначе, как тем, что шестидесятерично-позиционная система возникла в очень ранний период, когда еще не существовало развитой техники счета с дробями. Этот вывод следует иметь в виду при рассмотрении вопроса, к которому мы теперь переходим: как и при каких обстоятельствах возникла вавилонская система нумерации?

§ 3. Происхождение шестидесятерично-позиционной системы

Этот вопрос имеет свою историю, и довольно давнюю. В дальнейшем мы увидим, что шестидесятеричная система записи дробей была заимствована у вавилонян греческими астрономами. У Птолемея (II век н. э.) она систематически применяется для выражения длины хорд в долях радиуса круга, и комментатор великого астронома, Теон Александрийский (конец IV и начало V века н. э.) высказывает предположение о том, как возникла у вавилонян шестидесятеричная система нумерации.

Теон полагает, что число 60 было выбрано вавилонянами за основание системы исчисления в силу своих арифметических свойств: оно имеет наибольшее число различных делителей среди сравнительно небольших чисел[1]). Таково же было мнение Валлиса, выдающегося математика XVII века[2]). Это объяснение получило большое распространение, и его можно встретить во многих популярных книгах и в наше время. Оно, очевидно, предполагает, что шестидесятеричная система нумерации возникла в то время, когда теоретическая арифметика достигла уже высокого уровня. Мы только что видели, однако, что это допустить невозможно. По той же причине нужно отвергнуть и гипотезы тех авторов, которые возникновение шестидесятеричной системы исчисления связывают с астрономическими наблюдениями вавилонян. Такой точки зрения придерживался, например, Кантор в первом издании своего курса истории математики[3]). По мнению Кантора, исходным пунктом шестидесятеричной системы было, с одной стороны, деление круга на 6 „секстантов", являвшееся наиболее удобным с конструктивной точки зрения; с другой же стороны, деление круга на 360 частей, соответствующих 360 долям

[1]) Commentaire de Théon d'Alexandrie sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée Ed. Halma, стр. 9.

[2]) Wallis, Opera mathematica, т. II, стр. 29. В недавнее время та же точка зрения была выдвинута Löffler'ом (Archiv der Mathem. und Phys., 3 серия, т. 17, 1910, стр. 304 и след.).

[3]) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, т. I, 1880 г., стр. 83.

„округленного" года. Таким образом дуга секстанта делилась на 60 частей [1]).

Это объяснение на первый взгляд может показаться тем более правдоподобным, что гражданский год древних вавилонян действительно делился на 12 месяцев по 30 дней в каждом (недостающие 5 дней восполнялись прибавлением раз в 6 лет „високосного" месяца). Однако, для того чтобы определить число дней в году, а тем более для того чтобы „округлить" это число, нужно уже иметь развитую систему нумерации, которая позволяла бы подняться до чисел третьей сотни. Не имея системы нумерации, нельзя и „округлить" числа, ибо „круглота" или „некруглота" числа зависят от системы счисления. Значит, нужно было допустить, что в эпоху формирования вавилонского календаря у вавилонян уже существовала какая-то система нумерации; если она была уже позиционно-шестидесятеричной, то объяснение Кантора отпадает само собой; если же она была десятичной, то введение нового основания 60 не было бы достаточно мотивировано потребностью делить секстант на 60 частей. Эти соображения побудили Кевича (G. Kewitsch) [2]) высказаться против точки зрения Кантора, и сам Кантор впоследствии отказался от своей гипотезы и принял гипотезу Кевича. Согласно последней шестидесятеричная система возникла из смешения двух систем, существовавших прежде независимо: десятеричной и шестеричной.

Одна из них, по мнению Кевича, должна была быть системой исчисления сумерийцев; другая — аккадян. Гипотеза Кевича была, впрочем, так мало обоснована фактами, что оставляла открытым даже такой вопрос, какой из двух народов, сумерийский или аккадский, имел первоначально шестеричную систему. Несмотря на свой чисто умозрительный характер, гипотеза Кевича была шагом вперед по сравнению с предшествующими: в ней впервые была высказана идея „смешения", которая позднее возникала в разнообразных вариациях.

Так, например, делались попытки получить 60, как комбинацию 5×12, связывая ее со счетом на пальцах; по исчерпании пяти пальцев на одной из рук загибается один из суставов на четырех больших пальцах другой руки. Эта гипотеза является, впрочем, также голой догадкой, не подтверждаемой никакими историческими фактами.

Гораздо более убедительной является теория, предложенная в 1927 г. Нейгебауером [3]).

Она выгодно отличается от предшествующих теорией тем, что автор ищет корни шестидесятеричной системы счисления в таких

---

[1]) Такое же объяснение было предложено еще в 1781 г. итальянцем Формалеони, который исходил из той курьезной точки зрения, что в „эпоху потопа" год был короче нынешнего на 5 дней.

[2]) Zeitschrift für Assyriologie, XVIII, 1904, стр. 73—95.

[3]) O. Neugebauer, Zur Entstehung des Sexagesimalsystems, Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-Phys. Klasse. Neue Folge, т. XIII, 1927. См. также Archeion, т. IX, 1928 и Revue d'Assyriologie, т. XXVI, 1929. Эта теория изложена автором и в его „Лекциях по истории античных математических наук", стр. 120—125 русского перевода.

фактах истории материальной культуры, которые действительно составляют предпосылку возникновения абстрактных математических понятий. Основное положение Нейгебауера сформулировано им следующим образом: „шестидесятеричная система счисления возникла из шестидесятеричной системы мер“. И действительно, в вавилонской метрологии мы находим часто такие отношения мер высшего разряда к мерам низшего, которые выражаются числом 60. В частности, в системе мер веса это отношение является основным (1 талант равен 60 минам; 1 мина равна 60 шекелей). Нужно иметь в виду, что весовые единицы одновременно являлись и единицами денежными: древние вавилоняне не имели монет, и денежные расчеты производились серебром, принимавшимся по весу. Согласно теории Нейгебауера система счисления с основанием 60 явилась продуктом денежно-весовой системы мер. Это объяснение представляется мне в высшей степени убедительным, так как оно связывает появление развитой системы счисления с развитием торговли, потребности которой, как мы знаем из целого ряда других исторических фактов, имели всегда решающее значение для развития техники счета.

Естественно возникает вопрос, каким же образом число 60 сделалось основным отношением в системе мер веса? Нейгебауер дает ответ и на этот вопрос, причем и здесь он исходит из анализа конкретных исторических фактов.

Решающим историческим обстоятельством явилось, согласно теории Нейгебауера, столкновение сумерийского и аккадского народов. Каждый из них имел свои весовые единицы. Что касается системы счисления, то у обоих народов она была десятичной; этот факт не нуждается в особых объяснениях, поскольку десять пальцев на руках человека представляют собой естественнейшее орудие первоначального счета. Важно, однако, то обстоятельство, что техника счета была еще не особенно развита — она ограничивалась примерно числами первой сотни. Наряду с этим пользовались простейшими дробными частями весовых единиц, деля их на две и на три равные части. Из деления одной трети пополам возникала шестая часть.

При этих обстоятельствах произошло соприкосновение сумерийцев с аккадянами. Торговые сношения между этими народами потребовали установления некоторого эквивалента между их весовыми единицами, миной и шекелем. Этот эквивалент, конечно, должен был сопровождаться некоторым „округлением“, но самый процесс округления должен был совершаться в рамках существующих систем счета. Таким округлением и явилось приравнение $\frac{1}{6}$ части мины 10 шекелям, ибо $\frac{1}{6}$ мины была одной из простейших ее дробных частей, а 10 шекелей — простейшей высшей единицей соответствующих мер. Отсюда и возник эквивалент мины и шекеля: 1 мина = 60 шекелей. Обе эти единицы стали употребляться совместно, и денежные суммы выражались в минах и шекелях так же, как мы выражаем их в рублях и копейках.

При словесном и письменном выражении денежных сумм наименования стали опускаться, как сами собой разумеющиеся (подобно тому, как мы говорим „два двадцать“ и пишем 2.20 вместо 2 р. 20 к.). Итак, первоначально шестидесятеричная система относилась не к отвлечённым числам, а к именованным. Постепенно укореняясь, она стала настолько обычной, что при последовавшем расширении круга употребляемых на практике чисел, т. е. при образовании чисел, значительно превосходивших числа первой сотни, в основу был положен счет по шестидесятеричной системе. Так возникла и „отвлеченная“ система шестидесятеричной нумерации.

Конечно, в теории Нейгебауера есть гипотетические элементы: обстоятельства установления денежно-весовых эквивалентов не засвидетельствованы никакими положительными данными; однако те особенности, которые наблюдаются в вавилонской нумерации, находятся в полном согласии с предположеииями Нейгебауера. Действительно, мы уже видели, что в вавилонской нумерации сохраняются следы примитивной десятичной системы (изображение чисел между 1 и 60); далее, наличие в ранних источниках более крупного начертания для единицы высшего шестидесятеричного разряда указывает на то, что эта единица имела значение именованного числа. Сохранившиеся индивидуальные начертания для простейших дробей (в частности, для $\frac{1}{6}$) подтверждают предположение, что возникновение шестидесятеричной системы имело место в эпоху, когда уже существовали простейшие дроби; однако развитого понятия дроби и далеко идущей дробночисленной нумерации, повидимому, еще не существовало. Все это согласуется с предположением Нейгебауера: при этих условиях нарисованная им картина становится если не вполне достоверной, то весьма правдоподобной.

Тем не менее, она не получила общего признания, и это объясняется в первую голову тем, что исходное положение Нейгебауера, что шестидесятеричная система нумерации имеет источником шестидесятеричную систему мер, показалось неприемлемым для многих историков. В противовес этому положению Тюро-Данжен выдвинул контртезис: „шестидесятеричная система проникла в метрологию лишь потому, что она уже существовала в нумерации“ [1]).

Сам Тюро-Данжен выдвигает предположение, что в древнейшее время вавилонская нумерация имела смешанный десятично-шестиричный характер; единицей второго разряда служила десятка; единица же третьего разряда образовалась из *шести* единиц второго разряда, так что роль нашей сотни играло число 60. Дальнейшее образование различных единиц, происходившее позднее, повторяло эту схему, т. е. 10 единиц третьего разряда составляло единицу четвертого разряда, а 6 единиц четвертого разряда — единицу пятого и т. д.

---

[1]) Thureau-Dangin, Esquisse d'une histoire du système sexagésimal, 1932, стр. 11.

Чем же объяснить, что для образования единицы третьего разряда использовалось 6, а не 10 единиц второго разряда? Тюро-Данжен считает, что причина состоит в том, что число 6, делящееся на 2 и на 3, оказалось более удобным по своей арифметической структуре[1]). Так замыкается полуторатысячелетний круг, и мы возвращаемся к объяснению, мало отличающемуся от объяснения Теона Александрийского, и то возражение, которое было выше приведено против последнего, сохраняет свою силу и в данном случае. Сверх того, нельзя не согласиться с Нейгебауером, когда он по поводу точки зрения Тюро-Данжена замечает, что она совершенно не объясняет, откуда возник позиционный принцип вавилонской нумерации[2]). Теория же Нейгебауера дает и на этот вопрос ясный ответ (см. выше). Мы видим, таким образом, что она во всех отношениях заслуживает решительного предпочтения перед всеми остальными[3]).

§ 4. Сложение и вычитание

Обратимся теперь к вопросу о вычислительной технике вавилонской математики. Из вышесказанного очевидно, что здесь нет оснований рассматривать операции с дробями отдельно от операций с целыми числами.

Сложение и вычитание любых чисел, представленных по вавилонской системе нумерации, не должны были вызывать никаких затруднений. Возможно, что вавилонские вычислители пользовались подписыванием разрядов под соответствующими разрядами, — за отсутствием в нашем распоряжении вычислительных схем этого нельзя сказать с достоверностью, — но принципиально это не меняет положения дела. Сложение иногда обозначается простым помещением

---

[1]) Там же, стр. 18—21.

[2]) O. Neugebauer, Sexagesimalsystem und babylonische Bruchrechnung. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B, т. I, стр. 185.

[3]) Отмечу, однако, что теория Нейгебауера оставляет невыясненным вопрос о том, как объяснить наличие наряду с шестидесятеричной нумерацией чисто десятеричной с особыми знаками для 100, 1 000 и т. д. Сам Нейгебауер („Лекции“, стр. 110 русского перевода) упоминает, что в одном чисто математическом тексте (ассирийской эпохи) „мы имеем последнюю стадию развития вычислительной техники и наряду с шестидесятеричными обозначениями встречаем и десятичную транскрипцию, например для 1, 48 обозначение 1*me* 8, т. е. «1 сотня 8»“. К этому следовало бы добавить, что в нематематических текстах десятичная транскрипция применяется и к большим числам (до миллиона), на что ассириологи обратили внимание задолго до обнаружения математических текстов и что отметил Кантор еще в первом издании своей „Истории математики“ (т. I, 1880 г., стр. 70—71, там же см. литературные указания). Не указывает ли наличие десятичной транскрипции в позднюю эпоху на то, что и в более раннее время десятеричная система нумерации, подобная египетской, существовала параллельно с шестидесятеричной? А если первая появилась лишь в ассирийскую эпоху, то при каких обстоятельствах это могло иметь место? Эти вопросы, насколько мне известно, в литературе не ставились.

слагаемых рядом друг с другом; например, если мы встречаем запись: „1,0,0, 26,40 1,26,40 получается“, то она переведется на наш язык равенством: $1,0,0+26,40=1,26,40$.

Напомню, что нулей в конце числа в вавилонском тексте нет, так что нужно по „происхождению“ первого слагаемого узнавать, что оно представляет единицу третьего разряда, а не второго или первого. Большей частью, однако, текст указывает, что нужно произвести сложение: „1,0,0 и 26, 40 сложено и 1,26,40 получается“. Что касается вычитания, то оно в текстах всегда обозначается словесно: „2,5 от 37,5 отнято и 35 получается“. В таблицах же встречается своеобразный способ выражения чисел с помощью вычитания, аналогичный написанию чисел 4 (IV), 9 (IX) в римской нумерации. Так, число 19 изображается не как $10+9$, а как $20-1$, причем роль нашего знака минус играет слово „lal“, обозначаемое знаком . Таким образом  $=20-1=19$. Точно так же 37 записывается, как 40 lal 3, а 58 — как 1 lal 2 (т. е., в принятой нами транскрипции Нейгебауера, как 1,0 lal 2).

Ясно, что такие записи имеют целью экономию времени и места. Однако введение их в выкладки чрезвычайно затруднило бы вычисление; очевидно поэтому они и не вошли в употребление при вычислении. Таким образом на вавилонское „lal“ нужно смотреть, как на неразвившийся символ вычитания. Интересно отметить, что в египетских математических текстах сложение и вычитание отмечаются знаками  и , происшедшими от иероглифов, изображающих две ноги, т. е. хождение в одну или в другую сторону. Мы видим, что в отношении символических средств обе культуры — вавилонская и египетская — стоят примерно на одном уровне.

Повидимому, и в отношении производства сложения и вычитания (целых чисел) между египетской и вавилонской математикой не было различия, если не считать того, что в чисто десятеричной системе египетской нумерации немного легче было производить удержание единиц высшего разряда при сложении и присоединении их к единицам низшего разряда при вычитании.

Совсем другая картина раскрывается перед нами при умножении и делении. Если египетский вычислитель в основу этих операций клал последовательное удвоение, то вавилонский вычислитель выполнял эти операции поразрядно. Начнем с умножения. Вавилонский прием умножения по существу совпадал с современным. Но в то время как нам приходится запомнить таблицу умножения, содержащую 36 небольших по величине (2×2; 2×3; $2\times4\ldots$ 3×3, 3×4, $3\times5\ldots$ 9×9) результатов, вавилонскому вычислителю, если он хотел бы сразу написать частичное произведение разряда на разряд, требовалось бы помнить 1711 результатов, выражающихся громоздкими числовыми образованиями. Естественно, что ему пришлось прибегать к таблицам умножения.

§ 5. Таблицы умножения

В распоряжении вавилонского вычислителя, насколько мы можем судить по дошедшим до нас материалам, были таблицы двух различных видов: 1) На одной глиняной доске больших размером с обеих ее сторон компактно помещалось множество таблиц умножения, каждая из которых давала произведения некоторого числа („заглавного“ числа) на ряд множителей; сверх того, туда же умещались и другие таблицы, большей частью „таблицы обратных величин“, о которых мы будем особо говорить ниже, часто таблицы квадратов и т. д. 2) Отдельная доска посвящалась лишь одному заглавному числу и содержала его произведения на различные множители.

Впрочем, между этими двумя типами, повидимому, не было принципиальной разницы, ибо отдельные дощечки образовывали комплект, имевший даже нечто вроде нумерации входивших в него экземпляров. Именно, первая строка таблицы помещалась в качестве „строки переноса“ в конце предыдущей таблицы. Еще сравнительно недавно, лет 200 назад, такой же обычай был общепринят при издании книг: наряду с нумерацией страниц книги каждая страница внизу имела неполную строку, воспроизводившую одно-два начальных слова последующей страницы.

Мы начнем с рассмотрения таблиц второго типа. Всего таких таблиц известно 82. Многие из таблиц совпадают друг с другом по существу, т. е. имеют одно и то же заглавное число и имеют одинаковую структуру. У большинства таблиц (53) заглавные числа — „целые“ или, лучше сказать, „однозначные“ числа.

Следующая схема дает представление об имеющемся материале[1]):

Заглавное число . .	2	5	6	7	8	9	10	12	16	18	24	25	30	36	40	45	50	(a)
Количество таблиц .	1	1	4	4	1	5	3	2	2	5	8	7	2	2	1	2	3	

Структура этих таблиц такова (берем для примера заглавное число 10):

10	a-rá 1	10	a-rá 13	2,10
	a-rá 2	20	a-rá 14	2,20
	a-rá 3	30	a-rá 15	2,30
	a-rá 4	40	a-rá 16	2,40
	a-rá 5	50	a-rá 17	2,50
	a-rá 6	1,0	a-rá 18	3,0
	a-rá 7	1,10	a-rá 19	3,10
	a-rá 8	1,20	a-rá 20	3,20
	a-rá 9	1,30	a-rá 30	5,0
	a-rá 10	1,40	a-rá 40	6,40
	a-rá 11	1,50	a-rá 50	8,20
	a-rá 12	2,0		

Термин a-rá соответствует нашей частице „жды“. В огромном большинстве таблиц этот термин повторяется при каждом множителе. В одной таблице он записан только один раз, при первом умножении; в 11 он вовсе опущен. Естественно предположить, что опущение

[1]) „Математические клинописные тексты“, т. I, стр. 36—43, и т. II, стр. 36.

термина a-rá характеризует более высокую стадию вычислительной техники, т. е. относится к более позднему времени. Это обстоятельство будет существенно в дальнейшем.

Как мы видим, таблица умножения содержит не все „однозначные" множители, а лишь от 1 до 20 включительно подряд, а затем 30, 40, 50. Очевидно, это сделано ради экономии места; если нужно произвести умножение, скажем, на 48, то из таблицы можно взять результаты для 40 и 8 (или для 30 и 18) и сложить их. Такой способ применяется и сейчас при составлении специальных таблиц умножения. Удивительно только, что вавилонские вычислители не пошли дальше и не выбросили из таблиц строки для 11, 12, . . ., 19. Во всяком случае мы не знаем ни одной таблицы, где это было бы сделано. Во всех известных нам таблицах содержатся всегда 23 соответствующих результата. Кроме того, многие из них (в частности, и одна из таблиц для 10) дают еще квадрат заглавного числа, а иногда и явное обращение этого результата, т. е. извлечение корня. Так на упомянутой таблице мы в конце читаем:

10	a-rá	10	1,40	10	на	10	1,40

т. е.

1,40-e	10 àm íb-si_8	от 1,40	10	это „квадратный корень"[1])

Зачем нужны эти строки — трудно сказать, особенно тогда, когда (как в данном случае) результат уже содержится в таблице. Во всяком случае это свидетельствует о том, что возведение в квадрат, равно как излеченне корня, рассматривались как особые операции, что характеризует высокий уровень математической культуры.

Нужно думать, что вавилоняне имели и таблицы с другими однозначными заглавными числами, не содержащимися в вышеприведенном перечне. Так, из обзора схемы (a) мы видим, что в ней есть заглавные числа 10, 30, 40, 50. Естественно ожидать, что должны были существовать и таблицы с ваглавным числом 20. В дальнейшем мы увидим, что это предположение подтверждается и другими данными. Но в дошедших до нас таблицах рассматриваемого типа однозначные заглавные числа исчерпываются схемой (a). Зато мы имеем 29 таблиц, заглавными числами которых являются „многозначные" числа. Так как их структура совершенно тождественна со структурой остальных 53 таблиц, то мы ограничимся приведением справки об их заглавных числах:

Заглавное число	1,30	1,40	2,30	3,20	4,30	6,40	7,12
Количество таблиц	2	2	5	1	2	1	4
Заглавное число	7,30	8,20	12,30	16,40	22,30	44,26,40	
Количество таблиц	1	1	3	3	1	3	

(b)

[1]) Слова „квадратный корень" взяты в кавычки, так как они передают термин íb-si_8 не дословно, а лишь с сохранением его математического смысла. Буквальное значение этого термина неизвестно.

Наличие этих таблиц нуждается в объяснении, так как трудно допустить, чтобы они представляли бы собой часть „полного" комплекта таблиц с многозначными заглавными числами. Слишком уж велико должно было бы быть число таблиц в таком комплекте. Очевидно, заглавные числа наших таблиц выбраны были из множества других многозначных чисел по каким-то особым признакам. Справедливость этого положения подтверждается прежде всего тем, что в ряде таблиц в конце имеется строка переноса, указывающая, какая таблица за ней непосредственно следовала в комплекте. На основании этих строк мы можем составить следующую схему:

За таблицей с заглавным числом	18	12,30	9	7,12	3,20	(c)
следует таблица с заглавным числом . . .	16,40	12	8,20	7	3	

Обратим здесь внимание на следующее: 1) таблицы следуют друг за другом в порядке *убывания* их заглавных чисел; 2) заметим далее, что за таблицей группы (a) следует таблица группы (b), и обратно; таким образом обе группы составляли части одного целого; 3) согласно вышесказанному расположим обе строки заглавных чисел (a) и (b) в один ряд в порядке убывания заглавных чисел. Мы получим тогда схему

50	16,40	6,40	(d)
45	16	6	
44,26,40	12,30	5	
40	12	4,30	
36	10	3,20	
30	9	2,30	
25	8,20	2	
24	8	1,40	
22,30	7,12	1,30	
18	7		

представляющую ассортимент дошедших до нас таблиц второго типа. Если сравнить ее со схемой (c), то естественно напрашивается вывод, что наш ассортимент не намного беднее, чем он был в комплекте. Из чисел нижней строки схемы (c) в схему (d) не входит лишь число 3, которое — можно безошибочно сказать — было налицо в комплекте. Остальные же числа нижней строки схемы (c): 8,20; 16,40; 12 и 7 имеются налицо в схеме (d) и, что весьма важно, всем этим числам в схеме (d) непосредственно предшествуют числа, стоящие над ними в схеме (c). Из этого мы можем сделать тот вывод, что схема (d), пополненная числом 3, должна содержать не очень много пробелов относительно полного комплекта. В дальнейшем, для краткости, будем называть схемой (d') схему (d), дополненную числом 3.

Положение дела станет яснее, если мы от рассмотренной нами группы таблиц (второй из названных на стр. 72), обратимся к первой из этих групп, т. е. к сводным таблицам. Всего известно 39 таких таблиц. Из них особенно замечательны две. Одна из них (таблица 102 по каталогу Нейгебауера[1]), относящаяся, примерно, к XIV веку до н. э.[2]), содержит в начале „таблицу обратных величин“ (о ней ниже), в конце таблицу квадратов и таблицу соотношений между мерами. Главную же часть составляет собрание таблиц умножения. Конструкция этих таблиц та же, что в таблицах второй группы; и во всех остальных 37 сводных таблицах она такая же. Но только по числу этих таблиц сводная таблица 102 богаче всех остальных.

Заглавные числа входящих в нее отдельных таблиц таковы:

$$\left.\begin{array}{lll}
50 & 16 & 5 \\
48 & 15 & 4{,}30 \\
45 & 12{,}30 & 4 \\
44{,}26{,}40 & 12 & 3{,}45 \\
40 & 10 & 3{,}20 \\
36 & 9 & 3 \\
30 & 8{,}20 & 2{,}30 \\
25 & 8 & 2{,}15 \\
24 & 7{,}30 & 2 \\
22{,}30 & 7{,}12 & 1{,}40 \\
20 & 7 & 1{,}30 \\
18 & 6{,}40 & 1{,}20 \\
16{,}40 & 6 & 1{,}15
\end{array}\right\} \qquad (e)$$

Итак, здесь мы имеем всего 39 таблиц умножения. Почти столько же (38) имеет вторая из упомянутых таблиц (носящая номер 101 по каталогу Нейгебауера). В ней отсутствуют таблицы умножения с заглавными числами 48 и 2,15, но зато есть по сравнению с таблицей 102 лишняя таблица с заглавным числом 2,24. Будем, для краткости, называть схемой (e′) схему (e), пополненную последним числом.

Остальные 36 сводных таблиц (103—138) значительно беднее и не содержат многих из вышеназванных заглавных чисел. Но эта бедность проистекает прежде всего от разрушенного состояния, в котором сводные таблицы дошли до нас. Начало и конец таблицы очень часто обломаны, у многих отбиты края; разрушения имеются и в середине досок. Разрушения последнего рода можно восстановить по контексту, и тогда оказывается, что заглавные числа „реставрированной“ таблицы почти полностью совпадают с некоторым отрезком схемы (e′). Так, таблица 136 содержит числа

6,40	2,30
6	2,24
5	2
4,30	1,40
4	1,30
3,45	1,20
3,20	1,15
3	

---

[1]) „Математические клинописные тексты“, стр. 35.

[2]) Составитель таблицы называет свое имя и имя царя, при котором он состоял писцом; поэтому датировка бесспорна, поскольку правильна принятая хронология.

Все эти числа в схеме (e′) идут подряд; только одного числа 2,15 схемы (e′) нет налицо в таблице 136. Для дальнейшего важно отметить, что этого числа нет и в четырех других сводных таблицах, которые захватывают конец схемы (e′). В таком же положении находится число 48. Его, как мы видели, нет в таблице 101. Но его нет также в таблицах 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 112, 113, 114, 115, 116, которые содержат более или менее длинный ряд первых чисел схемы (e), начиная с числа 50.

Из сказанного в последнем абзаце напрашивается такой вывод: все сводные таблицы первоначально содержали в основном один и тот же ассортимент таблиц, примерно совпадающий с ассортиментом таблиц 101 и 102; они имели, следовательно, какое-то общее назначение. К вопросу о том, каково это назначение, мы еще вернемся. Сейчас же мы продолжим рассмотрение содержания сводных таблиц.

§ 6. Таблицы обратных величин. Деление

Уже было сказано, что в большинстве сводных таблиц (в 24 из 39) содержатся „таблицы обратных величин"[1]). Мы познакомимся сейчас с их структурой, которая у всех этих таблиц одинакова. Замечательно также то, что таблицы точно такой же структуры дошли до нас и в виде отдельных дощечек[2]). Быть может, эти дощечки вместе с „изолированными" таблицами умножения составляли один общий комплект. Эти „нормальные", по выражению Нейгебауера, таблицы различаются лишь некоторыми терминологическими признаками. Первые строки этих таблиц имеют такую типичную форму:

1-da $\frac{2}{3}$ bi	40 àm		от $1\frac{2}{3}$ ее	40 это
šu-ri-a-bi	30 àm	т. е.	половина его	30 это
igi 3	20		„обратное значение"[3]) 3	20
igi 4	15		„ „ 4	15

Последующие строки повторяют терминологию третьей и четвертой строки. Первые же две строки имеют совершенно особый характер. Дробь $\frac{2}{3}$ выражена в первой строке индивидуальным знаком, а не по шестидесятеричной системе; во второй же строке левая сторона вообще не содержит цифр, а дает только словесное выражение. Что касается всех дальнейших строк таблицы, то они следуют образцу третьей и четвертой[4]).

---

[1]) Интересно отметить, что в одной сводной таблице (118) такая таблица обратных величин повторена трижды.

[2]) Всего таких дощечек известно 6.

[3]) Кавычки имеют тот же смысл, что и на стр. 73; дословно „igi" означает „глаз".

[4]) В ряде нормальных таблиц опускается первая строка. В ряде других таблиц совсем нет слов, опускается даже „igi". Очевидно, такие таблицы более позднего происхождения.

Отсюда Нейгебауер делает вывод, что первоначальное назначение „таблиц обратных величин" состояло в том, чтобы выражать „основные дроби", т. е. дроби $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$ и $\frac{2}{3}$ в шестидесятеричных дробях. Это бесспорное положение кажется совершенно тривиальным. Но нужно иметь в виду, что благодаря неопределенности позиционно-шестидесятеричной системы мы вовсе не обязательно должны толковать, например, строку igi 3 20, как $\frac{1}{3} = 0;20$. С таким же правом можно ее читать: $60:3=20$ (или $60=3\cdot 20$). В позднейшее время такое расширенное ее применение, несомненно, должно было иметь место[1]). Утверждение Нейгебауера, основанное на анализе первых двух строк, поэтому устанавливает важный исторический факт.

Уже было указано, что большинство таблиц обратных величин („нормальные" таблицы) имеют единообразную структуру. Если оставить в стороне первую строку, отсутствующую в некоторых таблицах, то каждая нормальная таблица обратных значений содержит следующие 30 результатов:

2	30	16	3,45	45	1,20	(f)
3	20	18	3,20	48	1,15	
4	15	20	3	50	1,12	
5	12	24	2,30	54	1,6,40	
6	10	25	2,24	1	1	
8	7,30	27	2,13,20	1,4	56,15	
9	6,40	30	2	1,12	50	
10	6	32	1,52,30	1,15	48	
12	5	36	1,40	1,20	45	
15	4	40	1,30	1,21	44,26,40	

Числа, стоящие слева, подчинены строгому правилу: все они являются „правильными", т. е., если их рассматривать как целые числа, не имеют простых множителей, отличных от 2, 3, 5. Кроме того, в интервале между первым и последним числами таблицы нет таких правильных чисел, которые не содержались бы среди аргументов (f). Важность этого замечания явствует из того, что для правильных чисел, и только для них, обратная величина представляется конечной шестидесятеричной дробью. Итак, *левая сторона таблицы* (f) *содержит все те и только те числа интервала от* 2 *до* 1,21, *которые имеют в шестидесятеричной системе конечное выражение обратных значений.*

Такова структура „нормальных" таблиц обратных величин. Какую роль эти таблицы играли в вавилонской вычислительной технике? Ответ на этот вопрос дают многочисленные прямые указания текстов задач. Когда в какой-либо задаче требуется разделить одно число на

---

[1]) Опущение строки для аргумента $\frac{2}{3}$ находится с этим в полном согласии. См. предыдущую сноску.

другое, то текст обычно предписывает образовать обратное значение делителя и *помножить* делимое на это обратное значение. Например, нужно разделить 8 на 5; текст говорит: „Образуй от 5 обратную величину; 0,12 получается. 0,12 на 8 помножь и 1,36 получается“. Напомним, что в вавилонской записи нет никаких знаков, соответствующих междуразрядным знакам, так что адэкватная запись гласила бы:

$$8:5=8\cdot 12=1\ 36.$$

Итак, сначала в таблице обратных значений по аргументу 5 нужно найти значение 12. Затем по таблице умножения с заглавным числом 12 найти $8\cdot 12$ или по таблице с заглавным числом 8 найти $12\cdot 8$.

Так *принципиально* разрешается проблема деления; но только принципиально! Действительно, во-первых, делитель может оказаться неправильным числом. Как тогда быть? А приори можно предположить, что нужно образовать *приближенное* обратное значение и затем произвести умножение. В этом случае, казалось бы, таблицы более всего могли пригодиться. Однако ни в одной из таблиц обратных величин не содержится никаких данных об обращении неправильных чисел, если не считать того, что в некоторых нормальных таблицах между аргументами 6 и 8 помещено число 7, но лишь для того, чтобы против него сообщить „igi nu“. Nu есть частица отрицания, так что эта строка обозначает, что 7 не имеет обратного значения.

Правда, в текстах задач встречаются случаи, когда делитель — неправильное число, но в этих случаях и делимое всегда содержит тот же неправильный множитель, который входит в делитель. Вот, например, в одной из задач требуется разделить 43,20 на 1,26,40. Текст говорит[1]): „Что нужно взять с 1,26,40, что даст 43,20? 0;30 бери“. Никаких указаний, как находится результат, не дано. Правда, в этом случае „на-глаз“ видно, что 1,26,40 вдвое больше, чем 43,20, так что ясно, что в результате получится $\frac{1}{2}$. Несомненно, что здесь, как и в других случаях, числовые данные нарочито подобраны. Это подтверждается еще тем, что на доске, из которой мы взяли только что приведенный пример, имеются три задачи одного типа, но с разными числовыми данными; однако эти данные подобраны так, что во всех трех случаях в делении участвуют все те же числа 43,20 и 1,26,40.

В другом случае, выполняя деление 1,10 на 7, автор текста[2]) говорит, обращаясь к учащемуся: „Обратную величину от 7 не образуй. Что ты возьмешь с 7, чтобы это дало 1,10? 10 возьми“. В этом случае результат еще более очевиден.

Предписание „Обратную величину от 7 не образуй“ очень интересно; оно свидетельствует, что образование обратной величины

---

[1]) „Математические клинописные тексты“, стр. 245, строки 10—11. Напоминаю, что в тексте фигурируют „неопределенные“ числа: 1,26,40; 43,20 и 30. Обозначение 0;30 вводится лишь в силу принятой транскрипции.

[2]) Там же, стр. 201, строка 23.

с последующим ее умножением на делимое составляло *основной* прием, которому обучали в школе. Действительно, даже в тех случаях, когда частное $\frac{b}{a}$ при правильном a находится без всякого затруднения, педантичный вавилонский педагог требует следовать этому правилу. Так, например, делится 20 на 10 [1]; результат абсолютно очевиден, но учитель велит: „Обратную величину от 10 образуй. 0;6 видишь ты. 20 на 0;6 помножь. 2 видишь ты".

Точно так же предписывается поступать при делении 2 на 4 [2]), и даже при делении 13,3 на единицу! [3]). Эти примеры — не случайные курьезы; они встречаются многократно в текстах различных эпох, в том числе и в таких, где решаются задачи, весьма сложные по содержанию. Но именно наличие этих несуразных предписаний позволяет предположить, что здесь мы имеем дело с традиционной формулой, которой вовсе необязательно руководствоваться в каждом отдельном случае. И нужно думать, что на практике (а многие из задач по содержанию своему явно заимствованы из практики) вычислитель умел пользоваться и другими средствами. В практической задаче числовые данные, конечно, чаще всего не давали таких круглых ответов, какие подобраны в задачах. В частности, делитель необязательно был правильным числом.

Напрашивается предположение, что в этом случае вычислитель мог приближенно заменить неправильный делитель правильным. Если бы нормальные таблицы были единственными таблицами обратных величин, то такое предположение само собой отпало бы, ибо ошибка от замены неправильного числа правильным была бы очень велика. Так, если бы нужно было разделить некоторое число на 7, то, образовав обратное значение от 6, он получил бы 10, а от 8 получил бы 7,30, так что относительная ошибка была бы в том и другом случае порядка 10%. Чтобы применить такой прием, нужно было иметь более подробные таблицы обратных величин, содержащие многозначные аргументы. Но такие таблицы несомненно существовали, как показывает тот, правда, небогатый числом экземпляров материал, который находится в нашем распоряжении. Рассмотрим прежде всего этот фактический материал.

Мы имеем таблицу следующего вида [4]):

2, 5	28, 48
4, 10	14, 24
8, 20	7, 12
16, 40	3, 36
. . .	. . .

Всего она имеет 16 строк, закон образования которых очевиден из приведенных четырех: каждое нижележащее число в левой поло-

1) „Математические клинописные тексты", стр. 152, строки 20—21.
2) Там же, стр. 201, строки 30—31.
3) Там же, стр. 261, строка 13.
4) Там же, т. I, стр. 23.

вине получается удвоением верхнего, а в правой — делением пополам. Здесь, таким образом, мы имеем таблицу обратных значений для чисел $2{,}5\cdot 2^k = 5^3 2^k$ до $k = 15$ включительно. Вторая таблица[1]) содержит восемь строк, совпадающих с восемью первыми строками только что приведенной таблицы. От третьей таблицы сохранился небольшой обломок[2]), в котором сохранилась только одна колонна чисел, именно

9,36
8,13,49,37,46,40
6,40
5,51,33,45
4,47,46,30

Эти числа имеют слишком много знаков, чтобы их можно было считать аргументами таблицы обратных значений. Но если образовать обратные их значения, то мы получим числа

6,15
7,17,24
9
10,14,24
12,57,36

имеющие не более трех знаков. Вполне допустимо предположение, что здесь мы имеем часть таблицы обратных значений, содержавшей множество трехзначных аргументов. Правда, в этом обрывке содержатся далеко не все трехзначные правильные числа, заключенные в интервале между крайними числами. Но можно сделать предположение, что на табличке были записаны те из трехзначных правильных чисел, которые были каким-то регулярным процессом найдены в качестве предварительного материала для составления более полной таблицы. Это предположение казалось бы произвольным и натянутым, если бы до нас не дошло еще одной таблицы, гораздо более полной[3]). Она помещается на доске $12^1/_2 \times 20^1/_2$ *см*, которая исписана с обеих сторон. На каждой стороне две пары колонн. Общее количество результатов равно 135. Аргументы — шестизначные числа! Они идут, возрастая от 1,0,0,0,0,0 до 3,0,0,0,0,0. Обратные величины вычислены точно; для этого часто приходится доходить до двенадцатого шестидесятеричного знака, а два раза даже до пятнадцатого. Неудивительно, что в этой таблице есть шестьдесят ошибок, отысканных стараниями супруги О. Нейгебауера, „неутомимое терпение" которой он отмечает в предисловии к своему изданию вавилонских математических текстов. Удивительно, напротив, что число этих ошибок сравнительно невелико и что в огромной своей части они представляют просто описки, так как ошибочным оказываются в большинстве случаев лишь один-два разряда, и притом часто промежуточные.

---

1) „Математические клинописные тексты", стр. 24.
2) Там же, стр. 23.
3) Там же, стр. 16—23.

Поэтому, воздавая должное неутомимости помощницы издателя текстов, мы еще больше должны удивляться трудолюбию составителя текста[1]). Имя его: Инакабит-Ану названо в конце таблицы. Там же указано и имя владельца, урукского[2]) жреца, и по этому имени можно примерно определить дату составления текста. Тюро-Данжен относит эту таблицу к эпохе Селевкидов, т. е. к III—II векам до н. э.

Вот первые строки этой таблицы:

igi 1,0,0,0,0,0 gàl-bi	1 àm
igi 1,0,16,53,53,20	59,43,10,50,52,48
igi 1,0,40,53,20,0	59,19,34,13,7,30
igi 1,0,45,0,0,0	59,15,33,20
igi 1,1,2,6,33,45,	58,58,56,33,45,
igi 1,1,26,24,0,0	58,35,37,30
igi 1,1,30,33,45,0	58,31,39,35,18,31,6,40
igi 1,1,43,42,13,20	58,19,12
igi 1,2,12,28,48,0	57,52,13,20

Нули в конце некоторых значений аргумента введены здесь для симметрии; в тексте им ничего не соответствует; в середине же (для обозначения отсутствующих промежуточных разрядов) они имеются в оригинале (см. стр. 63).

Таблица заканчивается „строкой переноса", из которой следует, что за ней следовало продолжение, содержавшее аргументы, бóльшие 3. Если проанализировать состав таблицы, то окажется, что она не полна в том смысле, что в числе ее аргументов содержатся не все правильные шестизначные числа интервала от 1,0,0,0,0,0 до 3,0,0,0,0,0; так, между двумя последними строками приведенного отрывка можно вставить правильное число 1,2,8,16,12,48; обратная его величина есть 57,56,8,34,22,47,34,41,15. Все такие пропущенные числа с их обратными величинами вычислены г-жей Нейгебауер; общее число пропущенных строк составляет 96; процент их, вначале незначительный, возрастает к концу таблицы. Анализируя распределение этих пробелов, Нейгебауер с помощью остроумного графического приема реконстрирует способ составления таблицы[3]). Нейгебауер приходит к выводу, что составитель таблицы исходил из „нормальной" таблицы, применяя к каждой ее строке последовательное удвоение аргумента (и соответственно уменьшая вдвое обратное значение). Отметив все те полученные этим процессом числа, которые падали в нужный ему интервал, составитель возвращался к „нормальной таблице. Каждый из аргументов ее он подвергал многократному утроению и снова отмечал результаты, падавшие в интересовавший его

[1]) Как трудна была эта работа, можно судить по началу текста: „Во имя Ану и Антума! То, что сделано руками моими, да будет благословенно!" Текст, повидимому, представляет копию с оригинала; при переписке, вероятно, и появились ошибки.

[2]) Урук (ныне Варка) — древний город в Месопотамии; при раскопках его найдена и эта таблица.

[3]) „Лекции", стр. 26—32 русского перевода.

интервал. Наконец, каждый из аргументов нормальной таблицы подвергался увеличению в 5, 5^2 и 5^3 и так далее раз. Действительно, все аргументы N таблицы Инакабита-Ану имеют либо вид

$$N = a_i \cdot 2^k, \tag{1}$$

либо

$$N = a_i \cdot 3^k, \tag{2}$$

либо

$$N = a_i \cdot 5^k, \tag{3}$$

где a_i — одно из чисел нормальной таблицы ($i = 1, 2, \ldots, 30$), k — целое число и, сверх того,

$$1 \cdot 60^5 \leqslant N \leqslant 3 \cdot 60^5.$$

Все же „пропущенные" числа не могут быть выражены ни одной из формул (1), (2), (3).

Неполнота таблицы, повидимому, не была секретом и для ее автора, ибо подпись под ней содержит указание: „как 1, так и 2 не закончено". Можно думать поэтому, что в его планы входило продолжить эту работу, применяя тот же метод, но исходя из более обширной таблицы, чем нормальная. Вряд ли в повседневной практике, действительно, существовала потребность в таблице, аргументы которой были бы шестизначными числами (в десятеричной нумерации эти аргументы были бы 9—10-значными!). Поэтому работа трудолюбивого вычислителя имела скорее „спортивный" характер, подобно тому как чисто спортивный характер имела, например, работа Пітиска, астронома XVI века, в „Математическом сокровище" которого были вычислены таблицы синусов с точностью до пятнадцатого десятичного знака. Однако, несомненно, этот спорт должен был иметь под собой и некоторую реальную базу, т. е. вавилонские вычислители должны были иметь и применять на практике не столь громоздкие, но все же достаточно подробные таблицы обратных значений, скажем, с трехзначными аргументами. И метод Инакабита, разгаданный Нейгебауером, повидимому, был общеупотребителен. Об этом свидетельствуют хотя бы упомянутые выше таблицы с аргументами $5^3 \cdot 2^k$.

Интересно поэтому посмотреть, от каких чисел находятся обратные значения в текстах задач, т. е. какие числа фигурируют там в качестве делителей при производстве деления. Оказывается, что огромное большинство этих делителей содержится в *нормальных таблицах*! При этом чаще всего они являются аргументами этих таблиц, т. е. являются однозначными числами или числами 1,4; 1,12; 1,15; 1,20; 1,21.

Нередко они, будучи двух- и даже трехзначными, все же принадлежат нормальной таблице, т. е. стоят в них справа. Таким образом нормальная таблица использовалась учащимися и в одном и в другом направлении: из нее брали все, что она могла дать. Значительно реже попадаются двузначные делители, не содержащиеся в нормальной таблице; их обратные значения, таким образом, многозначны; впрочем, значность никогда, кажется, не превышает 3[1]). Можно встретить и трехзначные делители, обратная величина которых не содержится в нормальной таблице, но тогда эта обратная величина непременно двузначна[2]). Я нашел в собрании Нейгебауера лишь одно отступление от этого правила: образуется обратная величина от 6,56,40; результат: 8,38,24. Может быть, найдется еще один-два подобных случаев; но во всяком случае это будут отступления совершенно исключительные.

Такое положение дела наводит на мысль, что, помимо общеупотребительных, так сказать, карманных таблиц, какими были нормальные, существовали еще полные двузначные таблицы обратных величин, также доступные „широкому потребителю“, т. е. каждому, обученному счету. Трехзначные же таблицы, если и существовали, то лишь в более позднее время и, скорее всего, были неполными.

Это предположение подтверждается, как мне кажется, следующими обстоятельствами: прежде всего вышеприведенный обломок трехзначной таблицы содержит очень большие пробелы. Еще более существенным является, на мой взгляд, следующее: если применять нейгебауеровскую схему образования многозначных правильных чисел в нормальной таблице, не выходя при этом за пределы области двузначных чисел, то правильные двузначные числа получаются при этом *все без единого исключения*, чего не будет уже для трехзначных чисел. Так, например, трехзначное число $23,16,48 = 83\,808$ правильное; оно может быть представлено как $2^8 \cdot 3^5$. Между тем, его нельзя получить ни одними удвоениями, ни одними утроениями из чисел нормальной таблицы. Таких чисел можно указать довольно много. В этой связи интересно отметить, что вышеприведенное трехзначное число 6,56,40, от которого в тексте образовано обратное значение, *может быть* получено из нормальной таблицы; для этого нужно число 40 шестикратно увеличить в 5 раз (или число 8 семикратно); действительно, $40 \cdot 5^6 = 25\,000 = 6,56,40$.

В качестве дальнейшего подтверждения того, что вавилонский вычислитель мог иметь в своем распоряжении полную двузначную таблицу, укажу на то, что такая таблица не должна была обладать слишком большой громоздкостью; как показывает подсчет, в ней должно было содержаться всего 105 результатов, если не считать двузначными также числа, кратные 60. Если бы же для симметрии и полноты составитель пожелал бы (аналогично тому, как это сделано в таблице Инакабита-Ану) ввести такие числа в соответственные места двузначных таблиц, то и тогда число результатов было бы только 131.

---

1) Так, например, в текстах находим следующие обратные значения:

1 : 4,30 = 13,20 (стр. 223, строка 14)
1 : 37,30 = 1,36 (стр. 226, строка 14)
1 : 6,45 = 0;8,53,20 (стр. 154, строка 2)

2) Например, 1 : 1,7,30 = 53,20.

Исходя из изложенного, мы можем представить себе технику деления у вавилонян следующим образом: как общее правило, деление $\frac{b}{a}$ выполнялось с помощью обращения числа a и умножения обратного значения на b. Обратное значение правильных чисел, значность которых не превосходила 2, находились по таблицам. Для правильных чисел большей значности, если они не содержались в правых колоннах таблицы обратных значений, а также для неправильных чисел, могли прибегать к округлению, беря ближайшее число, содержавшееся в таблице. В тех случаях, когда деление легко выполнялось непосредственно и частное имело простое выражение, к таблицам не прибегали; но даже и в таких случаях в школьном преподавании проводился общий метод, если это было возможно (т. е. если делитель был правильным). В более позднее время (возможно в связи с астрономическими вычислениями) таблицы обратных значений стали расширять, пользуясь методом удвоения, утроения и упятерения аргументов полных таблиц меньших размеров. При этом не исключено, что, убедившись в громоздкости предприятия такого рода, вычислители могли предпочесть этому выполнение деления поразрядным способом, аналогичным тому, которым мы пользуемся в нашей арифметике. В пользу такого предположения говорит то обстоятельство, что греческие астрономы в своей заимствованной у вавилонян системе шестидесятеричных дробей пользовались для деления именно этим способом, и никаких таблиц обратных значений не применяли (см. гл. III, § 12). Это предположение приобретет больше вероятности, если мы обратимся к таблицам квадратов и квадратных корней. Мы уже гонорили, что сводные таблицы, содержащие таблицы обратных величин и таблицы умножения, заключают часто таблицы квадратов; две из них (таблицы 113 и 133), сверх того, содержат еще таблицы квадратных корней. Последние по существу ничем не отличаются от таблицы квадратов, кроме порядка строк: новых результатов они не дают. Известно также 26 отдельных дощечек с квадратами и квадратными корнями. Как эти отдельные дощечки, так и таблицы квадратов, содержащиеся в сводных таблицах, не представляют большого интереса, так как дают n и n^2 лишь для целых n, никогда не выходящих за пределы области однозначных чисел. Между тем в тексте задач встречаются случаи, когда требуется извлечь квадратный корень из многозначного числа. Правда, квадратный корень при этом всегда извлекается точно[1]). Например, в одной из задач[2]) требуется извлечь квадратный корень

---

[1]) Имеются две задачи (см. ниже § 14), при решении которых вавилонский вычислитель, повидимому, применил приближенное извлечение квадратного корня из неквадратного числа. Но в этих задачах нет указания на то, что требуется извлечь корень, и, быть может, примененное действие вовсе не рассматривалось как извлечение корня, хотя по существу являлось таковым.

[2]) „Математические клинописные тексты“, стр. 115, строка 16.

из 2,15,0 и говорится: „2,15,0 имеет 1,30 квадратным корнем“. В другой[1]) требуется извлечь квадратный корень из 53,31,6,40, и указывается результат 56,40. В третьей[2]) извлекается квадратный корень из 1,14,4,26,40; указывается результат 1,6,40. Таких примеров можно привести немало. Отсюда следует, что либо вавилонские вычислители должны были пользоваться таблицами квадратов многозначных чисел — и тогда в таких таблицах должны были содержаться десятки тысяч результатов, что представляется маловероятным; либо они должны были, пользуясь маленькими таблицами, подобных тем трем десяткам, которые дошли до нас, применять систематический алгоритм извлечения корня. Второе предположение стоит в согласии с тем, что греческие астрономы, пользовавшиеся шестидесятеричной системой дробей, безусловно пользовались систематическим алгоритмом, по существу тождественным с приемом, которому обучаются наши школьники (см. гл. III, § 12).

Мы теперь закончили обзор сводных таблиц и можем вернуться к вопросу, поставленному выше (стр. 76) в связи с рассмотрением таблиц умножения. Мы убедились, что ассортимент этих таблиц должен был во всех сводных таблицах быть примерно одинаковым. Сверх того, интересно отметить, что они следуют друг за другом не в порядке возрастания, а в порядке убывания заглавных чисел. В этом отношении в них соблюдается та же закономерность, что в заглавных числах „комплектных“ таблиц. Но аналогия между ними этим не ограничивается: ассортимент дошедших до нас „комплектных“ таблиц умножения явно составляет часть ассортимента сводных таблиц.

Действительно, взяв перечень заглавных чисел таблицы 102 (стр. 75) и добавив к нему число 2,24, отсутствующее в таблице 102, но содержащееся в таблице 101, мы получаем следующий каталог 40 таблиц умножения:

50	24	12	6,40	2,30
48	22,30	10	6	2,24
45	20	9	5	2,15
44,46,40	18	8,20	4,30	2
40	16,40	8	4	1,40
36	16	7,30	3,45	1,30
30	15	7,12	3,20	1,20
25	12,30	7	3	1,15

(e′)

Перечень же комплектных таблиц умножения, дошедших до нас или засвидетельствованных строками переноса в сохранившихся комплектных таблицах умножения, таков:

45	25	12,30	8	5	2
44,26,40	24	12	7,12	4,30	1,40
40	18	10	7	3,20	1,30
36	16,40	9	6,40	3	
30	16	8,20	6	2,30	

(d′)

1) „Математические клинописные тексты“, стр. 246, строка 2.

2) Там же, стр. 246, строка 19. Оба последних примера взяты из текста, относящегося к древневавилонской эпохе.

Как мы видим, нет ни одного числа в схеме (d′), которое не входило бы в (e′). Это позволяет нам с вероятностью, близкой к достоверности, утверждать, что и в полном комплекте таблиц умножения не содержалось таблиц, выходящих за пределы схемы (e′). Напротив, крайне вероятно, что 12 заглавных чисел, не содержащихся в (d′), но входящих в (e′) (50; 48; 22,30 и т. д.), лишь случайно, вследствие исчезновения соответствующих таблиц, не содержатся в списке (d′).

Отсюда вытекает, что комплект таблиц умножения не обеспечивал вычислителю возможности получить произведение двух однозначных чисел с помощью смотрения в одну таблицу. Если, например, требовалось помножить 54 и 57, то ни для 54, ни для 57 он не имел таблицы с соответствующим заглавным числом. Он должен был, значит, пользоваться двумя таблицами, скажем, таблицей с заглавным числом 50 и таблицей для числа 4, и найти в одной 50×57, в другой 4×57. При этом ни в одной из них не находил нужного результата сразу, ибо аргумента 57 в них не было: в первой он должен был найти 50×50 и 50×7; во второй 4×50 и 4×7. Окончательный результат, таким образом, получался из сложения четырех частичных.

Но тогда естественно возникает вопрос, почему некоторые из однозначных чисел, больших, чем 10, все же нашли себе место в качестве заглавных чисел таблиц умножения. Почему, далее, здесь нашли себе место некоторые *многозначные* числа?

§ 7. Происхождение таблиц умножения. Теория Нейгебауера и ее критика

Упомянутые вопросы получают простое решение, если принять предложенную Нейгебауером точку зрения на происхождение и назначение таблиц. Эта точка зрения, однако, кажется мне неправильной или, вернее, недостаточной. Поэтому я изложу те мотивы, которые приводит в ее пользу Нейгебауер, причем постараюсь возможно точнее следовать ходу мыслей ее автора[1]).

Нейгебауер хочет „попытаться вскрыть общий закон, по которому составлен последовательный ряд заглавных чисел“. «Чтобы найти этот принцип..., надо прежде всего подвергнуть рассмотрению такое поразительное число, как 44,26,40. Оказывается, что как раз это число дает нам ключ к решению задачи: стоит... взглянуть на „нормальную таблицу“; эта таблица кончается... числами 1,21 и 44,26,40. Итак, 44,26,40 это не что иное, как число, взятое из наших обратных значений. Нетрудно убедиться, что и все другие числа (за одним

[1]) Эта точка зрения впервые была развита Нейгебауером в статье „Sexagesimalsystem und babylonische Bruchrechnung“. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, т. I, стр. 183—193, 1930. В „Лекциях“ она изложена на стр. 40—44 русского перевода. См. также „Математические клинописные тексты“, стр. 6—7 и 32.

только исключением), о котором мы будем сейчас говорить[1]), являются правильными. Другими словами: *основные числа наших таблиц умножения можно рассматривать как шестидесятеричные дроби, т. е. как обратные значения правильных чисел*»[2]).

Все эти положения совершенно бесспорны. Однако, во избежание недоразумений, следовало бы добавить, что далеко не все заглавные числа таблиц умножения содержатся, подобно числу 44,26,40, в нормальных таблицах. Это замечание нам важно для дальнейшего. Пока же продолжим ознакомление с рассуждением Нейгебауера.

Он указывает далее, что заглавные числа „могут быть рассматриваемы как некоторые простые дроби вида $\frac{1}{a}$, развернутые в шестидесятеричные дроби“[3]). Это тоже бесспорно, но верно и то, что их можно рассматривать как развернутые дроби вида $\frac{60^k}{a}$. Но Нейгебауер, как видно из дальнейшего[4]), имеет в виду не только то, что они могут быть рассматриваемы как дроби $\frac{1}{a}$, но и то, что они *должны* рассматриваться именно так, т. е. что *первоначально* они возникли из задачи разворачивания в шестидесятеричную дробь „основной“ дроби $\frac{1}{a}$, где a — *целое* число. Это положение нигде не высказано в развернутом виде; однако оно подразумевается молчаливо как предпосылка дальнейших выводов; с другой стороны, повидимому, именно для доказательства указанного положения Нейгебауер неоднократно подчеркивает, что в нормальной таблице обратных величин вторая и третья строка сформулированы так, что их аргументы имеют абсолютный, а не позиционный характер [как указывалось на стр. 76, во второй строке аргумент есть $\frac{2}{3}$ (индивидуальный знак!), а в третьей—половина (словами!), так что не может быть речи о толковании его, как $\frac{60^k}{2}$ $(k \neq 0)$]. Из этого безусловно следует, что *нормальные таблицы* первоначально имели в виду шестидесятеричное выражение „основных дробей“ $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{a}$, причем a, как мы помним, пробегает все правильные целые числа от 2 до 81. Но отсюда вовсе еще не следует, что и в таблицах умножения заглавные числа исторически связаны именно с выражением $\frac{1}{a}$, а не с выражением $\frac{60^k}{a}$.

---

[1]) Имеется в виду число 7; напомню, что правильным числом, по терминологии Нейгебауера, называется число, которое, если его считать целым, не имеет других делителей, кроме 2, 3, 5. Обратное значение такого числа выражается конечным шестидесятеричным числом, или, что то же, такое число само есть обратное некоторого числа, могущего рассматриваться как целое.

[2]) Курсив в оригинале.

[3]) „Лекции“, стр. 41.

[4]) „Лекции“, стр. 44.

Это было бы крайне вероятным, если бы заглавные числа таблиц умножения были бы тождественны с числами правой колонны *нормальной таблицы*. Нейгебауер этого не утверждает, и мы указывали, что этого и нет на самом деле. Но он говорит: „Мы убедились, что заглавные числа таблиц умножения (50, 48, 45, 44,26,40 и т. д. до 1,15) взяты из таблиц обратных значений". На самом деле у Нейгебауера было показано лишь то, что заглавные числа *можно рассматривать* как обратные величины. Заметим еще, что соответственные прямые величины, как показывает вычисление (см. схему (g), приведенную ниже, стр. 91) все без исключения одно- или двузначны, так что, если они взяты из таблиц обратных значений, то эта таблица должна была содержать *двузначные* аргументы. Выше были приведены доводы в пользу того, что такие таблицы должны были существовать; Нейгебауер, кстати говоря, этого нигде не отмечает. Но взяты ли действительно заглавные числа из подобных таблиц — этот вопрос мы пока оставим открытым.

Вслед за приведенной фразой Нейгебауер продолжает: „Следовательно, первоначально они (заглавные числа таблиц умножения) имели то же абсолютное значение, что и в первоначальной фазе таблиц обратных значений. Иными словами, 50 надо понимать, как $\overline{1,12}$ (т. е. $1:1,12$) $= 0;0,50$, а 48 — как $\overline{1,15} = 0;0,48$ и т. д.". Таким образом Нейгебауер настаивает на том, что первоначально 50 из всех возможных своих позиционных значений должно было иметь значение $50 \cdot 60^{-2}$. Такой вывод совершенно отпал бы, если бы мы согласились считать, что 50 можно понимать и как $\frac{60}{1;12}$ и как $\frac{60^2}{1,12}$ и т. д. Вывод же Нейгебауера означает, что и для таблиц обратных величин с двузначными аргументами a_i первоначальным их назначением было образование „основной" дроби $\frac{1}{a_i}$. Это положение, однако, не подтверждается ни одним из известных фактов, и потому нельзя согласиться с Нейгебауером, когда он продолжает: „Это означает следующее: *необходимо допустить*[1]), что первоначально заглавные числа таблиц умножения были выражением в шестидесятеричной системе дробей $\overline{1,12} = \frac{1}{72}$, $\overline{1,15} = \frac{1}{75}$ и т. д. вплоть до $\overline{48,0} = \frac{1}{2880}$". Мы увидим вскоре, что даже в качестве гипотезы это допущение непригодно, так как оно трудно совместимо с фактическими данными. Но пока закончим изложение выводов Нейгебауера.

Настаивая на необходимости рассматривать заглавные числа таблиц умножения в их первоначальной фазе как числа дробные, Нейгебауер, с другой стороны, считает „наиболее вероятным, что множители таблиц умножения были первоначально целыми числами". И тогда оказывается, что „эти таблицы для действий над дробями (так

[1]) Курсив мой. — М. В.

теперь именуются таблицы умножения)... служили для превращения в шестидесятеричные дроби не любых неправильных дробей $\frac{b}{a}$, а только *правильных* дробей, у которых знаменатель больше числителя; этот факт имеет большое историческое значение. Это показывает, что и в сфере вавилонской культуры[1]) понятие дроби первоначально включало в себя только действительно дробную часть числа, меньшую, чем единица".

Из последующего ясно, что автор имеет в виду подчеркнуть здесь, что „в сознании вавилонского вычислителя не существовало общего понятия числа вроде нашего рационального числа $\frac{b}{a}$", что мыслилось лишь „последовательное прибавление друг к другу мелких единиц...", т. е. такое же „«взятие во множественном числе», как и при всяких других конкретных предметах, число которых желают сосчитать", что, по мнению Нейгебауера, „не имеет ничего общего с обобщением понятия дроби или числа"[2]).

Должен сознаться, что я не вижу никакого основания считать, что вычислители, многократно „бравшие во множественном числе" основные дроби и превращавшие результат в шестидесятеричные числа, не могли составить себе понятия дробного числа. И напрашивается предположение: не является ли этот вывод психологической *предпосылкой* для вышеприведенного рассуждения?

Выпуклое резюме рассуждений Нейгебауера мы находим в его первой публикации, посвященной вавилонским дробям[3]): «Вавилонские „таблицы умножения" служат вовсе не для нахождения произведения произвольных целых чисел $a \cdot b$, но целиком и полностью (ganz und gar) имеют в виду основную проблему исчисления дробей, т. е. нахождение шестидесятеричного эквивалента $\frac{m}{n}$».

Но каким же образом объяснить наличие таблиц с заглавным числом 7, которое не является правильным числом? Нейгебауер отвечает на этот вопрос так: в позднейшее время было замечено, что позиционный характер шестидесятеричных дробей позволяет рассматривать их так же, как и целые числа, благодаря чему наши таблицы приобретают новое назначение: они *становятся* таблицами умножения; и тогда к ним присоединяется новая таблица с заглавным числом 7. „Правильные числа следуют друг за другом сначала очень плотно; 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 — правильные числа... Между 1 и 10, таким образом, содержится только одно число 7, которое выпадает из этой таблицы правильных чисел; поэтому стоит лишь прибавить к этой системе таблиц еще таблицу умножения для 7..., и мы получим вполне удобную схему для произведений $a \cdot b$"[4]).

---

1) Автор проводит здесь параллель с математикой египетской. — М. В.
2) „Лекции", стр. 45.
3) Quellen und Studien, Abt. B., т. I, стр. 190.
4) „Лекции", стр. 42.

Такова теория Нейгебауера. Мы должны были изложить ее обстоятельно как потому, что для ее критики необходимо уяснить не только окончательные результаты, но и их мотивировки, так и потому, что ознакомиться с ней сразу по работам Нейгебауера представляет большие затруднения благодаря некоторой хаотичности изложения: для устранения этого затруднения нам пришлось переставить отдельные части его рассуждения; тем более необходимо было, во избежание сомнений в правильности нашего понимания, привести ряд цитат. Надеюсь, что читатель, желающий ознакомиться с работами Нейгебауера, теперь не встретит затруднений при их чтении.

Перейдем к критике изложенной теории. Ее удобнее всего начать с конца. Верно ли то, что „таблицы умножения", если их рассматривать как пособие при обращении выражения $m\cdot\frac{1}{n}$ в шестидесятеричную дробь, имеют в виду *только* дроби с числителем, меньшим знаменателя, или хотя бы, смягчая остроту утверждения Нейгебауера, *преимущественно* правильные дроби?

Допустим на минуту вместе с Нейгебауером, что заглавные числа „таблиц умножения" суть обратные величины целых чисел 72, 75 и т. д. до 2 880. Тогда вавилоняне первоначально располагали средством для шестидесятеричного выражения, например, дроби $\frac{11}{2880}$, но не имели средств для выражения дроби $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{45}$ и т. п., ибо заглавные числа 15 и 10, по Нейгебауеру, необходимо рассматривать как 0;0,15 и 0;0,10, т. е. как обратные величины чисел 240 и 360, а не чисел 4 и 6. Мне кажется, что совершенно невозможно допустить такое положение дела именно на первоначальной стадии. Стоит же нам посмотреть на числа 15 и 10 как на обратные величины чисел 4 и 6 — и сразу отпадают вообще всякие разговоры о „правильных" дробях, а вместе с тем и та непроходимая пропасть между „взятием во множественном числе" и понятием дробного числа, которую усматривает Нейгебауер.

С другой стороны, наличие таблиц умножения с двузначными заглавными числами (и одной с трехзначным) делает совершенно невероятным, чтобы они имели в виду только умножение и не учитывали бы потребности деления. Но вопрос заключается в том, имели ли эти таблицы *первоначально* значение таблиц умножения и лишь потом были использованы для деления, что вызвало увеличение их ассортимента, или, как полагает Нейгебауер, они были первоначально таблицами, служившими вспомогательным средством при делении, и лишь затем „путем одного лишь видоизменения", т. е. путем прибавления таблицы умножения на 7, были использованы для умножения.

Чтобы ответить на этот вопрос, вглядимся пристальнее в каталог заглавных чисел. Ниже мы переписываем схему (e′), дополняя ее перечнем тех чисел, для деления на которые нужно брать числа схемы (e′) множителями. Эти последние мы расположили в левых колонках нижеследующей таблицы (n). Справа стоят наши заглавные числа $\overline{n}$, все числа записаны по шестидесятеричной системе, *без указания* абсолютной позиции, т. е. так, как они должны были записываться у вавилонян.

n	$\overline{n}$	n	$\overline{n}$	n	$\overline{n}$
1,12	50	3,45	16	13,20	4,30
1,15	48	4	15	15	4
1,20	45	4,48	12,30	16	3,45
1,21	44,26,40	5	12	18	3,20
1,30	40	6	10	20	3
1,40	36	6,40	9	24	2,30
2	30	7,12	8,20	25	2,24
2,24	25	7,30	8	26,40	2,15
2,30	24	8	7,30	30	2
2,40	22,30	8,20	7,12	36	1,40
3	20	9	6,40	40	1,30
3,20	18	10	6	45	1,20
3,36	16,40	12	5	48	1,15

(g)

Как мы видим, все без исключения „делители“ n имеют значность не выше двух. Это лишний раз подтверждает то обстоятельство, что в таблицах умножения учитываются потребности деления, ибо мы выше отмечали, что в задачах делители почти никогда не имеют более высокой значности. Но *все ли* двузначные правильные делители содержатся в левых строках схемы (g)? Нет; если даже ограничиться только теми двузначными числами, которые попадают в интервал между $1{,}12 = 72$ и $48{,}0 = 2\,880$, то в них нет очень большого количества чисел, список которых вместе с их обратными значениями мы даем здесь:

n	$\overline{n}$	n	$\overline{n}$
1,36	37,30	16,40	3,36,
1,48	33,20	17,4	3,30,56,15
2,5	28,48	18,45	3,12
2,15	26,40	19,12	3,7,30
2,42	22,13,20	20,15	2,57,46,40
4,3	14,48,53,20	20,50	2,52,48
4,10	14,24	21,20	2,48,45
4,16	14,3,45	21,36	2,46,40
4,30	13,20	22,30	2,40
5,20	11,15	24,18	2,28,8,53,20
6,15	9,36	25,36	2,20,37,30
5,24	11,6,40	27	2,13,20
6,24	9,22,30	28,48	2,5
6,45	8,53,20	31,15	1,55,12
8,6	7,24,26,40	32	1,52,30,
8,32	7,1,52,30	32,24	1,51,6,40
9,36	6,15	33,20	1,48
10,25	5,45,36	34,8	1,42,39,22,30
10,40	5,37,30	36,27	1,43,42,13,20
10,48	5,33,20	38,24	1,33,45
12,9	5,11,6,40	37,30	1,36
12,30	4,48	40,30	1,28,53,20
12,48	4,41,15	41,40	1,26,24,
13,30	4,26,40	42,40	1,24,22,30
14,24	4,10	43,12	1,23,20
16,12	3,42,13,20		

(h)

Уже беглого взгляда на этот список достаточно, чтобы видеть, что таблицы умножения никак не могли иметь в виду задачу „выражения в шестидесятеричной системе дробей $\overline{1,12}=\frac{1}{72}$; $\overline{1,15}=\frac{1}{75}$ и т. д. вплоть до $\overline{48,0}=\frac{1}{2880}$". В самом деле, больше половины таких единичных дробей не находят себе никакого отражения в заглавных числах таблиц умножения. Возражение, что числа правого столбца схемы (h) в большинстве своем многозначны, что и могло быть причиной устранения их из ассортимента заглавных чисел, было бы также несостоятельно, ибо в этом ассортименте есть число 44,26,40, послужившее Нейгебауеру ключом к решению вопроса. Напротив, именно для многозначных $\bar{n}$ особенно необходимо было иметь специальные таблицы, так как для двузначных $\bar{n}$ можно легко обойтись поразрядным умножением. Впрочем, в схеме (h) имеется и 16 двузначных чисел $\bar{n}$, и совершенно непонятно, почему, например, 7,12 фигурирует среди заглавных чисел $\left(7,12=\frac{1}{8,20}\right)$, а 11,15 не фигурирует $\left(11,15=\frac{1}{5,20}\right)$. Вообще, до тех пор пока не будет предложено какое-либо объяснение, почему одни обратные значения двузначных чисел используются в качестве заглавных чисел, а другие нет (несколько мне известно, такого объяснения никто не дал, и я склонен думать, что его и дать нельзя), не может быть и речи о правильности теории Нейгебауера.

В связи с этим интересно заметить, что среди заглавных чисел обратные значения *однозначных* правильных целых чисел составляют по количеству ровно половину всего ассортимента заглавных чисел (21 из 39; если же считать и число 7, то 22 из 40).

§ 8. Происхождение таблиц умножения. Точка зрения автора

Уже из отдельных моих замечаний при изложении этой теории выясняется и моя точка зрения; я изложу ее теперь систематически.

Мы только что убедились в том, что „таблицы умножения" первоначально отнюдь не были таблицами обращения обыкновенных дробей с правильным знаменателем в шестидесятеричные числа. Я полагаю, что „таблицы умножения" и первоначально и впоследствии были таблицами умножения без кавычек. Для этой цели они могли иметь заглавные числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50. Но они использовались также и для деления $m:n$; из таблицы обратных величин находилось $\bar{n}=\frac{1}{n}$, которое множилось на m. Для практических приложений было, несомненно, недостаточным ограничиваться однозначными делителями n (хотя бы потому, что они могли оказаться неправильными). Поэтому, если бы имелось в виду избавить вычислителя от поразрядного умножения на $\bar{n}$, то нужно было бы к имеющимся у нас прибавить еще большое число таблиц умножения; так, в интервале 50—1,15 пришлось бы устроить таблицы с заглавными числами, помещенными в правых колоннах таблицы (h). Но наш ассортимент не является практическим пособием при вычислениях; это — „учебное пособие", а мы видели, как „заботливо" подбираются числовые данные в задачах. Тогда совершенно естественно предположить, что для ученика были составлены таблицы умножения на $\frac{1}{n}$, где n — однозначное правильное число. Было, очевидно, сочтено необходимым добавить и несколько первых двузначных правильных чисел n (мы видели, что в нормальной таблице имеется несколько таких аргументов). Рисуя себе так процесс создания стандартного ассортимента заглавных чисел, мы делаем, как будто, только самые естественные гипотезы. Остается только посмотреть, насколько ассортимент, так составленный, отличается от действительно имеющегося.

Обратимся снова к схеме (g) и возьмем ее правые колонны, содержащие полный перечень заглавных чисел, кроме числа 7. Учитывая, что на самом деле оно неоднократно встречается, мы видим, что все „первоначальные" множители

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50

здесь налицо.

Затем посмотрим, как представлены в схеме (g) обратные значения однозначных правильных чисел, которые являются аргументами нормальной таблицы (f); сравнив их с правой колонной (g), мы увидим, что 25 чисел (f) (из общего числа 30) попадают в (g). Отсутствуют лишь 5 чисел:

2,13,20 1,52,30 1,12 1,6,40 56,15,

обратные числам

27 32 50 54 1,4.

Мы видели, что в различных сводных таблицах отсутствуют те или иные таблицы умножения, содержащиеся в других сводных таблицах; например, вошедшее в наш каталог заглавное число $2{,}24 = \overline{25}$ не содержится в самой полной сводной таблице (102), но содержится в другой таблице (101). Из этого следует, что некоторой неполнотой может отличаться и перечень $\overline{n}$ в таблице (g). Поэтому отсутствие в этой таблице *пяти* чисел само по себе нисколько не противоречит нашей гипотезе. Более того, мне кажется, можно выяснить и те причины, по которым некоторые из отмеченных чисел не вошли в известные нам сводные и комплектные таблицы.

Три числа: $1{,}12 = \overline{50}$; $1{,}6{,}40 = \overline{54}$ и $56{,}15 = \overline{1{,}4}$ могли отпасть потому, что они были *последними* заглавными числами сводных таблиц[1]); на узком протяжении глиняной доски соответствующие

[1]) Число 56,15 могло стоять и в начале (см. таблицу (e′) на стр. 85); но таблица (f) на стр. 77 свидетельствует о том, что такой порядок не был обязательным.

таблицы могли не уместиться. Переходить на другую доску не было смысла, так как умножение на упомянутые числа легко выполняется с помощью остальных таблиц. В самом деле, умножение на 1, конечно, не требует таблицы; но мы имеем

$$1,12 = 1,0 + 12$$
$$1,6,40 = 1,0,0 + 6,40$$
$$56,15 = 1,0,0 - 3,45,$$

а таблицы умножения на 12, на 6,40 и на 3,45 имеются в стандартном ассортименте.

Труднее объяснить отсутствие чисел $2,13,20 = \overline{27}$ и $1,52,30 = \overline{32}$. Может быть, причину нужно искать в структуре чисел 27 и 32, представляющих наивысшие степени чисел 3 и 2, содержащиеся среди однозначных чисел. Во всяком случае, как сейчас будет видно, представляется вероятным, что упомянутые два числа не случайно отсутствуют в стандартном ассортименте заглавных чисел.

Схема (g) не только содержит некоторые пробелы по сравнению с числами нормальной таблицы, но также имеет и „лишние" числа, т. е. такие, которые не принадлежат к числу „основных" множителей и в то же время не содержатся в правой колонке нормальной таблицы. Этих чисел 12; вот их список:

36 25 24 22,30 18 16,40 16 12,30 8,20 7,12 4,30 2,15 (i)

Они обратны числам:

1,40 2,24 2,30 2,40 3,20 3,36 3,45 4,48 7,12 8,20 13,20 26,40 (k)

Наличие пяти из этих двенадцати чисел объясняется, впрочем, чрезвычайно просто; выше указывалось, что составители задач часто стараются выжать из нормальной таблицы максимум того, что она может дать, т. е. пользоваться ею не только в обычном, но и в обратном направлении.

Так могла возникнуть потребность в расширении ассортимента заглавных чисел и в создании таблиц умножения на все *правильные однозначные числа*. Числа 36, 25, 24, 18 и 16 являются как раз такими. Более того, в ассортименте (g) налицо почти все правильные однозначные числа. Нехватает только 27 и 32, т. е. тех самых чисел, которые „обижены" и при прямом чтении нормальной таблицы! Вот почему их отсутствие и в этом, и в том случае мне представляется не случайным: положение дела таково, как если бы в руках составителя сводной таблицы была неполная нормальная таблица обратных величин, в которой отсутствуют строки

27	2,13,20
32	1,52,30

Остаются еще семь двузначных чисел. Уже Нейгебауер заметил, что три из них могли обратить на себя внимание в силу простоты своего десятичного выражения[1]). Именно,

$$16{,}40 = 1\,000;\ 8{,}20 = 500;\ 7{,}12 = \frac{1}{500}\,.$$

Теперь остаются еще четыре числа: 1) 22,30, которое можно рассматривать как половину числа 45; 2) 4,30, представляющее десятую часть числа 45; 3) 2,15 — двадцатая часть того же числа и, наконец, 4) 12,30, которое можно рассматривать как половину 25. Обратим внимание на то, что десятая и двадцатая части этого последнего числа (2,30 и 1,15) также содержатся среди заглавных чисел. Тогда станет вполне праводоподобным предположение, что наличие вышеупомянутых четырех заглавных чисел объясняется потребностями метрологии, в которой числа 25 и 45 могли играть роль отношения двух однородных единиц. Итак, получается простая и, как мне кажется, вполне естественная общая картина: на первых порах таблицы умножения не имели в виду ничего кроме своей прямой цели; они имели заглавными числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50. Ими же пользовались и при делении m на n: для числа n находилась обратная величина; она могла быть и многозначна, и тогда умножение на m происходило поразрядно. Введение особых таблиц умножения на многозначное $\frac{1}{n}$ имело в виду интересы учебной практики и потому могло ограничиться малыми целыми n; тогда $\frac{1}{n}$ находилось из „нормальной таблицы“. Стремление расширить границы применимости последних приводит к тому, что в задачах таблица $1:n = \bar{n}$ обращается и читается как $1:\bar{n} = n$; тогда появляются и новые таблицы умножения на $\bar{n}$, т. е. на небольшие правильные однозначные числа. Так постепенно образуется комплект таблиц умножения — составляется ли он из отдельных дощечек или пишется на одной

---

[1]) „Лекции“, стр. 46 русского перевода. Здесь Нейгебауер рассматривает вопрос о принципе выбора заглавных чисел. Вывод, к которому он приходит, носит формальный характер; именно, устанавливается, что в принятой им геометрической интерпретации точки, представляющие заглавные числа, заполняют внутренность некоторого правильного шестиугольника. Одна из целочисленных точек на границе этого шестиугольника остается, впрочем, пустой. Кроме того, за границами этого шестиугольника остаются семь точек. Это как раз те самые точки, о которых мы только что говорили. Наличие трех из них Нейгебауер объясняет, на мой взгляд, совершенно правильно. „Остальные четыре точки, — говорит он, — не обнаружили, несмотря на мои поиски, никакой закономерности“. Предлагаемое мной объяснение происхождения соответствующих четырех чисел (см. ниже), конечно, есть лишь гипотеза. Однако она вполне согласуется с этой картиной происхождения таблиц, которую я предлагаю вниманию читателя. Что касается „шестиугольника Нейгебауера“, то размеры этого шестиугольника не стоят решительно ни в какой связи с вышеизложенной теорией Нейгебауера относительно происхождения таблиц. Между тем, вопрос о размерах шестиугольника есть по существу вопрос об объеме таблиц.

доске — это принципиально не важно. Но практически желание уместить обширный материал на небольшом пространстве влечет за собой сознательное стремление к экономии; конечным таблицам легче всего оказаться отброшенными, ибо помимо своего пограничного места они имеют заглавными числами величины вида $1+\alpha$ и $1-\alpha$, где α невелико. Этим объясняется неполнота ассортимента в конце его. В середине же в нем недостает лишь двух чисел: 27 и 32 и двух чисел, им обратных. Стандартный ассортимент с вышеизложенной точки зрения должен был образоваться не сразу, а постепенно, и помимо таблиц для умножения на „основные" числа и для облегчения деления в нем могли быть таблицы для умножения на какие-нибудь практические константы. Потому-то мы и имеем различные отклонения в одних сводных таблицах сравнительно с другими; тем же нужно объяснить и наличие 5—6 заглавных чисел, не принадлежащих ни к одному из указанных выше типов и все же часто встречающихся в сводных таблицах.

Этим резюме мы закончим рассмотрение вопроса о происхождении таблиц умножения и вместе с тем рассмотрение вычислительной техники древних вавилонян.

§ 9. Математические задачи клинописных текстов

Мы переходим теперь к рассмотрению дошедших до нас задач, которые могут нас ближе познакомить с идейным содержанием вавилонской математики и обрисовать уровень ее развития.

Уже было сказано, что наши источники относятся к различным эпохам и охватывают промежуток времени около 1 500 лет. Сравнительно с величиной этого промежутка развитие проблематики и методов вавилонской математики оказывается довольно незначительным, так что уже древнейшие документы, относящиеся к эпохе Хаммурапи, рисуют нам высокое развитие математической культуры. По времени эта эпоха примерно совпадает с эпохой написания Лондонского и Московского математических папирусов, но освещена она гораздо более многочисленными источниками. Заметим еще, что понимание содержания многих из них затрудняется и неисправностью материала и неизвестностью терминологии. Поэтому во многих деталях вавилонские математические тексты остаются доныне неясными даже с языковой стороны. Однако в общем эти неясности не мешают распознать суть дела, и материал, с которым познакомится здесь читатель, нарочито подобран такой, в котором языковых затруднений нет и за правильность перевода которого можно поручиться. Тем не менее, даже в таких текстах возможны зачастую различные толкования, иной раз в корне меняющие представление о силах и средствах вавилонского автора. Вот почему совершенно необходимо привести всегда текст задачи, а не ограничиться вольной его передачей. К сожалению, Нейгебауер в своей неоднократно цитировавшейся мною книге почти никогда не приводит текста, а прямо дает интерпретацию его на языке современной математики. Читатель убедится не раз, насколько страдают от этого выводы.

Задачи вавилонских текстов имеют разную степень отвлеченности. Мы уже знаем, что числовые данные всегда „подогнаны", так что не приходится говорить о „конкретности" задачи в широком смысле слова. Но в одних задачах характер условия непосредственно заимствован из практики, в других условие явно лишь облечено в псевдопрактическую форму; в третьих данными и искомыми являются отвлеченные числа. Различно также и качество изложения. Всегда дается лишь рецепт, но этот рецепт иногда изложен кратко, ясно по форме и просто по существу; иногда же он снабжен ненужными повторениями и длиннотами; нередко путь решения не самый простой; попадаются и фактические ошибки, явно происшедшие при передаче чужого решения. Наконец, несомненно, различны и „читательские категории": одни доски предназначены для начинающих и содержат лишь более простые арифметические задачи, другие имеют в виду лучше подготовленных читателей и предлагают задачи, которые мы отнесли бы к алгебре. Геометрический материал широко используется как в тех, так и в других, но самостоятельной роли не играет.

В вавилонских математических текстах мало таких элементарных задач, с которыми мы втречались в египетских папирусах. Причина этого, вероятно, та, что египетская вычислительная техника требовала большого числа элементарных письменных упражнений, тогда как элементарные операции в вавилонской вычислительной технике выполнялись с помощью таблиц и потому не находили письменного отражения. И все же между задачами египетских папирусов и задачами вавилонских глиняных дощечек можно найти много общего. Это общее я буду особо отмечать, так как параллель между вавилонской и египетской математикой, как указывалось выше, очень важна для восполнения ограниченности наших данных о математике страны Нила.

§ 10. Исчисление процентов

Пожалуй, наиболее простые задачи, встречающиеся в вавилонских текстах, связаны с исчислением процентов. Они встречаются во многих математических текстах и разнообразны по постановке. Повсюду предполагается одна и та же величина „процента"; впрочем, этот термин не очень подходит к вавилонским ростовщическим операциям, ибо наращенный капитал рассчитывался не со *ста*, а с *шестидесяти* единиц: именно, брали в год 12 шекелей с 1 мины $= 60$ шекелей. Эта „просексагинтная" такса либо устанавливается, либо подразумевается во всех задачах. В одной из них, например, требуется по данной величине уплачиваемых за год процентных денег (1 мина 40 шекелей) определить величину капитала. Решение требует, очевидно, только деления $1{,}40 : 12 = 8{,}20$ (мин). Этот результат и находится, после чего решается, очевидно, для проверки, обратная задача: найти процентные деньги, начисляемые в год на 8,20 мин.

Вот как выглядит решение этой задачи в вавилонском тексте:

„За 1 мину серебра он дал 12 шекелей, и процентов 1,40 ib-si$_8$[1]) пусть он тебе дал. 1 мину бери, 0;12 процентов бери; 1,40 бери за то, что он тебе дал ib-si$_8$, и 0;12 — проценты — на 1 мину помножив, 0;12. Обратное от 0;12 образуй; 5 на 1,40 помножив, 8,20 — основной капитал.

Если я 8,20, основной капитал, отдал бы за 12 шекелей с мины, то 1,40, как процент, должен был бы он мне дать: 1 мину на 0,12, ее проценты, помножив: 0;12. 0;12 на 8,20, основной капитал, помножив: 1,40 — это его проценты. Ib-si$_8$ 1,40 что есть? 10“ [2]).

Я привел текст задачи, придерживаясь возможно ближе данного Нейгебауером перевода; эту нетрудную задачу читатель без труда изложит в литературной форме. Обращу лишь внимание читателя на некоторые особенности формы изложения.

Начнем с того, что и при прямом решении задачи и при обратной проверке производится совершенно, как будто, излишнее действие: умножение на 1. Аналогичные случаи многократно встречаются в других задачах и объясняются желанием придать решению возможно более общую форму; но в данном случае, повидимому, нет направления для естественного обобщения — разве что процент задавался бы не в виде „12 шекелей с 1 мины“, а в виде „k шекелей с m мин“. Но ведь и тогда нужно было бы не умножать, а делить. Поэтому мы вправе предположить, что имеем дело просто с посредственным изложением, автор которого неудачно подражает хорошим примерам.

Именно с этой точки зрения нужно подойти и к выяснению загадки ib-si$_8$. Этот термин уже встречался нам в смысле „квадратный корень“. В источниках засвидетельствовано употребление его и в более широком смысле: в некоторых случаях ib-si$_8$ нужно по смыслу понимать как „кубический корень“.

В данном случае, по смыслу задачи, не подходит ни то, ни другое толкование, и Нейгебауер подозревает, что здесь ib-si$_8$ нужно понимать в еще более широком смысле и искать функцию $f(x)$ так, чтобы выполнялось условие $f(1{,}40) = 10$ и другие аналогичные, почерпнутые из сходных задач. Таких задач мы имеем еще 3 на той же черепице, на которой записана приведенная задача. Они слово за словом повторяют приведенный текст; только вместо величины процентной платы 1,40 даны величины 36, 18 и 7,30. В первом случае ib-si$_8$ оказывается равным 6, во втором и третьем вместо ib-si$_8$ в тексте повсюду стоит ba-si, которое оказывается во втором случае равным 3, в третьем же — ответ обломан. Нейгебауер считает, что ba-si равно-

---

1) О значении этого термина в данном тексте — ниже.

2) „Математические клинописные тексты“, т. I, стр. 355.

значно с ib·si$_8$[1]); тогда функция, значение которой отыскивается на нашей дощечке, должна удовлетворять соотношениям:

$$f(1{,}40) = 10, \quad f(36) = 6, \quad f(18) = 3.$$

Уже из этого ясно, что она не может иметь простого выражения. А если бы она имела сколько-нибудь сложное выражение, то мыслимо ли, чтобы автор, столь многословно описывающий деление 1,40 на 12, обошел молчанием процесс вычисления $f(1{,}40)$ и т. п.? Конечно нет. Поэтому мне кажется несомненным, что ib-si$_8$ от 1,40 нужно понимать в обычнейшем смысле $\sqrt{1{,}40} = 10$, что вполне подтверждается тем, что ib-si$_8$ от 36 есть 6. Что же касается ba-si, то его нужно, вероятно, толковать как $\sqrt{\frac{x}{2}}$, а не как $\sqrt{x}$. Действительно, тогда ba-si от 18 даст 3; с другой стороны, становится возможным найти рациональный ba-si от 7,30 в задаче с обломленным ответом:

$$\sqrt{\frac{7{,}30}{2}} = \sqrt{225} = 15$$ [2]).

Если читатель спросит: какой смысл в задаче на проценты извлекать квадратный корень из суммы процентных денег, та я отвечу: никакого. Но то, что выше было сказано о квалификации писавшего, позволяет нам предположить, что он решил присоединить к легкой задаче еще один арифметический вопрос, не думая о том, что через четыре тысячи лет его невинное желание породит историческую проблему о разгадке тайны функции $f(x)$.

Если мы с такой бесхитростной оценкой подойдем к другим задачам сходного содержания, то и они станут целиком понятными, и отпадет искусственно создающаяся проблематика. Нужно только помнить, что составитель текста мог не иметь достаточной квалификации и не всегда хорошо решать задачи.

Сейчас мы возьмем еще одну дощечку, содержащую процентные вычисления. Среди трех имеющихся там задач две представляют собой взаимно обратные задачи; одна из них представляет для понимания трудности, другая же совершенно ясна, хотя начало ее повреждено. В ней разыскивается, во что обратится 1 мина через 30 лет, если

---

[1]) „Математические клинописные тексты“, т. I, стр. 366; в пользу этого мнения Нейгебауер приводит грамматические соображения, а также указывает на то, что в смысле „кубический корень“ употребляется как тот, так и другой термин. Однако наиболее важным для Нейгебауера являются, повидимому, то, что, не отождествив ba-si и ib-si, он не может объяснить в желательном ему духе другую задачу (см. ниже).

[2]) Нейгебауер предположительно восстанавливает: $f(7{,}30) = 45$; кроме того, он обращает внимание на то, что 7,30 (если придать ему вид 7,30,0) можно рассматривать как полный куб (30^3). Оба эти указания, конечно, несовместимы. При указываемом мною подходе сохраняется смысловое родство ba-si и ib-si$_8$ и термин ib-si$_8$ сохраняет свое обычное значение.

ежегодно начисляемый процент (12 с 60) в течение пятилетия сам процента не приносит. По истечении первых пяти лет начальный капитал, таким образом, удваивается. В следующее пятилетие проценты начисляются по той же таксе, но уже на сумму 2 мины, и т. д. Остальное без всяких комментариев выясняется из самого текста:

„... умножив 0;12, его процент. 0;12, его процент, умноженный пятым годом, 1. На пятый год капитал и его проценты равны друг другу. 1, проценты, к 1, основному капиталу, прибавь, и 2 это капитал и его проценты пятого года. Пятый год к пятому году прибавь, и это десятый год. 2, капитал и его проценты, удвой, 4. 4 это капитал и его прецепты десятого года. Пятый год к десятому году прибавь, и это 15-й год. 4, капитал и его проценты, удвой; это 8. 8 есть капитал и его проценты 15-го года. Пятый год к 15-му году прибавь, и это 20-й год. 8 удвой, и это 16. 16 есть капитал и его проценты 20-го года. 5-й год к 20-му году прибавь, и это 25-й год. 16, капитал и его проценты, удвой, и это 32. 32 есть капитал и его проценты 25-го года. 5-й год и 25-й год сложи; это 30-й год. 32, капитал и его проценты, удвой, и это 1,4. 1,4 есть капитал и его проценты 30-го года“ [1]).

Так, мерно и неторопливо, происходит примитивное построение „логарифмической скалы“. С одной стороны, строится арифметическая прогрессия 5, 10, 15, 20, 25, 30, с другой — геометрическая 2, 4, 8, 16, 32, 64. Длиннота изложения свидетельствует о невысоком уровне развития автора. Поэтому нас а приори не должно удивить, если этот же автор что-нибудь напутает, решая обратную задачу. Эта обратная задача состоит в том, чтобы по заданной сумме 1,4, в которую обратилась 1 мина, найти время, в течение которого начислялись проценты по вышеуказанному принципу. Естественно было бы ожидать, что решаться эта задача будет тем же сопоставлением прогрессий: разделив 64 на $2 = 32$, заметить пятерку (последнее пятилетие); разделив еще раз $32 : 2 = 16$, присчитать вторую пятерку и т. д. В сущности говоря, иного способа здесь нельзя и ожидать. Посмотрим теперь, что сказано в дощечке:

„...1 мину бери. 0;12, ее процент, бери; за 6,0 год принимай [2]). Бери 1,4 за капитал с его процентами. 0;12 процентов на 1, основной капитал, помножив, найдешь 0;12, его проценты. 0;12 на 5-й год помноженное, есть 1. На пятый год капитал и его проценты сделались равны друг другу. 1, проценты, к 1, основному капиталу, прибавь, и это 2“.

До сих пор автор так же неторопливо, как и в предыдущей задаче, подготовляет решение. Вот он выяснил, что капитал

[1]) „Математические клинописные тексты“, т. I, стр. 357; начало и здесь повреждено.

[2]) То-есть за 360 дней. Очевидно, на случай, если придется „интерполировать“. Однако этого случая здесь не представляется, и указание остается без действия. Напомним, что вавилонский год, если он не был високосным, содержал 360 дней.

за 5 лет удваивается, и теперь должен осуществлять последовательное деление капитала с процентами на 2. И его намерение именно таким и было; ибо он пишет дальше:

„Образуй обратное от 2, и это 0;30. 0;30 на 1,4, сумму капитала и его процентов, помноженное, есть 32. ba-si 2 что есть? Это 1. Обратное от 2 образуй, и это 0;30".

В этом месте мы ожидаем продолжения: „0;30 на 32 помноженное, есть 16". В тексте получено то же число 16, но не непосредственным умножением 0;30 на 32, а с помощью разбивки множителя 32 на слагаемые 30 и 2. Эта разбивка объясняется, очевидно, тем, что в ассортименте таблиц умножения, как мы видели, нет таблицы с заглавным числом 32, а в таблице с заглавным числом 30 нет множителя 32. Текст гласит:

„0,30 на 0,30 помноженное, есть 15. К 15 1... прибавь, и это 16"[1]).

Замечу, что в этом вполне естественном приеме Нейгебауер усматривает регулярный процесс, состоящий в том, что вместо $\frac{k}{2\cdot 2}$ вычисляется $\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2}-2\right)+1$. Столь же экстравагантным способом он толкует и дальнейшие этапы вычисления, так что решение в целом квалифицируется им как „очень сложное", и для расшифровки его пишутся функциональные уравнения, которые читатель найдет на стр. 222 русского перевода „Лекций".

Мы убедимся сейчас, что и в дальнейшем процесс решения столь же прост по существу. Прочтем решение до конца; получив 16, вавилонский автор продолжает: „ib-si$_8$ от 16 что есть? 4; 4 и 1, ib-si$_8$, сложены, и это 5. 5, на 5-й год помноженное, есть 25, и 5-й год к 25 прибавь, это 30. 30-й год есть тот, в который капитал и его проценты составляют 1,4".

Очевидно, автор не захотел продолжать деление на 2 дальше, и он решил сразу заявить, что этих делений над 16 нужно проделать 4, и тогда придем к единице; он выразил это, сказав, что ib-si$_8$ от 16 есть 4. Если бы он хотел сказать: $\sqrt{16}=4$, он должен был бы выразить эту мысль теми же словами. Может быть, „ib-si$_8$ от 16" понималось также в смысле $\log_2 16$? Так думает Нейгебауер[2]). Мне кажется более вероятным, что писавший, ввиду того, что при $x=16$

$$\log_2 x=\sqrt{x},$$

употребил термин ib-si$_8$ *по ошибке*. Но если это и не так, то суть дела не меняется; по существу сказано, что деление на 2 нужно проделать еще 4 раза, что соответствует 4 пятилетиям роста капитала. Сверх того, раньше было насчитано 2 деления пополам,

[1]) На месте многоточия в тексте стоит слово *pi-si-am*, смысл которого Нейгебауер не расшифровал.

[2]) „Математические клинописные тексты", стр. 363 и 365—366.

т. е. 2 пятилетия. Но эти две пятилетние прибавки учтены неодинаковым образом; первая учтена с помощью выражения $(4+1)\cdot 5 = 25$, а вторая добавочным сложением

$$25+5=(4+1)\,5+5=30.$$

Конечно, проще было прямо вычислить

$$(4+2)\,5,$$

но, мне кажется, удлинение пути здесь некоторым образом „оправдано“ тем, что раньше второе деление пополам было произведено иным, более длительным путем, чем первое.

Итак, мы видим, что решение задачи протекает по существу примитивно, и нет никаких оснований видеть здесь „задачу на сложные проценты“, как это делает Нейгебауер [1]).

§ 11. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Суммирование ряда квадратов

Разобранный нами текст относится к „древневавилонской“ эпохе, т. е. примерно к тому же времени, что папирусы Райнда и Московский. По уровню своему он стоит, очевидно, ниже, чем эти папирусы. К той же эпохе относятся, однако, тексты более высокого качества. Некоторые из них стоят по уровню очень близко к известным нам

---

[1]) Есть еще один вавилонский текст аналогичного содержания, относящийся примерно к XX—XVIII векам до н. э.; когда писались „Лекции“, он, очевидно, не был известен Нейгебауеру, так как, говоря о вышеразобранной задаче, он отмечает, что она — единственная, где „речь идет об обращении показательной функции“. В собрании математических клинописных текстов она помещена в прибавлении (т. II, стр. 40) под заголовком „Исчисление сложных процентов“. Однако текст очень темен, и самому Нейгебауеру „неясен в деталях“. Если согласиться с толкованием Нейгебауера (перевод, даваемый им, не обязывает к этому), то в задаче требуется определить, в какое время удваивается капитал, на который начисление процентов происходит ежегодно по обычной таксе (0;12), но с первого же года начисленные суммы сами дают проценты. Процесс решения толкуется так: последовательным умножением находится $1;12^2$, $1;12^3$, $1;12^4$. Последняя величина оказывается больше 2. Тогда неизвестным способом находится поправка 0;2,33,20, которая отнимается от 4 лет. Эта реконструкция сама по себе вполне вероятна, но из нее никак нельзя сделать вместе с Нейгебауером вывод: „наш текст с очевидностью показывает, что вавилоняне отваживались на задачу определения x из уравнения $a^x = b$ и в тех случаях, когда x заведомо не целочисленно“. Вывод этот неверен потому, что вавилонянин не имел никакого уравнения $a^x = b$; более того, он решал задачу и по существу отличную от нахождения x из уравнения $a^x = b$, ибо лишь для целочисленных x наращенный капитал представляется функцией a^x, для остальных же он вычисляется „по формуле“ $(1+0;12)^{[x]}\,[1+0;12\,(x-[x])]=b$, где символ $[x]$ обозначает целую часть положительного числа x, и уже тогда нужно было бы сказать, что именно это последнее уравнение отваживались решать вавилоняне!

египетским текстам, другие же значительно выше. Сейчас мы рассмотрим один текст, который не только по характеру изложения, но и по содержанию задачи и методу решения стоит очень близко к одной из задач папируса Райнда — именно, к задаче 64, разобранной нами в главе I. Близость эта настолько велика, что, если денежную сумму, подлежащую разделу в вавилонской задаче, заменить числом хлебов, то эту задачу можно было бы поставить рядом с задачей 64 папируса Райнда в качестве ее обращения.

Условие задачи состоит в том, чтобы сумму $1\frac{2}{3}$ мины серебра резделить между десятью братьями так, чтобы доли братьев образовывали арифметическую прогрессию. Ищется разность этой прогрессии при условии, что доля восьмого брата есть 6 шекелей (1 мина $=$ $= 60$ шекелей). Это условие сформулировано следующим образом [1]): „10 братьев; $1\frac{2}{3}$ мины серебра [2]); брат над братом подымается; насколько он подымается, я не знаю. Доля восьмого есть 6 шекелей. Брат над братом, насколько он подымается?"

Чтобы облегчить понимание текста решения, я изложу сначала то рассуждение, которым, повидимому, руководился составитель задачи. Насколько эта реконструкция верна, читатель будет судить по приводимому ниже тексту.

Ищем сумму, приходящуюся на каждого из десяти братьев в среднем. Для этого делим имущество $s = 100$ шекелей на $n = 10$, число братьев; $\frac{s}{n} = 10$ шекелей. Доля восьмого брата $a_8 = 6$ шекелей вместе с неизвестной пока долей третьего брата a_3 должна быть вдвое больше (ибо среднее арифметическое равноотстоящих долей равно среднему арифметическому всех долей), т. е. $a_8 + a_3 = 2\frac{s}{n} = 20$ шекелей. Отсюда можно найти a_3, вычитая a_8 из $2\frac{s}{n}$. Но желательно найти не самое a_3, а $a_3 - a_8$, т. е. превышение доли третьего брата над долей восьмого. Поэтому вычитать a_8 нужно дважды: $2\frac{s}{n} - 2a_8 = 20 - 12 = 8$; это и есть упомянутое превышение. Чтобы найти теперь то, чем „брат подымается над братом", нужно поделить это превышение на число промежутков между долями a_3 и a_8, т. е. на 5. Итак, искомая разность есть $\frac{2\frac{s}{n} - 2a_8}{5} = \frac{8}{5} = 1;36$ шекеля.

В данном случае делитель 5 легко определяется на пальцах (в буквальном смысле слова!). Однако текст дает и общее правило,

---

1) „Математические клинописные тексты", т. I, стр. 240—241. Эта задача разобрана и в „Лекциях" Нейгебауера, стр. 195—196 русского перевода.

2) $\frac{2}{3}$ в оригинале выражено индивидуальным знаком.

правда в несколько неуклюжей форме. Если его перевести на язык букв, то в наших обозначениях делитель будет выглядеть так:

$$n-[2(n-k)+1],$$

что можно объяснить следующим образом: $n-k=10-8=2$ есть число интервалов между долей восьмого и десятого брата; такое же число интервалов лежит между долями третьего и первого брата. Общее число интервалов на 1 меньше числа долей; поэтому между долями третьего и восьмого брата лежит число долей, равное

$$(n-1)-2(n-k),$$

или, что то же,

$$n-[2(n-k)+1].$$

Почему автор предпочел второй порядок первому? Я думаю, что и здесь, как и в предшествующей задаче, мы имеем просто плохое изложение. Во всяком случае излагавший решение хорошо знал, что *нужно* сделать, и все вычисления по существу безукоризненны. Теперь приглашаю читателя прочесть решение в том виде, как оно изложено в нашем документе[1]): „Ты твоим способом: образовано обратное от 10, числа людей; получается 0;6. 0;6 на 1 2/3 мины серебра ты умножаешь, и 10 (шекелей) получается. 10 удвой, и 20 получается. 6, долю восьмого, удвой. 12 получается. 12 из 20 вычитается, и 8 получается. 8 удержи в голове. 1 и 1, *ša-ap-li-a-am*[2]) сложи, и 2 получается. 2 удвой, и 4 получается. 1 и 4 ты складываешь, и 5 получается. 5 от 10, числа людей, отнимается, и 5 получается.

Обратное от 5 образуется, и 0;12 получается. 0;12 на 8 помножается, и 1;36 получается. 1;36 есть то, чем брат подымается над братом“.

Мы видим из рассмотрения этой задачи, что она, действительно, решается „по формуле“

$$d=\frac{2\frac{s}{n}-2ak}{n-[2(n-k)+1]}.$$

Но уже хотя бы из того вида, в котором выражен знаменатель, следует, что здесь на „алгебраическое“ решение, а типичное арифметическое рассуждение; выше мы попытались его восстановить. В общем решение следует продуманному плану; но в одном пункте изложение нечетко, и эту нечеткость никак нельзя приписать недо-

---

[1]) „Математические клинописные тексты“, т. I, стр. 240—241.

[2]) Тюро-Данжен (Revue d'Assyriologie, т. 29, стр. 26) в своем переводе этого текста переводит это слово: (son) pareil, т. е. „(ей) подобную“. Нейгебауер („Клинописные тексты“, стр. 241) отвергает этот перевод, как не отвечающий смыслу текста, однако не указывает своего толкования. Мне кажется вполне допустимым, что здесь мы имеем ошибку вавилонского автора, который все это место, как было указано, излагает сбивчиво. Тогда возражение Нейгебауера отпадает само собой.

статкам перевода. Мы еще раз отмечаем — и будем иметь случай и дальше отмечать — что лицо, из рук которого вышел клинописный математический текст, не обладало достаточно высокой квалификацией. Конечно, составитель задачи знал больше, чем писавший текст. При рассмотрении египетских источников мы тоже пришли к такому выводу, и это позволило нам высказать предположение о наличии в древнем Египте математики более высокого ранга, чем тот, о котором непосредственно свидетельствуют наши папирусы.

По отношению к вавилонской математике это предположение подтверждается многочисленными фактами. Тем более интересно провести параллель между египетской зедачей на вычисление суммы геометрической прогрессии (задача 79 папируса Райнда; см. выше, стр. 44) и аналогичной вавилонской задачей.

Эту задачу мы заимствуем из текста, содержащего еще полтора десятка задач и относящегося к позднему времени — к эпохе Селевкидов. Последнее обстоятельство не должно нас смущать, ибо в дальнейшем мы встретимся с более тонкими вещами в документах древневавилонской эпохи. Да и большинство других задач нашего текста по характеру одинаковы с задачами ранних источников. Писавший текст жрец Ануабутир составил его „по повелению Ану и Антума, да пребудет их слава". Но древние боги, повидимому, не повелели нашему жрецу разъяснить процесс вычисления подробно, и вся интересующая нас задача занимает у него две строки, из коих, к несчастию, конец первой дошел до нас в поврежденном виде. Вот текст [1]):

„От 1 до 10 положи; через 2 перешагивай, складывай. 8, 32. 1 от 8,32 вычти. Остается 8,31. 8,31 к 8,32 прибавь. 17,3". Как ни лаконичен этот текст, из числовых данных видно, что речь может итти только о суммировании десяти членов геометрической прогрессии („от первого до десятого"); знаменатель прогрессии 2 („через 2 перешагивай"). Первый член 1. Требуется найти сумму

$$1+2+2^2+\dots+2^9=$$
$$=1+2+4+8+16+32+64+128+256+512.$$

Эта сумма вычисляется по рецепту

$$8{,}32+(8{,}32-1)=17{,}3.$$

Как получено 8,32? Об этом текст не говорит (так же, как и египетский текст в соответствующем случае). Но так как $8{,}32=512$, то вряд ли может быть сомнение в том, что берется последний член суммы. К нему прибавляется последний член без единицы, так что мы можем восстановить „формулу"

$$s=2^{n-1}+2^{n-1}-1.$$

---

[1]) „Математические клинописные тексты", т. I, стр. 99.

Обратим внимание, что взято $2^{n-1}+2^{n-1}$, а не прямо 2^n; это свидетельствует как будто о том, что задача рассматривается как частный случай общей задачи о суммировании геометрической прогрессии.

Этот вывод может показаться слишком далеко идущим. Может быть он покажется более обоснованным, если я приведу вторую задачу из того же текста, где речь идет о нахождении суммы квадратов первых десяти целых чисел. Формулировки здесь также лаконичны, но общность правила выступает гораздо яснее. Вот текст:

„Квадрат от 1 раз 1, т. е. от 1, до 10 раз 10, т. е. до 1,40. Установи сумму. 1 на 0;20, треть, помножь. 0;20. 10 на 0;40, две трети, помножь 6;40. 6;40 и 0;20 есть 7. 7 на 55 помножь; 6,25. 6,25 есть сумма".

Текст не может толковаться иначе, как следующим образом:

$$s=\left(1\cdot\frac{1}{3}+10\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 55,$$

где 1, очевидно, есть первое из чисел, возвышаемых в квадрат, 10 — последнее, а 55 — сумма их первых степеней

$$1+2+\ldots+10=55.$$

Аналогично, вероятно, находилась всякая сумма s_2 вида

$$a^2+(2a)^2+(3a)^2+\ldots+(na)^2$$

по „формуле"

$$s_2=\left[\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}(na)\right]s_1$$

(где $s_1=a+2a+\ldots+na$), и уж во всяком случае сумма

$$1^2+2^2+\ldots+n^2$$

по „формуле"

$$s_2=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n\right)s_1.$$

Несомненно, тот, кто знал правило для суммирования квадратов чисел натурального ряда, умел просуммировать и самый этот ряд, так что мы не сильно погрешим против истины, если припишем вавилонянам знание соотношения

$$s_2=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n\right)n$$

или ему аналогичного. Как была выведена „вавилонская формула"

$$s_2=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n\right)s_1,$$

на основании известного нам материала сказать нельзя. Вывод, предложенный Нейгебауером [1]), совершенно произволен и вдобавок

---

[1]) „Лекции", стр. 192–194 русского перевода.

очень сложен [1]). Но *какой-то* вывод, несомненно, вавилоняне имели: „эмпирически“ такую формулу получить вряд ли возможно. Не забудем, впрочем, что наш документ принадлежит эллинистической эпохе, так что здесь возможно и заимствование у греков. Но для нас в данной связи важно то, что автор этого документа, несомненно, знает общий закон суммирования ряда квадратов и, следовательно, вряд ли не знает закона суммирования прогрессии. Между тем мы видим, что изложил он этот закон ничуть не лучше, чем древнеегипетский автор.

Тем не менее мы вправе сделать уже на основании этого материала предположение о существовании у вавилонян алгебраических или близких к ним методов. Мы вскоре убедимся в том, что такие методы действительно существовали.

Но чтобы лучше распознать, когда наши документы действительно свидетельствуют о наличии алгебраических методов, и чтобы оценить высоту развития этих последних, нужно прежде всего предохранить себя от поисков их там, где их нет. Это тем более необходимо, что Нейгебауер, заслуги которого в истории математики вавилонян не раз отмечались мной, допускает на мой взгляд серьезную ошибку в оценке решения ряда вавилонских задач. Насколько при этом меняется истинная картина — читатель сейчас увидит.

§ 12. Синтетические методы решения задач

Отдел „Алгебра“ (гл. V, § 3) книги Нейгебауера начинается с изучения „системы линейных уравнений“. Мы возьмем для примера первую из рассматриваемых здесь задач, в которой Нейгебауер усматривает решение системы 5 уравнений с 5 неизвестными. Вот условие задачи [2]):

„Трапеция, в ней 2 полосы [3]). 13,3 верхняя площадь, 22,57 2-я площадь. 3-я часть нижней длины для верхней длины. То, чем

---

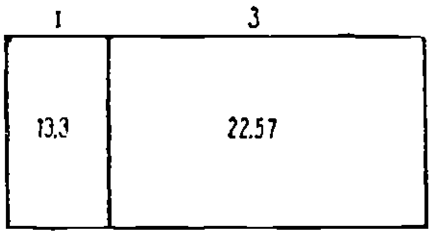
[1]) В примечании к указанному месту переводчик Нейгебауера, проф. С. Я. Лурье, дал очень изящный и простой геометрический вывод. Правда, этот вывод он приводит к формуле $s_2 = \frac{1}{3}(2n+1)s_1$, а не к формуле $s_2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n\right)s_1$, но путем небольшого видоизменения рассуждения можно, сохранив общую идею вывода, притти и ко второй формуле, которая отличается от первой лишь незначительным изменением порядка действий. Нужно заметить, что С. Я. Лурье до некоторой степени был введен в заблуждение самим Нейгебауером, который в своих „Лекциях“, исходя из предпосылки о существовании у вавилонян мощного алгебраического аппарата и не придавая значения „мелким“ алгебраическим переделкам, дает формулу $s_2 = \frac{1}{3}(2n+1)s_1$, а не $s_2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n\right)s_1$.

[2]) „Математические клинописные тексты“, т. I, стр. 260.

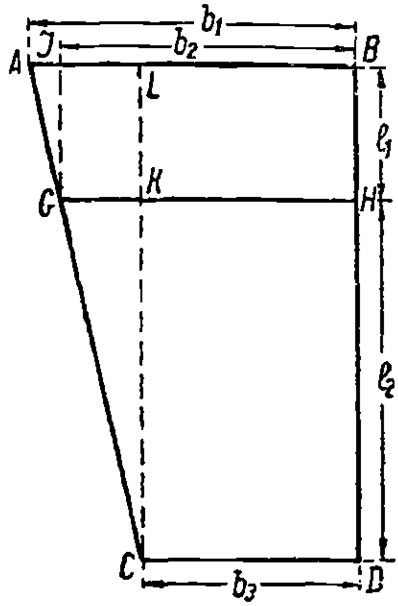
[3]) В вавилонском тексте id-meš, дословно „река“ или „канал“. Как и во многих других случаях, Нейгебауер переводит не буквально, исходя из

верхняя ширина выдается за линию раздела, и то, чем линия раздела выдается за нижнюю ширину, сложенное 36. Ее длины, ширины и линия раздела, что они?"

В вавилонском тексте имеется и чертеж, который выглядит примерно так, как показано здесь (черт. 3). На нем размеры отдельных частей плохо соответствуют заданию, и вообще он носит характер наброска, а не тщательно выполненного рисунка. Интересно также отметить, что „верхняя" и „нижняя" стороны на чертеже являются левой и правой. Это явление имеет место и в других случаях; оно объясняется тем, что первоначальное направление вавилонского письма было сверху вниз; впоследствии стали поворачивать дощечку



Черт. 3.



Черт. 4.

и писать слева направо, но по традиции наименование частей чертежа сообразовывалось со старым направлением письма. Приводимый черт. 4 изображает фигуру, соответствующую данным задачи.

Обозначим через F_1 площадь полосы $ABHG$ и через F_2 площадь полосы $HGCD$; верхнее основание, лиинию раздела и нижнее основание обозначим через b_1, b_2, b_3, высоты BH и HD — через l_1 и l_2;

того, что в вавилонских текстах соответствующие слова приобрели характер технических терминов. Вообще нужно заметить, что вавилонские математические и в особенности геометрические термины переводятся не столько по их „содержательному" смыслу, который часто вовсе неизвестен, сколько по их постоянным связям с текстом. Мы уже видели это на примере термина ib-si$_8$. В данном тексте термином „линия раздела" переводится термин *RI*, прямое значение которого неизвестно. В других случаях значение термина приходится суживать применительно к контексту. Так, термин, переводимый в нашем тексте „трапеция", в оригинале имеет буквальный смысл „четырехугольник". Разумеется, при таком положении дела всегда остается доля неуверенности в правильности перевода. Но она тем меньше, чем задача сложнее, так как правильность толкования подтверждается внутренним согласием в смысле. Можно было бы ожидать, что чертеж должен помочь делу; однако чертежи, как правило, настолько схематичны, что нельзя судить, какую форму имеет фигура; так, в нашем тексте четырехугольник похож скорее на прямоугольник, чем на трапецию. Интересно отметить, что в задаче все размеры даны без указания наименований, так что задача приобретает характер отвлеченного чисто арифметического вопроса.

тогда мы можем записать данные задачи так:

$$F_1 = 13{,}3, \tag{1}$$

$$F_2 = 22{,}57, \tag{2}$$

$$\alpha l_2 = \beta l_1 \ (\alpha = 1;\ \beta = 3), \tag{3}$$

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) = c = 36. \tag{4}$$ [1]

К этим соотношениям нужно присоединить еще

$$\frac{b_1 - b_2}{b_2 - b_3} = \frac{l_1}{l_2}, \tag{5}$$

вытекающее из подобия треугольников AIG и GKC, а также соотношения

$$F_1 = \frac{b_1 + b_2}{2} l_1, \tag{6}$$

$$F_2 = \frac{b_2 + b_3}{2} l_2, \tag{7}$$

выражающие площади трапеции через их элементы.

Пять уравнений (3)—(7), если в два последних подставить величины F_1 и F_2 из (1) и (2), позволяют определить 5 неизвестных: l_1, l_2, b_1, b_2, b_3, из которых три последних служат в вавилонской задаче искомыми величинами.

Разумеется, эти уравнения представляют собой нечто, чего в вавилонской задаче вовсе не содержится. Мы можем их написать для облегчения понимания задачи, но лишь анализ решения позволит нам судить о том, имел ли дело вавилонский вычислитель с понятиями и методами, отвечающими нашим уравнениям и приемам их решения.

Вот как изложено в тексте решение задачи:

„Ты при твоем решении: 1 и 3 ты мог бы взять. 1 и 3, сложенные, 4. Обратное от 4 образуется, и это 0;15. 0;15 на 36 умноженное, есть 9. 9 на 1 помноженное, есть 9. 9 на 3 умноженное, 27. 9 есть то, чем верхняя ширина выдается за линию раздела. 27 есть то, чем линия раздела выдается за нижнюю ширину".

Указание геометрического смысла результата после ряда чисто арифметических выкладок означает, что здесь заканчивается первый этап выкладок. Совершенно очевидно, что общий рецепт решения, преподанный безмолвно на числовом примере, можно на языке символов передать следующим образом:

$$AI = (b_1 - b_2) = \frac{c}{\alpha + \beta}\,\alpha, \quad GK = (b_2 - b_3) = \frac{c}{\alpha + \beta}\,\beta; \tag{8}$$

---

[1] Любопытно, что условие (4) можно было бы задать в более простой форме: $b_1 - b_3 = 36$. Почему автор избрал форму (4), выяснится в дальнейшем.

самое простое и естественное рассуждение, ведущее к этим зависимостям, таково: отношение отрезкон AI и GK есть

$$l_1 : l_2 = \alpha : \beta,$$

а сумма AI и GK есть c. Нужно, следовательно, разделить c на части, пропорциональные α, β; это совершенно элементарная задача; вавилонский вычислитель не мог не знать общего приема ее решения, которое и выполнено теми же действиями и в том же порядке, как ее решали во все времена и как ее и сейчас решит школьник. Здесь, следовательно, нет нужды прибегать ни к каким уравнениям; вавилонский автор к ним и не прибегает. Это, мне кажется, вытекает из формы задания величины $c = 36$. Проще всего ее было бы определить, как „то, чем верхняя ширина выдается за нижнюю". Однако она определена как „то, чем верхняя ширина выдается за линию раздела, и то, чем линия раздела выдается за нижнюю ширину". Я не вижу иной возможности объяснить это странное задание, как тем, что составитель задачи *наталкивает* учащегося на применение пропорционального деления.

Следующим этапом решения служит числовая выкладка, приводящая к определению „длин" BH и HD. Об этом свидетельствует ее конец: „18 на 1 помножается; 18, верхняя длина; 18 на 3 помножается; 54, нижняя длина". Из этой концовки ясно не только, *что* определяется, но и *как* определяется. Числа 1 и 3, которым, по условию, пропорциональны BH и HD, множатся на „коэфициент пропорциональности" 18.

Весь довольно длинный кусок текста, предшествующий приведенному, посвящен получению этого коэфициента пропорциональности. Вычисление само по себе довольно сложно; оно еще более усложняется тем, что производятся совершенно излишние действия, которые, так сказать, компенсируются последующими. Наличие этих излишних действий ясно показывает, что вычислитель шел не путем общих преобразований уравнений, а путем „неудачного" рассуждения, разыскивая ненужные для дальнейшего величины.

Чтобы лучше разобраться в этих выкладках, мы будем их интерпретировать геометрически; заранее оговариваюсь, что вавилонский вычислитель мог давать своим операциям и иную интерпретацию; нам важно только обнаружить, что он как бы блуждал в лесу; в каком именно — это менее существенно.

Текст гласит:

„Образовано обратное от 1, умножено на 13,3. Получается 13,3 [1]). Образовано обратное от 3, 0;20, умножено на 22,57. Получается 7,39. 13,3 над 7,39 на сколько выдается? На 5,24 выдается".

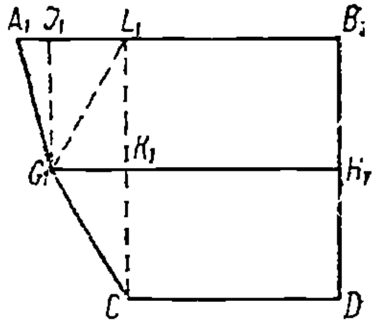
---

[1]) Из этого места, между прочим, ясно, что мы поступили правильно, „обобщив" задачу на произвольные α и β и не ограничиваясь случаем $\alpha = 1$; если бы не имелось в виду это обобщение в вавилонском тексте, то не было бы этого „тавтологического" деления на 1.

Ясно, что здесь составляется выражение

$$\frac{F_1}{\alpha} - \frac{F_2}{\beta} = 5{,}24\ (=324). \tag{9}$$

Так как α и β суть числа, которым пропорциональны BH и HD, то эту операцию можно себе представить как изменение черт. 2 таким образом, что трапеция $ABGH$ сжимается по „длине" в α раз, а трапеция $GHDC$ — в β раз, так что получается фигура, изображенная на черт. 5. Ее горизонтальные отрезки равны соответствующим отрезкам фигуры на черт. 4, „длины" B_1H_1 и H_1D_1 равны между собой.



Черт. 5.

Мы уже догадываемся, что ближайшей задачей будет определение их общей величины — это и будет упомянутый выше коэфициент пропорциональности. Выражение (9) представляет разность между площадью верхней и нижней трапеций. Геометрически она изображается площадью треугольника $A_1L_1G_1$, ибо трапеция $G_1L_1B_1H_1$ равна трапеции $G_1H_1D_1C_1$. Итак, результат (9) означает что площадь треугольника $A_1L_1G_1$ есть 5,24. Теперь ясно, что для определения искомой величины B_1H_1 достаточно удвоенную площадь $A_1L_1G_1$ разделить на основание A_1L_1, длина которого известна ($c=36$):

$$B_1H_1 = \left(\frac{F_1}{\alpha} - \frac{F_2}{\beta}\right)\frac{2}{c} = \frac{5{,}24\cdot 2}{36} = 18. \tag{10}$$

Однако вычисление на самом деле идет не по такому пути. Текст гласит:

„1 и 3, сложенное, 4. $^1/_2$ от 4 отломанная 2. Обратное от 2 образуй. 0,30. На 5,24 помноженное 2,42 получается".

Пока что составлено, очевидно, выражение

$$\left(\frac{F_1}{\alpha} - \frac{F_2}{\beta}\right) : \frac{\alpha+\beta}{2}, \tag{11}$$

т. е.

$$(\text{площадь } A_1L_1G_1) : \frac{\alpha+\beta}{2} = 2{,}42.$$

Дальше следует небольшая фраза, точный смысл которой не поддается определению, ввиду непонятности одного термина, и которая, по предположению Нейгебауера, содержит указание на то, что на 2,42 нельзя делить. Впрочем, непосредственно вслед за этим на 2,42 производится деление; делить в действительности можно (число $2{,}42 = 162 = 2\cdot 3^4$ правильное), но... совершенно не нужно. Мы оставляем поэтому в стороне этот темный кусочек. Что бы он ни означал — дальнейшая выкладка от этого не меняется.

„Что ты должен взять с 2,42[1]), чтобы получилось 9? 0;3,20 ты должен взять. Обратное от 0;3,20 образовано. 18 получается“.

Итак, нужное число 18 получено; но как? Что это за число 9? Это, очевидно, либо длина AI, либо выражение $\frac{c}{\alpha+\beta}$, из которого было получено AI умножением на единицу. Но, если считать, что 9 это AI, то при $\alpha \neq 1$ процесс приведет к неправильному выводу. Остается принять, что 9 это найденное выше значение $\frac{c}{\alpha+\beta}$, которое, для краткости, обозначим через Δ.

Тогда длина B_1H_1 вычисляется по такому странному способу: сначала находится

$$\frac{c}{\alpha+\beta} : \left[\left(\frac{F_1}{\alpha} - \frac{F_2}{\beta}\right) : \frac{\alpha+\beta}{2}\right],$$

а затем находится обратная величина последнего выражения, т. е.

$$1 : \left\{ \frac{c}{\alpha+\beta} : \left[\left(\frac{F_1}{\alpha} - \frac{F_2}{\beta}\right) : \frac{\alpha+\beta}{2}\right] \right\}. \tag{12}$$

Нейгебауер, который в этой задаче видит блестящий образчик алгебраической техники вавилонян, замечает по поводу этого пункта: „Правда, это получается несколько обходным путем (вызванным исключительно техникой счета)“ [2]).

Это сказано очень деликатно. Я нарочно разобрал этот „обходный путь“ (Umweg) подробно (Нейгебауер в своих „Лекциях“ предпочел эту часть опустить), чтобы показать, что техникой счета этот обходный путь отнюдь не вызван. Гораздо легче было сразу вычислить

$$\left[\left(\frac{F_1}{\alpha} - \frac{F_2}{\beta}\right) : \frac{\alpha+\beta}{2}\right] : \frac{c}{\alpha+\beta}, \tag{13}$$

что эквивалентно (12). Но и это вычисление с точки зрения метода решения есть „обходный путь“, ибо (13) гораздо проще вычислить по формуле (10). Пусть теперь читатель взглянет на стр. 199—200 русского перевода „Лекций“ Нейгебауера, где помещены алгебраические преобразования, которым, по мнению Нейгебауера, следовал вавилонский автор, и сразу станет ясно, что человеку, владевшему таким аппаратом, не было труда проделать вычисление гораздо более коротко, чем это он сделал.

Значит, здесь не было планомерного решения системы уравнений, а было рассуждение, в котором постепенно вычислялись вспомогательные величины, которых введено больше, чем нужно. Каждый учитель средней школы знает, как обычны такие блуждания при решении арифметических задач „по вопросам“. Очевидно, и наш автор

[1]) То-есть „что нужно умножить на 2,42“.

[2]) „Лекции“, стр. 200; примечание.

решал эту задачу так же, и этот наш вывод нисколько не изменится даже и в том случае, если мы последний „обходный маневр“, наиболее бьющий в глаза своей бесцельностью, отнесем за счет ошибки переписчика, ибо и во всем остальном рассуждении чувствуется отсутствие методического начала [1]).

Рассмотрение остальной части решения всецело подтверждает эти выводы. Мы видели, что B_1H_1 есть BH, укороченная в α раз (черт. 2), или HD, укороченная в β раз. Поэтому

$$BH = B_1H_1 \cdot \alpha = 18 \cdot 1,$$
$$HD = B_1H_1 \cdot \beta = 18 \cdot 3.$$

Соответствующий текст гласит:

„18 на один помножается; 18 есть верхняя длина; 18 на 3 помножается; 54 есть нижняя длина“.

Теперь остается определить нижнюю и верхнюю „ширины“ CD и AB и „линию раздела“ GH. Так как их разности уже известны, то дело сводится к нахождению одной из них. В тексте определяется CD следующим образом: площадь всей трапеции $ABCD$ есть

---

[1]) Можно легко представить себе, какое рассуждение привело вавилонского вычислителя к изложенному в тексте способу определения B_1H_1. Он оставил без внимания тот факт, что длина A_1L_1 уже известна, и исходил из только что полученного результата, что A_1I_1 и I_1L_1 имеют общей мерой величину $\Delta = 9$, которая содержится в A_1I_1 $\alpha = 1$ раз, а в I_1L_1 $\beta = 3$ раза. Представим себе A_1I_1 и I_1L_1 разбитыми на α и β частей, соединим точки деления с G_1; получим $\alpha + \beta = 4$ треугольника („1 и 3, сложенные, 4“), которые по площади равны $\frac{\alpha+\beta}{2} = 2$ прямоугольникам („1/2 от 4 отломанная, 2“) с основанием $\Delta = 9$ и высотой B_1H_1. Общая площадь их $S = \frac{F_1}{\alpha} - \frac{F_2}{\beta} = 5{,}24$. Значит, площадь каждого прямоугольника есть $S : \frac{\alpha+\beta}{2} = 5{,}24 : 2 = 2{,}42$ („обратное от 2 образуй, 0;30. На 5,24 помноженное, 2,42 получается“). Какова же высота прямоугольника, площадь которого 2,42, а основание 9? Очевидно, 2,42 нужно разделить на 9. И вот здесь вычислитель выбирает „обходный путь“: он делит 9 на 2,42 и затем образует обратную величину. Результат, 18, очевидно, есть высота B_1H_1. Таким образом каждый шаг в выкладке соответствует совершенно элементарному „вопросу“; только постановка этих „вопросов“ делается непланомерно. Разумеется, мыслимы и иные интерпретации этих же шагов. Но все они будут в равной степени „не алгебраичны“. Замечу кстати, что С. Я. Лурье в примечании к тому месту „Лекций“ Нейгебауера, где говорится о рассматриваемой задаче, предлагает другую арифметическую реконструкцию; в основу ее положен метод ложного положения, который, по словам С. Я. Лурье, „скорее всего восходит к Вавилону“.

На чем основано последнее утверждение, — неясно. Но в особенности нужно отметить, что С. Я. Лурье, очевидно, не заметил, что предложенное им рассуждение ведет к несколько иному *порядку* действий, чем в вавилонском тексте, и что некоторые появляющиеся в его выкладках числа в вавилонском тексте совершенно не фигурируют. Лично мне представляется неестественным самое привлечение метода ложного положения к данной задаче.

$F_1+F_2=13{,}3+22{,}57=36{,}0$, а высота ее BD есть $BH+HD=$ $=18+54=1{,}12$. Эти вычисления в тексте не выполнены, но числа 36,0 и 1,12 входят в выкладку в такой связи, в которой они иного смысла иметь не могут. Именно, мы читаем:

„$^1/_2$ 36 отломи. Это 18; на 1,12 помножь. 21,36. От 36,0 отломи. 14,24“.

Первое число 36 есть, очевидно, разность между AB и CD, которая составляется из „того, чем верхняя ширина выдается над линией раздела, и того, чем линия раздела выдается за нижнюю ширину“; по условию задачи эта сумма есть $c=36$. Геометрически она представляется отрезком AL (черт. 2). Берется, значит, $\frac{AL}{2}=18$ и множится на $BD=CL=1{,}12$. Число 21,36 есть, следовательно, площадь треугольника ACL. Вычитание его из $36{,}0=F_1+F_2$ означает отнятие площади ACL из площади трапеции $ABCD$. Остаток 14,24 есть площадь прямоугольника $LBCD$. В нем известна высота $BD=1{,}12$ и, значит, можно определить основание $CD=14{,}24:1{,}12=$ $=12$; верхнее основание AB и линия раздела получатся прибавлением длин $AL=36$ и $GK=27$:

$$AB=CD+AL=12+36=48,$$

$$GH=CD+GK=12+27=39.$$

Это и описано в тексте:

„Обратное от 1,12, длины, образуй; 0;0,50. На 14,24 помножено; 12 получается. 12 к 36 прибавлено; 48 есть верхняя ширина. 12 к 27 прибавлено. 39 есть линия раздела. 12 это нижняя ширина“.

Этим заканчивается текст. Я привел его полностью, чтобы читатель мог сам судить о правомерности сделанных выше выводов. Вполне прав Нейгебауер, когда он заключает изложение этого примера словами: „этот текст является во всех отношениях особенно поучительным примером для суждения о характере собственно математических текстов“ [1]). Но никак нельзя согласиться с *его суждением* об этом характере. Вот оно:

„Формулировка, правда, еще геометрическая, но самое вычисление есть не что иное, как чисто алгебраическое определение неизвестных на основании данных соотношений. Вычисление ведется с величайшим изяществом и совершенно тем же методом, который применили бы и мы теперь... Особенно необходимо считаться с неизвестными, встречающимися здесь, как действительно неизвестные, в полном смысле слова, так как наше вычисление покоится на том, что известны соотношения между величинами, *сохраняющие свою силу во всех случаях, даже когда эти величины неизвестны* [2]). Это оперирование с величинами, которые должны удовлет-

---

1) „Лекции“, стр. 201.

2) В оригинале разрядка.

ворять известным соотношениям, причем эти величины численно неизвестны, в конце концов и является сущностью *алгебраического метода*".

Но как раз оперирования с неизвестными величинами, как с известными, мы в приведенном тексте вовсе не находим. Таким образом, вопреки Нейгебауеру, в *данной* задаче нет и следа алгебраических методов. Нетрудно убедиться в том, что и другой приводимый им пример [1]), в котором, якобы, решается система двух линейных уравнений с двумя неизвестными, столь же, если не в большей степени, превратно истолкован.

Отсюда, конечно, вовсе не следует, что вавилонской математике не были известны алгебраические методы. Если мы хотим найти элементы алгебраической техники в древности, если мы хотим найти их истоки и корни, то мы должны искать их не в тех вопросах, которые могут привести к линейным уравнениям, а в тех, которые ведут к уравнениям более высокой степени, в первую очередь квадратным. Это утверждение может показаться странным читателю, который в школе начинал изучение алгебры с одного уравнения с одним неизвестным, затем решал системы уравнений первой степени и лишь много времени спустя знакомился с квадратными уравнениями. Однако историческое развитие не всегда идет в том порядке, в каком излагается наука в школе. Вернее сказать, оно всегда совершается в ином порядке. Наши знания о первых этапах развития алгебры очень скудны; источники дают нам для всех стран то состояние этой науки, когда в ней уже сложились некоторые методы, хотя бы и примитивные. О том, как эти методы появились на свет, мы можем только догадываться. Но на относительно более поздних этапах мы повсюду наблюдаем „необычный" порядок развития науки. Так, например, школьная алгебра начинается с обозначения буквами произвольных величин. Затем выясняется, что некоторые из букв могут представлять искомые величины, и излагаются методы их нахождения. Историческое развитие идет иным путем: сначала алгебра занимается определением неизвестных величин по данным соотношениям между ними и известными, причем ни для тех, ни для других не существует символических обозначений. Эти последние появляются сначала только для неизвестных величин (сперва для одной только). Известные же величины задаются числами, хотя числа

---

[1]) Нейгебауер, Лекции, стр. 203—205 русского перевода.

Я могу не разбирать этого примера, так как в примечании переводчик, проф. С. Я Лурье, дал чрезвычайно простую арифметическую реконструкцию решения вместо реконструкции Нейгебауера, от формул которой, действительно „рябит в глазах". С. Я. Лурье не имел в своем распоряжении подлинного текста задачи Тем более замечательно, что в тексте не только ход выкладки, но и некоторые выражения делают трактовку С. Я. Лурье единственно возможной. См. „Математические клинописные тексты", т. 1, стр. 326—327. Только термин „метод ложного предположения", употребляемый С. Я. Лурье по отношению к предложенному им решению, кажется мне не вполне подходящим.

эти могут быть произвольными и взятые числа играют лишь роль примера. Хотя это обстоятельство и сознается отчетливо, однако символические, буквенные обозначения для известных величин появляются много позднее. Аналогичных примеров можно привести много.

Нужно думать, что и в отношении материала, к которому применялись алгебраические методы, историческая последовательность была отлична от той, к которой мы привыкли. Действительно алгебраические методы придумывались людьми не ради развлечения, а исходя из потребности решать определенный круг задач. Но те задачи, которые ведут к линейным уравнениям, более или менее свободно решаются с помощью синтетических рассуждений, в которых главная роль принадлежит действиям *над известными величинами*. Элементы алгебраических методов, содержащиеся, конечно, в решении сколько-нибудь сложной задачи, не выступают в сознании людей как нечто самостоятельное, как особый предмет исследования. Иное дело, когда начинают рассматриваться задачи более сложные, где путь „прямого" решения не виден по данным задачи. Тогда анализу задачи уделяется особое внимание, и этот анализ сам становится предметом изучения. Тогда-то и рождается „алгебра" в широком смысле слова, тогда начинают производить операции с неизвестной величиной так, как если бы она была известна; то, что для этих операций не сразу создается соответствующий аппарат (символические обозначения), — это вполне естественно; но еще до создания такого аппарата создаются приемы, которые уже содержат элементы „алгебраического метода".

Появление последнего, таким образом, должно обусловливаться „усложнением" задачи; „усложнением" не в том смысле, что условие ее становитья более громоздким, а в том, что разыскиваемая в задаче величина не выражается через данные посредством четырех действий арифметики, хотя и связана с ними с помощью этих действий. С этой точки зрения самая простая задача второй степени сложнее самой запутанной линейной задачи.

Но задачи второй степени появляются в практике прежде всего в связи с геометрическими вопросами. Уже простейшие задачи, имеющие дело с определением размеров прямоугольных фигур, связаны с решением вопросов, которые мы приводим к квадратному уравнению. Соотношение между сторонами прямоугольного треугольника, так называемая „Пифагорова" теорема, может также явиться источником задач второй степени. Здесь „арифметические" методы оказываются уже совершенно недостаточными, и здесь нужно ожидать появления более или менее развитых элементов алгебраических методов.

Естественно поэтому обратиться к рассмотрению тех задач, которые имеют „настоящее" геометрическое содержание, и в первую очередь к задачам, связанным с определением элементов прямоугольного треугольника.

§ 13. Геометрические задачи как источник и материал для применения алгебраических методов

Так называемая „Пифагорова“ теорема была известна вавилонянам еще в глубокой древности. Еще четыре года назад Нейгебауер считал возможным лишь „постулировать“ знакомство вавилонян с ней „на основании ряда мест из математических текстов“ [1]). Спустя немного времени в Луврском и Британском музеях были обнаружены тексты, позволяющие строго доказать этот постулат.

Вот интересующая нас задача Луврской таблицы [2]). В ней требуется определить количество зерна, необходимого для засева поля, имеющего форму равнобедренного треугольника. Для этого определяется сначала площадь треугольника. Наименования мер длины не дано; вероятно, за единицу длины принята „длина“ (uš), имеющая 720 локтей.

„Треугольник. 5 длина; 6 нижняя ширина. 5 на 5, длины, перемножь; 25. 3, половину нижней стороны, на 3 помножь; 9. 9 отними от 25. Остается 16. Что на что нужно помножить, чтобы 16 получилось? 4 на 4 помножь; 16. 4, высоту, на 3, половину нижней ширины, помножь; 12. 12 площадь“. Дальше следует расчет количества зерна; полученная площадь умножается на 0;21,36 и результат умножается еще на 1,48. Смысл этих множителей не установлен. Но интересно, что окончательный результат, который должен быть равен 7,46;33,36, округлен до 7,46;30 и затем частично выражен в десятичной системе. Именно, в тексте сказано, что это составляет „4 сотни, 1,6 и половину“, т. е. $400+60+6+{}^1/_2=466{}^1/_2$. Такой способ выражения указывает, повидимому, на то, что в обиходной практике десятичная система не была полностью вытеснена шестидесятеричной.

Интересно отметить, что тут мы имеем „египетский“ треугольник со сторонами 3, 4, 5; но зависимость между сторонами прямоугольного треугольника, как видно из текста, берется здесь в общем виде. В задаче таблицы Британского музея мы имеем треугольник иных размеров, но той же формы. Задача гласит [3]):

„Балка. 0;30 гар (т. е.) 1 ги. Наверху она опустилась на 0;6. Снизу (насколько она сдвинулась)?“

Условие нужно понимать так: балка длиной 1 ги $=\frac{1}{2}$ гар (гар $=$ $=12$ локтей) стояла вертикально в положении AB (черт. 6), а затем ее верхний конец B понизился на отрезок $BC=\frac{1}{10}$ гар. Спрашивается, насколько удалится нижний конец от прежнего положения по горизонтали, т. е. определению подлежит катет AD прямоугольного треугольника ADC, гипотенуза которого $CD=\frac{1}{2}$ гар, а другой катет

---

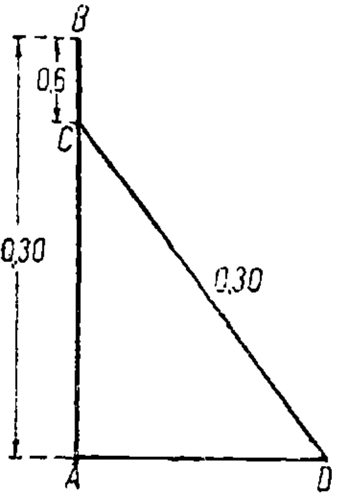
1) „Лекции“, стр. 52 русского перевода.
2) „Математические клинописные тексты“, т. I, стр. 100, строки 13—18.
3) „Математические клинописные тексты“, т. II, стр. 47—48.

$AC = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right)$ гар $= \frac{2}{5}$ гар. Вероятно, в качестве проверки, после решения этой задачи, решается обратная: по CD и AD определить BC.

Самое решение не требует комментариев:

„Ты: 0,30 возведи в квадрат; ты видишь 0;15. 0;6 отними от 0;30. Ты видишь 0;24. 0;24 возведи в квадрат; ты видишь 0;9,36.

0;9,36 от 0;15 отними. Ты видишь 0;5,24. 0;5,24 что имеет квадратным корнем? 0;18 квадратный корень. На 0;18 на земле она удалилась. Если 0;18 на земле, то насколько спустилась она сверху? 0;18 возведи в квадрат. Ты видишь 0;5,24. 0;5,24 отнято от 0;15. 0;9,36 видишь ты. 0;9,36 что имеет квадратным корнем? 0;24 квадратный корень. 0;24 от 0;30 отняв, ты видишь 0;6. На это она опустилась. Таков способ“.



Черт. 6.

Текст этой задачи свидетельствует о том, что так называемая „Пифагорова“ теорема „активно“ применялась при решении практических задач. Конечно, данная задача не является практической в подлинном смысле слова, так как ее числовые данные, несомненно, подогнаны, но вряд ли может быть сомнение в том, что в основе ее лежат технические расчеты, которые здесь приподнесены в форме учебного упражнения.

В том, что „Пифагорова“ теорема широко применялась при решении задач, убеждают нас и другие дошедшие до нас тексты. Особенно интересны в этом отношении две задачи, содержащиеся в очень большом клинописном тексте, принадлежащем Британскому музею. Этот текст был опубликован еще в 1900 г., но лишь 1928 г. он был связно прочитан и переведен Нейгебауером и Струве[1]). Он относится к середине второго тысячелетия до н. э. и содержит 35 задач, большинство которых облечено в форму технических задач из области строительного и военного дела. Ниже будет приведена характерная для этого текста „военная“ задача. По своему математическому типу и по степени трудности задачи очень разнокалиберны; во многих из них решение явно искажено, в других, напротив, довольно сложные расчеты проведены четко и точно. Очевидно, составитель „задачника“, частью которого служила описываемая доска, черпал задачи из разнообразных и различного качества источников. Но та задача, которую мы здесь имеем в виду, решена по существу безукоризненно, и изящнее, чем это сделано в вавилонском тексте, ее нельзя решить и сегодня. Однако изложение ее содержит ляпсусы, которые нужно отнести за счет некомпетентности компилятора.

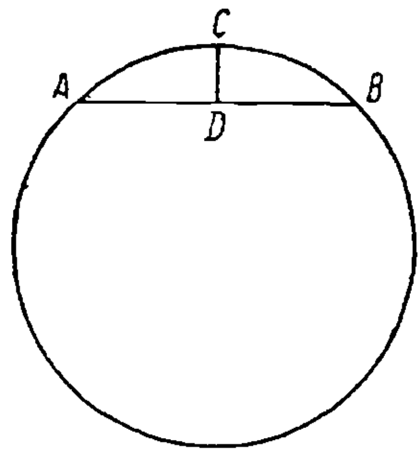
---

[1]) Quellen und Studien etc. Abt. B, т. I, стр. 81—92. Здесь дан, впрочем, не полный перевод. В „Математических клинописных текстах“ полный перевод текста этой доски занимает 8 с лишком страниц (т. I, стр. 152—164).

Чтобы приводимый текст был вполне понятен, нужно заметить, что в вавилонских текстах окружность считается втрое больше диаметра, иными словами, $\pi = 3$. „Формула" для площади круга имеет вид $S = \frac{p^2}{12}$, где p — длина окружности. Эта формула свидетельствует о том, что вавилонянам была известна точная зависимость

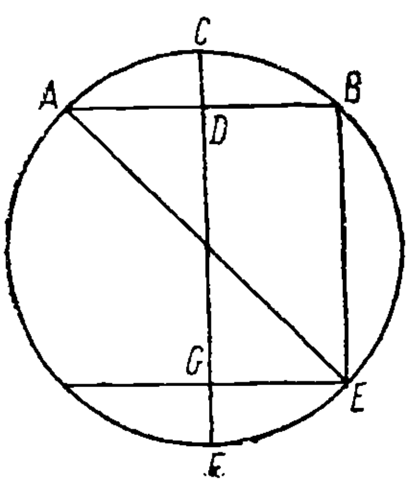
$$S = \frac{1}{2} rp,$$

ибо, если положить $\pi = 3$, то из формулы $S = \frac{1}{2}\, rp$ легко вытекает формула $S = \frac{p^2}{12}$.



Черт. 7.

Как мы видим, египтяне определяли площадь круга гораздо более точно (стр. 55). Нужно, впрочем, заметить, что из математических текстов лишь в одном, именно в том, о котором мы говорим, встречаются, правда, неоднократно[1]), вопросы, связанные с зависимостью между окружностью и диаметром. Ввиду сравнительно невысокого уровня, на котором стоит качество этого документа, не исключена возможность, что вавилонские математики знали и более точное значение числа π, но несомненно, что в практике постоянно пользовались значением $\pi = 3$.



Черт. 8.

После этих замечаний обратимся к интересующей нас задаче: в ней дается длина окружности $p = 1{,}0$ и длина $s = 2$ стрелки CD, относящейся к хорде AB (черт. 7). Требуется найти длину a этой хорды. Вычисление ведется так: сперва определяется диаметр круга d; этот шаг не сформулирован прямо, но он явно подразумевается, ибо диаметр в вычислении прямо назван равным 20 $\left(d = \frac{p}{\pi} = \frac{1{,}0}{3}\right)$.

Затем дается рецепт, эквивалентный формуле

$$a = \sqrt{d^2 - (d - 2s)^2},$$

которая, очевидно, получена из рассмотрения прямоугольного треугольника ABE (черт. 8), где $AE = d$; $BE = CF - CD - GF = d - 2s$. Это решение свидетельствует о том, что вавилонянам было известно, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, есть прямой. Таким образом можно констатировать, что вавилоняне обладали знакомством с рядом основных геометрических предложений.

[1]) Эти вопросы затрагиваются в восьми задачах нашего текста.

Вот текст вавилонской задачи:

„1,0 — окружность. 2 это то, на что я спустился. Что есть линия раздела[1])? Ты: 2 возведи в квадрат; 4 ты видишь; 4 от 20, диаметра, удалено. 16 ты видишь".

Здесь, на первый взгляд, мы имеем выражение $d - s^2$, а не $d - 2s$. При $s = 2$, однако, оба выражения совпадают, выражение же $d - s^2$ вообще не имеет геометрического смысла; нужно думать, что составитель здесь, как и в ряде других мест, допустил искажение[2]). Остальной текст задачи искажений не содержит. Автор продолжает:

„20, диаметр, возведи в квадрат; 6,40 ты видишь. 16 возведи в квадрат. 4,16 ты видишь. 4,16 удалено от 6,40. 2,24 ты видишь. У 2,24 что квадратный корень? 12 есть квадратный корень. Это линия раздела. Таков способ"[3]).

Вслед за этой задачей в тексте решается обратная: по данной хорде $a = 12$ и длине окружности $p = 1,0$ определить стрелку s. Ответ $s = 2$ получается по формуле

$$s = \frac{1}{2}\left(d - \sqrt{d^2 - a^2}\right).$$

В изложении опять имеется неточность указаний, на этот раз в другом пункте; деление же пополам $\frac{1}{2} \cdot 4$ теперь указано, как следует, а не представлено как извлечение квадратного корня из 4, что служит подтверждением, что и для первой задачи квалифицированный вычислитель дал бы четкое решение.

Обратим внимание на то, что и в этой задаче фигурирует треугольник со сторонами, пропорциональными 3, 4, 5! И все же общность решения такова, что можно не сомневаться в том, что имеется в виду общий случай, который иллюстрирован на излюбленном, специально подобранном, числовом примере. Естественно возникает вопрос, как должен был поступать вычислитель, встретившийся с задачей, подобной вышерассмотренной, в практическом вопросе, где, конечно, очень невероятно „чистое" извлечение квадратного корня.

§ 14. Извлечение квадратного корня

Выше указывалось (стр. 85), что многозначных таблиц квадратных корней, в которых вавилонский вычислитель мог бы найти подходящее приближение, мы не знаем; тогда же было высказано предположение, что вавилонянам был известен регулярный процесс извлечения квадратного корня. Прямого указания на применение этого процесса,

---

[1]) Здесь тот же термин *RI*, что в вышеприведенной задаче о трапеции (стр. 108). Нейгебауер переводит „хорда" (Sehne).

[2]) Что здесь действительно искажение, а не неправильное толкование текста Нейгебауером, явствует из того, что термину „возведи в квадрат" в вавилонском тексте соответствует выражение *KIL — KIL*, дважды повторяющееся в этой же задаче: для обозначения операции d^2 и $(d - 2s)^2$.

[3]) „Математические клинописные тексты", т. I, стр. 159.

как уже говорилось, мы не имеем. Но косвенным намеком на это может служить решение задачи, содержащейся в одном тексте, принадлежащем к древневавилонской эпохе, т. е. по времени более раннем, что только что рассмотренный. В нем вычисляется иррациональная диагональ прямоугольника со сторонами 0;40 и 0;10 гар. Однако здесь не образуется квадрат диагонали $(0;40)^2+(0;10)^2 = 0;28,20$ с тем, чтобы затем искать квадратный корень непосредственно из 0;28,20, а корень $\sqrt{(0;40)^2+(0;10)^2}$ вычисляется по данным величинам 0;40 и 0;10, из которых первая рассматривается, повидимому, как первое приближение к искомому корню. Конечно, всякое приближенное извлечение корня основывается на выделении из подкоренного числа близкого к нему полного квадрата; но в данном случае и в ему подобных, произведя сложение под корнем, можно найти лучшее приближение. Впрочем, познакомившись с тем, как вавилонский вычислитель производит извлечение корня $\sqrt{(0;40^2+(0;10)^2}$, мы увидим, что этот же метод может быть использован и для более быстрого выполнения излечения корня.

Вавилонский вычислитель решает задачу, составляя постепенно выражение $0;40+\frac{0;10^2}{2\cdot 0;40}$; иными словами, пользуясь приближенной формулой

$$\sqrt{a^2+b^2} \approx a + \frac{b^2}{2a}. \tag{14}$$

Вот текст задачи[1]):

„Ворота. $\frac{1}{2}$ гар и 2 локтя высота; 2 локтя ширина [2]). Их диагональ что? Ты: 0;10, ширину, возведи в квадрат. 0;1,40 площадь ты видишь. Обратное от 0;40 локтей[3]), высоты, образуй; на 0;1,40, площадь, помножь. 0;2,30 ты видишь. $\frac{1}{2}$ от 0;2,30 отломи. 0;1,15 видишь ты. 0;1,15 к 0;40, высоте, прибавь. 0;41,15 видишь ты. 0;41,15 их диагональ. Таков способ“.

Нетрудно видеть, что формула (14), по которой произведено вычисление в тексте, по существу совпадает с нашим способом извлечения приближенного корня из трех- и четырехзначных чисел (a^2 есть наибольший полный квадрат, заключенный в подкоренном числе после замены правой его грани нулями). Как была выведена формула (14) — сказать с достоверностью нельзя. Возможно, что подкоренное выражение $(0;40)^2+(0;10)^2$ рассматривалось как $(0;40)^2+2\,(0;40)\cdot\frac{(0,10)^2}{2\cdot(0;40)}$ и затем бралось избыточное приближение, дополнявшее это выражение до полного квадрата. Менее вероятным я считаю предположение Нейгебауера [4]), согласно которому в качестве

[1]) „Математические клинописные тексты“, стр. 282.
[2]) В дальнейшем все данные выражаются в гарах; 1 гар = 12 локтей.
[3]) Очевидная описка; нужно 0;40 гар.
[4]) „Лекции“, стр. 52—53 русского перевода.

первого недостаточного приближения для $\sqrt{a^2+b^2}$ бралось a; тогда $\frac{a^2+b^2}{a}$ должно быть избыточным значением, и более точное значение находилось путем образования среднего арифметического из этих двух приближений:

$$\sqrt{a^2+b^2} \approx \frac{1}{2}\left(a+\frac{a^2+b^2}{a}\right)=a+\frac{b^2}{2a}.$$

Правда, этот способ встречается у греческих авторов (Герон); однако не забудем, что при оперировании с численными даными нет необходимости производить преобразование выражения $\frac{1}{2}\left(a+\frac{a^2+b^2}{a}\right)$ к виду $a+\frac{b^2}{2a}$, ибо нисколько не труднее, и даже, напротив, проще произвести непосредственное деление и найти среднее арифметическое. Но тогда становится необъяснимым порядок действий, который мы наблюдаем в вавилонском тексте. Кстати сказать, у Герона, который применяет указываемый Нейгебауером способ, порядок действий именно такой, а не тот, что в вавилонском тексте[1]).

Интересно отметить, что в том же тексте, из которого мы заимствовали нашу задачу, имеется еще одна задача, совершенно совпадающая по условию с только что разобранной; но решена она иначе. Именно, диагональ того же прямоугольника со сторонами 0;40 и 0;10 вычисляется из выражения[2]) $0;40+2(0;10)^2\cdot 0;40$, т. е., очевидно, по формуле

$$\sqrt{a^2+b^2}\approx a+2ab^2. \tag{15}$$

Числовой результат 0;42,13,20, получаемый вавилонским вычислителем, не очень далек от предыдущего 0;41,15, но все же чувствительно грубее.

Существенно то, что он также избыточен (точное до третьего знака значение корня есть 0;41,13,51), так что непонятно, какими мотивами мог руководиться вычислитель, помещая после первого решения второе, худшее. Наконец, очевидно, что формула (15) вообще не верна ни при какой малости b относительно a, ибо в ней не соблюдена даже однородность размерности. Поэтому я полагаю, что здесь составитель, польстившись на случайно „открытое" им совпадение результатов (14) и (15) для данных чисел, решил показать учащемуся вдобавок к хорошему общепринятому способу свой способ, несомненно более простой[3]).

---

[1]) Об извлечении квадратного корня у Герона см. ниже, Гл. III, § 14.

[2]) „Математические клинописные тексты", т. I, стр. 282.

[3]) Нейгебауер („Лекции", стр. 53) придерживается другой точки зрения. Он полагает, что здесь в основе лежит продолжение процесса, предположенного им для формулы (14). Именно, за исходное приближение берется выражение (14) (оно избыточно). Деля на него подкоренное количество, получаем недостаточное приближение $(a^2+b^2):\left(a+\frac{b^2}{2a}\right)=\frac{2a^3}{2a^2+b^2}+\frac{2a^2b}{2a^2+b^2}$. На этом мы останавливаемся, т. е. не вычисляем среднего арифметического,

Среди большого материала клинописных математических текстов нам известен еще только один пример приближенного извлечения квадратного корня с значительной точностью. Замечу, что этот текст[1]) относится уже к эллинистической эпохе, так что не исключается возможность греческого влияния.

К сожалению, результат дан в вавилонском тексте без всякого пояснения относительно метода его получения. В задаче, о которой мы говорим, по длине диагонали квадрата находится его сторона, а затем, очевидно, в виде проверки, решается обратный вопрос. Текст гласит[2]):

„Диагональ квадрата 10 локтей. Определи длину квадрата. 10 на 0;42,30 помножь. 7,5 длина. 7,5 на 1;25 помножь"...

Конец строки поврежден. Результат последнего умножения будет 10;25, так что проверка не дает исходного числа. Очевидно множители 0;42,30 и 1;25 суть приближенные значения:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0;42,30; \qquad \sqrt{2} = 1;25.$$

Как получены эти значения?

По мнению Нейгебауера, они выведены тем же способом, по которому вычислялась диагональ прямоугольника в предыдущей задаче. За первое приближение бралось $\sqrt{2} \approx \frac{3}{2}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{2}{3}$; числа $\frac{3}{2}$ и $\frac{2}{3}$ взаимно обратны. Второе же приближение вычислялось по формулам:

$$\sqrt{2} = \sqrt{1;30^2 - 0;15} \approx 1;30 - \frac{0;15}{2\cdot 1;30} = 1;25, \tag{16}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{0;40^2 + 0;3,20} \approx 0;40 + \frac{0;3,20}{2\cdot 0;40} = 0;42,30. \tag{17}$$

и в первом члене полученного выражения в знаменателе отбрасываем b^3 ввиду его малости относительно $2a^2$; тогда получаем $a + \frac{2a^2b}{2a^2 + b^2}$ (15'). По мнению Нейгебауера, вычислитель пользуется именно этой формулой, но только он не выполняет деления на $2a^2 + b^2$ вследствие того, что эта последняя величина равна 0;55, т. е. приблизительно равна единице.

Эта точка зрения мне представляется абсолютно неприемлемой. Во-первых, преобразования, предполагаемые Нейгебауером, довольно сложны. Во-вторых, эти сложные преобразования совершенно бесцельны, ибо формула (15') вообще дает худший результат, чем (15). В-третьих, совершенно непонятно, почему в тексте никак не отражено вычисление $2a^2 + b^2$, ибо прежде, чем заменить единицей это выражние, нужно убедиться в том, что оно близко к единице. Но, если бы даже оно и было точно равно единице и если бы это и считалось самоочевидным, и в этом случае нужно было бы ожидать указания, что нужно разделить на 1; на ряде примеров мы видели, что вавилонские тексты всегда подобные указания делают.

[1]) Это тот самый текст, из которого мы заимствовали примеры на суммирование геометрической прогрессии и квадратов натуральных чисел.

[2]) „Математические клинописные тексты", т. I, стр. 100.

„При этом, — замечает Нейгебауер, — необходимо обратить внимание на то, что приближение для $\frac{1}{\sqrt{2}}$ не могло быть получено, как обратная величина для 1;25, так как 1;25 неправильное число“ [1]).

Весьма возможно, что именно значения $\frac{3}{2}$ и $\frac{2}{3}$ были выбраны в качестве первых приближений, но мне кажется, что здесь, где величина подкоренного числа прямо дана, нет оснований предполагать порядок вычисления, представляемый формулами (16) и (17). Во всяком случае, гораздо проще поступать по „способу Герона“, т. е. брать

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(1;30 + \frac{2}{1;30}\right) = 1;25, \tag{16'}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(0;40 + \frac{2}{0;40}\right) = 0;42,30. \tag{17'}$$

В пользу того, что вавилонский вычислитель не следовал формулам (16) и (17), говорит, пожалуй, и то, что формула (16) отличается от формулы (14) знаком. Кроме того, приближение $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0;42,30$ могло быть получено из приближения $\sqrt{2} \approx 1;25$ (или обратно). Действительно, 1;25 ровно вдвое больше, чем 0;42,30, так что вычислитель мог исходить из того, что $\sqrt{2} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Как бы то ни было, приближения, взятые в вавилонском тексте, довольно хороши: если перевести их в десятичные дроби, получим $\sqrt{2} \approx 1,4166...$ (вместо 1,4142...) и $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7083...$ (вместо 0,7071...).

§ 15. Геометрические задачи, приводящие к полному квадратному уравнению

Мы рассмотрели ряд задач, связанных с применением „Пифагоровой“ теоремы, и во всех их решение не было связано ни со сложными алгебраическими преобразованиями, ни с решением „полного“ квадратного уравнения.

Однако такие задачи, в которых применение „Пифагоровой“ теоремы приводит к полному квадратному уравнению, вероятно, существовали и, должно быть, играли не маловажную роль в развитии алгебраических методов. Об этом можно судить по задаче, содержащейся в том же тексте, из которого мы только что цитировали определение стороны квадрата: дается сумма длины, ширины и диагонали прямоугольника (40) и площадь его (2,0). Требуется определить стороны и диагональ. Решения, к сожалению, не дано, но сообщается ответ: 15,8 и 17.

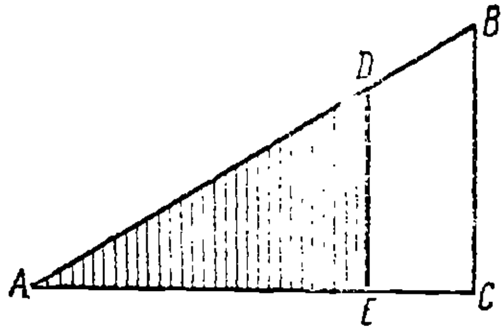
Напомню, что этот текст относится к эллинистической эпохе, и замечу, что у греческих авторов, например у Герона, имеются подобные

---

[1]) Нейгебауер Лекции, стр. 54—55.

задачи. Все же задача эта настолько „естественна“, что трудно допустить, чтобы подобные вопросы не возникали в более раннее время.

Но если бы это предположение и не соответствовало действительности, то на основании очень давних документов ясно видно, что вавилоняне в глубокой древности решали содержательные геометрические задачи, требующие сложных преобразований алгебраического характера и приводящие к полному квадратному уравнению. Выполняли ли они эти преобразования, решали ли квадратные уравнения? Или, быть может, обходили трудности путем прямого „арифметического“ решения, опирающегося на последовательное вычисление различных элементов фигуры?



Черт. 9.

На эти вопросы мы ответим лучше всего после того, как познакомимся с соответствующими текстами. Сначала возьмем текст, который относится к середине второго тысячелетия до н. э. и, значит, примерно на 1000 лет старше возникновения греческой математической науки[1]). В нем речь идет о сооружении осадной насыпи, вертикальный разрез которой дан на черт. 9. BC — стена вражеского города. DE — вертикальная плоскость, ограничивающая возведенную часть насыпи. EC — расстояние, остающееся до вражеской стены. Дается ширина $l = 6$ насыпи (на чертеже не показана); расстояние $EC = 8$; достигнутая высота $DE = 36$ и объем $V = 1,30,0$ земли, которая должна пойти на сооружение насыпи (включая и землю, уже употребленную на часть ADE). Требуется найти высоту BC городской стены и длину AC насыпи.

Обратим внимание на совершенно „нежизненную“ постановку вопроса. На практике ведь высота стены всегда является данной и объем земли берется применительно к этой высоте, а не наоборот. Нереально и то, что высота DE задана, между тем как длина AE неизвестна.

Но дело в том, что если поставить вопрос соответственно практическим условиям, то не получится квадратного уравнения! Мы видим, что в форму реальной задачи облекается совершенно нереальный вопрос — явление и доныне весьма распространенное во всевозможных задачниках. Это свидетельствует о том, что в эпоху составления текста уже создалась отвлеченная теория, для иллюстрации которой привлекался материал, взятый из жизни, но подвергнутый искусственной обработке.

Как и в вышерассмотренных задачах, численные данные здесь по существу произвольны и решение носит вполне общий характер.

---

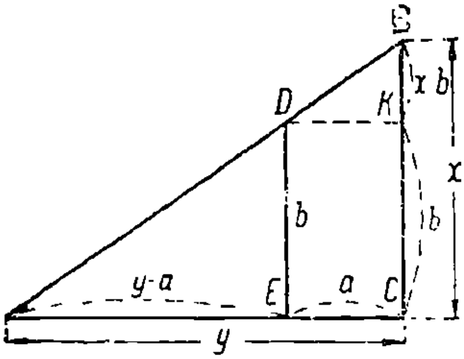
[1]) Задача взята из того же „задачника“, из которого мы заимствовали задачу об определении стрелки по хорде: „Математические клинописные тексты“, т. I, стр. 161.

Поэтому для лучшей ориентировки в решении мы введем вместо числовых заданий буквенные и положим

$$EC = a,\ DE = b\ (a = 8,\ b = 36).$$

Обозначим также через S площадь треугольника ABC; согласно условию $S = \frac{V}{l} = \frac{1,30,0}{6} = 15,0$[1]).

С этого вычисления площади S, очевидно, должно начинаться решение задачи, носящей по существу планиметрический характер. Оно действительно и производится в тексте с самого начала.



Черт. 10.

Посмотрим, как выглядело бы современное решение вавилонской задачи. Обозначим через x неизвестную высоту стены BC, а через y — неизвестную длину насыпи AC.

Тогда условие задачи дает (черт. 10)

$$\frac{1}{2}xy = S \tag{18}$$

и, из подобия треугольников ABC и DBK, получаем уравнение

$$\frac{y}{a} = \frac{x}{x-b}. \tag{19}$$

Исключая y из (18) и (19), получаем квадратное уравнение

$$ax^2 = 2S\,(x - b).$$

В приведенной форме оно имело бы вид:

$$x^2 - 2\frac{S}{a}x + 2\frac{S}{a}b = 0. \tag{20}$$

Отсюда мы нашли бы

$$x = \frac{S}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{a}\right)^2 - 2\frac{S}{a}b}. \tag{21}$$

При $S = 15,0 = 900$, $a = 8$, $b = 36$ мы получаем два решения:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{S}{a} + \sqrt{\left(\frac{S}{a}\right)^2 - 2\frac{S}{a}b} = 180,\\ x_2 &= \frac{S}{a} - \sqrt{\left(\frac{S}{a}\right)^2 - 2\frac{S}{a}b} = 45. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

[1]) Относительно мер, в которых выражены здесь длины и площади, нужно заметить следующее: согласно принятому у вавилонян способу измерения, длина и ширина выражаются в „гарах“, а высота в „локтях“ (1 гар = 12 локтей). При измерении площадей, лежащих в вертикальных плоскостях, единицей площади служит не „квадратный гар“, а „гар × локоть“. При измерении объемов единицей объема служит не „кубический гар“, а „сар“ = „гар² × локоть“. Таким образом площадь (и объем) вычисляется всегда единообразно: перемножением чисел, выражающих длину и высоту (или длину, ширину и высоту). В тексте все числа даны без наименований, кроме объема, который дан, как 1,30,0 „ган“. Это, повидимому, описка, ибо 1 ган = 100 сар, между тем как в вычислениях деление на 100 нигде не производится. Правильное чтение было бы: „1,30,0 сар“.

Вычисления вавилонского текста в точности совпадают в последней формулой. Первое решение игнорируется, вероятно, потому, что 180 локтей составили бы примерно 72 *м*, так что первое решение было бы просто несообразным.

Приведем теперь текст решения.

„Имея 1,30,0 ган[1]) земли, я возьму город, враждебный Мардуку[2]). 6 взял я за основание земляной массы, 8 — расстояние от стены; 36 высота земляной массы. Сколько должен я утоптать в длину[3]), чтобы взять город? И что есть длина позади крутизны? Ты: обратное от 6, основания земляной массы, образуй. 0;10 ты видишь. 0;10 на 1,30,0, земляную массу, помножь. 15,0 ты видишь[4]). Обратное от 8 образуй; 0;7,30 ты видишь. 0;7,30 на 15,0 помножь. 1,52;30 ты видишь[5]). 1,52;30 удвой. 3,45 ты видишь. 3,45 на 36 помножь. 2,15,0 ты видишь[6]). 1,52;30 возведи в квадрат. 3,30,56;15 ты видишь[7]). 2,15,0 от 3,30,56;15 удалено. 1,15,56;15. Что есть квадратный корень? 1,7;30 ты видишь[8]). 1,7;30 от 1,52;30 удалено. 45 ты видишь — высоту стены".

Мы видим, что вычисление действительно происходит по формуле (22). Никаких лишних шагов, подобных тем, которые мы отмечали в решении „линейных" задач! Остается еще определить длину насыпи y. Мы, конечно, стали бы ее определять из уравнения (18), которое дает

$$y=\frac{2S}{x}. \tag{23}$$

Вавилонский вычислитель находит y по формуле

$$y=S:\frac{x}{2}, \tag{23'}$$

по существу тождественной формуле (23), однако отличающейся порядком действий. Притом отличие это влечет за собой при вавилонской технике деления некоторое усложнение: формула (23) требовала бы трех операций (одно нахождение обратной величины и два умножения), а (23′) — четырех (два нахождения обратной величины и два умножения). Тот, кто провел кратчайшим путем вы-

---

[1]) См. предыдущее примечание.

[2]) Мардук — бог войны.

[3]) По смыслу задачи нужно было бы сказать „в высоту".

[4]) Здесь вычислено $\frac{V}{l}=15,0$.

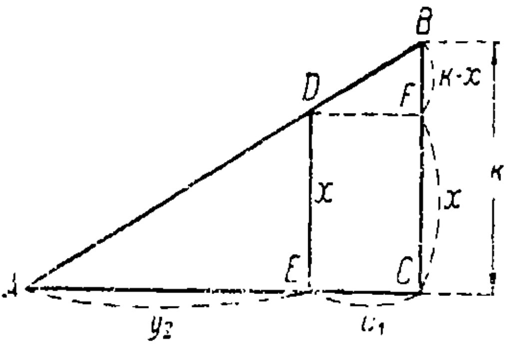
[5]) $\frac{S}{a}=1,52;30$.

[6]) $2\frac{S}{a}b=2,15,0$.

[7]) $\left(\frac{S}{a}\right)^2=3,30,56;15$.

[8]) $\sqrt{\left(\frac{S}{a}\right)^2-2\frac{S}{a}b}=1,7;30$.

числение корня квадратного уравнения, конечно, не затруднился бы найти кратчайший путь и в данном случае. Если он этого не сделал, то, очевидно, потому, что последняя часть решения выполнена „арифметически“; площадь S он нашел бы умножением основания на половину высоты[1]). Значит, для определения основания нужно площадь разделить на половину высоты. В соответствии с этим текст гласит: „½ от 45 отломи; 22;30 ты видишь. Обратное от 22;30 образуй. 0;2,40. 15,0 на 0;2,40 умножь. 40 длина“.



Черт. 11.

Наконец, выполняется проверка. Проверяется, однако, только первое условие — вероятно, потому, что второе (подобие треугольников) явно не содержится в формулировке задачи:

„Снова смотри 1,30,0, земляную массу. $^1/_2$ высоты на 40, длину, помножь. 15,0 ты видишь. 15,0 на 6 помножь. 1,30,0 видишь ты. 1,30,0 земляная масса. Таков способ“.

В качестве второго примера рассмотрим геометрическую задачу с более сложным условием. Решение ее, естественно, длиннее, но зато в нем можно обнаружить более явственные следы анализа, положенного в основу решения.

Содержание задачи таково[2]): прямоугольный треугольник ABC (черт. 11) разделен линией DE, параллельной BC, на две части: трапецию $DBCE$, площадь которой мы обозначим через S_1, и треугольник ADE, площадь которого мы обозначим через S_2. Требуется определить „высоты“ $EC = y_1$ трапеции и $AE = y_2$ треугольника ADE, „линию раздела“ $DE = x$, а также площади S_1 и S_2. Даны: „длина“ $BC = k = 30$; разность площадей $S_1 - S_2 = S = 7,0$ и разность „высот“ $y_2 - y_1 = d = 20$ (наименований мер нет). Если за всеми искомыми величинами сохранить введенные нами обозначения и записать все условия в виде уравнений, то мы получим следующую систему 5 уравнений с 5 неизвестными x, y_1, y_2, S_1, S_2:

$$S_1 = \frac{(k+x)y_1}{2}, \tag{24}$$

$$S_2 = \frac{xy_2}{2}, \tag{25}$$

$$S_1 - S_2 = S, \tag{26}$$

$$y_2 - y_1 = d, \tag{27}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x}{k-x}. \tag{28}$$

---

[1]) Что именно этому правилу следовал автор, видно из нижеприведенной проверки.

[2]) „Математические клинописные тексты“, т. I, стр. 342—343.

Последнее уравнение вытекает из подобия треугольников ADE и DBF. Если бы мы стали решать эту систему, то прежде всего подставили бы выражения S_1 и S_2 из (24) и (25) в уравнеиие (26) и, таким образом, получили бы систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\frac{(k+x)\,y_1 - xy_2}{2} = S, \tag{26'}$$

$$y_2 - y_1 = d, \tag{27}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x}{k-x}. \tag{28}$$

Разумеется, уравнение (26′) получается и непосредственно из условия задачи, и нет никаких оснований думать, что вавилонский вычислитель рассматривал здесь систему пяти уравнений как таковую. Я хотел только отметить, что естественно ожидать, что величины S_1 и S_2 будут определены из (24) и (25) уже после того, как будет решена система уравнений (26′), (27), (28). Это и имеет место в действительности.

Для решения системы (26′), (27), (28) проще всего выразить два неизвестных через третье с помощью двух уравнений нашей системы и подставить их выражения в неиспользованное уравнение. Результирующее уравнение с одним неизвестным будет квадратным; решив его, подставим найденное значение третьего неизвестного в выражение первых двух. Можно утверждать, что вавилонский автор так и решал задачу. Действительно, решение начинается с рецепта, который можно передать с помощью наших обозначений формулой

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{S}{d}+k\right)^2 + \left(\frac{S}{d}\right)^2\right]} - \frac{S}{d} = 18. \tag{29}$$

Совершенно очевидно, что x определено из квадратного уравнения. Для определения остальных двух неизвестных даются рецепты, соответствующие формулам:

$$y_1 = (k-x)\frac{S}{\frac{1}{2}\,k^2 - x^2} = 40, \tag{30}$$

$$y_2 = y_1 + d = 1{,}0. \tag{31}$$

Эти выражения *в точности* (за одним исключением, о котором будет ниже сказано) передают числовые выкладки текста. Читатель, имевший возможность на многих примерах познакомиться со стилем вавилонских математических текстов и составить себе представление о характере соответствия даваемых там правил с формулами, которыми мы их выражаем, не будет в обиде, если я на этот раз не буду приводить дословного перевода, который занял бы целую страницу.

Сравнительная сложность выражения (30) имеет для нас очень важное значение; мы можем с уверенностью сказать кое-что о методе, которым было получено решение.

В самом деле, каким бы методом ни решалась наша задача, окончательное выражение для первой из найденных величин (в нашем случае x) должно быть *существенно* одним и тем же; различия могут быть только в порядке выполнения операций, во все выражения для этой величины должны быть тождественны (в алгебраическом смысле слова). Совсем иначе обстоит дело с выражением других неизвестных. Они, вообще говоря, могут быть не тождественными друг другу, ибо все зависит от того, в каком порядке велось их исключение. Мы могли бы, например, решать нашу систему так: из уравнения (27) определим y_2 через y_1:

$$y_2 = y_1 + d.$$

Это соответствует формуле (31), которой следует наш текст. Затем подставим найденное выражение y_2 в (28); получим

$$\frac{y_1 + d}{y_1} = \frac{x}{k - x},$$

откуда получается:

$$y_1 = \frac{d(k - x)}{2x - k}. \tag{32}$$

Подставляя это выражение в (26′), в котором предварительно y_2 заменено на $y_1 + d$, мы получим квадратное уравнение, которое можно преобразовать к виду

$$x^2 + \frac{2S}{d}x - \left(k\frac{S}{d} + \frac{1}{2}k^2\right) = 0. \tag{33}$$

Мы написали бы решение этого уравнения в виде:

$$x = -\frac{S}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{d}\right)^2 + k\frac{S}{d} + \frac{1}{2}k^2}. \tag{29′}$$

Решение вавилонского текста, хотя и не совпадает с этим в смысле порядка операций, но алгебраически тождественно ему. Формула же (30), по которой в вавилонском тексте определяется y_1, существенно отлична от нашей формулы (32). Это значит, что вавилонский вычислитель шел не тем путем, который мы наметили. Отсутствие в формуле (30) величины d показывает, что уравнение (27) не было вовсе привлечено; значит, исключение величины y_2 было выполнено с помощью уравнений (26′) и (28). Нетрудно убедиться в том, что, исключив y_2 из этих двух уравнений, мы действительно получим для y_1 выражение (30).

Такой метод решения можно признать нерациональным, ибо он и сложнее, и дает для y_1 менее удобное выражение. Но именно потому, что он сложнее и что он не использует совершенно „наглядного“ соотношения (27), можно *безошибочно вывести заключение, что вавилонский вычислитель шел „алгебраическим“, а не „арифметическим“ путем.*

Действительно, при „арифметическом" решении задачи естественнее всего с самого начала использовать простейшие и наиболее бросающиеся в глаза зависимости, а таковые в данной задаче бесспорно дает формула (27), не используемая вавилонским автором в начале решения. При алгебраическом же решении все зависимости (уравнения) принципиально равноправны. Конечно, и здесь лучшим решением будет наиболее „изящное", при котором в максимальной степени используются индивидуальные особенности данной системы уравнений. Тем не менее, сплошь и рядом в практике решения уравнений мы можем наблюдать, что при соблюдении общих правил преобразований упускаются из виду те или иные индивидуальные особенности данной системы, которые могли бы значительно упростить решение. Вот почему констатированный нами путь выкладок вавилонского текста делает гораздо более вероятным, что метод решения был здесь аналитическим, а не синтетическим.

Выше отмечалось, что порядок действий в вавилонском тексте при определении величины y_1 несколько иной, чем в нашей формуле (30). Теперь мы укажем, в чем состоит отличие: вычисление $\frac{1}{2}k^2$, стоящего в знаменателе формулы (30), производится странным способом; именно, берутся числа $\frac{S}{d}+k=51$ и $\frac{S}{d}=21$, найденные прежде при вычислении x по формуле (29), и производится вычитание $51-21=30$. О том, что это 30 есть данная „ширина" k, не упоминается. Эта разность делится пополам: $\frac{30}{2}=15$, и производится умножение $30\cdot\frac{30}{2}=7{,}30$, так что вместо $\frac{1}{2}k^2$ в формуле (30) вернее было бы написать

$$\left[\left(\frac{S}{d}+k\right)-\frac{S}{d}\right]\cdot\frac{1}{2}\left[\left(\frac{S}{d}+k\right)-\frac{S}{d}\right].$$

Что же касается множителя $k-x$ в той же формуле, то он определен прямо, как „то, чем высота 30 выдается за линию раздела 18".

Я склонен думать, что упомянутую особенность текста следует объяснить скорее неудачным изложением, чем существенной особенностью метода. Как бы то ни было, я не мог пройти мимо этого отличия.

Интересно обратить также внимание на отличие внешнего вида вавилонской формулы

$$x=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{S}{d}+k\right)^2+\left(\frac{S}{d}\right)^2\right]}-\frac{S}{d} \tag{29}$$

от нашей

$$x=\pm\sqrt{\left(\frac{S}{d}\right)^2+k\,\frac{S}{d}+\frac{1}{2}k^2}-\frac{S}{d}\,. \tag{29'}$$

Ясно, что в вавилонском тексте, где ищется существенно положительная величина x, не может быть речи о двух знаках квадратного корня. Но чрезвычайно интересно то, что подкоренное выражение представлено в виде полусуммы двух полных квадратов. Получено ли это выражение путем преобразования подкоренного выражения в формуле (29)? Или оно получено непосредственно благодаря каким-либо не учтенным нами особенностям решения?

Нейгебауер, разбирая эту задачу[1]), ограничивается констатированием тождества формул (29) и (29′): „если преобразовать дискриминант в сумму двух квадратов, то получается непосредственно формула текста". Повидимому, он не придает большого значения этому преобразованию, а также тому, в какой именно форме результат был непосредственно получен. Напротив, С. Я. Лурье, комментируя это место „Лекций" Нейгебауера, делает ударение на указанном отличии: „непонятно", — говорит он, — „для чего бы составитель задачи, если бы он получил то же решение, что и Нейгебауер, стал усложнять его, преобразуя в сумму квадратов... Различный вид решения заставляет считать, что Нейгебауер и вавилонянин шли различными путями"[2]).

Считая реконструкцию Нейгебауера „в корне неправильной", проф. Лурье „уверен, что на той стадии, на которой находилась вавилонская математика, решение задач на квадратные уравнения могло при доказательстве осмысливаться только геометрически, так, как это было в Египте и в Греции"[3]).

Замечу, что о „доказательстве" в вавилонской математике мы вообще решительно ничего не знаем, так же, как и о доказательствах в египетской математике. В греческой математике доказательства *геометрических* предложений ведутся действительно геометрически, т. е. всем нашим операциям над числами, выражающими линии и площади, там отвечают преобразования отрезков и площадей. Но нас ведь интересует не доказательство, а анализ решения задачи, а об анализе греков мы знаем не больше, чем об анализе вавилонян. Таким образом и аналогия с Грецией ничего нам дать не может. Мы должны стараться прочесть анализ из самого решения, и в этом отношении скорее о греческой математике следует судить по аналогии с вавилонской и египетской, несомненно оказывавших на греческую математику влияние, — в этом мы будем не раз иметь случай убеждаться.

Что же касается вавилонских решений, то мы видели, насколько яркую арифметическую окраску они имеют. Можно ли думать, что анализ велся в геометрической форме? Проф. С. Я. Лурье полагает, повидимому, что да. Это видно и из его статей[4]), и из примечаний к работе Нейгебауера. В частности, по поводу только что изложен-

---

[1]) „Лекции", стр. 206—207 русского издания. См. также „Математические клинописные тексты", т. I, стр. 344—345.

[2]) Там же, стр. 208, примечание.

[3]) Предисловие переводчика к „Лекциям" Нейгебауера, стр. 8—9.

[4]) „К вопросу о египетском влиянии на греческую геометрию". Архив истории науки и техники, т. I, стр. 48—70; в особенностя „Приближенные вычисления в древней Греции", там же, т. IV, стр. 21—46.

ной задачи он замечает: „я не расшифровал еще вавилонского решения..., но для меня уже теперь наиболее вероятно следующее [1]): 1) что, получая $\frac{S}{d}$, составитель находил сторону некоторого прямоугольника по данной площади S и стороне d; 2) что сумма квадратов под корнем символизирует нахождение некоторой гипотенузы по данным катетам; 3) что решение текста чрезвычайно легко и просто переводится на язык геометрии, и это вряд ли может быть случайностью“ [2]). Прилагается геометрическое построение, которое шаг за шагом отвечает формуле (29). Но совершенно непонятным остается, какое отношение это построение имеет к решению задачи. У греческих авторов, где задачи формулируются геометрически (постоить отрезок, удовлетворяющий определенным требованиям), естественно и решение дается в геометрической форме. Но для того, чтобы *доказать*, что это решение отвечает условию задачи, греческий математик выполняет геометрические преобразования, соответствующие нашим алгебраическим операциям. Так, вместо преобразования $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ он преобразует площадь квадрата в сумму площадей двух меньших квадратов и двух прямоугольников; решение задач, приводящих к квадратному уравнению, сводится к дополнению некоторой фигуры до полного квадрата и т. д. И когда оказывается, что искомая величина есть сторона квадрата, площадь которого можно геометрически преобразовать в сумму площадей квадратов с известными сторонами, на сцену выступает „Пифагорова“ теорема, с помощью которой осуществляется самое построение. Но эта теорема не имеет никакого отношения к производимым преобразованиям, носящим, таким образом, вполне „алгебраический“ характер; только производятся они не над числами, а над геометрическими величинами. Но их можно всегда перевести на язык числовых операций и, обратно, всякие тождества арифметического характера можно перевести на геометрический язык. Иногда они становятся при этом легче обозримыми благодаря наглядности, которая им сообщается. Скажем, тождество $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ при его геометрической интерпретации приобретает совершенно очевидный характер.

Поскольку взаимная связь между арифметическими и геометрическими операциями была вполне ясна вавилонянам, совершенно не исключается возможность, что и они пользовались геометрическими фигурами для облегчения преобразований. Но никакой *принципиальной* трудности перехода от числовых соотношений к геометрическим они не могли испытывать. Греки изгоняли арифметическую трактовку из геометрии не потому, что они не умели мыслить арифметически, а потому, что они хотели достичь логической безупречности. Всякий прямоугольник они могли логически безупречно преобразовать в квадрат; но произведение чисел 2 и 3 они не могли

[1]) Обозначения изменены мною применительно к введенным выше.
[2]) Примечание на стр. 208 „Лекций“ Нейгебауера.

логически безупречно представить в виде квадрата числа: $\sqrt{6}$ они не хотели и не могли считать за число.

Как видно из приведенных задач, вавилонские вычислители не разрывали связи между арифметикой и геометрией, а потому не имеет принципиального интереса вопрос о том, в какой форме выполнялись преобразования при решении задач. Определял ли вавилонский вычислитель, находя $\frac{S}{d}$, сторону „некоторого прямоугольника"? Я думаю, что нет, что он находил только число $\frac{7,0}{20} = 21$. Но пусть он определял сторону прямоугольника. Что же это за прямоугольник; как его стороны связаны с элементами нашей фигуры? Если нам покажут эту связь, то мы немедленно сможем выразить ее в форме чисто арифметической. Если она в геометрической форме будет более наглядной, я охотно допущу, что вавилонянин чертил или воображал при анализе решения геометрическую фигуру. Но только вряд ли при наличии сложных соотношений, какие мы имеем в последней нашей задаче, геометрическое изображение могло существенно облегчить дело: если в простых случаях фигура делает числовые соотношения легче обозримыми, то при сложных операциях геометрическая интерпретация скорее затрудняет, чем облегчает охват предмета. Числа же могут лучше фиксировать операцию; мы видели, что в вавилонских вычислениях они играют ту же роль, что наши буквы.

Что касается утверждения С. Я. Лурье о применении „Пифагоровой" теоремы, то надобность в ней совершенно отпадает, коль скоро нам нужно не *построить* циркулем и линейкой сторону квадрата, а лишь вычислить ее.

Как же в таком случае объяснить, что величина x выражена формулой (29), а не (29′)? Мне кажется, что здесь мы действительно имеем *преобразование* подкоренного выражения (29′). Я не нахожу, чтобы замена формулы (29′) формулой (29) хоть сколько-нибудь усложняла выкладку; напротив, словесное выражение выкладки она, пожалуй, даже облегчает. Во всяком случае, для вавилонского математика такое преобразование не представляло никаких трудностей: каким бы методом он ни решал квадратное уравнение, в той или иной форме он должен был произвести дополнение до полного квадрата, так что подобного рода преобразование он умел произвести; а в подкоренном выражении (29′) два последних члена прямо напрашиваются на то, чтобы их дополнить до полного квадрата числом $\frac{1}{2}\left(\frac{S}{d}\right)^2$, т. е. половиной первого члена.

Но в конце концов не столь важно разгадать, как именно поступал вавилонский математик при решении данной задачи. Важнее ответить на вопрос, какими средствами он *мог* располагать для решения ее. И на этот вопрос я со всей категоричностью отвечаю: те алгебраические преобразования, которые мы выше приписали вавилонскому вычислителю, были ему действительно доступны и привычны.

§ 16. Отвлеченные задачи, приводящие к квадратному уравнению. Системы уравнений и методы их решения

Чтобы в этом убедиться, мы должны обратиться к отвлеченным задачам, дошедшим до нас в очень большом количестве. В этих задачах данными и искомыми являются „чистые" числа. Правда, искомые числа часто именуются „длиной" и „шириной", а произведение их „площадью". Но что это лишь термины, связанные с прямоугольником не в большей мере, чем наш термин „квадрат" (в смысле произведения двух равных чисел) связан с геометрическим квадратом, видно хотя бы из того, что сплошь и рядом площади прибавляются к длинам и ширинам, что является абсурдным с геометрической точки зрения.

Конечно, при желании непременно видеть во всех таких задачах задачи геометрические, можно „подразумевать" умножение на единицу, толкуемую как отрезок, повышающий размерность того или иного члена. Однако натянутость такого подхода обнаруживается сейчас же при рассмотрении задач. Сверх того, во многих текстах для обозначения неизвестных употребляются и особые термины, связанные не с геометрическими, а с арифметическими операциями. Мы имеем в виду те задачи, в которых ищутся значения двух неизвестных x и y, связанных соотношением

$$xy = 1, \tag{34}$$

и еще другим, вид которого бывает весьма разнообразным.

Для таких неизвестных употребляются обозначения igû и igibû. Мы встречали термин igi в таблицах обратных значений, где igi 3 означало число, обратное 3, получаемое делением 1 : 3. Нейгебауер переводит igû термином „делитель", а igibû — „делимое", очевидно, желая сохранить в обоих случаях коренную основу слова „деление". Но по математическому смыслу терминов igû и igibû (первоначальное их значение нам неизвестно) лучше переводить igû — множимое, igibû — множитель. Этими терминами я и буду в дальнейшем пользоваться.

„Множимым" называется всегда большее из чисел x, y, „множителем" — меньшее. Мы будем считать x множимым, а y множителем. Простейшей задачей указанного типа является определение множимого и множителя, связанных, кроме соотношения (34), соотношением

$$x + y = a. \tag{35}$$

Ряд задач этого типа мы находим в позднем тексте эллинистической эпохи [1]). В древневавилонских текстах содержатся вполне аналогичные задачи с более сложными вторыми зависимостями. Поэтому-то мы и начинаем с рассмотрения позднего текста.

---

[1]) В том самом, из которого мы цитировали уже ряд задач (стр. 123, 124).

Решения всех этих задач следуют формулам:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1},$$
$$y = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1}. \qquad (36)$$

Для примера приведем текст одной из задач, в которой a взято равным 2;3 [1]). Условие (34), как вытекающее из смысла самых терминов igû и igibû, не формулируется.

„Множимое и множитель 2;3. На 0;30 умножь. 1;1,30. 1;1,30 на 1;1,30 умножь. 1;3,2,15. 1 вычти отсюда. Остается 0;3,2,15. Что на что нужно умножить, чтобы получилось 0;3,2,15? 0;13,30 на 0;13,30 умножь. 0;3,2,15. 0;13,30 к 1;1,30 прибавь. 1;15 множимое. 0;13,30 от 1;1,30 вычти; 0;48 множитель".

Дословно также изложено решение и других трех задач того же типа, содержащихся в этом тексте. Только вместо $a = 2;3$ взяты другие числа, приводящие к более длинным промежуточным результатам. В следующей таблице изображены этапы выкладок.

a	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1$	$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1}$	x	y
2;0,15	0;0,15,0,56,15	0;3,52,30	1;4	0;56,15
2;5,26,40	0;5,34,4,37,46,40	0;18,16,40	1;21	0;44,26,40
2;0,0,33,20	0;0,0,33,20,4,37,46,40	0;0,44,43,20	1;0,45	0;59,15,33,20

Уже одного взгляда на эту таблицу достаточно, чтобы видеть, что едва ли не главной целью помещения четырех совершенно тождественных по содержанию задач было дать упражнение на извлечение квадратных корней. И снова ясно, что никаких таблиц нехватило бы для отыскания нужных результатов, так что вновь подтверждается наше предположение, что вавилоняне знали систематические способы извлечения квадратного корня.

Перейдем теперь к вопросу о методе, которым вавилонский вычислитель решает систему уравнений (34) и (35). Если сравнить только что приведенное решение с решением первой из задач предыдущего параграфа (о сооружении осадной насыпи), то бросается в глаза следующее обстоятельство. И там, и здесь одно из условий имело вид $xy = k$ (там $k = 2S$, здесь $k = 1$). Но там неизвестное y, после того как x было определено, находилось из условия $\frac{1}{2}xy = S$; здесь же для нахождения второго неизвестного y не используется

---

[1]) „Математические клинописные тексты", стр. 101.

ни условие $xy=1$, ни условие $x+y=a$. Это позволяет нам предположить, что первым этапом решения вовсе не было определение неизвестной x, а что как x, так и y были выражены при решении задачи через некоторое вспомогательное неизвестное (параметр) z, которое, повидимому, представлялось выражением $z=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-1}$

В этом предположении ход решения представляется таким: сумма множимого и множителя должна составить a; поэтому насколько множимое больше половины a, настолько же множитель меньше этой половины. Обозначим через z соответствующую разность, так что

$$x=\frac{a}{2}+z,\qquad y=\frac{a}{2}-z. \tag{37}$$

Условие (34) запишется теперь так:

$$\left(\frac{a}{2}+z\right)\left(\frac{a}{2}-z\right)=1 \quad \text{или} \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2-z^2=1,$$

откуда

$$z=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-1}.$$

Теперь совершенно естественно найти x и y из (37), что и дают формулы (36).

Как мы видим, при указанном методе решения (и только при нем) становится вполне понятной форма решения, единообразно проведенная в тексте. Но и помимо этого можно привести ряд доводов в пользу изложенной гипотезы.

Во-первых, у Диофанта мы находим именно такое решение задачи более общего типа: по данной сумме и произведению чисел найти эти числа[1]). Решение проведено на числовом примере, с обычным для Диофанта выражением всех неизвестных через один параметр; этот параметр и его степени имеют символическое обозначение, и операции над выражениями, содержащими эти символы, выполняются по существу так же, как выполняем их и мы. Время жизни Диофанта нам неизвестно в точности. Обычно его относят к III веку н. э. Но во всяком случае он жил не ранее, чем во II веке до н. э. Таким образом влияние вавилонской математики на него не может быть исключено.

В сущности говоря, тот же метод, только в геометрической форме применяет и Евклид, когда он решает задачу о построении прямоугольника с данной суммой сторон и данной площадью[2]). Таким

[1]) Диофант, Арифметика, книга I, задача 27.

[2]) Я имею в виду 28 предложение VI книги „Начал", где задача сформулирована в еще более общей форме: вместо прямоугольника рассматривается параллелограм, и постоянным является выражение типа $x+ky$, где x и y — стороны параллелограма, а k — данное отношение отрезков.

образом в древнегреческой математике мы находим образцы применения предположенного нами метода.

Решающим доводом, разумеется, это обстоятельство служить не может, и мы должны искать подтверждения или опровержения нашей гипотезы в вавилонских источниках, и притом в текстах ранних эпох. Оказывается, что эти источники содержат немало данных в пользу нашей гипотезы. Начнем с текста древневавилонской эпохи, содержащего две однотипные отвлеченные задачи; в одной из них разыскиваются множимое и множитель по условию

$$m\frac{x+y}{n}-y=k \tag{38}$$

с данными $m=6$, $n=13$, $k=0;20$.

Конечно, подразумевается условие

$$xy=1. \tag{34}$$

Решение следует такому пути: сначала находятся два числа, именуемые „первое" и „второе" и обозначаемые нами x_1, y_1 по правилу:

$$\begin{aligned} x_1&=\sqrt{\left(\frac{nk}{2}\right)^2+m(n-m)}+\frac{nk}{2}, \\ y_1&=\sqrt{\left(\frac{nk}{2}\right)^2+m(n-m)}-\frac{nk}{2}. \end{aligned} \tag{39}$$

Затем из найденных x_1, y_1 определяются множимое и множитель по правилу

$$\begin{aligned} x&=\frac{x_1}{m}, \\ y&=\frac{y_1}{n-m}. \end{aligned} \tag{40}$$

Здесь мы, следовательно, имеем прямое указание на то, что искомые определяются не непосредственно из квадратных уравнений, их определяющих, а с помощью *вспомогательных величин*, т. е. мы имеем применение того же метода „параметрического" выражения искомых величин, который мы предположили в предыдущей задаче. Цель, которую преследует это параметрическое представление, выясняется сразу, если мы подставим выражения (40) в уравнения (38) и (34), определяющие x, y. Мы получим тогда уравнения:

$$\begin{aligned} x_1-y_1&=nk, \\ x_1y_1&=m(n-m). \end{aligned} \tag{41}$$

Мы видим, что x_1, y_1 — это неизвестные, для которых известны их разность и произведение; формулы (39), по которым эти неизвестные находятся, соответствуют формулам (36) предыдущей задачи. Мы можем поэтому и здесь предположить рассуждение, аналогичное вышеприведенному, только на этот раз в качестве параметра z мы возьмем не полуразность, а полусумму неизвестных, так что

$$\begin{aligned} x_1 &= z + \frac{nk}{2}, \\ y_1 &= z - \frac{nk}{2}. \end{aligned} \tag{42}$$

Этим удовлетворяется первое из соотношений (41), второе же обращается в

$$z^2 - \left(\frac{nk}{2}\right)^2 = m(n-m),$$

откуда

$$z = \sqrt{\left(\frac{nk}{2}\right)^2 + m(n-m)}.$$

Подставляя это выражение в (42), получим (39).

Заметим, что у Диофанта именно так решается задача: по данной разности и произведению двух чисел найти эти числа[1]). У Евклида применяется тот же метод в геометрической форме при решении задачи о построении прямоугольника с данной разностью сторон и площадью[2]).

Чтобы заключения наши не казались произвольными, попытаемся восстановить анализ решения; для большего соответствия со стилем подлинника будем оперировать данными численными значениями m, n, k. Условие гласит, что тринадцатая часть суммы делителя и делимого берется 6 раз, отсюда отнимается делимое, и получается 0;20:

$$6\,\frac{x+y}{13} - y = 0;20.$$

„Освободимся от знаменателя"; это может быть сделано путем простого вычисления: если взять 6 раз не тринадцатую часть суммы множимого и множителя, а всю эту сумму, и соответственно отнять 13 делимых, то получится $13 \cdot 0;20 = 4;20$. Но 6 раз взятая сумма x и y без $13y$ составляет $6x$ без $7y$ („приведение" подобных членов):

$$6x - 7y = 4;20.$$

Итак, дана разность двух величин: $6x$ и $7y$. Но дано и их произведение, ибо $6x \cdot 7y = 42xy = 42$. Для определения указанных величин учтем, что раз „первая" больше „второй" на 4;20, то они могут быть получены из средней арифметической — первая прибавлением половины числа 4;20, т. е. 2;10, а вторая — отнятием 2;10. Вопрос сводится к определению средней арифметической z из условия

$$(z + 2;10)\,(z - 2;10) = 42.$$

---

[1]) Диофант, Арифметика, книга I, задача 30.

[2]) Евклид, Начала, книга VI; предложение 29. Здесь, как и в предложении 28, задача взята в более общем виде (см. примечание 2 на стр. 137).

Преобразонание левой части в разность квадратов не должно было представить никаких затруднений; если кто полагает, что для этого непременно нужно было воспользоваться геометрическим чертежом, пусть будет так, хотя я и сомневаюсь в том, что это внесло бы облегчение[1]). Но и в этом случае немедленно должен был следовать обратный переход к числам. Итак, параметр определялся с помощью извлечения корня из суммы $42+(2;10)^2=46;41,40$. Получалось 6;50. Прибавляя и отнимая 2;10, мы находим „первое“ и „второе“ неизвестное, т. е. $6x=9$, $7y=4;40$. Отсюда сразу получаем множимое

$$x=\frac{9}{6}=1;30$$

и множитель

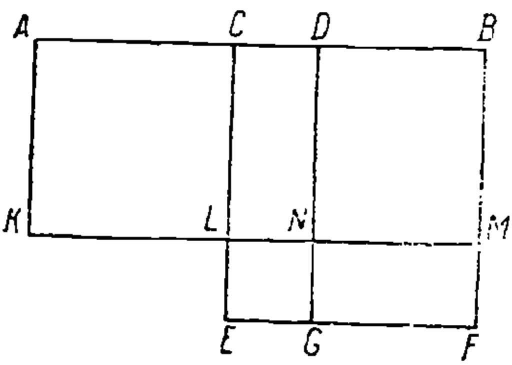
$$y=\frac{4;40}{7}=0;40.$$

Для полной убедительности приведем перевод текста задачи[2]).

„13-ю часть суммы множимого и множителя в 6 раз увеличь. Отсюда множитель отними. 0;20 остается, сказали они. 13, соответственно тринадцатой доле, возьми. 6, во что было увеличено, возьми. 0;20, что осталось, возьми и 1, площадь[3]), возьми. От 13, соответственно тринадцатой доле, 6, во что было увеличено, отними и 7 оставь. 7, которое ты оставил, и 6 пусть удержит твоя голова. 7 умножено на 6. 42. На единицу, площадь, умножено[4]). 42. 42 пусть удержит

---

[1]) У Евклида („Начала“, книга II, предложение 5) соответствующее преобразование имеет такой вид: отрезок AB (черт. 12) разделен пополам в точке C; в соответствии с нашими обозначениями положим $AC=CB=z$.



Черт. 12.

Кроме того, на AB взята произвольная точка D. Положим $CD=p$. Тогда $AD=z+p$; $BD=z-p$. Евклид строит квадрат $DBMN$ и на сторонах AD и DN строит прямоугольник $ADNK$. Таким образом стороны этого прямоугольника суть $z+p$ и $z-p$. Кроме того, строится квадрат $CBFE$ со стороной $CB=z$. В нем проводятся продолжения прежде построенных линий и, таким образом, выделяется квадрат $LNGE$ со стороной $LN=CD=p$. Евклид хочет доказать, что площадь прямоугольника $ADNK$ вместе с площадью квадрата $LNGE$ равна площади квадрата $ECBF$, т. е. что $(z+p)\ (z-p)+p^2=z^2$. Для этого доказывается равенство прямоугольников $ACLK$ и $DBFG$, и прямоугольник $ADNK$ преобразуется в „гномон“ $CBFGNL$, представляющий, как показывает чертеж, разность квадратов $CBFE$ и $LNGE$, так что, в переводе на наши обозначения, $(z+p)\ (z-p)=z^2-p^2$. Не думаю, чтобы это геометрическое преобразование было легче для понимания, чем арифметическое, опирающееся на правило почленного умножения. Не думаю также, что можно придумать геометрическое преобразование, более простое, чем евклидово.

[2]) Математические клинописные тексты, т. I, стр. 349.

[3]) То-есть $xy=1$.

[4]) Таким образом имеется в виду и более общий случай $xy=a\neq 1$.

твоя голова. 13, соответственно тринадцатой доле, на 0;20, что оставалось, помножено. 4;20. Надвое разломи, и это 2;10. 2;10 на 2;10 помножь, и это 4;41,40. К этому 4;41,40 прибавь 42, что твоя голова удерживает, и это 46;41,40. Корень 46;41,40 что? 6;50. 6;50 и 6;50, ему соответствующее положи[1]), и 2;10 от одного отними, к другому прибавь, и первое есть 9, а второе 4;40. Обратное от 6, что твоя голова удержала, образуй, и это 0;10. 0;10 на 9 помножь. 1;30 множимое. Что нужно взять с 7, что удержала твоя голова, чтобы оно мне дало 4;40[2])? 0;40 возьми. 0;40, помноженное на 7, даст тебе 4;40. 0;40, что было взято, — множитель[3]). Если 1;30 множимое, а 0;40 множитель, что площадь? 1;30, множимое, на 0;40, множитель, умножено. 1 площадь. 1;30, множимое, и 0;40, множитель, сложено, и это 2;10. Тринадцатая часть 2;10 что? 0;10. Умножь на 6, и это 1. От этого 1 отними 0;40, множитель, и 0;20 у тебя остается".

Разобранная нами задача не оставляет никаких сомнений в том, что при решении вопросов, приводящихся к системе уравнений, вавилонский математик в той или иной форме вводил вспомогательные неизвестные. В данной задаче, бесспорно, были введены вспомогательные величины $6x$ и $7y$, которые были определены по их разности и произведению. Что касается метода определения неизвестных $6x$ и $7x$ по этим последним условиям, то выше было высказано предположение, что и здесь имело место введение вспомогательного переменного — полусуммы неизвестных, аналогично введению полуразности неизвестных, предположенному в предыдущей задаче. Это предположение основывалось на форме решения и на исторических аналогиях. Пример, который сейчас будет дан, мне кажется, окончательно решает вопрос в пользу упомянутого предположения. Взят он из текста, принадлежащего древневавилонской эпохе. Задача состоит в определении „длины" x и „ширины" y из условий

$$\begin{gathered}(x-y)\,(x+y)+xy=S=1{,}13{,}20,\\ x+y=a=1{,}40.\end{gathered} \tag{43}$$

Решение следует формулам:

$$\begin{aligned}x&=\frac{a}{2}+\left[a-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+(a^2-S)}\,\right],\\ y&=\frac{a}{2}-\left[a-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+(a^2-S)}\right].\end{aligned} \tag{44}$$

Здесь, так же как и в системе (34) — (35), если не допустить предварительного определения вспомогательной величины, останется со-

[1]) Эта фраза означает, что нужно взять два равных друг другу числа: 6;50 и 6;50, две *половины* данной разности.

[2]) Обращаю внимание на различные формулировки деления на 6 и на 7. Различие вызвано тем, что 7 — неправильное число.

[3]) Дальше идет проверка.

вершенно непонятным, почему, найдя x из первого уравнения (44), вычислитель не определил y из соотношения

$$x+y=a.$$

Но, кроме того, характерен и самый вид формул (44). Если бы из системы (43) было исключено тем или иным способом y, то для x получилось бы уравнение

$$x^2-3ax+S+a^2=0,$$

решение которого представилось бы в виде[1])

$$x=\frac{3}{2}a-\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^2-a^2-S}.$$

Подкоренное выражение можно было бы упростить, приведя к виду

$$\frac{5}{4}a^2-S;$$

если бы вавилонский вычислитель сделал это упрощение, это было бы понятно, но совершенно непонятно, зачем его было приводить к виду

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2-S,$$

в каком оно входит в (44). Но пусть таков был каприз автора. Но тогда чем объяснить, что такой странный вид имеет рациональная часть решения? Тоже каприз? Но, если и в определении y наблюдаются те же странности, то, очевидно, капризы тут не при чем; напротив, мы отмечаем замечательную симметрию решения; x и y определены через сумму и разность *одних и тех же* величин: число $\frac{a}{2}$ есть как раз данная полусумма длины и ширины, а выражение в квадратных скобках — найденная их полуразность. Итак, мы приходим к неизбежному выводу: для определения x и y была взята вспомогательная величина z — полуразность неизвестных, т. е. применен прием, предположенный нами для системы (34) — (35). Таким образом первый шаг в анализе решения должен был соответствовать положению

$$\begin{aligned} x&=\frac{a}{2}+z, \\ y&=\frac{a}{2}-z, \end{aligned} \tag{45}$$

чем само собой удовлетворяется второе уравнение (43); из этого последнего требования и исходила мысль введения выражений (45).

---

[1]) Положительный знак перед корнем дал бы отрицательное значение для y.

Обратимся к первому уравнению (43). Входящее в него выражение $x+y$ можно, на основании второго условия, заменить через a. Разность $x-y$ есть двойная полуразность, т. е. $2z$. Произведение xy легко преобразуется в $\left(\frac{a}{2}\right)^2-z^2$, и наше первое условие принимает вид

$$2az+\left(\frac{a}{2}\right)^2-z^2=S. \tag{46}$$

Решив это уравнение по формуле приведенного квадратного уравнения, получим

$$z=a\pm\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-S}.$$

Знак плюс нужно отбросить, так как z, по условию вопроса, меньше $\frac{a}{2}$, значит, и подавно меньше a. И тогда выражение z и выражение, стоящее в квадратных скобках в формулах (44), будут отличаться лишь порядком выполнения сложения, что, конечно, не имеет никакого значения [1])!

В предыдущих примерах введение параметра приводило нас к квадратному уравнению без члена первой степени. Здесь же мы получили квадратное уравнение (46) общего типа. Таким образом здесь введение вспомогательной величины приводит к уравнени нисколько не менее сложному, чем то, которое мы получили бы подстановкой $y=a-x$ в первое из данных уравнений. В этом обстоятельстве можно видеть подтверждение того, что параметрическое решение симметрично построенной системы было общим, широко распространенным приемом.

Вместе с тем мы видим, что вавилоняне умели решать совершенно свободно полные квадратные уравнения. Каким путем получали они решение? Не прибегали ли они и здесь к параметрическому представлению? Такое предположение на первый взгляд кажется очень естественным. Так, например, наше уравнение (46) можно легко представить в виде

$$z(2a-z)=S-\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

и задача сводится к определению двух чисел (z и $2a-z$), сумма которых есть $2a$, а произведение $S-\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Ее можно было бы ре-

[1]) В связи с вопросом о выборе знака перед корнем замечу, что вавилонские тексты, известные нам, никогда не дают двух корней квадратного уравнения, даже тогда, когда оба они положительны. Трудно, однако, допустить, что вавилоняне не обращали внимания на наличие второго корня. Ведь и Евклид не дает двух решений, когда они оба положительны (например, в предложении 28 VI книги), и Диофант всегда ограничивается одним решением. Однако никак нельзя допустить, чтобы они не знали, что есть еще одно решение. Просто, они не считали необходимым исчерпывать все возможные решения, ограничиваясь одним. Вероятно, так же обстояло дело и у вавилонских авторов.

шить вышеразобранным параметрическим методом. Однако такое предположение кажется мне маловероятным. Дело в том, что поскольку S и a суть данные числа, выражение $S-\left(\frac{a}{2}\right)^2$ естественно было бы тут же вычислить, и тогда решение имело бы вид

$$z=a-\sqrt{a^2-\left[S-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]},$$

а не

$$z=a-\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-S}.$$

Если же мы предположим, что уравнение (46) решалось методом дополнения до полного квадрата, то легко представить себе такой порядок вычислений, при котором S и $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ остаются разъединенными — одна в правой, другая в левой части, так что лишь в конце выкладки производятся сложение и вычитание, а тогда их порядок может в точности соответствовать формулам (44). Например, вычисление может протекать следующим образом. Из (46) имеем:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=z^2-2az+S.$$

Чтобы в правой части был полный квадрат, нужно иметь последним слагаемым не $S=1,13,20$, а $a^2=2,46,40$. Излишек $2,46,40-1,13,20=$ $=a^2-S=1,33,20$ нужно поэтому отнять от полного квадрата:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=(z-a)^2-(a^2-S).$$

Отсюда

$$(z-a)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+(a^2-S),$$

как в формулах (44).

Учтем также, что определение величины $2a-z$ не имеет самостоятельного интереса, так что при сведении полного квадратного уравнения к вычислению двух неизвестных по их сумме и произведению, нужно было бы *усложнять* вопрос введением излишней величины.

В заключение приведу перевод задачи [1]):

„Длина, ширина. Длину и ширину я перемножил и так образовал площадь. Далее, то, чем длина выдается за ширину, я помножил на сумму длины и моей ширины. К этому я прибавил мою площадь; получилось 1,13,20. Далее я сложил длину и ширину. Получилось 1,40 [2]).

1,40	1,13,20 (суть) суммы	
1,0 длина		
		40,0 площадь
40 ширина		

---

1) „Математические клинописные тексты", т. I, стр. 115.

2) В следующих трех строках записано условие и ответ задачи. Затем идет решение.

Ты твоим способом: 1,40, сумму длины и ширины умножь на 1,40. 2,46,40. От 2,46,40 отнимаешь ты 1,13,20, площадь[1]). Здесь остановись. Половину суммы 1,40 отламываешь ты. 50 на 50 есть 41,40[2]). К 1,33,20 ты прибавляешь. 2,15,0 имеет 1,30 корнем[3]). 1,40 за 1,30 чем выдается? На 10 выдается. 10 прибавь к 50. 1,0 длина. 10 от 50 отними. 40 ширина".

В том же тексте имеются еще две задачи, сходные с изложенной. Я приведу одну из них, ограничившись точной передачей на языке символов. Требуется определить „длину" x и „ширину" y из системы уравнений

$$\begin{gathered} xy+x-y=b=3{,}3, \\ x+y=a=27. \end{gathered} \tag{47}$$

Сначала определяются две величины x и y' по формулам

$$\begin{aligned} x&=\frac{2+a}{2}+\sqrt{\left(\frac{2+a}{2}\right)^2-(a+b)}=15, \\ y'&=\frac{2+a}{2}-\sqrt{\left(\frac{2+a}{2}\right)^2-(a+b)}=14. \end{aligned} \tag{48}$$

Величина, обозначенная через y', называется „шириной", т. е. так же, как раньше называлась величина y. После этого определяется и y по формуле

$$y=y'-2=12,$$

и теперь y именуется „окончательная ширина".

Ясно, что здесь полуразность неизвестных уже не фигурирует, как в предыдущей задаче, в качестве вспомогательного переменного. Здесь применен другой, как мы сейчас увидим, более сильный прием (в предыдущей задаче его также можно было применить). Прием, очевидно, состоит во введении вспомогательной величины y', связанной с y соотношением

$$y'=y+2.$$

Выгода его состоит в том, что, как нетрудно убедиться, пара неизвестных x, y' должна удовлетворять простой системе уравнений

$$\begin{gathered} xy'=a+b, \\ x+y'=2+a, \end{gathered} \tag{49}$$

т. е. их произведение и сумма — данные величины.

---

[1]) Число 1,13,20 есть не „площадь", а величина $(x-y)(x+y)+xy$. Здесь или описка или, как полагает Нейгебауер, употребление термина „площадь" в более широком смысле: „результат".

[2]) $\frac{a}{2}=\frac{1{,}40}{2}=50$; $\left(\frac{a}{2}\right)^2=50^2=41{,}40$.

[3]) $\left(\frac{a}{2}\right)^2+(a^2-S)=41{,}40+1{,}33{,}20=2{,}15{,}0$;

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+(a^2-S)}=\sqrt{2{,}15{,}0}=1{,}30.$$

Обратим внимание на то, что вид решения (48) системы (49) снова говорит о применении для ее решения подстановки типа (45). Но как пришел наш вычислитель к подстановке $y'=y+2$, которая свела заданную систему уравнений к системе (49)? На этот вопрос также нетрудно ответить. Уравнение

$$x+y=27, \tag{47b}$$

или, что то же,

$$y=27-x,$$

позволяет легко привести уравнение

$$xy+x-y=3{,}3 \tag{47a}$$

к виду

$$xy+2x=30{,}3.$$

Этого можно достигнуть разными способами; проще всего прямо заменить в уравнении (47a) y через $27-x$, но замену эту сделать только в линейной части, не трогая члена xy. Полученное уравнение можно представить в виде

$$x(y+2)=30{,}3;$$

таким образом теперь известно произведение „длины" на „неокончательную ширину". Но и сумма их $x+y+2$, конечно, известна, раз известна сумма $x+y$. Таким образом мы и приходим к системе (49).

Мы можем теперь сделать такие выводы:

1) Система типа (49) играла роль „канонического" представления для целого класса систем уравнения; тогда очевидно, что решение ее производилось совершенно механически, по готовым „формулам". Эти формулы должны были быть известными учащемуся наизусть, так же, как нашему школьнику известна формула решения квадратного уравнения. 2) Для приведения данной системы к каноническому виду употреблялись различные приемы; одну и ту же задачу вычислитель мог решать и решал не единственным способом. 3) Общие правила, играющие роль наших основных формул, существовали не только для решения канонической системы уравнений с заданными суммой и произведением неизвестных, но и для полного квадратного уравнения, которое преобразовывалось в ряде известных нам случаев к „приведенному" виду. Можно указать и такие случаи, когда по виду решения ясно, что решалось неприведенное квадратное уравнение [1].

---

[1] Таковы, например, три задачи, принадлежащие тексту древневавилонской эпохи. „Математические клинописные тексты", т. I, стр. 245—246. В одной из них условие можно представить уравнениями $x^2+y^2=S$, $y=m\dfrac{x}{n}-k$. Решение определяет сначала величину $z=\dfrac{x}{n}$ с помощью выражения $z=\dfrac{km+\sqrt{(km)^2+(m^2+n^2)(S-k^2)}}{m^2+n^2}$, а затем искомые $x=nz$, $y=mz-k$.

Если мы составим уравнение, которому должно удовлетворять z, то будем иметь $(m^2+n^2)z-2kmz-(S-k^2)=0$. Сравнив решение этого урав-

4) Общие правила, служившие для решения уравнений *после* приведения их к каноническому виду, очевидно, сами должны были быть выведенными теоретически, и мы выше пытались восстановить метод их получения. Мы видели также, что *для* приведения к каноническому виду применялись разнообразные приемы, сознательно и искусно ведущие к намеченной цели. Каковы бы ни были их детали, несомненно, что над неизвестными величинами производились операции так, как если бы они были известными. Все это позволяет с полной уверенностью говорить о довольно высоком развитии алгебраических методов в вавилонской математике. 5) Структура этих методов во многом еще неясна; но можно с определенностью сказать, что объектом вавилонской алгебры были числовые, а не геометрические величины, хотя и не исключена возможность, что в отдельных случаях геометрические построения применялись для наглядности. Но и терминология, и вид решений, и, наконец, постоянно встречающееся сложение линейных величин с квадратичными свидетельствуют о том, что алгебраические операции были уже в древневавилонскую эпоху независимыми от пространственных образов. 6) Конечно, алгебраические проблемы развились под влиянием геометрических задач, а эти последние были тесно связаны с потребностями практики. Но в доступную нам эпоху математическое содержание задач уже получило самостоятельное существование. Об этом свидетельствуют и псевдопрактические формулировки и нарочитый подбор числовых данных.

Мы отметили выше, что в вавилонской математике существовали высоко развитые *алгебраические* методы решения задач. Заметим, что алгебраическими их можно назвать не только в том смысле, что над неизвестными величинами совершаются преобразования, и они являются объектами вычисления, равноправными с заданными числами, но и в том смысле, что трактовка задачи в ее целом вполне соответствует современному ее решению средствами алгебраического анализа. Действительно, при так называемом арифметическом решении задачи она разбивается на ряд отдельных „вопросов“, каждый из которых разрешается с помощью одного „действия“ и каким-то образом подвигает нас на шаг ближе к решению основной задачи; но *план* решения задачи, вообще говоря, создается не на основе общих методов, а исходя из индивидуальной структуры задачи. Этот методический дефект и служит причиной того, что в элементарной

нения с формулами (27), (29) иля (44), мы ясно видим, что вавилонский автор либо преобразовал решение уравнения „приведенного“ вида, что представляется мало вероятным, лябо решал прямо „неприведенное уравнение“. Интересно также отметить, что хотя числа m и n очень просты ($m = 40$, $n = 1{,}0$), однако в решении они фигурируют раздельно: автор мог бы сразу разделить m на n, и тогда получил бы более простое уравнение. Он этого не делает, очевидно, в интересах общности.

С решением неприведенного квадратного уравнения мы еще встретимся ниже; поэтому я могу не воспроизводить в переводе вавилонский текст разобранной здесь задачи.

арифметике прибегают к классификации задач по их „типам". При алгебраическом решении задачи мы в сущности тоже последовательно разрешаем ряд „вопросов", отвечающих отдельным этапам преобразований, но существенно новыми являются два момента: один состоит в том, что „план" решения, т. е. выбор последовательности этих вопросов, создается на основе *общих* методов, благодаря чему решение задач, так сказать, механизируется.

Значение этой механизации, конечно, очень велико; однако не следует чрезмерно преувеличивать ее роли. Алгебраический алгоритм далеко не полностью механизирует метод решения задачи. Во-первых, сам процесс составления уравнения по существу не подчинен достаточно общим методам, и некоторая „типизация" задач поэтому продолжает оставаться необходимой. Во-вторых, и при решении уравнений, а особенно систем уравнений, для выбора кратчайшего и простейшего пути необходимо учесть индивидуальную структуру этих уравнений. Поэтому и здесь необходимо провести известную типизацию задач. Подобная типизация осуществляется, например, изучением типичных уравнений (квадратного, кубического, возвратных и т. д.) и их замечательных частных случаев, установлением ряда свойств уравнений, а также систематизацией „искусственных" приемов, приводящих уравнение или систему уравнений к более простому виду.

Вторым, методологически, может быть, более важным моментом, характеризующим алгебраический метод *решения задач*, является то обстоятельство, что на основе механизации процесса решения делается возможным не связывать каждый отдельный „вопрос", каждое преобразование, с исходными данными задачи. При „арифметическом" решении задачи с каждым действием связывается его *истолкование*. Даже в том случае, когда задача носит вполне „отвлеченный" характер, когда ищется не цена килограмма чая или кофе, а величина числа, обладающего тем или иным свойством, — и в этом случае ответ на каждый из вопросов непременно высказывает какое-то положение, непосредственно относящееся к данным условиям. При алгебраическом решении эту связь, конечно, тоже можно было бы установить для каждого из последовательных результатов. Но там эта связь теряет свой непосредственный характер. Не только в задаче с материальным содержанием после перевода ее на алгебраический язык чай теряет свой вкус, а кофе — запах, но и в отвлеченной задаче происходит нечто подобное. Когда, например, мы вводим вспомогательные неизвестные и вводим их в исходную систему уравнений, мы в дальнейшем можем совершенно забыть о характере связи между основными неизвестными и вспомогательными. Мы вспомним об этой связи лишь тогда, когда вспомогательные неизвестные окажутся определенными.

Из приведенных выше решений задач, содержащихся в клинописных текстах, мы видим, что оба указанных момента, несомненно, были налицо в вавилонской математике. Все задачи, разобранные в настоящем параграфе, свидетельствуют о том, что вспомогательные неизвестные играли именно ту роль, которую мы только что обрисовали. Вторая из задач предшествующего параграфа ясно показывает (стр. 129), что при выполнении преобразований вавилонский вычислитель совершенно не учитывал связи своих результатов с данными условиями: иначе он несомненно пошел бы иным, более „естественным" путем.

Конечно, и при чисто алгебраическом решении задачи нужно было бы предпочесть тот самый путь, по которому *не пошел* наш вычислитель. Но при алгебраическом решении вопроса все уравнения системы *принципиально* равноправны, и можно поставить в упрек вавилонскому автору только то, что он не в достаточном совершенстве владел искусством алгебраических преобразований. Впрочем, подобную оплошность мог бы совершить и любой современный математик в задаче, новой для него; не говорю уже о том, что у школьников — это знает каждый преподаватель — такие недосмотры происходят постоянно. Не забудем также и того, что наша символика чрезвычайно облегчает нам *обозрение* системы уравнений в целом.

У вавилонян же мы не находим никаких следов алгебраической символики, хотя введение „технических терминов", подобных терминам „длина", „ширина", „делитель", „делимое" и т. п., является первым шагом к созданию алгебраического языка.

Может быть покажется невероятным, чтобы при отсутствии всякой символики вавилоняне производили сложные алгебраические преобразования. Нужно, однако, учесть, что у человека, не избалованного культурой, гораздо сильнее развиваются те способности, которые у современного человека притупляются, уступая место более утонченным средствам восприятия действительности. Не забудем также, что и европейские алгебраисты вплоть до XVI века также не имели почти никакой символики, что не помешало им прекрасно владеть теорией уравнений первой и второй степени и подняться до решения кубических уравнений.

§ 17. Кубические уравнения

Один из дошедших до нас математических текстов неоспоримо свидетельствует о том, что и в вавилонской математике возникали и решались задачи, приводящие к кубическому уравнению. Бесспорно также и то, что в этом тексте нет речи о решении кубического уравнения в радикалах. В остальном содержание этого текста не вполне ясно. По вопросу о кубических уравнениях в вавилонской математике в литературе были высказаны различные мнения. Впрочем, возникшие разногласия коснулись пунктов, не имеющих, на мой взгляд, большого значения для общей оценки математики вавилонян, так что наиболее важные вопросы в этой полемике не были выяснены. Это и естественно, ибо наличный материал позволяет лишь поставить ряд вопросов, но не содержит никаких данных для их разрешения.

Интересующий нас текст, впервые опубликованный в 1933 г. Нейгебауером[1]), содержит 23 задачи, однородных по форме, но различных по математическому типу[2]). Во всех задачах требуется определить „длину“, „ширину“ и „глубину“ „объема выкопанной земли“.

Сообразно тому, что мы видели в предшествующих задачах, мы имеем все основания видеть в „длине“, „ширине“ и „глубине“ просто неизвестные числа x, y, z; „объем выкопанной земли“ есть произведение $xyz = V$ этих чисел. В ряде задач фигурирует также и „сечение“, на которое мы можем смотреть как на произведение $xy = S$. В согласии с этим стоит то, что в некоторых из этих задач „объемы“ складываются с „сечениями“, и задается величина суммы. Задаются еще два условия; смотря по характеру их задача сводится к уравнению первой, второй или третьей степени.

Так, например, в одной задаче (задача 8) говорится[3]):

„Длина, ширина. Что есть длина, то и глубина. Земля выкопана. Сечение и объем ты должен сложить, и 1;10 это. 0;30 есть длина. Что есть ширина?“

Последнее условие задает величину

$$x = a = 0; 30. \tag{50}$$

Второе условие мы можем записать так:

$$S + V = k = 1;10. \tag{51}$$

Что касается первого условия (равенство длины и глубины), то мы должны напомнить, что вертикальные длины измерялись у вавилонян в локтях, а горизонтальные в гарах (1 гар = 12 локтей). Равенство, о котором говорится в условии, понимается как *одинаковая протяженность*, а не как одинаковое числовое выражение. Поэтому, если длина есть x (гар), то равная ей глубина есть $z = 12x$ (локтей). Напомним также, что для вычисления объемов и вертикальных площадей вавилоняне перемножали *числовые* выражения соответствующих линейных размеров, т. е. принимали за единицу объема не кубический локоть и не кубический гар, а (1 гар)$^2 \times$ (1 локоть), а за единицу вертикальной площади (1 гар) $\times$ (1 локоть). Поэтому в вавилонской математике выражение

$$V = xyz$$

так же, как и у нас, непосредственно определяет объем (в „сарах“).

---

[1]) Ueber Lösung kubischer Gleichungen in Babylonien. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse, 1933, стр. 316—321.

[2]) В свое время текст имел 30 задач, до нас он дошел в поврежденном виде; его удалось составить из двух кусков, один из которых находится в Лондоне, другой в Берлине.

[3]) „Математические клинописные тексты“, т. I, стр. 201. Нумерация задач по этому изданию. Она соответствует порядку задач вавилонского текста. В первой публикации нумерация задач несколько иная.

Итак, первое условие выражается уравнением

$$z = 12x. \tag{52}$$

Условие (51), очевидно, можно выразить еще так:

$$S + 12aS = k.$$

Из этого, повидимому, и исходит вавилонский автор, решая задачу, ибо прежде всего определяется сечение S по формуле

$$S = \frac{k}{1 + 12a},$$

и уже затем, исходя из соотношения $ay = S$, находится

$$y = \frac{S}{a}.$$

Вот решение текста:

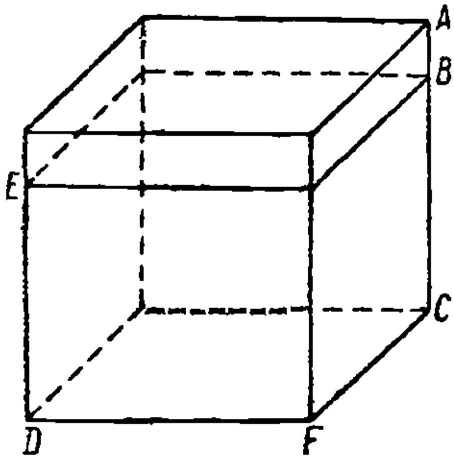
„Ты: 0;30, длину, на 12 помножь. 6 ты видишь — глубина. 1 к 6 прибавь. 7. Обратное от 7 не образуй. Что нужно взять с 7, что дает 1;10? 0;10 возьми. Обратное от 0;30, длины, образуй. 2 ты видишь. 0;10 на 2 помножь. 0;20 видишь ты — ширина. Таков способ".

Эта задача, конечно, может быть решена чистым арифметическим „рассуждением". Однако она заведомо решена с привлечением иных средств. Действительно, естественно было бы решать ее арифметически так: длина есть 0;30, а глубина численно в 12 раз больше, т. е. равна 6. Объем получается, если неизвестную ширину умножить на $0;30 \cdot 6 = 3$, а сечение, если ширину умножить на 0;30. Сумма сечения и объема есть $3 + 0;30 = 3;30$ ширин. Она равна 1;10. Значит, ширина есть $\frac{1;10}{3;30} = 0;20$.

Мы видим, что вычисление в тексте идет иначе: вводится вспомогательная величина $S = 0;30y$. Это можно объяснить тем, что здесь применяется общий алгебраический метод, демонстрированный выше на ряде алгебраических задач.

С точки зрения тех, кто во всех решениях вавилонских задач склонен видеть продукт геометрического их осмысливания (ниже мы еще займемся разбором этой точки зрения), можно объяснить отмеченную способность решения так: под „сечением" разумеется не площадь сечения, а *объем* слоя, имеющий основанием горизонтальное сечение, а высотой 1 локоть. Тогда задачу можно истолковать следующим образом: прямоугольный параллелепипед BD (черт. 13) имеет длину $DF = 0;30$ гар и высоту $BC = 0;30 \cdot 12 = 6$ локтей. На него наложен слой AE с высотой $AB = 1$ локоть. Объем полученного параллелепипеда AD равен 1;10 (сар). Так как этот объем равен произведению площади основания на высоту $AC = 6 + 1 = 7$ локтей, то площадь основания равна $\frac{1;10}{7} = 0;10$ (гар²) и т. д.

Само по себе это объяснение было бы правдоподобным. Но тогда его нужно провести и для других задач нашего текста, ибо они, как сейчас увидим, построены совершенно аналогично. Между тем в них введение вспомогательной величины S не удается оправдать геометрическими мотивами. Вот, например, задача, непосредственно следующая за приведенной (задача 9) и явно с ней координированная:



Черт. 13.

„Длина, ширина. Что есть длина, то и глубина. Земля выкопана. Сечение и объем ты должен сложить, и это 1;10. 0;20 ширина. Что есть длина?"

Переведя условие на алгебраический язык и положив $1;10 = k$, $0;20 = b$, мы получим уравнение

$$xy + xyz = k,$$

в котором $y = b$; $z = 12x$, так что для искомой длины получаем уравнение

$$12\,bx^2 + bx = k. \tag{53}$$

Решение вавилонского текста следует формуле

$$x = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 12bk} - \frac{b}{2}}{12b}, \tag{54}$$

т. е. совпадает с нашей формулой неприведенного квадратного уравнения. Здесь мы имеем тот же ход выкладки, что и в предыдущей задаче, в том смысле, что вычисляемое сначала выражение

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 12bk} - \frac{b}{2}$$

представляет площадь *вертикального сечения* (ибо равное ему выражение $12bx$ есть $b \cdot 12x = bz$). Но в этом случае „геометрическое" объяснение совершенно неубедительно, ибо, как нетрудно видеть, обращение к чертежу нисколько не наталкивает на выбор площади в качестве промежуточного неизвестного; напротив, такой выбор только затруднил бы составление уравнения. Во всяком случае, нет никаких причин за неизвестное принимать площадь, а так как в задаче ищется только длина, и в решении ни слова не сказано о площади, то мы вправе принять, что составленное условие имело вид (53).

Мы уже отмечали, что в вавилонских текстах имеются примеры решения квадратных уравнений по формуле неприведенного типа[1]). Решение (54) построено именно так. Можно думать, что обе части (53) умножены были на $12b$, чтобы первый член стал полным квадратом.

---

[1]) См. сноску на стр. 146—147, где приведен и пример.

Приведем текст решения:

„Ты: 0;20 на 12 умножь. 4 ты видишь. 4 на 1;10 умножь. 4;40 ты видишь. $^1/_2$ от 0;20, ширины, отними. 0;10 ты видишь. 0;10 возведи в квадрат. 0;1,40 ты видишь. К 4;40 прибавь. 4;41,40 ты видишь. 2;10 есть корень. 0;10, что ты умножил на себя, отнято, и 2 ты видишь. Обратное от 4 образуй. 0;15 ты видишь. На 2 помножь. 0;30 ты видишь — длина. Таков способ".

Сопоставляя решения этой задачи и предыдущей, мы естественно приходим к предположению, что задача 8, которая, конечно, легко решается арифметически, была в интересах единства метода решена тоже алгебраически, т. е. в выражающем ее условии было произведено типичное преобразование, по существу совершенно излишнее.

Теперь мы перейдем к рассмотрению задач, приводящих к уравнениям третьей степени. Простейшей задачей такого рода является задача 22, дающая чистое кубическое уравнение. В ней требуется определить длину и глубину куба по заданному объему $V = 1;30$ (сар). Так как глубина мерится в локтях, а длина и ширина в гарах, то мы имеем

$$12x^3 = 1;30$$

и

$$x = \sqrt[3]{\frac{1;30}{12}}.$$

Так, конечно, и решается задача в вавилонском тексте. Деление 1;30 на 12 дает 0;7,30. „0;30 есть корень" — сказано в тексте. Конечно, результат получен из таблиц кубических корней. До нас дошло пять таких таблиц. Одна из них содержит кубы целых чисел от 1 до 40; остальные содержат или содержали в своем первоначальном виде кубы всех 59 чисел первого шестидесятеричного разряда [1]).

В нашем тексте имеются и более сложные задачи. В одной из них (задача 23) требуется определить длину прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, глубина которого на 1 локоть больше длины, а объем равен $V = 1;45$.

Таким образом

$$x^2z = V = 1;45; \quad z = 12x + 1.$$

Уравнение для определения длины будет

$$12x^3 + x^2 = V = 1;45. \tag{55}$$

Решение изложено следующим образом: вычисляется величина $12^2 \cdot 1;45 = 4,12$; вычисление это совершается „окольным" путем: сначала находится величина, обратная 12; $\frac{1}{12} = 0;5$. Это число умно-

1) Что этими таблицами пользовались чаще для извлечения кубического корня, чем для возведения в куб, видно из терминологии таблицы: „8-е 2 ba-si", т. е. „от 8 2 корень" и т. д.

жается еще на 1. (Происхождение числа 1 неясно. Что же касается причины, почему $12^2 V$ находится нижеизложенным „окольным“ путем, то некоторый свет на нее проливает решение задачи 5, разбираемой ниже.) Затем 0;5 возводится в квадрат, т. е. $\frac{1}{12^2} = 0;5^2 = 0;0,25$. Затем $V = 1;45$ делится на результат: $\frac{1;45}{0;0,25} = 4,12 \quad (= 12^2 \cdot 1;45)$. После этих выкладок объявляется, что „корень“[1]) равен 6, и умножением на 0;5, т. е. делением на 12, находится длина 0;30. Очевидно, „корень“ есть $12x$ — вспомогательное неизвестное. Следовательно, нужно представить себе, что в (55) вместо x введена вспомогательная величина $12x$. Для этого достаточно обе части (55) помножить на 12^2; совершенно аналогично тому, что делалось в неприведенном квадратном уравнении (53). Уравнение (55) примет вид:

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 12^2 \cdot 1;45.$$

В левой части этого уравнения стоит та самая величина, которая была вычислена в решении. Как получено решение $12x = 6$? На этот вопрос можно ответить почти безошибочно: с помощью таблиц. Дело в том, что одна такая таблица дошла до нас. Сохранившаяся ее часть содержит выражения $n^3 + n^2$ для целых n от 26 до 48. Расположение таблицы и терминология свидетельствуют о том, что назначение ее состояло в определении n по значению $n^3 + n^2$, а не наоборот.

Вот несколько ее строк:

5, 4,12-e	26 ba-si
5, 40,12-e	27 ba-si
6, 18,50-e	28 ba-si

т. е.

от 5, 4,12	26 корень
от 5, 40,12	27 корень

и т. д.

Конечно, термин ba-si, который в других случаях употребляется для обозначения квадратного и кубического корней, здесь имеет смысл: корень уравнения $x^3 + x^2 = 5,4,12$ и т. д.

Таким образом и здесь мы имеем приведение задачи к каноническому виду, т. е. к уравнению

$$x^3 + x^2 = A,$$

решаемому с помощью таблиц.

С задачей 23 сходна задача 5 того же текста. Условие задачи 5 сильно повреждено, но смысл его совершенно ясен из решения, которое мы ниже приведем полностью. Восстановленное условие гласит, что глубина равна длине, ширина составляет ее $^2/_3$ (0;40),

[1]) Здесь употреблен термин ib-si₈, который, как мы видели, означает в других случаях квадратный корень.

а сумма сечения и обьема есть 1;10. Введя вместо 0;40 и 1;10 обозначения a и V и принимая за x неизвестную длину, мы будем иметь для определения x уравнение

$$12ax^3 + ax^2 = V. \tag{56}$$

С помощью окольных действий, подобных тем, которые применялись в задаче 23, здесь находится величина $\frac{12^2 V}{a}$, которая, как и величина $12^2 V$ в предыдущей задаче, равна 4,12, после чего объявляется снова, что „корень" есть 6. Этот „корень" и в данном случае есть величина, обозначенная нами $12x$. Длина находится умножением числа 6 на 0;5, т. е. делением на 12; а ширина умножением числа 6 на $\frac{a}{12} = 0;3,20$; наконец, умножением 6 на 1 находится глубина 6.

Смысл этих вычислений, очевидно, таков: множа обе части (56) на $\frac{12^2}{a}$, мы получаем уравнение:

$$(12x)^3 + (12x)^2 = V \cdot \frac{12^2}{a}, \tag{57}$$

т. е. $12x = z$ удовлетворяет каноническому уравнению

$$z^3 + z^2 = 4,12,$$

решение которого $z = 6$ находится в таблице.

Конечно, и здесь можно объяснить переход от (56) к (57), исходя из геометрического представления задачи. Но в пользу того, что здесь мы имеем алгебраическое рассуждение, в котором сознательно производится преобразование к вспомогательному неизвестному, говорит прежде всего то обстоятельство, что ширина получается не умножением найденной уже длины на 0;40, а умножением „корня" на $\frac{0;40}{12}$. Конечно, это более сложный способ; между тем он вполне мотивируется, если принять, что все искомые величины определяются через избранную вспомогательную неизвестную. Кстати, с этим, может быть, связано и то, что величина $\frac{12^2 V}{a}$ найдена „окольным" путем. Именно, сначала находится число $\frac{1}{12}$, обратное 12; затем оно множится на a; полученное произведение $\frac{a}{12} = \frac{0;40}{12}$ и есть упомянутый только что множитель. Таким образом эти шаги не излишни. Затем следует умножение на $\frac{1}{12}$; получается $\frac{a}{12^2}$; это последнее число обращается, и результат обращения $\frac{12^2}{a}$ множится на V. Мы видим, что в этом „окольном" пути вычисления $\frac{12^2 V}{a}$ по существу нет лишних шагов.

Наконец, в пользу предположения об „алгебраичности“ решения говорит и то, что найденная величина 6 ($=12x$) именуется сначала не глубиной, а „корнем“, и лишь потом устанавливается, что глубина равна этому „корню“. Важно здесь, конечно, не то, что искомая величина именуется „корень“, а не как-либо иначе: ведь собственно значение термина ib-si$_8$ неизвестно; быть может он означает „сторона“ или что-либо иное. Важно то, что этот термин употреблен для обозначения понятия, более общего, чем „глубина“, которая в данном вопросе численно равна „корню“.

Так как задачи 23 и 5 вполне однотипны, и вторая общее первой, то я ограничусь приведением текстуального решения лишь для последней. Вот это решение:

„Обратное от 12, доли глубины, образуй. 0;5 ты видишь. На 1 помножь. 0;5 ты видишь. На 0;40 помножь. 0;3,20 ты видишь. 0;3,20 на 0;5 помножь. 0;0,16,40 ты видишь. Обратное от 0;0,16 образуй. 3,36 ты видишь. 3,36 на 1;10 помножь. 4,12 ты видишь. 6 есть корень. 6 на 0;5 помножь. 0;30 ты видишь. 6 на 0;3,20 помножь. 0;20 — ширина. 6 на 1 помножь. 6 ты видишь — глубина. Таков способ“.

В этом решении теперь ясен каждый шаг, кроме умножения величины $0;5=\frac{1}{12}$ на единицу.

Это умножение, как мы помним, выполнялось и в задаче 23. Можно было бы подумать, что оно имеет в виду уравнение более общего вида, чем уравнение (56), например, уравнение вида

$$12ax^3+bx^2=V,$$

где $b\neq a$, и что число 1 как-то связано с отношением $\frac{a}{b}$. Не обстоит ли дело так, что в этом случае произведение V на $\frac{12^2}{a}$ нужно еще помножить на $\left(\frac{a}{b}\right)^3$, т. е. что фигурирующее в решении число 1 есть куб величины $\frac{b}{a}=1$? Такое объяснение представляется мне единственно возможным с математической стороны. Действительно, если умножить обе части уравнения

$$12ax^3+bx^2=V$$

на $\frac{12^2}{a}\left(\frac{a}{b}\right)^3$, то мы получим

$$\left(\frac{12ax}{b}\right)^3+\left(\frac{12ax}{b}\right)^2=V\cdot\frac{12^2}{a}\cdot\frac{a^3}{b^3},$$

т. е. снова уравнение канонического типа.

Если это объяснение отбросить, то как будто не остается никаких других возможностей понять появление единицы, и приходится допустить, что в тексте дважды произведено бессмысленное, хотя и безвредное действие. Между тем и принять это объяснение очень трудно, потому что упомянутое умножение употребляется и в том случае, когда в уравнении

$$12ax^3 + bx^2 = V$$

коэфициенты a и b не равны.

Здесь мы впервые сталкиваемся с поистине неразрешимой загадкой. Число этих загадок еще более возрастает, когда мы обращаемся к задачам 6, 7 и 20, в которых также ставятся вопросы, приводящие к кубическим уравнениям, но метод их решения остается целиком неясным. Для характеристики положения я приведу здесь последнюю из упомянутых задач. Условие ее гласит[1]:

„Длина, ширина. То, что я возвел в квадрат, и 7 локтей есть глубина[2]). 0;3,20 — выкопанная земля. Длина, ширина, глубина — что они?".

Мы можем, следовательно, написать уравнение

$$(12x + 7)\,x^2 = 0;3,20$$

или

$$12x^3 + 7x^2 = 0;3,20. \qquad (58)$$

Здесь мы как раз имеем только что упомянутый случай неравных $a = 1$ и $b = 7$.

Вот что говорится в решении:

„Ты: 7-ю часть от 7 возьми. 1 видишь ты. Обратное от 12 образуй; 0;5 ты видишь. 0;5 на 1 умножь. 0;5 ты видишь. 0;5 на 12 умножь. 1 ты видишь.

0;5 возведи в квадрат, 0;0,25. На 1 умножь. 0;0,25 ты видишь. Обратное от 0;0,25 образуй. 2,24 ты видишь. 2,24 на 0;3,20, объем, помножь. 8 ты видишь. Что корни? 1 1 8 корни.

0;5 на 1 помножь; 0;5 ты видишь. 0;5 гар[3]) есть длина. 8 на 1 помножь. 8 локтей глубина. Таков способ".

Каков же этот способ в действительности? В первом из трех абзацов, на которые нами разбит текст, делается нечто совершенно непонятное. Что это за число 7, дважды фигурирующее в первом абзаце, один раз в качестве делимого, другой — в качестве делителя? Оно не может быть не чем иным, как коэфициентом x^2, и деление $7:7$ нельзя понять иначе, как деление этого числа на самое себя. Не истолковать ли это, как первый шаг в делении на 7 обеих частей уравнения (58)? Так полагает Нейгебауер[4]). Он говорит, что вычислитель остановился здесь перед трудностью деления на 7, ибо 7 — неправильное число, и пошел другим путем. Предположим на минуту, что этой трудности

[1]) „Математические клинописные тексты", т. I, стр. 204.

[2]) Задача входит в серию задач, где основание параллелепипеда предполагается квадратным, так что „то, что я возведу в квадрат", есть общая величина длины и ширины. В условии говорится, таким образом, что глубина на 7 локтей больше длины.

[3]) В тексте, очевидно, по ошибке, сказано: „локтей".

[4]) „Лекции", стр. 219—220 русского перевода.

нет. Тогда, если разделить на 7 обе части уравнения (58), мы получим

$$\frac{12}{7}x^3 + x^2 = \frac{0;3,20}{7}. \tag{59}$$

Это уравнение можно было бы привести к каноническому виду тем же способом, который применялся в задачах 23 и 25. Именно, помножив обе части уравнения (59) на $\left(\frac{12}{7}\right)^2$, мы получим

$$\left(\frac{12}{7}x\right)^3 + \left(\frac{12}{7}x\right)^2 = \frac{0;3,20\cdot 12^2}{7^3}. \tag{60}$$

Что теперь делать с этим каноническим уравнением? Число, стоящее в правой его части, — дробное, и потому его заведомо не будет среди табличных значений выражения $n^3 + n^2$, ибо в таблице n пробегают только целые значения. Действительно, корень уравнения

$$z^3 + z^2 = \frac{0;3,20\cdot 12^2}{7^3}$$

есть

$$z = \frac{1}{7}.$$

Таким образом „невозможность" деления на 7 не единственное препятствие к решению уравнению (59) „общим" способом, и первый абзац решения остается неясным, тем более, что после деления $7:7 = 1$ автор продолжает производить совершенно непонятные операции над полученной единицей: он делит ее на 12, результат помножает на 12, и снова как феникс из пепла появляется единица!

Второй абзац несколько яснее; правда, и здесь непонятно, зачем $\frac{1}{12}$ множится на 1 и что это за единица; предположение, о котором мы упоминали выше, что это есть $\left(\frac{a}{b}\right)^3$, теперь, когда $a = 1$; $b = 7$, явно не годится. Но в конечном счете 0;3,20 множится на 12^2, что соответствует образованию уравнения

$$(12x)^3 + 7(12x)^2 = 0;3,20\cdot 12^2 = 8,$$

т. е.

$$z^3 + 7z^2 = 8. \tag{61}$$

Решение $z = 1$ сразу бросается в глаза, т. е. мы имеем $12x = 1$. Это есть длина, выраженная в локтях; ширина, выраженная в локтях, тоже равна 1; высота на 7 локтей больше, т. е. 8 локтей. Числа 1, 1 и 8, названные „корнями", таким образом вполне понятны. Третий абзац понятен целиком: 1 локоть длины умножением на $\frac{1}{12}$ переводится в $\frac{1}{12}$ гар. 8 локтей высоты оставляются в тех же мерах, т. е. умножаются на 1.

Несомненно, разобранная задача представляет с исторической точки зрения большой интерес. Она свидетельствует о том, что вавилоняне решали задачи, приводящие к кубическим уравнениям довольно широкого класса. Задачи 6 и 7 еще более расширяют этот класс. Первая приводит к уравнению

$$12x^3 - 9x^2 - 0;50x + 1;10 = 0, \tag{62}$$

вторая — к уравнению

$$12x^3 - x^2 - 0;10x - 1;10 = 0. \tag{63}$$

В обоих случаях решение предписывает нахождение (окольным путем) выражений $\frac{1;10}{12\cdot 0;50^3}$ и, соответственно, $\frac{1;10}{12\cdot 0;10^3}$, после чего даются „корни“ 0;36 и 3. Смысл этих „корней“ выясняется из того, что x (длина) находится умножением на 0;50 в первом случае и на 0;10 во втором. Таким образом „корни“ — это значения $\frac{x}{b}$, где b — коэфициент при первой степени неизвестного (взятый со знаком $+$).

Найденные значения $x = 0;30$ и $y = 0;20$, действительно, удовлетворяют уравнениям (62) и (63), но способ их нахождения еще более темен, чем способ решения предыдущей задачи. Составление выражения $\frac{1;10}{12\cdot 0;50^3}$ для уравнения (62) нужно, повидимому, толковать, как умножение обеих частей уравнения на $\frac{1}{12\cdot 0{,}50^3}$, что приводит первый член к виду $\left(\frac{x}{0;50}\right)^3$.

Эта величина и находится в качестве корня. Однако этого абсолютно недостаточно для понимания решения. Естественнее всего предположить, что и здесь пользовались вспомогательными таблицами, вроде таблицы для $n^3 + n^2$. Это и предполагает Нейгебауер[1]). Но, помимо того, что „трудно догадаться, каково могло быть устройство таблиц“ (Нейгебауер), совершенно непостижимым представляется, как по таким таблицам можно было найти *дробное* значение неизвестного. Во всех известных нам вавилонских таблицах аргумент пробегает лишь целочисленные однозначные величины, и вряд ли можно представить себе, чтобы у вавилонян существовали значительно более обширные таблицы для решения кубического уравнения общего вида. Тогда по таблицам, какова бы ни была их структура, можно в лучшем случае найти лишь грубые границы значений неизвестного.

Мы видим, как много серьезных вопросов, возникающих в связи с рассмотренными задачами, остается неразрешенным. Между тем решение их могло бы пролить новый свет на математические методы вавилонян.

---

[1]) „Лекции“, стр. 221 русского перевода.

Выше отмечалось, что по вопросу о кубических уравнениях у вавилонян в литературе были высказаны различные точки зрения. Нейгебауер, позиция которого в этом вопросе мне кажется правильной, высказал мнение, что решения кубических уравнений „не находятся уже алгебрическим путем [1]), как в случае линейных и квадратных уравнений; в самый решительный момент здесь привлекаются вспомогательные средства совсем другого рода, именно составленные специально для этих случаев таблицы“ [2]). Однако для использования этих таблиц нужно привести уравнение к какому-то каноническому виду, и этот переход, по Нейгебауеру, совершался алгебраическими средствами.

Именно против последнего положения выступили оппоненты Нейгебауера — К. Фогель и Э. Бортолотти. С точки зрения Бортолотти [3]) вавилонской математике вообще были совершенно чужды алгебраические методы. В частности, задачи, приводящие к кубическим уравнениям, вавилоняне, по мнению Бортолотти, ставили и рассматривали в чисто геометрической форме, и в этой же форме решали с помощью примитивных геометрических преобразований и подбора числовых ответов. Немногим отличается от этой точки зрения позиция Фогеля. Перевод его статьи помещен в виде приложения к русскому изданию „Лекций“ Нейгебауера, и я отсылаю к нему интересующихся читателей.

Соображения против геометрического истолкования вавилонских решений, высказанные мною выше (стр. 132—133), остаются здесь в полной силе. Приведенные тексты вавилонских решений задач 5, 6, 20 и 23 должны, как мне кажется, служить лишним подтверждением их правильности. Замечу также, что для геометрического истолкования задач, о которых идет речь, Фогель и Бортолотти должны производить раздробление „саров“ в „кубические локти“. Такое раздробление, конечно, вполне элементарно, но вряд ли естественно для вавилонского вычислителя, который никогда не пользовался „кубическим локтем“ как единицей объема.

§ 18. Была ли алгебра вавилонян геометрической?

Выше уже отмечалось, что вопросы, затронутые оппонентами Нейгебауера, не имеют существенного значения. В самом деле, пусть преобразования в задачах 5, 6, 10 и 23 производились примитивно. Но ведь при решении квадратных уравнений мы наблюдали приемы гораздо более тонкие, чем те, которые явно обнаруживаются текстом задач 5, 6, 20, 23. Какой смысл доказывать, что эти послед-

---

[1]) Было бы, пожалуй, осторожнее сказать: „не находятся с помощью явного алгебраического выражения корня через коэфициенты уравнения“.

[2]) „Лекции“, стр. 221 русского перевода.

[3]) E. Bortolotti, Sulla risoluzione della equatione cubica in Babylonia. Memorie della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, серия IX, т. I, стр. 81—94, 1934.

ние задачи решались примитивно, когда для других задач этого же текста (например, приведенной нами задачи 9) эти примитивные методы явно недостаточны? От „примитивности" приходится, таким образом, вовсе отказываться. Так же обстоит дело и с „геометризмом". Старание во всех преобразованиях вавилонян видеть отражение наглядных геометрических конструкций приводит не только к большим трудностям, но подчас и к прямым противоречиям. Особенно ярко это можно видеть из замечаний С. Я. Лурье к книге Нейгебауера. С. Я. Лурье сам признает, что он не смог предложить геометрического решения для задачи, рассмотренной нами на стр. 128 и сл.; но еще более характерно, что в другой задаче предлагаемое им геометрическое решение, действительно, довольно элементарное с геометрической точки зрения, совершенно непригодно для вычислительных целей.

До нас дошли тексты, в которых предлагаются целые серии уравнений, имеющих одни и те же решения. Таков, например, текст [1]), состоящий из 55 задач с общим условием $xy = 10{,}0$ и вторыми условиями, приводящимися к виду

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d.$$

Все эти задачи имеют одни и те же решения; $x = 30$; $y = 20$.

Вот несколько примеров из этого текста.

„№ 1. Площадь есть 1 эше [2]).

Длину на 3 ты помножил, возвел в квадрат и площадь ширины прибавил, и это 2,21,40.

№ 2. На 2 ты помножил, прибавил, это 2,28,80.

№ 3. Площадь ширины вычтена, и это 2,8,20.

№ 4. Длину ты на 3 помножил, ширину на 2 помножил, сложил, возвел в квадрат, площадь длины прибавил, и это 4,56,40".

Эти задачи можно перевести на наш язык системами, состоящими из уравнения

$$xy = 10{,}0$$

(общего для всех примеров) и уравнений:

$$(3x)^2 + y^2 = 2{,}21{,}40 \qquad \text{в № 1,}$$

$$(3x)^2 + 2y^2 = 2{,}28{,}20 \qquad \text{в № 2,}$$

$$(3x)^2 - y^2 = 2{,}8{,}20 \qquad \text{в № 3,}$$

$$(3x + 2y)^2 + x^2 = 4{,}56{,}40 \qquad \text{в № 4.}$$

---

1) „Математические клинописные тексты", т. 1, стр. 414—418.

2) 1 эше = 10,0 квадратных гар.

Полный перечень примеров можно найти у Нейгебауера[1]). Ни решений, ни даже ответов в тексте нет. Конечно, все эти задачи составлены по заранее известным решениям; работа составителя, конечно, облегчалась тем, что эти решения одни и те же; но вряд ли целью составителя было дать упражнение на вычисление значений $(3x)^2+y^2$ и т. д. по данным x, y. В этом случае было бы совершенно непонятно, почему все задачи однотипны. То же обстоятельство, что корни уравнений во всех задачах одинаковы, в конце концов не ослабляет продуктивности упражнений на решение систем уравнений, ибо вычисления, ведущие к решению, остаются различными.

Нейгебауер полагает, что такие системы решались исключением одного из неизвестных. При этом получаются всегда биквадратные уравнения типа

$$mx^4+nx^2+p=0.$$

С. Я. Лурье возражает против выделения в вавилонской математике особой категории биквадратных уравнений, и в этом отношении он, вероятно, прав. Но предполагаемым им методом решения вавилоняне подобные задачи решать не могли.

„Мы имеем[2]), — говорит С. Я. Лурье, — ряд уравнений типа

$$m^2x^2+pxy+n^2y^2=c,$$

причем значение xy известно. Ясно, что путем прибавления определенной, без труда находимой величины, кратной xy, это уравнение легко привести к виду

$$m^2x^2\pm 2mnxy+n^2y^2=c',$$

откуда простым извлечением корня находятся $mx+ny$ и $mx-ny$, а следовательно, и x и y. Мы уже видели, что знакомство с этой процедурой необходимо постулировать в Вавилоне и что она могла быть осмыслена ч и с т о г е о м е т р и ч е с к и[3])“.

Однако „геометрически осмыслить“ задачу — это еще не значит решить ее численно. Возьмем хотя бы пример 4 нашего текста:

$$xy=10{,}0=600,$$

$$(3x+2y)^2+x^2=4{,}56{,}40=17\,800.$$

Представив его в виде

$$m^2x^2+pxy+n^2y^2=c,$$

получим

$$(\sqrt{10}x)^2+12xy+(2y)^2=17\,800.$$

---

[1]) „Лекции“, стр. 214—215 русского перевода.

[2]) Предисловие к „Лекциям“ Нейгебауера, стр. 9—10.

[3]) Разрядка в оригинале.

Без труда получаем, прибавляя определенную величину, кратную xy, систему

$$(\sqrt{10}x)^2+2(\sqrt{10}x)(2y)+(2y)^2=10\,600+2\,400\sqrt{10},$$
$$(\sqrt{10}x)^2-2(\sqrt{10}x)(2y)+(2y)^2=10\,600-2\,400\sqrt{10}.$$

„Простое“ извлечение корня дает

$$\sqrt{10}x+2y=\sqrt{10\,600+2\,400\sqrt{10}},$$
$$\sqrt{10}x-2y=\sqrt{10\,600-2\,400\sqrt{10}},$$

откуда

$$x=\frac{1}{2\sqrt{10}}\left(\sqrt{10\,600+2\,400\sqrt{10}}+\sqrt{10\,600-2\,400\sqrt{10}}\right),$$
$$y=\frac{1}{4}\left(\sqrt{10\,600+2\,400\sqrt{10}}-\sqrt{10\,600-2\,400\sqrt{10}}\right).$$

Если вавилонский вычислитель умел найти отсюда, что $x=30$, а $y=20$, то он, вероятно, вообще не нуждался в геометрическом осмысливании. Если не умел, то предлагаемое С. Я. Лурье осмысливание мало подвинуло бы его к решению вопроса.

Попробуем теперь подойти к вопросу без предвзятой мысли и вместо постулирования процедур постараемся следовать имеющимся образцам вавилонской математики. Тогда мы сразу получим очень простое решение, прямо напрашивающееся из ознакомления с известным нам материалом.

Нашу систему уравнений

$$xy=600,$$
$$10x^2+12xy+4y^2=17\,800$$

можно, пользуясь первым ее соотношением, представить в виде

$$xy=600,$$
$$10x^2+4y^2=10\,600.$$

Примем $10x^2$ и $4y^2$ за вспомогательные неизвестные и представим наши уравнения в виде

$$10x^2\cdot 4y^2=40\cdot 600^2=14\,400\,000,$$
$$10x^2+4y^2=10\,600.$$

Совершенно такие же приемы, как мы видели (см. гл. II, § 16), применялись вавилонянами при решении системы квадратных уравнений. Мы приходим к типичной „канонической“ системе уравнений и должны определить две неизвестные величины, $10x^2$ и $4y^2$, по их сумме и произведению. Так как „длина“ x должна быть больше ширины y, то подавно $10x^2$ больше, чем $4y^2$, и наша система с помощью известного нам (стр. 137—138) приема получает единственное решение

$$10x^2 = 9\,000,$$

$$4y^2 = 1\,600,$$

откуда

$$x = 30,\ y = 20.$$

Конечно, это решение никак нельзя полностью осмыслить геометрически, поскольку выражение x^2y^2 — четвертого измерения. Но зато оно хорошо согласуется с засвидетельствованными приемами вавилонян, так что указанный способ является одним из тех, какими вавилонский математик *мог решить* рассматриваемую систему.

§ 19. Параллель между вавилонской математикой и египетской

В этой главе мы рассмотрели довольно обширный фактический материал, относящийся к математике древнего Вавилона. Мы далеко не исчерпали богатого материала источников и далеко не все возникающие вопросы смогли полностью разрешить. Однако документальный материал, приведенный в этой главе, с несомненностью свидетельствует о том, что древневавилонская математическая культура стояла на высоком уровне еще в отдаленнейшие доступные нам времена, т. е. за XVIII—XX веков до н. э. Примерно за 4 000 лет до наших дней вавилоняне владели развитыми методами вычисления и большим запасом геометрических знаний (в том числе „Пифагоровой" теоремой); они создали замечательную позиционную систему нумерации; они решили разнообразные конкретные задачи прямыми и косвенными методами; они поднялись до алгебраического рассмотрения отвлеченных задач; до конца справились с решением уравнений и систем уравнений второй степени и выработали довольно общие методы тождественных преобразований над известными и неизвестными величинами. Широко применяя метод введения вспомогательных неизвестных, они пытались применить его и к решению уравнений третьей степени. Повсюду широко применялись табличные расчеты, облегчавшие работу вычислителя.

В конце главы I было указано, что высокое развитие вавилонской математической культуры позволяет нам думать, что и в древнем Египте математические знания стояли на высоком уровне; что они были обширнее тех, о которых позволяют непосредственно судить наши источники. Некоторые соображения в пользу такого вывода были высказаны там же. Теперь, познакомившись с математикой древних вавилонян, мы можем их дополнить.

Вычислительная техника в двух великих странах древности имела, как мы видели, совершенно различный облик. Это вполне понятно, так как вычислительная техника вавилонян создавалась в специфических исторических условиях, которых и в помине не было в Египте. Но те практические потребности, которые вызвали к жизни постановку математических вопросов и способы их решения, были более или менее одинаковы в обеих странах. Как в Египте, так и в Вавилоне потребности землемерия породили учение об измерении площадей прямолинейных фигур; учет вместимости сосудов и амбаров породил правила измерения объемов, и мы видели, что египтяне достигли здесь тех же, а может быть и несколько бóльших результатов, чем вавилоняне: площадь круга в египетских текстах определяется гораздо точнее, чем в вавилонских; для объема усеченной пирамиды египтяне применяли точное правило; существовало ли оно в вавилонской математике — с уверенностью сказать нельзя[1]).

Хозяйственные и юридические взаимоотношения между людьми и в Египте и в Вавилоне вызвали к жизни ряд *типичных* арифметических задач: таковы, например, задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии. Задача на раздел зерна в египетском тексте (см. выше стр. 40) чрезвычайно напоминает и формулировкой и методом решения вавилонскую задачу на раздел имущества между братьями, вплоть до того, что число долей и там и здесь равно 10; решение задачи о кошках и мышах папируса Райнда (см. выше стр. 44) напоминает по форме решения вавилонскую задачу на суммирование прогрессии (см. выше стр. 105).

Удивительно близки друг к другу вавилонские и египетские математические тексты и по форме изложения: и там и здесь решение задачи преподается в догматической форме; не сообщаются ни доказательство правильности решения, ни смысл отдельных его шагов, ни анализ условия.

Эта догматическая форма, как мы ясно видели из вавилонских текстов, отнюдь не является доказательством отсутствия теоретического исследования, и потому не может служить аргументом в пользу примитивности математики древних египтян. Она обусловлена формой преподавания и всем строем общественной жизни в странах древнего

---

[1]) В одном вавилонском тексте (из него мы привели выше задачи об осадной насыпи, о стрелке в круге и др.) содержится определение объема усеченного конуса, который принимается равным произведению полусуммы площадей оснований на высоту („Математические клинописные тексты", т. I, стр. 156). В том же тексте определяется и объем усеченной квадратной пирамиды (там же, стр. 162). Способ вычисления не вполне ясен. Нейгебауер считает, что здесь употреблена точная формула $V = h\left[\left(\frac{a+b^2}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$, хотя он и считается с возможностью иных истолкований („Математические клинописные тексты", т. I, стр. 187). То, что для объема усеченного конуса в *том же* тексте дано неточное правило, во всяком случае ставит под сомнение правильность предлагаемого Нейгебауером толкования. В другом тексте и объем усеченной пирамиды определяется по формуле $V = \frac{h}{2}\left(S_1 + S_2\right)$ где S_1 и S_2 — площади оснований („Математические клинописные тексты", т. I, стр. 225).

Востока. Там, где высшие и средние государственные должности, как и ремесленные профессии, переходили из рода в род, где существовали не только династии царей, но и династии жрецов и чиновников, преподавание должно было сохранять авторитарный характер.

Мы познакомились с вавилонскими математическими текстами различных эпох и могли видеть, как мало изменилась форма изложения за промежуток времени, больший чем полтора тысячелетия! Лишь в математике древних греков доказательству впервые уделяется особое внимание, и это нужно поставить в связь с тем, что жизнь греческих государств в течение длительного времени характеризуется ломкой общественных форм; в бурных столкновениях между классовыми и партийными группами особую роль приобретает убеждение, доказательство; и это сказывается не только в речах политических ораторов, но и в судебных процессах, и в философских спорах, и в научных произведениях. Характерно, что в эллинистическую эпоху значительная часть греческих сочинений по математике, написанных на египетской территории, по форме изложения почти не отличается от древнеегипетских текстов. Это относится почти ко всем сочинениям, посвященным практическим применениям математики; образцы их читатель найдет в главе III (см., например, стр. 201 и 244). Как же велика должна быть сила традиции, если она подчинила своим требованиям произведения людей, которые воспитывались на трудах Евклида, Архимеда и Аполлония!

Итак, догматическая форма изложения совершенно не исключает наличия теоретической науки. Напротив, если мы встречаем изложенные в догматической форме такие результаты, которые могут быть выведены теоретически лишь при наличии значительных научных познаний, мы имеем все основания заключить о существовании этих познаний и не прибегать к допущению маловероятных „случайных“ эмпирических приобретений. Так, египетская формула объема усеченной пирамиды заставляет нас предполагать, что египтяне умели производить преобразования, аналогичные алгебраическим.

Это предположение, конечно, нуждается в проверке. К сожалению, непосредственной проверки, которая дала бы бесспорный результат, мы сделать не в состоянии. Египетская математика нам известна гораздо меньше, чем вавилонская. Правда, вавилонские математические тексты в значительной мере обрывочны и хуже сохранились, тогда как египетская математика представлена двумя большими связными текстами. Но зато по количеству и разнообразию материала вавилонские тексты гораздо богаче. Еще недавно, когда было известно лишь небольшое количество вавилонских текстов, трудно было даже предположить, что вавилонянам был известен общий метод решения квадратных уравнений. Позднее это было документально установлено. Наше предположение о том, что математические знания древних египтян были обширнее, чем это непосредственно обнаруживается, остается только предположением. Но сильным аргументом в его пользу, мне кажется, служит параллель с математикой вавилонян.

Мы только что видели, как близко соприкасаются вавилонская и египетская математика в ряде пунктов. Есть ли основание полагать, что эта близость идет и дальше? Думаю, да.

В самом деле, из какого источника возникли квадратные уравнения вавилонской математики? Несомненно из геометрических задач, в свою очередь отражавших прямо или косвенно потребности практики. Какие это были потребности? Вавилонские источники отвечают на этот вопрос с полной определенностью; в них мы находим задачи на расчет фундамента здания, плотин, осадных насыпей и т. п. Мы видели, что и терминология геометрических задач свидетельствует об их происхождении (так, полоса треугольника именуется „каналом“).

Но ведь строительная техника египтян стояла не на более низком уровне, чем вавилонская; плотины египтяне должны были делать не хуже, чем вавилоняне; устройство каналов приняло у них грандиозные размеры, архитектура же была поистине изумительна. При этих условиях отмеченное нами сходство становится вполне понятным, и естественно ожидать, что оно шло и значительно дальше. Мы не имеем прямых данных о том, чтобы египтяне решали полные квадратные уравнения. Но предположение об этом представляется мне весьма вероятным.

Лишь открытие новых источников позволит нам пролить больше света на все затронутые нами вопросы и, в частности, заглянуть вглубь тысячелетий, лучше понять математику древних египтян. Но уже сейчас ясно, какое историческое значение имела математика народов древнего Востока. Древнегреческая культура впитала в себя достижения ее, вероятно, в значительно большей мере, чем это нам известно; в следующей главе, посвященной вычислительной технике древних греков, мы увидим немало следов прямого ее влияния.

ГЛАВА III

Арифметика древних греков

§ 1. Устный и пальцевый счет

Ознакомление с арифметикой египтян и вавилонян мы начинали с рассмотрения письменной нумерации. Мы могли это сделать потому, что система нумерации в Египте и в Вавилоне была в такой же степени независимой от способа словесного счета, как и наша современная нумерация. Не так обстояло дело в арифметике древних греков. Их письменный счет опирался в значительной мере на языковые средства. Нам поэтому приходится начать с краткого обзора наименований чисел и способа составления вторичных числовых наименований из первичных. Как мы увидим, этот способ основан на почти строго выдержанной десятичной системе.

В древнегреческом языке, как и в русском, числительные от 1 до 10 включительно имеют особые названия, корни которых одинаковы с корнями языков большинства европейских народов, персов и индусов. Вот эти названия:

Греческое написание	Современное произношение	Русское значение	Близкие наименования в других языках
εἷς	eis	один	немецкое ein
δύο	düo	два	латинское duo, французское deux
τρεῖς	treis	три	немецкое drei, французское trois
τέτταρα	tettara	четыре	французское quatre
πέντε	pente	пять	персидское „пяндж“
ἕξ	hex	шесть	латинское sex, французское six, немецкое sechs
ἑπτά	hepta	семь	французское sept, латинское septem
ὀκτώ	okto	восемь	немецкое acht
ἐννέα	ennea	девять	немецкое neun
δέκα	deka	десять	латинское decem

Числа от 11 до 19 составляются по тому же „аддитивному“ способу, каким они образуются и по-русски (тринадцать = три на десять = 3 + 10). Грек говорил: τρεῖς καὶ δέκα, т. е. три и десять или слитно: τρισκαίδεκα, наподобие нашего „тринадцать“. Числа

20, 30,..., 90 имели так же, как и по-русски, особые названия, причем все они, за исключением названия для 20, производились от соответствующих чисел первого десятка единообразно. В этом отношении греческий язык последовательнее русского, в котором от общего принципа (двадцать=два десятка, тридцать=три десятка и т. д.) отступают два слова „сорок“ и „девяносто“. Греческое словообразование таково: τριάκοντα, τετταράκοντα, πεντέκοντα (triáconta, tettaráconta, pentékonta) и т. д. означают 30, 40, 50 и т. д. Название для 20, как сказано, представляет исключение; для него существует самостоятельное слово εἴκοσι (eikosi). Этот факт свидетельствует, что в более древние времена десятичная система счета комбинировалась с двадцатеричной. В ряде других языков наблюдается такое же явление: так, по-французски не только существует особое название vingt для 20, но и, например, 80 обозначается не как 8×10, а как 4×20 (quatre vingt). Образование чисел до 100 происходило у греков опять-таки вполне аналогично нашему словообразованию: например, тридцать семь = τριάκοντα ἑπτά. Впрочем, порядок слов мог изменяться, соответственно тому, как мы сказали бы „семь и тридцать“ вместо „тридцать семь“. Счет свыше 100 возник у греков, как и у других народов, повидимому, уже после ликвидации двадцатеричной системы, ибо названия чисел 200, 300,...,900 составлены по одному и тому же принципу из числительных 2, 3,...,9 и наименования для 100 — ἑκατόν (hekaton) — в несколько измененной форме. Между строением русских слов „две-сти, три-ста, четыре-ста и т. д. и греческих διακόσιοι, τριακόσιοι (diakosioi, triacosioi) и т. д. существует полная аналогия. Тысяча имеет снова особое название χίλιοι (chilioi), из которого образуются слова для 2 000, 3 000 совершенно так же, как слова для 200, 300 образуются из слова для 100: δισχίλιοι, τρεσχίλιοι (dischilioi, treschilioi) = 2 000, 3 000 и т. д. Греческий язык отличается от всех родственных ему языков тем, что он имеет особое обозначение, сверх того, для 10 000: μυρίοι (mürioi), от которого мы образовали слово „мириад“, обозначающее в нынешнем словоупотреблении какое-то неопределенно большое число[1]).

Конечно, эти названия образовывались постепенно, по мере роста арифметического кругозора, и, в частности, „предельное“ число, мириад, образовалось, вероятно, гораздо позднее остальных. Проследить эту эволюцию исторически в ее деталях мы, однако, не имеем возможности.

Точно так же за пределами наших знаний лежит и возникновение простейших способов счета у греков. Этнографические данные показывают, что примитивный счет всегда является „инструментальным“ и в качестве природного инструмента первая роль принадлежит пальцам руки. Отсюда, как известно, берет начало десятичная система счисления; отсюда же возникают у различных народов и зачаточные

---

[1]) Очень возможно, что такой смысл это слово имело и в его первом значении.

формы пятеричной системы (одна рука) и двадцатеричной системы (пальцы рук и ног). У многих народов пальцы рук остаются инструментом счета и на более высоких ступенях развития. К числу этих народов принадлежали и греки, сохранявшие счет на пальцах в качестве практического средства очень долгое время.

Мы обладаем одним интересным документом, в котором засвидетельствованы приемы пальцевого счета, доходящего до мириада. Это — письмо смирнского монаха Николая Артавасда (Рабды), обнаруженное в 80-х годах прошлого века известным историком науки П. Таннери [1]). Рабда жил в XIV веке н. э. Но нужно думать, что пальцевый счет с большими числами не представляет собой позднего приобретения вычислительной техники греков, а восходит, во всяком случае, к классической эпохе. Гульч [2]) отметил, что встречающееся в „Одиссее" слово πεμπάζειν (дословно „пятерить"), имеющее по смыслу значение „считать", свидетельствует о распространенности в гомеровскую эпоху пальцевого счета. Что этот счет мог переходить за тысячу, свидетельствует одно место из „Ос" Аристофана (конец V и начало IV века до н. э.). Одно из действующих лиц этой комедии доказывает здесь, что плата, получаемая афинскими судьями, составляет лишь незначительную часть доходов государства. Обращаясь к собеседнику, он говорит: „Подсчитай попросту, не на камешках, а на руках, все подати, поступающие нам от городов, да сверх того налоги, многочисленные сотые доли, судебные пошлины, рыночные сборы, морские пошлины, арендную плату и откупа. Все это вместе дает нам примерно две тысячи талантов (в год). Из этой суммы теперь положи ежегодную плату шести тысячам судей — больше пока не наберется в стране, — очевидно, получится у нас сто пятьдесят талантов" [3]).

Как мы видим, в эпоху Аристофана было привычным делом для счета с крупными числами пользоваться помощью рук, т. е. их пальцев.

§ 2. Абак

Пальцевый счет, очевидно, не мог удовлетворить возраставших в связи с ростом торговых операций потребностей вычислительной практики. Только этим, конечно, можно объяснить появление счетного прибора, по идее своей напоминающего наши счеты и известного в древности под именем абака (ἄβαξ).

О происхождении этого термина существуют разнообразные мнения. Некоторые авторы производят его от греческих корней, благо-

---

[1]) P. Tannery, Notices sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rabda, в „Notices et extraits des manuscripts de la bibliothèque nationale", т. XXXII, I partie, 1886, стр. 121—252. Oeuvres scientifiques, т. IV.

[2]) Hultsch, статья Arithmetica в „Pauly-Wissowa's Realencyclopedie der klassischen Altertumswissenschaft".

[3]) Аристофан, Осы, стихи 656—663. Для понимания этого места нужно иметь в виду, что 1 талант = 6000 драхмам, а 1 драхма = 6 оболам. Поденная плата судьям равнялась 3 оболам. В году здесь принимается 300 оплачиваемых дней.

даря чему значение его получает различный, впрочем каждый раз мало подходящий к делу смысл. Наиболее подходящим по смыслу толкованием этого рода является перевод: ἄβαξ = неговорящий; оно могло бы указывать на молчаливый характер процесса счета на абаке (Bayley)[1]. Я не вижу, однако, никаких оснований полагать, что счет на абаке должен был происходить более молчаливо, чем, например, на пальцах. Из практики операций на счетах мы знаем, что степень молчаливости зависит от индивидуальности счетчика. Гораздо более правдоподобным представляется другое толкование, производящее слово абак от семитического корня; согласно этому толкованию термин „абак“ означает дощечку, покрытую слоем пыли[2]).

Дело в том, что в своей примитивной форме абак представлял собой действительно такую дощечку (позднее он принял вид доски, разделенной на колонки перегородками). На ней проводились линии, разделявшие ее на колонки, а камешки раскладывались в эти колонки по тому же позиционному принципу, по которому кладется число на наши счеты. Это нам известно от ряда греческих авторов.

Кантор[3]), не подвергая сомнению эти свидетельства, считает, однако, что название „абак“ лишь случайно созвучно семитическому корню. Отсюда он заключает, что термин „абак“ чисто греческого происхождения. Вопрос о термине сам по себе имеет небольшое значение; но с ним связан вопрос о происхождении интересующего нас инструмента. А здесь можно с большой вероятностью утверждать, что абак был в Грецию ввезен извне. Действительно, Геродот сообщает, что египтяне пользуются абаком, причем в отличие от греков передвигают камешки не слева направо, а сверху вниз[4]). Отсюда вытекает, что в эпоху Геродота абак и в Греции, и в Египте уже пользовался широким распространением. Далее, указываемое Геродотом отличие носит несущественный характер, значит, в принципе египетский и греческий счет на абаке были одинаковы. Крайне вероятно поэтому, что они имели общий источник, одну „прародину“. Предполагать заимствование египтян у греков в эту эпоху не приходится. Поэтому нужно предположить, что абак был в Грецию завезен, скорее всего, финикийцами — народом семитического племени. Являлись ли изобретателями абака сами финикийцы или они лишь передали грекам изобретение другого народа, например египтян, — это сейчас вряд ли можно установить.

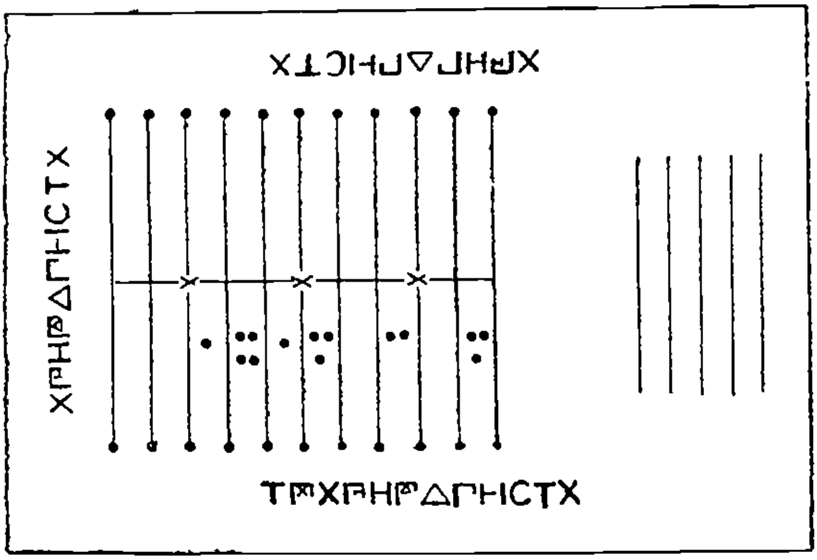
Абак был „походным инструментом“ греческого купца. О его коммерческом назначении свидетельствует то обстоятельство, что значения, приписываемые камешку в различных колонках, не выдержаны в постоянном числовом отношении друг к другу, а сообразованы с отношениями различных денежных единиц.

---

[1]) Journal of the R. Asiatic society, new series XIV, стр. 369, London 1882.
[2]) Nesselman, Algebra der Griechen, стр. 107, Berlin 1843.
[3]) Vorlesungen, т. I, стр. 131.
[4]) Геродот, История, II, 36.

Способ пользования абаком выясняется из рассмотрения приложенного черт. 14, воспроизводящего надпись на мраморной доске, найденной в середине прошлого века (1848 г.) на острове Саламине. На этой доске изображен абак с лежащими в его колонках счетными жетонами (в натуре доска имеет размеры 1,5 *м* $\times$ 0,75 *м*).

Буквы, стоящие сверху, снизу и слева от рисунка, раскрывают способ пользования абаком; значение этих букв мы рассмотрим ниже; теперь же укажем, к какому результату приводит их расшифровка. Первые три колонки абака служат для обозначения числа талантов, наивысшей весовой и денежной единицы. О соотношениях между значениями первых двух колонок наши надписи не говорят ничего, но судя по тому, что они дают для следующих разрядов, можно полагать, что в первой колонке каждый жетон означал пять талантов, а второй — один талант. В колонках 3 — 10 кладутся жетоны, дающие число драхм (1 талант = = 6000 драхмам). Первая справа пара колонок (9 — 10) служит для изображения единиц, вторая (7—8) пара — десятков, третья (5 — 6) — сотен и, наконец, последняя—для изображения числа тысяч драхм. Соединение их в пары производится по тому же принципу, по которому и



Черт. 14.

сейчас производятся выкладки на китайских счетах (только там вместо двух колонок одной пары служат две половины одной проволоки). Именно, в десятой колонке кладутся жетоны числом от 1 до 4 включительно; пять драхм обозначаются одним жетоном в девятой колонке; для изображения шести драхм кладется один жетон в девятую и один в десятую колонку и т. д. Аналогично обстоит дело и в остальных парах колонок. Таким образом один жетон, положенный в „драхмовые" колонки, обозначает (справа налево) 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1 000, 5 000 драхм. Что касается малых колонок справа, то они служат для обозначения числа оболов (1 драхма = 6 оболам) и халков (1 обол = 8 халкам). Именно, в первой слева колонке откладывалось число оболов; дальнейшее подразделение, соответственно отношению 8 : 1 между оболом и халком, шло так: жетон во второй слева колонке означал $^1/_2$ обола — 4 халка; в третьей $^1/_4$ обола = 2 халка; наконец, в четвертой — 1 халк. Что именно таков был способ пользования абаком, подтверждаесся как надписями на Саламинской доске (расшифровку которых мы вскоре дадим), так и свидетельством историка Полибия (203—161 до н. э.), который говорит[1]), что жетоны абака по желанию счетчика могут изображать и халк и талант.

Инструментальный счет играл несомненно большую роль в развитии арифметических знаний. Если греческий язык сохранил нам выражение πεμπάζειν, в котором отражается зависимость счетных процессов от пальцевого счета, то из латинского языка к нам перешло слово „калькуляция", которое означает — счет камешками (calculus в первом значении — камешек, во втором, переносном — исчисление).

Тем не менее уже на очень ранних ступенях, помимо инструментального счета, появляется письменное фиксирование чисел, из которого затем возникает и письменный счет. Совершенно естественно, что на первых порах фиксирование числа совершалось путем повторения единообразных знаков единицы: зарубки на палках, камнях и т. д. представляют примитивную форму такой записи. В египетской и вавилонской системе нумерации мы видели явные следы этой формы записи, когда внутри каждого разряда число изображается простым повторением одного и того же символа. В начале IV века до н. э. этот способ записи еще не исчез у греков; в одной надписи, относящейся к 391 г. до н. э.[2]), в словах „семь лет" число 7 изображено семью палочками: IIIIIII. Такой способ записи, конечно, не может удовлетворить даже самым скромным требованиям практики. Неудивительно, что греки стали пользоваться более совершенной нумерацией; эта последняя, в свою очередь, позднее была вытеснена новой системой, прочно утвердившейся в странах греческой культуры и распространившейся впоследствии во всех областях, затронутых влиянием восточного христианства (например, в России, Армении, Абиссинии и других странах). Некоторое время обе эти системы существовали параллельно друг другу.

§ 3. Аттическая нумерация

Первую из этих систем нумерации часто называли Геродиановой, по имени историка Геродиана (II—III века н. э.), из сообщения которого западноевропейские историки впервые узнали о ее существовании. Во второй половине XIX века были найдены и древние надписи на каменных плитах, в которых числа обозначались „геродиановыми знаками". Древнейшие из этих надписей относятся к VI веку до н. э.

Числовым знаком единицы здесь также является черта; повторение черт дает числа до 4 включительно. Для числа 5 существует особый знак $\Gamma = 5$. Особые знаки существуют и для десятка, сотни, тысячи и мириада: $\Delta = 10$, $\mathrm{H} = 100$; $\mathrm{X} = 1\,000$; $\mathrm{M} = 10\,000$.

---

[1]) Полибий V, 26, 13.

[2]) M. Cantor, Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker, Halle 1863, стр. 113.

Эти знаки представляют собой буквы греческого алфавита. Теперь это „заглавные" или „большие" буквы; в древности, когда материалом для письма был камень, никаких иных букв не существовало; но и позднée долгое время буквы сохраняли эту форму; лишь медленно эволюционировала она в сторону приближения к нынешним „строчным" буквам.

Какова же связь этих букв с числами, ими изображаемыми? Еще в конце XVII века Валлис[1]) высказал предположение, что это — начальные буквы названий соответствующих чисел. Для знаков Δ („дельта" — произносится, как русское „д"), X („хи" — произносится, как русское „х") и M („мю" — произносится как „м") — это совершенно очевидно (см. греческие названия чисел, стр. 169). Но знаки Г и H, если их читать, как принято, означают „гамму" (читается „г") и „эту" (читается „э"). Эти буквы не совпадают с начальными буквами слов ΠΕΝΤΕ (пять) и ʼΕΚΑΤΟΝ (сто). Это несоответствие Валлис объяснил тем, что в начертании Г мы имеем видоизменение начертания Π; что касается буквы H, то Валлис полагал, что слово „сто" писалось прежде не через „эпсилон", а через „эту" ʼΗΚΑΤΟΝ.

Догадка Валлиса лишь немногим отступает от истины. Во время Валлиса не было известно, что буква Г в аттических областях употреблялась для обозначения звука „п", а не „г"[2]). Точно так же Валлис не мог знать, что в аттическом алфавите буква H читалась не как „э", а как придыхание (т. е. так же, как латинское h). Таким образом слово hẹkaton в Аттике имело начертание HEKATON. В ионийском же алфавите, ставшем позднее общегреческим, придыхание вовсе не обозначалось (нынешний знак придыхания позднейшего происхождения).

Мы можем, следовательно, сказать, что вышеприведенные знаки для 5, 10, 100, 1 000 и 10 000 являются начальными буквами соответствующих слов греческого языка. Кроме того, мы может с несомненностью заключить, что родиной „геродиановых знаков" была Аттика, хотя, как свидетельствуют памятники, ими пользовались во всей Греции. Поэтому систему нумерации, которую мы сейчас описываем, правильнее именовать „аттической".

В аттической системе нумерации числа изображались следующим образом: для чисел до 4 включительно, как мы видели, писали соответствующее число черт. Но для чисел от 5 до 9 не было необходимости нагромождать новые черты. Они записывались так:

$$\Gamma = 5,\ \Gamma\mathrm{I} = 6,\ \Gamma\mathrm{II} = 7,\ \Gamma\mathrm{III} = 8,\ \Gamma\mathrm{IIII} = 9.$$

Числа, большие десяти, записывались по десятичной системе; но вместо простого повторения знаков соответствующего разряда в том

[1]) Wallis, Opera mathematica, т. I, стр. 45. Oxoniae, 1695.

[2]) Греки заимствовали свой алфавит от финикийцев; но финикийских знаков было недостаточно для изображения всех звуков греческого языка. Поэтому алфавит подвергался видоизменениям и в разных областях его изменяли по-разному.

случае, когда число их превосходило бы пять, употреблялись „комбинированные знаки“:

$$𐅄 = 50, \quad 𐅅 = 500, \quad 𐅆 = 5\,000.$$

Таким образом

$$\Delta\Delta = 20, \quad 𐅄\ \Delta\Delta = 70.$$

$$\mathrm{HH} = 200, \quad 𐅅\ \mathrm{HH} = 700.$$

Способ записи произвольного целого числа в аттической системе выясняется вполне на следующих примерах:

$$\Delta\Delta\Delta\Gamma = 35, \quad 𐅄\ \Delta\Delta\Gamma\mathrm{III} = 78, \quad \mathrm{HHHH}\Delta\Delta\Gamma = 425,$$

$$𐅆\ \mathrm{XX}\ 𐅅\ \mathrm{HHH}\Delta\mathrm{IIII} = 7\,814.$$

Таким образом аттическая система нумерации весьма напоминает систему „римской нумерации“, которой мы пользуемся довольно часто и поныне. Отличие ее от римской заключается в том, что последняя применяет еще и „принцип вычитания“ ($\mathrm{IX} = 10 - 1 = 9$; $\mathrm{IV} = 5 - 1 = 4$ и т. д.), которым греки никогда не пользуются. Это отличие греческой и римской нумераций находит соответствие в различии языков римлян и греков. В латинском языке числительные могут образоваться с помощью принципа вычитания (например, undeviginti = одним меньше двадцати = 19), тогда как в греческом языке такое словообразование, хотя и встречается параллельно с аддитивным, но употребляется очень редко.

Как образовалась эта система нумерации? Вопреки Лориа[1]), считающему безнадежной „всякую попытку определить, кто ее изобрел“, я думаю, что можно с уверенностью утверждать, что ее никто не изобрел: она представляет собой продукт длительного развития и коллективного творчества. Действительно, совершенно ясно, что символы 𐅄 и т. п. представляют собой комбинацию ранее существовавших знаков для Γ и Δ и что, следовательно, аттическая система не была обязанной своим возникновением однократному изобретательскому акту.

Интересно отметить, что в древнегреческих надписях названия многих мер обозначаются также начальными буквами соответствующих слов и что обозначения мер комбинировались с числовыми, как равноправные. Буква Т, например, означала талант, самую крупную единицу веса и денег, а также четверть обола (ибо слово „четверть“ — по-гречески τεταρτομόριον — также начиналось с той же буквы). Буквой Х обозначался халк — самая мелкая денежная единица $= {}^1/_8$ обола.

Для других же мер имелись „смысловые“ обозначения, своего рода иероглифы. Так, ${}^1/_2$ обола обозначается знаком C (явно изображающим половину круглого предмета; драхма (6 оболов)

[1]) G. Loria, Le scienze esatte nell'antica Grecia, Milano 1914, стр. 753—754.

изображается знаком ⊢ (происхождение этого знака не установлено).

Как эти обозначения комбинировались с числовыми знаками, показывает запись:

𐅋 𐅋 𐅋 𐅄 ТТГ,

означающая 353 таланта. В последних трех знаках „талант“ = Т играет роль единицы. В первых трех знаках обозначение Н = 100 скомбинировано с обозначением Т = талант; наконец, — средний знак „чисто числовой“.

Эта любопытная запись показывает, что первоначально аттические числовые знаки были символами чисел не отвлеченных, а „конкретных“, именно денежных сумм. Постепенно они стали применяться для обозначения и других мер; тогда, для того чтобы подчеркнуть, что речь идет о денежной сумме, стали применять особые обозначения; в нашем примере мы имели 𐅋 = 100 талантов. Подобным же образом символ 𐅍, представляющий комбинацию букв X (знак 1 000) и Т (обозначение таланта) обозначал 1 000 талантов; символ 𐅃 (комбинация ⊢ и Г) 5 драхм и т. д.

На связь аттических числовых знаков с денежно-весовыми мерами указывает также параллель между системой аттических цифр и структурой абака, употреблявшегося в первую очередь для подсчета денежных сумм. Именно, четыре пары больших колонн абака в точности соответствуют последовательности цифр аттической нумерации: камешек, положенный в них, означает (слева направо на черт. 14) 1 обол, 5 оболов, 10 оболов, 50 оболов, 100 оболов, 500 оболов, 1 000 оболов, 5 000 оболов.

Теперь нам будет понятна и надпись на Саламинской доске, разъяснение которой мы в свое время отложили. Буквы, стоящие снизу:

Т 𐅆 X 𐅅 Н 𐅄 ΔГ⊢ІСТХ

должны читаться: 1 талант, 5 000, 1 000, 500, 100, 50, 10, 5, 1 драхма, 1 обол, полобола, четверть обола, 1 халк, т. е. они дают значения камешка, положенного в последовательные колонны абака. Что касается букв, стоящих сверху и слева, то они дважды повторяют тот же ряд букв, что стоит слева, но почему-то без первых двух знаков. Быть может это указывает на то, что существовали и более „короткие“ абаки? Пока на этот вопрос ответить еще нельзя.

§ 4. Ионийская нумерация

Вышеописанная система нумерации продержалась в Аттике до начала I века н. э. В других греческих землях она была вытеснена новой системой нумерации уже задолго до этого времени; в Аттике же она искусственно поддерживалась государством, руководившимся „патриотическими“ соображениями и требовавшим, чтобы во всех официальных документах сохранялась аттическая нумерация. Аналогичную картину мы встретим в истории не раз: римская церковь долго препятствовала распространению „арабской“ системы нумерации в западноевропейских государствах, предписывая пользоваться римской нумерацией, а когда арабско-индусская нумерация упрочилась уже в Западной Европе, в России продолжали пользоваться старой, освященной церковной традицией „славянской“ нумерацией.

Эта „славянская“ нумерация была построена по образцу той древнегреческой системы, которая вытеснила аттическую. По своему характеру эта новая система нумерации может быть названа алфавитной, так как для изображения чисел употребляются буквы с использованием их порядка в алфавите.

Свой алфавит греки заимствовали у финикийцев; это заимствование было сделано очень рано, вероятно, в X веке до н. э. Во всяком случае мы знаем греческие надписи, относящиеся к VIII веку до н. э.; в них мы находим те же знаки греко-финикийского алфавита.

Заимствование финикийского алфавита носило, очевидно, стихийный характер; по крайней мере в различных греческих областях одни и те же буквенные знаки получали различные значения и единая форма алфавита установилась лишь на рубеже V и IV веков до н. э. С этого времени становится общегреческим так называемый „ионийский“ алфавит.

В финикийском алфавите, как и в еврейском, от которого финикийский отличается лишь несущественными деталями в форме букв, имеется 22 основных символа, употребляющихся для обозначения согласных букв. Гласные звуки, которые в семитических языках не остаются неизменными в корнях слов, вовсе не обозначались на письме и не имели соответствующих букв в алфавите.

Соответственно с тем, что гласные звуки в греческом языке играют не менее важную роль, чем согласные, греки использовали некоторые буквы финикийского алфавита для обозначения гласных, для чего, конечно, их нужно было по-гречески читать иначе, чем по-финикийски. При этих обстоятельствах букв финикийского алфавита оказалось недостаточно для изображения звуков греческого языка. Поэтому пришлось ввести несколько новых знаков, отсутствовавших в финикийском алфавите. Алфавитный порядок финикийских букв не подвергался никаким изменениям, а вновь вводимые знаки занимали последние места в греческом алфавите. В происходившей позднейшей эволюции три знака финикийского алфавита вовсе исчезли из греческого алфавита; это 1) знак „вав“ (греческое „фау“), занимавший шестое место (финикийская форма 𐤅, раннегреческая Ϝ); 2) знак „коф“ (греческая „коппа“), занимавший девятнадцатое место (финикийская форма Φ, раннегреческая Ϙ); 3) знак „цад“ (греческая „сампи“), занимавший восемнадцатое место (финикийская форма 𐤑, греческая ϡ и Ͳ) [1]. Знаки эти исчезали в разных местах в различное время. Так, буква „сампи“ с середины V века уже исчезла из

[1]) Финикийцы писали справа налево; греки первоначально сохранили это направление; впоследствие они стали писать в обоих направлениях

милетского алфавита, тогда как в других алфавитах она в это время еще удерживалась. Это последнее замечание будет иметь для нас существенное значение в дальнейшем.

Если мы присоединим к заимствованным у финикийцев знакам еще пять последних букв, добавленных греками, то вместе с выпавшими в конце концов тремя архаическими буквами мы получим 27 знаков, расположенных в следующем порядке (в скобки заключены три архаических знака).

1) Α (альфа), 2) Β (бета), 3) Γ (гамма), 4) Δ (дельта), 5) Ε (эпсилон), 6) [Ϝ (фау)], 7) Ζ (дзета), 8) Η (эта), 9) Θ (тета), 10) Ι (иота), 11) Κ (каппа), 12) Λ (ламбда), 13) Μ (мю), 14) Ν (ню), 15) Ξ (кси), 16) Ο (омикрон), 17) Π (пи), 18) [Ϡ (сампи)], 19) [Ϙ (коппа)], 20) Ρ (ро), 21) Σ (сигма), 22) Τ (тау), 23) Υ (ипсилон), 24) Φ (фи), 25) Χ (хи), 26) Ψ (пси), 27) Ω (омега).

Эти 27 буквенных знаков и играют роль цифр в алфавитной системе нумерации древних греков.

В основу последней положен десятичный, но не „позиционный" принцип; именно, числа первого десятка до 9 включительно обозначаются подряд девятью первыми буквами алфавита. Следующие 9 букв употребляются для обозначения чисел 10, 20, 30,..., до 90 включительно. Наконец, остающиеся буквы, опять-таки в алфавитном порядке, должны давать числа, кратные 100. Этот принцип осуществлен в греческой нумерации следующим образом: для чисел 1—9 взяты все первые 9 знаков вышеприведенной таблицы, не исключая архаической буквы фау, которая в своем несколько видоизмененном начертании Ϝ получила название „дигамма", т. е. „двойная гамма", и стала играть роль цифры 6. Впоследствии, когда появились скорописные формы букв (в это время „дигамма" уже бесследно утратила свою связь с алфавитом), стали писать скорописью, вместе с другими цифрами, и цифру 6. По внешнему сходству начертаний ее стали обозначать знаком „стигма", писавшимся ς, читавшимся как st и происшедшим от слияния букв σ и τ. Таким образом числа 1—9 записывались так: $\mathrm{A}=1$, $\mathrm{B}=2$, $\Gamma=3$, $\Delta=4$, $\mathrm{E}=5$, Ϝ $=6$, $\mathrm{Z}=7$, $\mathrm{H}=8$, $\Theta=9$. В принятой сейчас форме древнегреческого шрифта эти цифры воспроизводятся следующим образом: $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$, $\delta=4$, $\epsilon=5$, $\varsigma=6$, $\zeta=7$, $\eta=8$, $\vartheta=9$. Что касается чисел 10—90, то здесь мы имеем странное, на первый взгляд, явление; восемнадцатая буква архаического алфавита („сампи") не использована, тогда

(нечетные строки справа налево, четные — слева направо), что давало некоторые удобства при письме, но делало неустойчивой форму букв; наконец, возобладало то направление, которое позднее заимствовано было всеми европейскими народами; при этом и начертания букв претерпели зеркальные отображения. Так, буква гамма стала писаться Γ, тогда как раньше имела вид 1, в точности совпадающий с видом финикийского знака „гимел". Если иметь в виду это замечание, то сходство приведенных греческих и финикийских знаков будет совершенно явным. Заметим также, что „фау" и „коппа" явились прототипом букв F и Q латинского шрифта, а „сампи" — прототипом букв Ч и Ц славянского (и, следовательно, русского) алфавита.

как девятнадцатая буква („коппа“) вошла в состав числовых знаков, заняв в их ряду восемнадцатое место, т. е. получив значение не 100, которое она имела бы при использовании всех букв финикийского алфавита, а 90; таким образом числа 10—90 представляются в ионийской нумерации так (в скобках даны нынешние „строчные“ обозначения, происшедшие из скорописных букв). $\mathrm{I}(\iota)=10$, $\mathrm{K}(\varkappa)=20$, $\Lambda(\lambda)=30$, $\mathrm{M}(\mu)=40$, $\mathrm{N}(\nu)=50$, $\Xi(\xi)=60$, $\mathrm{O}(o)=70$, $\Pi(\pi)=80$, ϙ (ϟ) = 90. Но выпавшее „сампи“ не исчезло вовсе из системы нумерации; оно появилось на последнем месте в значении 900. В остальном порядок алфавита оказался ненарушенным. Таким образом числа 100—900 в ионийской системе нумерации представляются так:

$$\mathrm{P}(\rho)=100,\ \Sigma(\sigma)=200,\ \mathrm{T}(\tau)=300,\ \Upsilon(\upsilon)=400,$$

$$\Phi(\varphi)=500,\ \mathrm{X}(\chi)=600,\ \Psi(\psi)=700,\ \Omega(\omega)=800,$$ Ͳ (ϡ) = 900.

В этой алфавитной системе нумерации каждое число, меньшее 1 000, может представляться не бо́льшим числом знаков, чем в нашей системе нумерации; только вместо 10 цифр мы имеем здесь 27 (как записывались числа, бо́льшие чем 999, будет сказано ниже)[1]). Для примера приведем несколько числовых обозначений по алфавитной системе:

Ι Ϛ (ιϛ) = 16, $\mathrm{IA}(\iota\alpha)=11$, $\mathrm{PA}(\rho\alpha)=101$, $\mathrm{PN}(\rho\nu)=150$,

$\mathrm{POH}(\rho o\eta)=178$, Υ ϙ Γ (υ ϟ γ) = 493, $\Pi\Theta(\pi\vartheta)=89$ и т. д.

Чтобы отличить числовые знаки от буквенных, употреблялись различные знаки: иногда справа и слева от числа ставились знаки : или ⋮ иногда ставилась черта над числовыми знаками и т. д. В современной транскрипции числовой знак сопровождается обычно штрихом сверху справа от последней цифры, например $\pi\vartheta'=89$.

Прежде чем дать оценку оперативных возможностей, представляемых этой системой, и показать, как греки использовали эти возможности в своих вычислениях, мы остановимся на вопросе о происхождении алфавитной нумерации.

§ 5. Происхождение ионийской нумерации

Древнейший памятник, в котором встречается ионийская система нумерации, относится к середине V века. Это — надпись, покрывающая четыре вертикальные грани камня, она найдена при раскопках древнего Галикарнасса (в Малой Азии[2]).

---

[1]) Рекомендую читателю для облегчения чтения дальнейшего текста книги выписать для себя следующую схему ионийских цифр:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Единицы	α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	ϑ
Десятки	ι	ϰ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ
Сотни	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ

[2]) Sylloge inscriptionum graecarum; iterum edidit G. Dittenberger, 1898, т. I, стр. 19—23.

Эта надпись представляет собой акт продажи в рабство должников галикарнасских храмов и продажи принадлежащего им имущества. В ней неоднократно встречаются числовые знаки и, что особенно любопытно, на одной грани камня числа представлены в аттической системе нумерации, на трех же остальных — в алфавитной [1]).

Далее, при раскопках Галикарнасского мавзолея, воздвигнутого около 350 г., найдены две шкатулки, на крышках которых поставлены цифры ΨΝΔ = 754 и ΣϘΓ = 293 [2]).

К той же эпохе относится список жрецов храма Посейдона в Галикарнассе, дошедший до нас, правда, в позднейшей копии (II или I века до н. э.). Можно, однако, полагать, что эта копия точно передает оригинал и что, следовательно, алфавитная нумерация, применяемая там для обозначения сроков пребывания упоминаемых там лиц на их постах, восходит к середине IV века [3]).

К тому же времени относится и загадочная афинская надпись, в которой не содержится ничего, кроме нескольких десятков пар букв, из которых нельзя образовать никаких смысловых сочетаний и которые поэтому могут быть только числовыми знаками алфавитной системы. Эти двузначные числа записаны в виде прямоугольной матрицы, на манер таблицы с двойным входом. Но каково назначение таблицы и что за смысл вкладывается в ее числа — никому пока неизвестно. Интересно, что все эти числа записаны так, что десятки стоят справа, а единицы слева.

Как ни малочисленны эти древнейшие памятники, свидетельствующие об употреблении алфавитной системы нумерации, они позволяют с несомненностью установить, что в V веке алфавитной нумерацией пользовались в малоазиатских греческих поселениях. Далее, если упомянутая выше афинская надпись содержит действительно числовые знаки (а других возможностей никто еще не указал), то это значит, что в IV веке алфавитная нумерация становится известной и в метрополии.

Родиной этой алфавитной системы, однако, не может быть ни одна из местностей метрополии. Это вытекает прежде всего из того, что буквы Φ, Χ, Ψ, которые, как указывалось выше, не были заимствованы у финикийцев, а добавлены греками, лишь у малоазиатских (ионийских) греков шли в том порядке, в каком они здесь приведены и в каком они используются в системе алфавитной нумерации. Поэтому алфавитную систему нумерации с полным основанием называют „ионийской“; так ее будем впредь именовать и мы.

Итак, мы определили и верхнюю границу времени возникновения ионийской системы (не позднее V века до н. э.) и географические границы места ее возникновения. Они довольно широки. Можно,

---

[1]) Кейль объясняет это различие тем, что денежно-весовые суммы, обозначенные на одной стороне, выражены в вавилонских единицах (статерах), а суммы, обозначенные на остальных трех гранях, выражены в финикийских единицах (драхмах). См. B. Keil, Eine halikarnassische Inschrift. Hermes, т. 29 (1894), стр. 260.

[2]) Th. Heath, A History of greec mathematics, т. I, стр. 33.

[3]) Keil, цит. работа, стр. 273.

однако, попытаться сузить их и определить как место, так и время возникновения ионийской нумерации более точно. Для этого мы обратим внимание на порядок, в котором входят в нумерацию архаические буквы „фау", „коппа" и „сампи". Мы уже знаем, что в алфавитной нумерации буква „сампи" выпала из своего натурального места и перешла в конец, тогда как две другие архаические буквы, „фау" и „коппа", остались на своих местах. Отсюда можно сделать вывод: алфавитная нумерация возникла в то время (и в том месте), когда (и где) буквы „фау" и „коппа" *еще* не исчезли из алфавита, а буква „сампи" *уже* исчезла. Исходя из этих соображений, Ларфельд[1]) устанавливает, что греческая алфавитная нумерация возникла в Милете в середине VIII века до н, э. Именно, он показывает, что *одновременное* присутствие в алфавите буквы „коппа" и отсутствие буквы „сампи" возможно *только* для Милета VIII века. Гипотеза Ларфельда не оставляла бы желать ничего лучшего, если бы в милетском алфавите была бы налицо также и буква „фау". Но ни в одной из известных милетских надписей буква „фау" не встречается. Ларфельд, опираясь на наличие этой буквы в надписи на одной из ионических ваз VIII—VII века до н. э., делает заключение, что эта буква *могла* удерживаться в VIII веке еще и в Милете, хотя бы из общего употребления она там уже и вышла.

Это последнее утверждение вызвало возражение Кейля[2]) (B. Keil). Правда, Кейль не указывает, где и когда могли одновременно существовать Ϝ и Ϙ и отсутствовать Ͳ и, повидимому, такого стечения обстоятельств никогда и нигде и не было. Но этого Кейлю и не требуется, ибо он отвергает самую предпосылку умозаключения Ларфельда и считает вполне возможным, что в алфавитной нумерации могли быть использованы на надлежащем месте и те буквы, которые из алфавита уже исчезли. При определении места и времени возникновения ионийской системы нумерации Кейль исходит из того, что древнейшие известные нам записи чисел по ионийской системе найдены в Галикарнассе. Из других мест, в частности, из Милета, мы не имеем столь же ранних памятников. Это дает основание Кейлю заключить, что родиной ионийской системы нумерации была прилегающая к Галикарнассу область Кария.

В гипотезе Кейля есть одно уязвимое место. Дело в том, что в Галикарнассе „фау" и „коппа" вышли из употребления гораздо раньше, чем „сампи". Поэтому непонятно, как могло получиться, что две первые буквы сохранили свое место, а последняя потеряла его. Кейль предвидел, что это соображение может быть выдвинуто в качестве возражения. Он отвечал на него следующим образом[3]). Изобретение числовой системы (Кейль приписывает создание ее индивидуальному изобретению) было сделано человеком, знакомым с алфавитами областей, соседних с Карией. В некоторых из них еще

---

[1]) Larfeld, Handbuch der griechischen Epigraphik, т. I, стр. 417.
[2]) Журнал Hermes, т. 29, 1894, стр. 265—266.
[3]) Цит. работа, стр. 266—267.

сохранялись буквы F и Ϙ, занимавшие положенные им места. Автор системы заимствовал эти два алфавитных знака из чужих алфавитов; естественно, их места остались за ними.. Что же касается „сампи“, то при начертании греческих слов нигде уже не пользовались этой буквой и поэтому ее место в алфавите было забыто. Однако буквой этой пользовались еще при начертании не-греческих, варварских слов. В частности, самое название города Галикарнасса писалось через сампи (произносившемся, как двойное „s“): ΑΛΙΚΑΡΝΑΤΕΩΣ. Поэтому автор-галикарнассец V века должен был знать начертание буквы „сампи“, но мог не знать ее алфавитного места и потому поместил „сампи“ в конце своего цифрового ряда.

Несмотря на эти разъяснения, гипотеза Кейля не убедила Ларфельда. В своих более поздних работах[1]) он останавливается на доводах Кейля и, в частности, указывает, что букву „фау“ в рамках периода, указываемого Кейлем, автор ионийской системы мог бы найти лишь в метрополии и, таким образом, не мог использовать алфавиты близких к Галикарнассу областей (в частности, островов Родоса, Наксоса и Пароса, на которые указывал Кейль). Ларфельд считает невероятным, чтобы автор, сумевший заимствовать из дальних краев букву „фау“, не сумел разыскать правильного места для „сампи“, которой в его время еще продолжали пользоваться на его родине, хотя бы при начертании лишь не-греческих слов.

Таковы соображения Ларфельда; они представляются мне более убедительными, чем теория Кейля.

Возможно, однако, и еще одно решение вопроса, одинаково далекое от обеих вышеизложенных гипотез.

Мы знаем, что свой алфавит греки заимствовали у финикийцев. Не могли ли они у них же заимствовать и принципы алфавитной системы нумерации?

На этот вопрос все исследователи отвечают отрицательно, опираясь на то, что финикийцы, у которых греки заимствовали алфавит, не имели алфавитной иумерации (финикийцы пользовались для обозначения чисел повторением знаков единиц, десятков и т. д.). Но ие имело ли здесь место влияние других семитических народов, пользовавшихся шрифтами, близкими к финикийскому?

В этой связи небезынтересно отметить, что у древних евреев, имевших в своем алфавите те же 22 буквы, что финикийцы, установлено пользование алфавитной нумерацией: до 400 включительно числа записывались по тому же принципу, что и в греческой алфавитной системе. Числа 500, 600, 700, 800 и 900 „непоследовательно“ писались по принципу $500 = 400 + 100, \ldots, \quad 900 = 400 + 400 + 100$. Аналогичным способом пользовались сирийцы. Позднее у евреев появились даже особые знаки чисел 500—900; именно, буквы, изображающие числа 20, 40, 50, 80, 90, имели помимо осиовной своей формы, в которой

---

[1]) Например, Larfeld, Griechische Epigraphik в „J. Müller's Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft“, т. I, тетр. 5, 1914, стр. 291.

они писались в начале и середине слова, еще вторую, в которой они писались в конце слова. Используя эти вторые формы, евреи получили недостающие пять числовых знаков для 500, 600, 700, 800 и 900.

Древнейшие известные нам случаи применения „ионийской“ нумерации у евреев относятся ко II веку до н. э., т. е. ко времени, когда весь ближний Восток уже стал эллинистическим. Поэтому нельзя утверждать, что греки заимствовали алфавитную нумерацию у евреев. Однако нельзя все же исключить возможность того, что греки заимствовали свою нумерацию от какого-нибудь семитического народа.

Насколько мне известно, никто из историков греческой культуры не ставил вопроса о связи между ионийской нумерацией и нумерацией арабов. Я имею в виду не ту нумерацию, которая ныне неправильно именуется арабской и которую арабы, по их собственным свидетельствам, заимствовали у индусов (вероятно, в VIII веке н. э.). Речь идет о староарабской нумерации, которая и поныне, в некоторых случаях, употребляется в арабских странах наряду с индусской, подобно тому, как мы наряду с индусской пользуемся римской нумерацией.

Сопоставление ионийской нумерации с арабской особенно интересно потому, что оно могло бы, вероятно, пролить свет на загадочное переселение буквы „сампи“ с ее натурального места в конец алфавитной цифровой системы.

Арабский алфавит имеет ныне 28 букв, т. е. на одну больше, чем требуется для построения алфавитной нумерации по ионийской системе. Некоторые из этих букв имеют совершенно одинаковую форму и отличаются друг от друга только точками, поставленными при буквах. Повидимому, это различение является продуктом сравнительно позднего времени, и ориенталисты, вероятно, знают, к какой эпохе оно относится. Для нашей цели важно отметить, что в арабской нумерации использованы все 28 букв, так что некоторые цифры отличаются друг от друга только по числу точек или по их местоположению. Это обстоятельство как будто свидетельствует о позднем происхождении арабской нумерации и делает вероятным заимствование ее у греков. Однако возможно, что в более древние времена арабы пользовались менее совершенной нумерацией, наподобие древнееврейской, а позднее с усовершенствованием алфавита усовершенствовали и нумерацию.

В пользу последнего предположения говорит то обстоятельство, что *никакого беспорядка в использовании букв алфавита арабской нумерации нет*. Первые 22 буквы староарабского алфавита следуют друг за другом в том же порядке, как соответствующие им греческие буквы (включая архаические „фау“, „сампи“ и „коппу“). Числовые их значения до 17-й буквы включительно (греческая „пи“, арабское „фе“) совпадают с числовыми значениями букв ионийской нумерации, так что буква „пи“ („фе“) означает 80.

Но для обозначения 90 в арабской нумерации употребляется буква „сампи", которая в ионийской нумерации, как мы знаем, перешла в конец цифрового ряда. В соответствии с этим числа 100, 200, 300, 400 обозначаются буквами „коппа", „ро", „сигма", „тау" (gaf, re, šin, te). В отношении (от 23-й до 28-й буквы) арабский алфавит теряет свое соответствие с греческим; буквы 23—27 выражают числа 500, 600, 700, 800 и 900, а 28-я буква употребляется для изображения 1 000.

Как мы видим, буква „сампи" стоит в арабской нумерации на своем собственном месте, и потому арабская нумерация во всяком случае не скопирована с ионийской. Может быть она представляет собой ее исправление? На этот вопрос пусть ответят ориенталисты. Если ответ будет отрицательным, то мы с полным основанием сможем считать, что родиной ионийской нумерации является Ближний Восток.

Тот факт, что ионийская система оказалась способной вытеснить аттическую, что в конце концов даже националистическая традиция в Афинах была сломлена, должен, казалось бы, служить доказательством преимущества алфавитной системы. Вопреки этому некоторые исследователи (Cantor, Gow) полагают, что алфавитиая система нумерации представляет собой *шаг назад* по сравнению с аттической. „Так сильна у большинства историков привычка считать за прогрессивное всякое позднейшее историческое явление, что вообразили, будто и здесь мы имеем дело с продвижением вперед, и тогда введение алфавитного метода не требовало никакого особого объяснения". Так говорит Кантор[1]) и вслед за тем указывает два пункта, в которых новая система, по его мнению, делает решительный шаг назад по сравнению со старой. Прежде всего алфавитная система утруждает память гораздо больше, чем аттическая, ибо имеет больше самостоятельных знаков. Во-вторых, она требует большего напряжения при выполнении действий. „Сложение $\Delta\Delta\Delta + \Delta\Delta\Delta\Delta = {}^{\Delta}\!\Gamma\,\Delta\Delta$ $(30 + 40 = 70)$ можно слить в один психический акт со сложением $\mathrm{HHH} + \mathrm{HHHH} = {}^{\mathrm{H}}\!\Gamma\,\mathrm{HH}$ $(300 + 400 = 700)$, поскольку и там и здесь три и четыре однородные единицы соединяются в пять и две единицы того же рода. Но имея $\lambda + \mu = o$, мы никак не получаем отсюда непосредственно $\tau + \upsilon = \psi$". Единственным преимуществом новой системы была, по мнению Кантора, возможность значительной экономии места при письме. Отсюда вывод: „не вычислители, а писцы предпочли старым громоздким обозначениям чисел новые, а так как в широких народных кругах было больше людей, которые писали, чем тех, которые вычисляли, то новый алфавитный метод и нашел себе столь быстрый и общий прием".

В рассуждениях Кантора имеются две существенные ошибки. Прежде всего совершенно упускается из виду, что *краткость* записи есть необходимое условие для быстроты и успешности вычислений. Дейст-

[1]) Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, т. I, стр. 129.

вительно, трудно себе даже представить, как мог бы, например, Архимед производить умножение, деление, извлечение квадратного корня из четырех- и пятизначных чисел, если бы он записывал их по аттической системе. Что касается трудности запоминания 27 знаков, то ведь это нужно сделать раз навсегда. Наконец, по справедливому замечанию Гиса (Heath) [1]), нужно принять во внимание, что процесс счета имеет своим орудием не одни числовые знаки, а прежде всего слова, которые эти знаки представляют. И если мы знаем, что λ есть *три десятка*, μ — четыре десятка, o — семь десятков (а мы видели, что в греческом языке для всех числительных, кроме 20, из самих наименований ясен их способ образования), то заключение $\lambda + \mu = o$ не требует ничего, кроме знания, что „три и четыре — семь"; не большего требует и заключение $\tau + o = \psi$. Аналогично обстоит дело и с другими арифметическими операциями. Нужно только твердо помнить значение 27 числовых знаков. Напротив, в аттической системе, если речь идет о более или менее сложном счете, необходимо „подсчитывать" общее число однородных единиц, прежде чем результатом этого подсчета явится некоторый „словесный символ".

Таким образом алфавитная система нумерации представляла собой, несомненно, очень существенный шаг вперед именно с точки зрения вычислителя. В житейскую же практику, вопреки мнению Кантора, она просачивалась медленно [2]). Это происходило не только вследствие консерватизма, но, несомненно, и по той причине, что *усвоить* ионийскую нумерацию было труднее, чем аттическую; при этом старая система была для „домашних" целей вполне удовлетворительной.

То обстоятельство, что ионийская нумерация встречается среди надписей на древних каменных плитах, свидетельствует о том, что в VI веке она в некоторой среде была уже хорошо известна. Этой средой не могла быть среда специалистов-математиков по той простой причине, что в то время таких не существовало. В повседневной же жизни, как мы видим, эта система долго еще не завоевала себе места. В какой же среде она возникла? Ответ, как мне кажется, может быть только один: алфавитная нумерация возникла из потребностей торговой практики. Здесь нужно было и записывать довольно большие числа и производить с ними арифметические операции. Среди греческих купцов, как мы знаем, были люди, стоявшие на вершине культурных знаний своего времени, люди с большим теоретическим кругозором — достаточно назвать знаменитого Фалеса Милетского. Достаточно было одному из таких купцов употребить алфавитную нумерацию, чтобы преимущества ее были осознаны значительной группой лиц, связанных с торговлей.

---

[1]) A History of greec mathematics, т. I, стр. 38.

[2]) Об этом свидетельствует то, что в произведениях многих античных авторов, например, Платона и Аристотеля, принадлежащих IV веку до н. э., но дошедших до нас по большей части в гораздо более поздних списках, часто встречаются записи чисел по аттической системе нумерации. Очевидно, они воспроизводят запись оригинала.

Самая идея использовать буквы алфавита для обозначения чисел могла возникнуть совершенно естественно. Действительно, даже сейчас мы, имея развитую систему десятичной нумерации, часто пользуемся буквами алфавита для порядковой нумерации. Различные „пункты" резолюций, постановлений, законов часто обозначаются буквами в их алфавитной последовательности.

У древних греков этот способ использования алфавита также был в ходу, и притом с давнего времени. Об этом свидетельствует то, что 24 песни „Илиады" нумеровались 24 буквами алфавита в их общепринятой последовательности. Мы имеем поэтому основание думать, что нумерация с помощью букв греческого алфавита столь же стара, как и сам этот алфавит. Здесь мы, правда, имеем дело по существу *с числами порядковыми*; в ионийской же системе речь идет о выражении *чисел кардинальных*. Однако теснейшая связь, существующая между этими видами чисел, делает почти незаметным переход от одних к другим. Единственно, в чем могла состоять осознанная изобретательская идея, — это использование десятично-разрядного принципа, который уже был осуществлен в аттической системе. Таким образом ионийскую систему можно рассматривать как синтез порядковой буквенной нумерации и аттической (количественной) цифровой системы.

На первый взгляд может показаться, что выполнение арифметических операций в алфавитной системе нумерации представляет все же значительные затруднения и что, если по сравнению с аттической системой мы имеем здесь шаг вперед, то по сравнению с нашей системой нумерации алфавитная система необычайно громоздка. Конечно, не может быть спора в вопросе о том, какая из систем — наша, индийско-арабская, или античная, ионийская—проще и удобнее. Однако не следует и преувеличивать относительные неудобства греческой системы. Не нужно забывать, что, для того чтобы произвести сравнительную оценку двух систем нумерации, нужно одинаково хорошо познакомиться с обеими. Между тем с нашей системой нумерации мы знакомимся с детства и постоянно упражняемся в применении ее, тогда как мы не испытываем никакой необходимости в таком же усвоении античной системы. Известный исследователь античной науки Поль Таннери дал себе труд проделать эту ученическую работу, и по его свидетельству выкладки в греческой системе нумерации по степени их легкости и быстроты оказались лишь не намного уступающими современным.

§ 6. Запись больших чисел

Прежде чем перейти к описанию арифметических процедур греческой математики, мы должны дополнить данные выше сведения об ионийской нумерации. Мы уже видели, как в ней можно представить каждое целое число до 999 включительно. Для обозначения одной, двух, трех и так далее тысяч до 9 000 употреблялись те же буквы, что для 1, 2, 3,..., 9, снабженные особым значком, — в дошедших до нас документах этот значок имеет по большей части вид штриха слева внизу буквы, так что

$$,\alpha = 1\,000, \qquad ,\beta = 2\,000, \qquad ,\gamma = 3\,000 \text{ и т. д.}$$

Мы имеем здесь, следовательно, полную аналогию со словообразованием соответствующих числительных. Таким образом число 7 826 грек писал в виде $,\zeta\omega\varkappa\varsigma$. Числа 10 000, 20 000, 30 000 и т. д. до 90 000 записывались также вполне аналогично их словесному выражению; как мы помним, греки имели термин „мириад" для обозначения 10 000. Сообразно с этим число 30 000 (три мириада) греки записывали цифрой 3 с стоящим за ней знаком слова „мириад". Знак этот имел различные формы: он обозначался, например, начальной буквой слова $\mu\upsilon\rho\acute{\iota}\alpha\delta\epsilon\varsigma$ — мириад (так что $\overset{\gamma}{M} = 30\,000$) либо просто точкой: $\gamma. = 30\,000$. Нужно заметить, что в древнейших памятниках мы не находим пятизначных и даже четырехзначных чисел. Приводимые нами обозначения заимствованы из рукописей очень позднего происхождения, и поэтому форма знака могла испытать существенные изменения. Но *принцип* записи, несомненно, не подвергся изменению. Вот два примера написания пятизначных чисел в ионийской нумерации:

$$\gamma.,\zeta\omega\varkappa\varsigma = 37\,826, \qquad \overset{\varepsilon}{M},\eta\sigma\beta = 58\,202.$$

Обратим внимание на то, что в этих написаниях (особенно в первом из приведенных двух) мы имеем почти позиционный принцип: одна и та же цифра γ ($=3$) могла означать и 3 и 3 000 и 30 000, смотря по месту, которое она занимает; лишь отсутствие знака нуля мешает освободиться от точки или штриха, символизирующих наименования „тысяча" и „мириад"; все же в большинстве случаев эти знаки могли бы без ущерба опускаться; с аналогичным явлением мы встречались у вавилонян.

Однако позиционный принцип не смог получить последовательного применения в греческой нумерации. Причина лежит, я думаю, во-первых, в том, что в младших трех разрядах установилась уже твердая традиция пользоваться 27, а не 9 цифрами. А это значит, что первоначально ионийская нумерация охватывала только трехзначные и, может быть, четырехзначные числа, но не выше. В противном случае позиционный принцип, соблюденный для четвертого и пятого (слева) знаков, должен был естественно распространиться и на младшие разряды.

Вторая причина состоит в том, что для разрядов выше пятого у греков не было *наименований*. Поэтому *словесное* выражение больших чисел по десятичным разрядам было невозможно. Число 58 202 грек мог прочесть: пять мириадов, восемь тысяч, двести два; в слове двести, как мы знаем, и по-гречески легко распознается „две сотни"; однако оно, так же как и в русском языке, настолько „обносилось" в просторечии, что воспринималось как *новое* самостоятельное слово, и в этом тоже, пожалуй, можно видеть причину создания 27, а не 9 знаков. Но число 258 202 грек не мог назвать, пользуясь теми же словесными средствами, ибо для 100 000 не было особого имени. Его можно было назвать: „десять мириадов"; „сто тысяч", „тысяча сотен" и „мириад десятков". Так как слова „десяток" и „сотня" утратили в греческой системе счислении роль самостоятельных высших единиц счета, то последние два выражения, естественно, неупотребительны. Напротив, *оба* первых возможны в речи, ибо „мириад" и „тысяча" ведут в греческом языке самостоятельное существование. Замечательным фактом является то, что оба они применяются и в нумерации. Таким образом число 258 202 может встретиться и в транскрипции κε.͵ησβ (т. е. 25 мириадов 8 тысяч 202) и в транскрипции, ͵σνησβ (т. е. 258 тысяч 202).

С языковой точки зрения естественно пользоватьси первым обозначением, в котором использованы *все* основные наименования, и зато стоящие прн них числа малозначны (мы говорим: пять тысяч двести, а не 52 сотни!). Однако, с точки зрения системы нумерации, удобнее пользоваться вторым способом, так как создаваемый им трехразрядный класс соответствует трехразрядной структуре ионийской цифровой системы.

Большинство известных нам многозначных числовых записей построены по *первому* способу. Это свидетельствует о высокой роли словесного аппарата даже в развитой системе счета.

Словесный аппарат определял и верхнюю границу чисел, могущих быть записанными в греческой нумерации. Максимальное число, допускаемое описанным словообразованием, есть мириад мириадов, т. е. 10^8. Для дальнейшего счета нужно было образовать новую единицу счета, не существовавшую в языке.

Но в обыденной жизни не было потребности в столь больших числах. В вычислительной практике ученых такая потребность появилась, главным образом, в связи с развитием астрономии и — рассматривавшейся как ее часть — тригонометрии. Она начала ощущаться, вероятно, уже в III веке до н. э. Эта потребность, однако, была удовлетворена не на пути развития принципов ионийской нумерации, а на базе своеобразного сочетания последней с вавилонской шестидесятеричной системой.

Однако попытки пойти по первому, казалось бы наиболее естественному пути, делались, хотя и не привились. И делались они величайшими греческими математиками, Архимедом и Аполлонием.

§ 7. „Октады" Архимеда и „тетрады" Аполлония

Об архимедовом способе обозначения больших чисел мы узнаем из сочинения самого Архимеда, носящего заглавие „Псаммит", которое можно по-русски выразить названием „О числе песка".

В этом произведении Архимед хочет показать, что люди, считающие число песчинок на земле бесконечным, ошибаются. Чтобы еще резче оттенить ошибочность такого мнения, Архимед берется доказать, что не только на земле, но и во всей вселенной, если бы даже она целиком была заполнена песком, число песчинок было бы конечным и легко можно было бы, если и не подсчитать точное число песчинок во вселенной, то указать число, которое заведомо больше этого числа песчинок.

Эта постановка вопроса дает Архимеду основание заняться вопросом о размере вселенной, под которой он разумеет пространство, заключенное внутри звездной сферы. Центром этой сферы он, вместе с Аристархом Самосским, считает не Землю, как принимало большинство греческих философов, а Солнце. Архимед попутно описывает интересный способ, которым Аристарх измерил расстояние от Солнца до Земли. На этом мы останавливаться здесь не будем, так как сейчас нас интересует только арифметическая сторона „Псаммита“. Установив нижний предел размеров песчинки и верхний предел радиуса вселенной [1]), Архимед приходит к выводу, что число песчинок не превосходит числа 10^{63}. Чтобы выразить такое число, Архимед расширяет границы ионийской системы нумерации. Это он делает следующим образом [2]). Все числа от 1 до мириада мириадов (10^8) (т. е. те числа, для которых в языке существовало словесное выражение) он объединяет названием „первых чисел“. Самое число 10^8 сюда не включается; оно получает название „единица вторых чисел“. Таким образом открывается возможность дальнейшего счета вплоть до мириада единиц „вторых чисел“, т. е. до $10^{2 \cdot 8}$, это последнее, конечно, исключается и получает название единицы „третьих чисел“. Таким образом идем дальше и получаем единицы „четвертых“, „пятых чисел“, т. е. $10^{3 \cdot 8}$, $10^{4 \cdot 8}$ и т. д. Для той цели, которую формально ставит себе Архимед, вполне достаточно уже этих средств, потому что нужное ему число выразится с помощью „восьмых“ и более низкого порядка чисел. Но по существу он преследует более широкую цель, именно он желает показать возможность *беспредельного* расширения числовой области.

Между тем образованным выше способом мы дойдем „только“ до числа $10^{10^8 \cdot 8}$. Для последнего числа уже нет места среди построенных чисел; оно открывает „второй период“ и получает название „единицы первых чисел второго периода“. Мириад единиц первых чисел второго периода, т. е. число $10^{(10^8+1)8}$, получает название единицы вторых чисел второго периода и т. д. Мы можем, таким образом, дойти до „мириадо-мириадных“ чисел второго периода; их границей (не входящей в их число) будет число $10^{(10^8+10^8)8} = 10^{8 \cdot 2 \cdot 10^8}$. Это будет единица первых чисел третьего периода. Этот процесс Архимед доводит до единиц „мириадо-мириадного“ (10^8-го) периода; границей построенной таким образом числовой системы является число $10^{8 \cdot 10^8 \cdot 10^8} = 10^{8 \cdot 10^{2 \cdot 8}}$.

---

[1]) Конечно, величины, полученные им из астрономических наблюдений, произведенных при помощи тогдашних несовершенных инструментов, были далеки от истинных.

[2]) Archimedes, Opera omnia. Ed. Heiberg, т. II, стр. 242 и след. Русский перевод „Псаммита“ (П. Н. Попова), М., ГТТИ, 1933.

Здесь Архимед останавливается, но не упускает из виду указать на возможность дальнейшего неограниченного построения чисел этим способом. Вводя для обозначения каждого последующего класса чисел термин „октада“ [1]), он указывает, что существует сколь угодно много октад.

Для облегчения выполнения действий с „сверх большими“ числами Архимед устанавливает предложение, которое в наших обозначениях мы записали бы в виде

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}.$$

Это предложение мы можем рассматривать как первый шаг в открытии логарифмирования, и очень возможно, что „Псаммит“ оказал в этом направлении и прямое влияние.

Во всяком случае здесь, как и во многом другом, Архимед предвосхитил потребности далекого будущего. Не нужно думать, что его „октады“ были придуманы исключительно с целью ответить на вопрос о числе песчинок во вселенной. Здесь он несомненно дал только одно из применений своего широкого теоретического замысла, о котором мы упоминали выше, — построения неограниченного ряда чисел, их классификации, письменного изображения и вычислений над ними. Что это так — явствует хотя бы из собственных слов Архимеда. „Некоторые, о царь Гелон, полагают, — так начинает Архимед свой „Псаммит“, — что число песчинок по количеству неограниченно; я имею в виду не только то количество песка, находящегося вокруг Сиракуз и в остальной Сицилии, но и то, что имеется во всех странах как обитаемых, так и необитаемых. Есть и такие, которые не считают, что это число безгранично, но (полагают), что нельзя назвать никакого числа, которое превосходило бы его количество. Ясно, что если бы люди, мыслящие это, вообразили шар, составленный из песка, во всех же остальных отношениях такой же, как земной шар, в котором только все моря и впадины земли были заполнены (песком, доходящим) до вершин высочайших гор, — то тем более они (в этом случае) должны были бы признать, что мы не можем назвать никакого числа, превосходящего количество этого песка. Я же попытаюсь доказать тебе с помощью геометрических доказательств, за которыми ты (легко) проследишь, что среди чисел, мною поименованных и *изложенных в писаниях моих Зевксиппу*, некоторые превосходят не только число песку, имеющего величину, равную земле, наполненной так, как мы сказали, но и число песку, имеющего величину, равную вселенной“ [2]).

Подчеркнутые слова свидетельствуют о том, что свою систему „октадного“ изображения чисел Архимед разработал еще до написания „Псаммита“. Сочинение, о котором говорит Архимед и которое он в другом месте „Псаммита“ [3]) называет „Началами“ (ἀρχαί), до нас, к сожалению, не дошло.

---

[1]) 1-я октада охватывает, таким образом, числа от 1 до $10^8 - 1$
2-я „ „ „ „ „ „ 10^8 „ $10^{16} - 1$
Вообще, k-я „ „ „ „ „ „ $10^{8(k-1)}$ „ $10^{8k} - 1$

[2]) Archimedes, т. II, стр. 242.

[3]) Там же, т. II, стр. 246.

Не дошла до нас и работа другого великого геометра III—II веков до н. э., Аполлония, также посвященная вопросу о классификации больших чисел и их нумерации. О том, что такое сочинение существовало, мы узнаем от Паппа Александрийского, жившего гораздо позднее, в III, а может быть и в IV веке н. з. Из сообщения Паппа [1]) явствует, что взамен „октад" Архимеда, с которыми Аполлоний, несомненно, был знаком (он был на поколение моложе Архимеда), Аполлоний вводит „тетрады", т. е. взамен 10^8 берет за базу 10^4, чем, конечно, достигается упрощение словесного и письменного выражения чисел. Число 10^4 называется „простым мириадом", число 10^8 — двойным; 10^{12} — тройиым и т. д. Папп приводит несколько примеров записи чисел по Аполлонию. Пользуясь для обозначения первых, вторых, третьих и так далее мириадов знаками μ^{α}, μ^{β}, μ^{γ}, ..., он записывает число 5462 3600 6400 0000 следующим образом:

μ^{γ} ,ευξβ κάι μ^{β} ,γχ κάι μ^{α} ,ϛυ.

Хотя как в отношении символических возможностей, так и в отношении оперативном, система „тетрад" Аполлония и была более практичной, чем система „октад" Архимеда, однако и она не вошла в вычислительную практику.

Интересно отметить, что хотя вопросами усовершенствования системы счета занимались такие люди, как Архимед и Аполлоний, с которыми немногие из математиков всех времен могут соперничать по силе гения, ни они, ни кто-либо другой из древнегреческих авторов, насколько нам известно, не поставили вопроса о переходе к десятично-позиционной системе нумерации. Между тем, казалось бы, самая идея напрашивалась сама собой. Если то обстоятельство, что *три* единицы, *три* десятка, *три* сотни обозначались различными числовыми знаками (γ, λ, τ), представляло бы действительно серьезные препятствия для быстрой вычислительной работы, то идея обозначить их одним и тем же *основным* знаком напрашивалась бы сама собой, ибо, как мы видели, три тысячи и *три мириада* (тридцать тысяч) в общеупотребительной системе нумерации обозначались единообразно знаком γ, к которому приписывался лишь тот или иной отличительный знак (точка, штрих). Больше того, в тех случаях, когда это не могло вызвать двузначности, эти знаки на практике часто вовсе опускались и значение соответствующей цифры определялось по месту, которое она занимала. Таким образом реформа нумерации в этом же направлении, казалось бы, сама собой напрашивалась.

Чтобы с полной последовательностью провести эту реформу, охватив и низшие разряды и устранив всякие отличительные значки, нужно было ввести знак для нуля. Можно ли думать, что эта мысль не пришла бы в голову Архимеду или Аполлонию, если бы они испытывали потребность в перестройке ионийской нумерации на основе

---

[1]) Pappi Alexandrini quae supersunt (ed. Hultsch), Berolini 1876, т. I, стр. 2—30.

единого (десятично-позиционного) принципа? Я совершенно отказываюсь это допустить. Более того, несколько ниже мы увидим, что греки имели даже знак, вполне соответствующий нашему нулю (и даже по форме своей совпадавший с ним). Правда, он употреблялся для обозначения отсутствия разрядов в многоразрядной *шестидесятеричной* дроби. Но перенести этот знак в десятичную систему разрядов было совсем уж нетрудно. Однако это никогда не было сделано и, повидимому, даже никем не предлагалось. Почему? Ответ здесь может быть только один: потому что „ионийская" система нумерации в пределах чисел, с которыми греческим математикам приходилось оперировать, вполне удовлетворяла требованиям практики.

Лучше всего читатель сможет судить, правилен ли этот ответ, после ознакомления с техникой арифметических выкладок древних греков. К этому мы сейчас и обратимся.

§ 8. Действия с целыми числами

Предварительно скажем несколько слов об источниках нашей информации. Их, к сожалению, очень немного.

До нас не дошло *ни одного* античного сочинения, в котором арифметические действия были бы предметом специального изучения или изложения. Однако у некоторых греческих авторов мы находим отдельные указания по интересующему нас вопросу. Среди них нужно назвать прежде всего Герона Александрийского. В его сочинениях содержится множество вычислительных задач; решая их, Герон неоднократно поясняет, как именно выполняются эти операции. Время жизни Герона и доныне точно не установлено. Во всяком случае он жил не ранее I века до н. э. (скорее всего в I—II веках н. э.). Как мы видим, это очень поздний источник.

Из дошедших до нас сочинений более ранних авторов мы не можем почерпнуть никаких сведений об истории греческой арифметики. Исключение составляет только один Архимед. В своем „Измерении круга" он вычисляет периметры правильных многоугольников, вписанных и описанных около круга. Рассматриваются многоугольники с 6, 12, 24, 48 и 96 сторонами. Конечно, здесь приходится выполнять операции с большими числами; но Архимед нигде не поясняет, как операции производятся, а прямо дает результаты. Таким образом самое „Измерение круга" дает нам немного. Но в середине VI века н. э. некоторые сочинения Архимеда, в том числе и „Измерение круга", были прокомментированы неким Евтокием из Аскалона[1]). Евтокий счел необходимым сопроводить самые элементарные части архимедовых работ наиболее подробными пояснениями (как часто случается с комментаторами, наиболее трудных мест Евтокий не объясняет совсем).

Более ценные сведения мы получаем из комментариев Теона Александрийского к „Альмагесту" Птолемея. Птолемей жил во II веке

[1]) Город в Палестине.

н. э.; Теон Александрийский, отец знаменитой Ипатии, один из последних представителей эллинской культуры в Александрии, жил во второй половине IV века н. э. Его комментарий к величайшей астрономической работе древности ставит себе целью облегчить понимание ее читателю. В частности, и арифметические действия, результаты которых Птолемей дает сразу в окончательном виде, у него разбираются подробно.

Кроме Герона, Евтокия и Теона мы должны назвать еще Паппа Александрийского, который жил, повидимому, в III веке н. э. Одно его свидетельство мы уже приводили.

Если мы добавим сюда еще два произведения Николая Артавасда (Рабды), — об этом авторе мы уже однажды упомянули, — то мы перечислим все сколько-нибудь существенные наши источники. Неудивительно, что сведения наши очень неполны.

Наши источники не содержат никаких указаний относительно выполнения сложения и вычитания целых чисел. Не дошло до нас и схем „чистого“ сложения. Но мы имеем довольно много схем умножения многозначных чисел, при котором делается сложение частичных произведений. Здесь нас может удивить то, что подписываются друг под другом не всегда цифры одноименных разрядов. Ниже мы приведем такие примеры. Однако можно думать, что здесь мы имеем дело с сознательным *отступлением* от схемы; если это так, то схема сложения у греков была та же, что и у нас. Например, сложение чисел $8\,7563 + 3491 + 4\,6556$ грек стал бы выполнять следующим образом:

$$\begin{array}{lr}
\overset{\eta}{\mathrm{M}}\text{͵ζφξγ} & 8\;7563 \\
\text{͵γυϙα} & 3491 \\
\overset{\delta}{\mathrm{M}}\text{͵ϛφνϛ} & 4\;6556 \\
\hline
\overset{\iota\gamma}{\mathrm{M}}\text{͵ζχι} & 13\;7610
\end{array}$$

Складывая низшие разряды *устно*, грек получал $\gamma + \alpha + \text{ϛ}$ = три один и шесть = десять = одна десятка.

Эту одну десятку греческий вычислитель добавлял к сумме следующих разрядов, которая при устном счете получалась следующим образом: $\xi + \text{ϙ} + \nu = 60 + 90 + 50$; это звучало на греческом языке (см. выше стр. 169) так, как по-русски: „шесть-десят и девять-десят и пять-десят“. Устное суммирование $6 + 9 + 5$ с добавлением единицы, ранее полученной, давало 21 (десяток), что по-гречески звучало, как по-русски: „двадцать и один“. Один десяток (ι) записывался, двадцать же десятков, т. е. две сотни, сохранялось для следующего разряда. В этом единственном случае, когда числительное, выражающее число $10m$ ($m < 10$) не образуется мультипликативно из термина, выражающего m (стр. 169), приходилось, конечно, брать на память то, что $20 = 2 \cdot 10$. При счете сотен знаки φ, υ, φ читались, как пять-сот, четыре-ста, пять-сот, следовательно, складывалось устно $5 + 4 + 5 (+ 2) = 16$; последнее число читалось, как „шесть и десять“, шесть сотен записывалось своим знаком χ, десять сотен давало одну тысячу. Для тысяч обозначения были те же, что для единиц, так что результат $7+3+$ $+6\ (+1)$ давал легко 17. Семь тысяч записывалось знаком семерки с штрихом, а десять тысяч давало мириад. Числа мириадов (стоящие сверху над знаками M) складывались так, как будто это были числа первой „тетрады“, и результат — 13 мириадов — записывался с помощью знака 13 над знаком M (или иными способами; см. выше стр. 187—188).

Переходя к умножению целых чисел, мы прежде всего заметим, что, в отличие от современного способа, греки при умножении многозначного числа на однозначное не расчленяли частичные произведения на запоминаемую и записываемую часть, а записывали результаты целиком. Сложение производилось уже позднее. При этом безразлично было, с каких разрядов начинать; греки начинали, повидимому, с *высших* разрядов. К такому способу прибегали, очевидно, потому, что технические трудности, связанные с получением частных произведений, были уже сами по себе довольно велики. Действительно, когда мы умножаем однозначный множитель на один из знаков множимого, то нам совершенно не приходится учитывать, каковы разряды наших сомножителей. Для греческого же вычислителя это каждый раз приходилось делать: когда он, например, перемножал $\psi\pi=780$ и $\psi=700$, ему нужно было умножить π на ψ, т. е. восемь*десят* на семь*сот*; это словесное выражение чисел π и ψ сразу давало ему результат $8\times7=56$, но какое именно число берется 56 раз — это из словесной формулировки не получалось. Таким образом, кроме таблицы умножения 9×9 включительно, греческий вычислитель должен был еще на память знать или соображать в уме, что $10\times10=$ $=100$, $10\times100=1\,000$ и т. д. Наконец, полученный результат нужно было снова выразить в той словесной форме, которая соответствовала бы законам нумерации. В нашем примере получается 56 тысяч, что может быть записано непосредственно. Но если бы получилось 56 сотен, то нужно было бы преобразовать это выражение результата в „пять тысяч и шесть сотен“. Как ни просты все эти преобразования, но в своей совокупности они, повидимому, представляли значительные практические неудобства, и для их-то устранения и были созданы особые таблицы умножения, содержавшие произведения „однозначных“ (в ионийской нумерации) чисел на „однозначные“ множители. Большое собрание подобных таблиц мы находим в „Кратком изложении науки счисления“ Николая Артавасда. Это сочинение относится к позднему периоду Византийской эпохи (XII век н. э.), но уже одно то обстоятельство, что автор приписывает изобретение таблиц Паламеду, легендарному герою Троянской войны, свидетельствует о том, что таблицы эти употреблялись с незапамятных времен.

„Таблицы Паламеда“ состоят из трех колонн. В первой стоит однозначное множимое, во второй — однозначные множители, первый из которых равен множимому, а остальные идут в возрастающем порядке, доходя до мириада. Стоящие же в первой строке множимые начинаются от единицы и, возрастая, доходят также до мириада.

Произведения даются в третьей, последней, колонке. Таким образом множимое 1 фигурирует 37 раз, множимое 2 — 36 раз и т. д., так что таблица содержит $\frac{37\cdot 38}{2} = 703$ результата! Вот небольшой отрывок из этих таблиц [1]:

ι	ι	ρ	10	10	100
ι	κ	σ	10	20	200
ι	λ	τ	10	30	300
ι	μ	υ	10	40	400
ι	ν	φ	10	50	500
ι	ξ	χ	10	60	600
ι	ο	ψ	10	70	700
ι	π	ω	10	80	800

Что таблицы, подобные этим, не являются изобретением Византийской эпохи и что они были употребляемы в школьном преподавании, — об этом, помимо приведенного выше косвенного соображения, свидетельствует восковая доска, хранящаяся в Британском музее. Описание ее и фотографический снимок были даны в 1909 г. Д. Смитом [2].

Восковые доски были в большом ходу у древнегреческих школьников, выполняя ту же роль, которую впоследствии играла грифельная доска. Интересующая нас доска разделена школьником на две части вертикальной чертой. Справа выполнено упражнение в письме, слева записана таблица умножения, состоящая из двух колонн: в одной даны произведения $1\times 1=1$, $2\times 1=2$, $2\times 2=4$, $2\times 3=6$, ..., $2\times 10=20$; в другой произведения $3\times 1=3$, $3\times 2=6$, ..., $3\times 10=30$. Форма букв дает возможность определить эпоху, к которой относится таблица. Сам Смит считает, что она относится к III—II векам до н. э. Он указывает, однако, что специалисты музея датируют ее II веком н. э. Судя по форме букв, встречающихся в тексте доски, нужно считать правильной эту последнюю датировку [3]. Но, конечно, „таблица Паламеда“ возникла не в то время, от которого до нас дошел ее отрывок на восковой доске школьника; несомненно она восходит к еще более раннему времени, ибо при пользовании ионийской системой нумерации она необходима в гораздо большей мере, чем таблица умножения для нашего школьника, и полезной для школьника она могла быть именно в этой форме, а не в форме нашей школьной таблицы умножения.

Нашу школьную таблицу часто называют „таблицей Пифагора“; для этого, однако, имеется не больше оснований, чем для именования греческой таблицы — таблицей Паламеда.

---

1) „Exposition abregée et très claire de la science du calcul... par Nicolas Artavasde de Smyrne“. P. Tannery, Oeuvres scientifiques, т. IV, 1920, стр. 112.

2) D. Smith, A greek multiplication table. Bibliotheca mathematica, т. 9, тетр. 3, 1909, стр. 193.

3) Личное сообщение С. Я. Лурье.

Распространенное мнение, что „таблица Пифагора“ служила в качестве таблицы умножения древним грекам, совершенно неосновательно. Мало того, что мы нигде не находим следов использования древними греками таблицы умножения, подобной нашей школьной. Но все то, что выше было сказано о нумерации древних греков, показывает, что такая таблица принесла бы греческому школьнику мало пользы.

Откуда же могло возникнуть упомянутое мнение и наименование „Пифагоровой таблицы“? Мне кажется, вот откуда. Около 100 г. н. э. Никомахом было составлено „Введение в Арифметику“. Оно было посвящено не вычислительной технике, как можно было бы думать по созвучию с нашим термином „арифметика“, а изложению элементарных теоретико-числовых сведений. В „Арифметике“ Никомаха мы действительно находим квадратную табличку, приводимую ниже.

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	ϑ	ι
β	δ	ς	η	ι	ιβ	ιδ	ις	ιη	κ
γ	ς	ϑ	ιβ	ιε	ιη	κα	κδ	κζ	λ
δ	η	ιβ	ις	κ	κδ	κη	λβ	λς	μ
ε	ι	ιε	κ	κε	λ	λε	μ	με	ν
ς	ιβ	ιη	κδ	λ	λς	μβ	μη	νδ	ξ
ζ	ιδ	κα	κη	λε	μβ	μϑ	νς	ξγ	ο
η	ις	κδ	λβ	μ	μη	νς	ξδ	οβ	π
ϑ	ιη	κζ	λς	με	νδ	ξγ	οβ	πα	ϙ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ	ρ

Однако эта табличка служит отнюдь не для выполнения умножения, а для иллюстрации построенной Никомахом номенклатуры отношений между числами [1]). Так, например, если из двух целых чисел большее превосходит меньшее на число, являющееся делителем меньшего, то большее получает название ἐπιμόριον, а меньшее ὑπεπιμόριον (дословно „надчастное“ и „поднадчастное“). Таблица иллюстрирует это соотношение следующим образом: возьмем любые две сосед-

[1]) Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae, Libri II, recensuit R. Hoche. 1866, стр. 46—51. Эта таблица приводится, между прочим, проф. А. В. Васильевым в его книге „Целое число“; подпись над ней гласит: «Таблица умножения из сочинения Никомаха „Изагоге“».

ние строки; все числа нижней строки суть одинаковые „надчастные“ по отношению к числам верхней, стоящим над ними.

Итак, таблица наша могла бы называться по праву если не „Пифагоровой“, то „пифагорейской“. Но только у пифагорейцев (и вообще у греков) она не была таблицей умножения.

Мы рассмотрели вопрос об умножении однозначного числа на многозначное. Перемножение многозначных чисел лучше всего уясняется из рассмотрения двух приводимых ниже примеров. Оба они заимствованы из Евтокия[1]).

I.

	,αφξ'	1560		
ἐπὶ	,αφξ'	на 1560		
	$\overset{\rho}{\mathrm{M}}\overset{\nu}{\mathrm{M}}\overset{\varsigma}{\mathrm{M}}$	100.0000	50.0000	6.0000
	$\overset{\nu}{\mathrm{M}}\overset{\kappa\varepsilon}{\mathrm{M}}\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$	50.0000	25.0000	3.0000
	$\overset{\varsigma}{\mathrm{M}}\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$,γχ'		6.0000	3.3600
ὁμοῦ	$\overset{\sigma\mu\gamma}{\mathrm{M}}$,γχ'	Всего 243.3600		

II.

	,ατνα'	1351				
ἐπὶ	,ατνα'	на 1351				
	$\overset{\rho}{\mathrm{M}}\overset{\lambda}{\mathrm{M}}\overset{\varepsilon}{\mathrm{M}}$,α'	100.0000	30.0000	5.0000	1000	
	$\overset{\nu}{\mathrm{M}}\overset{\vartheta}{\mathrm{M}}\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$,ετ'	30.0000	9.0000	1.0000	5300	
	$\overset{\varepsilon}{\mathrm{M}}\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$,ε,βφν'		5.0000	1.0000	5000	2550
	,ατνα'				1351	
ὁμοῦ	$\overset{\rho\pi\beta}{\mathrm{M}}$,εσα'	Всего 182.5201				

Таков был процесс умножения, применявшийся греческими вычислителями. Для тех чисел, с которыми они оперировали, этот процесс, повидимому, не представлялся особенно затруднительным. Но в специальных случаях могла возникать потребность в особых приемах, облегчавших производство операций. В этом отношении небезынтересен прием, восходящий, повидимому, к Аполлонию. Мы находим его в указанном выше (стр. 191) отрывке, сохраненном Паппом. Речь идет о получении произведения большого числа однозначных (в греческой нумерации) сомножителей. Сущность приема состоит в следующем. 1) Вместо каждого из однозначных сомножителей, т. е. чисел вида a, $a \cdot 10$, $a \cdot 10^2$ $(a < 10)$ берется его „основание“ (πυθμήν), т. е. число a, меньшее десяти. 2) Эти „основания“ перемножаются. 3) Берется число единиц, равное числу сомножителей

[1]) A r c h i m e d e s, Ed. Heiberg, 1881, т. III, стр. 287. В этих примерах ἐπὶ и ὁμοῦ — слова, а не числа; их перевод дан в тексте. Штрихи справа сверху служат для отличения числовых знаков от букв в обычном их значении.

вида $a \cdot 10$, и к нему прибавляется число, вдвое большее числа множителей вида $a \cdot 10^2$; результат, очевидно, есть та степень десяти, на которую нужно умножить произведение „оснований"; здесь мы имеем, таким образом, зачатки логарифмических действий, подобные тем, которые мы нашли и у Архимеда. 4) Далее, полученное число делится на четыре; частное дает порядок „мириад"; величина остатка (0, 1, 2, 3) определяет число „мириад" (1, 10, 100, 1 000) найденного порядка. 5) Наконец, перемножается произведение „оснований" на полученное число вида m $10\,000^k$.

В одном из приводимых Паппом примеров требуется определить произведение чисел, выражающихся отдельными буквами гекзаметрической строки:

Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι.

(Славьте, о девять дев, всемогущую власть Артемиды).

Здесь мы имеем тридцать восемь сомножителей, из коих 10 вида $a \cdot 10^2$, именно[1]) (мы приводим их в том порядке, в котором они следуют друг за другом в фразе):

$$\rho = 100,\ \tau = 300,\ \sigma = 200,\ \tau = 300,\ \rho = 100,\ \tau = 300,$$
$$\sigma = 200;\ \chi = 600,\ \upsilon = 400,\ \rho = 100;$$

17 — вида $a \cdot 10$, именно

$$\mu = 40,\ \iota = 10,\ o = 70,\ \varkappa = 20,\ \lambda = 30,\ \iota = 10,\ \varkappa = 20,\ o = 70,$$
$$\xi = 60,\ o = 70,\ o = 70,\ \nu = 50,\ \nu = 50,\ \nu = 50,\ \varkappa = 20,$$
$$o = 70,\ \iota = 10$$

и, наконец, 11 — вида $a \cdot 10^0$, именно

$$\alpha = 1,\ \varepsilon = 5,\ \delta = 4,\ \varepsilon = 5,\ \varepsilon = 5,\ \alpha = 1,\ \varepsilon = 5,\ \varepsilon = 5,\ \varepsilon = 5,$$
$$\alpha = 1,\ \alpha = 1.$$

Произведение оснований дает 19 6036 8480 0000 0000. Сложение показателей дает $10 \cdot 2 + 17 \cdot 1 = 37$. Частное от деления на 4 есть 9, остаток 1. Отсюда мы имеем десять „девятых мирад" ($10 \cdot 10\,000^9$). Умножение этого числа на произведение „оснований" дает 196 тринадцатых мириад, 368 двенадцатых и 4 800 одиннадцатых. Результат этот представляет собой 55-значное число, имеющее 9 значащих цифр!

§ 9. „Обыкновенные" и „основные" дроби

Было бы естественно обратиться сейчас к рассмотрению деления целых чисел. Однако ни в одном из наших источников нет прямых указаний, относящихся к схеме выполнения и расположения этого

[1]) При принятом в настоящее время написании буква „сигма" в конце слова имеет форму ς, в цифровых же записях она всегда обозначается через σ, т. е. так же, как в начале и середине слова. Это нужно иметь в виду при „арифметической" интерпретации нашего стиха. В древности не существовало различия в форме букв „сигма" в конце слова и в его середине.

действия над целыми числами. Некоторые заключения, однако, мы сможем сделать, опираясь на описание деления дробей, оставленное нам Теоном Александрийским. Это заставляет нас оставить сейчас область целых чисел и заняться рассмотрением дробей и действий над ними.

Мы должны прежде всего констатировать, что греки имели не один, а целых три способа канонического представления дробей. Один из них — это наш способ образования „обыкновенных" дробей. Ему соответствует в греческом языке способ словесного выражения, вполне аналогичный существующему в русском языке: мы выражаем, например, дробь $\frac{7}{60}$ словами „семь шестидесятых" (частей), причем слово „шестидесятый" в первом своем значении есть порядковое числительное[1]). Точно так же образуется соответствующее греческое название той же дроби ἑπτὰ ἑξηκοσταὶ (μέρη)[2]). Письменное выражение обыкновенных дробей совершалось у древних греков различными способами.

Наиболее совершенный из них по существу не отличается от нашего. Его мы находим у Герона и еще чаще у знаменитого Диофанта, который жил позднее Герона (вероятно, в III веке н. э.). По этому способу числитель и знаменатель дроби обозначаются двумя числами, записанными, конечно, в ионийской системе нумерации и расположенными одно под другим; только порядок расположения прямо противоположен нашему: числитель пишется снизу, а знаменатель сверху; дробной черты между числителем и знаменателем у греков не существовало. Так, дробь $\frac{5\,358}{10\,201}$ записана у Диофанта[3]) следующим образом: $\begin{smallmatrix}\alpha\cdot\sigma\alpha\\ {}_{,}\epsilon\tau\nu\eta\end{smallmatrix}$.

Повидимому, в более раннее время обыкновенные дроби записывались менее совершенными способами; их мы находим также у Диофанта и еще чаще у Герона.

Эти способы разнообразны; наиболее простой и наименее удобный состоит в выписывании дроби с помощью ее словесного выражения; его мы находим, например, у Архимеда. Вот как формулирует он свою знаменитую теорему о длине окружности:

„Периметр всякого круга больше диаметра троекратно, и сверх того превосходит (трехкратный диаметр) менее, чем на седьмую часть диаметра, и более, чем на десять семьдесятпервых"[4]).

---

1) Это не случайное совпадение. В примитивном счете для определения того, какую долю целого составляет некоторая часть, считали подряд части; число их определялось порядком последней части. Ср. сноску на стр. 17.

2) Различие только в том, что оба числительных ставятся сообразно обычному греческому словоупотреблению в именительном падеже (как по-русски „две шестидесятые").

3) „Арифметика", V, 9.

4) Я пишу последнее слово нарочно с нарушением принятого правописания, чтобы возможно точнее передать форму греческого оригинала: δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. Здесь мы имеем также отклонение от обиходного словообразования, в котором числительное „семьдесят первый" выражается

В заключительной части доказательства этой теоремы Архимед выражает ту же дробь $\frac{10}{71}$ уже другим более компактным способом: словесно выражается только числитель, знаменатель же обозначается цифрами, снабженными штрихом, для отличия от цифр целой части. Таким образом Архимед пишет δέκα οα′ (т. е. десять 71′)[1].

Наконец, там же мы находим и запись этой дроби с помощью двух рядом поставленных цифр, причем обе снабжены одним и тем же отличительным знаком-штрихом. Впрочем, здесь, возможно, мы имеем дело с позднейшим изменением, так как и в записи самых цифр в дошедших до нас рукописях имеются ошибки.

Герон во избежание смешения цифр целой и дробной частей прибегает также к помощи словесной записи, но несколько иного характера. Так, например, смешанное число $4\frac{8}{13}$ он записывает так: единиц 4 и долей 13′ 13′ восемь (μονάδες δ′ καὶ λεπτὰ ιγ″ ιγ″ ὀκτώ)[2]. Повторение цифры тринадцать два раза соответствует нашему множественному числу в словесном выражении: двенадцать тринадцатых; отражение этого словообразования мы находим также у Диофанта: так, он пишет[3]) νκγ$^{\omega\nu}$ = 50 23-х $= \frac{50}{23}$ (при цифре знаменателя сверху — падежное окончание).

Таковы основные приемы изображения обыкновенных дробей, известные нам из произведений древнегреческих авторов. Производство арифметических действий над этими дробями ни в одном из наших источников не описано специально; правила операций, очевидно, предполагаются хорошо известными. Вероятно, эти правила не отличались от нынешних. Так по крайней мере можно думать по виду результатов.

Как было сказано, обыкновенные дроби не были единственной формой канонического представления дроби. Наряду с ними употреблялась также система „основных" дробей, чрезвычайно схожая с той, которую мы встречали в древнем Египте. Так же, как и в Египте, основными дробями являются прежде всего „единичные" дроби вида $\frac{1}{k}$; обозначаются они по тому же принципу, что у егип-

---

двумя словами (ἑβδομήκοστος πρῶτος). Вся приведенная цитата в оригинале звучит следующим образом: παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. Archimedes. Heiberg, т. I, стр. 262.

[1]) Archimedes. Ed. Heiberg, т. I, стр. 270. В издании Гейберга вместо одного штриха проставлено два, так как одним штрихом обозначаются цифры целых чисел (в отличие от букв).

[2]) Герон, Геометрия, 12, 3. В других случаях числитель дроби также записывается цифрой, иногда же, напротив, число целых записывается словесно. Таким образом характерно здесь лишь введение наименований „единица" и „доля". Термином „доля" я перевожу греческое слово „λεπτόν", означающее „мелкое, небольшое", а в качестве существительного — „мелочь", „мелкая монета" (русское слово „лепта").

[3]) Диофант, Арифметика, I, 23.

тян: рядом с изображением числа k по ионийской нумерации стоит штрих. Таким образом запись ιγ′, которую можно передать с помощью арабских цифр, как 16′, означает $\frac{1}{16}$; запись κϛ′ означает $^1/_{26}$ и т. д. Кроме того, к числу основных дробей относится (как и у египтян!) число $^2/_3$, которое записывалось с помощью знака β′; если перевести этот знак на наши цифры, это будет 2′. По общему правилу такому знаку нужно было бы приписать значение 1/2. Вспомним, что и египтяне обозначили $^2/_3$ так, как по общему правилу они должны были обозначать половину (𓂋) (см. выше стр. 17). Точно так же и для половины греки пользовались особым знаком. У Архимеда он и по виду похож на египетский и выглядит так: ς; у других авторов мы встречаем знаки ∠, ς и др. Происхождение последнего, очевидно, таково же, как символа для $\frac{1}{2}$ обола (стр. 175). Но важна, конечно, не столько форма, которая может подвергнуться всяким изменениям, а принцип. А мы видим, что все принципы египетского написания дроби сохранились и в греческом ее представлении.

„Египетский“ способ представления дробей мы находим у всех древнегреческих авторов, у которых вообще встречаются дроби. При этом замечательно, что „египетские“ и „обыкновенные“ дроби употребляются одновременно не только одним и тем же автором, но даже в одних и тех же задачах.

Вот для примера небольшой отрывок из того места „Геометрии“ Герона, из которого я заимствовал вышеприведенный способ записи числа $4\frac{8}{13}$. Речь там идет о вычислении высоты прямоугольного треугольника, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу. Стороны этого треугольника 5, 12, 13. Как всегда, на этом числовом примере Герон дает общий способ решения задачи:

„Если предписано провести высоту из прямого угла на гипотенузу, то умножь 5 (длину) перпендикуляра на 12 (длину) основания. Получается шестьдесят. Это раздели на 13 (длину) гипотенузы. Получается 4 ∠ 13′ 26′ или 4 единицы и восемь 13′ 13′ долей. Таким числом выражается перпендикуляр“.

Таким образом Герон представляет окончательный результат в двух видах: в „обыкновенных“ дробях $\left(4\,\frac{8}{13}\right)$ и в „египетских“ $\left(4+\frac{1}{2}+\right.$ $\left.+\,^1/_{13}+\,^1/_{26}\right)$. В оригинале эта запись выглядит так: δ ∠ ιγ′κϛ′[1]).

Из того обстоятельства, что в древнегреческой математике „основные“ и „обыкновенные“ дроби применялись совместно, вытекала необходимость *перевода* дробей из одной системы в другую. Перевод египетской дроби в обыкновенную не представлял никаких затруднений. Для этой цели уже древнеегипетские вычислители имели по

---

[1]) В издании Гульча (Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae Ed. Hultsch, 1864, стр. 56) по соображениям, указанным в примечании на стр. 200, вместо одного штриха основная дробь имеет их два.

существу общий прием; вспомним процесс „дополнения", с которым мы познакомились выше (стр. 28 и сл.). Этот процесс нуждался лишь в небольших модификациях, обусловленных наличием понятия „обыкновенной дроби", которого, как мы видели, в древнейшей египетской вычислительной технике не существовало. Впрочем, совершенно не исключена возможность, что оно успело создаться в позднейшие эпохи, от которых до нас не дошло древнеегипетских математических сочинений.

Обратный перевод „обыкновенной" дроби в „египетскую" был, конечно, труднее. Естественно, что греческие вычислители, для которых соответствующий процесс был гораздо важнее, чем для египетских, должны были детально разработать соответствующие приемы вычислений. Правда, древнейшие источники наши не содержат изложения этих приемов (быть может потому, что они составляли предмет элементарного преподавания). Но от более позднего времени мы имеем источник, где некоторые из этих приемов изложены. Это греческий папирус египетского происхождения, относящийся к VI—VII векам н. э. (по месту находки называемый Акмимским). Он излагает правила счета и решения простейших арифметических задач. По интересующему нас вопросу мы находим в этом папирусе такие „формулы" (они, конечно, даны на ряде числовых примеров, и буквенные обозначения представляют модернизацию) [1]):

1) $$\frac{a}{bc}=\frac{1}{c\,\dfrac{b+c}{a}}+\frac{1}{b\,\dfrac{b+c}{a}}.$$

Например,

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66},\quad \frac{3}{110}=\frac{1}{70}+\frac{1}{77},\quad \frac{18}{323}=\frac{1}{34}+\frac{1}{38}.$$

2) $$\frac{a}{bc}=\frac{1}{c\,\dfrac{b+mc}{a}}+\frac{1}{b\,\dfrac{b+mc}{a}\cdot\dfrac{1}{m}}.$$

Например,

$$\frac{7}{176}=\frac{1}{11\cdot\dfrac{16+3\cdot 11}{7}}+\frac{1}{16\cdot\dfrac{16+3\cdot 11}{7}\cdot\dfrac{1}{3}}=\frac{1}{77}+\frac{3}{112}=\frac{1}{77}+\frac{1}{56}+\frac{1}{112}.$$

3) $$\frac{a}{cdf}=\frac{1}{c\,\dfrac{cd+df}{a}}+\frac{1}{f\,\dfrac{cd+df}{a}}.$$

Например,

$$\frac{28}{1\,320}=\frac{28}{10\cdot 12\cdot 11}=\frac{1}{10\cdot\dfrac{120+132}{28}}+\frac{1}{11\cdot\dfrac{120+132}{28}}=\frac{1}{90}+\frac{1}{99}.$$

Все эти приемы, как мы видим, требуют от вычислителя большой сноровки и вычислительной интуиции, ибо нужно подобрать соот-

[1]) Текст папируса издан Baillet (Mémoires publiés par les membres de la mission archéologique française au Caire, т. IX, ч. I, стр. 1—89); эта книга мне недоступна, я цитирую по Heath, A History of Greec matematics, 1921, т. I, стр. 543—544.

ветствующее преобразование так, чтобы в знаменателях обоих слагаемых оказались целые числа. В Акмимском папирусе даны также правила для представления обыкновенной дроби в виде египетской с тремя и бо́льшим числом членов. На них мы не будем останавливаться.

Вопрос о времени возникновения на греческой почве обеих систем представления дробей разрешить не легко. Прямых указаний на этот счет мы не находим ни у одного писателя древности. Дошедшие до нас документы, в которых содержатся записи дробных чисел, составлены не ранее конца III века до н. э., а имеющиеся их списки принадлежат времени, много более позднему. Тем не менее мы сделаем попытку определить хотя бы приблизительно время и обстоятельства появления дробей в греческой науке и практике.

Прежде всего, вряд ли может быть сомнение в том, что заимствование египетской системы дробей имело место задолго до того, как появилась система обыкновенных дробей. Если бы дело обстояло иначе, то никак нельзя было бы понять, какие соображения могли заставить греков заимствовать гораздо менее совершенную и в то же время более трудную египетскую систему. Далее, естественно предположить, что заимствование это имело место не ранее той эпохи, к которой греческие авторы относят первое знакомство греков с египетской наукой, т. е. не ранее начала VI века. С другой стороны, высокое развитие греческой науки к концу V века дает нам основание полагать, что к этому времени греки уже должны были владеть дробями. Отсюда вывод: египетская система представления дробей вошла в вычислительную практику древних греков в течение промежутка 550—450 гг. до н. э. За это время она должна была получить повсеместное распространение в широких кругах греческих купцов, ремесленников и художников, ибо в противном случае она не удержалась бы наряду с позднее появившейся системой обыкновенных дробей. Если же мы примем, что египетская система дробей успела укорениться в практике, то в факте сохранения ее наряду с системой обыкновенных дробей не будет ничего удивительного: укоренившиеся в обиходе методы обладают всегда огромнейшей инерцией, и для преодоления этой инерции нужны такие организационные предприятия, для которых в эпоху греческой культуры никогда не существовало необходимых социально-исторических предпосылок. Поэтому греки не только сами сохраняли заимствованную ими систему, но и способствовали распространению ее на эллинистическом Востоке до тех пределов, до которых доходило их культурное влияние.

Обыкновенные дроби были, вероятно, изобретены самими греками. По крайней мере мы не можем указать народа, у которого греки могли бы их заимствовать. Правда, индусы пользовались издавна обыкновенными дробями, и нельзя исключить возможности заимствования у них греками системы обыкновенных дробей. Но древнейшие известные нам индусские математические памятники относятся примерно к IV веку н. э. Поэтому скорее можно допустить заимствование со стороны индусов от греков, а не наоборот. Кроме того, сношения между индусами и греками были еще очень слабы в ту эпоху, к которой мы можем отнести появление обыкновенных дробей в Греции. Таким образом мы должны принять, что обыкновенные дроби возникли в Греции независимо от иноземных влияний, и если основные дроби мы называем „египетскими“, то обыкновенные мы можем назвать „греческими“. Что касается времени возникновения греческих дробей, то в качестве нижней границы мы можем указать время освоения египетской системы, а в качестве верхней — ту эпоху, от которой до нас дошли наиболее ранние произведения, содержащие обыкновенные дроби. Так как в „Измерении круга“ Архимеда они уже встречаются, и притом как нечто хорошо известное, то за верхнюю границу можно без ошибки принять 250 г. до н. э., а за нижнюю предположительно 450 г. Более точные границы сейчас установить едва ли возможно.

§ 10. Шестидесятеричные дроби

Хотя обыкновенные дроби и обладают преимуществами в сравнении с „египетскими“, однако и они представляют большие оперативные трудности во всех тех случаях, когда знаменатели их сколько-нибудь значительны. Особенно это имеет место в греческой системе нумерации, где, как мы видели, изображение больших чисел связано с техническими трудностями. Между тем развитие вычислительной астрономии и связанное с ней решение задач сферической тригонометрии настоятельно требовало введения приближенных значений иррациональных величин, вычисленных с большой степенью точности, и потому астрономы нуждались в построении более совершенной числовой системы.

Основной тригонометрической функцией греческих астрономов была относительная величина хорды в круге. Для выражения ее можно было бы обойтись и без дробей, приняв за радиус круга достаточно большое целое число, так чтобы нужная степень относительной точности обеспечивалась единицами этого числа. Но для этого пришлось бы ввести новую систему целочисленной нумерации, ибо, как было только что сказано, греческая алфавитная система для изображения очень больших чисел была совершенно неудовлетворительна. Греческие ученые пошли по другому пути. Они сохранили систему обозначения целых чисел, но ввели новый способ изображения дробей.

Впрочем, способ этот вовсе не был на самом деле нов. Он представлял собой не что иное, как приспособление вавилонской шестидесятеричной системы нумерации к греческим числовым символам. В птолемеевом „Синтаксисе“ употребляется исключительно этот способ. Вопроса о времени его первого появления у греков мы коснемся ниже, а теперь обрисуем его более подробно.

Окружность круга Птолемей делит на 360 частей. Это деление восходит, конечно, к далеким временам и имеет истоком астрономию вавилонян, в которой таким образом разделялась окружность эклиптики (заметим, что окружность экватора и других больших кругов небесной сферы вавилоняне делили не на 360, а на 180 частей). Для этих частей Птолемей иногда употребляет наименование τμήματα, т. е. „отрезки“ (латинский перевод: segmentes), в большинстве же случаев он называет их просто „частями“ (μοῖραι). Наш термин „градус“ заимствован, по мнению Нессельмана, из арабской научной терминологии. Что же касается обозначения градуса, которое мы употребляем, то оно, нужно полагать, восходит к Птолемею, который для сокращения слова μοῖραι пользуется записью μ°. От нее впоследствии сохранился только верхний кружок.

Градус Птолемей делит на шестьдесят частей, которые именует иногда „долями“ (λεπτά, дословно „мелочь“), а по большей части просто „шестидесятыми“ или „первыми шестидесятыми“ (πρῶτα ἑξηκοστά) в отличие от следующих шестидесятеричных подразделений, которые именуются „вторыми шестидесятыми“ (δεύτερα ἑξηκοστά), „третьими шестидесятыми“ (τρίτα ἑξηκοστά) и т. д. Отсюда происходит и современная терминология; минуты, секунды, терции. Именно, слово „минута“ есть латинский перевод греческого слова λεπτά (minuta — значит „уменьшенная“, мелкая (доля). Первоначально последовательные подразделения градуса именовались: minuta prima, minuta secunda, minuta tertia (первая минута, вторая минута, третья минута) и т. д., а потом в первом термине отпала его последняя часть, а в двух других — начальная.

Практически при измерении дуги круга Птолемей не идет дальше первых минут; в его таблице хорд, аналогичной нашей таблице синусов, аргумент изменяется через каждые полградуса (соответствующая таблица синусов имела бы интервалом $^1/_4$ градуса); для значений аргумента через $1'$ длины хорд находятся с помощью линейной интерполяции.

Но „градусное измерение“, т. е. шестидесятеричное деление, Птолемей применяет не только для дуг, но и для отрезков. Именно, радиус круга делится на шестьдесят равных частей, каждая из которых носит то же наименоваиие, что и градус окружности, т. е. μοῖραι или τμήμα. Градус снова делится на шестьдесят „первых шестидесятых“, затем идут деления на „вторые“, „третьи“ и т. д. шестидесятые. Здесь Птолемей большинство своих данных и результатов выражает с точностью до единицы третьих шестидесятых. Таким образом отношения хорд к радиусу, которые определяются данными Птолемея, если их выразить десятичными дробями, будут обладать точностью до седьмого десятичного знака!

Если бы шестидесятеричное подразделение было применено Птолемеем только для дуг круга, то оно не образовывало бы еще шестидесятеричной системы дробей, ибо каждое такое подразделеиие имело бы лишь характер именованного числа. Но уже один тот факт, что это подразделение применяется равным образом и к радиусу круга, придает шестидесятеричному способу деления более отвлеченный характер. Последнее еще усугубляется тем, что не только линейные величины, но и величины площади измеряются таким же способом. Даже наименования остаются теми же; отсутствует и указание на размерность величины, т. е. площадь квадрата со стороной в одну минуту измеряется также одной минутой, а не „квадратной минутой“. Таким образом „минута“, „секунда“ и т. д. становятся вполне отвлеченными числами, не связанными с каким-либо определенным видом величин. Соответственно с этим над ними производятся все арифметические действия, т. е. не только сложение, вычитание и нахождение отношения, но и умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня, причем результаты всегда рассматриваются как отвлеченные числа.

Постоянное пользование шестидесятеричными дробями естественно приводит Птолемея к сокращенной записи наименований для первых, вторых и третьих шестидесятых, подобно тому, как он пользуется сокращенным наименованием градуса. Птолемеевское обозначение минут, секунд и терций совпадает с нашим современным. Таким образом, например, число $37°4'55''$ у Птолемея обозначается $\mu^{\circ}\ \lambda\zeta\ \delta'\ \nu\varepsilon''$. Сплошь и рядом цифры градусов не сопровождаются никаким обозначением, кроме черты сверху (как обозначались в ионийской нумерации целые числа в отличие от слов, ср. стр. 179). Штрихи в обозначениях минут, секунд и т. д. иногда ставятся не рядом с цифрами, а сверху над ними. Впрочем, часто Птолемей выписывает и полностью название долей.

Как мы видим, запись числа в этой системе нумерации почти не отличается от нашей записи угловых величин, которая ведет свое начало именно от Птолемея. Что особенно важно, при описанной системе записи чисел в тригонометрических вычислениях никогда не могло появиться громоздких числовых образований. Мы видели, что главным недостатком ионийской нумерации было то, что для чисел, превосходящих тысячу, приходилось комбинировать цифры-буквы с обозначением разрядов, а для чисел бо́льших, чем 10^8, вообще не существовало сколько-нибудь удобных обозначений. В тригонометрических выкладках, где относительная точность приближенных величин была, как правило, не меньше 10^{-6}, это грозило крупными неприятностями. Но в смешанной десятично-шестидесятеричной системе Птолемея эти неприятности благополучно устранялись. Действительно, в дробной части каждый разряд имел не более 60 соответствующих единиц. Целая же часть, если речь шла о длине хорды, не могла превысить 120 градусов. Тогда даже при возвышении в квадрат получаются числа, лишь немногим выходящие за пределы мириада; таким образом неудобства алфавитной системы нумерации не будут сказываться чувствительным образом.

Шестидесятеричная система дробей, как мы видим, весьма сходна с нашей системой десятичных дробей; как мы сейчас убедимся, и операции, которые с ними производили греки, очень близки к нашим операциям с десятичными дробями, а в некоторых отношениях и даже более практичны. Тем более интересно отметить, что система шестидесятеричных дробей древних греков имела символ, игравший роль нашего нуля и служивший для обозначения отсутствия одного из шестидесятеричных разрядов, и по форме своей этот символ сходен с нашим символом нуля, именно, он имеет форму буквы ο. Таким образом число $12°0'24''$ Птолемей записывает так: $\overline{\iota\beta}\ o'\varkappa\,\delta''$. Обращаю внимание на то, что введение „нуля" не отражается на записи целых чисел, составляющих какой-либо из разрядов; целые числа записываются по обычной алфавитной системе. Буква ο и не могла бы служить символом нуля внутри целых чисел, так как в греческой системе нумерации она имеет значение цифры и обозначает число 70. В шестидесятеричной системе дробей этого смешения произойти не может, так как число единиц в низших разрядах не может превзойти шестидесяти. Это обстоятельство дало основание некоторым историкам считать, что введение символа нуля произошло следующим образом: имея в виду пополнить числовые символы знаком, указывающим отсутствие разряда, автор нововведения выбрал для этого среди обычных числовых знаков первый по алфавиту из тех, которые не нужны в шестидесятеричной системе дробей.

С таким объяснением, однако, вряд ли можно согласиться. Во-первых, при сознательном выборе символа нуля автор не мог бы не учесть того обстоятельства, что число градусов может достигать 120 (длина диаметра круга), если речь идет о линейных величинах, а при возведении числа в квадрат могут получиться и значительно бóльшие числа. Во-вторых, даже в низших разрядах могут встретиться числа, бóльшие шестидесяти; именно, как мы увидим, при выполнении операций над шестидесятеричными дробями действия выполнялись постепенно, так что до окончательного приведения числа к „нормальному" виду в его разрядах могли стоять и числа, бóльшие, чем 60.

По этим соображениям мы должны отклонить предположение о том, что символ нуля был введен как таковой преднамеренно. Гораздо более вероятно другое предположение, которое в настоящее время разделяется большинством историков, именно, что символ ο представляет собой сокращение слова οὐδὲν — ничего.

Это предположение тем более правдоподобно, что при наличии особых обозначений для разрядов, будь то в форме штрихов или в более пространной форме — полностью выписываемых наименований, введение символа для нуля не играет почти никакой роли в оперативном отношении. Единственная цель, которую может преследовать специальное указание на отсутствие какого-либо разряда, может состоять в облегчении сравнения „на-глаз" различных числовых величин. Для этой цели нет необходимости в сознательном введении особой цифры. Соответствующий символ появляется, так сказать, сам собой, в результате естественного стремления сократить процесс письма.

Очень возможно, что самая манера отмечать отсутствие единиц какого-нибудь разряда обусловливается подражанием вавилонским образцам; в самом деле, как мы указывали в свое время, в вавилонских математических записях символ для нуля употреблялся уже в V веке до н. э. Но при наличии шестидесятеричной системы счисления и при отсутствии каких бы то ни было наименований разрядов, характерном для вавилонской нумерации, введение нуля представляет собой действительно существенное усовершенствование письменного счета, тогда как „нуль“ Птолемея по существу является излишним знаком. Поэтому я склонен думать, что наличие „нуля“ в греческой системе шестидесятеричных дробей объясняется не столько сознательным стремлением к усовершенствованию системы, сколько непроизвольным подражанием тем источникам, из которых система была заимствована.

Здесь естественно поставить вопрос о времени этого заимствования. „Синтаксис“ Птолемея является наиболее ранним документом, в котором мы встречаемся с шестидесятеричными дробями в произведениях греческих авторов. Если бы, как полагают некоторые авторы, Птолемей первый ввел эти дроби в вычислительную практику, то введение шестидесятеричных дробей нужно было бы датировать двадцатыми, тридцатыми или сороковыми годами II века н. э., к которым относятся астрономические наблюдения Птолемея, а значит, и написание „Синтаксиса“. Однако такое предположение представляется мало основательным. Действительно, мы хорошо знаем, что Птолемей в своих работах опирался на работы своих предшественников. Это относится как к данным наблюдения, так и к вычислительной части. В частности, Теон Александрийский указывает на Гиппарха, как на предшественника Птолемея в составлении таблиц хорд. При этом Теон замечает, что способ, которым Птолемей определял длины хорд, гораздо удобнее и легче, чем способ Гиппарха и Менелая. Повидимому, здесь имеется в виду единообразное применение теоремы Птолемея, играющей ту же роль при вычислении длин хорд, что и наши тригонометрические теоремы сложения.

Нужно думать, что если бы вдобавок к этому и представление результатов в виде шестидесятеричных дробей было введено впервые Птолемеем, то его комментатор, имевший под руками не дошедшие до нас работы Гиппарха и Менелая, не преминул бы отметить это обстоятельство. Отсутствие такого указания дает нам основание считать, что уже Гиппарх и Менелай применяли шестидесятеричные дроби. А так как расцвет деятельности Гиппарха относится к середине II века до н. э., то появление шестидесятеричных дробей должно было не менее чем на триста лет предшествовать составлению „Синтаксиса“.

С другой стороны, у нас есть основания не отодвигать интересующий нас момент времени и на более значительный промежуток. Действительно, если мы связываем появление шестидесятеричных дробей с тригонометрическими вычислениями, то эти дроби не могли появиться ранее середины III века до н. э., когда Аристархом Самосским, а может быть и Архимедом, впервые были произведены определения длин хорд.

Но сочинение Аристарха Самосского, в котором он вычисляет числовые границы, в которых должны быть заключены хорды некоторых углов (определяемых интересующими его в первую очередь частными вопросами наблюдательной астрономии), дошло до нас, и в нем нет и следа шестидесятеричной системы. Архимед также вряд ли пользовался шестидесятеричными дробями, ибо иначе об этом, вероятно, было бы нам известно из его математических произведений, дошедших до нас в большом числе, или из сообщений комментаторов. Поэтому введение шестидесятеричных дробей, если оно даже и не принадлежит Гиппарху, не могло иметь места значительно раньше эпохи Гиппарха.

Система шестидесятеричных дробей представляет собой, несомненно, наиболее совершенную часть древнегреческой вычислительной техники; однако в теоретическом отношении она страдает известной непоследовательностью. Во-первых, шестидесятеричная система разрядов не соответствует десятичному принципу нумерации и десятичной системе словесного выражения чисел; во-вторых, шестидесятеричный принцип простирается неограниченно вниз, но не идет вверх. Казалось бы, что в системе, введенной специально для научных целей, наличие этой непоследовательности является результатом оплошности ее автора. Однако, присмотревшись более пристально, мы увидим, что автор имел все основания совершенно сознательно отказаться от проведения единообразия. Что касается второго из вышеуказанных „дефектов“ системы, то здесь это особенно очевидно. Действительно, в вавилонской системе нумерации, откуда, несомненно, греки заимствовали шестидесятеричные дроби, шестидесятеричная система не ограничивалась образованием низших разрядов, а единообразно применялась и по отношению к высшим. Значит, греческий ученый, который ввел в употребление шестидесятеричную систему дробей, вполне сознательно ограничился „половинчатой“ мерой. Причину такого ограничения нужно искать в потребностях вычислительной практики, в интересах которой это нововведение и было совершено. Непосредственной целью и единственным полем применения новой системы служили тригонометрические расчеты, в которых число линейных градусов (т. е. шестидесятых частей радиуса), служивших на практике единицей измерения, никогда не могло превышать 120; при вспомогательных вычислениях, в которые могли входить произведения хорд и их отрезков, „целая“ часть числа, хотя и возрастала, но оставалась в тех пределах, в которых греческая система нумерации не влекла усложнений оперативной техники. Поэтому не было смысла отказываться от привычных обозначений чисел. Не исключена даже возможность того, что попытка полного перенесения вавилонской системы была сделана каким-либо предшественником Птолемея. Но такая попытка вряд ли могла увенчаться успехом. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить судьбу „октад“ Архимеда и „тетрад“ Аполлония. Можно привести и еще один аргумент в пользу этого утверждения, прибегнув к исторической аналогии. Хотя историческая аналогия вообще не является доказательством, однако она не лишена интереса в тех случаях, когда сходные обстоятельства порождаются сходными причинами. Я имею здесь в виду те попытки распространения шестидесятеричной системы на запись высших разрядов, которые имели место в Западной Европе до того, как десятичные дроби сделались рабочим инструментом вычислителя. Такие попытки предпринимались неоднократно. В конце XIII века это сделал монах доминиканского ордена Петер Филомен, родом датчанин, долго живший в Париже и составивший прекрасный по тому времени комментарий к арифметическому трактату знаменитого астронома Сакрабоско. Филомен составил даже таблицу умножения, дающую произведения от 1×1 до 50×50 в шестидесятеричной системе [1]). Таким образом он имел в виду чисто практические цели. Аналогичную попытку предпринял более ста лет спустя, в начале XV века, немецкий астроном Иоганн Гмунденский, который составил специальный трактат, посвященный шестидесятеричной системе счисления [2]). Эти попытки, однако, остались безуспешными, хотя авторы их пользовались не только среди современников, но и у последующих поколений славой и известностью; их произведения изучались в школах и служили руководствами для астрономов вплоть до начала XVII века — Коперник и Галилей еще принадлежали к числу их „учеников". Неудача этих попыток не должна нас удивлять: в XIII—XV веках еще не существовало десятичных дробей (они были введены в Европе впервые Стевиным в 1584 г.). Шестидесятеричные дроби, известные астрономам по сочинениям Птолемея, были поэтому наилучшим способом представлеиия дроби. Что же касается целых чисел, то индусско-арабская десятичиая нумерация, которая уже в начале XIII века широко применялась в Европе, была еще более удобна, чем ионийская, и потому не было никакого смысла во имя единообразия нарушать интересы вычислительной практики.

Таким образом объясняется второй из вышеуказанных „дефектов" системы. Что касается первого, то может на первый взгляд показаться, что в интересах единства системы нумерации можно было бы строить и дробную часть числа по десятичному принципу; иначе говоря, вместо шестидесятеричных дробей использовать десятичные. Выше я указывал на то, что греческой целочисленной нумерации не чужда идея обозначать одной и той же цифрой одно и то же число единиц различных десятичных разрядов. Так, 2, 2 000 и 20 000 обозначаются одной и той же цифрой β. Отличительные знаки разрядов (точки, штрихи и т. д.), которыми разнятся обозначения вышеуказанных чисел, вполне соответствуют отличительным знакам шестидесятеричных разрядов. Поэтому при построении новой системы дробей греки могли бы, сохраняя идею вавилонской нумерации, изменить основание 60 на основание 10, что дало бы унификацию обозначений и повлекло бы за собой, вероятно, и изменение десятичной цифровой системы, в которой число знаков сократилось бы с 27 до 9. Возникает вопрос, почему греческие астрономы упустили эту возможность? Не потому, ли что они, заимствуя вавилонскую систему представления дробей, недостаточно продумали открывающиеся здесь

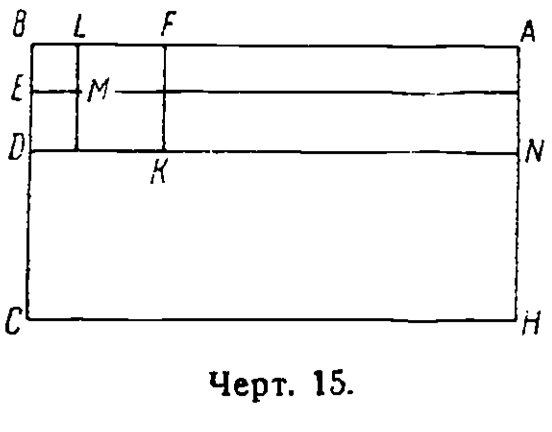
[1]) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, т. II, стр. 91.
[2]) Cantor, цит. соч., стр. 177.

перспективы? Мне кажется, что не потому. Во всяком случае, если бы автор шестидесятеричной системы дробей стал бы сравнивать ее с десятичной с точки зрения предоставляемых ими удобств, то он имел бы основание решить вопрос в пользу системы шестидесятеричной. В самом деле, в этой системе вычисления могут производиться (и, как мы видим, действительно производились) совершенно по тем же правилам, по которым производим мы вычисления с десятичными дробями. Единственным преимуществом десятичной системы является ее соответствие со структурой устного счета. Это, конечно, не маловажное обстоятельство, ибо оно облегчает превращение и раздробление единиц одного разряда в единицы другого. Но, с другой стороны, десятичная система имела и существенные недостатки по сравнению с шестидесятеричной. Не говоря уже о том, что число 60 в качестве основания имеет то преимущество, что оно имеет больше делителей и, в частности, 7 из 10 чисел первого десятка; для приближенных вычислений, когда результат берется с заданной точностью, это обстоятельство может быть и не имеет большого значения. Более существенно, однако, то, что число 10 значительно меньше числа 60, так что одна и та же дробь будет иметь в десятичной системе гораздо больше разрядов, чем в шестидесятеричной. В соответствии с этим при действиях с дробями число элементарных операций (скажем, при умножении число умножений разряда на разряд) в десятичной системе значительно больше, чем в шестидесятеричной. Правда, самые элементарные операции при десятичной системе легче производятся в уме: таблицу умножения до 60×60 удержать в памяти гораздо труднее, чем до 10×10. Это, однако, дает преимущество десятичной системе лишь в том случае, если элементарные операции производятся действительно в уме. Мы знаем, однако (стр. 194), что греческие вычислители издавна пользовались для выполнения элементарных операций таблицами. А при употреблении таблиц указанное только что преимущество десятичной системы отпадает; время и в особенности внимание, затрачиваемые на отыскивание результата в таблице, с лихвой окупаются объемом получаемого результата. Об этом свидетельствует современная практика элементарных вычислений, в которой, например, таблицы умножения не слишком большого объема (например, трехзначных чисел на двузначные) с успехом применяются для вычислений с большими числами. Мы видели, насколько несовершенной была техника составления древнегреческих таблиц. Естественно, что таблицы значительного объема были бы слишком громоздкими; поэтому пределы их не могли быть очень велики, так что, например, таблицы умножения всех двузначных чисел на двузначные, в которых было бы около 5 000 результатов, были бы гораздо менее удобны, чем таблицы умножения до 60×60, в которых должно было содержаться около 1 800 результатов. Поэтому шестидесятеричную систему могли предпочесть сторичной и из чисто арифметических соображений. Но, конечно, определяющим моментом должны были явиться исторические причины: шестидесятеричная система уже существовала у вавилонян; она применялась ими, между прочим, и в астрономических расчетах, ради которых ввели ее греческие вычислители; наконец, как мы видели, всевозможные таблицы (умножение, деление, возведение в квадрат и др.), без которых шестидесятеричная система вряд ли могла быть практичной, были у вавилонян в большом распространении — оставалось только „перевести их на греческий язык“, т. е. заменить вавилонские цифры греческими. Нельзя, конечно, с полной достоверностью утверждать, что подобное сопоставление преимуществ различных систем производилось теми греческими авторами, которые ввели в обиход вычислителя шестидесятеричную систему дробей. Однако такое предположение представляется в высшей степени правдоподобным, и уж во всяком случае мы вправе сказать, что греческая шестидесятеричная система дробей как средство для практического выполнения элементарных вычислений не уступала нашей системе десятичных дробей.

Чтобы убедиться в этом, достаточно на нескольких примерах познакомиться детально с вычислительными процедурами греческих астрономов, представляющими особый интерес. Если, например, для умножения целых чисел мы имеем только схему этого действия (стр. 197), то умножение шестидесятеричных дробей не только иллюстрируется многочисленными выкладками „Синтаксиса“ Птолемея, но и сопровождается теоретическими пояснениями его комментатора — Теона Александрийского. С ними я и хочу познакомить читателя.

§ 11. Умножение шестидесятеричных чисел

Объяснению схемы умножения Теон предпосылает ряд правил для определения (шестидесятеричного) разряда произведения по разрядам множимого и множителя [1]). Он устанавливает, что при умножении какого-либо „вида“ (εἶδος), т. е. разряда, на „части“, т. е. на градусы, „вид“ остается неизменным. При умножении на „первые шестидесятые“ „вид“ изменяется так, что „части“ становятся первыми шестидесятыми, первые шестидесятые — вторыми, и т. д. При умножении на вторые шестидесятые „вид“ меняется так, что „части“ становятся вторыми шестидесятыми, первые шестидесятые — третьими и т. д. Эти правила доказываются с помощью чертежа, который я воспроизвожу здесь (черт. 15), изменяя лишь греческие буквы на латинские.



Черт. 15.

[1]) Claudii Ptolemaei Magnae Constructionis, libr. XIII, Theonis Alexandrini in eosdem commentarii, Basileae, 1528 стр. 40.

Отрезки AB и BC должны изображать каждый одну „часть“ — чертеж, правда, не обнаруживает их равенства; отрезки BF и BD — первые шестидесятые, отрезки BE и BL — вторые шестидесятые. Так как, — говорит Теон, — стороны прямоугольника $ABCH$ суть „части“, то и сам он есть „часть“. Так как, далее, BD есть шестидесятая доля BC, то прямоугольник $BDNA$ есть шестидесятая часть прямоугольника $ABCH$, т. е. „первая шестидесятая“. С другой же стороны, он (т. е. его площадь) получается от умножения „первой шестидесятой“ на „часть“. Далее таким же образом показывается, что прямоугольник $BDKF$, стороны которого суть первые шестидесятые, есть шестидесятая доля „первой шестидесятой“, т. е. „вторая шестидесятая“, и т. д.

Таким образом трудности, связанные с установлением понятия умножения на дробь, обходятся путем геометрической интерпретации.

После этих предварительных объяснений Теон переходит к изложению процесса умножения шестидесятеричных дробей.

«Пусть, — говорит он, — нужно произвести эту операцию над числами „Синтаксиса“. Пусть, например, нам нужно помножить на самое себя сторону десятиугольника, которая, как будет показано, равна $\overline{37}\,4'55''$ ($\overline{\lambda\xi}$ δ'νε'') [1]). Я выписываю ее, затем ее же внизу, как написано ниже, и умножаю сначала 37 на себя, на первые и вторые шестидесятые, затем 4 первых шестидесятых на 37, на самое себя и на вторые шестидесятые, и, наконец, вторые шестидесятые на части, на первые шестидесятые и на самое себя. Таким образом я выполняю удобнейшим образом умножение этих чисел. 37 частей, умноженные на себя, дают 1 369 частей, на 4 первых шестидесятых — 148 первых шестидесятых, на 55 вторых шестидесятых — 2 035″. Далее, 4′ на 37 частей дают 148′, на себя — 16″ и на 55″ — 220‴. Наконец, 55″ на 37 частей дают 2 035″, на 4′ — 220 третьих и на себя 3 025 четвертых, и порядок этих чисел таков, как ниже написано:

$\overline{\lambda\zeta}$	'δ	νε		
$\overline{\lambda\xi}$	'δ	νε''		
͵ατξδ	ρμη'	͵βλε''		
	ρμη'	ιϛ''	σκ''	
		͵βλε''	σκ'''	γ͵κε'''' ».

---

[1]) В целях наиболее точного воспроизведения оригинала я заменяю только цифровые обозначения на современные; в остальном я следую транскрипции Базельского издания 1528 г. Поэтому я не ввожу обозначения для градусов („частей“) и пользуюсь словесным или цифровым представлением цифр в соответствии с оригиналом.

В переводе на нашу нумерацию эта схема представится следующим образом:

37	4	55		
37	4	55		
1 369	148	2 035″		
	148	16″	220‴	
		2 035″	220‴	3 025⁗

«Это, — продолжает Теон, — сводится воедино следующим образом. Прежде всего, деля 3 025⁗ четырех шестидесятых на 60, мы образуем 50 третьих шестидесятых и 25 четвертых. Затем третьи шестидесятые, общее число которых вместе с 50 прибавившимися от деления четвертых становится 490, дают 8 вторых и 10 третьих, затем образовавшиеся после сведения 4 094 вторых дают 68 первых и 14 вторых, и, наконец, сведенные 364 первых шестидесятых дают 6 частей и четыре первых шестидесятых. Итого становится 1 375 частей, 4 первых шестидесятых, 14 вторых шестидесятых, 10 третьих, и 25 четвертых. Так как Птолемею в дальнейшем изложении нужны шестидесятые лишь до вторых, то он взял только 1 375 4′ 14″ приближенно, оставив без внимания третьи и четвертые шестидесятые. Так же поступают и в том случае, если перемножаются различные числа».

Мы видим, таким образом, что схема античного умножения отличается от нашей тем, что умножение совершается в порядке нисхождения разрядов; при этом превращение низших разрядов в высшие совершается одновременно с суммированием частных произведений. Если мы сравним только что приведенную схему со схемой Евтокия (стр. 197), то увидим, что между ними существует полный параллелизм, в частности, и у Евтокия превращение не выполняется непосредственно при умножении.

§ 12 Деление шестидесятеричных чисел

Как уже было сказано, ни в одном из дошедших до нас сочинений мы не находим схемы деления целых чисел. Однако, опираясь на только что отмеченную аналогию, мы можем реконструировать эту схему, исходя из схемы деления шестидесятеричных дробей. Описание последней мы находим у того же Теона Александрийского.

Я привожу это описание полностью; единственная вольность, которую я себе позволяю, состоит в унификации обозначений шестидесятеричных дробей. Как мы уже видели из предшествующего отрывка, у Теона (и у Птолемея) бессистемно переплетаются различные способы полного и сокращенного наименования разрядов. Для лучшего понимания текста Теона ниже я привожу схему вычисления (которой у Теона нет).

«Пусть далее, — читаем мы у Теона, — поставлена задача данное число разделить на градусы, минуты и секунды. Пусть данное число $1\,515^\circ 20' 15''$, и нужно разделить его на $25^\circ 12' 10''$, т. е. нужно найти, сколько раз 25°12′10″ содержится в 1 515°20′15″. Мы делим его [1]), сперва беря 60° [2]), так как то, что дает 61, избыточно, и вычитаем шестидесятикратно 25° и 12′ и 10″, а именно, сначала 25°, что дает 1 500°; затем остающиеся 15° мы разлагаем и складываем их с 20′; из получающейся суммы 920 мы отнимаем шестидесятикратно 12′, т. е. 720′, и, наконец, из остающихся 200′15″ отнимаем шестидесятикратно 10″, что дает 600″ или 10′. Остается 190′15″.

Начиная теперь сызнова, мы делим это на 25°; результат деления получается 7, ибо 8 избыточно. Происходящие от умножения [3]) 175′ мы вычитаем из 190′, затем мы разлагаем остающиеся 15′ в 900″ и прибавляем сюда 15″; от суммы мы отнимаем семикратно [4]) 12′, т. е. 84″, так как и 7 это также первые шестидесятые; остается 831″; наконец, мы вычитаем отсюда таким же образом семикратно 10″, т. е. 70″ или 1″10‴, и остается 829″50‴; их мы снова делим на 25, результат деления будет 33; умножение дает 825″, остается 4″50‴ или 290‴; тогда мы снова отнимаем тридцать три раза 12′, которые дают 396‴, так что результат деления 1 515°20′15″ на 25°12′10″ составляет около 60°7′33″. Ибо, если мы обратно помножим последнее на 25°12′10″, то мы получим около 1 515°20′15″».

Мы видим, таким образом, что античный процесс деления отличается от нашего тем, что умножение отдельного разряда частного на разряды делителя перемежается с вычитанием получаемых произведений из делителя и раздроблением остатков в единицы низших

---

[1]) То-есть число 1 515°20′15″.

[2]) Из следующего абзаца ясно, что частное отыскивается делением округленных чисел; поэтому при последующем испытании может оказаться необходимым внести поправку в сторону уменьшения частного. Это и имеет в виду Теон, говоря „сперва беря 60". Точнее было бы передать это место так: „Мы делим его сперва согласно шестидесяти" — в оригинале:

μερίζομεν αὐτὸν πρῶτον παρὰ τὸν ξ̄.

[3]) В оригинале: ἐκ τῆς παραβολῆς. Термин παραβολή означает, собственно, не „умножение", а „приложение" и употребляется в математике в смысле построения прямоугольника (или параллелограма) с заданной („прикладываемой" к основанию) боковой стороной. Для обозначения умножения чисел существовали особые термины, например πολλαπλασιασμός; соответствующим русским термином было бы слово „умногокрачивание". Евклид строго различает эти термины и никогда не вносит арифметическую терминологию в геометрические рассуждения, и наоборот. Это имеет свои принципиальные основания, о которых мы будем говорить в другом месте. Здесь я только хочу обратить внимание читателя на то, что Птолемей, Теон Александрийский и ряд других авторов этого разграничения не проводят. На протяжении, например, приводимого здесь отрывка наряду с „геометрическим" термином „приложение" для обозначения умножения Теон пользуется также и чисто арифметическим термином μερίζειν для понятия „делить" (см. предыдущую сноску).

[4]) Здесь 7 есть число *минут*; поэтому умножение на 7 сопровождается переходом минут в секунды, секунд в терции и т. д.; на это и указывает следующая фраза: „так как также и 7 это первые шестидесятые". В дальнейшем аналогичных указаний Теон не делает.

разрядов. Если представить описанный Теоном процесс схематически, то мы получим следующее:

	1 515°20′15″	25°12′10″	
(60° × 25′ =)	1 500°	60°	(первый разряд частного)
(разность)	15° = 900′		
(итого)	920′		
(60° × 12′ =)	720′		
(разность)	200′		
(60° × 10″ =)	10′		
(первый остаток)	190′ 15″		
(7′ × 25° =)	175′	7′	(второй разряд частного)
(разность)	15′ = 900″		
(итого)	915″		
(7′ × 12′ =)	84″		
(разность)	831″		
(7′ × 10″ =)	1″ 10‴		
(второй остаток)	829″ 50‴		
(33″ × 25° =)	825″	33″	(третий разряд частного)
(остаток)	4″ 50‴ = 290‴		
(33″ × 12′ =)	396‴		
(избыток	106‴)		

Само собой разумеется, что, излагая правила деления шестидесятеричных дробей, Теон предполагает известными правила действий с целыми числами. Поэтому ему излишне объяснять, как выполняется деление чисел 1 515, 190 и 829 на 25, тем более, что здесь нет нужды прибегать к письменному вычислению. И вообще при делении шестидесятеричных дробей вспомогательные деления целых чисел могли бы производиться устно, так как делимое всегда будет сравнительно небольшим числом. Как же выполнялось такое деление в том случае, когда приходилось иметь дело с большими числами? Нужно полагать, что порядок операций был совершенно такой же — только вместо шестидесятеричных разрядов фигурировали десятичные[1]). Полная аналогия между умножением целых чисел и умножением шестидесятеричных дробей придает такому предположению большу́ю вероятность.

§ 13. Общая оценка древнегреческой арифметики

Мы познакомились теперь с античной техникой выполнения четырех арифметических действий. Приведенными мною данными исчерпываются все существенные источники и теперь хорошо видно, насколько отрывочны те данные, которые находятся в нашем рас-

[1]) В своей „Истории греческой математики“ (т. I, стр. 58—59) Гис (Heath) дает несколько иную схему деления целых чисел, отличающуюся от

поряжении. Однако, как ни скудны эти сведения, они показывают, что греки были умелыми вычислителями.

Между тем, в широких кругах распространено мнение, что арифметические знания и умение греков, в противоположность их геометрическим построениям, представляют собой нечто совсем примитивное. Это мнение имеет основой суждения виднейших историков математики.

В наиболее осторожной форме это мнение выражено Г. Цейтеном. Говоря о причинах отсутствия числовых выкладок в геометрической системе Евклида, этот автор пишет[1]):

„Объясняется это, может быть, тем, что при таком вычислении отказываются от абсолютно точного определения, к которому стремились в геометрии, а *может быть и тем, что греки не обладали необходимыми для настоящих вычислений способностями*. Этот недостаток обнаруживается, например, у Геродота, который, оказывается, не может произвести правильного деления на 48; он еще более поразителен, когда приходится вычислить, скажем, какой-нибудь квадратный корень".

Гораздо более категорично суждение Кантора: „Греки, говорит он, были по преимуществу *геометрическим* народом; у индусов же мы должны удивляться по преимуществу их вычислительным способностям" [2]). Таково же суждение Ганкеля [3]), который говорит об индусском „числовом чувстве" (Zahlensinn), противопоставляя его греческому „чувству формы" (Formensinn).

Нет нужды умножать подобные высказывания. Отметим только, что обычно фигурирующая в них аппеляция к „чувству", „духу" и „одаренности" греческого народа является лишь свидетельством неумения объяснить исторически особенности развития греческой математики. Действительно, у грека Геродота, человека, не имеющего ничего общего с математикой, имеется злополучная ошибка в делении на 48. Но грек Птолемей производит безошибочно сотни вычислений с точностью, равносильной точности до пятого и даже шестого

теоновской тем, что первый, второй и т. д. остатки находятся, как это имеет место в нашем способе деления, одновременно после умножения соответствующей цифры частного на весь делитель (а не постепенно, по мере умножения на отдельные разряды). При этом Гис подчеркивает, что в этом пункте имело место отличие деления целых чисел от деления шестидесятеричных дробей. Остается, однако, совершенно неизвестным, на чем основывается это категорическое утверждение. Пример деления целых чисел, приводимый автором, очевидно, сконструирован им самим, хотя из его слов („операция деления... производилась греками mutatis mutandis таким же образом, как ее теперь производим мы") может показаться, что этот пример построен по образу дошедшего до нас античного примера. Возможно, конечно, что утверждение Гиса соответствует действительности, но это все же только предположение, и притом совершенно необоснованное.

[1]) Цейтен, „История математики в древности и в средние века". Русский перевод П. С. Юшкевича, ГТТИ, 1932, стр. 51.

[2]) Cantor, цит. соч., т. I, стр. 601—602.

[3]) Hankel, Beiträge zur Geschichte der Mathematik, стр. 221.

десятичного знака, а грек Диофант обнаруживает такую числовую интуицию, которой не сыскать ни у одного индусского математика и которой восхищались Ферма и Эйлер.

Те историки, для которых отсутствие „числового чувства" у греков является предпосылкой их исторических обобщений, не могут, конечно, игнорировать существования Диофанта. Но здесь их выручает апелляция к иноземному влиянию. По их мнению, творчество Диофанта имело своей предпосылкой влияние индусской математики. Правда, наличие этого влияния ничем не доказано. Наоборот, весьма вероятно, что индусская математика развивалась под некоторым влиянием греческой; во всяком случае, по времени она моложе греческой. Конечно, доказать отсутствие чего-нибудь всегда гораздо труднее, чем установить существование некоторого факта, так что в данном случае позиция защитников иноземного влияния достаточно безопасна. Но тем не менее она остается совершенно необоснованной, если только не считать аргумента, постулирующего особый характер математического мышления греков.

Еще девяносто лет назад Нессельман, чувствуя, повидимому, натяжку в подобном объяснении, выдвинул своеобразную теорию циклического развития математики. Он отмечает, что в истории западноевропейской математики XIII — XVIII веков можно наблюдать смену господствующих направлений: после Леонардо Пизанского (начало XIII века) развивается одна алгебра; это продолжается около 400 лет; в 1575 г. Ксиландр впервые перевел на латинский язык Диофанта, и вслед за этим начинается увлечение неопределенным анализом, продолжающееся около столетия. Затем неопределенный анализ забрасывается; начинается увлечение исчислением бесконечно малых. В эпоху Эйлера вновь вспыхивает интерес к задачам неопределенного анализа и т. д.

Таким же образом представляет себе Нессельман и развитие древнегреческой математики. В III и II веках до н. э., в эпоху Евклида, Архимеда и Аполлония, вопросами арифметики, по мнению Нессельмана, древние греки совершенно не занимались. Но вот появилась „Арифметика" Никомаха (I—II века н. э.) и после нее „математическая литература приняла чистое арифметическое направление и публика была завалена в течение II — IV веков арифметическими сочинениями"[1]). Историческая концепция Нессельмана, несмотря на свою примитивность, имеет, однако, некоторое преимущество перед вышеизложенными взглядами, так как она апеллирует к „духу времени", а не к „духу народа". Правда, этот „дух времени" не подчинен у Нессельмана никаким внешним влияниям, и смена направлений не объясняется никакими историческими причинами. Но во всяком случае появление Диофанта перестает быть единичным фактом, напоминающим падение метеора на землю. Он укладывается в определенную историческую схему.

---

[1]) Nesselmann, Algebra der Griechen, стр. 187.

Схема эта, однако, неверна. Теория и техника арифметических операций в эпоху Архимеда должны были, на мой взгляд, стоять не на меньшей высоте, чем во II—IV веках н. э. Верно, что мы не имеем от этой эпохи сочинений, специально посвященных арифметике, тогда как геометрию греков в эпоху Архимеда мы имеем возможность изучать по прекрасно сохранившимся научным трактатам. Однако для этой неравномерности исторической информации есть также свои исторические причины, которых мы пока не станем касаться.

Утверждение, что в эпоху Архимеда греки обладали развитой теорией арифметических операций, можно непосредственно проверить на многочисленных примерах извлечения квадратного корня, произведенных самим Архимедом. Архимед дает сразу окончательные результаты, а его комментатор Евтокий ограничивается тем, что проверяет эти результаты с помощью умножения; выше мы использовали эту часть комментария Евтокия для ознакомления с техникой умножения. Но как Архимед получает свои замечательные результаты? В соответствии с своей точкой зрения Нессельман полагает, что эти результаты найдены не *методической* процедурой, а *методом проб*, постоянно проверяемых умножением. Методическое же извлечение квадратного корня, по мнению Нессельмана, стало применяться лишь после введения шестидесятеричной системы дробей. Нессельман приписывает это введение Птолемею и, таким образом, благополучно помещает открытие процедуры извлечения корня в постулируемую им эпоху увлечения арифметикой.

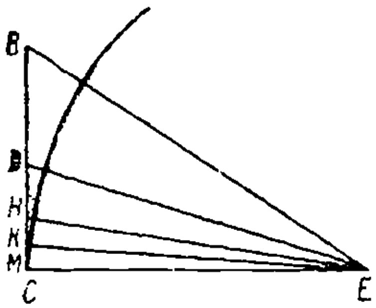
Чтобы убедиться в неприемлемости этой теории, а вместе с тем и всей концепции Нессельмана в целом, мы должны прежде всего ознакомиться с фактическим материалом, относящимся к операции извлечения квадратного корня у древних греков.

§ 14. Извлечение квадратного корня у Архимеда

Древнейшим документом, в котором многократно производится извлечение корня в неразрывной связи с конкретной вычислительной задачей, является „Измерение круга“ Архимеда. Если мы хотим составить себе отчетливое представление о степени развития вычислительной техники греков, мы должны познакомиться не только с отдельными вырванными из контекста операциями, но с ходом сложной выкладки в целом. Это вынуждает нас изложить третье предложение „Измерения круга“ со всеми его деталями. Мы уже познакомились с формулировкой этого предложения (стр. 199). Оно устанавливает, что длина окружности превышает утроенный ее диаметр менее, чем на $^1/_7$, но более, чем на $^{10}/_{71}$ диаметра.

Это доказывается принципиально так же, как в нынешних учебниках элементарной геометрии выводится приближенная величина числа π. Именно, Архимед показывает, что периметр правильного 96-угольника, описанного около круга, превышает утроенный диаметр круга менее, чем на $^1/_7$ часть последнего, а периметр вписанного 96-угольника превосходит утроенный диаметр на величину, бо́льшую, чем $^{10}/_{71}$ диаметра. Длина окружности a fortiori должна обладать обоими этими свойствами.

Архимед начинает с описанного многоугольника, число сторон которого последовательно удваивается, начиная с шести. Если через точку окружности C (черт. 16) провести касательную CB, а из центра E провести прямую BE под углом 30° к радиусу EC (Архимед говорит „угол BEC составляет треть прямого"), то отрезок касательной BC есть, очевидно, половина стороны правильного шестиугольника. Если же угол BEC разделить пополам прямой ED, то отрезок DC будет половиной стороны правильного описанного двенадцатиугольника. Деля, далее, пополам угол DEC, получим половину стороны правильного двадцатичетыреугольника, описанного около круга, и т. д. Это построение и применяет Архимед. При этом он каждый раз находит отношение, заведомо превышающее отношение радиуса EC к половине стороны соответствующего многоугольника, или, что то же, отношение диаметра к стороне. Это дает ему возможность определить в окончательном итоге отношение заведомо меньшее, чем отношение периметра описанного 96-угольника к диаметру.



Черт. 16.

Отношение радиуса CE к половине стороны описанного шестиугольника CB Архимед оценивает, исходя из того, что BE вдвое больше, чем BC. Современный вычислитель стал бы вычислять отношение $CE : BC$ примерно так:

$$\frac{CE}{BC} = \frac{\sqrt{BE^2 - BC^2}}{BC} = \sqrt{\frac{BE^2}{BC^2} - 1} = \sqrt{3},$$

и нашел бы приближенное значение $\sqrt{3}$ с недостатком. Архимед же полагает отношение $BE : BC$ равным $306 : 153$ и без всяких дальнейших объяснений указывает, что EC относится к BC, как 265 к 153.

В этом, как и в нескольких других местах „Измерения круга", не оговорено, что отношение $265 : 153$ лишь приближенно равно отношению $CE : BC$. Это, может быть, является результатом небрежного переписывания оригинала, ибо в других местах той же теоремы в аналогичных случаях указывается, что отношение отрезков больше, чем отношение таких-то чисел. И в данном случае отношение $CE : BC$ в действительности больше, чем отношение $265 : 153$, иначе говоря, если за единицу длины принять $^{1}/_{153}$ часть BC, то EC превышает 265. Но превышение здесь очень незначительное. Действительно, $EC^2 = EB^2 - BC^2 = 306^2 - 153^2 = 70\,227 = (265)^2 + 2$, так что, принимая $EC = 265$, мы делаем относительную ошибку около $\frac{2}{(265)^2}$.

Несомненно, что замена отношения $BE : EC$ через $306 : 153$ (вместо $2 : 1$) имеет тот смысл, что Архимед хочет *избежать* введения дробного выражения для CE. В исторической литературе часто встречается утверждение, что в описываемом здесь месте Архимед извлекает квадратный корень из 3 и полагает

$$\sqrt{3} > \frac{265}{153}.$$

Такое суждение, хотя оно математически равносильно утверждению Архимеда, создает, однако, неверную историческую картину.

Дело в том, что для греческого математика отношение 265 к 153 вовсе не было тождественно с дробью $\frac{265}{153}$. При дальнейших извлечениях квадратного корня Архимед имеет дело и *с дробями*, но здесь он говорит только *об отношении*. И он *выбрал* отношение 306 : 153, а не какое-нибудь иное равное ему, очевидно, с таким расчетом, чтобы число, выражающее $BE^2 - BC^2$, очень мало отличалось от полного квадрата. Таким образом здесь по существу мы имеем не извлечение корня, а приближенное целочисленное решение *неопределенного уравнения*

$$y^2 = 3x^2.$$

Возникает, естественно, вопрос, как найдена столь удачная пара чисел 306 : 153. Об этом мы поговорим ниже, заметив пока, что дробь $\frac{306}{153}$ представляет собой девятую подходящую дробь для непрерывной дроби $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2} \cdots}}}$, представляющей $\sqrt{3}$.

Применяя далее, предложение о пропорциональности отрезков CD и DB сторонам CE и EB треугольника CEB, для которого ED есть биссектриса,

$$CE:CD = BE:BD, \tag{1}$$

Архимед получает отсюда

$$CE:CD = (CE + BE):BC. \tag{2}$$

Архимед, разумеется, не пользуется нашей символикой в записи пропорций; он говорит: „CE вместе с BC так (относится) к BC, как CE к CD“. Но для наших целей неважен здесь способ выражения Архимеда; поэтому мы будем пользоваться нынешними обозначениями.

Так как $CE:BC > 265:153$, а $BE:BC = 306:153$, то из пропорции (2) вытекает, что

$$CE:CD > 571:153.$$

Таким образом Архимед находит приближение с недостатком для отношения $R : \frac{b_{12}}{2}$ (R — радиус круга, b_n — сторона правильного описанного n-угольника). Аналогичным образом находится приближение с недостатком для $R : \frac{b_{24}}{2}$. Теорема о биссектрисе треугольника применяется теперь к треугольнику CED, биссектриса которого EH отсекает на касательной отрезок $CH = \frac{b_{24}}{2}$. Предварительно нужно найти приближенное выражение гипотенузы DE. Архимед утверждает, что

$$ED^2 : CD^2 = 349\,450 : 23\,409. \tag{3}$$

Здесь снова встречается неточность выражения, подобная вышеотмеченной. На самом деле,

$$ED^2 : CD^2 = (EC^2 + CD^2) : CD^2 > (571^2 + 153^2) : 153^2,$$

т. е.

$$ED^2 : CD^2 > 349\,450 : 23\,409.$$

Из (3) Архимед заключает, что

$$ED : CD = 591\frac{1}{8} : 153.$$

Оставляя здесь, как и в последующих аналогичных выкладках, неизменным последний член числового отношения, Архимед не нуждается по существу в извлечении корня из 23 409. Напротив, корень из 349 450 он должен действительно „извлечь“. Как найден результат $591\frac{1}{8}$, Архимед не говорит.

Совершенно аналогичным образом Архимед идет дальше. Ему приходится извлекать еще два квадратных корня, и результаты его вместе с уже полученным можно представить следующим образом:

$$\sqrt{349\,450} > 591\frac{1}{8}, \tag{4}$$

$$\sqrt{1\,373\,943\frac{33}{64}} > 1\,172\frac{1}{8}, \tag{5}$$

$$\sqrt{5\,472\,132\frac{1}{16}} > 2\,339\frac{1}{4}. \tag{6}$$

Отношение последнего числа к 153 приближенно представляет отношение $EK : \frac{a_{48}}{2}$. Из пропорции, аналогичной пропорции (2), Архимед получает для отношения $R : \frac{a_{96}}{2}$ неравенство:

$$R : \frac{a_{96}}{2} > 4\,673\frac{1}{2} : 153.$$

Из этого Архимед заключает, что

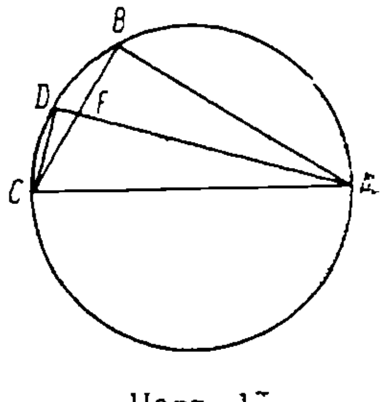
$$2R : P_{96} > 4\,673\frac{1}{2} : 14\,688.$$

„Последнее число, — говорит он, — есть троекратное первое, увеличенное на $667\frac{1}{2}$, т. е. на число, меньшее, чем одна седьмая $4\,673\frac{1}{2}$ [1]). Таким образом периметр описанного около круга многоугольника равен утроенному диаметру, увеличенному менее чем на седьмую часть его. Тем более поэтому окружность круга будет меньше утроенного диаметра, увеличенного на седьмую долю его".

Этим заканчивается первая часть теоремы. Совершенно очевидно, что последняя, только что приведенная часть ее воспроизводит такую выкладку: $14\,688$ делится на $4\,673\frac{1}{2}$; частное получается 3, а остаток $667\frac{1}{2}$. На этот остаток делится делитель $4\,673$, получается 7 с остатком. Значит, $667\frac{1}{2}$ составляет менее чем седьмую часть числа $4\,673\frac{1}{2}$.

Мы видим, что при *выполнении приближенного деления двух больших чисел Архимед пользуется процедурой „последовательного деления", т. е. нахождения неполных частных непрерывной дроби.* Правда, эта процедура здесь быстро обрывается, но не может быть никакого сомнения, что Архимед, если бы ему было нужно (а в данном случае это ему вовсе не требовалось) мог бы продолжить этот процесс и дальше. Действительно, в „Началах" Евклида способ последовательного деления применяется как метод отыскания общего наибольшего делителя двух целых чисел [2]).

Вслед за подробно изложенным нами процессом вычисления периметров описанных многоугольников Архимед переходит к вычислению периметров вписанных многоугольников, чтобы получить нижнюю границу для отношения окружности к диаметру.



Черт. 17.

Беря за исходный пункт сторону BC правильного шестиугольника (черт. 17), он строит треугольник ABC (AC — диаметр). Угол A равен 30° (как и угол E на черт. 16). Отношение AB к BC, — говорит теперь Архимед, — меньше, чем отношение $1\,351$ к 780, тогда как отношение $AC:BC$ равно $1\,560:780$. Проводя биссектрису AD и соединяя D, точку ее пересечения с окружностью, с концом C диаметра, мы вместе с Архимедом получаем сторону DC правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность. Чтобы найти (с недостатком) отношение $AC:CD$, Архимед поступает следующим образом. Как нетрудно видеть, треугольники ADC и CDF подобны, и следовательно, $AD:DC = AC:CF$. Последнее отношение, в силу теоремы о биссектрисе угла треугольника, равно отношению $\frac{AC+AB}{CF+FB} = \frac{AC+AB}{CB}$. Это же отношение меньше, чем $\frac{1\,560+1\,351}{780}$,

---

[1]) То-есть $14\,688 = 3\cdot 4\,673\frac{1}{2} + 667\frac{1}{2} < 3\cdot 4\,673\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\cdot 4\,673\frac{1}{2}$.

[2]) Евклид, „Начала", книга VII, предложение 2.

в силу вышеустановленных положений. Итак, отношение $AD:DC$ меньше, чем $2\,911:780$. Отсюда Архимед заключает, что отношение $AC:CD=2R:a_{12}$ меньше, чем $3\,013\frac{3}{4}:780$; другими словами, он устанавливает, что

$$\sqrt{2\,911^2+780^2}<3\,013\frac{3}{4}.$$

Тем же методом вычисляются отношения диаметра AC к сторонам правильных 24-, 48- и 96-угольников; для отношения $2R:a_{24}$ он получает оценку $2R:a_{24}<5\,924\frac{3}{4}:780$ и заменяет затем последнее отношение отношением $1\,823:240$, „так как каждое из этих последних чисел составляет $\frac{4}{13}$ соответствующего ив прежних". Точно так же, получив $2R:a_{48}<3\,661\frac{9}{11}:240$, Архимед заменяет последнее отношение отношением меньших, и притом целых чисел $1\,007:66$. Чтобы предпринять подобное преобразование, нужно было усмотреть, что число $3\,661\cdot 11+9$ делится нацело на 40.

В силу этих упрощений Архимеду приходится извлекать теперь квадратные корни из сравнительно небольших чисел; результаты этих извлечений могут быть представлены следующими неравенствами:

$$\sqrt{9\,082\,321}<3\,013\frac{3}{4}, \tag{7}$$

$$\sqrt{3\,380\,929}<1\,838\frac{9}{11}, \tag{8}$$

$$\sqrt{1\,018\,405}<1\,009\frac{1}{6}, \tag{9}$$

$$\sqrt{4\,069\,284\frac{1}{36}}<2\,017\frac{1}{4}. \tag{10}$$

К этим результатам обычно присоединяют еще оценку

$$\sqrt{3}<\frac{1\,351}{780}.$$

Действительно, она равносильна вышеприведенному утверждению Архимеда, что

$$AB:BC<1\,351:780.$$

Однако здесь мы имеем по существу не *извлечение квадратного корня из данного числа*, а подыскание такой пары целых чисел (1 560; 780), отношение которых равно $2:1$, а разность квадратов мало отличалась бы от полного квадрата, т. е. приближенное решение уравнения

$$y^2=3x^2.$$

Таким образом здесь решается тот же вопрос, который рассматривался при вычислении отношения $R:\frac{b_6}{2}$. Только теперь разность квадратов ($3x^2$) должна быть не больше полного квадрата (y^2), а меньше его. Заметим также, что дробь $\frac{1\,351}{780}$ есть двенадцатая подходящая дробь разложения

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}+\ldots}}$$

Как находятся только что перечисленные результаты, Архимед снова ничего не говорит.

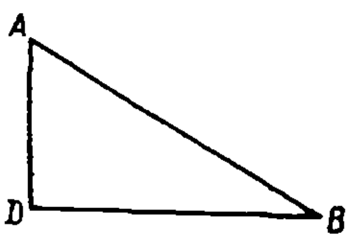
Результат (9) позволяет ему установить, что отношение $2R:a_{96}$ меньше, чем отношение $2\,017\frac{1}{4}:66$. „Поэтому, — говорит Архимед, — отношение периметра многоугольника к диаметру больше, чем 6 336 к $2\,017\frac{1}{4}$, что составляет больше, чем три и десять семьдесят первых числа $2\,017\frac{1}{4}$. Итак, периметр вписанного в круг 96-угольника превосходит утроенный диаметр больше, чем на $\frac{10}{71}$ последнего. Следовательно, тем более окружность превышает длину утроенного диаметра больше, чем на $\frac{10}{71}$ долей его. Таким образом окружность более утроенного диаметра и, сверх того, превосходит его менее, чем на седьмую часть диаметра, и более, чем на десять семьдесят первых".

Этими словами заканчивается произведение Архимеда, дошедшее до нас под именем „Измерение круга" и представляющее, возможно, лишь начало более обширной работы, которая могла быть посвящена вычислению хорд в круге. Но и из этой небольшой работы мы видим высокое мастерство, проявляемое Архимедом в вычислениях. Упрощения, на которые мы только что указали, свидетельствуют о том, что мы имеем дело с изощренной техникой вычислений. Совершенно невероятной поэтому представляется гипотеза Нессельмана, по которой Архимед получил свои результаты с помощью несистематических проб. Да и числа, с которыми имел дело Архимед, слишком для этого велики. Но метод, которому следовал Архимед, не мог быть достоянием одних лишь гениев. Он должен был быть известен широко среди современников. В противном случае никак нельзя понять, почему Архимед, вообще детально разъясняющий ход своего рассуждения, здесь ничего не говорит о способе получения приближений. Единственное объяснение этого странного молчания может заключаться в том, что при решении геометрического вопроса он предполагает хорошо известными арифметические приемы, которыми пользуется. А если так, то мнение, по которому греки были плохими вычислителями (и „обосновывающее" его суждение об отсутствии у греков вычислительных способностей), должно быть решительно отвергнуто.

Тем более интересным становится вопрос о методе, которым Архимед нашел свои оценки. Казалось бы естественным ожидать, что молчание Архимеда будет восполнено его комментатором. Но Евтокий ограничивается тем, что проверяет результаты Архимеда с помощью умножения. Эти проверки мы использовали выше (стр. 197) для ознакомления с техникой умножения. Не нужно, впрочем, думать, что Евтокию был неизвестен способ извлечения квадратного корня. Закончив свои проверочные выкладки, Евтокий добавляет: «А как можно находить квадратный корень, очень близко подходящий к данному числу, показано Героном в его „Метрике", а также Паппом, Теоном (Александрийским) и многими другими толкователями Клавдия Птолемея. Поэтому нет нужды заниматься исследованием этого вопроса, ибо любители математики могут прочесть об этом у них» [1]).

Из указываемых Евтокием сочинений до нас дошли два: „Метрика" Герона и комментарий Теона Александрийского к „Синтаксису" (так называемый „Альмагест") Птолемея. Мы познакомимся вскоре с этими источниками и посмотрим, что они дают для понимания методов Архимеда. Но предварительно я должен заметить, что и в том и другом из указанных источников речь идет об извлечении корня в узком смысле слова, т. е. об отыскании корня из заданного числа. Но, как было выше отмечено, два результата Архимеда лишь в модернизированной форме могут быть отождествлены с задачей извлечения корня. По сути же дела они являются решением не вычислительной, а теоретико-числовой задачи. Поэтому, прежде чем перейти к Теону Александрийскому и Герону, мы рассмотрим эту задачу и попытаемся наметить пути, которыми она решалась.

Придерживаясь возможно ближе текста Архимеда, мы эту задачу могли бы сформулировать следующим образом: имеем прямоугольный треугольник ABD (черт. 18) с углом ABD, равным трети прямого (30°). Найти пару целых чисел, отношение которых может быть положено равным отношению большего его катета к меньшему. Или иначе: найти рациональное приближение для отношения высоты равностороннего треугольника к половине его стороны. Что именно так ставился вопрос для Архимеда, видно из того, что отношения 306 : 153 и 265 : 153 в одном случае, равно как 1 560 : 780 и 1 351 : 780 в другом, он задает сразу. В остальных же случаях (т. е. при треугольниках с углами 15°, $7\frac{1}{2}$° и т. д.) он, получив сначала один из катетов, другой определяет по Пифагоровой теореме, последовательно указывая соответствующие числовые результаты.



Черт. 18.

То обстоятельство, что для треугольника с углом 30° результаты даются без пояснений, свидетельствует о том, что они предполагаются

---

[1]) Archimedes, т. III, стр. 270.

известными. К сожалению, ни в одном известном нам античном источнике ничего не говорится о методе, которым эти результаты были получены. Многие историки пытались разгадать этот метод, и по вопросу о „приближенных значениях $\sqrt{3}$ “ у Архимеда, так же как и по общему вопросу об извлечении квадратных корней, выросла огромная литература, продолжающая расти и в настоящее время [1]).

Здесь нет никакой возможности перечислить различные мнения и теории, а тем более вдаваться в их критику. Укажу только, что с конца XVIII века до последней четверти XIX пользовались распространением теории, связывавшие метод Архимеда с теорией непрерывных дробей. На эту связь указывала прежде всего самая форма архимедовых приближений $\sqrt{3}$: как было отмечено, оба они представляют собой подходящие дроби разложения $\sqrt{3}$ в непрерывную дробь

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}+\ldots}}}\quad .$$

Разумеется, самое понятие непрерывной дроби могло быть и чуждым древним грекам: важно по сути дела умение получать ряд неполных частных и составлять по ним подходящие дроби. А этот процесс есть не что иное, как алгоритм последовательного деления, употребляемый Евклидом в 33—39 предложениях VII книги „Начал“ для нахождения общего наибольшего делителя чисел, и в 2—4 предложениях X книги в качестве критерия для суждения о соизмеримости или несоизмеримости величин и нахождения общей их меры в первом случае.

В последние 50 лет наиболее авторитетные историки (например, Гульч, Кантор, Гис) относились очень сдержанно или прямо отрица-

[1]) Укажу некоторые из важнейших работ: 1) S. Günther, Die quadratische Jrrationalitäten der Alten und ihre Entwicklungsmethoden (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft IV), Leipzig 1882. В этой работе дано исчерпывающее изложение всех предшествующих аналогичных работ примерно за сто лет. 2) Hunrath, Ueber das Auszichen der Quadratwurzeln bei Griechen und Indern, Hadersleben 1883. В этой работе впервые систематически проведена та гипотеза относительно архимедовой процедуры извлечения квадратного корня, из которой исходил и ряд последующих авторов, в том числе Гульч и Гис. 3) Hultsch, Die näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes (Gotting. Nachrichten 1893, стр. 385—393). 4) P. Tannery, Sur la mésure du cercle d'Archimède — статьи в „Mémoires de la Soc. de Bordeaux“, т. IV (2-я серия), 1882, и в „Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques“, т. VI (2-я серия), 1882; обе статьи легче доступны в томе I собрания сочинений Tannery (Oeuvres scientifiques). Из новейших авторов, писавших по вопросу об „извлечении $\sqrt{3}$“ у Архимеда, укажу: 5) K. Vogel (Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung, т. 41, тетр. 5—8, 1932). 6) C. Müller (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, т. 2, 1932). 7) O. Töplitz, там же; на русском языке имеется работа С. Я. Лурье „Приближенные вычисления в древней Греции“ (Архив истории науки и техники, т. 4, 1934).

тельно к попыткам связать метод Архимеда с методом непрерывных дробей. В качестве слабого места всех этих попыток указывалось то, что приближения $\frac{265}{153}$ и $\frac{1351}{780}$ не являются следующими друг за другом подходящими дробями: второе из них отделено от первого в ряду подходящих дробей числами $\frac{362}{209}$ и $\frac{987}{571}$. Кроме того, от допущения упомянутой связи многих авторов удерживало, вероятно, то обстоятельство, что метод непрерывных дробей ничего не дает для архимедовых оценок (4)—(10), относящихся к корням из больших чисел. По крайней мере ряд авторов (Гульч, Гис и др.) пытались объяснить все оценки Архимеда из единого процесса. Все эти попытки ведут к цели только ценой различных натяжек; ни один из предложенных методов не дает результатов, в точности совпадающих с архимедовыми.

Исходя из высказанной выше точки зрения, мы должны эти попытки отклонить принципиально и рассмотреть вопрос о приближенных отношениях стороны и высоты равностороннего треугольника совершенно особо от вопроса об оценках корней из больших чисел. И тогда привлечение алгоритма непрерывных дробей вовсе не представится исключенным; напротив, как сейчас будет показано, оно прямо подтверждается аналогичными историческими фактами, которые давно уже были приведены в связь с архимедовыми оценками.

§ 15. Рациональные приближения для отношения диагонали квадрата к его стороне

Я имею в виду рациональные оценки отношения стороны и диагонали квадрата. Вероятно, из постановки этого вопроса впервые выросло доказательство несоизмеримости стороны и диагонали квадрата. Уже Платону было известно, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной и что приближенно их отношение равно $7:5$. В „Государстве“ [1]) он упоминает о „рациональном диаметре пятерки“, при котором „недостает единицы“, и об „иррациональном диаметре“, при котором „недостает двух“. Термин „диаметр“ употребляется у Платона в смысле „диагональ“. Это место Платона, как и все его „математические“ высказывания, довольно темно и толкуется различно. Но первое из его утверждений может иметь только тот смысл, что если сторона квадрата $a=5$, то квадрат его диагонали $d^2=50$ на единицу превышает число 49, корень квадратный из которого рационален, т. е. $\sqrt{50-1}$ рационально. Второе утверждение Платона, может быть, выражает, что $\sqrt{50-2}$ иррационально. Как бы то ни было, в первом речь идет о приближенном выражении отношения диагонали к стороне, и оно принимается равным $7:5$.

---

[1]) Платон, „Государство“, 546 С; термином „рациональный“ и „иррациональный“ я перевожу термины Платона ῥητός и ἄρρητος, которые именно в этом смысле употребляются в X книге „Начал“ Евклида.

Можно думать, что уже в эпоху Платона были известны и другие рациональные приближения для отношения диагонали квадрата к его стороне, причем среди них особенно должны были выделяться те целые пары (α, β), с помощью которых отношение $2:1$ представляется точным отношением $\frac{\alpha^2 \pm 1}{\beta^2}$, близким к отношению $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. Пара (7, 5) как раз принадлежит к этому классу.

Во всяком случае в более поздние эпохи не только было известно множество таких пар, но и существовал регулярный процесс, с помощью которого могут быть получены все приближения упомянутого класса; иными словами, все целочисленные решения уравнения

$$2\beta^2 - \alpha^2 = \pm 1. \tag{11}$$

Этот регулярный процесс описан у новопифагорейца Теона Смирнского (II век н. э.; не смешивать с Теоном Александрийским). В своем „Изложении математических вещей, полезных при чтении Платона“, Теон передает факты, в большинстве своем известные уже в эпоху Платона. Среди них мы находим и описание построения „диаметральных“ и „латеральных“ [1]) чисел, которые, как легко убедиться, представляют собой не что иное, как целочисленные решения уравнения (11).

Ввиду колоритности стиля Теона, характерного для философско-математических произведений пифагорейцев, я приведу полностью относящуюся сюда цитату [2]):

„Подобно тому как числа потенциально имеют отношения треугольные, четырехугольные, пятиугольные и отношения, соответствующие остальным фигурам, так мы могли бы найти также латеральные и диаметральные отношения, обнаруживающиеся у чисел в соответствии с семенными отношениями, ибо по ним соразмеряются фигуры. А так как над всеми фигурами согласно наивысшему и семенному отношению начальствует единица, то и отношение диаметра и отношение стороны отыскиваются в единице. Возьмем, например, две единицы; положим, что одна из них есть диаметр, другая же — сторона, ибо единица, будучи началом всего, должна потенциально быть и стороной и диаметром. И пусть к стороне прибавляется диаметр, а к диаметру две стороны, ибо сколько дважды дает в квадрате сторона, столько один раз диаметр. Теперь большее становится диаметром, а меньшее стороной. При первой стороне и диаметре квадрат единицы-диаметра на одну единицу меньше, чем дважды взятый

---

[1]) Этим латинским термином я передаю греческое πλευρικός — дословно „сторонний“ (πλευρά — сторона).

[2]) Theonis Smirnaei, Expositio rerum mathematicorum etc. Ed. Hiller (Teubner 1878), стр. 43—44. На это место впервые, кажется, обратил внимание Нессельман (Nesselmann, Algebra der Griechen, Berlin 1842, стр. 223—231). Он дал ему то единственное толкование, которое оно допускает и которое здесь изложено. Совершенно непонятно, почему Кантор (Vorlesungen, т. I, стр. 436), дающий такое же толкование, утверждает, что Нессельман (в сноске указывается на то же место Нессельмана, которое отмечено здесь мною) истолковал Теона как-то иначе.

квадрат единицы-стороны; ведь единицы находятся в равенстве, и единое на одну единицу меньше, чем двойное. Прибавим к стороне диаметр, т. е. к единице единицу; итак, сторона будет две единицы; к диаметру же прибавим две стороны, т. е. к единице две единицы; диаметр будет три единицы. Квадрат двойки-стороны 4, а квадрат тройки-диаметра 9, и 9 на единицу больше, чем дважды взятая сторона двух. Снова прибавляем к стороне 2 диаметр-тройку; сторона будет 5, а к тройке-диаметру две стороны, т. е. дважды 2. Будет 7. Квадрат стороны будет 25, а квадрат 7 будет 49. 49 на единицу меньше, чем двукратно взятое 25. Снова к стороне прибавь диаметр 7; будет 12; к диаметру 7 прибавь дважды взятую сторону 5; будет 17. И квадрат 17 на единицу полнее, чем двукратно взятый квадрат от 12. И от дальнейшего прибавления, происходящего таким образом, будет происходить подобная же смена: двукратно взятый квадрат стороны то на единицу меньше, то на единицу больше, чем квадрат диаметра; при этом и эти стороны и диаметры рациональны (ῥηταί)".

Отбросив мистическую шелуху и метафизические обоснования, оставив в стороне таинственные „семенные отношения" и „начальственную роль" единицы, мы получаем довольно точно описанный и достаточно поясненный примерами рекуррентный процесс построения пар $(\alpha_k;\ \beta_k)$ по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_{k-1} + 2\beta_{k-1}, \\ \beta_k &= \alpha_{k-1} + \beta_{k-1}. \end{aligned} \qquad (12)$$

Начальная пара $(\alpha_1,\ \beta_1)$ дается

$$\alpha_1 = 1, \qquad \beta_1 = 1.$$

Нетрудно убедиться в том, что все α_k, β_k, полученные таким образом, удовлетворяют уравнению (11), причем четным k соответствует отрицательная, а нечетным — положительная единица в правой части (11). Для этого достаточно в выражение $2\beta_k^2 - \alpha_k^2$ подставить α_k, β_k из (12):

$$\begin{aligned} 2\beta_k^2 - \alpha_k^2 &= 2(\alpha_{k-1} + \beta_{k-1})^2 - (\alpha_{k-1} + 2\beta_{k-1})^2 = \\ &= -(2\beta_{k-1}^2 - \alpha_{k-1}^2). \end{aligned} \qquad (13)$$

Если α_{k-1}, β_{k-1} удовлетворяют уравнению

$$2\beta_{k-1}^2 - \alpha_{k-1}^2 = 1,$$

то α_k, β_k, согласно (13), удовлетворяют уравнению

$$2\beta_k^2 - \alpha_k^2 = -1.$$

Точно так же покажем, что α_{k+1}, β_{k+1} удовлетворяют уравнению

$$2\beta_{k+1}^2 - \alpha_{k+1}^2 = 1 \text{ и т. д.}$$

А так как $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$ удовлетворяют уравнению

$$2\beta_1^2 - \alpha_1^2 = 1,$$

то наше утверждение доказано.

Теон Смирнский не дает никакого доказательства излагаемому им процессу (если не считать „глубокомысленных“ доводов умозрительного характера). Но совершенно несомненно, что без доказательства оно в древности не оставалось. От Прокла (410—485 гг. н. э.) мы знаем даже, что доказательство основывалось на предложении 10 II книги евклидовых „Начал“ [1]), т. е. проводилось геометрически. Если это указание верно, то доказательство по существу мало отличалось от проведенного выше. Но и наше доказательство, и доказательство, приписываемое Проклом Евклиду, синтетично, т. е. оно лишь подтверждает правильность вывода, но ничего не говорит о том, *как найдены* рекуррентные формулы (12).

Известные нам античные историки ничего не говорят об этом, и здесь мы должны прибегнуть к гипотезе. Наиболее вероятным представляется мне такой ход рассуждения, который был бы связан с попытками найти общую меру диагонали d и стороны a квадрата. Можно считать несомненным, что эти попытки предшествовали установлению несоизмеримости стороны и диагонали. Тогда совершенно естественно предположить, что еще в эпоху, предшествовавшую Аристотелю (который уже знал факт этой несоизмеримости и его доказательства), т. е. в V—IV веках до н. э., древнегреческие математики, пытаясь отыскать точное рациональное выражение отношения $d:a$, нашли не только ряд приближенных его значений, но и алгоритм последовательного их образования.

Общая мера двух величин находилась, конечно, процессом последовательного деления, описанным у Евклида. Описывая его, Евклид говорит, что меньшую величину нужно „взаимно отнимать“ (ἀντυφαιρεῖν) от большей [2]). У Аристотеля же [3]) термин „взаимное отнятие“ мы встречаем в связи с *определением* отношения. Он говорит, что если прямая пересекает параллелограм параллельно основанию последнего, то отрезки боковой стороны и площади двух параллелограмов, получаемых от рассечения, имеют одно и то же отношение, ибо эти площади и прямые линии имеют одно и то же „взаимное отнятие“ (ἀνταναίρεσις). Здесь для термина „взаимное отнятие“ взято слово „антанайрезис“, которое по грамматическому смыслу равнозначно с евклидовым термином „антифайрезис“ ἀνθυφαίρεσις. То, что Аристотель и по существу имеет в виду процесс последовательного деления, подтверждает его комментатор Александр из Афродисии, указывая, что Аристотель «называет „антифайрезис“ „антанайрезисом“».

Цейтен, сопоставляя эти факты, пришел к заключению, что первоначально пропорциональность величин определялась древними греками

---

1) Heath, A History of greec Mathematics, т. I, стр. 23.

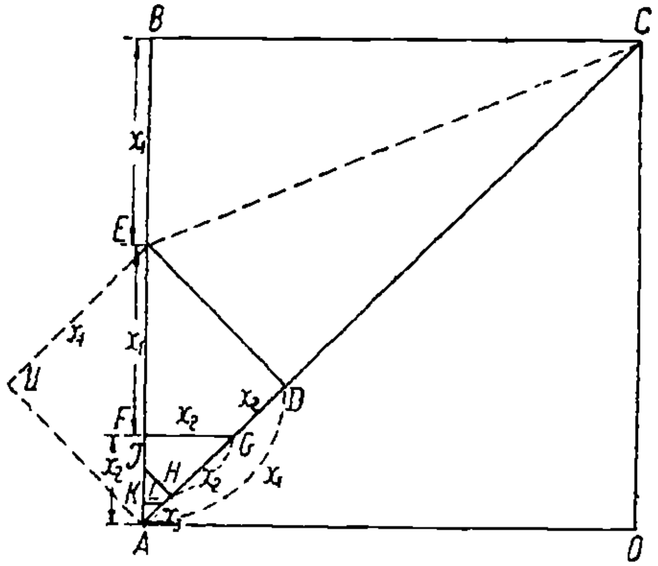
2) 2-е предложение X книги, например, формулируется так: Если при наличии двух неравных величин, когда меньшая непрестанно взаимно отнимается от большей (ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος), остающееся никогда не измеряет предшествующего, то величины будут несоизмеримы.

3) Topica, VIII, 3, 158.

не так, как это в искусной и искусственной форме сделал Евклид в V книге „Начал“, а более „естественно“, т. е. в непосредственной связи с процессом нахождения общей меры. Именно, доаристотелевское определение должно было по существу быть таковым: отношение a к b равно отношению c к d, если в процессе последовательного деления все неполные частные в том и другом случае одинаковы[1]).

В свете этих соображений можно дать следующую реконструкцию анализа, приводящего к построению „латеральных“ и „диагональных“ чисел.

Представим себе квадрат $ABCO$ (черт. 19) и будем пытаться найти общую меру его стороны a и диагонали d. Будем откладывать на диагонали $AC=d$ отрезок $DC=a$. Очевидно, он уложится один раз с остатком $AD=x_1$.



Черт. 19.

Величину x_1 нужно теперь откладывать на стороне a; новый остаток откладывать на x_1 и т. д. Уже эмпирические попытки обнаруживают, что укладывание происходит всегда дважды с остатком. Простое геометрическое доказательство подтверждает правильность наблюдения. Нетрудно, например, усмотреть, что отрезок $BE=AD$ можно построить, проводя из точки D перпендикуляр к диагонали AC до пересечения BA в точке E. Действительно, в треугольнике ADE два угла A и E равны 45° и, следовательно, $AD=DE$, а прямоугольные треугольники BCE и CDE равны по катету $BC=CD$ и общей гипотенузе. Следовательно, $DE=BE$. Но отсюда вытекает, что AE есть диагональ квадрата со стороной BE, и потому $BE=x_1$ можно отложить на AB еще один раз: $EF=x_1$. Новый остаток AF мы обозначим x_2.

Мы, следовательно, имеем

$$d=AC=CD+DA=a+x_1, \tag{14}$$

$$a=AB=BE+EF+FA=x_1+x_1+x_2=2x_1+x_2. \tag{15}$$

Теперь $x_2=AF$ мы должны откладывать на x_1. Но $x_2=EA-EF=EA-ED$, т. е. есть остаток однократного вычитания стороны x_1

---

[1]) Работа Цейтена (на датском языке) мне не была доступна. Она цитируется в ряде позднейших работ, в том числе в статье Беккера: Becker, Euclidstudien I. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B, B. 2. H. 4, 1929. Сам Беккер пришел к тем же выводам, что Цейтен, независимо от последнего; с работой Цейтена он познакомился уже после написания своей статьи.

квадрата $EDAU$ из его диагонали. Поэтому, проделав для треугольника EDA то же построение, что для треугольника ABC, мы найдем, что отрезок $AF=x_2$ уложится в $AD=x_1$ дважды с остатком x_3 ($DG=GH=x_2$; $HA=x_3$):

$$x_1=AD=DG+GH+HA=2x_2+x_3. \tag{16}$$

При этом FG перпендикулярно к EA, так что треугольник AFG снова является половиной некоторого квадрата, а отрезок $AH=x_3$ снова есть разность между диагональю и стороной последнего. Поэтому мы снова можем получить

$$x_2=AF=FI+IK+KA=2x_3+x_4, \tag{17}$$

и так далее неограниченное число раз.

Согласно 2 предложению X книги „Начал" Евклида (см. сноску на стр. 231) отсюда вытекает, что d и a несоизмеримы.

Кроме того мы сейчас же получаем и метод построения последовательных приближений. Остановимся, например, на равенстве (16) и пренебрежем остатком x_3, т. е. будем считать x_1 равным $2x_2$. Тогда из (15) получаем

$$a=2x_1+x_2\approx 4x_2+x_2=5x_2,$$
$$d=a+x_1\approx 5x_2+2x_2=7x_2,$$

и отношение $d:a$ приближенно равно отношению $7:5$, которое мы встретили у Платона.

Более того, мы легко можем получить и тот рекуррентный процесс, который описан у Теона Смирнского. Представим его в геометрической форме, в которой он, скорее всего, и возник первоначально.

Рассмотрим квадрат $ADEU$. Для отношения его диагонали AE к стороне AD мы можем найти только что описанным способом приближенное рациональное отношение $\delta:\alpha$ (например, $\delta=7$, $\alpha=5$). Евклид изобразил бы числа δ и α отрезками, что существенно не изменило бы положения

$$AE:AD\approx\delta:\alpha.$$

Но из чертежа очевидно, что диагональ AC и сторона AB квадрата $ABCO$ выражаются через диагональ и сторону квадрата $ADEU$ следующим образом:

$$AB=BE+EA=AD+EA,$$
$$AC=AD+AB=2AD+EA,$$

и отношение $AB:AC$ равно отношению $AD+AE$ к $2AD+EA$, а последнее отношение, если принять $AD:AE=\alpha:\delta$, может быть заменено отношением $(\alpha+\delta):(2\alpha+\delta)$, так что новое „латеральное" число получается суммированием старого „латерального" и „диаметрального" чисел, а новое „диаметральное" число суммированием двукратно взятого „латерального" и однократно взятого „диаметрального" числа. А это и есть процедура Теона Смирнского.

§ 16. Архимедовы приближения для отношения $\sqrt{3}:1$

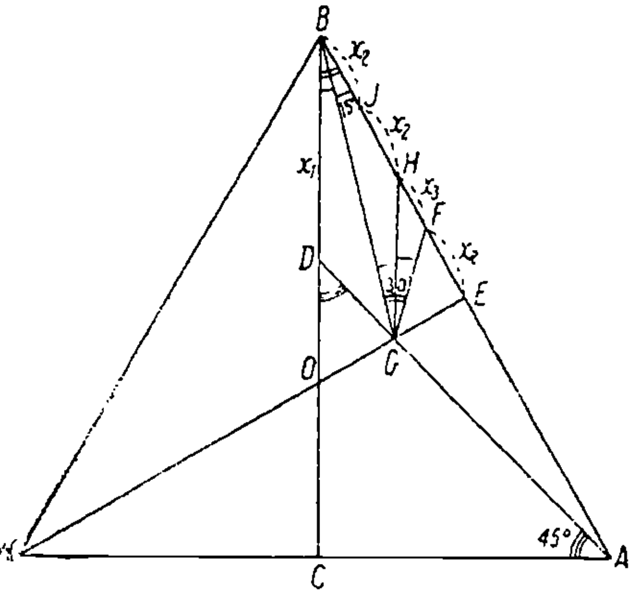
Попробуем теперь тот же ход рассуждения применить к исследованию отношения высоты равностороннего треугольника к половине его стороны. Путь ABK есть равносторонний треугольник: $BK = AK = BA = 2a$ (черт. 20). Проведем высоты его $BC = KE = h$; точку их пересечения обозначим через O. Для нахождения отношения $h:a$ будем применять „антифайрезис". Проведем AD под углом 45° к основанию AK, чтобы отложить на $BC = h$ отрезок $CD = a$. Точку пересечения AD и KE обозначим через G.

Отрезок a отложится на h только один раз, ибо $BC < AB$, т. е. $h < 2a$. Остаток BD обозначим x_1:

$$h = a + x_1 \quad (x_1 < a).$$

Откладываем этот остаток на $BE = a$ от точки B, так что $BF = BD = x_1$. Снова откладывание производится только один раз, что можно доказать таким образом: соединяем точки B и G прямой BG. Очевидно из построения, что треугольник ABG равнобедренный ($AG = BG$) и углы при основании AB равны между собой. Но $\angle BAG = \angle BAC - \angle ADC = 60° - 45° = 15°$. Следовательно, при вершине B также имеем $\angle ABG = 15°$. Значит, прямая BG есть биссектриса угла DBF, равного 30°. Отсюда сейчас же вытекает равенство треугольников BGD и BGF, а значит, и их внешних углов при вершинах F и D. Но последний равен 45°. Поэтому в прямоугольном треугольнике GFE угол при вершине F, а следовательно, и при вершине G равен 45°, так что

$$FE = GE.$$



Черт. 20.

Очевидно, что $FE < FG$; но, кроме того, $FG < BF$, так как они лежат в треугольнике BFG против углов 15° и 30° (угол BGF равен 30°, так как он есть разность между внешним углом $GFE = 45°$ треугольника GFB и его внутренним углом $FBG = 15°$).

Значит, $FE < BF$, т. е. обозначая длину FE через x_2, $x_2 < x_1$, мы имеем

$$a = x_1 + x_2 \quad (x_2 < x_1).$$

Теперь откладываем x_2 на $BF = x_1$, начиная от точки B. Откладывание можно произвести не менее двух раз. Действительно, проведем биссектрису GH угла $BGF = 30°$. Ясно, что треугольник BHG

будет иметь равные углы при основании BG (по 15° в каждом) Поэтому

$$BH = HG.$$

С другой стороны, внешний угол упомянутого треугольника, $\angle GHE$, будет иметь 30°, а значит, в треугольнике GHE гипотенуза HG будет вдвое более катета GE:

$$HG = 2GE = 2x_2.$$

Итак,

$$BH = HG = 2x_2.$$

Таким образом x_2 откладывается в x_1 два раза; $BI = IH = x_2$, и остается отрезок $HF = x_3$. Он будет меньше, чем x_2; это проще всего видеть из того, что в треугольнике GEH сторона $GE = x_2$ умещается лишь один раз: $EF = x_2$ (доказательство то же, что для треугольника ACB), и остаток, как раз равный x_3, меньше, чем x_2.

Итак,

$$x_1 = 2x_2 + x_3 \quad (x_3 < x_2).$$

Для дальнейшего продолжения „антифайрезиса" нет нужды вводить новые построения, так как ввиду подобия треугольников HGE и ABC $HF = x_3$ содержится в $FE = x_2$ столько же раз, сколько $BD = x_1$ в $CD = a$, т. е. однократно. Новый остаток x_4 будет содержаться в остатке x_3 столько же раз, сколько x_2 в x_1, т. е. дважды, и т. д., так что

$$\begin{aligned} x_2 &= x_3 + x_4 \quad && (x_4 < x_3), \\ x_3 &= 2x_4 + x_5 \quad && (x_5 < x_4), \\ x_4 &= x_5 + x_6 \quad && (x_6 < x_5), \\ x_5 &= 2x_6 + x_7 \quad && (x_7 < x_6) \end{aligned}$$

и т. д.

Как и в предыдущем примере с диагональю квадрата, останавливаясь на каком-либо месте и пренебрегая последним остатком, мы можем получить последовательные рациональные приближения для отношения $h:a$, и эти приближения, как мы видим, суть не что иное, как подходящие дроби непрерывной дроби

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

Мы получим, таким образом, следующие приближения:

$$1:1;\ \ 2:1;\ \ 5:3;\ \ 7:4;\ \ 19:11;\ \ 26:15;\ \ 71:41;\ \ 97:56;\ \ \mathit{265:153};$$
$$362:209;\ \ 987:571;\ \ \mathit{1351:780};\ \ 3\,691:2\,131. \qquad (18)$$

Приближения, набранные курсивом, использованы Архимедом.

Из того же „антифайрезиса" мы получим и рекуррентные представления членов этих приближенных отношений.

Действительно, выразим стороны $BC = h$ и $AC = a$ треугольника ACB через стороны $h_0 = HE$ и $a_0 = GE$ подобного ему треугольника GHE.

Мы имеем

$$a_0 = x_2,$$
$$h_0 = x_2 + x_3,$$
$$x_1 = 2x_2 + x_3 = x_2 + (x_2 + x_3) = a_0 + h_0,$$
$$a = x_1 + x_2 = 2a_0 + h_0,$$
$$h = a + x_1 = 3a_0 + 2h_0.$$

Если, таким образом, через μ_1 и ν_1 мы обозначим целые числа, приближенно измеряющие катеты a_0 и h_0 треугольника GEH, то числа

$$\begin{aligned} \mu &= 2\mu_1 + \nu_1, \\ \nu &= 3\mu_1 + 2\nu_1 \end{aligned} \tag{19}$$

дают приближенные целочисленные выражения катетов a и h. Эти рекуррентные формулы аналогичны теоновым формулам (12) для отношения стороны и диагонали квадрата.

Но между ними есть существенная разница. Как нетрудно доказать, теоновы формулы (при начальных значениях $\beta_1 = \alpha_1 = 1$) дадут все подходящие дроби разложения $\sqrt{2}$ в непрерывную дробь, тогда как формулы (19) не могут этого дать. Если $\mu_1 : \nu_1$ будет k-я подходящая дробь, то $\mu_2 : \nu_2$ будет $(k+2)$-я, так что мы будем получать либо только недостаточные значения $h : a$ (если будем исходить, например, из $\mu_1 = \nu_1 = 1$), либо только избыточные (исходя из $\mu_1 = 1$; $\nu_1 = 2$). При этом мы в том и другом случае будем шагать через одну пару в ряду (18), находя либо все четные, либо все нечетные члены ряда (18).

Это последнее замечание может бросить свет на то обстоятельство, что архимедовы приближения не стоят рядом друг с другом в ряду (18). Действительно, можно было бы ожидать, что будут взяты „соседние“ члены ряда (18), если бы все его члены отыскивались действительно подряд друг за другом. Но когда четные и нечетные члены находятся порознь, то ни о каком соседстве не может быть речи.

Выбор недостаточного приближения $265 : 153$ объясняется вполне естественно: предыдущее приближение $71 : 41$ имеет относительную точность порядка $\frac{1}{2\,500}$, между тем как результат $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ получен с относительной точностью порядка $\frac{1}{1\,500}$. Как нетрудно видеть из процесса вычисления, описанного в § 14 (стр. 219), относительная предельная погрешность должна увеличиться примерно в 4 раза, если она будет одна и та же при всех извлечениях корня. Значит, накопление ошибок могло бы испортить результат. Правда, последующие три извлечения корня Архимед производит с гораздо большей степенью точности $\left[\text{порядка } \frac{1}{30\,000}\right.$ в формулах (4) и (5) и $\frac{1}{200\,000}$ в (6)]; однако, даже учитывая возможность увеличения степени точности, очень неудобно было брать приближение, степень точности которого едва-едва превышает безусловно необходимую. Таким образом Архимед должен был взять приближение нечетного порядка не низшее, чем девятое в ряду (18), и у него не было никаких оснований брать одиннадцатое вместо девятого.

По тем же соображениям Архимед должен был взять приближение четного порядка не низшее, чем десятое в ряду (18). Но здесь у него могли быть основания, чтобы предпочесть двенадцатое, знаменатель которого $780 = 13 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2^2$ имеет бо́льшие возможности для дальнейших сокращений, чем $209 = 19 \cdot 11$. И действительно, мы видели, что Архимед при вычислении периметра описанного многоугольника делает ряд таких упрощений, уменьшающих подкоренные числа примерно в 150 раз, тогда как замена двенадцатого приближения $1\,351:780$ на десятое $362:209$ уменьшила бы подкоренные числа сама по себе примерно в 15 раз.

Таким образом изложенная выше гипотеза, с одной стороны, объясняет все моменты архимедовых вычислений, с другой стороны, она согласуется с известными нам историческими фактами. В-третьих, наконец, она привлекает на помощь только элементарные соображения и простые геометрические рассуждения, подобные которым мы во множестве находим у Евклида и в отрывках более ранних авторов. Результаты, полученные с их помощью, могли быть хорошо известными, и потому Архимеду не было нужды объяснять, откуда они взялись. Вместе с тем мы видим, что изложенный ход рассуждения имеет близкое отношение к современной теории непрерывных дробей.

Конечно, нельзя быть уверенным в том, что предшественники Архимеда выполняли именно такие построения, какие были здесь изложены. Однако изложенные выше соображения делают вероятным, что общий ход их рассуждения в основном совпадал с намеченным.

Так обстоит дело с проблемой так называемого извлечения квадратного корня из 3 у Архимеда. Что касается вопроса о том, как Архимед извлекает квадратные корни из бо́льших чисел, то мы увидим, что разрешить его гораздо труднее. Прежде всего, конечно, мы должны познакомиться с сообщениями Теона Смирнского и Герона, к которым нас отсылает комментатор Архимеда.

Нужно заметить, что поясняемый Теоном метод, которому следует Птолемей, и изложенный в „Метрике“ метод, которому следует Герон, резко отличны друг от друга. Это отличие вытекает уже из постановки проблемы у того и другого автора. Птолемей занимается вычислением длин хорд в круге, т. е. решает ту же задачу, частные случаи которой трактуются у Архимеда в 3-м предложении „Измерения круга“. Но мы уже знаем, что Птолемей всегда выражает как исходные данные, так и результаты в шестидесятеричных дробях

Поэтому искомый квадратный корень определяется вполне однозначно (с точностью до погрешности); в соответствии с этим и процедура Птолемея не только совершенно методична, но и не содержит никакого элемента произиола в выборе опорных пунктов. Напротив, Герон пользуется „обыкновенными“ и „единичными“ дробями, и потому дробная часть ответа зависит от произвола в выборе знаменателя. Этому соответствует и наличие некоторого произвола в самой процедуре Герона.

§ 17. Процесс извлечения квадратного корня у Теона Александрийского

Мы познакомимся сначала с процедурой Птолемея; она по существу тождественна с нашим школьным приемом извлечения корня и отличается от последнего лишь тем, что вместо десятичных дробей оперирует шестидесятеричными. Так как „целая“ часть числа, выражающего квадрат хорды, никогда не может быть очень велика (ибо диаметр принимается равным 120 „градусам“), то естественно, что нахождение целой части корня не вызывает особых затруднений и выполняется поэтому сразу. Но если бы (как у Архимеда) Птолемею пришлось бы извлекать квадратный корень из большого целого числа, то, без сомнения, он имел бы возможность применить к десятичным разрядам тот же процесс, который он применял к разрядам шестидесятеричным.

Вместо изложения соответствующего места комментария Теона [1]) я приведу его целиком [2]).

„Нам следует теперь рассмотреть, как по данному квадрату, не имеющему стороны, рациональной по длине, мы приближенно вычислим сторону этого квадрата. Для квадрата, имеющего рациональную сторону, это ясно из 4 теоремы II книги „Начал“, „протазис“ [3]) которой таков: если прямая линия разделена наудачу, то квадрат целой прямой равен квадратам отрезков и дважды взятому прямоугольнику, образованному отрезками. В самом деле, пусть мы имеем данное квадратное число, например 144, имеющее рациональной стороной прямую $\alpha\beta$ (черт. 21); возьмем меньший квадрат 100, сторона кото-

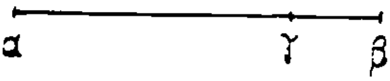
---

[1]) Вышецитированное издание, стр. 44.

[2]) В этом отрывке я, для облегчения чтения, ввожу всюду современные обозначения для шестидесятеричных единиц; читатель, желающий иметь более адэкватное представление греческого текста, может обратиться к отрывку, приведенному мной выше (стр. 214). Греческий текст приведен в примечании 29 указанной выше (стр. 227) статьи С. Я. Лурье. В той же статье дан и перевод большей части приводимого здесь отрывка, содержащий, однако, некоторые неточности.

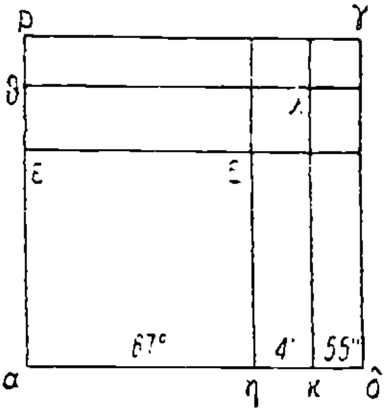
[3]) „Протазисом“ называлась вступительная часть математического предложения, в которой это предложение формулировалось в общем виде исключительно на словах. Вслед за этим то же предложение формулировалось применительно к обозначениям чертежа. Эта вторая часть носила название „эктезиса“.

рого равна 10, примем $\alpha\gamma$ за 10 и удвоим его [1]), так как прямоугольник, построенный на отрезках, должен быть взят дважды. На получающееся число 20 разделим [2]) остаток 44. Получающееся в остатке 4 будет квадратом от $\gamma\beta$, а сама $\gamma\beta$ по длине (будет равна) 2.



Черт. 21.

Для того же, чтобы на каком-нибудь из чисел, содержащихся в „Синтаксисе", с очевидностью показать процесс отнятия частей, дадим доказательство на числе 4 500, сторона которого там полагается равной $67°4'55''$. Пусть дана квадратная площадь $\alpha\beta\gamma\delta$ (черт. 22), рациональная только в квадрате, площадь [3]) которой пусть будет 4 500, и пусть требуется вычислить приближенно сторону квадрата. Так как ближайший к 4 500 квадрат, имеющий рациональную сторону, есть 4 489 целых градусов, а сторона его 67°, то от квадрата $\alpha\beta\gamma\delta$ отнимем квадрат $\alpha\xi$, сторона которого 67°. Остающийся гномон [4]) равен, следовательно, 11°. Разлагая это в минуты, получаем 660. Затем удвоив сторону $\varepsilon\xi$, так как прямоугольник на $\varepsilon\xi$ берется дважды, и считая, что $\xi\eta$ как бы лежит на продолжении $\varepsilon\xi$ [5]), разделим $660'$ на полученные 134 и результат деления $4'$ даст нам каждую из (линий) $\varepsilon\theta$, $\eta\kappa$. Строя полностью параллелограмы $\theta\xi$, $\xi\kappa$, мы находим, что они имеют $536'$, а каждый из них $268'$. Теперь мы снова разлагаем остающиеся $124'$ в $7\,440''$ и вычитаем еще дополняющий квадрат, имеющий $16''$, чтобы, прибавив к первоначальному квадрату $\alpha\xi$ гномон, получить квадрат $\alpha\lambda$ со стороной $67°4'$, что дает площадь в $4\,497°56'16''$. Остается снова гномон $\beta\lambda$, $\lambda\delta$,



Черт. 22.

---

[1]) То-есть число 10. Черт. 22, помещенного здесь, в оригинале нет.

[2]) В оригинале: τὰ γινόμενα κ παραβάλομεν περὶ τὰ λειπα μδ дословно: „совершим приложение получающегося 20 относительно остатка 44". Таким образом здесь деление описано в геометрической терминологии (ср. сноску на стр. 215). Можно представить себе, что число 20 изображено отрезком, на котором нужно построить прямоугольник, площадь которого выражалась бы числом 44.

[3]) В оригинале ἐμβαδιόν, математический термин, означающий „площадь" в смысле числовой ее меры. Выше („пусть дана квадратная площадь...") Теон употребляет другой термин: χωρίον, который в обиходном языке имел значение „место", а в математической терминологии означает „площадь" в смысле „часть плоскости, находящаяся внутри замкнутой линии". Стремясь к тому, чтобы перевод был по возможности близок к оригиналу, я принужден был употребить термин „площадь" в обоих случаях.

[4]) Гномоном греческие геометры называли фигуру, остающуюся от квадрата по удалении из него другого, подобно расположенного и меньшего квадрата, одной из вершин которого служит вершина исходного квадрата. В данном случае имеется в виду гномон $\varepsilon\beta\gamma\delta\eta\xi$.

[5]) Так как в дальнейшем вычислении пренебрегается площадью квадрата $\xi\lambda$ и площадь гномона принимается равной сумме площадей прямоугольников $\theta\xi$ и $\kappa\xi$, то „для наглядности" Теон представляет их себе сложенными вместе и образующими один прямоугольник со стороной $2\varepsilon\xi$.

имеющий $2^\circ 3' 44''$, т. е. $7\,424''$. Опять удвоим сторону $\vartheta\lambda$, считая $\lambda\varkappa$ лежащей на продолжении $\vartheta\lambda$, разделим $7\,424''$ на получаемые $134^\circ 8'$ и, получив в результате деления приблизительно $55''$, мы имеем приблизительно каждую из (прямых) $\vartheta\beta$ и $\varkappa\delta$. Проведя недостающие прямые в параллелограмах $\beta\lambda$ и $\lambda\delta$, получим, что и эти параллелограмы имеют приблизительно $7\,367''20'''$, а каждый из них $3\,699''40'''$. Остается еще $46''40'''$, что приближенно есть квадрат $\lambda\gamma$, сторона которого $55''$. Итак, мы будем иметь, что сторона квадрата $\alpha\beta\gamma\delta$ в $4\,500^\circ$ весьма близка к $67^\circ 4' 55''$. И вообще, если мы ищем сторону квадрата, представляющего какое-либо число [1]), то мы берем сначала сторону ближайшего квадратного числа, затем, удвоив ее и разделив на получившееся число остающееся число, разлагаем на минуты, отнимаем квадрат результата деления, и снова разложив остающиеся на секунды и разделив на удвоенное число градусов и минут, будем иметь приближенно искомое число, дающее сторону квадратной поверхности".

Вряд ли можно сомневаться в том, что излагаемый Теоном алгоритм совпадает с алгоритмом автора „Синтаксиса". Напротив, самый способ изложения, несомненно, лежит на ответственности комментатора. Теон Александрийский был, пожалуй, самым выдающимся ученым своего времени (конец IV века н. э.). Но время это было эпохой глубокого упадка греческой культуры. И приведенный нами отрывок, характерный для Теона, служит иллюстрацией печального состояния греческой науки этого времени. Если сравнить стиль Теона с точным и ясным, хотя и крайне сухим стилем Евклида или с более живым и экспансивным языком Архимеда, у которого, однако, каждое слово взвешено и имеет четкий смысл, то сразу бросается в глаза ненужная многословность нашего автора. Ее мы наблюдали уже в отрывке, касающемся умножения шестидесятеричных чисел (стр. 213). В данном же случае она сочетается еще с обрывочностью и нечеткостью в ходе мыслей.

Не будем уже говорить о том, что Теон избегает общего доказательства, а ограничивается „доказательством на числе 4 500", — это можно, пожалуй, объяснить „читательской установкой" автора. Но нетрудно заметить, что даже в простом примере с извлечанием квадратного корня из полного квадрата (144) Теон, ссылаясь на предложение 4 II книги „Начал" Евклида, носящее совершенно общий характер, не в состоянии как следует обосновать процесс, иллюстрируемый им на примере. В самом деле, ниоткуда не следует, что „получающееся в остатке 4 будет квадратом от $\gamma\beta$", а не числом, большим этого квадрата, так как ниоткуда не следует, что из соотношения $20\,(\alpha\beta) + (\alpha\beta)^2 = 44$ (если его брать как „типичное" для различных примеров) вытекает, что $(\alpha\beta)^2$ должно быть *остатком* от деления 44 на 20. Более того, отсутствует даже догматическое

---

[1]) Дословно: „квадратную сторону какого-нибудь числа", — ἀριθμοῦ τινὸς τὴν τετραγωνικὴν πλευράν.

указание, как нужно выбрать „меньший квадрат“ (100), чтобы результат получился правильный. Между тем предложение 4 II книги „Начал“ Евклида прямо говорит о произвольном делении отрезка $\alpha\beta$, и если бы не „счастливая“ мысль взять в качестве приближения 100, то результат мог бы получиться неверный. Так, например, неискушенный читатель мог бы взять квадратное число 25 (вместо 100) и получил бы, не отступая ни на иоту от рецепта Теона, что $\sqrt{144} = 5 + 3 = 8$.

Более того, в приведенном отрывке содержится прямая ошибка, довольно притом грубая. Именно, Теон утверждает, что последний остаток ($46''40'''$) „приближенно есть квадрат $\lambda\gamma$, сторона которого $55''$“. Простая проверка убедила бы автора в его ошибке и, нужно полагать, ему сразу стал бы ясен и источник этой ошибки. Но при той беззаботности относительно обоснования процесса и небрежности изложения, которая свойственна нашему автору, он, очевидно, просто проглядел свой промах. Если бы $55''$ было *точным* значением величины $\varkappa\delta$, то утверждение Теона было бы справедливо, тогда как в данном случае $(55'')^2$ не дает даже главной части погрешности. Но, очевидно, поскольку определение корня с большей точностью не интересует Теона, он сам недосмотрел различия между случаем точного и приближенного корня [1]).

После этого нет нужды подробнее разбирать отдельные недостатки изложения Теона. Повторим лишь еще раз, что было бы неосновательно видеть в них проявление личных качеств автора: такова была эпоха, когда даже лучшие хранители античной культуры, защищавшие её от неминуемой гибели под ударами воинствующего христианства, не могли подняться до высот, достигнутых наукой уже более чем шесть веков назад.

Описанный Теоном процесс, как и современный способ извлечения квадратного корня, с которым он по существу тождественен, можно продолжать неограниченно и получать искомый корень с любой степенью точности. При этом шестидесятеричная система позволяет (с помощью небольшой таблицы квадратов первых 59 целых чисел, которыми, нужно думать, пользовались греческие вычислители) получать приближение с данной степенью точности гораздо быстрее, чем это можно сделать в десятичной системе. Таким образом Птолемей, который для составления своей таблицы хорд, идущей через каждые полградуса (т. е. по существу таблицы синусов углов первой четверти

---

[1]) Интересно отметить, что такой вдумчивый автор, как Нессельман, цитируя Теона и отмечая, что Теон напрасно берет приближение с недостатком вместо более точного изыточного приближения, указанной ошибки Теона не отмечает вовсе. Вообще мне неизвестно, чтобы кто-либо из историков обратил на нее внимание. Объясняется это, мне кажется, отсутствием интереса к изучению *стиля* изложения. Между тем, в данном случае эта фактическая ошибка стала возможной лишь благодаря указанной особенности изложения.

через четверть градуса), должен был произвести множество извлечений квадратного корня, имел в своем распоряжении вполне пригодный вычислительный аппарат. Извлечение корня Птолемей производит с точностью не меньше полусекунды, а часто и терции. Так, например, для $\sqrt{3}$ мы находим у него значение $1°43'55''23'''$, все цифры которого — верные. Единица третьего шестидесятеричного разряда выражается в десятичной системе числом 0,0000046, так что десятичное выражение числа, определенного с точностью до $1'''$, будет верным с точностью, не меньшей половины пятого десятичного знака. Фактически же точность птолемеева приближения для $\sqrt{3}$ еще бо́льшая: если перевести его результат в десятичную систему, мы получим: $\sqrt{3} \approx 1{,}7320509\ldots$, тогда как истинный результат должен быть $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$

Естественно возникает вопрос, не существовал ли только что рассмотренный метод извлечения корня уже в эпоху Архимеда; не пользовался ли, в частности, им сам Архимед? Очевидно, при получении дробной части результата этим методом современники Архимеда пользоваться не могли, так как он предполагает наличие систематических дробей (каково бы ни было основание последних), а их в эпоху Архимеда не существовало (стр. 208). Что же касается целой части результата, то она могла вычисляться с помощью поразрядного способа, ибо ионийская система целочисленной нумерации построена, как мы знаем, на строго десятичном принципе. Следует отметить, что некоторые историки, следуя Нессельману[1]), полагают, что в эпоху Архимеда *никакого методического извлечения корня* в практике не существовало. Нессельман приводит вышецитированное место Евтокия и заключает отсюда, что схема поразрядного извлечения корня давно была известна греческим математикам. Но он считает, что она была чрезвычайно непрактична при греческой системе нумерации, и на практике ею не пользовались, а находили целочисленные приближенные значения корня с помощью таблиц.

Последнее предположение и сейчас, спустя почти столетие после появления работы Нессельмана, нельзя считать исключенным, тем более, что ставшие в наши дни известными вавилонские математические тексты свидетельствуют о систематическом пользовании подобными таблицами (хотя до сих пор неизвестно ни одной древнегреческой таблицы квадратов или квадратных корней). Но во всяком случае, если подобной таблицей пользовался Архимед, она должна была заключать более 3 000 результатов, ибо среди результатов Архимеда, как мы видели, имеется оценка:

$$\sqrt{9\,082\,321} < 3\,013\,\frac{3}{4}.$$

А для того чтобы предпринять составление такой большой таблицы, нужно было иметь в этом настоятельную необходимость, т. е. нужно

[1]) Цит. работа, стр. 110 и след.

было предварительно многократно извлекать корни из больших чисел. Таким образом, если бы даже на практике и применялись обширные таблицы, то им должны были предшествовать систематические извлечения корней. И они, по всей вероятности, выполнялись по поразрядному способу, несмотря на некоторые неудобства, дополнительно накладывавшиеся на ионийскую систему нумерации по сравнению с нашей (например, отсутствие знака для нуля).

Если же мы примем (а это очень вероятно), что до Архимеда греческие математики не имели необходимости в извлечении корней из столь больших чисел, то естественно будет предположить, что в распоряжении Архимеда еще не было большой таблицы корней и что он должен был извлекать корни, пользуясь поразрядной процедурой.

Однако, поразрядный метод годился только для получения целой части результата. Для определения же дробной части результата он практически непригоден, если дроби не систематизированы по разрядам, шестидесятеричным или каким-либо иным. Мы видим, таким образом, что введение „систематических" дробей было обусловлено потребностями жизни; то же обстоятельство, что эти дроби оказались шестидесятеричными, конечно, было обусловлено внешним заимствованием и историческими условиями предшествовавших эпох.

Современникам Архимеда не было особой нужды прибегать к этому заимствованию и ломать установившуюся систему дробночисленной нумерации, ибо не было потребности в систематическом выполнении таких операций, как извлечение корня из дробей сложной структуры.

Разумеется, при землемерных, скажем, расчетах могла представиться необходимость в получении приближенных значений квадратных корней с точностью, большей, чем до 1. Но, поскольку степень этой точности все же не должна была быть значительной, можно было обойтись и аппаратом привычной нумерации. Но тогда нужно было иметь какие-либо методы, отличные от метода Птолемея. И действительно, древние греки знали по крайней мере один такой метод. Он описан в „Метрике" Герона.

§ 18. Процесс извлечения квадратного корня у Герона

Прежде чем привести соответствующее место „Метрики", скажем несколько слов об этом произведении и его авторе. О времени жизни Герона в литературе высказывались самые различные мнения. Его относили и к III веку до н. э. и к VI веку н. э. В настоящее время можно считать совершенно исключенными эти „крайние" точки зрения, и тем не менее границы остаются еще очень широкими. Достаточно сказать, что ряд компетентных авторов [1]) относят Герона к I веку до н. э., тогда как другие специалисты [2]) — к III веку н. э.

---

[1]) Например, Кантор и Лориа.

[2]) Например, Гейберг и Гис.

Не вдаваясь здесь в утомительные подробности, обосновывающие различные точки зрения, замечу, что мне представляется более обоснованной первая из указанных датировок. Во всяком случае не подлежит сомнению, что Евклид и Архимед были много старше Герона. Их работы, следовательно, были Герону хорошо известны; имя Архимеда прямо упоминается Героном в его „Метрике".

Мы уже имели случай познакомиться с одним отрывком Герона (стр. 201), взятым из его „Геометрии". Читатель, вероятно, обратил внимание на то, что этот отрывок по стилю ничем не отличается от египетских и вавилонских математических текстов; в таком же стиле написано и все это произведение, которое имеет характер практического руководства. Все правила даны без доказательства, но зато снабжены большим числом числовых примеров. Ту же практическую установку имеет и „Метрика", основным предметом которой также является измерение площадей и объемов. Но, в отличие от „Геометрии", „Метрика" содержит и доказательства. Правда, они даются не всегда, но зато в ряде случаев проводятся с полной строгостью. В частности, с полной строгостью и чрезвычайно изящно, чисто геометрически, доказана здесь так называемая „Героноиа формула" для площади треугольника по трем сторонам [1]). Как всегда, и здесь даны числовые примеры; один из них (стороны треугольника измеряются числами 7, 8, 9) приводит к задаче извлечения квадратного корня из числа $12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 720$. В связи с этим Герон объясняет, как произвести эту операцию. Привожу это объяснение полностью [2]). Слова, взятые в круглые скобки, добавлены мной для лучшей понятности текста.

„Так как 720 не имеет рационального корня [3]), то мы возьмем корень с очень малой погрешностью [4]) следующим образом. Так как ближайший к 720 квадрат есть 729, и оно имеет корнем 27, то раздели 720 на 27. Получается $26\frac{2}{3}$ [5]). Приложи 27. Получается $53\frac{2}{3}$. Половину этого. Получается $26\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}$. Итак, ближайший корень из 720

---

1) Я говорю „так называемая" потому, что из текста „Метрики" никак не следует, что Герон является автором этой теоремы. Арабский же автор Ал-Баттаии прямо приписывает эту теорему Архимеду.

2) Heronis Alexandrini, Opera, quae super sunt omnia, т. III (1903) I, 8.

3) ῥητὴν τὴν πλευρὰν — дословно „рациональную сторону". Интересно заметить, что термин ῥητή у Евклида употребляется в ином смысле, чем у Герона. Именно, рациональным Евклид называет всякий отрезок, квадрат которого соизмерим с квадратом, построеным на избраниом за основу сравнения отрезке (по-нашему, на „единице измерения").

4) μετὰ διαφόρου ἐλαχίστου, тот же термин употребляется и в остальных аналогичных случаях.

5) Дробь $\frac{2}{3}$ здесь записана словесно. Остальные дроби — ионийскими цифрами по „египетской" системе.

будет $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ (Если помножить) на самое себя, получается $720\frac{1}{36}$, так что погрешность есть 36-я часть единицы. Если мы пожелали бы, чтобы погрешность стала меньшей частью (единицы), чем 36-я, то вместо 729 мы возьмем только найденное $720\frac{1}{36}$ и, проделав то же самое, найдем, что погрешность гораздо меньше, чем $\frac{1}{36}$ “.

Герон не дает никакого обоснования этого процесса; но идея его приема совершенно ясна. Она, очевидно, состоит в том, что если поделить число на избыточное значение его квадратного корня, то получится недостаточное приближение этого корня, и наоборот. Поэтому истинное значение корня лежит посредине между взятым приближением и частным от деления на него „подкоренного“ числа. В качестве наиболее простого среднего берется среднее арифметическое.

Теория этого процесса, таким образом, гораздо проще, чем теория поразрядного извлечения корня. Но и практически метод, рекомендуемый Героном, имеет ряд преимуществ перед поразрядным извлечением корня. Действительно, если в примере Герона мы возьмем $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$, т. е. $26\frac{5}{6}$ в качестве первого приближения, и применим к нему указанный процесс, то найдем

$$\frac{1}{2}\left(26\frac{5}{6}+\frac{720}{26\,{}^{5}/_{6}}\right)=\frac{1}{2}\left(26\frac{5}{6}+26\frac{134}{161}\right)=26\frac{1\,609}{1\,932}.$$

Если обратить эту дробь в десятичную, получим 26,832815735..., тогда как значение $\sqrt{720}$ будет 26,832815730... Итак, результат иерен с точностью до единицы десятой значащей цифры! Эта „сверхастрономическая точность“ превосходит всякие практические потребности; для целей геодезических, которые в первую очередь имеет в виду Герон, более чем достаточно уже первое приближение $26\frac{5}{6}=26{,}833\ldots$ Конечно, столь высокая степень точности в данном случае обусловлена сравнительной близостью подкоренного числа к полному квадрату, но даже при „наихудших“ условиях геронов процесс сходится очень быстро, и если не один, то два „шага“ его дают результат, вполне отвечающий требованиям геодезической практики древних.

Для более точных выкладок некоторым препятствием к продолжению процесса служит то, что приходится иметь дело с громоздкими дробями; однако, несмотря на это, он с успехом может конкурировать с поразрядным способом. Действительно, с одной стороны, „метод Герона“ дает несравненно бо́льшую точность, ибо, как нетрудно показать, его относительная погрешность убывает сильнее, чем геометрическая прогрессия с знаменателем $\alpha=\left(\frac{A-a^2}{a^2}\right)^2$, где A есть подкоренное число, а a—начальное приближение квадратного корня; в нашем примере $A=720$; $a=27$; $\alpha=\left(\frac{9}{729}\right)^2<0{,}0002$. С другой стороны, он обладает тем свойством, что ошибка, сделанная в ходе вычислений, автоматически компенсируется при следующем шаге и, во всяком случае, тотчас же обнаруживается по появлению расхождения между a_k и $\frac{A}{a_k}$. Это последнее свойство можно использовать, и для упрощения выкладок, заменяя громоздкую дробь более простой. В частности, этим можно пользоваться, если вычислять результат в систематических, например, в десятичных дробях.

Как нетрудно видеть, непосредственный результат, получающийся для $\sqrt{A}$ по правилу Герона и выражаемый формулой $a_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{A}{a}\right)$, всегда дает избыточное приближение, как в том случае, когда a избыточно, так и в том случае, когда a недостаточно. Недостаточное приближение, впрочем, сразу получается, если A разделить на a_1. Легко также видеть, что результат операций, производимых Героном, совершенно эквивалентен результату, вычисленному по формуле $\sqrt{a^2\pm b}=a\pm\frac{b}{2a}$ $\left(\text{причем } \sqrt{a^2\pm b}<a\pm\frac{b}{2a}\right)$.

Непосредственное пользование этой последней формулой менее удобно, так как, чтобы найти b по данным A и a, нужно возвести число a в квадрат. Нужно думать, однако, что это не служило бы препятствием к использованию процесса, определенного последней формулой. Действительно, мы видели, что Герон, вычисляя „погрешность“, фактически определяет величину, обозначенную нами через b (так что это не есть „погрешность“ в том смысле, в каком этот термин употребляем мы). Очень возможно поэтому, что древнегреческие вычислители пользовались также и тем алгоритмом, который представляется формулой

$$\sqrt{a^2\pm b}<a\pm\frac{b}{2a}.$$

Мы имеем даже прямое описание этого алгоритма; правда, оно относится к византийской эпохе. Именно, у Николая Артавасда, о „письме“ которого мы уже имели случай упомянуть, мы находим под заголовком: „О нахождении стороны нерациональных квадратов“ следующее правило, приводимое, как и следовало ожидать, без всякого доказательства:

„Возьми истинный[1]) квадрат, ближайший к неистинному; конечно, от этого истинного квадрата до неистинного останутся во всяком случае единицы. Затем удвой сторону истинного квадрата, которую ты нашел, и единицы, которые, как было сказано, остались, раздели на число, получающееся от удвоения стороны, и определи дробь,

[1]) τὸν... ἀληθῆ τετράγωνον; мы бы сказали „полный квадрат“.

которую даст это число. Эту дробь прибавь к стороне истинного квадрата и знай, что это и есть сторона неистинного квадрата"[1]).

Мы не знаем с достоверностью, пользовались ли в эпоху Герона этим алгоритмом извлечения квадратного корня. Не знаем мы также никаких других алгоритмов, которые были бы прямо засвидетельствованы античными источниками; между тем, нам известно много результатов, не укладывавшихся в рамки „геронова" алгоритма. Так, например, в той же „Метрике", где Герон описывает этот алгоритм, он дает результат $\sqrt{207}=14\frac{1}{3}$. Результат этот не мог быть получен по рецепту, излагаемому Героном *ни при каком выборе* первого приближения.

Действительно, $14\frac{1}{3}$ есть недостаточное приближение; следовательно, избыточное, из которого оно могло быть получено, должно равняться $\dfrac{207}{14\frac{1}{3}}=14\frac{19}{43}$. Это последнее вряд ли могло явиться исходным пунктом вычислений в силу своей громоздкости. Значит, оно должно было явиться средним арифметическим из двух приближенных значений — недостаточного α_1 и избыточного α_2:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=14\frac{19}{43}. \tag{20}$$

Произведение этих двух значений, по своему способу образования одного из другого, должно равняться подкоренному числу 207

$$\alpha_1\alpha_2=207. \tag{21}$$

Но система уравнений (20) — (21) не допускает вовсе рациональных решений, так как в противном случае $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$ было бы также рационально. Между тем,

$$\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right)^2=\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2-\alpha_1\alpha_2=\left(14\frac{19}{23}\right)^2-207=\frac{2\,898}{43^2},$$

а число $\frac{2\,898}{43^2}$ не есть полный квадрат.

Таким образом, число $14\frac{1}{3}$ получено либо каким-либо иным способом, либо путем округления результата, найденного по „геронову" способу. Последнее, впрочем, мало вероятно, потому что при естественном предположении $\alpha_1=14$, $\alpha_2=\frac{207}{14}=14\frac{11}{14}$ мы получаем $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=14\frac{11}{28}$ (или по египетскому способу записи 14 4′ 7′), а при предположении $\alpha_1=15$ $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=14\frac{2}{5}$ (14 3′ 15′); результаты эти не столь громоздки, чтобы потребовалось округление.

[1]) P. Tannery, вышецитированная (стр. 227) работа, стр. 161 (Oeuvres scientifiques, т. IV, стр. 100).

Как бы то ни было, но по виду результата мы решительно ничего не можем сказать о том, как он в действительности был получен.

В таком же, если не худшем положении мы оказываемся, когда ставим перед собой задачу указать метод, которым пользовался Архимед при извлечении квадратного корня из больших чисел. Как мы выше видели (§ 14), нахождение целой части результата не могло представить принципиальных затруднений, дробную же часть в эпоху Архимеда не могли находить ни поразрядным методом, ни с помощью таблиц. Естественно прежде всего посмотреть, что даст здесь метод, описанный Героном. Рассуждение, примененное нами к корню $\sqrt{207}$, будучи повторено для результатов Архимеда, покажет, что *ни один* из этих результатов не получен непосредственно по методу Герона. Да этого и не могло быть по существу, ибо непосредственное применение метода Герона к числам Архимеда дало бы дроби с очень большими знаменателями. Для выполнения дальнейших вычислений необходимо было бы округлить результаты. Но тогда становится совершенно невозможным определить, какова в действительности была процедура Архимеда, ибо одни и те же округления можно получить, исходя из различных приближений.

Все попытки реконструировать процедуру Архимеда, сделанные до настоящего времени, остаются совершенно беспочвенными именно по этой причине. Если бы удалось найти процесс, с помощью которого, если не все, то хотя бы бóльшая часть архимедовых корней получилась *без округлений*, соответствующая гипотеза приобрела бы большую вероятность. Однако такого процесса не найдено, и мне кажется он и не может быть найден, так как Архимед, безусловно, пользовался очень широко округлениями. Таким образом объяснение вида дробной части архимедовых корней нужно искать не в особенностях применяемого алгоритма, а в характере тех соображений, которыми руководствовался Архимед при округлении, т. е. мы имеем здесь уже не историческую, а психологическую проблему, решение которой нас в данной связи может не интересовать [1]). Заметим только, что при такой постановке вопроса во всяком случае не может быть речи о слабом развитии вычислительной техники.

§ 19. Извлечение кубического корня

Наш обзор арифметических операций древнегреческой математики был бы неполным, если бы мы не упомянули о том, что в „Метрике" Герона описывается способ извлечения не только квадратного, но и кубического корня из числа. По обычной своей манере Герон из-

---

[1]) Интересующихся этим вопросом могу отослать к собранию сочинений Архимеда, изданному Heath'ом, The works of Archimedes, Oxford 1897. В обширном введении к этому сочинению упомянутому вопросу посвящен § 8 главы IV. Имеется и немецкий перевод Archimedes Werke, herausgegeben von Th. L. Heath; deutsch von F. Klein, Berlin 1914.

лагает этот способ на примере. Приводим соответствующий отрывок „Метрики“ [1]).

„Теперь скажем, как найти кубический корень из ста единиц. Возьми ближайший от 100 куб, как превосходящий, так и недостающий. Это 125 и 64. Насколько [первый] превосходит? На 25. Насколько [второй] недостает? На 36. Сделай [умножение] 5 на 36 [2]); получится 180. И [прибавь] 100 [3]); получится 280. [Раздели 180 на 280]; получится $\frac{9}{14}$; прибавь это к стороне меньшего куба, т. е. к 4. Получится 4 единицы и $\frac{9}{14}$. Это есть кубический корень из 100 с наивозможной точностью“.

Чтобы составить себе представление о методе Герона, переведем его на язык символов. Обозначим через x искомый кубический корень из данного числа A $(A=100)$; пусть два ближайших целых приближения числа x будут x_1 и x_2, так что $x_2^3 < A < x_1^3$ и $x_1 - x_2 = 1$ $(x_1=5,\ x_2=4)$. Герон прежде всего находит числа d_1 и d_2, определяемые следующими выражениями:

$$d_1 = x_1^3 - A = 125 - 100 = 25,$$

$$d_2 = A - x_2^2 = 100 - 64 = 36.$$

Следующее действие Герона нужно, конечно, истолковать, как образование выражения

$$x_1 d_2 = 5 \cdot 36 = 180,$$

которое Герон складывает с числом 100. Естественнее всего на первый взгляд было бы принять, что это подкоренное число. Однако тогда никаким образом не удается получить правила приближенного извлечения кубического корня, годного для любого подкоренного числа. Если же мы вместе с Вертгеймом [4]) сделаем допущение, что это число 100 образовано по аналогии с предыдущим числом 180, т. е. что взято выражение

$$x_2 d_1 = 4 \cdot 25 = 100,$$

то, следуя единственно возможному смыслу дальнейших строк Герона, мы получим очень хорошее приближение и для общего случая.

Действительно, образуем „180 и 100“, т. е.

$$x_1 d_2 + x_2 d_1 = 180 + 100 = 280.$$

---

[1]) Heronis, Opera. Ed. Schöne, т. III, стр. 179.

[2]) 5 есть кубический корень из 125; 36 есть вышенайденный недостаток.

[3]) Это число 100, по аналогии с числом 180, с которым оно складывается, естественно считать произведением $4=\sqrt[3]{64}$ на избыток 25. В этом случае описываемый Героном процесс дает хорошее приближение кубического корня. Если же понять это число 100 как подкоренное число, то процесс непригоден в общем случае.

[4]) G. Wertheim, Herons Ausziehung der irrationalen Kubikwurzel. Zeitschrift für Math. und Physik, т. 44, 1889, Historisch-litterarische Abteilung, стр. 1—3.

Делим 180 на 280, т. е.

$$\frac{x_1d_2}{x_1d_2+x_2d_1}=\frac{180}{280}=\frac{9}{14}.$$

В дошедшем до нас тексте Герона прямо не сказано, правда, что нужно выполнить именно деление 180 на 280, — соответствующая фраза представляет предположительное чтение, что и отмечено квадратными скобками, в которые фраза заключена, но результат $\left(\frac{9}{14}\right)$, содержащийся у Герона, никак иначе не может быть получен.

Сообразно с этим окончательный вид приближенного кубического корня представится формулой

$$x \approx x_1+\frac{x_1d_2}{x_1d_2+x_2d_1}. \qquad (22)$$

Теперь мы должны решить вопрос, как это выражение могло быть получено Героном. У Герона никаких указаний по этому вопросу нет. Тем не менее теоретические основания этого способа извлечения корня можно установить с почти полной несомненностью.

Примем во внимание прежде всего то, что здесь находятся *два* исходных приближения x_1 и x_2, из которых одно избыточно, а другое недостаточно. Таким образом мы имеем здесь дело с *интерполяционным* процессом, который систематически применяется, например, Птолемеем при вычислении хорд, не содержащихся в составленной им таблице. Промежуток интерполяции x_2-x_1 равен здесь 1. Из формулы (22) мы видим, что отношеиие

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{x-x_1}{1}$$

полагается равным

$$\frac{x_1d_2}{x_1d_2+x_2d_1},$$

что означает, что промежуток интерполяции делится на части (x_2-x и $x-x_1$) пропорционально числам x_1d_2 и x_2d_1. Остается только угадать, каким образом автор этой процедуры пришел к установлению пропорциональности (приближенной)

$$\frac{x_2-x}{x-x_1}\approx\frac{x_1d_2}{x_2d_1}. \qquad (23)$$

Казалось бы вполне естественным, если бы вычислитель положил изменения кубических корней (x_2-x, $x-x_1$) пропорциональными изменению подкоренных количеств, т. е. положил бы

$$\frac{x_1-x}{x-x_2}=\frac{x_1^3-x^3}{x^3-x_2^3}=\frac{d_1}{d_2}.$$

Тогда бы мы имели дело с линейной интерполяцией, хорошо известной греческим вычислителям, например, Птолемею. Но линейная интерполяция дает очень плохое приближение, когда искомый кубический корень невелик по сравнению с интерполяционным промежутком, что и имеет место в данном случае. Очень вероятно, что древнегреческие вычислители сначала прибегали к ней; убедившись проверкой в том, что

$$\frac{x_1^3 - x^3}{x^3 - x_2^3} = \frac{x_1^3 - A}{A - x_2^3}$$

нельзя принять равным $\frac{x_1 - x}{x - x_2}$ без чувствительной погрешности, они могли поставить вопрос о более точном его выражении.

Рассмотрим первый член этого отношения $d_1 = x_1^3 - x^3$. Напомним, что x_1 должно превосходить x на величину, меньшую 1; обозначая ее через α_1, имеем

$$x_1 = x + \alpha_1 \ (\alpha_1 < 1).$$

Так как число x предполагается, конечно, бо́льшим единицы, то α невелико по сравнению с x. Поэтому разность

$$d_1 = (x + \alpha_1)^3 - x^3 = 3x\alpha_1(x + \alpha_1) + \alpha_1^3$$

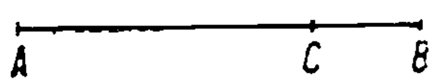
мало отличается от величины

$$3x\alpha_1(x + \alpha_1) = 3\alpha_1 x x_1$$

и приближенно

$$d_1 = 3\alpha_1 x x_1. \qquad (24)$$

Конечно, современники Герона не знали наших алгебраических обозначений, но, несомненно, примененное здесь преобразование не могло их затруднить по существу. Они его могли представлять себе чисто арифметически или геометрически. Тот, кто убежден в безусловной необходимости для греческого математика пользоваться непременно геометрическим образом мышления, может осуществить это преобразование геометрически. Отрезок AB (черт. 23) пусть представляет собой рациональное избыточное приближение (x_2), а отрезок AC — полный иррациональный корень (x). Построив кубы на этих отрезках, мы убедимся, что куб, построенный на AB, получается из куба, построенного на AC прибавлением к последнему трех одинаковых параллелепипедов с ребрами, равными AB, AC и CB, и куба, построенного на CB (каждый из трех параллелепипедов примыкает к грани куба на AC, выступая за нее в одном направлении на длину BC и имея BC толщиной).



Черт. 23.

Совершенно аналогично тому, как мы получили формулу (24), мы найдем, что разность d_2 представится приближенно выражением

$$d_2 = 3\alpha_2 x x_2, \qquad (25)$$

где

$$\alpha_2 = x - x_2.$$

Тогда из (24) и (25) мы найдем

$$\frac{d_1}{d_2} \approx \frac{\alpha_1 x_1}{\alpha_2 x_2} = \frac{(x - x_1) x_1}{(x_2 - x) x_2},$$

что равносильно соотношению (23), которым, как было показано, пользуется Герон.

Нет нужды добавлять, что и эти рассуждения легко провести геометрически.

Мы рассмотрели вычислительную технику древних греков с той степенью подробности, которая возможна при вышеобрисованном состоянии наших источников. Мы ознакомились не только с четырьмя действиями арифметики в узком смысле этого слова, но и с операцией извлечения корней, квадратных и кубических. Задачи, на почве которых эти операции выполнялись, были задачами геометрическими, возникавшими, как мы видели, при вычислении длины окружности (Архимед), площади треугольника (Герон), стороны куба с заданным объемом (Герон), длины хорд в круге (Птолемей) и т. д. Из этих задач операции извлечения корня, конечно, и возникли.

Геометрические задачи более сложного типа должны были приводить к постановке более общего вопроса о решении уравнений квадратных и кубических, числовое решение которых обнимает, как частный случай, проблему извлечения корней.

И действительно, древнегреческие математики ставили и разрешали эти вопросы; на этой почве создались и развились алгебраические методы, применявшиеся для решения не только содержательных задач геометрического характера, но и отвлеченных теоретико-числовых проблем.

Кульминационным пунктом в развитии древнегреческой алгебры является произведение Диофанта, в котором систематически изучаются методы решения определенных и неопределенных уравнений. У Диофанта мы находим и зачатки алгебраической символики, и предвосхищение операций с отрицательными числами, и распространение понятия степени на те числовые образования, которые мы именуем отрицательными степенями, и много других интереснейших вещей.

Я надеюсь осветить эти вопросы в более или менее близком будущем.