

Ч. Трун

ЗАДАЧИ

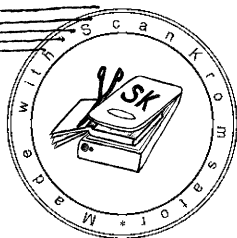
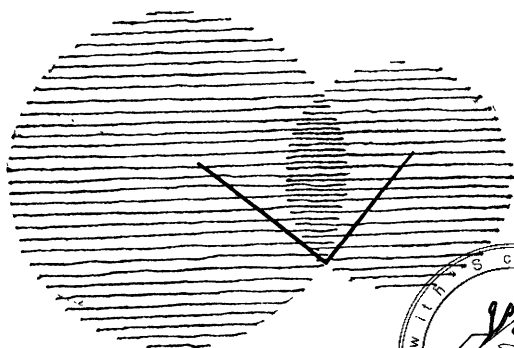
С ИЗЮМИНКОЙ



Ch. Trigg

MATHEMATICAL QUICKIES

McGraw-Hill Book Company
New York — London
1967



ЗАДАЧИ И ОЛИМПИАДЫ

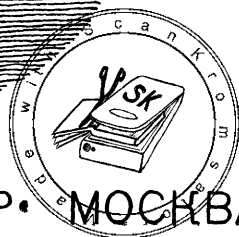
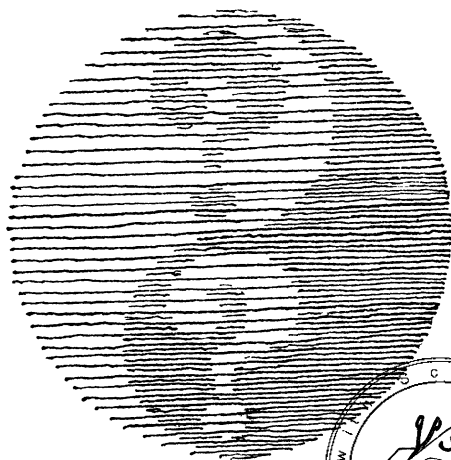
Ч. Тринг

ЗАДАЧИ

С ИЗЮМИНКОЙ

Перевод с английского канд. физ.-мат. наук
Ю. Н. Сударева

Под редакцией и с предисловием д-ра физ.-мат. наук
проф. В. М. Алексеева



ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР • МОСКВА
1975

Тригг Ч.

- Т67 Задачи с изюминкой. Пер. с англ. Ю. Н. Сударева. Под ред. и с предисл. В. М. Алексеева. М., «Мир», 1975.
302 с. с илл.

Книга американского педагога Чарльза Тригга открывает новую серию «Задачи и олимпиады». В ней собраны задачи, которые при довольно сложной формулировке допускают простое и изящное решение. Среди авторов оригинальных решений — имена известных американских математиков.

Сборник рассчитан на широкий круг читателей, интересующихся математикой, особый интерес представляет для увлеченных этим предметом учащихся старших классов.

Т $\frac{20202-454}{041(01)-75}$ 204—76

512

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы



© Перевод на русский язык, «Мир», 1975.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Раздумывая над тем, стоит ли приобретать новую книгу, Потенциальный Читатель обычно обращается к предисловию, чтобы найти в нем ответ на вопросы: что это за книга? Для кого она предназначена? О чем она? С какими известными образцами ее можно сравнить?

Самое беглое знакомство с содержанием книги, которую вы держите в руках, убеждает, что речь идет о математике: числа, делящиеся друг на друга, треугольники *ABC*, задачи — все это атрибуты «царицы наук». Надеюсь, я не отпугну читателя, заявив, что это серьезная книга и математика в ней тоже достаточно серьезная.

Развлекательная или, лучше сказать, занимательная математика существует, посвященная ей литература обширна и пользуется большим спросом; к ее лучшим образцам принадлежат, например, вышедшие в последние годы книги М. Гарднера¹. Не будучи ни в коей мере противником этого направления и всячески его приветствуя, я все же склонен считать, что его содержание большей частью находится в стороне от главного русла математики: это изолированные островки и тихие протоки, где приятно отдохнуть и развлечься, созерцая экзотические цветы и любуясь диковинными мотыльками. Математическая головоломка может доставить удовольствие, привлечь внимание и возбудить живой интерес к математике, может, наконец, послужить толчком к выбору жизненного пути будущими Архимедами, но на-

¹ М. Гарднер, Математические головоломки и развлечения, М., изд-во «Мир», 1971; М. Гарднер, Математические досуги, М., изд-во «Мир», 1972; М. Гарднер, Математические новеллы, М., изд-во «Мир», 1974.

учить математике — не ее задача. Разумеется, развитие математики течет по извилистому руслу, которое, вдобавок, постоянно меняется, и может статься, что сегодняшний предмет забавы завтра приобретет глубокий смысл, но сейчас речь не о том.

Чтобы научиться математике, как, впрочем, и любой другой науке, нужны Учебник и Задачник, систематическое штудирование известных истин и самостоятельный поиск решения сначала малых, а затем и больших проблем, приобретение эрудиции и развитие навыков творчества. Поэтому сборники задач всегда будут неотъемлемой частью математического образования. Они могут быть разными.

Обычный школьный задачник, предназначенный для закрепления приобретаемых знаний и развития навыков «математического ремесла», построенный, как правило, на небольшом числе шаблонных приемов. Задачник-учебник, в котором задачи группируются в циклы, расположенные в строгой последовательности; решая их, вы постепенно, незаметно для себя осваиваете новую область, как бы повторяя путь первопроходца. Наконец, задачник, в котором просто собраны нестандартные интересные задачи. Решить непривычную задачу, отрешившись от заученных шаблонов, — это уже маленькая творческая победа.

Поэтому, не являясь учебным пособием, задачники последней из названных категорий могут оказать неоценимую помощь как педагогу, так и тому, кто занимается. Книга Чарльза Тригга «Mathematical Quickies» несомненно относится к их числу.

Вместе с планируемыми к изданию «Венгерскими математическими олимпиадами» И. Кюршака (сборник задач, предлагавшихся на этих олимпиадах с 1894 по 1974 год), «400 избранными задачами» (сборник памяти Отто Дункеля, многолетнего редактора задачного отдела в журнале *American Mathematical Monthly*) и рядом других сборников книга Тригга составит своеобразную серию «Задачи и олимпиады», которую намеревается опубликовать издательство «Мир». Мне кажется, что эта серия будет тепло принята читателем, несмотря на то что занимательность составляющих ее книг в значительной мере отходит на второй план, уступая место серьезной математике.

Серия рассчитана в основном на широкий круг учащейся молодежи — от старшеклассников до младшекурсников, хотя необходимый уровень подготовки ее читателей сильно колеблется не только от книги к книге, но и от задачи к задаче. (Так, значительная часть задач из дункелевского сборника требует известной математической культуры, тогда как в книге Тригга, за редким исключением, все задачи элементарны.) С другой стороны, эти книги интересуют и тех читателей, чей возраст далек от школьного (к тому же среди активных читателей популярной математической литературы значительную долю составляют родители, многочисленные мамы и папы, стремящиеся обнаружить в своих детях математические способности).

Задачи, собранные Триггом, публиковались в разное время в американских журналах (см. предисловие автора). Хотя даже самые крупные наши библиотеки не располагают полными комплектами этих журналов, задачи из них, и уж во всяком случае идеи задач, довольно широко представлены в «фольклоре» московских, да, вероятно, и не только московских, школьных математических кружков. Поэтому не удивительно, что для ветеранов-кружковцев многое в книге Тригга окажется знакомым¹. Даже если оставить в стороне фактические пересечения, общий стиль задач и круг тем, из которых они почерпнуты, роднят сборник Тригга с первыми книгами «Библиотеки математического кружка» — прекрасной серии, которая теперь уже состоит из дюжины томов и насчитывает за плечами двадцать с лишним лет. Рядом с ней я и поставлю книгу Тригга на своей книжной полке.

Эти книги роднят «олимпиадный дух» и нестандартность задач, стремление сочетать кажущуюся несерьезность, а иногда и легкомысленность формулировок с нетривиальностью содержания и, наконец, забота о красоте и изяществе решений, которые должны не только по-

¹ Кстати, сам Тригг подчеркивает, что ссылка на автора и дата публикации не носят приоритетного характера. Во многих случаях задача или ее решение так или иначе известны. С некоторыми задачами этого сборника я познакомился в школьном кружке при МГУ за несколько лет до указанной в книге даты журнальной публикации.

учать, но и вызывать эмоции (желательно, разумеется, положительные).

Сегодняшние советские школьники располагают массой популярных книг, к их услугам прекрасный журнал «Квант», на страницах которого постоянно публикуются очень интересные и свежие задачи. И все же, исходя из принципа «новое есть хорошо забытое старое», я полагаю, что издание задач, собранных в течение многих лет (а если иметь в виду всю серию, то и в разных странах), полезно не только простым расширением «задачного фонда», но и, так сказать, «генофонда», поскольку оно введет в обиход новые и оживит старые идеи задач, что в общем-то гораздо важнее.

По замыслу Тригга, каждая из задач этого сборника должна содержать в своем решении что-то неожиданное, какую-то «изюминку». Вот почему мы в переводе остановились на несколько необычно звучащем названии, хотя английское слово Quickies означает нечто другое. После ряда неудачных попыток найти подходящий русский эквивалент редактор перевода провел закрытый конкурс среди своих друзей. Неологизмы вроде «Раз-и-Готы» («раз и готово!») и «Вмиг-реши» («решил вмиг») были признаны нежизнеспособными, и тогда, отвергнув «орешки», мы остановились на «изюминке».

Возможно, некоторым читателям не все «изюминки» придутся по вкусу; я и сам нахожу часть из них «недостаточно сладкими». Впрочем, особенностью книги Тригга вообще является отсутствие систематизации. Задачи трудные и легкие, остроумные и банальные идут впере­мешку. Рядом с задачкой «на устный счет» (задача 7) вы встречаете такую, решение которой, в сущности, требует интегрального исчисления (задача 15), а способ, которым решена задача 75, хотя и совершенно элементарный, радует своим изяществом. Поэтому решать эти задачи подряд и без разбора совершенно необязательно. Каждый может и должен выбирать здесь то, что ему по силам и по душе. Даже шестиклассник может найти среди задач кое-что для себя интересное. Для более же искушенного читателя хаотичность в расположении материала и пестрота тематики являются даже некоторым достоинством, ибо помогают сохранить интерес к книге на всем ее протяжении.

Наконец, я предвижу, что среди читателей найдутся и такие, которые, выковыривая изюминку, заглянут в решение, не пытаясь решить задачу самостоятельно (ах, как это непедагогично!). Основываясь на собственном опыте, знаю, что это тоже может доставить удовольствие.

Как известно, иногда в изюме попадаются косточки. Решение может опираться на малоизвестные факты, не входящие в нашу школьную программу, хотя в большинстве своем задачи Тригга посильны школьникам восьмых-девярых классов. В некоторых случаях приведенное в книге рассуждение слишком кратко и нуждается, на мой взгляд, в разъяснении. Ряд мест (впрочем, их совсем немного) может вызывать справедливое негодование ревнителя математической строгости. Потому я счел необходимым сопроводить русский перевод книги Тригга комментарием, в котором собраны некоторые сведения из элементарной математики, поясняются трудные места и приводятся правильные решения (может быть, и без «изюминки») в тех случаях, когда это необходимо. (Тем самым я частично отвечаю на обращение автора, помещенное в начале отдела решений.) Можно было бы и исключить задачи, решения которых не вполне удовлетворительны, но, во-первых, разбор ошибок обычно не менее поучителен, чем разбор правильного решения, а во-вторых, красивое, но неверное решение может послужить стимулом к отысканию красивого и верного решения, и читатель преуспееет в этом больше, чем я.

В оригинале книга Тригга вышла в 1967 году. За прошедшие годы в тех же журналах, откуда главным образом почерпнуто ее содержание, появилось немало интересных задач. Переводчик книги Ю. Н. Сударев отобрал некоторые из них, и мы добавили их к основному тексту, сохранив непрерывную нумерацию задач (с задачи 271 и далее). Средний уровень трудности этих задач несколько выше, чем у Тригга, а некоторые задачи явно предполагают знакомство с началами математического анализа. Наш отбор был менее придирчив (Тригг отбирал из обширной коллекции, насчитывающей около 16 000 задач) и не претендует на обязательную «изюминку» в задаче.

В дополнительной части книги вмешательство редактора иногда было весьма серьезным: текст сокращен за

счет малоинтересных подробностей или расширялся там, где рассуждение казалось слишком беглым; исправлялись незначительные неточности; в некоторых задачах менялись «реалии» и «литературная обработка» при сохранении математической идеи, лежащей в основе задачи и ее решения. Иногда подобные замены были вызваны желанием обойтись без введения обозначений, принятых у специалистов, но малоизвестных для широкого круга читателей.

Мне остается выразить признательность всем энтузиастам, которые своими советами и дружеским участием способствовали нашей работе.

В. М. Алексеев

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

В данном сборнике представлены элементарные задачи из области арифметики, алгебры, плоской и пространственной геометрии, тригонометрии, теории чисел и традиционные головоломки, такие, как задачи на разрезание, криптарифмы и магические квадраты. Акцент сделан на методе решения. Читателю предлагается не просто найти решение, но и сделать его по возможности более изящным, чем здесь представленное.

Я начал собирать подобные задачи с марта 1950 г., когда, будучи редактором раздела «Задачи и решения» журнала *Mathematics Magazine*, ввел в него подраздел, носящий название «Quickies». Во вводной статье к нему говорилось: «Время от времени в этом разделе будут публиковаться задачи, которые можно решить трудоемкими методами, но с которыми при надлежащем подходе удастся справиться в два счета. Мы предлагаем читателям присылать нам свои любимые задачи такого типа вместе с изящными решениями, а также, если представится возможным, и с указанием источника, откуда взято соответствующее решение». Раздел быстро завоевал популярность и удерживает ее до настоящего времени.

Под «изящным» в математике принято понимать ясное и логичное решение, содержащее, так сказать, некоторую «изюминку». Краткость обычно достигается не за счет пропуска облегчающих понимание шагов и не с помощью известной математической уловки, состоящей в использовании слова «очевидно». Разумеется, для читателя, уже знакомого с данным результатом, элемент неожиданности пропадает.

Быстрота и изящество — понятия относительные. Зачастую магический ключ к решению задачи дает использование какой-то малоизвестной теоремы или теоремы, заимствованной из другой дисциплины или из более «вы-

соких» разделов математики. В ряде случаев скорейшее решение можно получить с помощью элементарной математики. Иногда желаемый эффект может дать какой-нибудь специально придуманный или на первый взгляд не связанный с данной задачей прием.

Часто хорошие задачи из-за различных по форме постановок, которые порой маскируют тот факт, что мы имеем дело с нашей давней знакомой, годами циркулируют анонимно. Не стремясь увековечить подобную ситуацию, но отдавая себе отчет в том, что обнаружить действительно первое появление какой-нибудь задачи практически невозможно, я счел необходимым в данной книге указывать источник и автора *решения*. Если фамилия автора не приводится, то решение принадлежит мне самому. Если же автор решения указан, но источник не упомянут, то это означает, что автор прислал решение непосредственно мне.

Иногда оригинальный текст решения перерабатывался без изменения самого метода. В ряде случаев в моем распоряжении не оказывалось подходящих символов, которые позволяли бы записать решение компактно, поэтому оно может показаться излишне длинным, хотя основных идей и шагов на самом деле в нем было использовано мало.

Поскольку существенная часть решения опирается на частную математическую дисциплину, я не проводил классификацию задач на алгебраические, геометрические и т. п. Трудность меняется от одной задачи к другой случайным образом, поэтому в любом месте читатель может натолкнуться как на трудную, так и на легкую задачу.

Чарльз У. Тригг

ЗАДАЧИ

Здесь представлено 270 занимательных задач различной степени трудности, взятых из разных источников и относящихся к различным областям математики. Они бросают читателю двойной вызов — не просто найти решение, а попытаться отыскать такое решение, которое было бы короче, аккуратнее и элегантнее приведенного в книге.

Задачи помещены в случайном порядке. Автор не старался отделить менее трудные задачи от более трудных. Поэтому читатель в любой момент должен быть готов к встрече как с трудной, так и с легкой задачей. Каждая задача снабжена порядковым номером. Под тем же номером во второй части книги приводится соответствующее решение.

1. Рассеянная секретарша. Машинистка напечатала десять писем и адреса на десяти конвертах, но рассеянная секретарша разложила эти письма по конвертам, несколько не заботясь о соответствии между письмом и адресатом. Правда, в каждый конверт она положила только по одному письму. Какова вероятность того, что ровно девять писем попали в предназначенные для них конверты?

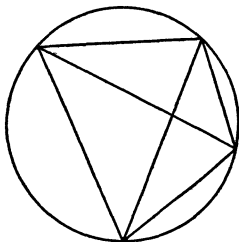
2. Теорема Пифагора. Докажите, что квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.

3. Четыре уравнения с четырьмя неизвестными. Найдите все решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 10 \\ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 30 \\ x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 100 \\ x y z w = 24 \end{cases}$$

4. Тест с нулевой суммой. Некий тест состоит из 26 вопросов. За каждый неверный ответ у испытуемого вычитается пять очков, а за каждый правильный — ему начисляется восемь очков. Испытуемый ответил на все вопросы. На сколько вопросов он ответил правильно, если в итоге сумма полученных им очков равнялась нулю?

5. Теорема Птолемея. Докажите, что в любом выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, произ-



ведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

6. Простое разложение на множители. Разложите на множители, не группируя члены, выражение

$$x^8 - x^7y + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + y^8.$$

7. Устный счет. Возведите в уме 85 в квадрат.

8. Уравнение четвертого порядка. Сколько отрицательных корней имеет уравнение

$$x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0?$$

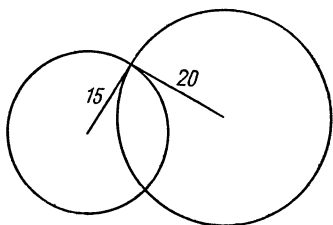
9. По миллиону с каждой стороны. Два миллиона отмеченных точек целиком расположены внутри окружности, диаметр которой равен 1 см. Существует ли прямая, по каждую сторону от которой находилось бы ровно по одному миллиону таких точек?

10. Бесконечность множества простых чисел. Покажите, что существует бесконечно много простых чисел.

11. Комплексные числа. Упростите выражение

$$(27 + 8i)/(3 + 2i^3).$$

12. Перекрывающиеся круги. Окружность радиуса 15 пересекается с окружностью радиуса 20 под прямым углом. Рассмотрим две области, которые получатся после удаления из соответствующих кругов их общей части. Чему равна разность их площадей?



13. Соревнования по теннису. В соревнованиях по теннису участвуют n игроков. Каждый теннисист выбывает из турнира после первого поражения. Сколько следует провести встреч, чтобы выявить победителя?

14. Суммирование факториалов. Чему равна сумма

$$1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!)?$$

15. Пересекающиеся цилиндры. Оси симметрии двух прямых круговых цилиндров, диаметр каждого из которых равен 2 см, пересекаются под прямым углом. Чему равен объем общей части этих цилиндров?

16. Представление целого числа в виде суммы. Число 3 можно представить четырьмя способами как сумму одного или более положительных чисел, а именно как 3, $1 + 2$, $2 + 1$ и $1 + 1 + 1$. Покажите, что любое целое положительное число n можно подобным же образом выразить 2^{n-1} способами.

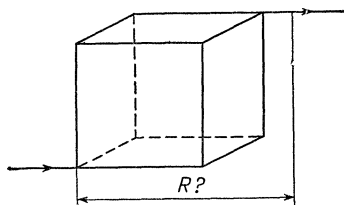
17. Многочлен четвертого порядка с рациональными корнями. Покажите, что уравнение четвертого порядка

$$()x^4 + ()x^3 + ()x^2 + ()x + () = 0,$$

где скобки в произвольном порядке заполнены числами 1, —2, 3, 4, —6 (по одному числу в каждой скобке), всегда имеет рациональный корень.

18. Проволочный куб. Каждое ребро проволочного куба имеет сопротивление 1 Ом. Чему равно

сопротивление между двумя противоположными вершинами данного куба?



19. Деление-шутка. Каждая буква криптоарифма $АННААН:ЮКЕ = НА$ единственным образом представляет какую-то десятичную цифру. Восстановите зашифрованное здесь деление.

20. Продавец цветов. Девушка купила в магазине x роз, заплатив за все y долларов (x и y — целые числа). Когда она собиралась уходить, продавец сказал ей: «Если бы вы купили еще 10 роз, то я отдал бы вам все розы за 2 доллара и вы сэкономили бы 80 центов на каждой дюжине». Найдите x и y .

21. Отношение площадей у многоугольников. Периметры некоторого равностороннего треугольника и правильного шестиугольника совпадают. Чему равно отношение их площадей?

22. Перевернутые чашки. Требуется перевернуть вверх дном n чашек, следуя такому правилу: за один раз разрешается перевернуть ровно $n - 1$ чашку (любые), и эту процедуру можно повторить несколько раз. Покажите, что задача разрешима при четном n и неразрешима при нечетном.

23. Конец света. Первого апреля 1946 г. газета «Иерихон Дейли Ляпсус» сообщила: «Известный астролог и знаток чисел из Гайясуелы, профессор Евклид Парачельсо Бомбаст Умбуджо, предсказал что конец света наступит в 2141 г. Его предсказание основано на глубоких математических и исторических исследованиях. Профессор Умбуджо вычислил, чему равно выражение

$$1492^n - 1770^n - 1863^n + 2141^n$$

при $n = 0, 1, 2, 3$ и т. д. до 1945, и обнаружил, что все числа, которые он получил в результате многомесячной кропотливой работы, делятся на 1946. Числа 1492, 1770

и 1863 представляют собой даты исторических событий: открытия Нового Света, Бостонской резни и Геттисбергского послания соответственно. Что же может произойти в 2141 г.? Очевидно, конец света».

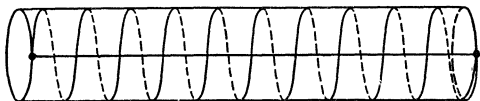
Лишить бы звания такого профессора! Получите его результат с помощью простой выкладки.

24. Шесть целых чисел. Найдите шесть наименьших различных целых чисел таким образом, чтобы произведение каждых пяти произвольно выбранных из этой шестерки чисел равнялось одному или нескольким периодам в десятичном представлении числа, обратного к оставшемуся шестому числу. Например, если мы возьмем десятичное представление числа, обратного к 41,

$$\frac{1}{41} = 0,243902439 \dots,$$

то период будет равен 02439.

25. Длина спирали. Кусок проволоки спиралеобразно намотан на цилиндрическую трубку, образуя 10 витков. Длина трубки 9 см, длина ее внешней окружности 4 см. Концы спирали лежат на одной и той же образующей цилиндра. Найдите длину проволоки.



26. Задача на минимум. Покажите, что для любых положительных чисел p, q, r и s дробь

$$\frac{(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1)(r^2 + r + 1)(s^2 + s + 1)}{pqrs}$$

не меньше 81.

27. Цифры точного квадрата. Покажите, что любой точный квадрат, который в десятичной системе записывается с помощью двух или более цифр, содержит по крайней мере две различные цифры.

28. Члены комитетов. Совет директоров одной крупной компании состоит из 15 человек, которые одновременно должны войти в состав 20 комитетов при этом совете. Комитеты требуется составить таким образом, чтобы:

1) каждый директор входил в 4 комитета;

- 2) в каждый комитет входило по 3 директора;
 3) никакие два комитета не содержали бы более одного директора, входящего одновременно в оба эти комитета.

29. Разрезанная картинка. Всем известна головоломка, которая состоит в том, что кусок фанеры с нарисованной на нем картинкой разрезают на мелкие части, а затем предлагают вновь собрать из этих перемешанных частей исходную картинку. Пусть картинка разрезана на n мелких частей. Назовем «ходом» соединение вместе двух кусков независимо от того, состоит ли каждый кусок из одной или нескольких мелких частей, соединенных ранее. Как нужно действовать, чтобы собрать картинку за минимальное число ходов?¹

30. Неизвестный остаток. Найдите остаток от деления $f(x^5)$ на $f(x)$, если

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

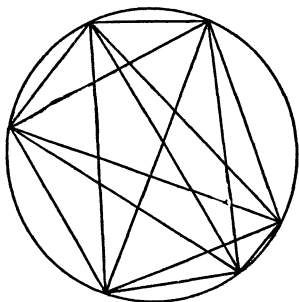
31. Загадочное деление. Наш хороший приятель и выдающийся знаток чисел профессор Евклид Парацельсо Бомбаст Умбуджо с головой ушел в работу, подвергая проверке на своем арифмометре $81 \cdot 10^9$ предполагаемых решений следующей задачи. Нужно восстановить приведенное ниже деление, заменив каждое x соответствующей цифрой.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \times \times \times \times \times \times \times \times \\
 \times \times \times \\
 \hline
 \times \times \times \times \\
 \times \times \times \\
 \hline
 \times \times \times \times \\
 \times \times \times \times
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{r}
 \times \times \times \\
 \hline
 \times \times 8 \times \times
 \end{array}
 \end{array}$$

Посрамите профессора, сведя число возможных решений к $(81 \cdot 10^9)^{0!}$

¹ В московских школьных математических кружках по сути дела та же задача формулируется так: шоколадка разделена бороздками на $m \times n$ долек, на которые ее надо разломить; за один раз разрешается произвести разлом (самой шоколадки или одного из уже получившихся ее кусков) вдоль одной бороздки. Каково минимальное число необходимых разломов? — *Прим. ред.*

32. Треугольники в круге. Пусть n точек окружности соединены между собой всевозможными способами с помощью прямых линий, никакие три из которых не пересекаются в одной и той же внутренней точке круга. Определите число образованных этими прямыми треугольников, все вершины которых лежат внутри данного круга.



33. Простое умножение. Умножьте 5 746 320 819 на 125.

34. Ряд с повторениями. Чему равен n -й член ряда $-4 + 7 - 4 + 7 - 4 + 7 - \dots$?

35. Упрощение радикалов. Упростите выражение

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$$

36. Зарытые сокровища. Некий пират решил спрятать свои сокровища на берегу необитаемого острова. Рядом находились два валуна A и B , а подальше от берега росли три кокосовые пальмы C_1, C_2, C_3 . Встав у C_1 , пират отложил отрезок C_1A_1 , равный и перпендикулярный отрезку C_1A , направив его от прямой C_1A в сторону, противоположную той, где был треугольник AC_1B . Аналогичным образом он отложил отрезок C_1B_1 , равный и перпендикулярный отрезку C_1B и направленный также от треугольника AC_1B . Затем он отметил P_1 , точку пересечения AB_1 и BA_1 . Став последовательно в C_2 и C_3 , он отметил подобным образом точки P_2 и P_3 и, наконец, зарыл сокровища в центре круга, описанного вокруг треугольника $P_1P_2P_3$.

Вернувшись через несколько лет на остров, пират обнаружил, что после сильного урагана от кокосовых пальм

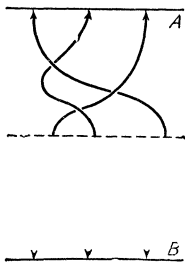
не осталось и следа. Как ему отыскать свои спрятанные сокровища?

37. Сверхурочная работа. Некая компания предложила 350 своим служащим выполнить сверхурочную работу, причем каждому мужчине предлагалось в виде вознаграждения 10 долларов, а каждой женщине — 8 долларов 15 центов. Женщины все согласились с этим предложением, а часть мужчин отказалась. При подсчете выяснилось, что общая сумма вознаграждения не зависит от числа служащих-мужчин. Какова сумма вознаграждения, выплаченного всем женщинам?

38. Произведение. Упростите следующее произведение:

$$(3^{2^0} + 1)(3^{2^1} + 1)(3^{2^2} + 1) \dots (3^{2^n} + 1).$$

39. Распутанные веревки. Три веревки привязаны к трем гвоздикам, вбитым в доску *A*, и переплетены между собой, как показано на рисунке. К их свободным концам требуется привязать новые три веревки, концы которых (их также разрешается переплетать между собой) следует прикрепить к трем гвоздикам на доске *B* таким образом, чтобы, разведя после всех манипуляций доски *A* и *B* в стороны, получить три параллельно натянутые веревки. Как это можно сделать?



40. Разность равна частному. Найдите два числа, разность и частное которых были бы равны 5.

41. Задремавший школьник. Один школьник, проснувшись в конце урока алгебры, услышал лишь обрывок произнесенной учителем фразы: «... скажу только, что все корни действительны и положительны». Взглянув на доску, он увидел там уравнение 20-й степени, заданное на дом, и попытался его быстро записать. Ему удалось

выписать только первые два члена $x^{20} - 20x^{19}$, прежде чем учитель вытер доску; однако он запомнил, что свободный член равнялся $+1$. Не поможете ли вы нашему незадачливому герою решить это уравнение?

42. Ребра многогранника. Покажите, что в трехмерном пространстве ни у какого многогранника не может быть ровно семь ребер, в то время как имеются многогранники, у которых число ребер равно любому другому целому числу, которое больше пяти.

43. Простое сравнение. Покажите, что $63! \equiv 61! \pmod{71}$, то есть что $63! - 61!$ делится на 71.

44. Треугольник оказывается равносторонним. Покажите, что если a, b, c — стороны некоторого треугольника и

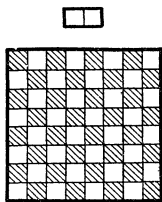
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca,$$

то этот треугольник обязательно равносторонний.

45. Проще, чем кажется. Вычислите корень

$$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \dots}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \dots} \right)^{1/3}.$$

46. Домино и шахматная доска. Если из шахматной доски 8×8 вырезать два квадрата противоположных цветов, то можно ли оставшуюся часть доски полностью покрыть костяшками домино (каждая из костяшек покрывает ровно два квадрата)?



47. Числовое равенство. Покажите, что

$$1110 \cdot 1111 \cdot 1112 \cdot 1113 = (1235431)^2 - 1$$

в любой системе счисления с основанием, большим 5.

48. Книжная серия. Некая серия книг публиковалась с интервалом в семь лет. Когда вышла в свет седьмая книга, сумма всех лет, в которые выходили книги этой серии, равнялась 13524. Когда была опубликована первая книга серии?

49. Три средних значения. Покажите геометрически, что среднее геометрическое G двух чисел a и b равно среднему пропорциональному между средним арифметическим A и средним гармоническим H этих же чисел.

50. Конкурс красоты.

— Не скажете ли вы мне по секрету, в каком порядке пять самых красивых девушек заняли первые пять мест в конкурсе красоты, который проводил ваш журнал? — спросил я издательницу. Она, разумеется, отказалась преждевременно разгласить тайну, но пообещала сказать, правильно ли я угадал места.

— Места распределились в порядке $A - B - C - D - E$? — спросил я.

— Однако вы мастер попадать пальцем в небо, — пошутила издательница. — Вы не только не назвали верно места участниц, но и не угадали ни для одной из них соперницу, занявшую непосредственно предшествующее место.

— Тогда, наверное, девушки распределились в порядке $D - A - E - C - B$? — спросил я.

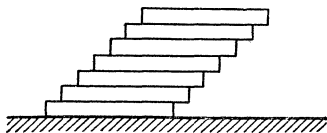
— Вы начинаете исправляться, — осторожно ободрила она меня — Вы правильно указали места для двух участниц, а для двух из них даже верно назвали соперницу, занявшую предшествующее место.

После некоторых подсчетов я сообщил правильный порядок, и издательница взяла с меня слово не разглашать его. Как же распределились места среди пяти участниц конкурса?

51. Уравнение, содержащее суммы. Найдите n , если

$$\frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3} = \frac{199}{242}.$$

52. Стопка из домино. Пусть n гладких костяшек домино, каждая размером $1 \times 2 \times 0,25$ дюйма, положены плашмя друг на друга. На какое максимальное расстояние (в горизонтальной плоскости) можно при этих условиях сдвинуть самую верхнюю костяшку относительно самой нижней, чтобы наша стопка из домино не развалилась?



53. Игральная кость. Игральную кость, на гранях которой изображены цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, подбрасывают до тех пор, пока общая сумма выпавших очков не превзойдет 12. Чему, скорее всего, будет равна эта сумма?

54. Система линейных уравнений.

— У этой системы n линейных уравнений с n неизвестными есть одно любопытное свойство, — сказал Великий Математик.

— О боже! — воскликнула Бедняжка. — Что это за свойство?

— Обрати внимание, — сказал Великий Математик, — что коэффициенты образуют арифметическую прогрессию.

— После ваших объяснений все становится таким ясным, — сказала Бедняжка. — Вы имеете в виду, что эта система похожа на $6x + 9y = 12$ и $15x + 18y = 21$?

— Совершенно верно, — согласился Великий Математик, доставая из футляра свой фагот. — Между нами говоря, у этой системы есть единственное решение. Не можешь ли ты его найти?

— Великий боже! — воскликнула Бедняжка. — Я совершенно озадачена.

А вы?

55. Свойство биссектрисы. Докажите, что биссектриса любого угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

56. Вероятность делимости. Найдите вероятность того, что если цифры 0, 1, 2, ..., 9 поместить в случайном порядке на пустые места в ряд цифр

5 — 383 — 8 — 2 — 936 — 5 — 8 — 203 — 9 — 3 — 76,

то получившееся при этом число разделится на 396.

57. Уравнение без целых решений. Докажите, что уравнение $x^2 - 3y^2 = 17$ не имеет решений в целых числах.

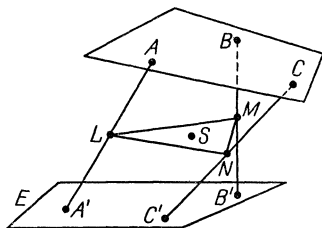
58. Сын профессора математики. Профессор математики выписал на доске многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами и сказал:

— Сегодня у моего сына день рождения. Если его возраст A подставить в данный многочлен вместо x , то

получится равенство $f(A) = A$. Заметьте также, что $f(0) = P$, где P — простое число, большее A .

Сколько лет сыну профессора?

59. Положение в пространстве. Пусть нам дана плоскость E и три неколлинеарные точки A, B, C , рас-



положенные по одну сторону от E и лежащие в плоскости, пересекающейся с E . Возьмем на плоскости E три произвольные точки A', B' и C' . Обозначим через L, M, N соответственно середины отрезков AA', BB', CC' , а через S — центр тяжести треугольника LMN . Пусть теперь точки A', B' и C' перемещаются по плоскости E независимо друг от друга. Где при этом может оказаться точка S ?

60. Метеорологические наблюдения. На метеостанции заметили, что в течение некоторого периода времени, если утром шел дождь, то вечером было ясно, а если дождь шел вечером, то было ясно утром. Всего было 9 дождливых дней, причем 6 раз выпадали ясные вечера и 7 раз было ясным утро. Сколько дней охватывал весь этот период времени?

61. Теорема Штейнера-Лемуса. Докажите, что если биссектрисы двух внутренних углов некоторого треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.

62. Хула-хуп. Представьте себе стройную девушку, которая замерла на мгновение, в то время как вокруг ее талии вращается (без скольжения) обруч хула-хуп. Талия девушки имеет форму окружности, диаметр которой вдвое меньше диаметра хула-хупа. Покажите, что после одного оборота обруча точка на нем, находившаяся первоначально в соприкосновении с талией девушки, проходит расстояние, равное периметру квадрата, описанного вокруг талии,

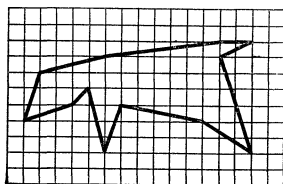
63. Деление круга на восемь частей. Покажите, что если k — произвольное действительное число, то кривая

$$x^4 + kx^3y - 6x^2y^2 - kxy^3 + y^4 = 0$$

делит окружность $x^2 + y^2 = 1$ на восемь равных частей.

64. Арифметическая прогрессия, лишенная степеней. Найдите арифметическую прогрессию, состоящую из целых чисел, с произвольно большим числом членов, ни один из которых не представляет собой точную r -ю степень для $r = 2, 3, \dots, n$.

65. Площадь многоугольника. Найдите площадь многоугольника, изображенного на рисунке.



66.¹ Уравнение в факториалах. Найдите все решения уравнения

$$n!(n-1)! = m!$$

67. Два треугольника. Покажите, что если отрезки a, b, c образуют треугольник, то отрезки $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ ¹ также образуют некоторый треугольник.

68. Наибольший угол в круге. Пусть внутри некоторого круга заданы две точки A и B . Для какой из точек C , расположенных на окружности, угол ACB принимает наибольшее значение?

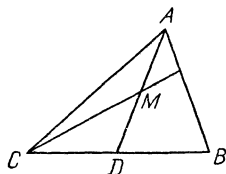
69. Определитель магического квадрата. Пусть S — сумма всех элементов магического квадрата третьего порядка, составленного из целых чисел, а D — определитель этого квадрата, если последний рассматривать как матрицу. Покажите, что D/S — целое число.

70. Неквадратные пятизначные числа. Докажите, что никакой точный квадрат нельзя записать в десятичной системе с помощью ровно пяти различных цифр, одновременно четных или одновременно нечетных.

¹ Здесь и далее курсивом отмечены задачи, решение которых выходит за рамки элементарной математики. — *Прим. ред.*

71. Разрезание сферы. На какое максимальное число конгруэнтных кусков можно разрезать сферу так, чтобы каждая сторона каждого куска представляла собой дугу окружности большого круга, которая меньше четверти такой окружности?

72. Трисекция стороны треугольника. Докажите, что если прямая, проведенная из вершины C некоторого треугольника ABC , делит медиану, опущенную из вер-



шины A , пополам, то она делит сторону AB в отношении $1:2$.

73. Разложение на множители. Разложите на множители $a^{15} + 1$.

74. Любопытное число. Найдите такое положительное число, чтобы $1/5$ его, умноженная на его $1/7$, равнялась этому числу.

75. Два правильных шестиугольника. Найдите, не пользуясь радикалами, отношение площадей двух правильных шестиугольников, один из которых вписан в данную окружность, а другой описан вокруг нее.

76. Общие члены последовательностей. Найдите выражения для общих членов каждой из приведенных ниже последовательностей:

(a) $0, 3, 26, 255, 3124, \dots$;

(b) $1, 2, 12, 288, 34560, \dots$

77. Тепловой поток. Температура трех сторон квадратного металлического листа поддерживается равной 0°C , а температура четвертой стороны поддерживается равной 100°C . Пренебрегая потерями тепла при излучении, найдите температуру центра данного листа.

78. Имеет ли это смысл? Если $1/4$ от 20 равна 6, то чему равна $1/5$ от 10?

79. Тетраэдры из конверта. Не могли бы вы, проведя единственный прямой разрез, сложить из прямоугольного почтового конверта два конгруэнтных тетраэдра.

CHARLES W. TRIGG

2404 LORING STREET
SAN DIEGO
CALIFORNIA 92109



McGraw-Hill Book Company
330 West 42nd Street
New York
N.Y. 10036

80. Криптарифм с «ветчиной». В следующем криптоарифме каждая буква поставлена вместо десятичной цифры (своей для каждой буквы):

$$7(FRY\ HAM) = 6(HAM\ FRY)^1.$$

Определите, какую цифру изображает каждая буква.

81. Покупатели овец. Один фермер умер, оставив в наследство двум сыновьям стадо коров. Сыновья продали это стадо, причем за каждую голову выручили столько долларов, сколько было голов в стаде. На вырученные деньги сыновья купили овец по 10 долларов за штуку и одного ягненка, который обошелся дешевле 10 долларов. Потом они поделили овец и ягненка между собой так, что каждый из братьев получил одинаковое количество животных. Сколько должен заплатить своему брату тот из сыновей, которому достались одни овцы, чтобы каждый наследник получил равную долю?

82. Постоянный объем. Рассмотрим тетраэдр, определяемый двумя отрезками, которые принадлежат скрещивающимся прямым. Докажите, что объем тетраэдра

¹ Fry ham (англ.) — жареная ветчина.

не изменится, если мы сдвинем наши отрезки (не меняя их длин) вдоль соответствующих прямых.

83. Что в периоде? Определите, что стоит в периоде у десятичного разложения дроби $\frac{1}{49}$.

84. Уравнение, содержащее радикалы. Решите уравнение

$$(6x + 28)^{1/3} - (6x - 28)^{1/3} = 2.$$

85. Конкурс. Евклид Парацельсо Бомбаст Умбуджо пытается пополнить свою скудную профессорскую зарплату, участвуя в состязаниях на приз компании по производству мыла. В одном из таких соревнований требовалось определить число путей, двигаясь по которым на данной диаграмме можно было бы прочесть слово MATHEMATICIAN¹: Умбуджо насчитал 1587 пу-

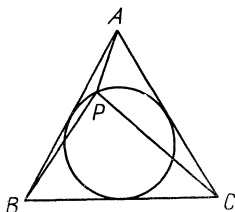
М
 М А М
 М А Т А М
 М А Т Н Т А М
 М А Т Н Е Н Т А М
 М А Т Н Е М Е Н Т А М
 М А Т Н Е М А М Е Н Т А М
 М А Т Н Е М А Т А М Е Н Т А М
 М А Т Н Е М А Т І Т А М Е Н Т А М
 М А Т Н Е М А Т І С І Т А М Е Н Т А М
 М А Т Н Е М А Т І С І С І Т А М Е Н Т А М
 М А Т Н Е М А Т І С І А І С І Т А М Е Н Т А М
 М А Т Н Е М А Т І С І А N A І С І Т А М Е Н Т А М

тей, начинающихся в одной из первых пяти строк. Когда подошло время сообщить результаты, он был весьма озадачен, чтобы не сказать больше. Помогите профессору сосчитать все пути, используя как можно меньше вычислений.

86. Постоянная сумма. Пусть ABC — равносторонний треугольник, а P — произвольная точка вписанной в него

¹ Mathematician (англ.) — математик.

окружности. Докажите, что величина $(PA)^2 + (PB)^2 + (PC)^2$ постоянна.



87. Два числа. Покажите, что если x и y — положительные целые числа и $y > 2$, то $2^x + 1$ не делится на $2^y - 1$.

88. Выбор пары. Из перечисленных ниже пар чисел одна и только одна не удовлетворяет уравнению $187x - 104y = 41$. Какая именно?

1) $x = 3, y = 5$; 2) $x = 107, y = 192$;

3) $x = 211, y = 379$; 4) $x = 314, y = 565$;

5) $x = 419, y = 753$.

89. Пересечение медиан. Докажите, что медианы AA', BB', CC' произвольного треугольника ABC пересекаются в одной точке.

90. Удивительный квадрат. В какой системе счисления число 11111 представляет собой точный квадрат?

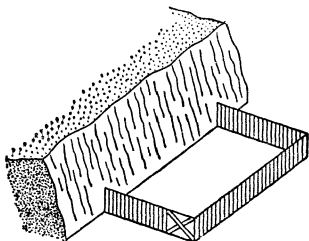
91. Многоугольник вписан в эллипс. Покажите, что в эллипс, оси которого не равны между собой, нельзя вписать правильный многоугольник, содержащий более четырех сторон.

92. Телефонный разговор с Синкьянгом. Один человек ожидал, когда ему предоставят телефонный разговор с Синкьянгом. От нечего делать он стал выписывать число $0,12345\dots$, у которого в десятичном разложении на n -м месте стоит n . Будучи аккуратным, человек быстро производил необходимые выкладки и записывал число в стандартном виде¹. Покажите, что он скорее дождется телефонного разговора, чем выпишет цифру 8.

93. Загон для скота. Владелец одного ранчо решил огородить прямоугольный загон для скота площадью

¹ Имеется в виду, что все промежуточные вычисления проводятся в уме. — *Прим. ред.*

5,445 га. Забор требовалось поставить только с трех сторон, так как с четвертой стороны будущего загона возвышался крутой утес. При каких размерах загона стоимость забора будет минимальной?



94. Система из пяти линейных уравнений. Решите следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z + u = 5 \\ y + z + u + v = 1 \\ z + u + v + x = 2 \\ u + v + x + y = 0 \\ v + x + y + z = 4 \end{cases}$$

95. Почти универсальная теорема. Сформулируйте теорему, справедливую для любого целого числа n , за исключением $n = 5, 17$ и 257 .

96. Трисекция угла. В треугольнике ABC отрезки BD и BE делят на три равные части угол B , а CD и CE делят на три равные части угол C . E — точка, расположенная ближе к стороне BC . Докажите, что угол BDE равен углу EDC .

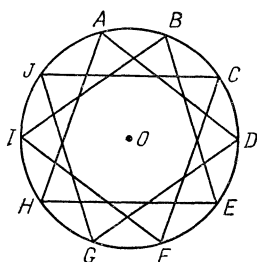
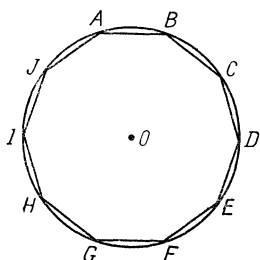
97. Последовательность Фибоначчи. Возьмем последовательность Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 13, \dots$, члены которой F_n (числа Фибоначчи) удовлетворяют соотношению $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, $F_1 = F_2 = 1$. Рассмотрим далее последовательность цифр, стоящих в разряде единиц у чисел Фибоначчи. Будет ли эта последовательность циклической, то есть можно ли получить ее с помощью неограниченного повторения одного и того же конечного набора цифр, как это справедливо, например, в случае последовательности $055055\dots$?

98. Два кубических уравнения. Пусть a, b, c — корни уравнения $x^3 + qx + r = 0$. Напишите уравнение, корнями которого будут числа

$$\frac{b+c}{a^2}, \quad \frac{c+a}{b^2}, \quad \frac{a+b}{c^2}.$$

99. Криптарифм-произведение. Произведение трех последовательных четных чисел равно 87*****8. Найдите эти числа и заполните пробелы в данном произведении.

100. Вписанные десятиугольники. Если окружность разделить на десять равных частей, а затем соединить соседние точки деления хордами, то получится правильный десятиугольник. Соединив хордами каждую точку деления через две точки с третьей, получим равноносторонний звездчатый десятиугольник. Покажите, что разность между длинами сторон этих двух десятиугольников равна радиусу данного круга.



101. Рукопожатия. Каждый человек в мире пожал какое-то количество рук. Докажите, что число людей, пожавших нечетное число рук, четно.

102. Колода карт. Карты в колоде перенумерованы последовательно числами от 1 до 7, а затем тщательно перетасованы. Из колоды случайным образом вынимаются последовательно 5 карт. Какова вероятность того, что номера этих карт будут идти в возрастающем порядке?

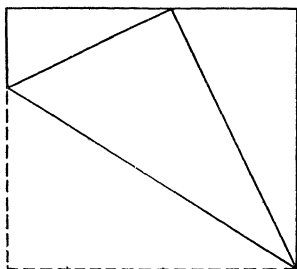
103. Серединный перпендикуляр. Докажите, что перпендикуляр, восстановленный из середины отрезка, соединяющего основания двух высот треугольника, делит третью сторону этого треугольника на две равные части.

104. Условие делимости. При каком целом a многочлен $x^{13} + x + 90$ делится на $x^2 - x + a$?

105. Задача фермера. Некий фермер должен купить 100 голов скота за 100 долларов. Если каждый теленок стоит 10 долларов, каждый ягненок 3 и каждый поросенок 0,5 доллара, то сколько всего телят, ягнят и поросят купит фермер?

106. Разложение на множители. Найдите простые делители числа 10 000 27.

107. Сложенная карта. У прямоугольной карты один угол загибается так, что его вершина попадает на сторону карты. При этом получаются три прямоугольных треугольника, площади которых образуют арифметическую прогрессию. Если площадь наименьшего из этих треугольников равна 3 см², то чему равна площадь наибольшего из них?



108. Уникальный квадрат. Какой квадрат равен произведению четырех последовательных нечетных чисел?

109. Строгое неравенство. Покажите, что $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$.

110. Сумма косинусов. Вычислите сумму

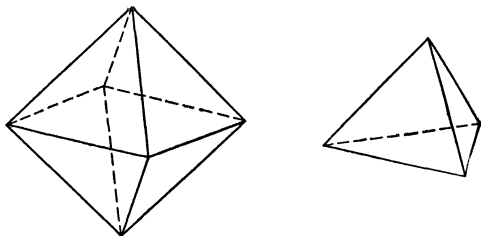
$$\cos 5^\circ + \cos 77^\circ + \cos 149^\circ + \cos 221^\circ + \cos 293^\circ.$$

111. Величина, делящаяся на 9. Покажите, что $2^{10} - 2^8 + 2^6 - 2^4 + 2^2 - 1$ делится на 9.

112. Треугольные числа в девятеричной системе. Покажите, что каждый член бесконечной последовательности 1, 11, 111, 1111, ... представляет собой треугольное число¹, записанное в девятеричной системе счисления (то есть в системе с основанием 9).

¹ Число N называется *треугольным*, если N билиардных шаров равного радиуса можно приложить друг к другу так, что получится правильный треугольник (как в начале игры: в первом ряду 1 шар, во втором — 2, в третьем — 3 и т. д.). — *Прим. ред.*

113. Отношение объемов двух многогранников. У правильных тетраэдра и октаэдра длины ребер равны. Найдите отношение их объемов, не вычисляя объема каждого из данных многогранников.



114. Заполнение пространства. Покажите, что пространство можно заполнить кристаллической структурой, ячейки которой имеют форму правильных октаэдров и тетраэдров. (Под кристаллической структурой мы понимаем здесь такое разбиение пространства на ячейки, которое получается периодическим повторением одной и той же исходной комбинации ячеек.)

115. Простое умножение. Сократите, насколько это возможно, дробь $116\,690\,151/427\,863\,887$.

116. Сумма синусов. Докажите, что в произвольном треугольнике сумма синусов всех его углов не превосходит $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, причем равенство достигается только в случае равностороннего треугольника.

117. Два парома. Два парома ходят между двумя противоположными берегами реки с постоянными скоростями. Достигнув берега, каждый из них тут же начинает двигаться в обратном направлении. Паромы отчалили от противоположных берегов одновременно, встретились впервые в 700 м от одного из берегов, поплыли дальше каждый к соответствующему берегу, затем повернули назад и вновь встретились в 400 м от другого берега. Определите в уме ширину реки.

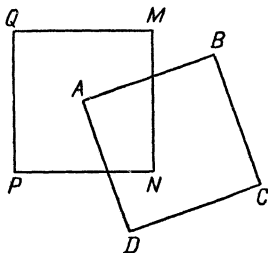
118. За обедом. У Альберта и Берты Джонс пятеро детей: Кристина, Даниель, Элизабет, Фредерик и Грэйс. Отец решил, чтобы в течение некоторого цикла обедов все члены семьи ежедневно рассаживались за круглым столом по-новому, причем за весь такой цикл каждый член семьи должен точно по одному разу посидеть

рядом со всеми остальными. Как отцу удалось осуществить свой план?

119. Сумма цифр. Найдите сумму цифр, которыми записаны все числа данной последовательности: $1, 2, \dots, (10^n - 1)$.

120. Три водителя. Три водителя грузовиков зашли в придорожное кафе. Один водитель купил четыре сандвича, чашку кофе и десять пончиков на общую сумму 1 доллар 69 центов. Второй водитель купил три сандвича, чашку кофе и семь пончиков за 1 доллар 26 центов. Сколько заплатил третий водитель за сандвич, чашку кофе и пончик?

121. Перекрывающиеся квадраты. Вершина A квадрата $ABCD$ расположена в центре квадрата $MNPQ$, а сторона AB отсекает третью часть стороны MN . Найдите площадь общей части двух квадратов, если $AB = MN$.



122. Не раскрывая скобки. Решите следующее уравнение, не раскрывая скобки:

$$(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 5.$$

123. Задача с простыми числами. Произведение некоторого трехзначного числа на некоторое двузначное число имеет вид

$$\begin{array}{r} ppp \\ pp \\ \hline pppp \\ pppp \\ \hline ppppp \end{array}$$

Здесь буква p может означать любую из простых цифр, отличных от единицы (не обязательно одну и ту же).

Восстановите все числа и покажите, что решение данной задачи единственно.

124. Пересечение больших кругов. Известно, что на сфере n больших кругов в общем случае пересекаются в $n(n-1)$ точках. Каким образом следует расставить в этих точках числа $1, 2, \dots, n(n-1)$, чтобы суммы чисел, расположенных на каждой окружности, были равны между собой. (Напомним, что большие круги лежат в плоскостях, проходящих через центр сферы.)

125. Дорогой клуб. Десять человек решили основать клуб. Если бы их было на 5 человек больше, то каждый внес бы на 100 долларов меньше. Сколько денег внес каждый из членов?

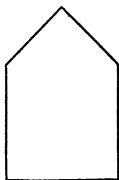
126. Биномиальные коэффициенты. Найдите такое наибольшее значение y , чтобы в разложении некоторого бинома y последовательных коэффициентов относились между собой как $1:2:3:\dots:y$. Определите это разложение и выпишите соответствующие коэффициенты.

127. Число, которое делится на 8640. Покажите, что при любом целом x число

$$x^9 - 6x^7 + 9x^5 - 4x^3$$

делится на 8640.

128. Разрезанный пятиугольник. Пятиугольник состоит из квадрата, к одной стороне которого симметрично присоединены два прямоугольных равнобедренных треугольника. Разрежьте этот пятиугольник на три части так, чтобы из них можно было сложить новый равнобедренный прямоугольный треугольник.



129. Бесконечное произведение. Вычислите следующее бесконечное произведение: $3^{1/3} \cdot 9^{1/9} \cdot 27^{1/27} \dots$

130. Невозможный квадрат. Докажите, что ни при каком целом положительном n число $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ не может быть точным квадратом.

131. Хорды в круге. Некоторая окружность разделена на n равных частей. Каждая точка деления

соединена прямой со всеми другими точками деления, расположенными от нее через m шагов, причем ни одна из полученных хорд не совпадает с диаметром. Докажите, что через любую внутреннюю точку круга могут проходить не более чем две такие хорды.

132. Определители из девяти цифр. Девять положительных цифр можно расположить в виде определителя третьего порядка $9!$ способами. Найдите сумму всех таких определителей.

133. Шесть общих точек. Найдите шесть общих точек у кривых с уравнениями

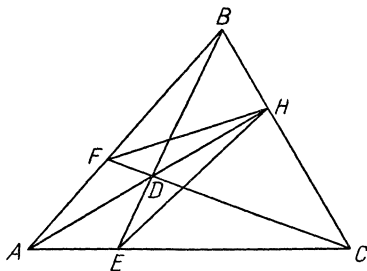
$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 6x + 3y = 0$$

и

$$3x^2 + 7xy + 2y^2 - 7x + y - 6 = 0.$$

134. Перетасованная колода. Докажите, что если у обычной перетасованной колоды карт среди верхних 26 карт находится больше красных карт, чем среди 26 нижних карт имеется черных, то в этой колоде по крайней мере 3 карты одного цвета идут подряд.

135. Равные углы. В остроугольном треугольнике ABC опустим высоту AH . Выбрав на AH произвольную точку D , проведем прямую BD до пересечения со стороной AC в точке E . Проведем далее прямую CD до пересечения со стороной AB в точке F . Докажите, что угол AHE равен углу AHF .



136. Совместная система. При каких значениях k совместна приведенная здесь система?

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + y = 2 \\ x + ku = 3 \end{cases}$$

137. Диофантово уравнение. Докажите, что при любом целом положительном a уравнение $x^2 - y^2 = a^3$ разрешимо в целых числах.

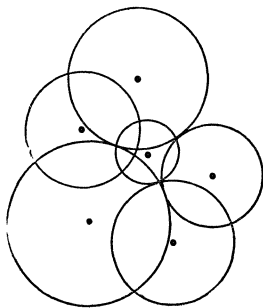
138. Разбиение одного треугольника на два подобных. Покажите, что любой заданный треугольник можно прямыми разрезами разделить на четыре части, из которых затем удастся сложить два треугольника, подобных данному.

139. Передвигая цифры. Некое число, которое записывается с помощью менее чем 30 цифр, начинается (если двигаться слева направо) с цифр 15, то есть имеет вид 15 Если мы умножим его на 5, то результат можно получить, просто передвинув эти две цифры на правый конец; в итоге получится число вида ... 15. Найдите исходное число.

140. Вершины тетраэдра. Покажите, что у любого (не обязательно правильного) тетраэдра есть по крайней мере одна вершина, все плоские углы при которой острые.

141. Счастливые узники. Некий тюремщик, осуществляя частичную амнистию, поступил следующим образом. Сначала он открыл все камеры. Затем запер каждую вторую камеру (в этой тюрьме все камеры были расположены в один ряд). На третьем этапе он повернул ключ в каждой третьей камере (при очередном повороте ключа открытая камера запирается, а закрытая отпирается). Продолжая действовать подобным образом, тюремщик на n -м этапе поворачивал ключ в каждой n -й камере. Закончив на этом, он выпустил всех заключенных, которые оказались в открытых камерах. Укажите номера камер, в которых сидели эти счастливицы.

142. Ни одной общей точки. На плоскости даны 6



кругов, причем центр каждого из них не принадлежит никакому из остальных 5 кругов. Покажите, что у этих 6 кругов нет ни одной общей точки.

143. Устный счет. Умножьте в уме 96 на 104.

144. Уникальная триада. Докажите, что существует только одно множество из трех различных положительных целых чисел, не имеющих общего делителя, большего 1, и обладающих тем свойством, что сумма любых двух таких чисел делится на третье число.

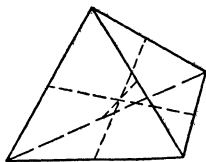
145. Отгороженный угол. Один из углов прямоугольной комнаты отгорожен с помощью двух одинаковых ширм, длина каждой из которых 4 м. Как следует расположить ширмы, чтобы площадь отгороженного участка была максимальной?

146. Взаимно простые числа. Пусть a, b, c — целые числа, не имеющие общего делителя, отличного от 1, и пусть $1/a + 1/b = 1/c$. Покажите, что числа $(a + b)$, $(a - c)$ и $(b - c)$ представляют собой точные квадраты.

147. Диофантова система. Решите в положительных целых числах следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \\ a^2 = 2(b + c) \end{cases}$$

148. Бимедианы тетраэдра. Докажите, что в правильном тетраэдре прямые, соединяющие середины противоположных ребер, пересекаются между собой под прямыми углами.



149. Рассыпанный набор. В типографии набирали строку с умножением вида $\overline{abc} \cdot \overline{bca} \cdot \overline{cab}$ ¹; но набор рассыпался и цифры произведения перемешались. В результате произведение было напечатано в виде 2342355286. Известно, что $a > b > c$ и что в разряде единиц напеча-

¹ \overline{abc} — сокращенное обозначение числа, записываемого цифрами a, b, c ; в десятичной системе $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. — Прим. ред.

тана верная цифра 6. Восстановите истинное значение произведения.

150. Странное число. Если из некоторого числа вычесть 7, а остаток умножить на 7, то получится тот же результат, как если бы мы вычли из данного числа 11, а остаток умножили на 11. Найдите это число.

151. Трое из шести. Докажите, что если выбрать наугад 6 человек, то либо среди них найдутся трое, каждый из которых знаком с остальными двумя, либо — трое, ни один из которых не знаком с остальными.

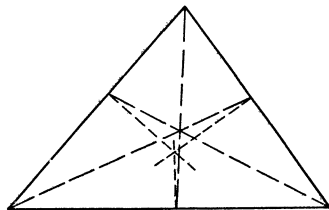
152. Упрощение. Упростите выражение

$$\frac{(4 + \sqrt{15})^{3/2} + (4 - \sqrt{15})^{3/2}}{(6 + \sqrt{35})^{3/2} - (6 - \sqrt{35})^{3/2}}.$$

153. Произведение трех простых чисел. Некоторое число представляет собой произведение трех простых сомножителей, сумма квадратов которых равна 2331. Существует 7560 чисел (включая 1), меньших данного и взаимно простых с ним. Сумма всех делителей данного числа (включая 1 и само число) равна 10560. Найдите это число.

154. Представление рационального числа в виде суммы. Докажите, что любое положительное рациональное число можно представить в виде конечной суммы различных членов гармонического ряда $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \dots, \frac{1}{n}, \dots$.

155. Условие равнобедренности. Докажите, что если в некотором треугольнике перпендикуляры, восстановленные из оснований биссектрис внутренних углов этого треугольника, пересекаются в одной точке, то данный треугольник — равнобедренный.



156. Классификация чисел. Разбейте множество целых чисел $1, 2, 3, \dots, 16$ на два класса по восемь чисел

так, чтобы множество $C_8^2 = 28$ сумм всевозможных пар чисел из первого класса совпадало с множеством соответствующих сумм из второго класса.

157. Избирательные бюллетени. Одному физическому обществу потребовалось провести выборы на три руководящие должности. На каждую из трех должностей претендовало соответственно 3, 4 и 5 кандидатов. Дабы тот номер, под которым каждый кандидат указан в избирательном бюллетене, не оказал влияния на результаты голосования, было решено применить правило, согласно которому в списке кандидатов на каждую должность каждый кандидат должен появиться под каждым номером одинаковое число раз. Какое минимальное число различных бюллетеней требуется для того, чтобы соблюсти это правило?

158. Сравнение дробей. Пусть x и y — положительные числа. Какая из дробей больше:

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} \quad \text{или} \quad \frac{x^2 - y^2}{x - y} ?$$

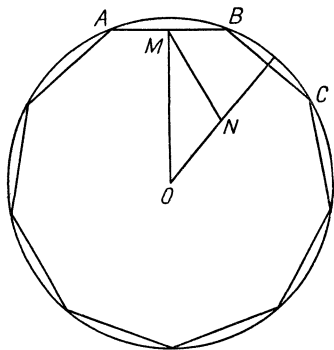
159. Криволинейный треугольник. Найдите радиус круга, вписанного в криволинейный треугольник, у которого две стороны совпадают с катетами данного прямоугольного треугольника ABC , а третья сторона представляет собой полуокружность, построенную на гипотенузе AB , как на диаметре, и расположенную вне треугольника ABC .

160. Пандиагональный гетероквадрат. Мы определяем пандиагональный гетероквадрат как такое расположение первых n^2 положительных целых чисел в виде квадрата, при котором никакие две суммы чисел, расположенных вдоль любой строки, столбца или диагонали (прямой или ломаной), между собой не совпадают¹. Существует ли такое n , при котором эти $4n$ сумм совпадают с последовательными целыми числами?

161. Кратное 2^{m+1} . Докажите, что наименьшее целое число, превышающее $(\sqrt{3} + 1)^{2m}$, делится на 2^{m+1} .

¹ Под ломаной диагональю здесь понимается любое подмножество, содержащее n чисел, которые окажутся расположенными на одной прямой диагонали двух приставленных друг к другу одинаковых квадратов. Подробнее см. М. Гарднер, Математические головоломки и развлечения, М., «Мир», 1971, стр. 260. — *Прим. перев.*

162. В девятиугольнике. Пусть AB и BC — две прилежащие стороны правильного девятиугольника, вписанного в круг с центром O . Пусть, далее, M — середина AB , а N — середина радиуса, перпендикулярного к BC . Покажите, что угол $OMN = 30^\circ$.



163. Уменьшенная доля. Отец дал своим детям на развлечения 6 долларов, которые следовало разделить поровну. Но к компании присоединились еще две юные кузины. Деньги были разделены поровну между всеми детьми, так что каждый ребенок получил на 25 центов меньше, чем предполагалось ранее. Сколько всего было детей?

164. Бесконечный ряд. Найдите сумму бесконечного ряда

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots, \quad |x| < 1.$$

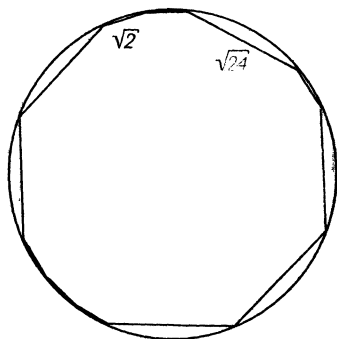
165. Квадратное поле. Квадратное поле огорожено дощатым забором, который сколочен из 10-метровых досок, расположенных горизонтально. Высота забора равна четырем доскам. Известно, что число досок в заборе равно площади поля, выраженной в гектарах. Определите размеры поля.

166. Треугольные числа из нечетных квадратов. Докажите, что каждый нечетный квадрат оканчивается в восьмеричной системе (то есть в системе с основанием 8) на 1; причем если эту единицу отбросить, то оставшаяся часть будет представлять собой некоторое треугольное число.

167. Вписанные круги. У какого из двух треугольников вписанный круг больше: у треугольника со

сторонами 17, 25 и 26 или у треугольника со сторонами 17, 25 и 28?

168. Вписанный двенадцатиугольник. У выпуклого двенадцатиугольника, вписанного в круг, длины каких-то шести сторон равны $\sqrt{2}$, а длина каждой из оставшихся шести сторон равна $\sqrt{24}$. Чему равен радиус круга?



169. Впечатляющее диофантово уравнение. Найдите хотя бы одно решение уравнения $a^3 + b^4 = c^5$ в положительных целых числах.

170. Антифриз. Радиатор автомобиля вместимостью в 21 кварту¹ заполнен 18-процентным спиртовым раствором. Сколько кварт этого раствора нужно отлить из радиатора, чтобы, заменив их тем же количеством 90-процентного раствора, получить в итоге 42-процентный спиртовой раствор?

171. Максимум — минимум без анализа. Найдите максимальное и минимальное значения выражения $\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$, не пользуясь методами математического анализа.

172. Сумма тангенсов, равная произведению. Рассмотрите тангенсы углов в 117° , 118° и 125° . Докажите, что сумма этих тангенсов совпадает с их произведением.

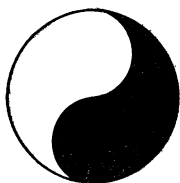
173. Поврежденная рукопись. В поврежденной рукописи удалось разобрать только несколько цифр, осталь-

¹ Для любознательных сообщаем: 1 кварта США = 0,94625 л; 1 британская кварта = 1,1365 л. Как это влияет на ответ задачи? — Прим. ред.

ные цифры заменены звездочкой. Восстановите запись полностью.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc|cccc}
 * & * & * & * & 0 & * & & * & * & \\
 & * & * & & & & & * & * & * & *
 \end{array} \\
 \hline
 & & * & * & * & & & & & & \\
 & & * & * & 1 & & & & & & \\
 \hline
 & & & & * & * & & & & & \\
 & & & & 3 & * & & & & & \\
 \hline
 \end{array}$$

174 Разрежьте инь и ян. Великая монада, или инь и ян¹, представляет собой круг, разделенный на две равные части двумя равными полуокружностями, построенными на противоположных сторонах диаметра. Разделите каждую из этих двух равных частей пополам с помощью единственной линии.



175. Делитель своего палиндрома. В какой системе счисления 792 делится на 297?

176. «Квадратный» папа. Вступив некогда в Калифорнии в законный брак, мой сосед достиг теперь возраста, который представляет собой точный квадрат. Произведение цифр, выражающих возраст соседа, равно возрасту его жены. Возраст их дочери равен сумме цифр в возрасте отца, а возраст их сына равен сумме цифр в возрасте матери. Сколько лет каждому члену семьи?

177. Тетраэдр — сквозь соломинку. Возьмем гибкий тонкостенный цилиндр диаметра d , например соломинку для коктейля. Чему равно ребро e максимального правильного тетраэдра, который можно протолкнуть сквозь эту соломинку?

¹ Инь и ян — символы женского и мужского (а также темного и светлого) начал в древнекитайской философии. — *Прим. перев.*

178. Кратное $(a-1)^2$. Покажите, что $a^{n+1} - n(a-1) - a$ делится на $(a-1)^2$ при любом целом положительном n .

179. Определитель треугольника Паскаля. Паскаль расположил биномиальные коэффициенты в виде следующей таблицы (треугольника Паскаля)¹:

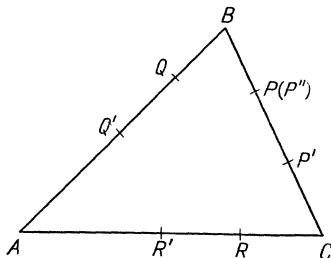
1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...
.

Докажите, что если мы вырежем из этой бесконечной таблицы квадрат любого размера, первая строка (или столбец) которого будет расположена на первой строке (столбце) данной таблицы, то определитель любого такого квадрата будет равен 1.

180. Рациональные координаты. Докажите, что для любого рационального числа x найдется по крайней мере одно рациональное число y , такое, что пара (x, y) будет удовлетворять уравнению

$$2x^3 + 2y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 1 = 0.$$

181. Замкнутая конструкция. Возьмем на стороне BC некоторого треугольника ABC произвольную точку P



¹ Строго говоря, треугольником Паскаля называется любой треугольник, отсекаемый от этой таблицы прямой, проведенной слева вверх под углом 45° (например, через числа 1, 5, 10, 10, ...), вдоль которой стоят коэффициенты одного и того же бинома. — Прим. ред.

и отметим затем на стороне AB точку Q так, чтобы $BQ = BP$. Далее, на CA отметим точку R так, чтобы $AR = AQ$; на BC — точку P' так, чтобы $CP' = CR$; на AB — точку Q' так, чтобы $BQ' = BP'$, и т. д. Докажите, что полученная таким образом конструкция замкнута (то есть что $CP = CP''$) и что все шесть точек P, Q, R, P', Q', R' лежат на одной окружности.

182. Сгруппированные числа. Последовательные нечетные числа сгруппированы следующим образом: 1; (3, 5); (7, 9, 11); (13, 15, 17, 19); Найдите сумму чисел в n -й группе.

183. Шестнадцатиточечная сфера. Может ли у какого-нибудь тетраэдра радиус его шестнадцатиточечной сферы составлять половину радиуса сферы, описанной вокруг этого тетраэдра? (Шестнадцатиточечной называется сфера, проходящая через центры окружностей, описанных около граней данного тетраэдра.)

184. Пересекающиеся окружности. Три точки пересечения трех окружностей, проходящих через одну точку, не совпадающие с этой точкой, лежат на одной прямой. Докажите, что центры этих окружностей и их общая точка пересечения лежат на некоторой новой окружности.

185. Соревнования по гольфу. Профессиональные игроки в гольф решили устроить соревнование между 16 членами своего клуба. В каждой встрече участвуют четыре игрока, причем за время соревнований каждый игрок должен оказаться в одной четверке с каждым из остальных игроков ровно один раз. Как следует распределить участников по четверкам в каждом туре, если в любом туре каждый участник играет один раз?

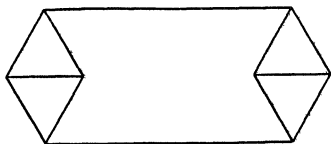
186. Квадратные треугольные числа. Покажите, что существует бесконечно много чисел, каждое из которых одновременно и треугольно, и квадратно.

187. Система с тремя неизвестными. Решите следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 11 \\ xyz = 6 \end{cases}$$

188. «Развернутый» многогранник. У некоторого многогранника удалили все грани, а затем его вершины

и ребра «развернули» на плоскость. (При этом допускалось растяжение и сжатие ребер, а также изменение углов.) В результате получилась конфигурация, изображенная на рисунке. Набросайте примерный вид этого многогранника.



189. Бейсбольные соревнования. Ниже приведены выигрыши и проигрыши бейсбольных команд Национальной лиги США по состоянию на 14 июля 1965 г.

	Выигрыши	Проигрыши		Выигрыши	Проигрыши
Чикаго	41	46	Нью-Йорк	29	56
Цинциннати	49	36	Филадель-	45	39
Хьюстон	39	45	фия		
Лос-Анд-	51	38	Питсбург	44	43
желес			Сент-Луис	41	45
Милуоки	42	40	Сан-Фран-	45	38
			циско		

Расположите команды в порядке убывания процента выигрышей, не вычисляя соответствующих процентов.

190. «Сладкая» покупка. Хозяйка купила некоторое количество сахара за 2 доллара 16 центов. Если бы фунт сахара стоил на 1 цент меньше, то хозяйка могла бы купить за ту же сумму на 3 фунта сахара больше. Сколько фунтов сахара она купила?

191. Пересечение диагоналей. Найдите число точек пересечения диагоналей выпуклого n -угольника.

192. Исчезающие тройки. Пусть сумма членов в каждой из двух заданных числовых троек равна нулю. Покажите, что суммы кубов членов этих троек относятся между собой так же, как и произведения их членов.

193. Условие разложимости. Пусть a и b — два целых числа, каждое из которых взаимно просто с 3 и сумма которых $a + b$ равна $3k$. Покажите, что многочлен $x^a + x^b + 1$ можно разложить на множители¹.

¹ Имеются в виду множители с вещественными коэффициентами. — Прим. перев.

194. Параллельные сопротивления. Если мы соединим параллельно два проводника, сопротивления которых равны соответственно x и y , то сопротивление z такого участка мы получим из соотношения

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \quad x, y, z > 0.$$

Найдите положительные целые числа x, y, z , удовлетворяющие этому соотношению.

195. Кривая минимальной длины. Какая кривая минимальной длины делит равносторонний треугольник на две равновеликие части?



196. Интересный квадрат. Найдите целое девятизначное число вида $a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3$, которое представляло бы собой произведение квадратов четырех различных простых чисел, причем

$$\overline{b_1b_2b_3} = 2(\overline{a_1a_2a_3}) \quad (a_1 \neq 0).$$

197. Серия тестов. Профессор Тестер проводит серию тестов, на основании которых он выставляет испытуемому средний балл. Ответив на последний тест, Джон понял, что если бы за этот последний тест он получил 97 очков, то его средний балл равнялся бы 90. С другой стороны, если бы он получил за последний тест всего 73 очка, то все равно его средний балл составил бы 87. Сколько тестов в серии профессора Тестера?

198. Совпадение точек в четырехугольнике. Покажите, что в произвольном четырехугольнике середина отрезка, соединяющего середины диагоналей, совпадает с точкой пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон данного четырехугольника.

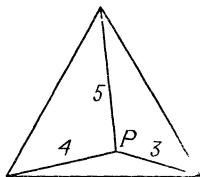
199. Несо кратимые дроби. Пусть n — положительное целое число, большее 2. Покажите, что среди дробей $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ содержится четное число несократимых дробей.

200. Чайный сервиз. Торговец выставил на витрине серебряный чайный сервиз с указанием себестоимости каждого предмета и его розничной цены¹ в долларах:

Сахарница . . .	<i>HKHC</i>	6,72	Сливочник . . .	<i>HCKH</i>	6,00
Поднос	<i>AMSL</i>	50,16	Чайник	<i>SIAB</i>	91,08
Щипцы	<i>NBLT</i>	1,72	Ложки	<i>HMIT</i>	10,52
Весь сервиз			<i>BLCSK</i>	166,20	

Здесь буквами зашифрованы цифры, указывающие себестоимость. Известно, однако, что в каждом случае наценка составляет один и тот же процент от себестоимости данного предмета. Расшифруйте код торговца.

201. Отрезки, определяющие равносторонний треугольник. Три отрезка длиной соответственно 3, 4 и 5 см соединяют внутреннюю точку *P* равностороннего треугольника с его вершинами. Чему равна длина стороны этого треугольника?



202. Инвариантный остаток. Найдите число, которое при делении на него чисел 1108, 1453, 1844 и 2281 давало бы один и тот же остаток.

203. Девять цифр. Найдите девятизначное число, все цифры которого различались бы между собой и не содержали нуля и квадратный корень из которого имел бы вид \overline{ababc} , где $\overline{ab} = c^3$.

204. Разрезание конгруэнтных треугольников. Рассмотрим на плоскости два конгруэнтных треугольника, которые можно получить друг из друга с помощью зеркального отражения. На какие части нужно разрезать эти треугольники для того, чтобы каждый из них можно было перевести в другой, просто перемещая полученные части по плоскости (без отражений)?

205. Посрамленный Умбуджо. Недавно профессор Евклид Парацельсо Бомбаст Умбуджо ходил буквально

¹ Розничная цена = Себестоимость + Наценка. Правильнее далее было бы писать *HK, HC AM, SL* и т. д. — Прим. ред.

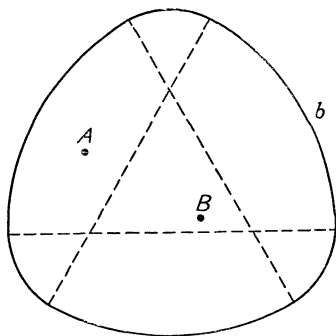
надутым от гордости, поскольку ему удалось угадать корень уравнения четвертой степени, которое получалось после освобождения от радикалов в уравнении

$$x = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/2}.$$

Посрамите профессора и решите данное уравнение, пользуясь уравнениями не выше второй степени.

206. Характеристики мужчин. У 70% из некоторой совокупности мужчин карие глаза; у 75% — темные волосы, у 85% — рост превышает 5 футов 8 дюймов и 90% весят более 140 фунтов. Какой процент мужчин заведомо обладает всеми четырьмя названными характеристиками?

207. Область постоянной ширины. Пусть A и B — внутренние точки некоторой области постоянной ширины 1. Покажите, что существует путь из A в B , который имеет общую точку с границей b данной области и длина которого ≤ 1 .



Областью постоянной ширины называется такая выпуклая область, у которой расстояние между двумя любыми параллельными касательными, проведенными к ее границе (опорными прямыми), постоянно.

208. Сравнение радикалов. Какая из двух величин больше: $\sqrt[8]{8!}$ или $\sqrt[9]{9!}$?

209. «Тетраэдр Фибоначчи». Найдите объем тетраэдра, вершины которого расположены в точках с координатами (F_n, F_{n+1}, F_{n+2}) , $(F_{n+3}, F_{n+4}, F_{n+5})$, $(F_{n+6}, F_{n+7}, F_{n+8})$ и $(F_{n+9}, F_{n+10}, F_{n+11})$, где F_i — i -й член последовательности Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8

210. Правильный октаэдр. Правильный октаэдр с ребром e пересекается плоскостью, параллельной одной из его граней. Найдите периметр и площадь полученного сечения.

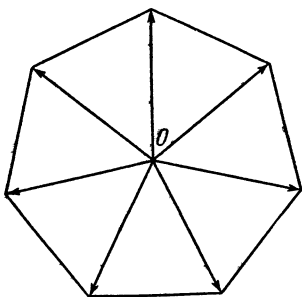
211. Дробное число. Докажем, что выражение

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

не будет целым ни при каком $n > 1$.

212. Три нечетных числа. Покажите, что не существует трех последовательных нечетных чисел, каждое из которых представляло бы собой сумму двух квадратов, отличных от нуля.

213. Нулевая векторная сумма. Докажите, что сумма всех векторов, выходящих из центра правильного n -угольника и заканчивающихся в его вершинах, равна нулю.



214. Скользящий эллипс. Пусть заданы две взаимно перпендикулярные прямые и пусть какой-нибудь эллипс перемещается по плоскости, постоянно касаясь **обеих** прямых. Определите, какую линию опишет при этом центр эллипса.

215. Суперпозиция радикалов. Вычислите, чему равно выражение $\sqrt[3]{11 + 4\sqrt[3]{14 + 10\sqrt[3]{17 + 18\sqrt[3]{\dots}}}}$.

216. Прямоугольные треугольники Фибоначчи. Найдите прямоугольные треугольники, у которых длины сторон выражаются числами Фибоначчи.

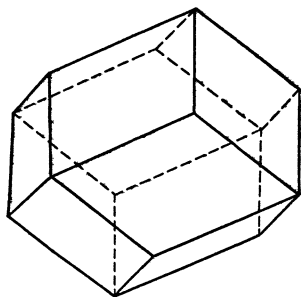
217. Продырявленный шар. Ось цилиндрического отверстия, проделанного в шаре, имеет в длину 10 см и ле-

жит на диаметре этого шара. Чему равен объем оставшейся части шара?

218. На работу и обратно. Если некий человек идет пешком на работу, а обратно едет на транспорте, то всего на дорогу он затрачивает полтора часа. Если же в оба конца он едет на транспорте, то весь путь занимает у него 30 мин. Сколько времени затратит человек на дорогу, если и на работу и обратно пойдет пешком?

219. Система с нечетным основанием. Покажите, что целое число, записанное в системе счисления с нечетным основанием, нечетно в том и только в том случае, если оно содержит нечетное число нечетных цифр.

220. Путешествие по додекаэдру. Изобразим пункты, которые хотим посетить, с помощью вершин некоторого многогранника, а единственно возможные пути, соединяющие эти пункты, — с помощью ребер. Гамильтон рассматривал задачу, где требовалось составить такой маршрут, при котором каждый пункт посещался бы ровно по одному разу без повторений. Эту задачу легко решить для пятиугольного додекаэдра. Докажите, что в случае ромбического додекаэдра она неразрешима.



221. Ромбические додекаэдры. Покажите, что пространство можно заполнить ячейками, имеющими форму ромбических додекаэдров.

222. Соотношение Фибоначчи. Последовательность Фибоначчи $\{F_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 3$ и $F_1 = F_2 = 1$. Покажите, что каждый пятый член этой последовательности делится на 5.

223. Криптарифм с умножением. Произведя обычное умножение «столбиком», некий человек заменил

затем в нем каждую четную цифру буквой E , а каждую нечетную — буквой O ¹. При этом получилось выражение

$$\begin{array}{r} OEE \\ EE \\ \hline EOEE \\ EOE \\ \hline OOOE \end{array}$$

Восстановите данное умножение полностью.

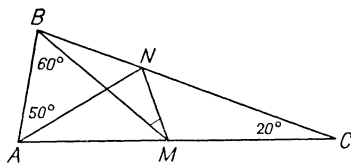
224. Сложенный прямоугольник. Две противоположные вершины прямоугольника со сторонами x и y совмещены. Найдите длину линии сгиба.

225. День рождения. Один человек обнаружил в 1937 г., что в x^2 -м году ему было x лет, и сказал: «Если к числу моих лет прибавить число моих месяцев, то получится квадрат дня моего рождения». Когда родился этот человек?

226. Уравнение, содержащее дроби. Решите уравнение

$$\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}.$$

227. Равнобедренный треугольник. У равнобедренного треугольника ABC угол при вершине $C = 20^\circ$. На боковых сторонах AC и BC выбраны соответственно точки M и N так, что угол $ABM = 60^\circ$, а угол $BAN = 50^\circ$. Докажите, не прибегая к тригонометрии, что угол $BMN = 30^\circ$.



228. Листья на дереве. Выясните, справедливо ли следующее утверждение: если деревьев больше, чем листьев на каждом из них, то по меньшей мере на двух деревьях число листьев одинаково.

¹ Even, odd (англ.) — четный и нечетный соответственно.

229. Кубическое диофантово уравнение. Решите в целых числах уравнение

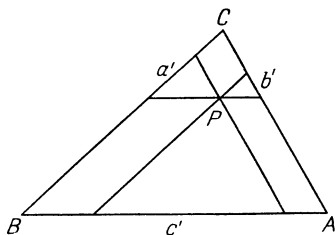
$$x^3 + 1 = y^2.$$

230. «Страны» на сфере. Допустим, что с помощью некоторой триангуляции мы разбили сферу на «страны». Здесь под триангуляцией мы понимаем такое разбиение сферы, при котором каждая получившаяся «страна» граничит (то есть имеет общий участок границы ненулевой длины) ровно с тремя остальными «странами». Вершину графа, состоящего из граничных линий, мы назовем четной или нечетной, если из нее выходит соответственно четное или нечетное число таких линий. Можно ли построить такую триангуляцию сферы, при которой получились бы ровно две нечетные вершины, причем эти вершины оказались бы смежными?

231. Прогулка Генри. Генри отправился на загородную прогулку где-то между 8 и 9 часами утра, когда стрелки его часов были совмещены. К месту назначения он прибыл между 2 и 3 часами дня; при этом стрелки его часов были направлены в прямо противоположные стороны. Сколько длилась прогулка Генри?

232. Степенной ряд. Разложите $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$ в степенной ряд.

233. Параллельные прямые в треугольнике. Через внутреннюю точку P треугольника ABC проведем прямые, параллельные его сторонам. При этом каждая сторона разобьется на три отрезка. Обозначим средние



отрезки сторон a , b и c соответственно через a' , b' и c' . Покажите, что

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 1.$$

234. Представление числа в виде суммы. Представьте число 316 в виде суммы двух слагаемых, одно из которых делилось бы на 13, а другое — на 11.

235. Шестеричный криптоарифм. В приведенном ниже выражении каждая буква заменила некоторую цифру в шестеричной системе счисления

$$FARES = (FEE)^2$$

(одинаковые буквы означают одинаковые цифры). Восстановите исходную запись.

236. Сколько лет Вилли?

— Эту задачу тебе дал учитель? — спросил я у Вилли. — Она выглядит довольно-таки нудной.

— Нет, — ответил Вилли, — я ее сам придумал. — Вот видишь этот многочлен? Мой возраст служит его корнем. Я хочу сказать, что если вместо x подставить столько лет, сколько мне было, когда я последний раз отмечал свой день рождения, то многочлен обратится в нуль.

— Постой-ка, — заметил я, — это, наверное, не слишком трудно сделать. У нашего уравнения — целые коэффициенты, требуется найти целый корень... Попробую-ка я взять $x = 7$... Нет, получается 77.

— Разве я выгляжу таким маленьким? — спросил Вилли.

— Ну ладно, возьмем тогда целое число побольше... Нет, теперь получилось 85, а вовсе не нуль.

— Ты все шутишь, — сказал Вилли. — Тебе же хорошо известно, что я — не такой уж ребенок.

Сколько лет Вилли?

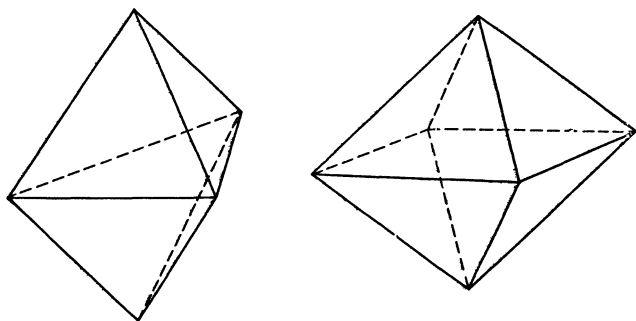
237. Ускоряющаяся частица. Частица, находившаяся в состоянии покоя, начинает двигаться по прямой, проходит какое-то расстояние и останавливается; причем всего она проходит единичное расстояние и затрачивает на это единицу времени. Докажите, что в некоторый момент времени ускорение частицы достигает величины, равной по крайней мере 4 единицам. Мы, разумеется, предполагаем, что как скорость v , так и ускорение a зависят от времени t непрерывно.

238. Покупка марок. Мальчику дали 1 доллар, чтобы он купил на эту сумму почтовых марок. Причем ему нужно было приобрести несколько 2-центовых марок, в 10 раз больше 1-центовых, а на оставшиеся деньги

следовало взять 5-центовые марки. Сколько марок каждого достоинства купил мальчик?

239. Двадцать вопросов. Я хочу предложить вам одну разновидность известной игры в «двадцать вопросов», суть которой такова. Я задумываю натуральное число, а вы должны отгадать его, задав не более двадцати вопросов, на каждый из которых можно ответить только «да» или «нет». Чему равно наибольшее число, задумав которое, я все еще смогу получить от вас правильный ответ после двадцати вопросов?

240. Вписанные сферы. Если грани некоторого гексаэдра представляют собой равносторонние треугольники, конгруэнтные граням правильного октаэдра, то чему равно отношение радиусов сфер, вписанных в эти многогранники?



241. Круги из кругов. Из фанерного круга диаметром 30 см выпилены два меньших круга, диаметры которых равны соответственно 20 и 10 см. Чему равен диаметр наибольшего круга, который можно выпилить из оставшегося куска фанеры?

242. Сумма квадратов биномиальных коэффициентов. Найдите сумму квадратов коэффициентов в разложении $(a + b)^n$.

243. Рождественский криптоарифм. Рождественское поздравление *A MERRY XMAS TO ALL*¹ представляет собой криптоарифм, где каждая буква означает вполне определенную десятичную цифру, а каждое слово

¹ A merry Xmas to all (англ.) — всем счастливого рождества.

заменяет квадратное число. Расшифруйте эту запись, если известно, кроме того, что сумма цифр в каждом слове также совпадает с некоторым квадратом.

244. Центры тяжести. Найдите центры тяжести однородной полуокружности и однородного полукруга.

245. Две совпадающие тройки. Ни одно из трех положительных чисел x, y, z не меньше минимального из трех положительных чисел a, b, c . Ни одно из чисел x, y, z не больше максимального из чисел a, b, c . Известно также, что $x + y + z = a + b + c$ и $xyz = abc$. Покажите, что множество $\{x, y, z\}$ совпадает с множеством $\{a, b, c\}$.

246. Иррациональная сумма. Докажите, что выражение $\sum_{n=1}^{\infty} 6^{\frac{2-3n-n^2}{2}}$ иррационально.

247. Шесть экзаменуемых студентов. Предположим, что во время экзамена шесть студентов сидят на одной скамейке, по обе стороны которой расположены проходы. Они заканчивают экзамен в случайном порядке и тут же уходят. Какова вероятность того, что кому-то из студентов придется побеспокоить кого-нибудь из своих оставшихся пяти товарищей для того, чтобы добраться до прохода?

248. Построение с помощью циркуля. Разделите окружность на четыре равные части, используя только циркуль.

249. Премияльный фонд. В некотором учреждении имелся премияльный фонд. Его собирались распределить таким образом, чтобы каждый служащий этого учреждения получил по 50 долларов. Но при этом, как выяснилось, последнему в списке служащему досталось бы только 45 долларов. Тогда, дабы соблюсти справедливость, было решено выдать каждому служащему 45 долларов; при этом остались нерозданными 95 долларов, которые пошли в фонд будущего года. Какова сумма первоначального фонда?

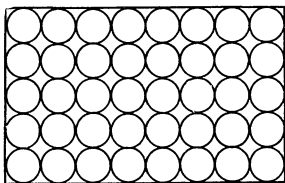
250. Жалование придворного математика. Однажды придворный математик получил сразу все свое годовое жалование серебряными талерами, из которых он сложил девять кучек, составивших в совокупности магический квадрат. Король, увидев это, восхитился, но за-

метил с сожалением, что ни в одной из кучек число монет не равно простому числу.

— Если бы у меня было на девять монет больше, — сказал математик, — то, добавив по монете в каждую кучку, я получил бы магический квадрат, состоящий только из простых чисел.

Король прикинул и убедился, что это действительно так. Он уже собрался было выдать математику еще 9 талеров, как королевский шут, неожиданно воскликнув: «Постойте!», изъял из каждой кучки по одной монете, и все убедились, что получился новый магический квадрат, содержащий только простые числа. Так шут сэкономил королю 9 талеров. Чему равно годовое жалование придворного математика?

251. Упаковка цилиндров. Сорок цилиндров диаметра 1 см и одинаковой высоты плотно разместили в ящике в 5 рядов по 8 цилиндров в каждом так, чтобы они не «болтались» во время перевозки. Сколько цилиндров нужно удалить из ящика, чтобы, передвинув оставшиеся в нем цилиндры и добавив в конце вынутые цилиндры и еще один цилиндр, упаковать в этом ящике 41 цилиндр того же размера? Будут ли цилиндры «болтаться» в этом случае?



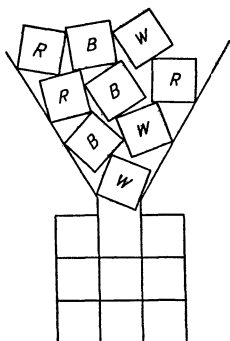
252. Катет прямоугольного треугольника. Покажите, что в прямоугольном треугольнике, стороны которого выражаются целыми числами, один из катетов кратен 3.

253. Степени двойки. Вычислите сумму

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n.$$

254. Цветные квадратики. Сколькими способами 9 равных квадратиков (3 красных, 3 белых и 3 голубых) можно расположить в виде квадрата 3×3 так, чтобы

в каждой строке и в каждом столбце встречались квадратики всех цветов? ¹



255. Разделенный параллелограмм. Точка E выбрана на стороне BC , а точка F — на стороне AD параллелограмма $ABCD$; AE пересекается с BF в точке G , а ED пересекается с CF в точке H . Докажите, что прямая GH делит параллелограмм на две равные части.

256. Квадраты палиндромов. Некоторый квадрат записывается в шестеричной системе счисления с помощью 5 различных ненулевых цифр. Если цифру, стоящую в разряде единиц, перенести из конца этого числа в начало, то квадратный корень из полученного числа совпадает с квадратным корнем исходного числа, записанным в обратном порядке. Найдите исходное число.

257. Подозрительная сумма. Пусть a и b — целые числа. Может ли сумма $a/b + b/a$ быть целой?

258. Прочен ли квадрат? Можно ли из 18 костей домино 2×1 сложить прочный квадрат? Мы назовем квадрат прочным, если ни одна прямая линия (отличная, разумеется, от границ квадрата), образованная краями домино, не соединяет противоположные стороны этого квадрата ².

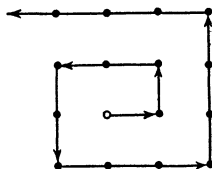
259. Взаимно простые числа. В каких системах счисления числа 35 и 58 взаимно просты?

¹ Расположения, которые можно перевести друг в друга поворотом всего квадрата, различными не считаются. — *Прим. ред.*

² Если вместо квадрата из домино строить стенку из кирпичей, то подобное требование необходимо непременно соблюдать, иначе стенка не будет прочной. — *Прим. ред.*

260. Пять целых чисел. Существуют ли 5 последовательных целых чисел, таких, чтобы сумма первых четырех из них, возведенных в четвертую степень, равнялась четвертой степени пятого числа?

261. Ломаный путь на решетке. Пусть дана решетка, содержащая $N \times N$ узлов. Покажите, что на этой решетке существует ломаный путь, проходящий через все N^2 узлов и состоящий из $2N - 2$ отрезков. (Путь, изображенный на рисунке, содержит $2N - 1$ отрезок.)



262. Разыскиваются целые решения. Найдите все решения в целых числах уравнения

$$y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x.$$

263. Составное число. Пусть p_1 и p_2 — два последовательных нечетных простых числа, так что $p_1 + p_2 = 2q$. Покажите, что q — составное число.

264. Система из четырех линейных уравнений. Решите следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 7y + 3v + 5u = 16 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 4y + 6v + 2u = -16 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 6y + 4v + 8u = 16 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 3y + 7v + u = -16 & (4) \end{cases}$$

265. Свойство четырехугольника. Некоторый четырехугольник площади Q разделен своими диагоналями на 4 треугольника, площади которых равны соответственно A , B , C и D . Покажите, что

$$A \cdot B \cdot C \cdot D = \frac{(A + B)^2 (B + C)^2 (C + D)^2 (D + A)^2}{Q^4}.$$

266. Когда деление точно. При каком положительном целом n величина $n^4 + n^2$ разделится без остатка на $2n + 1$?

267. Сомнительное равенство. Утверждение « $342=97$ » можно сделать справедливым, вставив между цифрами несколько алгебраических знаков, например $(-3+4) \cdot 2 = 9-7$. Можно ли придать смысл этому равенству, не вставляя никаких знаков?

268. Разрезанный двенадцатиугольник. Разрежьте правильный двенадцатиугольник на квадраты и равно-сторонние треугольники.

Пусть P_1, P_2, \dots, P_{12} — последовательные вершины правильного двенадцатиугольника. Что можно сказать о пересечении диагоналей P_1P_9, P_2P_{11} и P_4P_{12} ?

269. Ни одного вещественного корня. Покажите, что уравнение

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0$$

не имеет вещественных корней.

270. Невозможный куб. Докажите, что ни в одной системе счисления трехзначное число \overline{aaa} не может удовлетворять соотношению $\overline{aaa} = a^3$.

271. Диофантова система¹. Докажите, что система

$$\begin{cases} a + b + c = x + y \\ a^3 + b^3 + c^3 = x^3 + y^3 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах, обладающих тем свойством, что a, b, c образуют арифметическую прогрессию.

272. Вычисление суммы. Пусть n — фиксированное положительное число. Положим $x_0 = \frac{1}{n}$ и $x_j = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{j-1} x_i$

для $j = 1, 2, \dots, n-1$. Вычислите сумму $\sum_{j=0}^{n-1} x_j$.

273. Неравенство в треугольнике. Пусть задан остро-угольный треугольник ABC . Выберем внутри него произвольную точку P . Покажите, что $PA + PB + PC \geq \frac{2}{3} \times (\text{периметр треугольника, образованного точками касания вписанной в } ABC \text{ окружности со сторонами } ABC)$.

¹ Задачи 271—393 в оригинале книги Ч. Тригга отсутствуют. — Прим. ред.

274. Упаковка квадратов. Пусть дан набор квадратов, общая площадь которых равна 1. Покажите, что их можно уложить внутри квадрата со стороной, равной $\sqrt{2}$, так чтобы они не перекрывались. (Для квадрата со стороной $< \sqrt{2}$ это утверждение несправедливо.)

275. Максимальное число. Пусть дано множество различных комплексных чисел z_i , $i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющих неравенству

$$\min_{i \neq j} |z_i - z_j| \geq \max_i |z_i|.$$

Найдите максимальное возможное n и для этого n все множества, удовлетворяющие условию задачи.

276. Одна немультпликативная функция. При любом натуральном n обозначим через $r_s(n)$ число решений уравнения

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 = n$$

в целых числах x_1, x_2, \dots, x_n . Положим далее $f_s = (2s)^{-1} r_s(n)$. Известно, что при $s = 1, 2, 4, 8$ функция f_s мультипликативна, то есть для любой пары взаимно простых натуральных чисел m и n выполняется равенство $f_s(mn) = f_s(m)f_s(n)$. Докажите, что f_s не является мультипликативной ни при каком другом значении s .

277. Комбинаторная задача. Найдите количество упорядоченных наборов (a_1, a_2, \dots, a_n) из n натуральных чисел, в которых

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n; \quad a_i \leq i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

278. Еще неравенство в треугольнике. Пусть биссектрисы внутренних углов треугольника T равны соответственно $\beta_a, \beta_b, \beta_c$, его медианы — m_a, m_b, m_c , а радиусы его вписанной и описанной окружностей — r и R . Докажите, что

$$\beta_a^6 + \beta_b^6 + \beta_c^6 \leq p^4(p^2 - 12rR) \leq m_a^6 + m_b^6 + m_c^6,$$

где p — полупериметр данного треугольника T , и что равенство достигается в том и только том случае, если треугольник T — равносторонний.

279. Последовательность составных чисел. Докажите, что для любого натурального n существует множество

из n составных чисел, образующих арифметическую прогрессию, и таких, что все эти числа попарно взаимно просты.

280. Что за формула? Найдите формулу для общего члена последовательности $\{x_n\}$, определяемой рекуррентно:

$$x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2}), \quad n \geq 4, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2.$$

281. Точки на отрезке. Пусть $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ — точки, которые делят единичную окружность на n частей (не обязательно равных). Докажите или опровергните следующее утверждение: существует такое целое составное число m , что в каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$ содержится по крайней мере одна несократимая дробь вида $\frac{l}{m}$.

282. Условие, определяющее параболу. Пусть на графике нелинейной функции $f(x)$ заданы точки P_i ($i=0, 1, \dots, n$). Обозначим через m_i угловой коэффициент прямой, соединяющей точки P_i и P_{i+1} (мы полагаем $P_{n+1} = P_0$). Пусть далее $f(x)$ — функция, определенная при всех вещественных x и не равная тождественно константе. Докажите, что $f(x)$ является квадратным трехчленом, а ее график будет параболой в том и только том случае, если на этом графике найдется такая точка P_0 , что для любых других n точек P_1, \dots, P_n того же графика будет выполняться соотношение

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i m_i = 0.$$

283. Полный квадрат. Найдите все целые числа x, y, z , при которых величина $4^x + 4^y + 4^z$ представляет собой полный квадрат.

284. Суммирование. Пусть $n \geq 2$ — произвольное целое число. Докажите, что $\sum \frac{1}{pq} = \frac{1}{2}$, где суммирование проводится по всем целым p, q , взаимно простым между собой и таким, что $0 < p < q \leq n$; $p + q > n$.

285. Несуществующий треугольник Умбуджо. С характерным для него упорством профессор Евклид Парацельсо Бомбаст Умбуджо пытается доказать следующую

щую теорему: если в треугольнике ABC ортоцентр¹ H , центр I вписанной и центр O описанной окружностей образуют равносторонний треугольник, то

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}.$$

Прекратите мучения профессора, показав, что, во-первых, треугольник HIO не может быть равносторонним и, во-вторых, что если выполняется соотношение $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$, то треугольника HIO вообще не существует.

286. Обобщенные числа Ферма. Пусть k — ненулевое целое число. Покажите, что числа $(2k)^{2^n} + 1$, где $n = 1, 2, \dots$, взаимно просты.

287. Синус от косинуса. Докажите, что на интервале $(0, \frac{1}{2}\pi)$ существует единственная пара чисел $c < d$, таких, что

$$\sin \cos c = c, \quad \cos \sin d = d.$$

288. Нуль многочлена. Пусть $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, где $1 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$. Пусть, далее, λ — комплексный корень f , такой, что $|\lambda| \geq 1$. Докажите, что λ равен некоторому корню из 1*.

289. Замечательное число. Найдите такое число, чтобы его дробная часть, его целая часть и оно само образовывали геометрическую прогрессию*.

290. Числа, кратные 27. Покажите, что числа $2^{5n+1} + 5^{n+2}$ делятся на 27 при $n = 0, 1, 2, \dots$.

291. Число, не равное сумме квадратов. Докажите, что число 3^k нельзя представить в виде суммы двух целых положительных квадратов.

292. Еще одно неравенство в треугольнике. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC выполняется неравенство

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} \geq 4,$$

причем равенство достигается только в случае равностороннего треугольника.

¹ Точка пересечения высот. — Прим. ред.

293. «Арифметика планет». Решите следующий крип-
тарифм:

$$\begin{array}{r} THE \\ EARTH \\ VENUS \\ SATURN \\ URANUS \\ \hline NEPTUNE \end{array}$$

294. Интересное уравнение. Пусть задано уравнение $y^x = x^y$. Ответьте на следующие вопросы:

а. Что представляет собой множество положительных чисел x , для каждого из которых единственным положительным решением y данного уравнения является тривиальное решение $y = x$?

б. Если мы рассмотрим те значения x , для которых существуют нетривиальные решения y данного уравнения, то сколько таких нетривиальных решений при каждом x ?

в. Если мы случайно выберем некоторое значение x из интервала $(0, e)$, то какова вероятность того, что соответствующее нетривиальное решение y будет лежать в том же интервале?

295. Тригонометрическое неравенство. Докажите, что для любого множества вещественных чисел $\{T_i\}$, где $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\sum_{k, j=1}^n \cos(T_k - T_j) \geq 0.$$

296. Подобные ромбы. Докажите, что все ромбы, вписанные в данный прямоугольник, подобны.

297. Рациональное число. Образует число $x = x_0, x_1 x_2 x_3 \dots$ в десятичной системе следующим образом. Пусть $x_0 = 1$, а x_n представляет собой наименьший положительный остаток, который получается при делении $x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}$ на 9. Покажите, что x рационально.

298. Могут или нет? Могут ли величины $\sqrt{\sin \theta}$ и $\sqrt{\cos \theta}$ одновременно принимать рациональные значения для какого-нибудь θ из интервала $(0, \pi/2)$?

299. Одни единицы. Может ли натуральное число, которое в десятичной системе записывается с помощью $6k - 1$ единиц, быть простым?

300. Вписанные многоугольники. Квадрат и треугольник равной площади вписаны в некоторый полукруг, причем одна из сторон треугольника совпадает с диаметром этого полукруга. Покажите, что центр окружности, вписанной в данный треугольник, лежит на одной из сторон данного квадрата.

301. Тетраэдрическое неравенство. Пусть n треугольников имеют одинаковые основания и известна сумма всех их боковых сторон. Доказать, что сумма высот этих треугольников максимальна в том случае, когда все треугольники равнобедренны и равны между собой¹.

302. Знакопередающийся ряд. Докажите, что знакопередающийся ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \ln \left(1 + \frac{1}{i} \right)$$

условно сходится, и найдите его сумму.

303. Задача о девяти точках. Пусть в единичном квадрате задано 9 произвольных точек. Покажите, что среди всех треугольников, вершины которых расположены в данных точках, есть по крайней мере один, чья площадь не превосходит $\frac{1}{8}$. Обобщите этот результат.

304. Новое неравенство. Покажите, что для произвольных вещественных чисел $a_i > 0$ и при любых целых $M, P > 0$ выполняется неравенство

$$M \cdot \left(\sum_{i=1}^M a_i^P \right) \leq \left(\sum_{i=1}^M a_i^{P+1} \right) \left(\sum_{i=1}^M a_i^{-1} \right).$$

¹ Это утверждение в оригинале используется как промежуточный этап для отыскания максимального значения величины

$$\lambda(P) = \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_{ij}}{\sum_{1 \leq i \leq 4} p_i},$$

где p_i — расстояние от некоторой внутренней точки P правильного тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ до его вершины A_i , а x_{ij} — расстояние от P до ребра A_iA_j . В связи с ошибкой в последующих рассуждениях эта величина осталась невычисленной. Читатель может считать отыскание максимума $\lambda(P)$ задачей 301а, решение которой мне, впрочем, неизвестно*. — *Прим. ред.*

305. Равнобедренный треугольник. Докажите, что если для углов A, B, C некоторого треугольника выполняется соотношение

$$\operatorname{tg}(A - B) + \operatorname{tg}(B - C) + \operatorname{tg}(C - A) = 0,$$

то этот треугольник равнобедренный.

306. Восьмиугольник — из двух квадратов. Пусть заданы два concentрических квадрата, соответствующие стороны которых параллельны, а площади находятся в отношении $2:1$. Покажите, что если мы через вершины меньшего квадрата проведем отрезки, перпендикулярные соответствующим диагоналям, то эти отрезки вместе со сторонами большего квадрата образуют правильный восьмиугольник.

307. Делимость на 30. Докажите, что при любом целом n выражение $(n^5 - n)$ делится на 30.

308. Простая «игра». В следующем криптоарифме

$$\begin{array}{r} A \\ MATH \\ MAGS \\ MATH \\ \hline GAME \end{array}$$

слово $GAME$ ¹ поставлено вместо некоторого простого числа. Найдите это число.

309. Соотношение между высотами и сторонами. Пусть ABC — остроугольный треугольник. Докажите, что $\frac{1}{2} < \frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} < 1$, где h_a, h_b, h_c — высоты, а a, b, c — стороны данного треугольника.

310. Объем параллелепипеда. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2bc - 2ad & 2bd + 2ac \\ 2bc + 2ad & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2cd - 2ab \\ 2bd - 2ac & 2cd + 2ab & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{vmatrix}$$

¹ GAME (англ.) — игра.

311. Тригонометрический предел. Докажите, что предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} \right)^p$$

существует при $p > 1$ и не существует при $p \leq 1$.

312. Пересечение больших кругов. Докажите, что если на сфере n различных больших кругов пересекаются более чем в двух точках, то они пересекаются по крайней мере в $\frac{3}{2}n$ точках ($n \geq 2$; учитываются всевозможные точки, общие по крайней мере двум из кругов).

313. Хиппи и геометрия. Мистер Хиппи, заядлый искатель правды, слегка задремал на уроке. Проснувшись, он услышал, как учитель геометрии говорил, что, соединив между собой середины сторон произвольного четырехугольника, можно получить параллелограмм. Мистер Хиппи, дабы никто не превзошел его в умении строить гипотезы «на песке», решил, что если на сторонах произвольного четырехугольника выбрать точки, делящие эти стороны на 3 равные части, а затем такие точки соединить между собой, то при этом снова получится параллелограмм. Какова вероятность того, что мистер Хиппи прав?

Докажите, что, кроме середин, не существует других точек, делящих стороны в заданном отношении r и таких, что, соединяя их между собой, мы получаем параллелограмм независимо от длины сторон исходного четырехугольника.

314. Точки в треугольнике. Пусть внутри некоторого треугольника задано конечное число точек. Соединим эти точки между собой и с вершинами треугольника так, чтобы полученные отрезки не пересекались и разбивали весь треугольник на меньшие треугольники. Покажите, что число таких маленьких треугольников всегда нечетно.

315. Хорды в шаре. Пусть в некотором шаре заданы три взаимно перпендикулярные хорды APB , CPD и EPF , проходящие через одну точку. Определите радиус шара, если известно, что $AP = 2a$, $BP = 2b$, $CP = 2c$, $DP = 2d$, $EP = 2e$ и $FP = 2f$.

316. Пирожное с глазурью. Пирожное, сделанное в форме треугольной призмы с очень маленькой высо-

той, покрыто со всех сторон тонким слоем глазури. Как следует разделить это пирожное между 11 приятелями, чтобы при этом каждому досталось одинаковое количество как самого пирожного, так и глазури?

317. Составные значения многочлена. Покажите, что многочлен $4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ при всех натуральных x принимает значения, представляющие собой составные числа.

318. Любопытное произведение. Докажите, что

$$\cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} \dots \cos \frac{7\pi}{15} = \frac{1}{128}.$$

319. Мальчик, девочка и собака. Мальчик ходит со скоростью 4 км/час, девочка — со скоростью 3 км/час, а собака бежит со скоростью 10 км/час. В некоторый момент времени мальчик и девочка начинают двигаться по дороге из одного пункта и в одном направлении, а собака начинает бегать все время от одного из них к другому. Где через час окажется собака и в каком направлении она будет смотреть?

320. Делитель. При каких значениях N число $N^2 - 71$ делится на $7N + 55$?

321. Сферы и куб. Однажды при перевозке потребовалось упаковать сферу диаметром в 30 см в кубический ящик со стороной 32 см. Чтобы сфера не двигалась во время перевозки, в углы ящика пришлось поместить 8 одинаковых маленьких сфер. Чему равен диаметр такой маленькой сферы?

322. Предел суммы. Вычислите, чему равно выражение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!}.$$

323. Интересные числа. Если мы просуммируем величины, обратные всем делителям числа 6, то получим $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$. Найдите два других числа, для которых аналогичная сумма также равна 2.

324. Интересное уравнение. Решите уравнение

$$x^{x+1} + x^x = 1.$$

325. Тетраэдр — из прогрессии. Двенадцать чисел a_i образуют арифметическую прогрессию, так что $a_k +$

$+d = a_{k+1}$. Найдите объем тетраэдра с вершинами в точках (a_1^2, a_2^2, a_3^2) , (a_4^2, a_5^2, a_6^2) , (a_7^2, a_8^2, a_9^2) , $(a_{10}^2, a_{11}^2, a_{12}^2)$.

326. Сильны ли вы в логике? Пусть S и T — некоторые множества. Обозначим через P следующее утверждение: «По крайней мере два элемента множества S содержатся в T ». Известно, что отрицание \bar{P} можно сформулировать в виде: «По крайней мере два элемента из S не содержатся в T ». Какое заключение можно отсюда вывести?

327. Диагонали куба. Хорошо известно, что диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и, пересекаясь, делятся пополам. Справедливы ли аналогичные утверждения для n -мерного куба?

328. Попробуйте силы в комбинаторике. Докажите, что

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} C_n^i C_n^j n^{i-j} j^i = n!$$

329. Еще один криптоарифм. Решите следующий криптоарифм:

$$\begin{array}{r} CHUCK \\ TRIGG \\ TURNS \\ \hline TRICKS \end{array}$$

330. Простые пары. Пусть n — натуральное число, большее 3. Докажите, что существует два нечетных простых числа p_1 и p_2 , таких, что $2n - p_1$ делится на p_2 (случай $2n - p_1 < 0$ не исключается).

331. Предельные точки. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C . Пусть, далее, $P_0 = A$, P_1 — середине BC , P_{2k} — середине AP_{2k-1} и P_{2k+1} — середине BP_{2k} для $k = 1, 2, 3, \dots$. Покажите, что последовательности $\{P_{2k}\}$ и $\{P_{2k+1}\}$ сходятся к точке, делящим гипотенузу на 3 равные части.

332. Свойство медиан. Пусть задан треугольник ABC . Пусть, далее, A' , B' и C' лежат строго внутри отрезков BC , CA и AB , причем AA' , BB' и CC' пересекаются в точке G , а $\frac{AG}{GA'} = \frac{BG}{GB'} = \frac{CG}{GC'}$. Докажите, что AA' , BB' и CC' представляют собой медианы треугольника

ABC. Как изменится данное утверждение, если слова «строго внутри отрезков» заменим словами «на прямых»?

333. Не вычисляя интегралы. Покажите, не вычисляя ни один из следующих интегралов, что

$$2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

334. Оцените погрешность. Можно ли сказать, что e^{2737} приближенно равно $1000!70!270!300!220!140!$? Евклид Парацельсо Бомбаст Умбуджо хочет использовать второе число в качестве приближенного значения для первого.

335. Простые числа и геометрическая прогрессия. Могут ли квадратные корни из трех различных простых чисел быть членами одной и той же геометрической прогрессии?

336. Простые делители. Покажите, что у числа $(p_1 \cdot p_2 \dots p_n + 1)^{2^k} - 1$, где p_1, p_2, \dots, p_n — первые n нечетных простых чисел, есть по крайней мере $n + k$ различных простых делителей.

337. Число решений криптоарифма. Покажите, что у криптоарифма

$$\begin{array}{r} SEND \\ + MORE \\ \hline MONEY \end{array}$$

в системе счисления с основанием b есть ровно C_{b-8}^2 решений.

338. Кубическое уравнение. Покажите, что все целые решения уравнения

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3,$$

где x, y, z, u образуют арифметическую прогрессию, кратны $x = 3, y = 4, z = 5, u = 6$.

339. Положение центра вписанной окружности. Пусть I, O, H — соответственно центры вписанной, описанной окружностей и ортоцентр треугольника ABC , у которого $C > B > A$. Покажите, что точка I обязана лежать внутри треугольника BOH .

340. Иррациональное число. Покажите, что число $\log_e 2$ иррационально.

341. Наибольший общий делитель. Пусть a, m, n — положительные целые числа и n , кроме того, нечетно. Докажите, что наибольший общий делитель чисел $a^n - 1$ и $a^m + 1$ не превосходит 2.

342. Простое вычисление. Пусть $(x + \frac{1}{x})^2 = 3$; выясните, чему равно $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

343. Олимпийский бегун. Мистер Эдмэн Эмдэм, бегун-любитель, очень хотел бы попасть в олимпийскую команду.

$SO : HE = \text{.RANRANRAN} \dots^1$

Каждая буква этого криптоарифма представляет собой вполне определенную ненулевую цифру в девятеричной системе счисления. Найдите единственное решение криптоарифма, меньшее $\frac{1}{2}$ и, следовательно, более похожее на шансы мистера Эдмэна попасть в олимпийскую команду.

Существует ли решение в десятичной системе?

344. Майские жуки. В коробке сидят майские жуки. Среди них n самцов и m самок. Мистер Энтомолог вынимает жуков из коробки в случайном порядке одного за другим, без возвращения до тех пор, пока у него не окажется k самцов, $1 \leq k \leq n$. Пусть x_k — общее число жуков, которых он вынул из коробки. Найдите вероятность, с которой $x_k = x$, где $x = k, k + 1, \dots, k + m$, и определите среднее значение x_k .

345. Гномон-магические квадраты. Квадрат 3×3 мы называем гномон-магическим, если суммы чисел, составляющих квадраты 2×2 , которые остаются после удаления из исходного квадрата одного из четырех «уголков» (гномонов), равны между собой. Покажите, что у гномон-магического квадрата третьего порядка суммы чисел, стоящих на двух диагоналях, равны между собой. Сохраняется ли это свойство для более высоких порядков?

¹ Поэтому он бегал, бегал, бегал... (англ.). Следует иметь в виду, что в правой части криптоарифма стоит так называемая десятичная точка, которая в англоязычных странах заменяет нашу десятичную запятую. Если целая часть числа равна нулю, как это имеет место в данном случае, то она иногда опускается. Так, например, число 0,534 записывается как ,534. — *Прим. перев.*

346. Верно ли неравенство? Пусть x_i — расстояние от некоторой внутренней точки треугольника $A_1A_2A_3$ до стороны, противоположной вершине A_i , $i = 1, 2, 3$, и пусть r — радиус вписанной в этот треугольник окружности. Докажите или опровергните следующее неравенство:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \geq \frac{3}{r}.$$

347. Спички на картоне. Предположим, что у нас есть коробок спичек, длина каждой из которых равна 1. Пусть нам дан также картонный квадрат со стороной длиной в n единиц. Разделим наш квадрат прямыми линиями на n^2 меньших квадратов. Задача состоит в том, чтобы расположить спички на картоне, выполняя три условия:

1) каждая спичка должна покрывать сторону одного из маленьких квадратов;

2) у каждого из маленьких квадратов ровно две стороны должны быть покрыты спичками;

3) спички нельзя помещать на краю картона.

При каких n эта задача имеет решение?

348. Неравенство с интегралами. Пусть при $0 \leq x \leq 1$ определена непрерывная функция $f(x)$, такая, что

$$0 < A \leq f(x) \leq B$$

для всех x из данной области определения. Докажите, что в этом случае

$$AB \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq A + B - \int_0^1 f(x) dx.$$

349. Уравнение без решений. Докажите, что диофантово уравнение $5^x + 2 = 17^y$ не имеет решений.

350. Еще один криптоарифм. Решите следующий криптоарифм:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{cccc} S & I & X & \\ T & W & O & \end{array} \\ \begin{array}{cccc} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{array} \\ \hline T & W & E & L & V & E \end{array}$$

351. «Невидимый» многоугольник. Найдите такую область, ограниченную простым замкнутым многоугольником, чтобы для любых двух сторон данного многоугольника существовала бы внутренняя точка, из которой эти стороны были бы видны. Однако при этом ни из одной внутренней точки не должны быть видны все стороны одновременно.

352. Касающиеся графики. При каком значении a график функции a^x касается графика функции $\log_a x$?

353. Центр эллипса. Покажите, что ни у какого равностороннего треугольника, вписанного в эллипс (с неравными осями) или описанного около него, центр не может совпадать с центром эллипса.

354. Делимость на 120. Предположим, что $a - 1$ и $a + 1$ — простые числа (такая пара называется простыми близнецами), большие 10. Докажите, что $a^3 - 4a$ делится на 120.

355. Диагонали многоугольника. Найдите наибольшее возможное число пересечений диагоналей плоского выпуклого n -угольника.

356. Простой криптоарифм. Каждая буква следующего криптоарифма поставлена вместо вполне определенной десятичной цифры:

$$3(BIDFOR) = 4(FORBID).$$

Восстановите исходную запись.

357. Палка внутри полусферы. Палка длиной d помещена в полусферический чан диаметром d . Пренебрегая толщиной палки и считая, что сила трения отсутствует, определите угол, который палка будет составлять с диаметром в положении равновесия.

358. Построение с помощью циркуля. Пусть заданы две точки A и B , которые служат вершинами квадрата. Найдите с помощью одного циркуля другие две вершины этого квадрата.

359. Среднее арифметическое и среднее гармоническое. В треугольнике со сторонами a , b , c прямая, соединяющая центр тяжести с центром вписанной окружности, перпендикулярна биссектрисе угла, противолежащего стороне c . Покажите, что среднее арифметическое чисел a , b , c равно среднему гармоническому чисел a и b .

360. Многоугольник на шахматной доске. Пусть шахматная доска состоит из квадратов со стороной, равной 4. Пусть, далее, на эту доску бросают правильный $4n$ -угольник «радиуса» 1^1 . Определите вероятность того, что этот многоугольник пересечет сторону какого-либо квадрата.

361. Целые числа, похожие на свои делители. У каких положительных целых чисел вида $p^n - 1$ (p — простое) все их делители имеют тот же вид?

362. Верно или нет? Докажите или опровергните следующее утверждение: комплексное число z удовлетворяет неравенству $|z| - \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}$ в том и только том случае, если z совпадает с произведением чисел ac , таких, что $|\bar{c} - a| \leq 1$.

363. Тригонометрическое тождество. Покажите, что
$$\cos^n \frac{\pi}{n} - \cos^n \frac{2\pi}{n} + \dots + (-1)^{n-1} \cos^n \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

364. Лесенка из двоек. Фиксировав n , рассмотрим «лесенку» из n двоек:



Обозначим через N_n число различных целых чисел, которые можно получить из этой лесенки подходящей и недвусмысленной расстановкой вложенных друг в друга скобок. Например, $N_3 = 1$, $N_4 = 2$. Найдите N_n .

365. Замечательное свойство тройки. Покажите, что если m и n — положительные целые числа, то наименьшая из величин $\sqrt[n]{m}$ и $\sqrt[m]{n}$ не может превосходить $\sqrt[3]{3}$.

366. Степень двойки. Покажите, что если число 2^{-m} записать в виде конечной десятичной дроби, то при этом потребуется ровно m цифр².

¹ То есть единице равен радиус окружности, описанной вокруг этого многоугольника. — *Прим. перев.*

² См. примечание на стр. 71.

367. Чему «равен» Ромни?

Если

$$\frac{N}{O} = .Romney\ Romney\ Romney \dots^1$$

десятичное представление некоторой правильной дроби, где каждая буква обозначает какую-то десятичную цифру, то найдите, чему в этом случае равно слово *Romney* (буквы *N* и *n* обозначают одну и ту же цифру; то же относится к *O* и *o*).

368. Удвоенный палиндром. Не могли бы вы найти число, которое, будучи записанным в десятичной системе, обладает тем свойством, что если записать его цифры в обратном порядке, то получится число в 2 раза больше данного?

369. Катеты-близнецы. Докажите, что длины двух катетов прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами не могут выражаться простыми числами-близнецами.

370. «Промышленный шпионаж». Издатель одного математического журнала сказал как-то своему помощнику:

— Вот криптоарифм, в котором двузначное число умножается само на себя. Вы видите, здесь только дважды записано данное число и конечное произведение; промежуточные выкладки опущены.

Помощник ответил:

— Я уже пытался решить этот криптоарифм, но решение оказалось не единственным. Если бы вы мне сказали, четно или нечетно исходное число, то я, быть может, сообщил бы вам решение.

Опасаясь, что его подслушают, издатель на ухо шепнул своему помощнику ответ на его вопрос. Тогда помощник сказал:

— Я так и думал. Теперь я знаю решение.

К несчастью, агент конкурирующего математического журнала уже успел поставить микрофон в кабинете издателя, и весь разговор был записан. Хотя конкуренты не видели криптоарифма, они смогли его полностью восстановить. А вы сумели бы это сделать?

¹ Нет Ромни, Ромни, Ромни... (англ.) — лозунг противников этого кандидата во время одной из предвыборных кампаний в США. — *Прим. ред.*

371. Циклический четырехугольник. Постройте циклический четырехугольник¹, такой, чтобы каждая его сторона касалась одной из четырех фиксированных окружностей.

372. Деление круга. Четыре прямые на плоскости пересекаются в точке O , причем все восемь углов равны 45° . На эту конфигурацию наложен круг, так, что точка O расположена внутри круга. Образовавшиеся секторы заштрихованы через один. Покажите, что заштрихованные секторы покрывают ровно половину круга.

373. Распиливание куба. В одном математическом журнале появились следующие вопрос и ответ.

Вопрос: «Плотник хочет распилить деревянный куб со стороной в 3 дюйма на 27 кубиков со стороной в 1 дюйм. Он может легко сделать это, произведя 6 распилов и поддерживая при этом кусочки так, чтобы они не распались. Чему равно наименьшее число распилов, если плотнику при распиливании разрешается переставлять кусочки произвольным образом?»

Ответ: «Наименьшее число распилов равно 6, поскольку для отделения внутреннего кубика требуется 6 распилов, по одному на каждую грань.»

Допустим теперь, что внутренний кубик отсутствует. Чему в этом случае равно минимальное число распилов, если в процессе распиливания можно переставлять кусочки произвольным образом?

374. Минимум функции. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = (x + a + b)(x + a - b)(x - a + b)(x - a - b),$$

не пользуясь дифференциальным исчислением.

375. Многочлен и интеграл. Определим величину $T_k(x)$ следующим образом:

$$T_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (x - i).$$

Пусть $P(x)$ — многочлен минимальной степени, обладающий тем свойством, что

$$P(k) = T_k(k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

¹ Четырехугольник называется циклическим, если вокруг него можно описать окружность. — *Прим. перев.*

Покажите, что если мы возьмем два целых числа s и t таких, что $1 \leq s \leq n$ и $1 \leq t \leq n$, то

$$\int_s^t P(x) dx = 0.$$

376. Удивительный треугольник. Найдите прямоугольный треугольник, стороны которого выражались бы целыми числами, причем все 9 цифр, участвующих в записи сторон, различны.

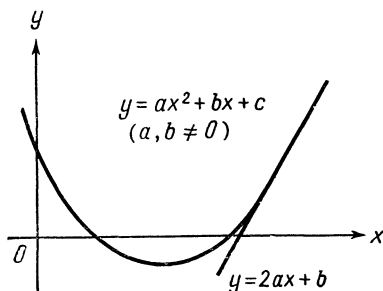
377. Почти золотой прямоугольник. Рассмотрим прямоугольник R со сторонами x и y , $x < y$. Предположим, что мы удалили из R квадрат со стороной x и получили при этом прямоугольник R' . Известно, что если R' окажется подобным R , то R — «золотой прямоугольник»

и $\frac{y}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Предположим, однако, что R' не подобен R . Проведем с R' ту же операцию, что и с R , удалив из R' квадрат со стороной, равной меньшей из сторон R' . В результате получится прямоугольник R'' . При каких условиях R'' подобен R ?

378. Задача с лепешками. Повариха печет лепешки на круглой сковороде, диаметр которой равен 26 единицам. Она кладет три круглых куска теста разных размеров так, что их центры лежат на одной прямой и вместе они покрывают весь диаметр сковороды, но — только половину ее площади. Найдите диаметры трех лепешек, если известно, что они выражаются целыми числами.

379. Орбита космического корабля. Постройте орбиту космического корабля, из любой точки которой Земля и Луна казались бы одинаковыми по величине.

380. Почему это невозможно? Объясните, почему на приведенном рисунке изображена невозможная ситуация.



381. Не принимайте это всерьез. Найдите единственное решение следующего криптоарифма:

$$\begin{array}{r} MERRY \\ XMAS \\ \hline FROM \\ \hline MAXEY \end{array}$$

382. Берите ножницы! Известно, что минимальное число прямолинейных разрезов, необходимых для того, чтобы разрезать данный тупоугольный треугольник на остроугольные треугольники, равно 7. Покажите, как практически следует провести эти разрезы.

383. Рациональные числа и многоугольник. Покажите, что если число сторон выпуклого многоугольника, описанного около некоторой окружности, нечетно, а длина каждой его стороны выражается рациональным числом, то длина каждого из отрезков, на которые стороны разбиваются точками касания, также выражается рациональным числом.

384. Целая величина. Покажите, что при любом положительном целом n число $\frac{(3n)!}{6^n n!}$ также целое.

385. Подобные треугольники. Найдите тупоугольный треугольник, подобный своему высотному треугольнику¹.

386. Какая площадь больше? У двух треугольников стороны соответственно равны $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{b^2 + c^2}$, $\sqrt{c^2 + a^2}$ и $\sqrt{p^2 + q^2}$, $\sqrt{q^2 + r^2}$, $\sqrt{r^2 + p^2}$. У какого из них площадь больше, если известно, кроме того, что $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2$ и $a > p$, $b > q$?

387. Расчетливый перевозчик. Корабль A бросил якорь в 9 милях от ближайшей к нему точки прямолинейного берега O . Корабль B стоит в 3 милях от берега напротив точки берега, расположенной в 6 милях от O . Лодка отчаливает от корабля A , плывет к некоторой точке на берегу, забирает там пассажира и доставляет его на борт B . Одна миля пути обходится владельцу лодки в 1 доллар вне зависимости от того, везет ли он пассажира или идет порожняком. Пассажир за 1 милю пути платит владельцу лодки 2 доллара. Где следует

¹ Так называется треугольник, вершинами которого являются основания высот исходного. — *Прим. перев.*

владельцу лодки назначить встречу с пассажиром, чтобы его чистый доход (на пути от A до берега и далее до B) был максимален?

388. Три салфетки. Одна леди сделала 3 круглые салфетки радиусом соответственно 2, 3 и 10 дюймов. Она положила их на круглый стол так, чтобы каждая салфетка касалась двух остальных и края стола. Чему равен радиус крышки стола?

389. Ученица Декарта. До нас дошла забавная история о том, как Декарт предложил одной из своих титулованных учениц знаменитую задачу Аполлония: построить окружность, касательную к трем заданным окружностям. Дабы выразить свое скрытое презрение к претензиям ученицы прослыть способной, он не предупредил бедную девушку, что ей следует воспользоваться методами синтетической геометрии. Она же, применив его новый аналитический метод, попала в ловушку, сведя задачу к системе трех квадратных уравнений, которую не сумела решить. Покажите, каким образом она могла бы выбраться из этой ловушки.

390. Перестановка цифр. Возьмем некоторое число, записанное в произвольной системе счисления, и переставим его цифры произвольным образом. Докажите, что разность между этими двумя числами делится на число, на единицу меньшее основания данной системы счисления.

391. Принцип Ферма. Примените принцип Ферма к круглому зеркалу. Другими словами, если внутри некоторого круга заданы две точки A и B , то требуется найти на окружности точку P , такую, что величина $AP + PB$ принимает экстремальное значение.

392. Центральная симметрия. Докажите, что если любая прямая, проходящая через фиксированную внутреннюю точку O четырехугольника $ABCD$, разбивает его периметр на 2 части равной длины, то этот четырехугольник — параллелограмм.

393. Запутанное завещание. У одного пожилого джентльмена было 3 замужние дочери: миссис Джонс, миссис Смит и миссис Уайт. У каждой из них было ровно по одному ребенку. Джентльмен умер, оставив все состояние своим дочерям, зятям и внукам, причем, согласно завещанию, все деньги следовало разделить между ними следующим образом.

Каждый из девяти наследников получал некоторое количество конвертов (свое для каждого из них). В каждом конверте находилось столько долларов, сколько конвертов получал данный человек. Доля каждой из женщин превосходила долю ее мужа на ту же сумму, на которую доля ее мужа превосходила долю их ребенка. Хотя ни одна из семей не получала одинаковой суммы, каждая из них получала тем не менее одинаковое число конвертов. Общее число конвертов, полученных миссис Джонс и миссис Смит, равнялось общему числу конвертов, полученных миссис Уайт и мистером Джонсом.

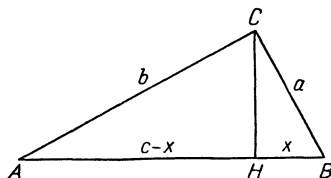
До того как нотариус прочел завещание, каждая из семей была «без гроша в кармане». После того как воля покойного была исполнена, все они стали богатыми людьми, хотя и никто из них не сделался миллионером. Какую сумму получил каждый из девяти наследников?

РЕШЕНИЯ

Для каждой задачи автор приводит наиболее элегантное из ее решений, которое ему удалось найти, вместе с указанием источника. Не можете ли вы улучшить это решение?

1. Если девять писем попали в предназначенные для них конверты, то и с десятым письмом обязательно произойдет то же самое. Поэтому вероятность того, что ровно девять писем попали в свои конверты, равна нулю.
[М. М., 33, 210 (March 1950).]¹

2. В прямоугольном треугольнике ABC опускаем на гипотенузу высоту CH (см. рис.). Треугольники ACB ,



AHC и CHB подобны, значит ^{*2}

$$x : a = a : c \quad \text{и} \quad (c - x) : b = b : c,$$

отсюда

$$a^2 = cx \quad \text{и} \quad b^2 = c^2 - cx.$$

Складывая эти два неравенства, получаем

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

¹ В книге приняты следующие сокращения названий журналов: А. М. М. — *American Mathematical Monthly*; М. М. — *Mathematics Magazine*; N. М. М. — *National Mathematics Magazine*; P. М. Е. J. — *Pi Mu Epsilon Journal*; S. S. М. — *School Science and Mathematics*. — Прим. перев.

² Здесь и далее звездочкой отмечены места, по поводу которых редактор перевода рекомендует обратиться к послесловию. — Прим. ред.

Это и еще 365 других доказательств теоремы Пифагора можно найти в книге E. E. S. Loomis, *The Pythagorean Proposition*, Edwards Brothers, Ann Arbor, Michigan, 1940.

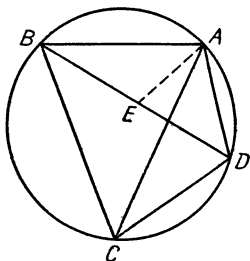
3. Непосредственной проверкой убеждаемся, что четверка чисел (1, 2, 3, 4) удовлетворяет первому и четвертому, а также второму и третьему уравнениям. Поскольку все уравнения системы симметричны относительно x, y, z, w , то остальные 23 перестановки чисел 1, 2, 3, 4 тоже являются решениями данной системы. Но произведение степеней всех четырех уравнений равно $4!$, поэтому других решений у нашей системы нет*.

[М. М., 23, 211 (March 1950).]

4. Отношение числа ответов каждого типа равно обратному отношению соответствующих очков. Следовательно, число правильных ответов равно $\frac{5}{5+8} \cdot 26 = 10$.

[М. М., 31, 237 (March 1958).]

5. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ проведем отрезок AE так, чтобы точка E лежала на диагонали BD и чтобы угол BAE равнялся углу CAD . Тогда треугольник BEA окажется подобным треугольнику CDA , а тре-



угольник AED — подобным треугольнику ABC . Следовательно, $AC : AB = CD : BE$ и $AC : AD = BC : ED$. Отсюда $AC \cdot BE = AB \cdot CD$ и $AC \cdot ED = AD \cdot BC$. Складывая эти два равенства и замечая, что $BE + ED = BD$, получим

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

что и доказывает теорему Птолемея.

[Р. Маккэй, S. S. M., 35, 314 (March 1935).]

Кстати заметим, что, выбрав четырехугольник прямоугольным, мы тут же получим теорему Пифагора.

6. Напишем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} x^9 + y^9 &= (x + y)(x^8 - x^7y + x^6y^2 - \dots + y^8) = \\ &= (x^3 + y^3)(x^6 - x^3y^3 + y^6) = \\ &= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6), \end{aligned}$$

откуда

$$x^8 - x^7y + x^6y^2 + \dots + y^8 = (x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6).$$

[Э. Сейболд, М. М., 34, 434 (November 1961).]

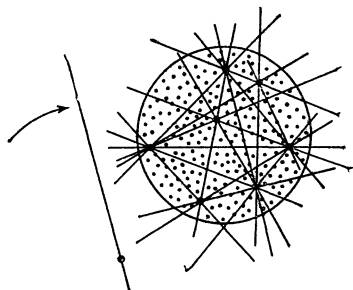
7. Так как $(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = a(a + 1)100 + 25$, мы получаем, что $(85)^2 = 8 \cdot 9 \cdot 100 + 25 = 7225^*$.

[М. М., 24, 273 (May 1951).]

8. Уравнение $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$ можно переписать в виде $(x^2 - 2)^2 = 5x^3 + 7x$. Поскольку при любом отрицательном x левая часть уравнения положительна, а правая отрицательна, исходное уравнение не может иметь отрицательных корней.

[Р. Е. Хортон, М. М., 24, 114 (November 1950).]

9. Рассмотрим все прямые, определяемые всевозможными парами наших отмеченных точек. Возьмем некоторую точку вне данного круга, не лежащую ни на



одной из этих прямых. Проведем через эту точку прямую так, чтобы все отмеченные точки оказались справа от нее. Будем теперь поворачивать полученную прямую вокруг данной точки слева направо. В процессе своего

движения эта прямая будет последовательно проходить через отмеченные точки, причем она не сможет проходить одновременно более чем через одну такую точку. Следовательно, повернув прямую так, чтобы она последовательно прошла ровно через миллион отмеченных точек, и зафиксировав ее в этом положении, мы и получим искомую прямую.

[Г. Уиллс, *М. М.*, 37, 206 (May 1964).]

10. Предположим, что существует самое большое простое число p . Рассмотрим число, на единицу превышающее произведение всех простых чисел, меньших или равных p , то есть

$$Q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p + 1.$$

Заметим теперь, что Q не делится ни на одно простое число, участвующее в написанном выше произведении (поскольку при делении Q на любое из этих чисел остаток будет равен 1). Следовательно, либо Q само простое, либо, если оно составное, разлагается в произведение простых сомножителей, каждый из которых больше p . В любом случае существует простое число, большее p . Значит, среди простых чисел нет наибольшего.

[Евклид, Начала, т. III, М.—Л., Гостехиздат, 1950, кн. IX, предложение 20.]

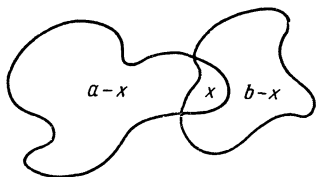
Даже будучи хорошо известным, это красивое классическое доказательство, принадлежащее Евклиду, по всем критериям можно отнести к тем решениям, которые заслуживают названия элегантных.

11. Поскольку $i^2 = -1$, $i^8 = 1$, мы получаем

$$\frac{27 + 8i}{3 + 2i^3} = \frac{27 + 8i^9}{3 + 2i^3} = 9 - 6i^3 + 4i^6 = 5 + 6i.$$

[Дж. М. Хауелл, *М. М.*, 26, 287 (May 1953).]

12. В общем случае, если у нас есть две пересекающиеся области, площади которых равны соответственно a и b , а площадь их общей части равна x , то площади соответствующих неперекрывающихся частей равны $a - x$ и $b - x$. Разность этих площадей равна, следовательно,



$|a - b|$. В нашей задаче эта разность, очевидно, равна $\pi(20)^2 - \pi(15)^2 = 175\pi$.

[М. М., 26, 287 (May 1953).]

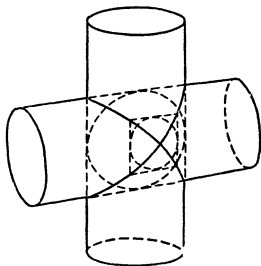
13. После каждой встречи выбывает один из игроков. Поскольку в итоге выбывает $n - 1$ теннисист, то всего следует провести $n - 1$ встречу.

[Ф. Марер, М. М., 23, 278 (May 1950).]

14. Мы имеем

$$\begin{aligned} &1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + (n-1)[(n-1)!] + n(n!) = \\ &= 2(1!) + 3(2!) + 4(3!) + \dots + n[(n-1)!] + (n+1)(n!) - \\ &- 1! - 2! - 3! - \dots - (n-1)! - n! = (n+1)! - 1. \end{aligned}$$

15. Рассмотрим плоскость, проходящую через оси симметрии данных цилиндров. Сечение общей части цилиндров этой плоскостью представляет собой квадрат. Если мы проведем плоскость, параллельную данной, то, как видно из рисунка, в сечении получится тоже квад-



рат, а окружность, вписанная в этот квадрат, будет представлять собой сечение плоскостью сферы, вписанной в общую часть цилиндров. Следовательно, объем общей части наших цилиндров относится к объему впи-

санной сферы, как площадь квадрата к площади вписанного в него круга *. Поэтому

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{16r^3}{3} = \frac{16}{3} \text{ см}^3.$$

[Л. Мозер, М. М., 25, 290 (May 1952).]

Отсюда следует, что общую часть двух данных цилиндров можно разбить на бесконечно малые пирамиды, вершины которых лежат в точке пересечения осей цилиндров, а их основаниями служат элементы цилиндров. Все такие пирамиды имеют высоту, равную единице. Следовательно, площадь поверхности общей части цилиндров равна 16 см^2 .

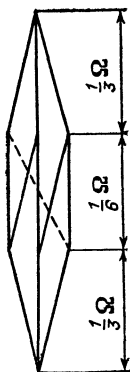
[Дж. Х. Батчарт, М. М., 26, 54 (September 1952).]

16. Выпишем в строчку n единиц с промежутками между ними. Ясно, что существует взаимно-однозначное соответствие между представлениями n в виде суммы и способами заполнения $(n-1)$ промежутков между единицами, куда мы либо ничего не вставляем, либо вставляем знак $+$. Таким образом, с каждым из $(n-1)$ промежутков мы можем поступить двумя различными способами. Следовательно, число различных способов, которыми можно представить целое число в виде суммы целых положительных слагаемых, равно 2^{n-1} .

[У. Мозер, Р. М. Е. J., 1, 186 (November 1951).]

17. Для любого полинома $f(x)$ число $f(1)$ равно сумме коэффициентов. Если эта сумма равна нулю, то $f(x)$ делится на $x-1$. Поскольку $1-2+3+4-6=0$, отсюда следует, что $x=1$ является корнем нашего уравнения независимо от того, в каком порядке скобки заполнены данными числами.

18. Предположим, что ребра нашего куба закреплены в вершинах шарнирно. Приподнимем куб за одну из вершин; ребра провиснут, образовав конструкцию, состоящую из трех последовательно соединенных групп проводников, каждая из которых в свою очередь состоит соответственно из трех, шести и трех параллельно соединенных проводников *. Концами полученной конструкции служат как раз противоположные вершины исход-



ного куба. Следовательно, общее сопротивление между противоположными вершинами куба равно $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ Ом.

19. Ясно, что

$$JOKE = \frac{АННААН}{НА} = 100 + \frac{АН(10001)}{НА}.$$

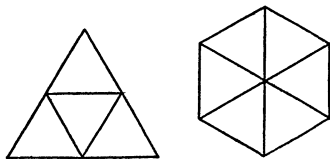
Далее, $10001 = 73 \cdot 137$. Поскольку 10001 — пятизначное число, НА должно делиться на один из его делителей, откуда $НА = 73$. Окончательно получаем, что наше деление имеет вид $377337:5169 = 73$.

20. Так как y — целое число < 2 , $y = 1$ *. Далее, выражая стоимость одной розы в центах, получим

$$\frac{100}{x} - \frac{200}{x+10} = \frac{80}{12}, \quad \text{или} \quad x^2 + 25x - 150 = 0.$$

Единственный положительный корень данного уравнения $x = 5$. Это и есть искомое количество роз, купленных девушкой первоначально.

21. Стороны треугольника и шестиугольника относятся как 2:1. Следовательно, треугольник можно разрезать на четыре, а шестиугольник — на шесть конгру-



энтных между собой треугольников. Поэтому их площади находятся между собой в отношении 2:3.

[М. М., 34, 308 (May 1961).]

22. Если n четно и мы n раз перевернем чашки, оставляя при каждой очередной манипуляции нетронутой новую чашку, то в итоге каждая чашка перевернется $n - 1$ раз и окажется расположенной кверху дном.

Если n нечетно, то будем писать возле каждой правильно стоящей чашки $+1$, возле каждой чашки, перевернутой вверх дном, -1 . Тогда вначале произведение всех этих чисел равно $+1$. Каждый раз переворачивая чашки, мы меняем положение $(n - 1)$, то есть четного числа чашек. Поэтому произведение наших чисел на каждом шаге будет по-прежнему равно $+1$, а в итоге мы хотим получить произведение, равное -1 , что, очевидно, невозможно.

[Е. П. Старк.]

23. Все, что надо знать для решения задачи, — это что $x^n - y^n$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ делится на $x - y$. Пусть величина, которую вычислял профессор, равна $F(n)$. Тогда, поскольку $2141 - 1863 = 1770 - 1492 = 278$, $F(n)$ делится на 278 при любом n . Аналогичным образом $2141 - 1770 = 1863 - 1492 = 371$, числу взаимно простому с 278. Таким образом, $F(n)$ всегда делится на $278 \cdot 371 = 53 \cdot 1946$ и, разумеется, на само число 1946.

[Е. П. Старк, А. М. М., 54, 43 (January 1947).]

24. Если b — период в десятичном представлении числа, обратного к a , то все цифры произведения ab — девятки. Далее, $99 = 9 \cdot 11$, $999 = 3 \cdot 9 \cdot 37$, $9999 = 9 \cdot 11 \cdot 101$, $99999 = 9 \cdot 41 \cdot 271$ и $999999 = 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Последние шесть чисел и являются искомыми наименьшими различными целыми числами, удовлетворяющими заданному условию. Действительно,

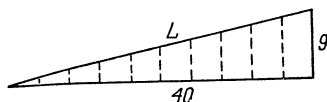
$$\frac{1}{3} = 0,333333 \dots \quad \frac{1}{11} = 0,090909 \dots$$

$$\frac{1}{7} = 0,142857 \dots \quad \frac{1}{13} = 0,076923 \dots$$

$$\frac{1}{9} = 0,111111 \dots \quad \frac{1}{37} = 0,027027 \dots$$

[М. М., 35, 311 (November 1962).]

25. Развернем поверхность цилиндра вместе с проволокой на плоскость. Образующая (9 см), десятикратно повторенная окружность ($10 \cdot 4$ см) и проволока (L) образуют теперь прямоугольный треугольник. Поэтому $L = (81 + 1600)^{1/2} = 41$ см.



Отсюда следует, между прочим, что если только проволоку не намотать вокруг цилиндра так, чтобы она пересекала его образующие под постоянным углом, то с течением времени она может ослабнуть.

[М. М., 23, 278 (May 1950).]

26. Данную дробь можно переписать в виде

$$\left(p + 1 + \frac{1}{p}\right) \left(q + 1 + \frac{1}{q}\right) \left(r + 1 + \frac{1}{r}\right) \left(s + 1 + \frac{1}{s}\right).$$

Далее, сумма двух положительных взаимно-обратных чисел ≥ 2 . Поэтому каждая скобка ≥ 3 , а все произведение ≥ 81 .

[Р. Л. Моентер, S. S. M., 54, 667 (November 1954).]

Отсюда непосредственно следует, что

$$\frac{(a_1^2 + a_1 + 1)(a_2^2 + a_2 + 1) \dots (a_n^2 + a_n + 1)}{a_1 a_2 \dots a_n} \geq 3^n$$

для любых положительных a_i .

27. Изучение таблицы квадратов в десятичной системе показывает, что

1) квадрат может оканчиваться только цифрами 0, 1, 4, 5, 6 или 9;

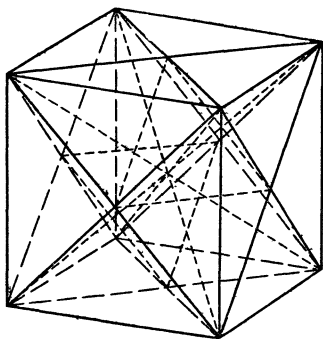
2) если у нашего квадрата в разделе единиц стоит цифра 6, то в разряде десятков у него — нечетная цифра, в противном случае — соответствующая цифра четная.

$N \dots$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	\dots
$N^2 \dots$	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	\dots

Таким образом, все цифры нашего квадрата не могут совпадать между собой, если только они не равны 4. (Квадрат, состоящий из одних нулей, очевидно, не имеет смысла.) Но... $444 = 4(\dots 111)$, а поскольку у числа, за-

ключенного в скобки, в разделе десятков стоит нечетная цифра, мы делаем вывод, что в десятичной системе никакой квадрат не может состоять из одинаковых цифр.

28. Представим директоров с помощью вершин, центра и центров граней некоторого куба. Шестнадцать комитетов изобразим как диагонали этого куба и диагонали его граней, причем каждый директор окажется в четырех комитетах, за исключением тех директоров, которым соответствуют центры граней. Но эти центры слу-



жат вершинами октаэдра, и мы можем в качестве новых комитетов взять перемежающиеся треугольные грани этого октаэдра.

[Дж. Евернден и Р. Спир, А. М. М., 69, 921 (November 1962).]

29. Поскольку вначале у нас n кусков, а в конце остается 1 и поскольку каждый ход уменьшает число кусков на 1, то картинку можно собрать за $n - 1$ ход, причем это число, очевидно, не зависит от способа соединения. Конечно, такое рассуждение остается справедливым лишь при условии, что, однажды соединив вместе какие-либо части, мы больше их не разъединяем.

[Л. Мозер, М. М., 26, 169 (January 1953).]

30. Поскольку $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $(x - 1)f(x) = x^5 - 1$. Далее, $f(x^5) = (x^{20} - 1) + (x^{15} - 1) + (x^{10} - 1) + (x^5 - 1) + 4 + 1$. Но $x^5 - 1$, а значит, и $f(x)$ являются делителями каждой из скобок. Следовательно,

$$f(x^5) = [\text{кратное } f(x)] + 5.$$

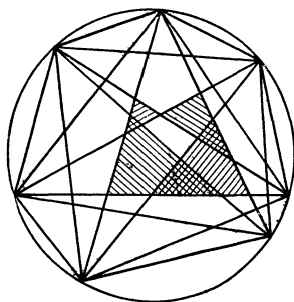
[Н. Аннинг, S. S. M., 54, 576 (October 1954).]

31. Обозначив делитель через d , мы получим, что $8d < 1000$, а $d < 125$. Поскольку $7d < 900$, из первого вычитания следует, что первая цифра частного равна 8. Следовательно, частное равно 80 809. Так как $80\,809d > 10\,000\,000$, мы получаем, что $d > 123$. Значит, $d = 124$, а восстановленное деление имеет вид

$$\begin{array}{r} 10020316 \overline{) 124} \\ \underline{992} \\ 1003 \\ \underline{992} \\ 1116 \\ \underline{1116} \\ 0 \end{array}$$

[У. Б. Карвер, А. М. М., 61, 712 (December 1954).]

32. Каждое множество из шести точек окружности можно разбить на пары одним и только одним способом так, чтобы прямые, соединяющие между собой точки в каждой из пар, образовывали допустимый треуголь-



ник. И обратно: стороны каждого допустимого треугольника ведут к шести точкам на окружности. Следовательно, число допустимых треугольников равно

$$C_n^6 = \frac{n!}{6!(n-6)!}.$$

[Л. Мозер, М. М., 26, 226 (March 1953).]

На рисунке показан случай $n = 7$.

33. Поскольку $125 = 1000 : 8$, $5746320819 \cdot 125 = 5746320819000 : 8 = 718290102375$.

[М. М., 25, 289 (May 1952).]

34. Вычитая $\frac{1}{2}(7-4)=1,5$ из каждого члена ряда
 $-4+7-4+7-4+7-\dots$,

получим

$$-5,5+5,5-5,5+5,5-5,5+5,5-\dots$$

Следовательно, n -й член данного ряда равен $1,5 + 5,5(-1)^n$.

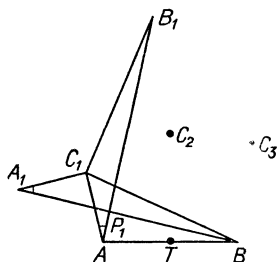
35. Пусть $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=a$, $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=b$, $a+b=x$.
 Тогда

$$\begin{aligned} x^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = \\ &= 4 + 3(\sqrt[3]{-1})x. \end{aligned}$$

Значит, $x^3 + 3x - 4 = 0$, а единственный вещественный корень данного уравнения равен 1.

[К. Адлер, А. М. М., 59, 328 (May 1952).]

36. Так как треугольники AB_1C_1 и A_1BC_1 равны между собой, угол C_1AB_1 равен углу C_1A_1B . Далее, угол AP_1A_1 равен углу AC_1A_1 , который в свою очередь равен 90° . Следовательно, угол $AP_1B = 90^\circ$. Значит, P_1 и ана-



логичным образом P_2, P_3 лежат на окружности, диаметр которой совпадает с AB . Поэтому сокровища зарыты в середине T отрезка AB .

37. Пусть m — общее число мужчин, а x — доля мужчин, отказавшихся от сверхурочной работы. Тогда общая сумма выданного вознаграждения равна

$$\begin{aligned} T &= 8,15(350 - m) + 10(1 - x)m = \\ &= 2852,50 + m(1,85 - 10x), \end{aligned}$$

что не зависит от m только в случае, если $x = 0,185$. Известно, кроме того, что $m < 350$ и что как m , так

и $0,185m$ — целые числа. Значит, $m = 200$. Отсюда следует, что 150 женщин получили вознаграждение на общую сумму 1220 долларов 50 центов.

38. Умножив произведение на $1 = \frac{1}{2}(3^{2^0} - 1)$, мы получим

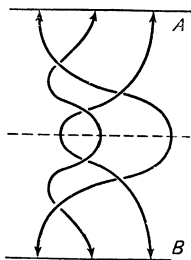
$$\frac{1}{2}(3^{2^{n+1}} - 1), \text{ поскольку } (3^{2^0} - 1)(3^{2^0} + 1) = 3^{2^1} - 1,$$

$$(3^{2^1} - 1)(3^{2^1} + 1) = 3^{2^2} - 1, \text{ и т. д.}$$

В общем случае если мы вместо 3 возьмем любое основание $x > 1$, то наше произведение будет равно $\frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x - 1}$.

[М. М., 38, 124 (March 1965).]

39. Требуемое расположение новых веревок можно получить, отразив зеркально данное расположение отно-



сительно пунктирной линии.

[Н. Кроссман, *P. M. E. J.*, 2, 26 (November 1954).]

40. Поскольку частное двух чисел равно 5, разность между ними в четыре раза больше меньшего из них. Следовательно, меньшее число равно $5/4$, а большее $25/4$.

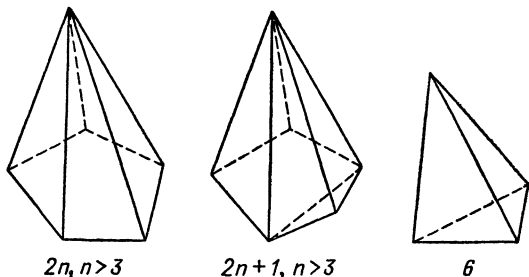
В общем случае если $x - y = \frac{x}{y} = a$, то

$$x = \frac{a^2}{a-1}, \quad \text{а} \quad y = \frac{a}{a-1}.$$

41. Корни положительны; их среднее арифметическое равно $-(-20)/20$, а среднее геометрическое равно $(+1)^{1/20}$. Поскольку оба эти значения совпадают, отсюда следует, что все корни равны 1^* .

[Д. С. Гринстейн, *A. M. M.*, 63, 493 (September 1956).]

42. Пусть $n > 3$. Простой многогранник с $2n$ ребрами представляет собой пирамиду, в основании которой лежит n -угольник. Если n -угольник перегнуть вдоль диагонали так, чтобы он оказался лежащим в двух раз-



личных плоскостях, а затем соединить его вершины прямыми с точкой, не принадлежащей этим плоскостям, то мы получим многогранник с $2n + 1$ ребром.

Каждая вершина многогранника представляет собой также вершину многогранного угла с тремя (по крайней мере) ребрами, а каждое ребро многогранника есть в то же время общее ребро двух многогранных углов. Многогранник с четырьмя вершинами — это тетраэдр; у него *шесть* ребер. У любого другого многогранника число вершин больше или равно пяти. Поэтому у его многогранных углов по крайней мере $5 \cdot 3$ ребер, а у него самого — по крайней мере $(5 \cdot 3)/2 = 7\frac{1}{2}$ ребер. Следовательно, не существует многогранника ровно с семью ребрами.

[Е. П. Старк, А. М. М., 58, 358 (March 1951).]

43. Поскольку

$$63! - 61! = (63 \cdot 62 - 1)(61!) = 5 \cdot 11 \cdot 71(61!),$$

мы получаем $63! \equiv 61! \pmod{71}$.

[М. М., 34, 358 (September 1961).]

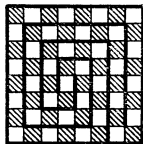
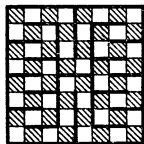
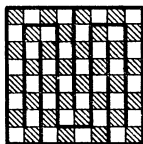
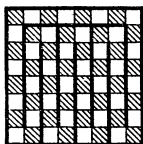
44. Уравнение $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ эквивалентно уравнению $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$. Отсюда заключаем, что $a = b = c$, поскольку каждый член обязан обратиться в нуль.

[М. С. К л а м к и н, М. М., 27, 287 (May 1954).]

$$45. \quad \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \dots}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \dots} \right)^{1/3} = \\ = \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots)}{1 \cdot 3 \cdot 9 (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots)} \right)^{1/3} = \left(\frac{8}{27} \right)^{1/3} = \frac{2}{3}.$$

[М. Беberman, S. S. M., 49, 588 (October 1949).]

46. Оставшуюся часть доски можно полностью покрыть костями домино. Для доказательства надо всего лишь покрыть доску замкнутым путем шириной в одну клеточку. На левом рисунке показан путь, предложенный Ральфом Е. Гомори и приведенный в книге М. Гарднера «Математические досуги» (М., изд-во «Мир», 1972, стр. 265). Три остальных варианта также удовлетворяют всем требованиям.



Цвета квадратов перемежаются вдоль всего пути. Если мы уберем любые два квадрата противоположных цветов, то наш путь разобьется на две не связанные между собой части (или будет состоять из одной части со свободными концами, если мы уберем два соседних квадрата). Поскольку каждая часть содержит четное число квадратов, ее (а значит, и всю доску) можно полностью покрыть костями домино.

47. Это специальный случай алгебраического тождества

$$a(a+b)(a+2b)(a+3b) = (a^2 + 3ab + b^2)^2 - b^4,$$

где $a = r^3 + r^2 + r$ (r — основание системы счисления), а $b = 1$, так что

$$a^2 + 3ab + b^2 = r^6 + 2r^5 + 3r^4 + 5r^3 + 4r^2 + 3r + 1.$$

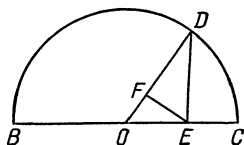
Поскольку ни один коэффициент не превышает 5, равенство, сформулированное в условии, справедливо в любой системе счисления с основанием, большим пяти.

[Е. П. Старк, А. М. М., 51, 590 (December 1944).]

48. Среднее арифметическое лет публикации равно $13524/7 = 1932$, или среднему члену нашей арифметической прогрессии. Первый член этой прогрессии отличается от среднего члена на три разности. Следовательно, первая книга была опубликована в 1932 г. — $3 \cdot 7 = 1911$ г.

[М. М., 34, 372 (September 1961).]

49. На отрезке BC (где $BE = a$, $EC = b$), как на диаметре, построим полуокружность с центром в O . Из точки E восставим перпендикуляр к BC , пересекающий полуокружность в точке D . Проведем отрезок OD и из



точки E опустим на него перпендикуляр EF . Тогда радиус $OD = (a + b)/2 = A$, а $ED = (ab)^{1/2} = G$. Из подобных треугольников OED и EFD находим, что $DF : ED = ED : OD$. Таким образом, $DF = \frac{(ED)^2}{OD} = \frac{2ab}{a + b} = H$. Следовательно, $G^2 = HA$. Более того, $A \geq G \geq H$.

[А. Л. Гесс, S. S. M., 61, 45 (January 1961).]

50. При порядке $D - A - E - C - B$ две участницы, стоящие на верных местах, должны следовать непосредственно друг за другом. В противном случае, поскольку у двух участниц верно названы непосредственные предшественницы (то есть девушки, занявшие непосредственно предшествующее место), были бы правильно указаны места не для двух, а для трех девушек. Это означает, что верно названа одна из пар $D - A$, $A - E$, $E - C$ или $C - B$. Пары $A - E$ и $E - C$ следует отбросить, так как при таких комбинациях у двух участниц нельзя было бы верно назвать непосредственных предшественниц. Если бы верной парой оказалась $D - A$, то порядок должен был бы совпасть либо с $D - A - B - E - C$, либо с $D - A - C - B - E$, и мы

пришли бы к противоречию с комментарием, который дала издательница относительно первой догадки. Следовательно, верно угадана пара $C - B$. Порядок $A - E - D - C - B$ следует отбросить, опять-таки учитывая комментарий к первой догадке. Таким образом, остается единственное возможное распределение мест $E - D - A - C - B$, удовлетворяющее всем условиям.

[Дж. Ф. Литч, А. М. М., 68, 669 (August 1961).]

51. Заметим сначала, что если $a:b = c:d$, то, очевидно, $(a+b):b = (c+d):d$. Применяя такое преобразование к дробям, входящим в наше уравнение, получим

$$\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (2n)^3}{2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)} = \frac{441}{242}.$$

Затем, применяя известную формулу для суммы кубов натуральных чисел¹, получим

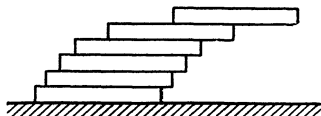
$$\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} : \frac{8n^2(n+1)^2}{4} = \frac{441}{242} = \frac{(21)^2}{2 \cdot (11)^2},$$

$$\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2} = \frac{(21)^2}{(11)^2}.$$

Отсюда ясно, что $n = 10$. (Отрицательный квадратный корень приводит к отрицательному n .)

52*. Если мы поместим стопку из $(k-1)$ прямоугольных параллелепипедов, каждый из которых имеет длину $2x$, на k -й горизонтальный параллелепипед того же вида и будем сдвигать нашу стопку до тех пор, пока ее центр тяжести не окажется на одной вертикали с краем этого k -го параллелепипеда, то центр тяжести *всей* конфигурации будет отстоять по горизонтали от края k -го параллелепипеда на расстояние x/k .

Отсюда следует, что n костяшек домино нашей стопки ($x = 1$ дюйму) можно так сдвинуть между двумя вертикальными параллельными плоскостями, ог-



¹ $1^3 + 2^3 + \dots + m^3 = m^2(m+1)^2/4$. См. примечание к задаче 182. — Прим. перев.

стоящими друг от друга на 1 дюйм, чтобы суммарная длина «выступающих» краев, если двигаться сверху вниз, выражалась как $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$. При этом костяшки образуют полуарку, которая будет находиться в положении равновесия. Данная сумма представляет собой частичную сумму гармонического ряда; а поскольку этот ряд расходится, мы можем, выбрав n достаточно большим, добиться того, чтобы край верхней костяшки отстоял по горизонтали от края нижней костяшки на любое расстояние.

Для того чтобы вся верхняя костяшка зашла за край нижней, n нужно взять по меньшей мере равным 5. В этом случае суммарная длина «выступающих» краев будет равна $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, или приблизительно 2,083 дюйма.

Если мы теперь сдвинем наши костяшки так, чтобы все грани $2 \times 0,25$ были параллельны одной и той же плоскости, а центр тяжести каждой верхней части нашей стопки был расположен над *углом* ближайшей снизу костяшки, то расстояние в горизонтальной плоскости между углами самой верхней и самой нижней костяшек увеличится по сравнению с предыдущим случаем в $\left[1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ раз.

[P. M. E. J., 1, 411 (April 1954).]

53. Рассмотрим предпоследний бросок. После этого броска сумма очков может равняться 12, 11, 10, 9 или 8. Если она равна 12, то после последнего броска итоговая сумма очков может с равными шансами принимать значения 13, 14, 15, 16 или 17. Аналогично если эта сумма равна 11, то итоговая сумма может с равными шансами принимать значения 13, 14, 15 или 16 и т. д. Отсюда ясно, что наиболее вероятное значение итоговой суммы очков равно 13.

[Н. Дж. Файн, А. М. М., 55, 98 (February 1948).]

Если вместо 12 взять любое $N > 3$, то наиболее вероятное значение суммы равно $N + 1^*$.

54. Если $n \leq 3$, то уравнения нашей системы зависимы и, следовательно, ее решение не единственно*. Зна-

чит, $n < 3$. Но, поскольку мы говорим о «системе», $n > 1$. Следовательно, $n = 2$.

Так как наша система имеет вид

$$\begin{aligned} ax + (a + d)y &= a + 2d, \\ (a + 3d)x + (a + 4d)y &= a + 5d, \end{aligned}$$

то

$$x + y = 1 \quad \text{и} \quad x = -1, \quad y = 2.$$

[Д. Ротман, А. М. М., 70, 93 (January 1963).]

На самом деле система двух любых уравнений, принадлежащих семейству

$$(a + 3kd)x + [a + (3k + 1)d]y = a + (3k + 2)d,$$

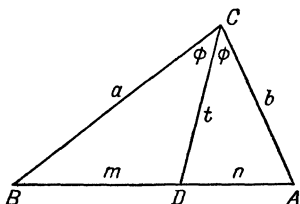
имеет то же самое единственное решение.

55. Отношение площадей тех частей, на которые биссектриса угла $C = 2\varphi$ делит данный треугольник:

$$S_{BCD} : S_{DCA} = \left(\frac{1}{2} at \sin \varphi\right) : \left(\frac{1}{2} bt \sin \varphi\right) = a : b.$$

Но площади двух треугольников с равной высотой пропорциональны их основаниям, следовательно,

$$S_{BCD} : S_{DCA} = m : n = a : b.$$



[Р. П. Гольдберг, М. М., 34, 435 (November 1961).]

56. Число 76, образованное последними двумя цифрами, делится на 4. Разность между 73 (суммой всех цифр, стоящих на четных местах) и $17 + 45$ (суммой всех цифр, стоящих на нечетных местах) делится на 11 независимо от порядка, в котором заполняются пустые места*. Сумма всех цифр, $90 + 45$, делится на 9. Отсюда следует, что наше число делится на $4 \cdot 11 \cdot 9 = 396$. Значит, искомая вероятность равна 1.

[П. Нагара, А. М. М., 58, 700 (December 1951).]

57. Любое целое число x можно записать в виде $3n$ или $3n \pm 1$. Если числа такого вида мы подставим в уравнение $x^2 - 3y^2 = 17$, то получим соответственно

$$3(3n^2 - y^2) = 17 \quad \text{и} \quad 3(3n^2 \pm 2n - y^2) = 16.$$

Поскольку ни 17, ни 16 не делятся на 3, наше уравнение не имеет решений в целых числах.

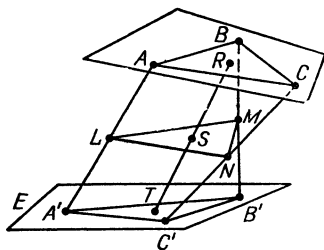
[Е. П. Старк, А. М. М., 52, 580 (December 1945).]

58. Поскольку $f(0) = P$,

$$f(x) = x \cdot q(x) + P \quad \text{и} \quad f(A) = A \cdot q(A) + P = A.$$

Следовательно, P делится на A . Так как $P > A$ и P простое, $A = 1$. Значит, сыну профессора исполнился 1 год. Профессор мог выписать любой многочлен из бесконечного класса таких многочленов, например $x^3 - 3x^2 + 3$.

59. Поместим в каждую из точек A, B, C, A', B', C' по частице единичной массы. Пусть R — центр тяжести тех частиц, которые находятся в точках A, B, C , а T — аналогичный центр тяжести для частиц в точках A', B', C' . Мы можем, далее, считать, что S представляет собой центр тяжести системы их трех частиц (каждая массой 2), помещенных в точках L, M и N . Но с тем же успехом можно считать, что S — это центр тяжести си-



стемы из двух частиц (каждая массой 3), расположенных в точках R и T . Следовательно, S — это середина отрезка RT ; но, поскольку R фиксировано, а T перемещается произвольным образом в плоскости E , точка S

опишет при таком движении некоторую плоскость, параллельную E .

[Д. Педо, А. М. М., 71, 670 (June 1964).]

60. Всего было $\frac{1}{2}(6 + 7 - 9) = 2$ полностью ясных дней, так что рассматриваемый период времени охватывал $9 + 2 = 11$ дней.

[М. М., 34, 244 (March 1961).]

61. Для доказательства воспользуемся известными формулами, выражающими длины биссектрис через стороны треугольника *:

$$\begin{aligned} \frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2} &= \beta_a^2 = \beta_b^2 = \\ &= \frac{ac(a+b+c)(c+a-b)}{(a+c)^2}. \end{aligned}$$

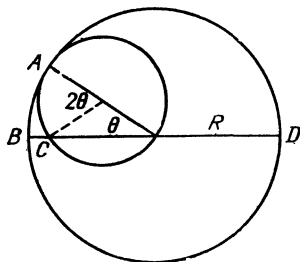
После упрощений мы приходим к

$$c(a+b+c)(a-b)[(a+b)(c^2+ab)+3abc+c^3]=0.$$

Поскольку все сомножители положительны, кроме $a-b$, отсюда следует, что $a=b$.

Этот метод применил Якоб Штейнер где-то около 1844 г.

62. Поскольку движение относительно, мы можем считать обруч неподвижным, а бедную девушку перемещающейся внутри него. Первоначальная точка соприкоснове-



ния на талии пройдет вдоль диаметра обруча дважды, а это и есть требуемое расстояние *.

[Л. Мозер, А. М. М., 66, 918 (December 1959).]

Когда девушка перемещается внутри обруча, первоначальная точка соприкосновения C движется вдоль диаметра BD , поскольку

$$\cup AB = R\theta = \frac{R}{2} 2\theta = \cup AC.$$

63. Применим обычные формулы поворота на 45° :

$$x = X \cos 45^\circ - Y \sin 45^\circ = \frac{X - Y}{\sqrt{2}},$$

$$y = X \sin 45^\circ + Y \cos 45^\circ = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}.$$

Подставив данные выражения для x и y в наше уравнение, получим

$$X^4 + kX^3Y - 6X^2Y^2 - kXY^3 + Y^4 = 0.$$

Следовательно, вся картинка не изменится при повороте на 45° , так что круг разрезается данной кривой на $360:45 = 8$ равных частей*.

[Н. Аннинг, *М. М.*, **32**, 285 (May 1959).]

Левая часть данного уравнения распадается в произведение вида

$$(x + ay)[(a + 1)x + (a - 1)y](ax - y)[(a - 1)x - (a + 1)y] = 0,$$

где

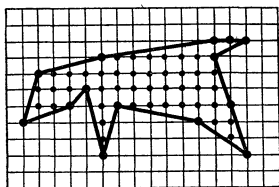
$$k = \frac{(a^4 - 6a^2 + 1)}{a(a^2 - 1)}.$$

64. Прогрессия $2, 6, 10, \dots, (4k + 2), \dots$ не содержит ни одной степени, поскольку степень любого нечетного числа нечетна, а степень каждого четного числа делится на 4.

[А. Розенфельд, *А. М. М.*, **62**, 185 (March 1955).]

Существует также еще одно тривиальное решение, у которого первый член не является степенью, а разность равна нулю.

65. Существует теорема*, утверждающая, что площадь любого простого многоугольника, вершины которого



расположены в узлах решетки, вычисляется по формуле

$$\frac{b}{2} + c - 1,$$

где b — число узлов решетки, расположенных на границе данного многоугольника, а c — число таких узлов внутри многоугольника. Следовательно, площадь многоугольника, изображенного на рисунке, равна $7 + 42 - 1 = 48$.

66. Имеем $n!(n-1)! = n[(n-1)!]^2 = m!$ Очевидно, что $1!0! = 1!$ и $2!1! = 2!$ — решения данного уравнения. Во всех остальных случаях $n < m$; так что если $m!$ содержит неквадратный множитель $> m$, то решения отсутствуют*. Далее, для $m > 10$ всегда существуют два простых числа p и q , которые $> m/2$ и $\leq m$. При этом

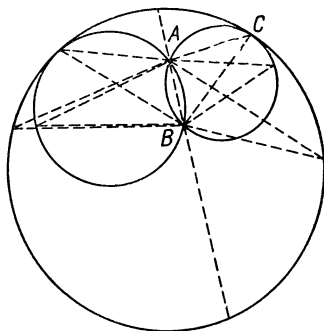
$$pq \geq \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{m+1}{2} + 2\right) = \frac{m^2}{4} + \frac{3m}{2} + \frac{5}{4} > m.$$

Следовательно, для $m > 10$ решений нет. Для $m \leq 10$, кроме указанных выше двух решений, существует еще только одно решение $7!6! = 10!$.

67. Поскольку $|\sqrt{b} - \sqrt{c}|(\sqrt{b} + \sqrt{c}) = |b - c| < (\sqrt{a})^2 < (b + c) < (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2$, отсюда следует, что $|\sqrt{b} - \sqrt{c}| < \sqrt{a} < (\sqrt{b} + \sqrt{c})$.

[Ван Цзи-и, А. М. М., 67, 82 (January 1960).]

68. Для того чтобы получить искомый угол, проведем через точки A и B две окружности, касающиеся изнутри заданной окружности. Точка касания C меньшей из них с заданной окружностью и есть та точка, для которой угол ACB принимает наибольшее значение. Действительно, если мы возьмем любую другую точку на данной окружности, расположенную по ту же сторону от прямой AB , что и C , то соответствующий угол (опирающийся на



тот же отрезок AB) будет меньше угла ACB , поскольку его вершина лежит вне меньшей окружности. Если же мы возьмем точку на данной окружности, расположенную по другую сторону от прямой AB , то соответствующий угол будет меньше угла ACB , поскольку его вершина расположена вне (или, в крайнем случае, на) большей из внутренних окружностей.

[А. С аткли ф ф, М. М., 38, 124 (March 1965).]

69. Пусть $N = S : 3$ — сумма чисел, стоящих в каждом столбце, строке и на каждой диагонали магического квадрата

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned} N &= (a + e + i) + (d + e + f) + (g + e + c) - \\ &\quad - (a + d + g) - (c + f + i) = 3e, \end{aligned}$$

а $S = 9e$. Отсюда, складывая строки и столбцы определителя, получим

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3e & 3e & 3e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 3e \\ d & e & 3e \\ 3e & 3e & 9e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & e \\ d & e & e \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} S.$$

[Р. Дж. Уокер, А. М. М., 56, 33 (January 1949).]

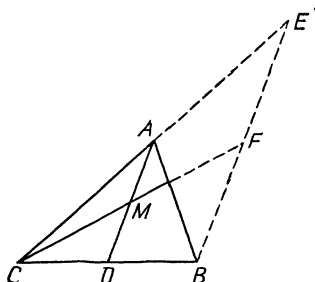
70. Существует только два множества, состоящих каждое из пяти различных цифр, сравнимых между собой по модулю 2, а именно: 0, 2, 4, 6, 8 и 1, 3, 5, 7, 9. Сумма цифр каждого квадрата при делении на 9 дает остаток 0, 1, 4 или 7. Но сумма цифр первого множества при делении на 9 дает остаток 2. Значит, из цифр этого множества нельзя составить пятизначный квадрат. Если последняя цифра квадрата нечетная, то его предпоследняя цифра обязана быть четной*. Однако во втором множестве нет четных цифр. Следовательно, и из цифр второго множества нельзя образовать пятизначный квадрат.

[А. М. М., 44, 248 (April 1937).]

71. Впишите в данную сферу правильный додекаэдр или икосаэдр и опустите перпендикуляры из центра сферы на каждую грань. Постройте 60 равнобедренных треугольников, у которых вершины находятся в основаниях данных перпендикуляров и основаниями которых служат стороны соответствующих граней. Теперь спроектируйте из центра сферы эти треугольники на сферу. Получившиеся при этом равнобедренные сферические треугольники и будут как раз искомыми конгруэнтными кусками, на которые следует разрезать сферу*.

[У. Р. Рэнсом, А. М. М., 40, 114 (February 1933).]

72. Проведем из вершины B прямую, параллельную медиане AD и пересекающую продолжение стороны CA в точке E . Обозначим через M середину медианы AD и продолжим CM до пересечения с BE в точке F . Очевидно, что A — середина CE , а F — середина BE . Поэтому AB



и CE — медианы треугольника CBE , а значит, они делят друг друга в отношении $1:2$.

[А. Бачмен, *S. S. M.*, 50, 757 (December 1950).]

73. Разложим данное выражение на множители разными способами:

$$\begin{aligned} a^{15} + 1 &= (a^3 + 1)(a^{12} - a^9 + a^6 - a^3 + 1) = \\ &= (a + 1)(a^2 - a + 1)(a^{12} - a^9 + a^6 - a^3 + 1) = \\ &= (a^5 + 1)(a^{10} - a^5 + 1) = \\ &= (a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)(a^{10} - a^5 + 1). \end{aligned}$$

Проверка показывает, что $a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$ не делится на $a^2 - a + 1$, следовательно, на последнее выражение должно делиться $a^{10} - a^5 + 1$. В самом деле,

$$\begin{aligned} a^{10} - a^5 + 1 &= (a^{10} - a^9 + a^8) + (a^9 - a^8 + a^7) - \\ &- (a^7 - a^6 + a^5) - (a^6 - a^5 + a^4) - (a^5 - a^4 + a^3) + \\ &+ (a^3 - a^2 + a) + (a^2 - a + 1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} a^{15} + 1 &= (a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)(a^2 - a + 1) \times \\ &\times (a^8 + a^7 - a^5 - a^4 - a^3 + a + 1). \end{aligned}$$

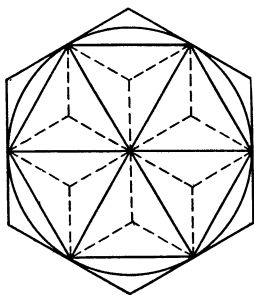
[М. М., 27, 287 (May 1954).]

74. Если $(N:5)(N:7) = N$, то $N(N - 35) = 0$, так что $N = 35$. Иначе говоря, если данное число умножить на себя, то результат получится в 35 раз больше, чем в слу-

чае, если мы умножим $1/5$ этого числа на $1/7$ от него. Поэтому искомое число равно 35.

В общем случае, если число равно $\prod_{i=1}^k (1/a_i)$ этого числа), то оно равно $\left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{1/(k-1)}$.

75. Рассмотрим правильный вписанный шестиугольник, вершины которого делят соответствующие стороны описанного шестиугольника пополам. Соединим центр окружности с вершинами вписанного шестиугольника, а затем центры получившихся равносторонних треугольников соединим с вершинами этих треугольников. В результате



мы получим 24 равных треугольника, составляющих в совокупности описанный шестиугольник. Восемнадцать из них расположены внутри вписанного шестиугольника. Следовательно, отношение площадей вписанного и описанного шестиугольников равно $18:24 = 3:4$.

[М. М., 35, 70 (March 1962).]

76. В обоих случаях шестой член может быть равен любому числу. Поэтому если нам удастся описать единой формулой первые пять членов данной последовательности, то можно этой же формулой задать и остальные члены этой последовательности. Например, мы можем положить

(a) $0, 3, 26, 255, 3124, \dots, (n^n - 1);$

(b) $1, 2, 12, 288, 34566, \dots, [(1!)(2!)(3!) \dots (n!).]$

То, что первые пять членов каждой последовательности находятся по соответствующей формуле, легко показать простой проверкой.

77. Если наложить друг на друга четыре таких листа так, чтобы с каждой стороны было по одному краю с температурой 100°C , то средняя температура каждой из сторон окажется равной 25°C *. Следовательно, температура в центре листа равна 25°C .

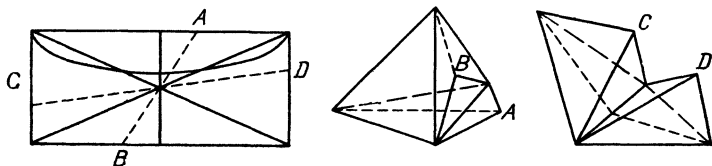
[Л. Мозер, М. М., 24, 273 (May 1951).]

Обобщая этот прием, можно доказать, что если стороны правильного металлического n -угольника поддерживаются при температурах, равных соответственно t_i градусам, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, то температура в центре этого многоугольника равна $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$ градусам.

78. Если $1/4$ от 20 оказалась равной 6, то это значит, что мы действовали в системе счисления с основанием 12. Следовательно, $1/5$ от 10 равна $2^2/5$, так как $10_{12} = 12_{10}$.

[М. М., 31, 178 (January 1958).]

79. Поскольку полные поверхности конгруэнтных тетраэдров равны, конверт следует разрезать на два куска, площади которых были бы равны. Этого мы добьемся,



проведя разрез через центр прямоугольника. Наметьте сначала отчетливые сгибы вдоль диагоналей конверта и вдоль прямой, проходящей через его центр перпендикулярно более длинным сторонам. Теперь разрез можно сделать одним из следующих четырех способов: вдоль одной из диагоналей; вдоль прямой, проходящей через центр перпендикулярно длинным сторонам; через центр под некоторым углом так, чтобы разрез пересек длинные

стороны; через центр таким образом, чтобы разрез пересекал короткие стороны. В любом из этих случаев согните каждую полученную половинку вдоль диагоналей и вдоль прямой, проходящей через центр перпендикулярно длинным сторонам, и соедините у каждой половинки края разреза между собой так, чтобы противоположные концы разреза совместились. В результате вы получите два конгруэнтных тетраэдра.

Единственное исключение составляет случай квадратного конверта. Здесь вместо тетраэдров вы получите, произведя все операции, два новых квадратных конверта.

[А. М. М., 56, 410 (June 1949).]

80. Пусть $FRY = x$, а $HAM = y$; тогда

$$7(1000x + y) = 6(1000y + x),$$

$$6994x = 5993y,$$

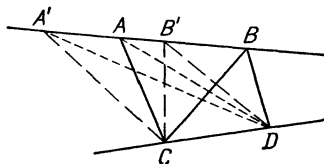
$$538x = 461y.$$

Поскольку в последнем равенстве числовые коэффициенты взаимно просты, мы получаем $x = FRY = 461$ и $y = HAM = 538$.

81. Пусть x — число коров в стаде, y — число овец, z — стоимость ягненка. Тогда $x^2 = 10y + z$, где y — нечетное число, а $z < 10$. Но предпоследняя цифра квадрата нечетна в том и только в том случае, если последняя цифра равна 6¹. Таким образом, $z = 6$, и более счастливый сын должен заплатить своему брату 2 доллара.

[И. Капланский, А. М. М., 51, 166 (March 1944).]

82. Будем сдвигать отрезки последовательно. Пусть, например, отрезок CD неподвижен, а отрезок AB переме-



щается на новое место $A'B'$. Площадь треугольника ABC

¹ См. задачу 70. — Прим. ред.

равна площади треугольника $A'B'C$, поскольку у них равны основания, а высота одна и та же. Кроме того, расстояние от точки D до плоскости, в которой лежит треугольник ABC , не меняется при движении отрезка AB по соответствующей прямой. Поскольку у тетраэдра не меняются площадь основания и высота, то остается неизменным и его объем.

[Л. Бэнкоф, *P. M. E. J.*, 1, 281 (November 1952).]

83. Если мы ограничимся первым периодом в десятичном разложении числа $1/7$, то получим 0, 142857. Повторим этот период 7 раз и разделим полученное число на 7, причем остатка не будет *. В результате получится первый период десятичного разложения числа $(1/7)^2$. Так, 0,142857 142857 142857 142857 142857 142857 : 7 = 0,020408 163265 306122 448979 591836 734693 877551.

[Д. К. Дункан, *M. M.*, 25, 224 (March 1952).]

84. Если $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ *; поэтому

$$(6x + 28) - (6x - 28) - 8 = 3[(6x + 28)(6x - 28)(8)]^{1/3},$$

$$48 = 6(36x^2 - 784)^{1/3},$$

$$512 = 36x^2 - 784,$$

$$x^2 = 36,$$

$$x = \pm 6.$$

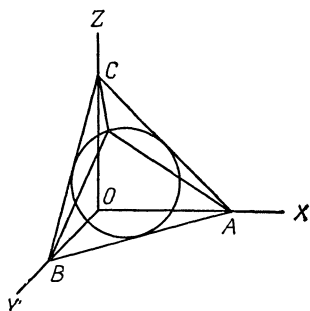
[Ф. Е. Неммерс, *S. S. M.*, 41, 291 (March 1941).]

85. Можно прокладывать путь, двигаясь «назад» от N . Если мы рассмотрим левую половину диаграммы, включая и центральный столбец, то при каждом шаге назад у нас есть выбор между двумя возможными направлениями, что дает нам 2^{12} путей. Удвоив это число и вычитая 1 (чтобы не сосчитать центральный столбец дважды), мы получим $2^{13} - 1 = 8191$ путь.

[Дж. Ф. Литч, *A. M. M.*, 68, 296 (March 1961).]

86. Введем в пространство декартову систему координат, и пусть $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ и $P(x, y, z)$ — соответственно вершины нашего треугольника и точка

на окружности. Окружность, вписанная в этот треугольник, представляет собой линию пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = c_1$ и плоскости $x + y + z = c_2$.



Следовательно,

$$\begin{aligned} & (PA)^2 + (PB)^2 + (PC)^2 = \\ & = (x-1)^2 + y^2 + z^2 + x^2 + (y-1)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + \\ & \quad + (z-1)^2 = 3c_1 - 2c_2 + 3 = \text{постоянной.} \end{aligned}$$

[Л. Мозер, А. М. М., 56, 180 (March 1949).]

Это доказательство сохраняется и для произвольной окружности, концентрической с данной.

87. Запишем наши числа в двоичной системе:

$$2^x + 1 = 100 \dots 001, \quad 2^y - 1 = 111 \dots 111.$$

Попытаемся теперь разделить первое из них на второе «уголком».

$$\begin{array}{r|l} 100 \dots \dots \dots 001 & 111 \dots 111 \\ \underline{111 \dots 111} & 1 \dots \\ & 100 \dots 001 \\ & \underline{\dots \dots \dots} \end{array}$$

Числа разделятся нацело в том и только в том случае, если последний остаток будет состоять из стольких же единиц, сколько их содержится в делителе. Но каждый остаток записывается с помощью всего лишь двух единиц на концах, между которыми стоит серия нулей. Делитель

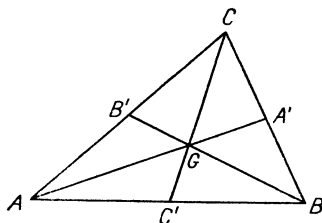
же, по предположению, содержит больше двух единиц. Следовательно, первое из наших чисел не делится на второе.

[Д. К. Дункан, *S. S. M.*, **36**, 321 (March 1936).]

88. Поскольку разность двух членов, стоящих в левой части уравнения, равна нечетному числу 41, то один из этих членов должен быть нечетным, а другой четным числом. Так как $104y$ четно, то $187x$ нечетно, а значит, нечетен x . Следовательно, пара $x = 314$, $y = 565$ не удовлетворяет нашему уравнению.

[Д. Вудс, *S. S. M.*, **64**, 242 (March 1964).]

89. Теорема, обратная известной теореме Чебы *, гласит: если три точки, взятые на сторонах треугольника, делят эти стороны на шесть таких отрезков, что произведение трех из них, не имеющих общих концов, равно



произведению трех оставшихся отрезков, то прямые, соединяющие данные три точки с противолежащими вершинами треугольника, пересекаются в одной точке.

Поскольку медианы делят стороны треугольника пополам, $(AB')(CA')(BC') = (B'C)(A'B)(C'A)$, они пересекаются в одной точке.

[М. М., **24**, 114 (November 1950).]

Более того, из теоремы Чебы следует, что

$$\frac{CG}{GC'} = \frac{CB'}{B'A} + \frac{CA'}{A'B} = 1 + 1,$$

поэтому $CG = 2GC'$ и $CG = \frac{2}{3}CC'$. Следовательно, медианы пересекаются в точке, расположенной на расстоянии, равном $\frac{2}{3}$ длины каждой медианы от соответствующей вершины треугольника.

90. Если основание системы счисления равно B , а $B > 1$, то число 11111 можно записать в виде $B^4 + B^3 + B^2 + B + 1$. Далее,

$$\left(B^2 + \frac{B}{2}\right)^2 < B^4 + B^3 + B^2 + B + 1 < \left(B^2 + \frac{B}{2} + 1\right)^2,$$

и если средний член точный квадрат, то должно выполняться равенство¹

$$\left(B^2 + \frac{B}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = B^4 + B^3 + B^2 + B + 1,$$

откуда

$$\frac{B^2}{4} - \frac{B}{2} - \frac{3}{4} = 0,$$

$$(B - 3)(B + 1) = 0,$$

и для $B = 3$ мы получим $11111 = (102)^2$.

[В. Теболт, А. М. М., 15, 149 (December 1940).]

91. Если бы такой многоугольник существовал, то описанная вокруг него окружность пересекала бы эллипс более чем в четырех точках — вершинах многоугольника, а это невозможно.

[М. С. Кламкин, М. М., 34, 58 (September 1960).]

92. Поскольку

$$S = 0,1 + 0,02 + 0,003 + 0,0004 + \dots,$$

$$0,1S = 0,01 + 0,002 + 0,0003 + \dots,$$

$$\begin{aligned} 0,9S &= 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots = \\ &= \frac{0,1}{1 - 0,1} = \frac{1}{9}, \end{aligned}$$

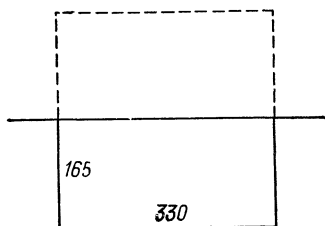
значит, $S = {}^{10}/_{81} = 0,123456790123456790 \dots$ — это десятичная периодическая дробь, не содержащая цифры 8.

[Н. Аннинг, М. М., 29, 173 (January 1956).]

93. Если бы требовалось огородить прямоугольный загон площадью 10,89 га на открытой местности, то пери-

¹ См решение задач 130 и 262. — Прим. ред.

метр был бы минимален у квадратного загона. Длина стороны у такого загона равнялась бы $(10,89 \cdot 10^4)^{1/2} =$



$= 330$ м. Теперь мы можем считать, что утес делит пополам такой загон и, разумеется, служит бесплатным забором. Следовательно, наш загон минимальной стоимости должен иметь размеры 330×165 м.

94. Сложив все пять уравнений и разделив результат на 4, получим

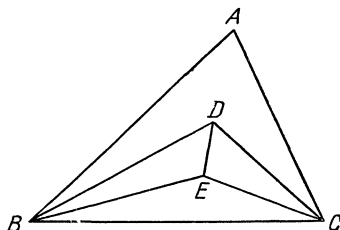
$$x + y + z + u + v = 3.$$

Теперь остается только вычесть из этого уравнения по очереди каждое исходное уравнение, чтобы получить искомое решение $v = -2$, $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$, $u = -1$.

95. Теорема состоит в том, что $(n - 5)(n - 17)(n - 257) \neq 0$.

[Л. Мозер, М. М., 25, 49 (September 1951).]

96. Поскольку E — точка пересечения двух из биссектрис треугольника BCD , то отрезок DE — третья биссектриса.



риса.

[К. Ф. Пинска, М. М., 34, 182 (January 1961).]

97. Да, можно. Каждый член искомой последовательности 11235831 ... удастся получить, сложив предыду-

щие два члена и взяв цифру этой суммы, стоящую в разряде единиц.

В данной последовательности чередуются два нечетных и один четный члены. Всего существует $5 \cdot 5 = 25$ упорядоченных пар, составленных из нечетных цифр. Поэтому после не более чем $3 \cdot 25 = 75$ последовательных сложений одна из этих нечетных пар повторится и начнется новый цикл. Причем, поскольку сумма (или разность) двух цифр единственна, эта повторившаяся пара должна совпадать с первой нечетной парой (с которой начинается последовательность), а не с какой-либо из «внутренних» нечетных пар. И в самом деле, оказывается достаточно произвести всего 60 сложений и начнется новый цикл из 60 цифр: 1 1 2 3 5 8 3 1 4 5 9 4 3 7 0 7 7 4 1 5 6 1 7 8 5 3 8 1 9 0 9 9 8 7 5 2 7 9 6 5 1 6 7 3 0 3 3 6 9 5 4 9 3 2 5 7 2 9 1 0* 1 1

Аналогичные рассуждения окажутся справедливыми в любой системе счисления, а также не только для последовательности Фибоначчи, но и для любой последовательности, удовлетворяющей рекуррентному соотношению

$$A_{n+k} = A_n + A_{n+1} + \dots + A_{n+k-1}.$$

98. Поскольку коэффициент при x^2 в исходном уравнении равен 0, отсюда следует, что $a + b + c = 0$. Значит, $b + c = -a$, $c + a = -b$ и $a + b = -c$. Другими словами, нам нужно найти уравнение, корнями которого служат $-\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{b}$ и $-\frac{1}{c}$ — величины, обратные корням исходного уравнения, взятым с противоположным знаком. Поэтому мы должны просто записать коэффициенты исходного уравнения в обратном порядке и у тех из них, которые стоят при четных степенях x , изменить знак. В результате получится искомое уравнение

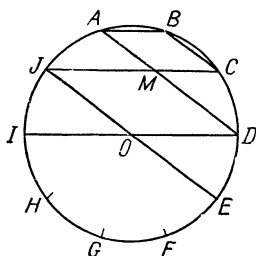
$$rx^3 - qx^2 - 1 = 0.$$

[А. Уэйн, S. S. M., 48, 492 (June 1948).]

99. Ни одна из цифр, стоящих в разряде единиц у сомножителей, не может равняться нулю. $4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$, а $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$. $(87)^{1/3} = 4,4\dots$, а $(88)^{1/3} = 4,4\dots$. Следовательно, произведение $442 \cdot 444 \cdot 446 = 87526608$.

[М. М., 37, 360 (November 1964).]

100. Диаметры ID и JE соответственно параллельны сторонам AB и BC правильного десятиугольника и сторонам JC и AD звездчатого десятиугольника. Следова-



тельно, $ABCM$ и $JMDO$ — ромбы; поэтому $AD - BC = AD - AM = MD = JO$, радиусу данного круга.

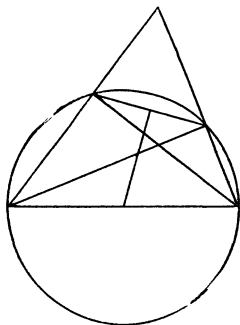
101*. Пока еще не было совершено ни одного рукопожатия, число людей, пожавших нечетное число рук, равнялось нулю. После первого рукопожатия появилось два «нечетных» человека (то есть два человека, каждый из которых пожал нечетное число рук). Далее каждое рукопожатие совершалось либо между двумя «четными», либо между двумя «нечетными» людьми, либо, наконец, между одним «четным» и одним «нечетным» человеком. Если рукопожатиями обмениваются два «четных» человека, то число «нечетных» людей увеличивается на два. Если рукопожатиями обмениваются два «нечетных» человека, то число «нечетных» людей уменьшается на два. Если, наконец, рукопожатиями обмениваются «четный» человек с «нечетным», то в результате «четный» человек становится «нечетным», а «нечетный» — «четным», и общее количество «нечетных» людей остается неизменным. Таким образом, мы видим, что в любом случае четность числа «нечетных» людей не меняется при каждом очередном рукопожатии, а поскольку после самого первого рукопожатия это число было четным, то оно и останется таковым после того, как все рукопожатия будут закончены.

[Дж. К. Шенфельд в книге М. Gardner, 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions, N. Y., 1961, 60.]

102. Нас интересует только порядок вынутых карт. Всего существует $5!$ перестановок из пяти чисел; поэтому искомая вероятность равна $1/120$.

[Дж. Р. Зиглер, *М. М.*, 23, 278 (May 1950).]

103. Сторона треугольника является диаметром окружности, проведенной через основания высот, опущенных на две другие стороны этого треугольника. Отрезок, соединяющий эти два основания, представляет собой хорду данной окружности. Поэтому перпендикуляр, восстановленный из середины нашего отрезка, пройдет через



центр окружности, то есть через середину третьей стороны исходного треугольника.

[А. Б а ч м е н, *S. S. M.*, 47, 490 (May 1947).]

104. Пусть $f(x) = x^2 - x + a$, $g(x) = x^{13} + x + 90$. Тогда $f(0) = a$, $f(1) = a$, $g(0) = 90$, $g(1) = 92$. Поэтому наибольший общий делитель 90 и 92, то есть 2, должен делиться на a . Далее, $f(-1) = a + 2$, $g(-1) = 88$; поэтому a не равно ни 1, ни -2 ; $f(-2) = a + 6$, $g(-2) = -8104$, поэтому $a \neq -6$. Следовательно,

$$\begin{aligned} a &= 2^* \text{ и } \frac{x^{13} + x + 90}{x^2 - x + 2} = \\ &= x^{11} + x^{10} - x^9 - 3x^8 - x^7 + 5x^6 + 7x^5 - \\ &\quad - 3x^4 - 17x^3 - 11x^2 + 23x + 45. \end{aligned}$$

[Л. Е. Б а ш, *А. М. М.*, 71, 640 (June 1964).]

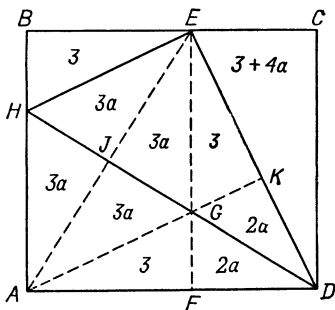
105. Средняя стоимость одной головы скота равна 1 доллару. Стоимость каждого теленка отличается от средней на $+9$ долларов, каждого ягненка — на $+2$ и

каждого поросенка — на $1\frac{1}{2}$ доллара. Поэтому вместе с каждым теленком фермер должен купить 18 поросят, а вместе с каждым ягненком — 4 поросенка. Следовательно, — поскольку $5(1 + 18) + (1 + 4) = 100$ — он должен купить 5 телят, 1 ягненка и 94 поросят*.

[Б. Е. Митчел, *М. М.*, 26, 153 (January 1953).]

106. $1000027 = (100)^3 + (3)^3 = (100 + 3) \cdot (10000 - 300 + 9) = 103 \cdot 9709 = 103 \cdot 7 \cdot 1387 = 103 \cdot 7 \cdot (1460 - 73) = 103 \cdot 7 \cdot 73 \cdot 19.$

107. Если $S_{BEH} = 3$, то положим $S_{CED} = 3 + 4a$; тогда $S_{EHD} = 3 + 8a^*$. Опустим на AD перпендикуляр EF , пересекающий HD в точке G . Через точку G проведем AK ,



а также проведем отрезок AE , пересекающий HD в точке J . Теперь прямоугольник $ABCD$ разбит на 10 прямоугольных треугольников. Из соображений симметрии следует, что $S_{EGK} = S_{AGF} = S_{BEH} = 3$. $S_{CED} = S_{EFD}$, поэтому $S_{GKD} = S_{GFD} = 2a$. Следовательно, площадь каждого из четырех треугольников, составляющих ромб $ANEH$, равна $3a$.

Из двух пар подобных треугольников получаем

$$\frac{S_{CED}}{S_{BEH}} = \frac{(DE)^2}{(EH)^2} = \frac{S_{JED}}{S_{JEH}},$$

откуда

$$\frac{3 + 4a}{3} = \frac{3 + 5a}{3a},$$

$$4a^2 - 2a - 3 = 0,$$

$$4a = 1 + \sqrt{13}.$$

Следовательно, площадь наибольшего треугольника EHD равна $8a + 3 = 5 + 2\sqrt{13} \approx 12,2111 \text{ см}^2$.

[Р. Р. Рой, *Civil Engineering — ASCE*, 18, 70 (February 1948).]

108. Если $n(n+2)(n+4)(n+6) = m^2$, то $(n^2 + 6n + 4)^2 = m^2 + 16$. Однако среди квадратов только 0 и 9 имеют вид $a^2 - 16$; а поскольку m^2 нечетно, искомый квадрат равен $9 = (-3)(-1)(1)(3)$.

[Д. Л. Силвермэн, *M. M.*, 38, 60 (January 1965).]

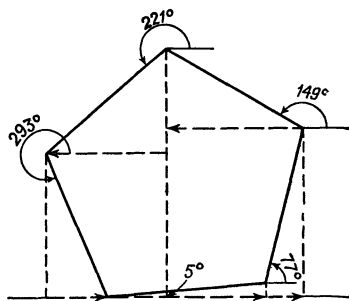
109. Среднее арифметическое множество чисел, не все из которых равны между собой, больше их среднего геометрического; поэтому

$$n = \frac{n^2}{n} = \frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n} > \\ > [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)]^{1/n}.$$

Следовательно, $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)$.

[Ф. Е. Неммерс, *S. S. M.*, 40, 586 (June 1940).]

110. Спроецируем стороны произвольного многоугольника на прямую, лежащую в плоскости этого многоугольника. Тогда сумма таких проекций, взятых с соответствующим знаком, равна нулю. Возьмем теперь правиль-



ный пятиугольник с единичной стороной и обратим внимание на то, что его внешний угол равен 72° . Члены же нашей суммы представляют собой проекции сторон этого пятиугольника на прямую, которая составляет с одной из таких сторон угол в 5° . Следовательно,

$$\cos 5^\circ + \cos 77^\circ + \cos 149^\circ + \cos 221^\circ + \cos 293^\circ = 0.$$

[М. С. К л а м к и н, *M. M.*, 28, 293 (May 1955).]

111. В тождество

$$x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2 - 1 = \frac{x^{12} - 1}{x^2 + 1}$$

подставим $x = 2$:

$$\begin{aligned} 2^{10} - 2^8 + 2^6 - 2^4 + 2^2 - 1 &= \frac{2^{12} - 1}{2^2 + 1} = \frac{4096 - 1}{4 + 1} = \\ &= 819 = 9(91). \end{aligned}$$

[М. М., 26, 287 (May 1953).]

112. Треугольные числа имеют вид $\frac{n(n+1)}{2}$, так что 1 является треугольным числом в любой системе счисления. Далее будем рассуждать по индукции. Легко заметить, что каждый член исходной последовательности можно получить, умножив предыдущий член на основание данной системы счисления и прибавив затем 1. Если мы будем действовать в девятеричной системе счисления и некоторый член нашей последовательности равен треугольному числу $\frac{n(n+1)}{2}$, то следующий член будет

$$9 \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2},$$

то есть также есть треугольное число.

[Э. А. Мерилл, А. М. М., 39, 179 (March 1932).]

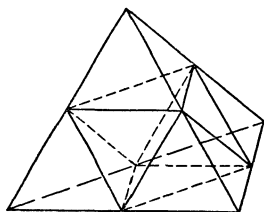
Вообще если мы к числу $\frac{n(n+1)}{2}$, записанному в системе с основанием $(2k+1)^2$, припишем справа число $\frac{k(k+1)}{2}$, записанное в той же системе, то получим $\frac{[(2k+1)n+k][(2k+1)n+k+1]}{2}$.

113. Если мы проведем плоскость через середины трех ребер тетраэдра, выходящих из одной вершины, то она отсечет маленький тетраэдр, объем которого составляет $1/2^3$ объема большого тетраэдра (поскольку их ребра относятся как 1:2). Объем четырех таких маленьких тетраэдров равен половине объема большого тетраэдра.

Если мы проведем еще три аналогичные плоскости, то в результате получим многогранник, 8 граней которого представляют собой равносторонние треугольники, причем четыре таких треугольника лежат на гранях боль-

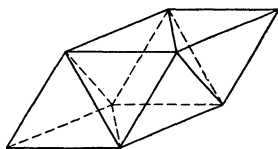
шого тетраэдра, а четыре остальных лежат в секущих плоскостях. Таким образом, мы получили правильный октаэдр, ребро которого равно ребру маленького тетраэдра, или, что то же самое, половине ребра большого тетраэдра.

Отсюда следует, что объем маленького тетраэдра равен $\frac{1}{4}$ объема получившегося октаэдра. Кроме того, из приведенной конструкции становится очевидным, что



двугранные углы правильного тетраэдра и правильного октаэдра дополняют друг друга до 180° .

114. Куб с помощью непрерывной деформации можно превратить в параллелепипед, у которого все ребра по-прежнему были бы равны, а все плоские углы при одной из вершин равнялись бы 60° . Возьмем три ребра, выходящие из этой вершины, и соединим отрезками их концы; то же самое сделаем и у противоположной вершины. В результате наш параллелепипед разобьется на два правильных тетраэдра и один октаэдр. Заполним теперь пространство кристаллической структурой, ячейки которой имеют форму куба. Непрерывной деформацией* ее можно перевести в структуру с ячейками, имеющими форму параллелепипеда, о котором говорилось выше. Разбив каждый параллелепипед на два тетраэдра и один октаэдр, мы и получим искомую кристаллическую струк-



туру; причем область пространства, которую раньше заполняли n параллелепипедов, теперь заполнится $2n$ тетраэдрами и n октаэдрами.

Мы можем действовать и по-другому*. Заполним пространство кристаллической структурой, ячейки которой имеют форму правильных тетраэдров. Поступим теперь с каждым из этих тетраэдров так же, как и в предыдущей задаче, разбив его на четыре меньших тетраэдра и один октаэдр. В результате мы снова получим искомую кристаллическую структуру, состоящую из правильных тетраэдров и октаэдров.

115. Сумма цифр числителя равна 30, так что он делится на 3. Разность сумм чередующихся цифр знаменателя равна $32 - 21 = 11$; следовательно, знаменатель делится на 11. Выделив эти множители, получаем

$$\frac{116\,690\,151}{427\,863\,887} = \frac{38\,896\,717 \cdot 3}{38\,896\,717 \cdot 11} = \frac{3}{11}.$$

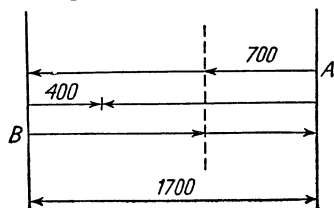
116. Допустим, что максимум, который, очевидно, существует*, достигается при двух неравных углах A и B . Тогда сумма синусов равна

$$\begin{aligned} & \sin A + \sin B + \sin [180^\circ - (A + B)] = \\ & = 2 \sin \left(\frac{A + B}{2} \right) \cos \left(\frac{A - B}{2} \right) + \sin (A + B). \end{aligned}$$

Но это выражение, очевидно, меньше того, которое получится, если мы эти два угла возьмем равными $\frac{A + B}{2}$, а именно $2 \sin \frac{A + B}{2} \cos 0^\circ + \sin (A + B)$. Следовательно, максимум достигается, когда все углы равны, а его значение совпадает с $3 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

[Д. Никсон и Дж. Вахаб, А. М. М., 71, 916 (October 1964).]

117. Паром A отчаливает от берега, проплывает 700 м и встречает паром B . К этому моменту они проходят суммарное расстояние, равное ширине реки. A доплывает до



противоположного берега, поворачивает обратно и, пройдя после поворота еще 400 м, вновь встречает В. К этому моменту они проходят суммарное расстояние, равное утроенной ширине реки. Поскольку их скорости постоянны, то А всего прошел расстояние $3 \times 700 = 2100$ м. Ширина реки меньше расстояния, пройденного А, на 400 м, то есть равна 1700 м.

[У. К. Руфус, А. М. М., 47, 111 (February 1940).]

118. Всего существует $6:2 = 3$ различные пары, между которыми должен посидеть Альберт; поэтому цикл состоит из трех обедов. Обозначим каждого члена семьи начальной буквой его имени, рассадим всю семью сначала по порядку и, разорвав круг слева около Альберта, выпишем все инициалы в строку. Затем возьмем все инициалы, стоящие на четных местах, и поставим их, сохраняя порядок, на самые правые места, а слева от них (также с сохранением порядка) расположим инициалы, стоявшие ранее на нечетных местах. Повторим такую операцию дважды. Если мы проделаем ее в третий раз, то вернемся к первоначальному расположению. Таким образом, мы получим

А	Б	К	Д	Е	Ф	Г
А	К	Е	Г	Б	Д	Ф
А	Е	Б	Ф	К	Г	Д
А	Б	К	Д	Е	Ф	Г

Изучим далее пары, между которыми находится каждый член семьи во время очередного обеда, и обнаружим при этом неожиданно для себя, что мы получили решение задачи*:

А — БГ	Б — АК	К — БД	Д — КЕ	Е — ДФ	Ф — ЕГ	Г — ФА
КФ	ГД	АЕ	БФ	КГ	ДА	ЕБ
ЕД	ЕФ	ФГ	ГА	АБ	БК	КД

Мы видим, что в течение данного цикла не только каждому члену семьи удастся посидеть ровно по одному разу рядом со всеми остальными, но и ни одна из пар, между которыми он сидит во время всех трех обедов, не повторяется у других членов семьи. Впрочем, последнее обстоятельство не так удивительно, поскольку всего у нас 21 пара, а 21 как раз и равно числу сочетаний C_7^2 .

119. Объединим в пары числа a и $(10^n - 1 - a)$, $a \geq 0$. Сумма цифр каждой такой пары равна $9n$, а всего таких пар $10^n/2$. Следовательно, искомая сумма равна $9n(10^n/2)$.

[Л. Мозер, М. М., 26, 225 (March 1953).]

120. Используя данные относительно покупок первых двух водителей, можно составить два уравнения:

$$4s + c + 10d = 169,$$

$$3s + c + 7d = 126,$$

где s , c и d обозначают соответственно стоимость в центах одного сэндвича, одной чашки кофе и одного пончика¹. Умножим первое уравнение на 2, а второе — на 3, при этом получим

$$8s + 2c + 20d = 338,$$

$$9s + 3c + 21d = 378.$$

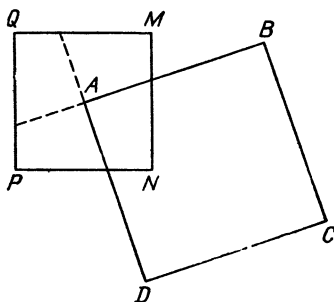
Вычтем из последнего уравнения предпоследнее:

$$s + c + d = 40.$$

Таким образом, третий водитель заплатил 40 центов.

[S. S. M., 66, 561 (June 1966).]

121. Продолжим стороны угла A ; при этом квадрат $MNPQ$ разобьется на четыре конгруэнтных четырехуголь-



ника. Следовательно, площадь общей части равна $1/4$ площади квадрата $MNPQ$. Результат не зависит от того отношения, в котором AB делит MN . Он не зависит также

¹ Sandwich, cup, doughnut (англ.) — сэндвич, чашка, пончик соответственно.

и от размеров квадрата; нужно только, чтобы $AB \geq \geq MP/2$.

122. Подставив $x = y/12$ в исходное уравнение, получим

$$(y-1)(y-2)(y-3)(y-4) = 120 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5.$$

Любой целый корень этого уравнения превратит его левую часть в произведение четырех последовательных целых чисел. $y = -1$ и $y = 6$ — два таких корня.

Воспользуемся теперь известными соотношениями между корнями уравнения и его коэффициентами*:

$$(-1)(6)r_1r_2 = -120 + (-1)(-2)(-3)(-4),$$

откуда

$$r_1r_2 = 16;$$

$$-(-1 + 6 + r_1 + r_2) = -1 - 2 - 3 - 4,$$

откуда

$$r_1 + r_2 = 5.$$

Таким образом, r_1 и r_2 совпадают с корнями уравнения $y^2 - 5y + 16 = 0$, то есть равны $(5 \pm i\sqrt{39})/2$.

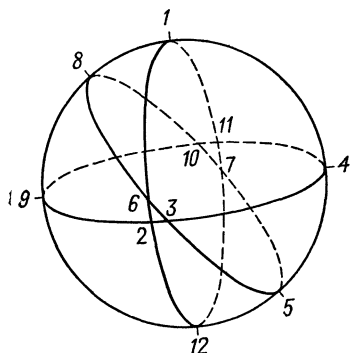
Итак, четыре корня исходного уравнения равны соответственно $-1/12$, $1/2$ и $(5 \pm i\sqrt{39})/24$.

123. Нам нужно найти трехзначное и однозначное числа, произведение которых представляет собой четырехзначное число, причем разрешается пользоваться только цифрами 2, 3, 5 или 7. Существует всего четыре возможных варианта: $3 \cdot 775 = 2325$, $5 \cdot 555 = 2775$, $5 \cdot 755 = 3775$ и $7 \cdot 325 = 2275$.

Поскольку в этих четырех произведениях ни одно из трехзначных чисел не встречается дважды, мы заключаем, что искомое двузначное число состоит из одинаковых цифр. Таким образом, единственное решение имеет вид

$$\begin{array}{r} 775 \\ 33 \\ \hline 2325 \\ 2325 \\ \hline 25575 \end{array}$$

124. Поместим в какую-нибудь точку число b , а в точку, расположенную на противоположном конце соответствующего диаметра, — «дополнительное» число, равное $n(n-1)+1-b$. Продолжим этот процесс до тех пор, пока не исчерпаем всех чисел (и точек). Поскольку



на каждом большом круге находится $n-1$ пара точек пересечения, общая сумма всех чисел на нем равна $[n(n-1)+1](n-1)$.

[Л. Мозер, М. М., 25, 114 (November 1951).]

125. Если первоначальное число участников увеличивается на 50%, то на долю каждого приходится всего по $\frac{2}{3}$ прежнего индивидуального взноса. Таким образом, 100 долларов составляют $\frac{1}{3}$ исходного взноса и каждый член клуба заплатил по 300 долларов.

[М. М., 32, 229 (March 1959).]

126. Для того чтобы условие задачи было выполнено при $y=3$, при некоторых n и k должны иметь место равенства $2C_n^k = C_n^{k+1}$ и $3C_n^k = C_n^{k+2}$. После упрощения получаем $n=3k+2$ и $3(k+1)(k+2) = (n-k)(n-k-1)$. Решив данную систему уравнений и отбросив отрицательное решение, получим $k=4$, $n=14$.

Таким образом, степень соответствующего бинома равна 14, а пятый, шестой и седьмой коэффициенты равны соответственно 1001, 2002, 3003. Поскольку для $y=3$ решение единственно, при $y>3$ решений нет.

127. Произведение n последовательных целых чисел делится на n . Более того, произведение четырех последовательных целых чисел делится на 2^3 . Далее,

$$N = x^9 - 6x^7 + 9x^5 - 4x^3 =$$

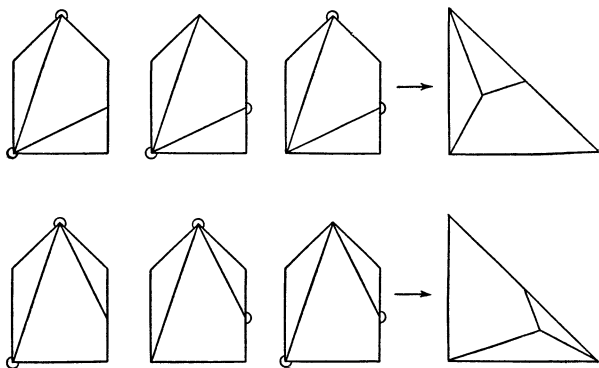
$$= [(x-2)(x-1)x][(x-1)x(x+1)][x(x+1)(x+2)] =$$

$$= [(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)][(x-1)x][x(x+1)] =$$

$$= [(x-2)(x-1)x(x+1)][(x-1)x(x+1)(x+2)]x.$$

Величина, стоящая в каждой квадратной скобке первого разложения, делится на 3; значит, N делится на 3^3 . Из второго разложения видно, что N делится на 5. Каждая квадратная скобка третьего разложения делится на 2^3 ; следовательно, N делится на 2^6 . Таким образом, при любом целом x величина N делится на $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 = 8640$.

128. Если сторона данного квадрата равна 2, то площадь всего пятиугольника равна 5; поэтому катет нового равнобедренного прямоугольного треугольника должен равняться $\sqrt{10}$. Но именно такова длина каждой из двух больших диагоналей нашего пятиугольника. Таким образом, если мы разрежем пятиугольник вдоль одной из



этих диагоналей, то две стороны разреза можно использовать в качестве катетов нового прямоугольного треугольника. Далее заметим, что вершины неразрезанных углов пятиугольника окажутся внутри нового треугольника, а стороны, выходящие из этих вершин, в нем попарно совпадут. Отсюда мы делаем вывод, что новый разрез должен начинаться из любого конца большой диа-

гонали и делить пополам сторону пятиугольника, не имеющую общих точек с этой диагональю. В результате мы получаем два различных решения, не считая зеркальных отражений.

Обратим внимание еще на одну любопытную деталь. Если мы разрежем наш пятиугольник любым из двух указанных способов и, не сдвигая с места, закрепим их шарнирно в любых двух (из трех) концах проведенных разрезов, то мы сможем затем сложить нужный треугольник, просто поворачивая части вокруг этих шарниров.

[У. Ф. Чини.]

129*. Пусть $N = 3^{1/3} \cdot 3^{2/9} \cdot 3^{3/27} \dots = 3^{1/3 + 2/9 + 3/27 + \dots + n/3^n + \dots} = 3^M$. Тогда

$$\frac{M}{3} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \dots + \frac{n-1}{3^n} + \dots$$

Поэтому

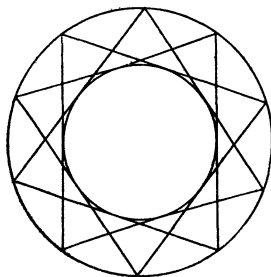
$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{3}\right)M &= \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $N = 3^{3/4} = \sqrt[4]{27}$.

[Дж. Ф. Арена, S. S. M., 46, 678 (October 1946).]

130. Имеем $(n^2 + n)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2 < n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 1 < n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = (n^2 + n + 1)^2$. Следовательно, наше число заключено строго между двумя последовательными квадратами.

131. Полученные хорды касаются некоторой окружности, concentрической с данной. Если бы через какую-то



точку проходило больше двух таких хорд, то мы получили бы, что из внешней точки проведено более двух касательных к кругу, а это невозможно.

[Б. У. А л ь ф р е д, М. М., 35, 193 (May 1962).]

132. Если мы поменяем местами две соседние строки определителя, то он изменит знак. Если мы переставим всеми возможными способами строки некоторого определителя третьего порядка, то получим три положительных и три отрицательных определителя, равных между собой по абсолютной величине. Следовательно, наши $9!$ определителей распадаются на $9!/6$ групп, причем сумма определителей внутри каждой такой группы равна нулю.

[М. М., 36, 77 (January 1963).]

133. Если две кривые второго порядка имеют более $2 \cdot 2 = 4$ общих точек, то их уравнения должны быть вырожденными и иметь общий делитель. Два данных уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned}(x + 2y - 3)(2x - y) &= 0, \\ (x + 2y - 3)(3x + y + 2) &= 0.\end{aligned}$$

Следовательно, все точки прямой $x + 2y - 3 = 0$ принадлежат двум нашим кривым. Например, мы можем взять следующие шесть точек, удовлетворяющих условию задачи: $(-1, 2)$, $(1, 1)$, $(0, \frac{3}{2})$, $(3, 0)$, $(4, -\frac{1}{2})$, $(5, -1)$.

134. Число красных карт в верхней половине колоды обязательно совпадает с числом черных карт в ее нижней половине. Значит исходная посылка всегда ложна, а тогда согласно законам логики из нее следует любое утверждение.

[Л. М о з е р, М. М., 26, 167 (January 1953).]

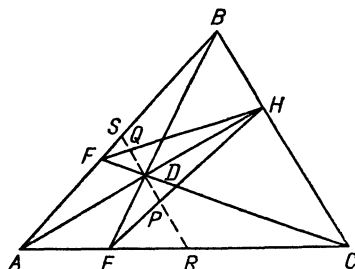
[«Если $2 \times 2 = 5$, то существуют ведьмы» — математический фольклор. — *Ред.*]

135. Через точку D параллельно BC проведем прямую, пересекающую HE , HF , AC и AB соответственно в точках P , Q , R , S . Тогда

$$\frac{DP}{DR} = \frac{BH}{BC}, \quad \frac{DS}{DQ} = \frac{BC}{CH} \quad \text{и} \quad \frac{DR}{DS} = \frac{CH}{BH}.$$

Перемножив эти три равенства, мы получим, что $DP = DQ$. Таким образом, в треугольнике HPQ высота

делит основание PQ на две равные части, следовательно, треугольник HPQ — равнобедренный, HA — бис-



сектриса угла FHE , а углы AHE и AHF равны между собой.

[Н. А. Курт, М. М., 37, 338 (November 1964).]

136. Сложив второе и третье уравнения данной системы, получим

$$x + y + k(x + y) = 5.$$

Учитывая первое уравнение, находим отсюда искомое значение $k = 4$. Для этого k имеем $x = 1/3$, $y = 2/3$.

137. Положим $x + y = a^2$, $x - y = a$, откуда $x = \frac{a(a+1)}{2}$ и $y = \frac{a(a-1)}{2}$. Поскольку при любом целом

a в числителе каждой из данных дробей стоит произведение четного и нечетного чисел, определенные таким образом x и y представляют собой целые числа и удовлетворяют исходному уравнению.

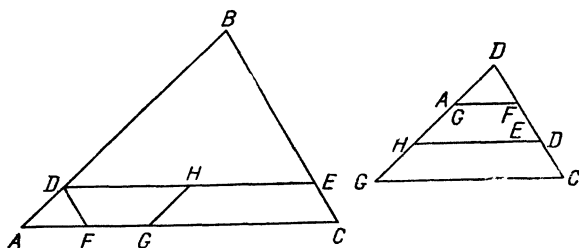
[Л. Е. Баш, А. М. М., 61, 548 (October 1954).]

x и y представляют собой два последовательных треугольных числа.

138. Выберем на сторонах AB , BC и CA данного треугольника ABC соответственно точки D , E и F так, чтобы $AD : AB = CE : CB = AF : FC = 1 : 5$. Возьмем затем на стороне AC точку G так, чтобы $AG = 2AF$, и отметим на DE середину H . Теперь надо разрезать треугольник по линиям DE , DF и GH . Одним из двух искомым треугольников будет треугольник BDE . Три остальных куса можно передвинуть в данной плоскости так, чтобы они образовали второй треугольник, подобный данному.

[А. Бачмен, А. М. М., 58, 112 (February 1951).]

На самом деле можно было бы шарнирно закрепить три меньших куска в точках F и H , а затем получить



второй треугольник, просто поворачивая эти куски вокруг шарниров.

139. Обозначим через f правильную дробь, в десятичном периодическом разложении которой один период совпадает как раз с исходным числом 15 В силу условий данной задачи $5f = 0, \dots 15 \dots 15 \dots$, а $100f = 15, \dots 15 \dots 15 \dots$, откуда $95f = 15$ и $f = \frac{3}{19}$. Разлагая $\frac{3}{19}$ в десятичную дробь, мы обнаружим, что ее период состоит из 18 цифр: 157894736842105263. Это и есть искомое число. Оно единственно, если мы рассматриваем не более чем 30-значные числа. Если же мы изменим это ограничение и рассмотрим, например, числа, которые записываются с помощью не более чем 50 цифр, то найдется еще одно решение задачи — 36-значное число, совпадающее с двумя периодами дроби f .

[Х. Т. Р. Ауде, А. М. М., 41, 268 (April 1934).]

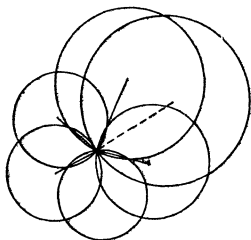
140. Если плоский угол при одной из вершин тетраэдра прямой или тупой, то сумма всех плоских углов при этой вершине больше π радиан*. Если бы по крайней мере один из углов при каждой вершине тетраэдра был прямым или тупым, то сумма всех плоских углов тетраэдра превышала бы 4π . Но это невозможно, поскольку у четырех треугольных граней сумма всех углов в точности равна 4π . Следовательно, у тетраэдра есть по крайней мере одна вершина, все плоские углы при которой острые.

[Р. Маккэй, А. М. М., 42, 453 (August 1935).]

141. Пусть в камере под номером q ключ поворачивался t раз. Тогда t равно числу делителей q . Так, если $q = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, где p_i — отличные друг от друга простые числа, то $t = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$. Далее, если хотя бы одно из a_i нечетно, то t четно и в итоге q -я камера останется запертой. Если все a_i четны, то q представляет собой квадрат, а t нечетно. Таким образом, счастливицы сидели в камерах, номера которых представляли собой точные квадраты.

[P. M. E. J., 1, 330 (April 1953).]

142. Допустим, напротив, что у данных 6 кругов есть хотя бы одна общая точка. Соединим эту точку отрезком с центром каждого из кругов. По крайней мере одна пара таких отрезков образует между собой угол, не превосходящий 60° . Рассмотрим два соответствующих круга. Тогда центр меньшего из этих двух кругов принадлежит



большему кругу. (Если эти два круга равны, то центр каждого из них принадлежит второму.) Но по условию ни у одного из данных 6 кругов центр не принадлежит никакому из 5 остальных кругов. Получившимся противоречием и завершается доказательство.

[Е. Л. Магнусон, А. М. М., 70, 569 (May 1963).]

143. Применяя тождество $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, мы получим: (96) (104) = (100 - 4) (100 + 4) = = 10000 - 16 = 9984.

144. Требуется найти три различных целых числа, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = mz \\ y + z = nx \\ z + x = py, \end{cases}$$

где m, n, p — положительные целые числа. Условие того, что данная однородная система имеет решение, отличное от нулевого, можно записать в виде

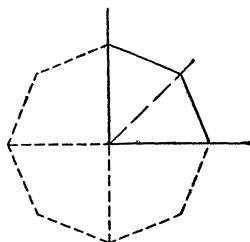
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -m \\ -n & 1 & 1 \\ 1 & -p & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $mnp = m + n + p + 2^1$. Очевидно, тройка $(2, 2, 2)$ удовлетворяет этому соотношению. У любого другого решения одно из чисел m, n, p должно равняться 1. Пусть, например, $p = 1$; тогда $mn = m + n + 3$. Очевидно, $(3, 3)$ — решение этого уравнения. В любом другом решении одно из чисел m, n должно быть меньше 3. Легко понять, что $(5, 2)$ — еще одно решение данного уравнения и других решений нет. Таким образом, существуют три набора чисел m, n, p , а именно $(2, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$ и $(1, 2, 5)$, при которых исходная система имеет ненулевые решения (x, y, z) .

Эти решения имеют соответственно вид (k, k, k) , $(k, k, 2k)$ и $(2k, k, 3k)$. Единственная триада, удовлетворяющая всем условиям задачи, состоит, следовательно, из чисел 1, 2, 3.

[S. S. M., 49, 590 (October 1949).]

145. Отгороженный участок имеет форму четырехугольника, две стороны которого, выходящие из вер-



шины, противоположащей прямому углу, равны между собой. Из четырех четырехугольников, конгруэнтных дан-

¹ К этому же выводу можно прийти путем поочередного исключения неизвестных. — *Прим. ред.*

ному, можно сложить равносторонний восьмиугольник. Среди таких восьмиугольников максимальную площадь имеет правильный восьмиугольник. Следовательно, четвертая часть этого правильного восьмиугольника и представляет собой искомый четырехугольник максимальной площади $8(\sqrt{2} + 1) \text{ м}^2$. Поэтому ширмы нужно поставить так, чтобы каждая из них образовала со стеной и биссектрисой прямого угла равносторонний треугольник, сторона которого равнялась бы длине ширмы.

[Ф. Хауторн, *N. M. M.*, 19, 322 (March 1945).]

146. Если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, то $a + b = \frac{ab}{c}$. Поскольку a и b — целые числа, то c распадается в произведение, скажем, $c = qr$, где один сомножитель делит a , а другой делит b , так что $a = mq$, $b = pr$. Поэтому $mq + pr = \frac{mqpr}{qr} = mp$. Поскольку у всех трех чисел a , b , c нет общего делителя, отличного от 1, m взаимно просто с r (значит, оно делит p), а p взаимно просто с q (значит, оно делит m). Следовательно, $m = p$, откуда $p(q + r) = p^2$ и $q + r = p$. Отсюда вытекает, что

$$a + b = pq + pr = p(q + r) = p^2,$$

$$a - c = pq - qr = q(p - r) = q^2$$

и

$$b - c = pr - qr = r(p - q) = r^2.$$

[S. S. M., 63, 604 (October 1963).]

147. Первое уравнение системы можно записать в виде

$$(a - b - c)[a^2 + (b - c)^2 + ab + bc + ca] = 0.$$

Поскольку при положительных a , b , c второй сомножитель не может обратиться в нуль, мы получаем

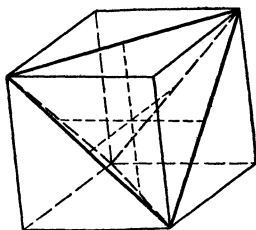
$$a = b + c = \frac{a^2}{2}.$$

Следовательно, единственное решение нашей системы

в положительных целых числах имеет вид $a = 2$, $b = c = 1$.

[Е. У. Марчанд, А. М. М., 65, 43 (January 1958).]

148. Правильный тетраэдр можно вписать в куб, причем противоположные ребра тетраэдра совпадут с непараллельными диагоналями противоположных граней куба. Поэтому середины ребер тетраэдра совпадают с центрами соответствующих граней куба. Значит, отрезок, соединяющий середины двух противоположных ребер тетраэдра, проходит через центр куба, перпендикуляр



ен двум противоположным граням и параллелен четырем ребрам данного куба. Но поскольку три ребра куба, выходящие из одной его вершины, взаимно перпендикулярны, мы получаем, что три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, взаимно перпендикулярны и пересекаются в одной точке.

149. Пусть $n = abc$, а N — искомое произведение. Если бы $c = 1$, то наибольшее возможное n , а именно 981, дало бы произведение $N = 159080922$, которое слишком мало. Следовательно, $982 \leq n \leq 987$. Сумма цифр числа N равна $35 \equiv 2 \pmod{3}$; поэтому n и числа, получающиеся из n перестановкой цифр, дают остаток 2 при делении на 3. Значит, n равно либо 986, либо 983. Но 6 в разряде единиц получится у произведения только в случае $n = 983$. Отсюда следует, что правильно набранная строка должна принять вид

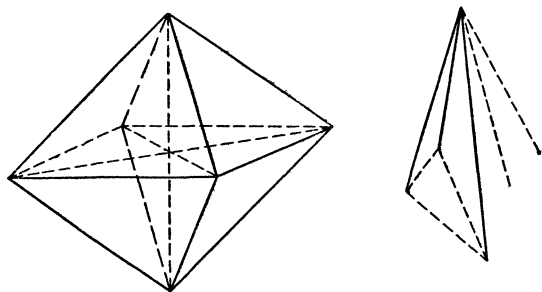
$$(983)(839)(398) = 328\,245\,326.$$

[У. Р. Тальбот, А. М. М., 66, 726 (October 1959).]

150. Результат должен делиться как на 7, так и на 11; следовательно, искомое число равно $7 + 11 = 18^*$. В общем случае число $k + m$ будет решением уравнения $(x - k)k = (x - m)m$.

[М. М., 33, 58 (September 1959).]

151. Мы здесь предполагаем, что знакомство двух людей взаимно, то есть если некий человек знаком с другим человеком, то и второй знаком с первым. Отождествив каждого из 6 человек с некоторой вершиной октаэдра, мы сведем задачу к эквивалентной задаче: если



каждое ребро и каждая диагональ октаэдра окрашены произвольным образом в зеленый или красный цвет, то нужно доказать, что в некотором треугольнике¹ все стороны окрашены в один и тот же цвет.

Каждая вершина соединена ребром или диагональю с любой другой вершиной. Из пяти отрезков, соединяющих данную вершину с остальными, по крайней мере три должны быть окрашены в одинаковый цвет. Взяв эти три отрезка, мы увидим, что возможны два случая.

1. У двух таких отрезков концы соединены отрезком того же цвета. В этом случае два данных отрезка и отрезок, соединяющий их концы, образуют нужный треугольник.

2. Любые два из трех наших отрезков соединены отрезком противоположного цвета. Тогда искомый треугольник образуют три отрезка, соединяющих концы наших трех отрезков.

¹ Имеются в виду только треугольники, вершины которых совпадают с вершинами октаэдра; а кстати, сколько их всего? — Прим. ред.*

152. Умножив числитель и знаменатель нашей дроби на $2^{3/2}$, получим

$$\frac{(8 + 2\sqrt{15})^{3/2} + (5 - 2\sqrt{15} + 3)^{3/2}}{(12 + 2\sqrt{35})^{3/2} - (7 - 2\sqrt{35} + 5)^{3/2}} = \\ = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^3 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^3}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})^3 - (\sqrt{7} - \sqrt{5})^3} = \frac{2(5\sqrt{5} + 9\sqrt{5})}{2(21\sqrt{5} + 5\sqrt{5})} = \frac{7}{13}.$$

[S. S. M., 55, 567 (October 1955).]

153. Пусть $N = pqr$. Тогда $p^2 + q^2 + r^2 = 2331$; значит, каждое из этих простых чисел меньше $(2331)^{1/2} < 49$, а все простые числа нечетны*.

Сумма всех делителей числа N равна $(1 + p) \cdot (1 + q) \cdot (1 + r) = 10560 = 11 \cdot 960$. Единственное кратное 11, не превосходящее 49 и на 1 большее некоторого простого числа, равно 44, так что $r = 43$. Поэтому $p^2 + q^2 = 482$ и каждое из этих двух чисел меньше $(482)^{1/2} < 22$. Далее заметим, что квадрат нечетного числа может оканчиваться лишь на 1, 5 или 9, так что и p^2 и q^2 оканчиваются на 1. Следовательно, $p = 11$, $q = 19$ и $N = 11 \cdot 19 \cdot 43 = 8987^*$.

154. Пусть a/b — рациональное число. Тогда его можно представить как сумму a повторяющихся членов гармонического ряда

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b}.$$

Оставим первое слагаемое неизменным, а остальные $(a - 1)$ слагаемых преобразуем с помощью тождества

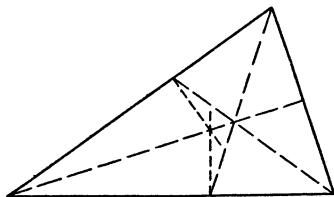
$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Далее еще раз применим к повторяющимся слагаемым данное тождество и будем продолжать этот процесс до тех пор, пока все члены суммы не станут различными*.

[Г. С. Чаннингхэм, А. М. М., 69, 435 (May 1962).]

Например: $\frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} + \frac{1}{9} + \frac{1}{72} + \frac{1}{57} + \frac{1}{3192}$.

155. Биссектриса любого внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Если из какой-ни-



будь внутренней точки треугольника опустить перпендикуляры на стороны, то суммы квадратов длин перемежающихся отрезков, на которые основания данных перпендикуляров разбивают стороны треугольника, будут равны между собой*. Допустим теперь, что все три перпендикуляра, восстановленные из точек пересечения биссектрис со сторонами треугольника a , b , c , пересекаются в одной точке; тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{ca}{a+b}\right)^2 = \\ = \left(\frac{ca}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{ab}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2. \end{aligned}$$

Объединяя члены с одинаковыми знаменателями, получим

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c} + \frac{b^2(c-a)}{c+a} + \frac{c^2(a-b)}{a+b} = 0,$$

откуда

$$(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)^2 = 0.$$

Поскольку по крайней мере один из первых трех сомножителей равен нулю, наш треугольник равнобедренный.

[А. М. М., 46, 513 (October 1939).]

156. Если мы расположим наши числа в виде квадратной таблицы

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

то можно заметить, что каждая строка представляет собой арифметическую прогрессию с разностью, равной 1, а каждый столбец — арифметическую прогрессию с разностью, равной 4. Следовательно, сумма любой пары чисел, стоящей на главных диагоналях, совпадает с суммой по крайней мере одной из пар, расположенной вне этих диагоналей¹. Поэтому искомые два класса — это

A: 1 4 6 7 10 11 13 16 и

B: 2 3 5 8 9 12 14 15

[У. Х. Бенсон]

Выпишем все 28 сумм в каждом из классов: 5, 7, 8, 10, 11 (2), 12, 13, 14 (2), 15, 16, 17 (4), 18, 19, 20 (2), 21, 22, 23 (2), 24, 26, 27, 29. Можно заметить, что сумма членов данной последовательности, равноотстоящих от концов, постоянна и равна $34 = 2(1 + 16)$.

Этот же результат был получен другим способом в журнале *P. M. E. J.*, 3, 182 (Spring 1961).

157. Быть может, кто-нибудь сразу скажет, что необходимо взять $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ различных бюллетеней. Однако если мы добавим две фиктивные фамилии к группе из трех кандидатов и одну фиктивную фамилию к группе из четырех кандидатов, то потребуется всего лишь 5 различных бюллетеней. Этот прием не только снижает расходы на печать, но и позволяет собрать статистический материал, позволяющий сделать вывод, что более влияет на результаты голосования: номер, под которым данный кандидат входит в список, или его фамилия.

[М. С. К л а м к и н, М. М., 30, 110 (November 1956).]

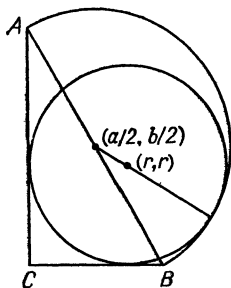
158. Для ответа на вопрос задачи достаточно заметить, что

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y > x + y - \frac{2xy}{x + y} = \frac{x^2 + y^2}{x + y}.$$

159. Введем прямоугольную систему координат, оси которой направим вдоль катетов треугольника *ABC*.

¹ Сместив одно из этих чисел «ходом ладьи» на одно или два места по вертикали или горизонтали, передвинем второе в противоположном направлении. — *Прим. ред.*

В этой системе координаты центра вписанного круга и центра заданной полуокружности равны соответственно (r, r) и $(a/2, b/2)$, где r — радиус искомого круга, а a и b — длины катетов треугольника ABC . Расстояние между центрами равно разности радиусов, то есть справедливо соотношение $(r - a/2)^2 + (r - b/2)^2 = (c/2 - r)^2$. Отсюда, воспользовавшись равенством $a^2 + b^2 = c^2$, мы получим, что $r = a + b - c$. Другими словами,



радиус искомого круга равен диаметру круга, вписанного в прямоугольный треугольник ABC^* .

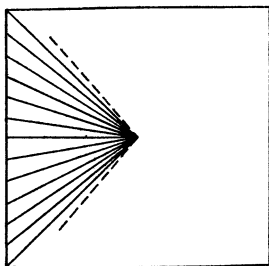
[М. А. Кирхберг, А. М. М., 62, 444 (June 1955).]

160. Если мы просуммируем все числа, стоящие вдоль каждой строки, столбца или диагонали, то при этом каждое число сосчитаем четырежды. Следовательно, общая сумма всех таких сумм равна $4[n^2(n^2 + 1)/2] = 2n^2(n^2 + 1)$. Если бы существовало такое k , что $4n$ наших сумм представляли бы собой последовательные числа от k до $k + 4n - 1$ включительно, то общая сумма равнялась бы $2n(2k + 4n - 1)$. Приравнявая между собой данные два выражения, мы получили бы, что $n(n^2 + 1) = 2k + 4n - 1$. Но слева стоит четное, а справа — нечетное число. Следовательно, нужного k не существует ни при каком n , а это значит, что ни при каком n наши суммы не совпадают с $4n$ последовательными целыми числами.

[Д. К. Б. Марш, А. М. М., 62, 42 (January 1955).]

161. Рассмотрим выражение $I = (\sqrt{3} + 1)^{2m} + (\sqrt{3} - 1)^{2m}$, которое, очевидно, представляет собой целое число. Поскольку $(\sqrt{3} - 1)^{2m}$ меньше 1, I совпадает

165. Разобьем квадратное поле на треугольники, каждый из которых ограничен одной секцией (то есть участком длиной 10 м) забора и двумя прямыми, соединяющими концы этой секции с центром квадрата. Площади всех таких треугольников равны между собой, а их общая высота составляет $\frac{1}{2}$ часть стороны x нашего квадрата. Площадь каждого из них равна стольким гектарам, сколько досок содержится у него в основании, то есть $4 \text{ га} = 40\,000 \text{ м}^2$. Поэтому $(\frac{1}{2})(\frac{x}{2})(10) = 40\,000$ и,



следовательно, сторона квадратного поля равна $16\,000 \text{ м} = 16 \text{ км}$.

Вообще, если поле имеет форму правильного многоугольника, его площадь равна $\frac{1}{2}$ (периметр) (радиус вписанного круга). В нашем случае $4 \cdot p/10 = \frac{1}{2}pr/10\,000$ и $2r = 16\,000 \text{ м} = 16 \text{ км}$.

[P. P. Poy, *Civil Engineering — ASCE*, 11, 70 (January 1941).]

166. Заметим, что $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1 = 8k + 1$, поскольку из двух последовательных целых чисел одно обязательно четно. Отбросить 1 — это все равно что разделить $4n(n + 1)$ на основание системы 8. При этом как раз и получится треугольное число $n(n + 1)/2$.

[Г. У. Уишард, *N. M. M.*, 10, 313 (May 1936).]

167. Ответ: ни у какого. Радиус вписанной окружности треугольника со сторонами a , b , c вычисляется по формуле

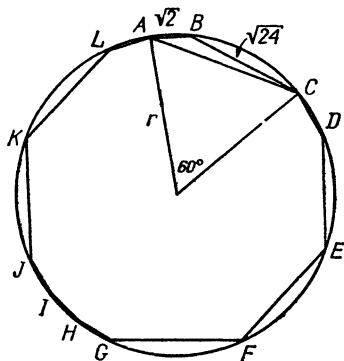
$$r = \frac{S}{p} = \left[\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \right]^{1/2}, \quad \text{где} \quad 2p = a + b + c.$$

Отсюда для каждого из наших треугольников получится значение радиуса, равное 6.

Редким примером «тупоугольных близнецов» служат треугольники со сторонами, равными соответственно 97, 169, 122 и 97, 169, 228. У каждого из них радиус вписанного круга равен 30.

[Б. Х. Браун, М. М., 29, 275—276 (May 1956).]

168. Пусть AB и BC — две смежные, но не равные стороны нашего двенадцатиугольника. Тогда $\cup AB +$



$+ \cup BC = \cup AC = 360^\circ/6 = 60^\circ$; значит, $AC = r$. Применяя теорему косинусов к треугольнику ABC , у которого угол $ABC = 150^\circ$, получим

$$(AC)^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{24})^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{24}(-\sqrt{3}/2) = 38.$$

Таким образом, $r = \sqrt{38}$.

[Норман Аннинг, М. М., 28, 113 (November 1954).]

169. Поскольку $2^{24} + 2^{24} = 2^{25}$, мы получаем $(2^8)^3 + (2^6)^4 = (2^5)^5$; откуда $a = 256$, $b = 64$, $c = 32$.

[Лео Мозер, М. М., 26, 53 (September 1954).]

170. Процентное содержание спирта в старом растворе отличается от процентного содержания спирта в новом (или смешанном) растворе на -24% , а процентное содержание спирта в растворе, который доливают в радиатор, отличается от процентного содержания спирта в новом растворе на $+48\%$. Следовательно, на каждую кварту 90% -ного раствора, долитую в радиатор, должны приходиться 2 кварты старого 18% -ного раствора. По-

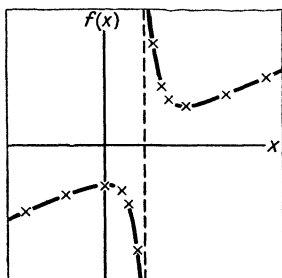
этому из радиатора нужно отлить $\frac{1}{3}$ всего объема, или 7 кварт старого раствора.

[Б. Е. Митчелл, М. М., 26, 153 (January 1953).]

171. Сделаем преобразования:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} = \frac{1}{2} \left[x - 1 + \frac{1}{x - 1} \right] = \frac{x^2}{2(x - 1)} - 1.$$

Сумма двух взаимно обратных чисел принимает наименьшее по абсолютной величине значение в том случае, когда эти числа равны ± 1 . Поэтому $f(x)$ принимает наименьшее по абсолютной величине значение при



$x - 1 = \pm 1$, то есть при $x = 2$ или 0 . Из последнего выражения для $f(x)$ становится ясным, что $f(x)$ не ограничена сверху при $x > 2$, не ограничена снизу при $x < 0$ и не определена при $x = 1$.

Отсюда следует, что в точке $x = 2$ у $f(x)$ — локальный минимум, равный 1, а в точке $x = 0$ у нее локальный максимум, равный -1 .

172. Заметим, что $360^\circ - 125^\circ = 117^\circ + 118^\circ$; поэтому

$$\begin{aligned} -\operatorname{tg} 125^\circ &= \operatorname{tg} (117^\circ + 118^\circ) = \\ &= (\operatorname{tg} 117^\circ + \operatorname{tg} 118^\circ) : (1 - \operatorname{tg} 117^\circ \cdot \operatorname{tg} 118^\circ). \end{aligned}$$

Упрощая это выражение, получим

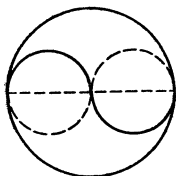
$$\operatorname{tg} 117^\circ \cdot \operatorname{tg} 118^\circ \cdot \operatorname{tg} 125^\circ = \operatorname{tg} 117^\circ + \operatorname{tg} 118^\circ + \operatorname{tg} 125^\circ.$$

[Норман Аннинг, М. М., 32, 113 (November 1958).]

В общем случае сумма тангенсов углов в A° , B° и C° , таких, что $A^\circ + B^\circ + C^\circ = 360^\circ$, равна произведению этих тангенсов.

173. Сохранившиеся цифры показывают, что $3 + 1 = 10$; следовательно, выкладки проводились в четверичной системе счисления, то есть в системе с основанием 4. Но в этой системе различных цифр всего 4. Одно из кратных делителя имеет вид $**1$, а другое $3*$. Далее $*$, в той же системе $(3 \cdot 13) = 111$, $3 \cdot 23 = 201$, $3 \cdot 33 = 231$, $2 \cdot 13 = 32$ и $1 \cdot 33 = 33$. Однако $2 \cdot 13 + 1 < 100$; поэтому, воспользовавшись результатом первого вычитания, мы находим делитель, равный 33. Отсюда следует, что частное равно 1031, а делимое — 102 003.

174. Повернем всю конфигурацию на 180° вокруг данного диаметра. При этом мы получим два круга, диаметр каждого из которых составляет $\frac{1}{2}$ данного диаметра и, следовательно, площадь каждого из которых



равна $\frac{1}{4}$ площади исходного круга. Значит, площадь каждой из областей, полученных удалением из инь и ян соответствующих кругов, тоже равна $\frac{1}{2}$ их площади.

[М. М., 34, 107—108 (November 1960).]

175. В любой системе счисления с основанием $B \geq 10$ справедливы неравенства

$$2(297) < 2(300) = 600 < 792 < 800 = 4(200) < 4(297).$$

Следовательно, $792 = 3(297)$, так что $7B^2 + 9B + 2 = 3(2B^2 + 9B + 7)$, или $B^2 - 18B - 19 = 0$. Отбрасывая отрицательный корень этого квадратного уравнения, получим $B = 19$.

[Д. Л. Силвермэн, М. М., 38, 124 (March 1965).]

176. То, что брак был совершен законно, сводит число возможных вариантов к трем *:

64 10

49 13

36 9

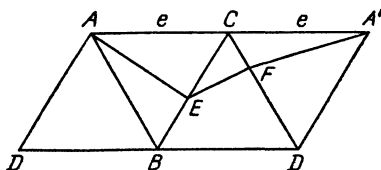
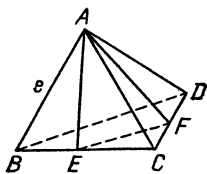
24 6

36 9

18 9

Если мы теперь сопоставим возраст детей с возрастом родителей, то обнаружим единственный возможный вариант, а именно: отцу сейчас 49, матери — 36, дочери — 13 и сыну — 9 лет. Хотя любопытно отметить, что $1 + 3 = 4$, а членов семьи также четверо, все же 13 не является точным квадратом и тем нарушает поголовную «квадратность» семьи. Эти числа обладают и еще одним интересным свойством: сумма возрастов матери и дочери равна возрасту отца.

177. Если мы составим параллелограмм из четырех приложенных друг к другу равносторонних треугольников со стороной e , то в этом параллелограмме длина



любого отрезка, проведенного параллельно большей его стороне, будет равна $2e$. Отсюда следует, что если мы сложим из этого параллелограмма правильный тетраэдр и проведем затем любую плоскость, перпендикулярную отрезку, соединяющему середины противоположных ребер тетраэдра (бимедиане), то периметр полученного сечения будет равен $2e$.

Следовательно, если мы совместим бимедиану с осью цилиндра, то тетраэдр можно будет протолкнуть сквозь гибкий тонкостенный цилиндр, периметр сечения которого равен $\pi d = 2e$. Таким образом, ребро искомого тетраэдра равно $e = \pi d/2$. На практике края одного из концов цилиндра полезно слегка отогнуть наружу, чтобы тетраэдр легче было втиснуть внутрь цилиндра.

Если тетраэдр расположить по-другому относительно оси цилиндра, то некоторая плоскость, перпендикулярная этой оси, пройдет через вершину тетраэдра и пересечет два ребра, не выходящих из данной вершины. Как легко заметить на нашей развертке, периметр такого сечения $AEFA'$ окажется больше $2e$, и мы не сможем в таком положении протолкнуть наш тетраэдр сквозь данный цилиндр. Отсюда следует, что ребро максималь-

ного тетраэдра, который можно протолкнуть сквозь цилиндр диаметра d , равно $\pi d/2$.

[М. М., 39, 133 (March 1966).]

$$\begin{aligned} 178. \quad f(a, n) &= a^{n+1} - n(a-1) - a = \\ &= a(a^n - 1) - n(a-1) = \\ &= (a-1)[a(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1) - n]. \end{aligned}$$

Поскольку многочлен в квадратных скобках обращается в нуль при $a=1$, этот многочлен делится на $(a-1)$. Таким образом, $f(a, n)$ делится на $(a-1)^2$.

179. Закон, по которому составлена наша таблица, заключается в том, что каждый элемент равен сумме двух других элементов, один из которых стоит непосредственно над данным элементом, а второй — слева от данного элемента. Применим к нашему определителю n -го порядка операцию вычитания столбцов (столб.) $_i$ — (столб.) $_{i-1}$, $i = n, (n-1), \dots, 2$, а затем разложим его по первой строке. В результате мы получим определитель $(n-1)$ -го порядка, равный минору, который определяется элементом, стоящим в левом нижнем углу исходного определителя. Продолжая этот процесс, мы придем в конце концов к значению 1. Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 10 & 15 & 21 \\ 10 & 20 & 35 & 56 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 10 & 15 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 15 & 21 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

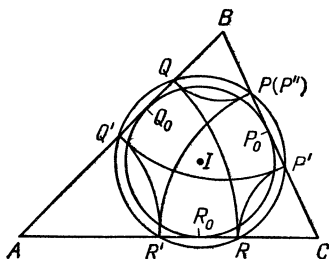
Поскольку исходная таблица симметрична относительно главной диагонали, приведенное доказательство остается справедливым и для определителей, первый столбец которых расположен в первом столбце таблицы. Только в этом случае следует вычитать не столбцы, а строки.

180. Наша кривая третьего порядка представляет собой объединение эллипса и прямой, что станет очевидным, если мы запишем исходное уравнение в виде

$$(x + y - 1)(2x^2 - 2xy + 2y^2 - x - y - 1) = 0.$$

Взяв на прямой $x + y - 1 = 0$ произвольную точку с рациональной координатой x , мы обнаружим, что соответствующая координата $y = 1 - x$ рациональна.

181. Пусть P_0 , Q_0 и R_0 — точки, в которых вписанная окружность касается сторон треугольника ABC ; тогда $PP_0 = QQ_0 = RR_0 = P'P_0 = Q'Q_0 = R'R_0 = P''P_0$. Отсюда ясно, что наша конструкция замкнута и что точки



P , Q , R , P' , Q' , R' лежат на некоторой окружности, концентрической с вписанной.

[Хоуорд Ивс, *А. М. М.*, 50, 391 (June 1943).]

Это доказательство проходит и для многоугольника нечетного порядка, в который можно вписать окружность, а также для многоугольника нечетного порядка, который можно деформировать, не меняя длины его сторон, в другой многоугольник, обладающий вписанной окружностью.

182. n -я группа содержит n целых чисел; следовательно, количество целых чисел во всех группах от 1-й до n -й включительно равно $n(n+1)/2$, а количество чисел во всех группах до $(n-1)$ -й включительно равно $(n-1)n/2$. Эти два множества представляют собой

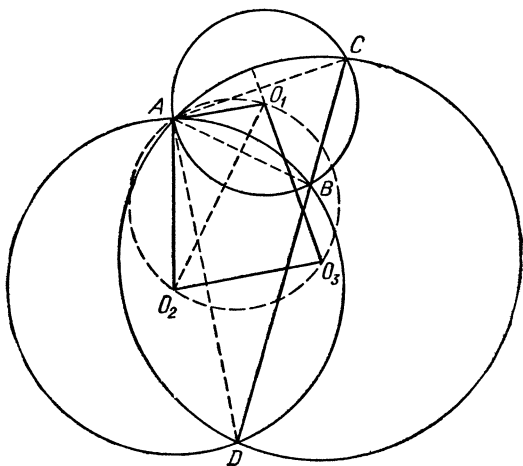
арифметические прогрессии с общей разностью, равной 2. Поэтому сумма всех чисел n -й группы равна

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \left\{ 2 + \left[\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right] 2 \right\} - \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \left\{ 2 + \left[\frac{(n-1)n}{2} - 1 \right] 2 \right\} = \\ & = n^2 \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{4} = n^3. \end{aligned}$$

183. Пусть R — радиус описанной сферы, а r — радиус шестнадцатиточечной сферы. Если данный тетраэдр правильный, то $r = R/3$; если же у него три плоских угла при некоторой вершине прямые, то $r = \infty$ (поскольку в этом случае все центры описанных окружностей лежат в одной плоскости), а R — конечен. Так как правильный тетраэдр можно с помощью непрерывной деформации превратить в тетраэдр с тремя прямыми углами при вершине, существует промежуточное положение, при котором $r = R/2$. Более того, существуют промежуточные положения, при которых величина r/R принимает любые заданные значения, большие $1/3$.

[Хоурд Ивс, А. М. М., 50, 389 (June 1943).]

184. Пусть окружности с центрами в O_1, O_2, O_3 проходят через общую точку A . Пусть, далее, окружности



(O_1) и (O_2) пересекаются в точке B ; (O_1) и (O_3) — в точке C ; а окружности (O_2) и (O_3) пересекаются в точке D . Отрезок O_3O_1 перпендикулярен CA , а отрезок O_3O_2 перпендикулярен AD ; поэтому $\angle O_1O_3O_2 + \angle CAD = 180^\circ$. В круге (O_1) $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB = \angle AO_1O_2$ (поскольку O_1O_2 — серединный перпендикуляр к отрезку AB). В круге (O_2) $\angle ADB = \frac{1}{2} \cup AB = \angle AO_2O_1$. Далее, точки C, B, D по условию коллинеарны; следовательно, треугольники ACD и AO_1O_2 подобны, а $\angle CAD = \angle O_1AO_2$. Отсюда следует, что $\angle O_1O_2O_3 + \angle O_1AO_2 = 180^\circ$, а четырехугольник $O_1O_3O_2A$ вписан в некоторый круг.

[А. М. М., 72, 547 (May 1965).]

185. Возьмем следующие четыре перестановки из четырех букв: $P_1(xyzw)$, $P_2(zwxy)$, $P_3(wzyx)$ и $P_4(yxwz)$.

Каждый игрок встречается ровно один раз с каждым из остальных 15 игроков; поэтому соревнование должно состоять из $15/3 = 5$ туров. Расположим инициалы 16 участников в виде квадратной таблицы (матрицы) 4×4 . Затем выпишем еще три матрицы, оставив первый столбец неизменным и применив ко второму столбцу первой матрицы последовательно перестановки P_4, P_3, P_2 , к третьему столбцу — перестановки P_2, P_4, P_3 и, наконец, к четвертому столбцу — перестановки P_3, P_2, P_4 . Таким образом, мы получим

<i>AEIM</i>	<i>AFKP</i>	<i>ANJO</i>	<i>AGLN</i>
<i>BFJN</i>	<i>BELO</i>	<i>BGIP</i>	<i>BHKM</i>
<i>CGKO</i>	<i>CHIN</i>	<i>CFLM</i>	<i>CEJP</i>
<i>DHLP</i>	<i>DGJM</i>	<i>DEKN</i>	<i>DFIO</i>

Четверки в первых четырех турах задаются с помощью строк этих четырех матриц; в пятом же туре четверки задаются с помощью столбцов первой матрицы. Заметим, что если бы мы данными буквами обозначили некоторые числа, а затем раскрыли определитель первой матрицы, то обнаружили бы, что элементы, произведения которых берутся со знаком плюс, как раз и образуют строки трех остальных матриц.

Если мы захотим поступить подобным же образом с теми элементами, произведения которых берутся со знаком минус, то нам нужно для этого применить по-

следовательно ко второму столбцу первой матрицы перестановки P_3, P_4, P_2 , затем к третьему столбцу — перестановки P_2, P_3, P_4 и, наконец, к четвертому столбцу первой матрицы — перестановки P_4, P_2, P_3 . Таким путем мы получим второе решение данной задачи*.

<i>AEIM</i>	<i>AHKN</i>	<i>AFLO</i>	<i>AGJP</i>
<i>BFJN</i>	<i>BGLM</i>	<i>BEKP</i>	<i>BHIO</i>
<i>CGKO</i>	<i>CFIP</i>	<i>CGJM</i>	<i>CELN</i>
<i>DHLP</i>	<i>DEJO</i>	<i>DHIN</i>	<i>DFKM</i>

186. Если $T[n] = n(n+1)/2$ является n -м треугольным числом, совпадающим одновременно с некоторым квадратом, то число $T[4n(n+1)] = 4T[n](2n+1)^2$ тоже представляет собой точный квадрат. Поскольку первое треугольное число 1 обладает, очевидно, нужным свойством, существует бесконечно много квадратных треугольных чисел.

[А. У. Силвестер, А. М. М., 69, 168 (February 1962).]

187. Вспоминая о связи между корнями и коэффициентами уравнения 3-го порядка с одним неизвестным, мы замечаем, что x, y, z совпадают с корнями кубического уравнения

$$a^3 - 6a^2 + 11a - 6 = 0.$$

Далее,

$$(a-1)(a-2)(a-3) = 0,$$

$$a = 1, 2, 3.$$

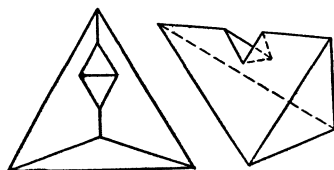
Поскольку исходная система симметрична относительно x, y, z , все ее шесть решений совпадают с шестью перестановками чисел 1, 2, 3, а именно:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3),$$

$$(2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

[Д. Г. Бакли, S. S. M., 40, 483 (May 1940).]

188. В качестве такого многогранника можно взять тетраэдр, из которого вырезан кусок, также имеющий форму тетраэдра, как показано на рисунке. Легко ви-



деть, что полученный граф преобразуется в граф, указанный в условии задачи.

[Р. Коннели, А. М. М., 69, 1009 (December 1962).]

189. Мы сравним сначала каждую команду с некой условной командой, у которой выигрыши составляют 50%, а разность $B - П$ равна, очевидно, нулю. Если у нашей команды $B > П$, то ее выигрыши составляют более 50% и мы, по определению, отнесем ее к верхнему классу. Если же у нашей команды $B < П$, то мы отнесем ее к нижнему классу. Очевидно, каждая команда верхнего класса должна располагаться в таблице выше любой команды нижнего класса. Рассмотрим, далее, две команды A и C . Команда A должна располагаться в таблице заведомо выше C , если $B_A > B_C$, а $П_A \leq П_C$ или если $B_A = B_C$, а $П_A < П_C$. Таким образом, мы получим таблицу, в которой сомнение может вызывать только относительное расположение команд, отмеченных звездочкой.

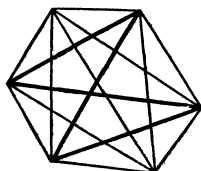
	B	$П$		B	$П$
*Цинциннати	49	36	*Питсбург	44	43
*Лос-Анджелес	51	38	Сент-Луис	41	45
Сан-Франциско	45	38	*Чикаго	41	46
Филадельфия	45	39	*Хьюстон	39	45
*Милуоки	42	50	Нью-Йорк	29	56

Пусть $B_A = B_C + x$, а $П_A = П_C + y$. Тогда если обе команды принадлежат верхнему классу и $x \leq y$, то A должна быть расположена в таблице ниже C . Если обе команды принадлежат нижнему классу и $x \geq y$, то A должна располагаться выше C . Следовательно, последние сомнения отпадают и приведенная выше таблица составлена правильно.

190. Поскольку $216 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 9 \cdot 24$, хозяйка купила 24 фунта.

[М. М., 33, 118 (November 1959).]

191. Рассмотрим многоугольник с n сторонами, где $n \geq 4$. Любые четыре вершины этого многоугольника определяют некоторый четырехугольник, диагонали которого совпадают с двумя пересекающимися диагона-



лями исходного n -угольника. И обратно; любые две пересекающиеся диагонали исходного n -угольника определяют некоторый четырехугольник. Следовательно, иско-
мое число точек пересечения диагоналей равно C_n^4 . Раз-
умеется, некоторые точки пересечения могут между со-
бою совпасть.

[Норберт Кауфман и Р. Х. Кох, А. М. М., 54, 344
(June 1947).]

192. Дано, что $a + b + c = 0$ и $d + e + f = 0$. По-
этому

$$(a + b)^3 = (-c)^3,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = -3ab(a + b) = 3abc.$$

Аналогично

$$d^3 + e^3 + f^3 = -3de(d + e) = 3def.$$

Наконец,

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{d^3 + e^3 + f^3} = \frac{abc}{def}.$$

[Аарон Бачмэн, S. S. M., 38, 220 (February 1938).]

193. Пусть $f(x) = x^a + x^b + 1 = x^a + x^{3k} \cdot x^{-a} + 1$. Кубические корни из 1 равны соответственно 1, $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ и ω^2 . Поскольку a взаимно просто с 3, то либо $\omega^a = \omega$, а $\omega^{-a} = \omega^2$, либо $\omega^a = \omega^2$, а $\omega^{-a} = \omega$. В любом из этих случаев

$$f(\omega) = f(\omega^2) = 1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

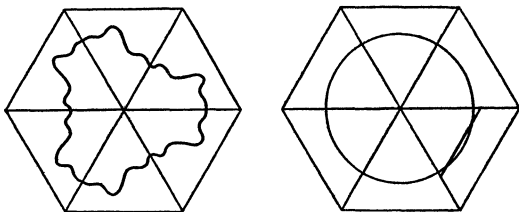
Следовательно, $(x - \omega)(x - \omega^2) = x^2 + x + 1$ является делителем многочлена $x^a + x^b + 1$.

[Хоуорд Д. Гроссмэн, S. S. M., 45, 486 (May 1945).]

194. Поскольку x, y, z положительны, $x > z$ и $y > z$. Пусть $x = z + u$, а $y = z + v$; $u, v > 0$. Уравнение $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ приведет к виду $z^2 = uv$. Поэтому при любом z нам нужно всего лишь разложить z^2 в произведение двух целых положительных чисел w и v .

[Марин Л. Гейнс, N. M. M., 19, 100 (November 1944).]

195. Зафиксируем одну вершину треугольника и отразим его вместе с искомой кривой несколько раз относительно сторон, выходящих из этой вершины. При этом



мы получим правильный шестиугольник и замкнутую кривую, которая разделит этот шестиугольник на две равновеликие части, как показано на рисунке. Поскольку длина кривой минимальна, эта кривая представляет собой окружность с центром в данной фиксированной вершине.

[Л. Мозер.]

196. Заметим, что

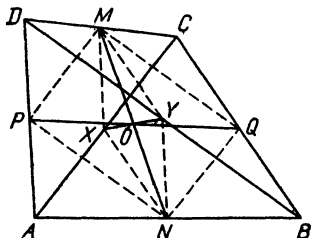
$$\begin{aligned} N^2 &= \overline{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 a_1 a_2 a_3} = \overline{a_1 a_2 a_3} \cdot 1\,002\,001 = \\ &= \overline{a_1 a_2 a_3} \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2. \end{aligned}$$

Следовательно, число $a_1 a_2 a_3$ равно квадрату простого числа P , отличного от 7, 11 и 13. Далее, $a \neq 0$, а $\overline{b_1 b_2 b_3} < 1000$; поэтому $10 < P < 23$. Следовательно, P совпадает либо с 17, либо с 19; $a_1 a_2 a_3 = 289$ либо 361; $N^2 = 289\,578\,289$, либо $361\,722\,361$. Оба эти случая дают решение нашей задачи.

[П. Н. Нагара, M. M., 24, 108 (November 1950).]

197. Если разность баллов, полученных за один тест, равная $97 - 73 = 24$ очкам, вызывает изменение среднего балла на $90 - 87 = 3$ очка, то в данной серии содержится всего $24/3 = 8$ тестов.

198. Середины сторон произвольного четырехугольника $ABCD$ служат вершинами некоторого параллелограмма $MQNP$, а диагонали параллелограмма PQ и MN , пересекаясь в точке O , делятся пополам. Рассмотрим теперь четырехугольник $ACDB$ со сторонами AC , CD , DB и BA . Точки M , N и X , Y (середины диагоналей



исходного четырехугольника) делят стороны четырехугольника $ACDB$ пополам. Значит, $MYNX$ — параллелограмм. Диагонали MN и XY этого параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам. Следовательно, середина отрезка XY совпадает с серединой отрезка MN , то есть с точкой O *.

[Л. Р. Чейз, S. S. M., 31, 616 (May 1931).]

199. Если $\frac{k}{n}$ — несократимо, то $1 - \frac{k}{n} = \frac{n-k}{n}$ тоже представляет собой несократимую дробь. Поэтому несократимые дроби входят в данную последовательность парами и, следовательно, их количество всегда четно.

[Н. Аннинг, M. M., 27, 284 (May 1954).]

200. Поскольку себестоимость любого предмета меньше его розничной цены, мы можем, изучив цены сахарницы и сливочника, заключить, что $H = 0$. Сравнивая далее эти цены между собой, находим

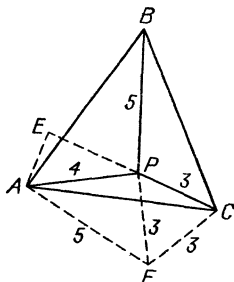
$$\overline{KOC} : \overline{CKO} = 672 : 600 = 28 : 25.$$

Отсюда следует, что KO кратно 25, то есть что $K = 5$. Можно заметить также, что C — четное число, меньшее

K^* ; поэтому $\overline{K0C} = 504$, а $\overline{CK0} = 450$. Следовательно, стоимость составляет $450/600 = 3/4$ розничной цены. Отсюда мы немедленно получаем, что поднос стоит 37,62 доллара, чайник 68,31 доллара, $T = 9$, а ключ к коду торговца имеет вид

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
B L A C K S M I T H

201. В треугольнике ABC отношение данных трех отрезков равно $PC:PA:PB = 3:4:5$. Построим равнобедренный треугольник PCF так, чтобы точки P и F



находились по разные стороны от AC . Проведем отрезок AF . На продолжение отрезка CP опустим из точки A перпендикуляр AE . Заметим, что $\angle PCB = 60^\circ - \angle PCA = \angle ACF$; поэтому треугольник PCB равен треугольнику FCA , а $AF = BP = 5$. Значит, треугольник APF прямоуголен, откуда $\angle APE = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$. Следовательно, $AE = 2$, а $EP = 2\sqrt{3}$. Таким образом,

$$AC = \sqrt{(2)^2 + (3 + 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}} \approx 6,7664 \text{ см.}$$

[S. S. M., 33, 450 (April 1933).]

202. Поскольку остаток не меняется, делитель обязан быть нечетным. Далее, $1453 - 1108 = 345$, $1844 - 1453 = 391$, $2281 - 1844 = 437$. Теперь заметим, что $437 - 391 = 391 - 345 = 46 = 2 \cdot (23)$. Так как всегда справедливо соотношение

$$(N_1d + r) - (N_2d + r) = d(N_1 - N_2),$$

искомое число равно 23, а соответствующий остаток равен 4.

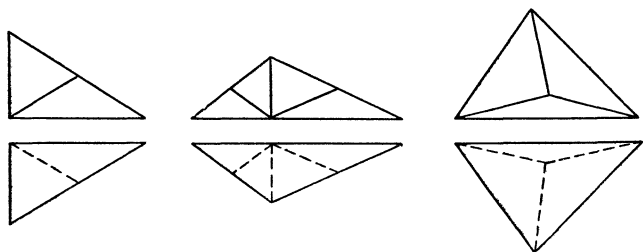
[М. М., 35, 62 (January 1962).]

203. Цифра c может совпадать только с 3 или 4. Однако число $(64\,644)^2$ — десятизначно. Поэтому единственным решением нашей задачи будет $(27\,273)^2 = 743\,816\,529$.

[Н. Фарнум, S. S. M., 63, 603 (October 1963).]

Это решение будет единственным даже в том случае, если мы отбросим ограничение $ab = c^3$. Более того, $27\,273 = 3(9091)$, а 9091 представляет собой наибольший простой делитель любого квадрата, составленного из девяти неповторяющихся ненулевых цифр.

204. Один из двух заданных треугольников вовсе не нужно разрезать, а другой следует разрезать на несколько равнобедренных треугольников. Если исходный



треугольник прямоугольный, то разрез нужно провести по медиане, опущенной на гипотенузу. Тупоугольный треугольник следует разрезать сначала на два прямоугольных треугольника вдоль высоты, опущенной на самую большую из сторон, а затем поступить так же, как и в предыдущем случае. Наконец, остроугольный треугольник можно разбить на три равнобедренных треугольника, проведя разрезы вдоль отрезков, соединяющих центр окружности, описанной около данного треугольника, с его вершинами.

[Луис Р. Чейз, S. S. M., 30, 949 (November 1930).]

205. Пусть $b = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{1/2}$ и $a = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/2}$; тогда

$$x = a + b, \quad (1)$$

а поскольку $x \neq 0$,

$$b - a = \frac{b^2 - a^2}{b + a} = \frac{x - 1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \quad (2)$$

Складывая (1) и (2), получим

$$2b = x - \frac{1}{x} + 1 = b^2 + 1,$$

откуда $b = 1$.

Следовательно,

$$x - \frac{1}{x} = 1, \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Однако исходному уравнению удовлетворяет только

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

[П. М. Анселоун и С. Кук, *A. M. M.*, 62, 728 (December 1955).]

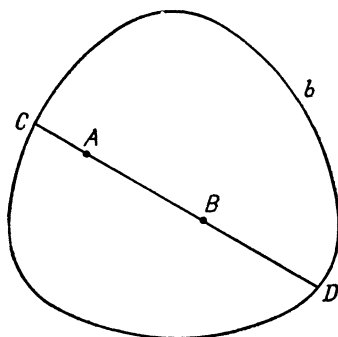
(А кстати, как решал это уравнение профессор Умбурджо? — *Ред.*)*

206. Возьмем 100 мужчин и будем записывать каждую из четырех характеристик для каждого из мужчин, который этой характеристикой обладает. В результате мы получим $70 + 75 + 85 + 90 = 320$ записей. Поскольку на 100 мужчин приходится 320 записей, можно заметить, что при самом равномерном распределении характеристик среди мужчин на одного мужчину придется не менее 3 характеристик. Следовательно*, по крайней мере 20 мужчин (или 20%) обладают всеми четырьмя характеристиками. В общем случае если n — число различных характеристик, а p_i — процент мужчин, обладающих i -й характеристикой, то процент P мужчин, обладающих всеми n характеристиками, находится по формуле

$$P = \sum_{i=1}^n p_i - 100(n-1).$$

[*M. M.*, 38, 211 (September 1965).]

207. Пусть C и D — точки пересечения прямой AB с границей b . Поскольку ширина данной области равна 1, $CD \leq 1^*$. Но $(AC + CB) + (BD + DA) = 2CD$.



Следовательно, по крайней мере одна из величин $(AC + CB)$ и $(BD + DA)$ не превосходит 1.

[Л. Мозер.]

208. В общем случае $n! < (n+1)^n$, поскольку каждый из n сомножителей, стоящих в левой части, меньше $(n+1)$. Поэтому

$$(n!)^n n! < (n!)^n (n+1)^n \quad \text{или} \quad (n!)^{n+1} < [(n+1)!]^n.$$

Извлекая из обеих частей данного неравенства корень степени $n(n+1)$, мы получим

$$(n!)^{1/n} < [(n+1)!]^{1/(n+1)}.$$

В нашем конкретном случае мы могли бы рассуждать и так. Допустим, что $(8!)^{1/8} \geq (9!)^{1/9}$. Возведя обе части данного неравенства в 72-ю степень, мы придем к неравенству $(8!)^9 \geq (9!)^8$, ложность которого станет очевидной, если мы разделим обе его части на $(8!)^8$. (Действительно, мы получим при этом $8! \geq 9^8$, что неверно.)

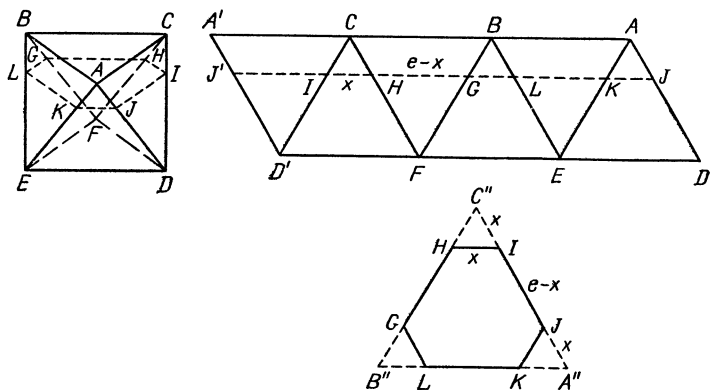
Таким образом, $\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$.

209. Последовательность Фибоначчи удовлетворяет рекуррентному соотношению $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, поэтому любые три последовательных числа Фибоначчи удовлетворяют уравнению $x + y = z$. Следовательно, все че-

тыре вершины нашего тетраэдра лежат в одной плоскости, а его объем равен 0.

Мы можем заметить, что все рассуждения сохранятся и в том случае, если координаты вершин не будут совпадать с 12 последовательными числами Фибоначчи. Достаточно, чтобы координаты каждой из вершин совпадали с любыми тремя последовательными числами Фибоначчи.

210. Если мы разрежем правильный октаэдр $ABCDEF$ вдоль некоторых ребер, то затем его можно будет «развернуть» на плоскость; при этом получится параллелограмм $ADD'A'$, состоящий из шести равносторонних



треугольников. (Треугольников получится 6, а не 8 потому, что при такой «развертке» ребра AC , CB и AB располагаются вдоль одной прямой; то же относится и к ребрам DE , EF и FD . В результате «исчезают» две грани: ACB и DEF .) Отсюда видно, что периметр сечения, параллельного, например, грани ABC , равен длине отрезка AA' на нашей «развертке», то есть $3e$.

Если $AJ = x$ (см. рисунок), то сечение представляет собой шестиугольник, который можно получить, отрезав от углов равностороннего треугольника со стороной $e+x$ три меньших равносторонних треугольника со стороной x . Следовательно, стороны такого шестиугольника, длина которых x и $e-x$, чередуются между собой, а его площадь равна $[(e+x)^2 - 3x^2] \sqrt{3}/4$ и принимает минимальное значение при $x=0$ и максимальное — при

$x = e/2$. Максимальный шестиугольник получится, когда сечение пройдет через середины ребер октаэдра. Этот шестиугольник будет правильным, а его площадь составит $3/2$ площади грани октаэдра.

211. Рассмотрим конечную числовую последовательность $1, 2, \dots, n$. Среди ее членов есть один и только один член θ , в разложении которого на простые сомножители 2 содержится в максимальной степени. Обозначим наименьшее общее кратное всех членов данной последовательности через $2M$. Умножим далее обе части равенства $S = 1 + 1/2 + 1/3 \dots + 1/n$ на M . В правой части каждое слагаемое, за исключением $1/\theta$, после умножения на M даст целое число. Число M/θ не может быть целым, поскольку после всех сокращений в знаменателе этой дроби останется 2. Следовательно, число SM (а значит, и S) не может быть целым.

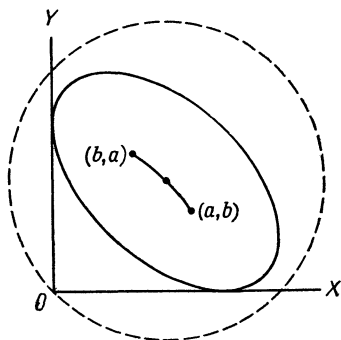
212. Каждое целое число можно представить в одном из следующих видов: $4k, 4k + 1, 4k + 2$ или $4k + 3$. Поэтому квадраты целых чисел представимы либо в виде $4k$, либо в виде $4k + 1$, а сумма двух таких квадратов имеет вид $4k$, или $4k + 1$, или, наконец, $4k + 2$. Любое нечетное число имеет вид $4k + 1$ или $4k + 3$; следовательно, не только среди трех, но даже и среди двух последовательных нечетных чисел обязательно есть одно, не представимое в виде суммы двух квадратов.

213. Пусть R — сумма заданных векторов. Повернем всю нашу конфигурацию вокруг центра O на $2\pi/n$ радиан. Тогда конфигурация совместится сама с собой, а вектор R тоже повернется на $2\pi/n$ радиан и перейдет в R' . Ясно, что $R = R'$, но поскольку эти два вектора отличаются направлением, $R = R' = 0$.

[Р. Коучмэн, М. М., 26, 287 (May 1953).]

214. Рассмотрим канонически расположенный эллипс $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Геометрическое место точек пересечения двух взаимно перпендикулярных касательных к этому эллипсу представляет собой окружность $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ *. Отсюда следует, что если мы зафиксируем две взаимно перпендикулярные прямые и будем перемещать эллипс по плоскости так, чтобы он их касался, то его центр будет все время отстоять от точки пересечения этих прямых на расстояние, равное $(a^2 + b^2)^{1/2}$.

Примем данные две прямые за оси координат, тогда центр нашего эллипса будет ближе всего расположен к этим осям в точках (a, b) и (b, a) . Следовательно, при движении эллипса его центр опишет меньшую дугу



окружности $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, заключенную между этими точками. (Длина такой дуги равна

$$(a^2 + b^2)^{1/2} \arctg \frac{a^2 - b^2}{2ab}.)$$

[А. Стройк, М. М., 24, 231 (March 1951).]

215. Общий член последовательности 11, 14, 17 ... равен $8 + 3n$, а общий член последовательности 4, 10, 18 ... равен $n^2 + 3n$. Первый целый куб, превышающий 11, равен $27 = 3^3$. Для того чтобы выражение под первым радикалом равнялось 27, соответствующее выражение под вторым радикалом должно равняться $4^3 = 64$, поскольку $11 + 16 = 27$. Но для того, чтобы под вторым радикалом стояло $64 = 14 + 50$, под третьим радикалом должно оказаться $5^3 = 125$. В общем случае можно сказать, что если под $(n + 1)$ -м радикалом стоит $(n + 3)^3$, то выражение под n -м радикалом равно $(8 + 3n) + (n^2 + 3n) \sqrt[3]{(n + 3)^3} = (n + 2)^3$. Следовательно, исходная величина равна 3^* .

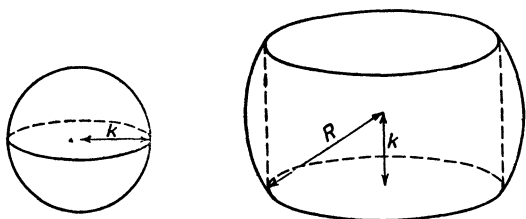
[Э. Карст, М. М., 32, 169 (January 1959).]

216. Последовательность Фибоначчи удовлетворяет соотношению $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, $F_1 = F_2 = 1$. Если мы возьмем три члена этой последовательности и обозначим их в порядке возрастания соответственно через a , b и c ,

то обнаружим, что $c \geq a + b$. Следовательно, ни у какого треугольника длины всех сторон не могут выражаться числами Фибоначчи, поскольку сумма любых двух сторон треугольника всегда больше третьей стороны.

[Н. Миллер, А. М. М., 60, 191 (March 1953).]

217. Представим себе шар радиуса k , ограниченный тонкой растяжимой мембраной, которая удерживает согласно законам поверхностного натяжения жидкость, находящуюся внутри данного шара. Проткнем теперь наш шар вдоль диаметра и вставим внутрь цилиндрическую трубку длиной $2k$, способную растягиваться в радиальном направлении таким образом, чтобы не потерять при этом ни капли жидкости. После того, как диаметр трубки (но не ее длина) увеличится, поверхностное



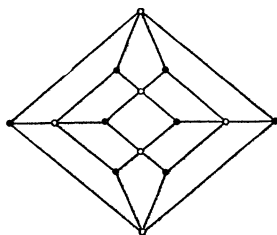
натяжение придаст внешней части мембраны форму участка сферы большего радиуса R ; причем объем получившегося «обручального кольца» останется неизменным. Длина внутренней окружности такого «кольца», $2\pi\sqrt{R^2 - k^2}$, увеличится по сравнению с тем, что было до растяжения, а толщина кольца $R - \sqrt{R^2 - k^2}$, наоборот, уменьшится. Итак, объем той части шара радиуса R , которая осталась после того, как в шаре проделали цилиндрическое отверстие длиной $2k$, равен объему шара радиуса k , то есть $4\pi k^3/3$. Следовательно, объем оставшейся части не зависит от радиуса исходного шара. В нашем случае $V = 4\pi(5^3)/3 \approx 523,6 \text{ см}^3$.

218. Если человек дважды проделает путь на работу и обратно первым способом, то при этом он два раза проедет расстояние между домом и работой на транспорте и дважды пройдет его пешком, затратив на все 3 часа. Следовательно, он может пешком добраться до работы и вернуться назад за $3 - 1/2 = 2 1/2$ часа.

219. Любое число в системе счисления с основанием r представимо в виде $a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n r^0$. Если в произведении нескольких целых чисел хотя бы один из сомножителей четен, то и все произведение четно; в противном случае оно нечетно. Далее, если r нечетно, то и r^k нечетно; поэтому четность каждого из слагаемых $a_k r^k$ нашей суммы совпадает с четностью соответствующего a_k . Если мы сложим любое количество четных слагаемых или четное число нечетных слагаемых, то сумма окажется четной. Если же мы сложим четные числа с нечетным или возьмем нечетное число нечетных слагаемых, то сумма будет нечетной. Следовательно, целое число, записанное в системе счисления с нечетным основанием, нечетно в том и только в том случае, если оно содержит нечетное число нечетных цифр.

[N. M. M., 12, 197 (January 1938).]

220. У ромбического додекаэдра есть восемь вершин T , в которых сходятся по три ребра, и шесть вершин F , в которых сходятся по четыре ребра. Непосредственными

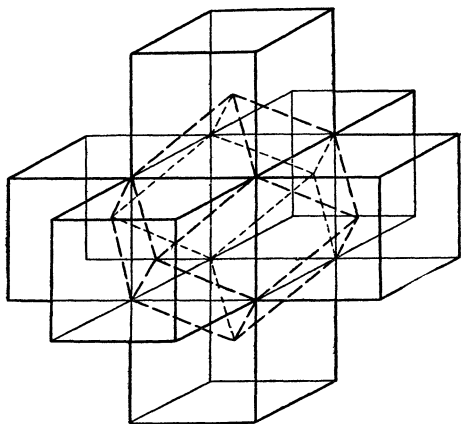


соседями вершин T служат вершины F , а соседями вершин F — вершины T . Следовательно, при любом выбранном маршруте вершины T и вершины F будут чередоваться. Но из 8 символов T и 6 символов F нельзя составить чередующуюся последовательность независимо от того, хотим мы или нет вернуться в конце в исходный пункт.

[А. Розенталь, А. М. М., 53, 593 (December 1946).]

Вершины T определяют некоторый куб, а вершины F — правильный октаэдр. Неразрешимость данной задачи можно легко увидеть с помощью диаграммы Шлегеля из книги Н. S. Coxeter, *Regular Polytopes*, Methuen, 1948, 8.

221. Кубическими ячейками, очевидно, можно заполнить пространство. Рассмотрим часть кубической решетки, изображенную на рисунке. Средний куб мы оставим нетронутым, а в каждом из «окаймляющих» кубов проведем плоскости через все шесть пар противоположных ребер. При этом «окаймляющие» кубы разобьются на шесть конгруэнтных пирамид с квадратными основаниями и боковыми ребрами, равными половине диагонали куба. Пирамиды, примыкающие к нетронутому



кубу, и образуют вместе с последним ромбический додекаэдр, причем ребра куба служат диагоналями граней этого додекаэдра. Отсюда ясно, что ромбическими додекаэдрами можно заполнить все пространство.

Как следствие мы получаем, что объем ромбического додекаэдра равен удвоенному объему куба, ребро которого совпадает с меньшей диагональю грани данного додекаэдра.

222. Применяя данное рекуррентное соотношение несколько раз, мы получим

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} = F_{n-2} + 2F_{n-3} + F_{n-4} = \\ &= F_{n-3} + F_{n-4} + 2F_{n-4} + 2F_{n-5} + F_{n-4} = \\ &= 5F_{n-4} + 3F_{n-5}. \end{aligned}$$

Далее, $F_5 = 5$, поэтому каждый пятый член последовательности Фибоначчи делится на 5.

[Е. М. Шейер, А. М. М., 67, 694 (August 1960).]

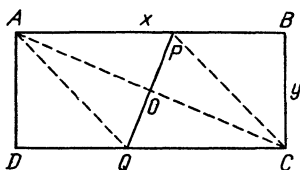
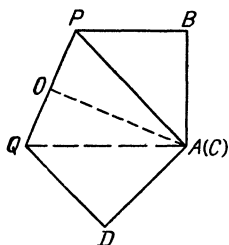
А именно: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...

223. Поскольку $188 \cdot 8 = 1504$, первое O должно быть больше 1. После умножения этого O на первое E множителя должно получиться число ≤ 8 ; так что $O = 3$, а $E = 2$. Числами вида $3EE$, которые после умножения на 2 давали бы EOE , могут быть только 306, 308, 326, 328, 346 и 348. Но если мы умножим эти числа на 4 и 6, то ни в одном случае не получится выражение $EOEE$. Если же мы умножим их на 8, то при этом только последние два числа дадут выражение вида $EOEE$. Далее, $346 \cdot 28 = 9688$; следовательно, единственное решение имеет вид

$$\begin{array}{r} 348 \\ 28 \\ \hline 2784 \\ 696 \\ \hline 9744 \end{array}$$

[У. Чини.]

224. Пусть у прямоугольника $ABCD$ стороны $AB = CD = x$, а $AD = BC = y$, где $x \geq y$. Совместим вер-



шину C с A ; обозначим линию сгиба через PQ . В силу симметрии $PC = PA = CQ = AQ$, так что отрезок AC перпендикулярен PQ и делит его пополам в точке O . Треугольник AOP подобен треугольнику ABC , откуда

$$\frac{PO}{BC} = \frac{AO}{AB}$$

и

$$PQ = 2PO = \frac{2(AO)(BC)}{AB} = \frac{y}{x} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

[А. Уэйн, S. S. M., 64, 241 (March 1964).]

225. Если человек жил в 1937 г., то в 1849 г. ему не могло быть 43 года: $1849 = (43)^2$ *. Следовательно, ему было 44 года в 1936 г. В силу заданных условий

$$44 + m = d^2; \quad 0 < m < 13.$$

Единственным целым решением будет $m = 5$, $d = 7$. Таким образом, человек родился 7 мая 1892 г.

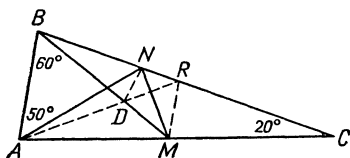
[Л. Г. Мейер, *N. M. M.*, 11, 282 (March 1937).]

226. Непосредственной подстановкой мы можем убедиться, что $x = 0$ и $x = a + b$ — решения нашего уравнения. Более того, если $m + n = 1/m + 1/n$, то $(m + n) \times (mn - 1) = 0$. Следовательно, при $x \neq 0$ и $x \neq a + b$

$$\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 0, \quad \text{то есть} \quad (a+b)x = a^2 + b^2.$$

Поэтому третьим корнем нашего уравнения будет $(a^2 + b^2)/(a + b)$.

227. Поскольку сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым, или 180° , $\angle CBA = \angle CAB = 80^\circ$, $\angle CBM = 20^\circ$ и $\angle BAN = 50^\circ = \angle BNA$ (так что $BN = AB$). Проведем MR параллельно AB и соединим точки A и R отрезком AR , пересекающим BM в точке D . Проведем ND . В силу симметрии треугольники ABD и DRM — равнобедренные; значит, их углы соответственно



равны между собой. Далее, $BD = AB = BN$, откуда $\angle BND = \angle BDN = 80^\circ$ и $\angle NDR = 40^\circ$. Теперь заметим, что $\angle MRC = 80^\circ$; следовательно, $\angle NRD = 40^\circ = \angle NDR$ и $ND = NR$. Поскольку $DM = MR$, отрезок NM перпендикулярен отрезку DR и делит его пополам. Таким образом, $\angle BMN = 60^\circ/2 = 30^\circ$.

[*M. M.*, 39, 253 (September 1966).]

228. Поскольку каждое из n различных неотрицательных чисел $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ меньше n , наше утверждение, очевидно, не верно. Тем не менее если потребо-

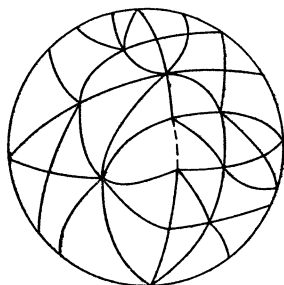
вать, чтобы среди данных деревьев не было ни одного совершенно голого дерева, то это утверждение окажется справедливым, поскольку множество, состоящее из чисел $1, 2, \dots, (n-1)$, содержит меньше чем n элементов. (Если мы возьмем n произвольных чисел из данного множества, то среди них заведомо окажутся хотя бы два одинаковых числа.)

229. Одно решение очевидно: $(x, y) = (-1, 0)$. Более того, легко заметить, что x не может принимать других отрицательных значений, поскольку y^2 не отрицательно. Запишем наше уравнение в виде

$$\begin{aligned} x^3 + 1 &= (x + 1)(x^2 - x + 1) = \\ &= (x + 1)^2 \left(x - 2 + \frac{3}{x + 1} \right) = y^2. \end{aligned}$$

Далее, выражение $\frac{3}{x+1}$ будет целым только при $x = 0$ или $x = 2$. Отсюда* мы можем найти оставшиеся четыре решения: $(0, \pm 1)$ и $(2, \pm 3)$. Других решений нет.

230. Допустим, что такая триангуляция осуществима с помощью графа G . Если мы удалим линию, соединяющую две нечетные вершины (при этом образуется одна «страна», граничащая с четырьмя другими «странами»),



то получится новый граф G' , у которого все вершины окажутся четными. Поэтому мы сможем окрасить «страны» G' в два цвета (скажем, красный и черный) так, чтобы граничащие между собой «страны» были окрашены в разные цвета. Пусть r и b обозначают число «стран» графа G' , окрашенных соответственно в красный и черный цвета. Мы можем предположить без ограничения общности, что единственная «страна», гранича-

шая с четырьмя «странами», окрашена в красный цвет. Поскольку каждая из оставшихся «стран» граничит с тремя другими, $b = \frac{4 + (r-1)3}{3}$. Однако это число не будет целым ни при каком r . Следовательно, искомой триангуляции не существует.

[Дж. У. Мун, А. М. М., 72, 81 (January 1965).]

231. Прогулка длилась 6 часов. Допустим, что мы продолжили часовую стрелку в обратном направлении. Если в начале прогулки часовая и минутная стрелки были совмещены, то через *шесть часов* часовая стрелка и ее продолжение просто поменяются местами, а минутная стрелка, описав ровно шесть кругов, вернется в исходную позицию и, следовательно, совпадет с продолжением часовой стрелки.

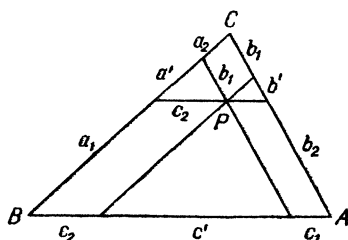
[Ч. Сэлкинд, М. М., 28, 241 (March 1955).]

232. Имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)} &= \frac{1-x}{1-x^{16}} = \\ &= (1-x)(1+x^{16}+x^{32}+x^{48}+\dots) = \\ &= 1-x+x^{16}-x^{17}+x^{32}-x^{33}+\dots \end{aligned}$$

[М. С. Кламкин, М. М., 29, 53 (September 1955).]

233. Рассмотрев параллелограммы и подобные треугольники, изображенные на рисунке, мы можем составить следующие пропорции: $a':a = b_1:b$; $a':a = c_2:c$;



$b':b = c_1:c$; $b':b = a_2:a$; $c':c = b_2:b$; $c':c = a_1:a$. Эти равенства вместе с тождествами $a':a = a':a$; $b':b = b':b$; $c':c = c':c$ составляют в совокупности систему из девяти уравнений.

Сложив все девять уравнений, мы получим

$$3\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}\right) = \frac{a_1 + a' + a_2}{a} + \\ + \frac{b_1 + b' + b_2}{b} + \frac{c_1 + c' + c_2}{c} = 3.$$

Следовательно, $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 1$.

[S. S. M., 55, 660 (November 1955).]

234. Если мы поделим 316 на 11, то получим частное, равное 28, и 8 в остатке; но $8:(13-11)=4$. Следовательно, искомые два слагаемых равны соответственно $4 \cdot 13 = 52$ и 264 . Можно также представить 316 в виде суммы чисел $52 + 11 \cdot 13 = 195$ и $264 - 11 \cdot 13 = 121$.

235. В шестеричной системе счисления

$$1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 13, \quad 4^2 = 24 \quad \text{и} \quad 5^2 = 41.$$

Следовательно, $F = 1$. Аналогично $11^2 = 121$, $22^2 = 524$, $33^2 = 2013$, $44^2 = 3344$ и $55^2 = 5401$, откуда $E = 2$. Таким образом, первоначально запись имела вид $15\,324 = (122)^2$.

Мы получили также в качестве «бесплатного приложения» равенство $53\,241 = (221)^2$.

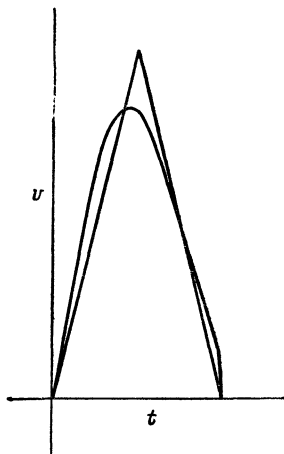
236. Приятель Вилли, слишком понадеявшись на метод «проб и ошибок», упустил из виду один факт, который мог бы ему весьма пригодиться. Дело в том, что если мы возьмем многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и два различных целых числа a и b , то $P(a) - P(b)$ разделится без остатка на $a - b$. Обозначим возраст Вилли через A , а то самое число «побольше», которое подставлял в уравнение приятель Вилли, — через N . Тогда $85 - 77 = 8$ разделится на $N - 7$; 77 разделится на $A - 7$; 85 разделится на $A - N$ и будет справедливо неравенство $7 < N < A$. Отсюда следует, что N совпадает с одним из чисел 8, 9, 11, 15, а A — с одним из чисел 14, 18, 84. Поскольку 85 делится на $A - N$, число N должно равняться 9, а $A = 14$. Таким образом, Вилли исполнилось 14 лет.

[Д. К. Б. М а р ш, А. М. М., 64, 593 (October 1957).]

Многочлен из нашей задачи обязан иметь вид

$$(x-7)(x-9)(x-14)Q(x) - 3x^2 + 52x - 140.$$

237. Если мы изобразим в декартовых координатах кривую зависимости v от t , то площадь под такой кривой (1 квадратная единица) совпадает с площадью равнобедренного треугольника с основанием 1 и высотой, равной 2. Угловые коэффициенты сторон такого треугольника равны ± 4 . Часть нашей кривой обязана выйти за пределы треугольника или, на худой конец, совпасть



с его сторонами. Поэтому в некоторой точке угловой коэффициент касательной к этой кривой ≥ 4 по абсолютной величине.

[P. M. E. J., 1, 280 (November 1952).]

238. Все 1- и 2-центовые марки можно разбить на одинаковые кучки стоимостью по 12 центов каждая. Общая сумма, затраченная на такие марки, должна делиться на 5, то есть она равна 60 центам. Следовательно, мальчик купил пять 2-центовых марок, пятьдесят 1-центовых и восемь 5-центовых марок.

[M. M., 32, 171 (January 1959).]

239. Если из конечного множества объектов выбран один, то наилучший способ, с помощью которого спрашивающий может его определить, заключается в следующем. На каждом шаге нужно выяснить, обладает ли данный объект свойством, которое есть ровно у половины «подозреваемых» объектов. В этом случае при любом ответе число «подозреваемых» объектов уменьшается

ровно вдвое. Применяя такой способ, спрашивающий может, задав 20 вопросов, определить любое задуманное натуральное число, не превышающее 2^{20} .

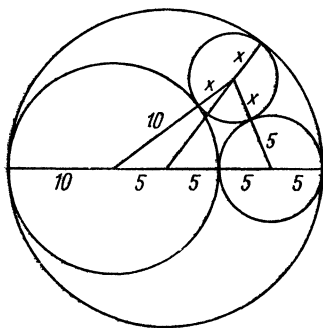
Например, на i -м шаге ($i = 1, 2, \dots, 20$) можно задать вопрос: «Если число записать в двоичной системе, то будет ли его i -я цифра равна 1?» Отметим, что если на все вопросы мы получим ответ «нет», то искомое число 21-значно (в двоичной системе) и состоит из 1, за которой следуют 20 нулей, то есть равно 2^{20} . Если хотя бы на один из вопросов получен ответ «да», то задуманное число, самое большее, 20-значно и полностью определяется после 20 ответов.

[X. Гехман, А. М. М., 58, 40 (January 1951).]

240. Наш гексаэдр составлен из двух правильных тетраэдров объема V_t . Далее заметим, что $V_t/V_0 = 1/4$ (см. решение задачи 113), где V_0 — объем октаэдра. Откуда, обозначив объем гексаэдра через V_h , мы получим $V_h/V_0 = 1/2$. Кроме того, поверхность гексаэдра составляет $6/8$ поверхности октаэдра, так что $S_h/S_0 = 3/4$. Поскольку $V_h = r_h S_h/3$ и $V_0 = r_0 S_0/3$, мы находим, что $r_h/r_0 = (V_h/V_0)(S_0/S_h) = 2/3$.

[X. Ивс, А. М. М., 56, 693 (December 1949).]

241. Теорема Стюарта утверждает, что произведение квадрата расстояния точки, принадлежащей основанию треугольника, до противоположной вершины на длину



основания равно сумме произведений квадратов боковых сторон на несмежные с ними отрезки, на которые данная точка разбивает основание, минус произведение длин этих отрезков на длину основания.

Применив эту теорему к треугольнику, образованному центрами наших трех кругов (см. рисунок), мы получим

$$15(15 - x)^2 = 10(10 + x)^2 + 5(5 + x)^2 - 15 \cdot 10 \cdot 5.$$

Это уравнение приводится к виду $700x = 3000$. Следовательно, диаметр наибольшего круга, который можно выпилить из оставшегося куска фанеры, равен $\frac{30}{7}$ см. Разумеется, мы все время пренебрегаем в данной задаче толщиной лобзика.

[S. S. M., 59, 326 (April 1959).]

242. Если мы из n красных и n черных шаров выбираем произвольным образом n шаров, то число возможных комбинаций равно *

$$C_{2n}^n = C_n^0 \cdot C_n^n + C_n^1 \cdot C_n^{n-1} + C_n^2 \cdot C_n^{n-2} + \dots \\ \dots + C_n^{n-1} \cdot C_n^1 + C_n^n \cdot C_n^0.$$

Но $C_n^k = C_n^{n-k}$, поэтому

$$C_{2n}^n = \sum_{i=0}^n (C_n^i)^2.$$

[M. M., 24, 54 (September 1950).]

Это эквивалентно утверждению, что сумма квадратов чисел, стоящих на k -й диагонали треугольника Паскаля (см. задачу 179), равна k -му (среднему) числу из $(2k - 1)$ -й диагонали. Другое короткое доказательство данного соотношения привел Г. Силлер [A. M. M., 42, 46 (January 1935).]

243. С помощью таблицы квадратов можно быстро определить, что *ALL* совпадает с одним из чисел 100, 144, 400 или 900, а *TO* с 36 или с 81.

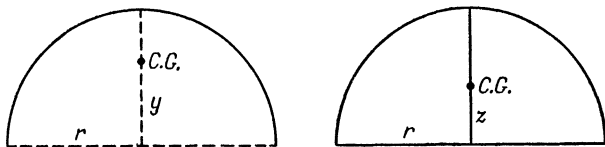
Единственное четырехзначное квадратное число, сумма цифр которого представляет собой квадрат и у которого в разряде десятков стоит 1,4 или 9, — это $7396 = XMAS$; следовательно, $ALL = 900$. Поскольку каждая буква обозначает только одну цифру, *TO* обязано совпасть с 81. Тогда *MERRY* должно равняться либо 35 224, либо 34 225. Но из этих двух чисел только последнее представляет собой квадрат. Таким образом, расшифрованная фраза примет вид

$$9 \ 34225 \ 7396 \ 81 \ 900.$$

Если мы не будем требовать, чтобы суммы цифр совпадали с некоторыми квадратами, то найдется второе решение данной задачи:

4 27556 3249 81 400.

244. Очевидно, что центр тяжести однородной полуокружности радиуса r лежит на перпендикуляре к диаметру, восставленном из центра окружности, на расстоянии y от этого диаметра. Если мы будем вращать нашу окружность вокруг диаметра, то получим сферу.



Первая теорема Паппа¹ утверждает, что площадь поверхности, образованной при вращении плоской кривой вокруг прямой, которая лежит в той же плоскости и не пересекает данную кривую, равна произведению длины этой кривой на длину окружности, описываемой при вращении ее центром тяжести. В нашем случае $4\pi r^2 = \pi r(2\pi y)$, откуда $y = 2r/\pi$.

[М. К л а м к и н, М. М., 26, 226 (March 1953).]

Вторая теорема Паппа утверждает, что объем тела, образованного при вращении плоской области вокруг прямой, которая лежит в той же плоскости и не пересекает данную область, равен произведению площади этой области на длину окружности, описываемой при вращении ее центром тяжести.

Центр тяжести однородного полукруга, очевидно, лежит на радиусе r , перпендикулярном диаметру, на расстоянии z от этого диаметра. При вращении полукруга вокруг этого диаметра мы получим шар. Следовательно, $4\pi r^3/3 = (\pi r^2/2)(2\pi z)$, так что $z = 4r/3\pi$.

[М. К л а м к и н, М. М., 27, 227 (March 1954).]

¹ В нашей литературе первая и вторая теоремы Паппа больше известны как теоремы Гюльдена или Гюльдена — Паппа. — *Прим. перев.*

245. Если $x + y + z = a + b + c$ и $xyz = abc$, то

$$\begin{aligned} & abc(ab + bc + ca - xy - yz - zx) = \\ & = bc(x - a)(y - a)(z - a) = ca(x - b)(y - b)(z - b) = \\ & = ab(x - c)(y - c)(z - c). \end{aligned}$$

Если бы ни одно из последних трех выражений не обращалось в 0, то какое-то из них было бы положительным, а остальные два — отрицательными, так что они не могли бы равняться друг другу. Поэтому каждое из этих выражений содержит нулевой сомножитель. Следовательно, множество $\{x, y, z\}$ совпадает со множеством $\{a, b, c\}$.

[У. Бландон, А. М. М., 72, 185 (February 1965).]

246. Показатели степени, участвующие в данном выражении, образуют последовательность $-1, -4, -8, -13, -19, -26, \dots$, у которой разность между двумя соседними членами возрастает с каждым шагом на 1. Если мы запишем наше выражение в системе счисления с основанием 6, то получим бесконечную непериодическую дробь $0,1001000100001000001 \dots$, равную, очевидно, иррациональному числу.

[Д. Силвермэн, М. М., 32, 229 (March 1959).]

247. Пусть на скамейке сидит n студентов. Тогда вероятность того, что первому из них, закончившему экзамен, не придется никого беспокоить, когда он будет пробираться к проходу, равна, очевидно, $2/n$. Следовательно, вероятность того, что кому-то из 6 студентов придется побеспокоить кого-нибудь из остальных 5, равна $1 - \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{43}{45}$.

[Х. Ивс, А. М. М., 50, 202 (March 1943).]

248. Проведем окружность радиуса r с центром в точке O . Тем же радиусом сделаем засечки в точках A, B, C и D . При этом дуги AB, BC и CD будут равны между собой, а отрезок AD совпадет с некоторым диаметром данной окружности. Из точек A и D как из центров проведем дуги окружностей радиуса AC , кото-

Нам нужно составить магический квадрат третьего порядка из множества простых чисел p_i , обладающих тем свойством, что все $p_i + 2$ также просты. Далее заметим, что все p_i (не равные 3 и 5) должны оканчиваться на 9, 7 или 1. Поэтому параметр e представляет собой среднее арифметическое двух простых чисел, оканчивающихся соответственно либо на 9 и 9, либо на 7 и 1, либо на 7 и 7, либо, наконец, на 1 и 1. Следовательно, элементы нашего квадрата мы должны искать среди последовательности, образованной меньшими из последовательных простых чисел-близнецов:

3, 5, 11, 17, 29, 41, 59, 71, 101, 107, 137, 149, 179, 191,
197, 227, 239, 269, 281,

Наименьшее значение e , оканчивающееся на 9, которое представляет собой среднее арифметическое по крайней мере четырех пар простых чисел, определяется равенствами

$$2(149) = 107 + 191 = 101 + 197 = 71 + 227 = 59 + 239 = \\ = 29 + 269 = 17 + 281.$$

(Для любого простого числа < 149 и оканчивающегося на 1 и 7 существует не более трех членов данной последовательности с той же конечной цифрой.) Подставляя в среднюю строку приведенного выше квадрата последовательно вместо e число 149, а вместо $(e - x)$ и $(e + x)$ полученные пары чисел, мы обнаружим, что только при одном расположении три из оставшихся пар удается поместить на правильные места, а именно:

17 59 101

107 149 191

197 239 281

Отсюда мы немедленно находим три магических квадрата, о которых шла речь в задаче:

191	17	239	192	18	240	193	19	241
197	149	101	198	150	102	199	151	103
59	281	107	60	282	108	61	283	109

Придворному математику платили в год $9e + 9(149 + 1) = 1350$ талеров.

Этот же результат был получен другим путем — А. М. М., 55, 429 (September 1948). Следующее решение нашел У. Бенсон:

2088 1302 4800

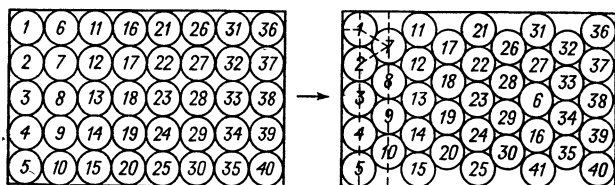
5442 2730 18

660 4158 3372

В этом случае годовое жалование придворного математика составляет 24 570 талеров.

251. Из ящика нужно удалить всего лишь два цилиндра. Перенумеруем цилиндры, как показано на рисунке. Вынем цилиндры 6 и 16.

Передвинем цилиндры 7—10 вправо и вверх (см. рисунок). Передвинем цилиндры 11—15 влево, цилиндры



17—20 вверх и влево, а цилиндры 21—25 влево. Оставшиеся цилиндры можно передвигать по-разному. Например, передвиньте цилиндры 26, 28, 29, 30, 31 влево; прижмите цилиндр 32 к цилиндрам 31 и 37; цилиндр 27 — к цилиндрам 28 и 32; цилиндр 26 — к цилиндрам 21 и 22. Передвиньте цилиндр 31 влево; цилиндр 32 — вплотную к цилиндрам 36 и 37; цилиндр 27 — вверх к цилиндру 31; цилиндры 28, 29, 30 — вверх и влево; цилиндры 33, 34, 35 — вверх и вправо. Вставьте цилиндры 6, 16 и 41 на места, указанные на рисунке. Если цилиндры в новом расположении плотно прижать друг к другу, то расстояние между линиями центров соседних «колонок» будет равно $\sqrt{3}/2$ см. Поэтому вся упаковка займет в длину $8(\sqrt{3}/2) + 1 = 4\sqrt{3} + 1 \approx 7,928 < 8$ см. Следовательно, теперь уже цилиндры при перевозке будут немного «болтаться».

252. Так называемая «малая теорема Ферма» утверждает, что если p — простое число, а m не делится на p , то $m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. И соотношение $a^2 + b^2 = c^2$ можно записать в виде

$$(a^{3-1} - 1) + (b^{3-1} - 1) = c^2 - 2 = (c^{3-1} - 1) - 1.$$

Если бы ни a , ни b не делились на 3, то каждое из слагаемых, стоящих в левой части нашего равенства, делилось бы на 3. Однако правая часть ни при каком целом c не делится на 3. Следовательно, по крайней мере одно из чисел a , b должно быть кратно 3*.

253. В двоичной системе счисления наша сумма запишется с помощью n единиц, к которым присоединен один 0. Если мы прибавим к сумме две единицы, то получим число, записывающееся в двоичной системе с помощью одной 1, за которой следует $n+1$ нуль. Следовательно, данная сумма равна $2^{n+1} - 2$.

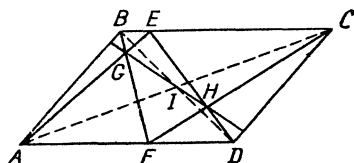
254. Заметим прежде всего, что существует по крайней мере три различных расположения, удовлетворяющие условию задачи, которые отличаются между собой цветом квадратика, расположенного в центре.

Исследуем теперь различные логические возможности. Мы можем тремя способами заполнить левый верхний угол. В каждом из этих трех случаев можно двумя способами выбрать квадратик, стоящий во второй ячейке первой строки, а затем еще двумя способами — квадратик, стоящий в первой ячейке второй строки. Выбрав указанные три квадратика, мы можем только единственным образом заполнить остальные ячейки. Таким образом, существует всего $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ различных расположений. Поворачивая квадрат, мы можем перевести каждое из них в три других. Следовательно, всего существует не более $12:4 = 3$ существенно различных расположений, а в сочетании со сказанным вначале это означает, что их ровно 3.

[У. Бенсон.]

255. Теорема Паппа утверждает, что если вершины некоторого шестиугольника расположены, чередуясь, на двух прямых, то точки пересечения противоположных сторон этого шестиугольника коллинеарны. Обозначим через I точку пересечения диагоналей (центр) нашего

параллелограмма. В силу теоремы Паппа точки G , I и H пересечения противоположных сторон шестиугольника $AEDBFCA$ коллинеарны. Теперь осталось заметить, что



любая прямая, проходящая через центр параллелограмма, делит его на две равные части¹.

[М. Чарош, М. М., 38, 252 (September 1965).]

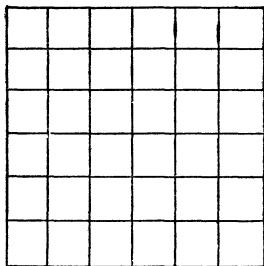
256. $12\,345 \leq N^2 \leq 54\,321$, поэтому $113 \leq N \leq 221$. Если мы запишем цифры числа N в обратном порядке, то получившееся при этом число также будет удовлетворять данным неравенствам. Число N^2 делится на 5, так что и N делится на 5*. Выпишем все трехзначные числа, делящиеся на 5 и удовлетворяющие данным неравенствам: 113, 122, 131, 140, 145, 154, 203, 212 и 221. Среди них есть только одна пара палиндромов. Возведя в квадрат, убеждаемся, что она и дает единственное решение нашей задачи: $(221)^2 = 53\,241$, $15\,324 = (122)^2$.

В качестве «бесплатного приложения» мы получаем, что $(203)^2 = 42\,013$ — еще одной перестановке пяти последовательных цифр.

257. Мы можем считать без ограничения общности, что a и b взаимно просты и $a > 0$. Если бы $a/b + b/a = k$, целому числу, то выполнялось бы равенство $a^2 + b^2 = abk$, то есть $b^2 = a(bk - a)$. Отсюда следовало бы, что b^2 делится на a ; но это возможно лишь в случае $a = \pm b$. Таким образом, наша сумма равна целому числу в том и только в том случае, когда $a = \pm b$.

¹ Речь шла, очевидно, о невыпуклом шестиугольнике. Обозначим буквами его последовательные вершины. В том же порядке обозначим теми же буквами вершины некоторого правильного шестиугольника. Назовем противоположными те стороны нашего шестиугольника, которым (в тех же обозначениях) соответствуют противоположные стороны правильного шестиугольника. Именно в этом смысле употребляется термин «противоположные» в теореме Паппа. — *Прим. перев.*

258. Сложить прочный квадрат из 18 костей домино невозможно. Рассмотрим квадратную сетку 6×6 , которая образована из квадрата с помощью пяти вертикальных и пяти горизонтальных разделяющих прямых. Каждая кость домино покрывает ровно две ячейки такой сетки. Покроем всю нашу сетку 18 костями домино. Полу-



чившийся при этом квадрат будет прочным в том и только в том случае, когда каждая разделяющая линия пересечет по крайней мере одну кость домино.

Слева от каждой вертикальной разделяющей прямой находится четное число клеток. Поскольку каждое «неразрезанное» (то есть не пересекаемое данной прямой) домино занимает четное число клеток, половинки «разрезанных» домино также должны занимать слева от этой прямой четное число клеток. Таким образом, если бы среди всех разделяющих линий не было ни одной, разрушающей прочность, то каждая из них разрезала бы по крайней мере две кости. Ясно также, что каждую кость можно разрезать только одной разделяющей линией. Поэтому для 10 разделяющих линий нам потребуется 20 костей домино. Но, поскольку у нас всего 18 костей, построить из них прочный квадрат невозможно.

[С. Г о л о м б, *Scientific American*, 168 (December 1960).]

259. Обозначим наибольший общий делитель чисел x и y через (x, y) . Тогда

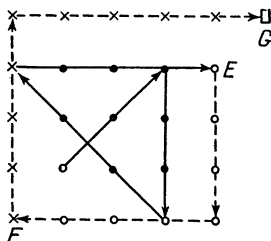
$$(35, 58) = (35, 23) = (12, 23) = (12, 11) = (1, 11) = 1.$$

Следовательно, 35 и 58 взаимно просты в любой системе счисления с основанием > 8 .

[Д. С и л в е р м э н, М. М., 38, 326 (November 1965).]

260. Четвертую степень любого четного числа можно представить в виде $4k$, а любого нечетного — в виде $4k + 1$. Следовательно, сумма четвертых степеней любых четырех последовательных чисел имеет вид $4k + 2$ и, очевидно, не может равняться четвертой степени целого числа.

261. На рисунке показан для $N = 3$ путь, содержащий $2N - 2 = 4$ отрезка, проходящий через все 3^2 узлов и оканчивающийся в точке E . Если мы добавим два дополнительных (пунктирных) отрезка, оканчивающиеся в точке F , то получим искомый путь для $N = 4$. Если мы



добавим еще два отрезка, оканчивающиеся в точке F , то получим нужный путь для $N = 5$. На самом деле, такой процесс добавления по 2 отрезка позволяет построить искомый путь для случая любого, сколь угодно большого, N .

[М. К л а м к и н, А. М. М., 62, 124 (February 1955).]

262. Умножив данное уравнение на 4 и прибавив затем 1 к обеим его частям, мы получим

$$4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (2y + 1)^2.$$

При $x = -1$, $y = -1$ или 0; при $x = 0$, $y = -1$, или 0; при $x = 2$, $y = -6$ или 5; при $x = 1$, y не будет целым.

Это единственные 6 решений в целых числах данного уравнения. Действительно, при $x < -1$ или $x > 2$ левая часть преобразованного уравнения будет больше $(2x^2 + x)^2$, но меньше $(2x^2 + x + 1)^2$. Поэтому ни при каком целом x из этих областей левая часть не может равняться целому квадрату.

[Д. М а р ш, А. М. М., 73, 895 (October 1966).]

263. Число $q = (p_1 + p_2)/2$ представляет собой среднее арифметическое чисел p_1 и p_2 ; поэтому $p_1 < q < p_2$.

Но p_1 и p_2 — последовательные простые числа; следовательно, q — составное число.

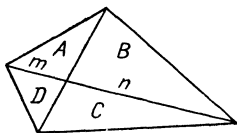
[Дж. Баум, М. М., 39, 196 (May 1966).]

264. Если мы поменяем местами x и u , y и v в уравнении (1), то получим уравнение (4), правда, с противоположным знаком в правой части. Если мы сделаем то же самое в уравнении (2), то получим с той же оговоркой уравнение (3). Следовательно, $u = -x$ и $v = -y$. Подставив эти равенства в (1) и (2), мы получим

$$\begin{array}{r} -4x + 4y = 16 \\ 6x - 2y = -16 \\ \hline 8x = -16 \end{array}$$

Таким образом *, $x = -2$, $y = 2$, $v = -2$, $u = 2$.

265. Площади треугольников равной высоты относятся друг к другу как длины соответствующих основ-



ний. Поэтому, обозначив соответствующие площади и отрезки так же, как и на рисунке, мы получим

$$\frac{A}{A+B} = \frac{m}{m+n} = \frac{D}{C+D} = \frac{A+D}{A+B+C+D} = \frac{D+A}{Q}.$$

Аналогично

$$\frac{B}{B+C} = \frac{A+B}{Q}; \quad \frac{C}{C+D} = \frac{B+C}{Q}; \quad \frac{D}{D+A} = \frac{C+D}{Q}.$$

Перемножив между собой данные четыре равенства, мы и придем к нужному соотношению:

$$A \cdot B \cdot C \cdot D = \frac{(A+B)^2 (B+C)^2 + (C+D)^2 (D+A)^2}{Q^4}.$$

[Л. Бэнкоф, М. М., 38, 248 (September 1965).]

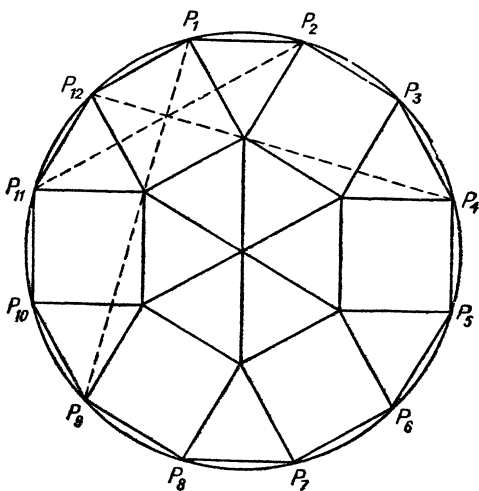
$$\begin{aligned} 266. f(n) &= \frac{n^4 + n^2}{2n+1} = \frac{n^2(n^2+1)}{2n+1} = \frac{n^2}{4} \left[\frac{4n^2+4}{2n+1} \right] = \\ &= \left(\frac{n}{2} \right)^2 \cdot \left[2n-1 + \frac{5}{2n+1} \right]. \end{aligned}$$

Очевидно, что наибольший общий делитель чисел n и $2n + 1$ равен 1. Поэтому $f(n)$ может равняться целому числу только в том случае, когда $\frac{5}{2n+1}$ — целое число, то есть при $n = 2, 0, -1$ или -3 . Следовательно, единственным целым положительным числом, при котором $f(n)$ окажется целым, будет $n = 2$. [В этом случае $f(n) = 4$.]

267. Для того чтобы такое утверждение оказалось справедливым, необходимо, чтобы данные два числа были записаны в разных системах счисления, то есть $342_a = 97_b$. Если $b = 10$, то, поскольку $3(4)^2 = 48$ и $3(6)^2 = 108$, $a = 5$. В самом деле, $3(5)^2 + 4(5) + 2 = 97$.

В общем случае из того, что $3a^2 + 4a + 2 = 9b + 7$, следует, что $b = \frac{3a^2 + 4a - 5}{9}$. Но такая величина будет целой только тогда, когда $a = 9x + 5$; при этом $b = 27x^2 + 34x + 10$. Следовательно, существует бесконечно много решений данной задачи; например, $342_5 = 97_{10}$, $342_{14} = 97_{71}$ и т. д.

268. Опишем вокруг данного двенадцатиугольника окружность. Тогда станет очевидным, что девять диагоналей, исходящих из любой вершины, делят угол при вершине, равный 150° , на 10 равных углов по 15° каждый.



Проведем каждую из диагоналей P_1P_6 , P_2P_9 , P_3P_3 , P_4P_{11} , P_5P_{10} , P_7P_{12} до пересечения с диагоналями, исходящими из соседних вершин. Углы $P_4P_3P_8$, $P_3P_4P_{11}$ и т. д. равны 60° ; поэтому треугольники, которые опираются на 6 чередующихся (через одну) сторон нашего двенадцатиугольника, — равносторонние. Отсюда следует, что вершины данного многоугольника служат вершинами квадратов, построенных на остальных 6 сторонах (так как углы $P_2P_3P_8$, $P_3P_2P_9$ и т. д. равны 90°). Четвертые стороны таких квадратов ограничивают правильный шестиугольник, который очевидным образом можно разбить на 6 равносторонних треугольников. Таким образом, наш двенадцатиугольник удастся разрезать на 12 конгруэнтных равносторонних треугольников и 6 конгруэнтных квадратов.

Каждый из углов $P_1P_{12}P_4$ и $P_{12}P_1P_9$ равен 45° , так что прямые P_1P_9 и P_4P_{12} совпадают с диагоналями квадрата. P_2P_{11} представляет собой ось симметрии равностороннего выпуклого шестиугольника, образованного двумя равносторонними треугольниками и квадратом. Следовательно, P_2P_{11} проходит через центр данного квадрата. Таким образом, прямые P_1P_9 , P_2P_{11} и P_4P_{12} пересекаются в одной точке.

269. Если бы вещественный корень данного уравнения существовал, то он равнялся бы отрицательному числу, скажем, $(-y)$. Но

$$1 - y + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} + \dots + \frac{y^{2n}}{(2n)!} > e^{-y} > 0.$$

Следовательно, исходное уравнение не имеет вещественных корней.

[Дж. Липмэн, А. М. М., 67, 379 (April 1960).]

270. Поскольку $ar^2 + ar + a = a^3$, $r^2 + r + 1 = a^2$. Любая цифра a в произвольной системе счисления всегда меньше основания r этой системы. Следовательно, данное равенство не может выполняться ни при каких $a \neq 0$ и r .

[Ч. Маккракен мл., S. S. M., 52, 241 (March 1952).]

271. Положим $a = 3d$, $c = 2b - 3d$. Тогда $x + y = 3b$ и второе уравнение можно представить в виде

$$(x - y)^2 = (b - 8d)^2 - 40d^2.$$

Оно удовлетворяется, например, при

$$x - y = p^2 - 10q^2, \quad b - 8d = p^2 + 10q^2, \quad d = pq.$$

Таким образом, мы находим следующее двухпараметрическое семейство решений, у которых a, b, c образуют арифметическую прогрессию:

$$a = 3pq, \quad b = p^2 + 8pq + 10q^2, \quad c = 2p^2 + 13pq + 20q^2;$$

$$x = 2p^2 + 12pq + 10q^2, \quad y = p^2 + 12pq + 20q^2.$$

[У. Бландон, А. М. М., 76, 84 (January 1969).]

272. Докажем по индукции, что $\sum_{j=0}^k x_j = 1/(n-k)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Для $k=0$ данное равенство тривиально выполняется в силу определения. Предположим теперь, что $\sum_{j=0}^k x_j = 1/(n-k)$ для некоторого k , $0 \leq k \leq n-2$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{k+1} x_j = x_{k+1} + \sum_{j=0}^k x_j = \sum_{j=0}^k \frac{x_j}{n-k-1} + \sum_{j=0}^k x_j$$

в силу определения x_{k+1} . Воспользовавшись предположением индукции, мы получим

$$\sum_{j=0}^{k+1} x_j = \frac{1}{(n-k-1)(n-k)} + \frac{1}{n-k} = \frac{1}{n-k-1}$$

Отсюда, взяв $k = n-1$, найдем искомую сумму

$$\sum_{j=0}^{n-1} x_j = 1.$$

[Е. Ленгфорд, А. М. М., 76, 86 (January 1969).]

273. Известно, что $PA + PB + PC \geq 6r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC^* . Известно также, что среди всех треугольников, вписанных в некоторый круг, максимальный периметр будет у равностороннего треугольника. Обозначим через D, E, C

точки касания окружности, вписанной в ABC , со сторонами исходного треугольника. Тогда

$$PA + PB + PC \geq 6r = \frac{2}{\sqrt{3}} (3r \sqrt{3}) \geq \frac{2}{\sqrt{3}} (DE + EF + FD),$$

причем равенство достигается только в случае, если треугольник ABC — равносторонний, а точка P — его центр.

[Л. Бэнкоф, А. М. М., 76, 87 (January 1969).]

274. Упорядочим сначала все квадраты так, чтобы с ростом номера их размеры не возрастали. Поместим, далее, первый квадрат в левый нижний угол квадрата S со стороной $\sqrt{2}$. Справа поместим вплотную к нему и к нижней границе S следующий квадрат, справа от него — следующий и т. д. до тех пор, пока для очередного квадрата не хватит места. Затем заполним второй ряд, помещая квадраты поверх первого ряда, затем — третий и т. д. Мы утверждаем, что в итоге все квадраты поместятся внутри S .

Действительно, пусть $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots$ — стороны наших квадратов, первые n_1 из которых расположены в первом (нижнем) ряду, следующие n_2 — во втором ряду и т. д. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\sqrt{2} - s_{n_1+1} \leq s_1 + s_2 + \dots + s_{n_1} \leq \sqrt{2},$$

$$\sqrt{2} - s_{n_1+n_2+1} \leq s_{n_1+1} + \dots + s_{n_1+n_2} \leq \sqrt{2},$$

$$\sqrt{2} - s_{n_1+n_2+n_3+1} \leq s_{n_1+n_2+1} + \dots + s_{n_1+n_2+n_3} \leq \sqrt{2},$$

.....

Мы должны показать, что $s_1 + s_{n_1+1} + s_{n_1+n_2+1} + \dots$
 $\dots \leq \sqrt{2}$. Но

$$s_2 + s_3 + \dots + s_{n_1+1} \geq \sqrt{2} - s_1,$$

так что

$$s_2^2 + s_3^2 + \dots + s_{n_1+1}^2 \geq (\sqrt{2} - s_1) s_{n_1+1}.$$

Аналогично

$$s_{n_1+2}^2 + \dots + s_{n_1+n_2+1}^2 \geq (\sqrt{2} - s_1) s_{n_1+n_2+1}$$

и т. д.

Складывая все такие квадратичные неравенства, мы получим

$$1 - s_1^2 = s_2^2 + s_3^2 + \dots \geq (\sqrt{2} - s_1) (s_{n_1+1} + s_{n_1+n_2+1} + \dots),$$

откуда

$$s_1 + s_{n_1+1} + s_{n_1+n_2+1} + \dots \leq \frac{1-s_1^2}{\sqrt{2}-s_1} + s_1.$$

Однако выражение, стоящее в правой части данного неравенства, равно

$$\sqrt{2} - \frac{(1-\sqrt{2}s_1)^2}{\sqrt{2}-s_1} \leq \sqrt{2},$$

чем и завершается доказательство*.

[Д. Ньюмэн, А. М. М., 76, 89 (January 1969).]

275. Пусть $|z_m| = \max_i |z_i|$. Тогда на комплексной плоскости все точки z_i будут располагаться внутри круга R радиуса $|z_m|$ с центром в точке $z = 0$. Очевидно, что 6 точек z_i , расположенных на окружности R и образующих правильный шестиугольник, вместе с точкой $z_1 = 0$ дают $n = 7$. Если же $n \geq 7$ и некоторая точка $z \neq 0$ расположена не на окружности R , то, применяя теорему косинусов, мы получим, что $|z_i - z_j| < |z_m|$ для некоторых z_i и z_j . Следовательно, верхняя граница для n равна 7.

Максимальные множества задаются следующим образом:

$$S_{\delta r} = \left\{ z_i \mid z_i = 0 \text{ или } z_i = r \left[\cos \left(\frac{1}{3} k\pi + \delta \right) + i \sin \left(\frac{1}{3} k\pi + \delta \right) \right], k = 0, 1, \dots, 5 \right\},$$

где δ, r — произвольные целые числа, такие, что $r > 0$ и $0 \leq \delta < \pi/3$.

[П. Корниа, А. М. М., 76, 91 (January 1969).]

276. Мы покажем, что $f_s(2)f_s(3) \neq f_s(6)$ при $s \neq 1, 2, 4, 8$. Заметим, что если x_1, x_2, \dots, x_s — целые числа, удовлетворяющие уравнению $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 = 2$, то $(s-2)$ из них равны 0, а остальные два равны ± 1 . Поэтому

$$r_s(2) = 4C_s^2 = 2s(s-1).$$

Аналогично

$$r_s(3) = 8C_s^3 = \frac{4}{3}s(s-1)(s-2).$$

Далее, если целые числа x_1, x_2, \dots, x_s удовлетворяют уравнению $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 = 6$, то либо $(s-6)$ из них равны 0, а остальные 6 равны ± 1 ; либо $s-3$ из них равны 0, два из них совпадают с ± 1 , а оставшееся x_j равно ± 2 . Поэтому

$$r_s(3) = 64C_s^6 + 8sC_{s-1}^2 = \\ = \frac{4}{45} s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-5) + 4s(s-1)(s-2).$$

Таким образом,

$$f_s(2) = s-1; \quad f_s(3) = \frac{2}{3}(s-1)(s-2); \\ f_s(6) = \frac{2}{45}(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-5) + \\ + 2(s-1)(s-2).$$

После простых выкладок мы приходим к выражению

$$f_s(6) - f_s(2)f_s(3) = \frac{2}{45} s(s-1)(s-2)(s-4)(s-8),$$

которое отлично от 0 при $s \neq 0, 1, 2, 3, 4, 8$.

[П. Бейтмэн, А. М. М., 76, 190 (February 1969).]

277. Обозначив количество таких наборов через A_n и положив $A_0 = 1$, мы получим для $n \geq 1$:

$$A_n = \sum_{k=1}^n A_{k-1} \cdot A_{n-k}. \quad *$$

Если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$, то из формулы (1) следует, что $f(x) = 1 + x \cdot \{f(x)\}^2$, $f(0) = 1$, так что

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}. \quad (2)$$

Разлагая правую часть равенства (2) в степенной ряд и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , мы получим для $n \geq 0$:

$$A_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = \frac{(2n!)}{n!(n+1)!}.$$

[М. Бёмер, А. М. М., 76, 193 (February 1969).]

278. Заметим сначала, что

$$p^4(p^2 - 12rR) = p^4\left(p^2 - 12 \frac{S}{p} \cdot \frac{abc}{4S}\right) = p^4\left(p^2 - \frac{3abc}{p}\right) = \\ = p^3(p^3 - 3abc) = p^3[(p-a)^3 + (p-b)^3 + (p-c)^3],$$

где S — площадь треугольника T . Далее *

$$\beta_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{p(p-a)} \leq \sqrt{p(p-a)},$$

причем равенство выполняется только в случае $b = c$. Аналогично выражаются β_b и β_c . Таким образом, $\beta_a^6 + \beta_b^6 + \beta_c^6 \leq p^3[\sum (p-a)^3]$, причем равенство выполняется в том и только в том случае, если треугольник равносторонний. Далее,

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) = \\ = \frac{1}{4}\{(b+c-a)(b+c+a) + b^2 + c^2 - 2bc\} = \\ = (p-a)p + \frac{1}{4}(b-c)^2.$$

Отсюда следует, что $m_a^2 \geq p(p-a)$, и равенство достигается только при $b = c$. Аналогичные утверждения получаются для m_b и m_c . Поэтому

$$m_a^6 + m_b^6 + m_c^6 \geq p^3[\sum (p-a)^3],$$

причем равенство достигается только в равностороннем треугольнике.

[С. Рейч, А. М. М., 76, 198 (February 1969).]

279. Заметим, что если $2 \leq k \leq N$, то $N! + k$ — составное число. При любом заданном n выберем простое число $p > n$ и целое число $N \geq p + (n-1)n!$. Тогда целые составные числа $N! + p$, $N! + p + n!$, ..., $N! + p + (n-1)n!$ будут образовывать арифметическую прогрессию. Более того, если q — общий простой делитель двух из этих чисел, то их разность $jn!$ ($0 < j < n$) должна делиться на q . Следовательно, $q \leq n$. Но отсюда вытекает, что $N!$ делится на q , а значит, и p делится на q , что невозможно. Таким образом, все эти числа попарно взаимно просты.

[А. Гарнесс, А. М. М., 76, 199 (February 1969).]

280. Полагая $x_k = k!y_k$, мы получим

$$y_k - y_{k-1} = -\frac{1}{k} (y_{k-1} - y_{k-2}), \quad k \geq 4. \quad (1)$$

Используя (1) при $k = 4, 5, \dots, m$, мы получим

$$y_m - y_{m-1} = \frac{(-1)^m}{m!}, \quad m \geq 4. \quad (2)$$

Суммируя равенства (2) при $m = 4, 5, \dots, n$, мы придем, наконец, к ответу

$$x_n = n! \sum_{m=2}^n \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Заметим, что последнее равенство справедливо также и при $n = 2, 3$.

[А. Бейгер, А. М. М., 76, 302 (March 1969).]

281. Выберем такое простое число p , чтобы $2/p < \min(x_{i+1} - x_i)$. В силу такого выбора в каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ содержится по крайней мере два числа вида k/p . Обозначим любые два таких последовательных числа через k/p и $(k+1)/p$. Поскольку $k/p = kp/p^2 < (kp+1)/p^2 < (kp+p)/p^2 = (k+1)/p$, а $kp+1$ и p^2 — взаимно просты, число $(kp+1)/p^2$ представляет собой несократимую дробь, расположенную между данными двумя числами k/p и $(k+1)/p$. Поскольку $m = p^2$ — составное число, наше утверждение доказано.

[Э. Ленгфорд, А. М. М., 76, 306 (March 1969).]¹

282. Если $f(x) = ax^2 + bx + c$ при всех $-\infty < x < +\infty$ и $a \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^i m_i &= \sum_{i=0}^n \{a(x_i + x_{i+1}) + b\} (-1)^i = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при нечетном } n, \\ 2ax_0 + b & \text{при четном } n. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку $2ax_0 + b = f'(x_0)$, в качестве P_0 достаточно взять точку

$$P_0 = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right).$$

¹ Условие и решение этой задачи получили новую формулировку, не затронувшую сути рассуждения. — Прим. перев.

И обратно, пусть выполнено исходное соотношение. Взяв за начало координат P_0 и положив $n = 2$, мы получим

$$\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_2}{x_2} = 0.$$

Зафиксировав P_2 , мы найдем, что точка (x_1, y_1) удовлетворяет уравнению

$$yx_2^2 = y_2x^2,$$

которое задает параболу (случай $y_2 = 0$ исключается условием нелинейности). Следовательно, данное условие действительно необходимо и достаточно.

[М. Грининг, А.М.М., 76, 307 (March 1969).]

283. Прежде всего заметим, что x, y, z не могут быть отрицательными, так как иначе $4^x + 4^y + 4^z$ не будет целым числом. Если $x \leq y \leq z$, то из того, что $4^x + 4^y + 4^z$ представляет собой полный квадрат, следует, что существует такое положительное целое m и такое положительное нечетное число t , при которых

$$1 + 4^{y-x} + 4^{z-x} = (1 + 2^m t)^2.$$

Поэтому

$$4^{y-x}(1 + 4^{z-y}) = 2^{m+1}t(1 + 2^{m-1}t),$$

откуда $m = 2y - 2x - 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} t - 1 &= 4^{y-x-1}(4^{z-2y+x+1} - t^2) = \\ &= 4^{y-x-1}(2^{z-2y+x+1} + t)(2^{z-2y+x+1} - t), \end{aligned}$$

откуда $t = 1$ и $z = 2y - x - 1^*$. Таким образом, все целые решения данного уравнения представимы в виде $\{x, y, 2y - x - 1\}$, где x, y произвольны. При этих значениях x, y, z наш квадрат равен $(2^x + 2^{2y-x-1})^2$.

[Э. Джонс, А.М.М., 76, 308 (March 1969).]

284. Пусть $f(n)$ — данная сумма. Слагаемые, входящие в $f(n)$, но не входящие в $f(n-1)$, имеют вид $a_p = 1/pn$, где $1 \leq p < n$ и p взаимно просто с n ; слагаемые из $f(n-1)$, которые не входят в $f(n)$, можно записать в виде $b_p = 1/p(n-p)$, где $1 \leq p < n-p$ и p взаимно просто с $n-p$, а значит, и с n . Поэтому, произ-

водя суммирование только по тем p , которые взаимно просты с n , мы получим

$$\begin{aligned} f(n) - f(n-1) &= \sum_{p < n} a_p - \sum_{2p < n} b_p = \\ &= \sum_{2p < n} (a_p + a_{n-p} - b_p). \end{aligned} \quad (*)$$

Но $a_p + a_{n-p} - b_p = 0$; следовательно, $f(n) = f(n-1)$ при $n \geq 3$. Отсюда и вытекает нужный результат. [Отметим, что при $n \geq 3$ в (*) не члена с $p = n/2$, поскольку $(p, n) = 1$.]

[Д. Блум, А. М. М., 76, 417 (May 1969).]

285. Если бы треугольник HIO был равносторонним, то выполнялись бы соотношения

$$OI^2 = OH^2, \quad (1)$$

$$OI^2 = IH^2. \quad (2)$$

Пусть R , ρ , r — соответственно радиусы описанной, вписанной окружностей и окружности, вписанной в треугольник $H_1H_2H_3$, образованный точками касания вписанной окружности исходного треугольника с его сторонами. Известно*, что

$$OI^2 = R^2 - 2R\rho, \quad IH^2 = 2\rho^2 - 2Rr,$$

$$OH^2 = R^2 - 4Rr.$$

Следовательно, из (1) вытекает, что $2r = \rho$, а из (2) — что $R^2 = 2R\rho + 2\rho^2 - R\rho = R\rho + 2\rho^2$. Но $\rho \leq R/2$, причем равенство достигается только в равностороннем треугольнике ABC^* . Значит,

$$R\rho + 2\rho^2 \leq \frac{R^2}{2} + \frac{2R^2}{4} = R^2.$$

Таким образом, треугольник ABC равносторонний. Но в этом случае HIO — вовсе не треугольник, поскольку все три точки H , I и O совпадают.

Далее, поскольку $\sum \cos A = 1 + \rho/R$, мы получаем $\rho = R/2$. Следовательно, треугольник ABC равносторонний и $H = I = O$.

[С. Рейч, А. М. М., 76, 418 (May 1969).]

286. Следующее доказательство представляет собой простое обобщение идеи По́я, с помощью которой мо-

жно показать, что простых чисел бесконечно много. Пусть $F_n = (2k)^{2^n} + 1$ и пусть $m < n$. Если p — положительное целое число, то

$$x^{2p} - 1 = (x + 1)(x^{2p-1} - x^{2p-2} + x^{2p-3} - \dots - x^2 + x - 1).$$

Взяв $x = (2k)^{2^m}$ и $p = 2^{n-m-1}$, мы получим, что $F_n - 2$ делится на F_m . Следовательно, наибольший общий делитель $(F_m, F_n) \leq 2$. Поскольку F_n нечетно, $(F_m, F_n) = 1$.

[Н. Фелсингер, А. М. М., 76, 554 (May 1969).]

287. Положим $\theta(x) = \sin(\cos x) - x$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$. Тогда $\theta(0) = \sin 1 > 0$, $\theta\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -\frac{1}{2}\pi < 0$ и, кроме того, $\theta'(x) < 0$, $0 < x < \frac{1}{2}\pi$. Следовательно, существует единственное число $0 < c < \frac{1}{2}\pi$, такое, что $\sin(\cos c) = c$.

Если $\cos(\sin d) = d$, то $\sin\{\cos(\sin d)\} = \sin d$ и $0 < \sin d < \frac{1}{2}\pi$. Но $\sin(\cos c) = c$ и c единственно; следовательно, $c = \sin d$. Значит, $d = \cos c$ и d единственно. Более того, поскольку $c = \sin d$, а $\sin x < x$ при $x > 0$, мы получаем, что $c < d$.

[Д. Хейхал, А. М. М., 76, 558 (May 1969).]

288. Число λ является корнем многочлена $(x-1)f(x)$; поэтому

$$\lambda^{n+1} = (1 - a_1)\lambda^n + (a_1 - a_2)\lambda^{n-1} + \dots + (a_{n-1} - a_n)\lambda + a_n.$$

В силу неравенства треугольника

$$\begin{aligned} |\lambda|^{n+1} &\leq (1 - a_1)|\lambda|^n + (a_1 - a_2)|\lambda|^{n-1} + \dots + \\ &\quad + (a_{n-1} - a_n)|\lambda| + a_n \leq (1 - a_1)|\lambda|^n + \\ &\quad + (a_1 - a_2)|\lambda|^n + \dots + (a_{n-1} - a_n)|\lambda|^n + \\ &\quad + a_n|\lambda|^n = |\lambda|^n. \end{aligned}$$

Следовательно, $|\lambda| \leq 1$. Но по условию $|\lambda| \geq 1$; значит, $|\lambda| = 1$ и неравенство треугольника обращается в равенство. Таким образом, все числа

$$(1 - a_1)\lambda^n, (a_1 - a_2)\lambda^{n-1}, \dots, (a_{n-1} - a_n)\lambda, a_n$$

получаются путем умножения некоторого комплексного числа на неотрицательные сомножители. Кроме того, эти

числа не могут все равняться нулю, так как в противном случае мы получили бы противоречивое соотношение $1 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Если среди данных чисел только одно отлично от нуля, то справедливы следующие равенства:

$$1 = a_1 = \dots = a_r, \quad a_{r+1} = \dots = a_n = 0,$$

$$\lambda^n + \lambda^{n-1} + \dots + \lambda^{n-r} = 0,$$

$$\lambda^r + \lambda^{r-1} + \dots + 1 = 0,$$

$$\lambda^{r+1} = 1.$$

Если два таких числа отличны от нуля, то, поделив их друг на друга, мы получим, что при некотором целом $s \geq 1$, $\lambda^s > 0$; откуда $\lambda^s = 1$.

[Х. Флендерс, А. М. М., 76, 561 (May 1969).]

289. В силу заданных условий $x(x - [x]) = [x]^2$, откуда $x = [x](1 + \sqrt{5})/2$, $|x| \geq |[x]|$ и $x \geq 0$.

Далее, $[x] + 1 \geq [x](1 + \sqrt{5})/2$ и $[x] \leq 2/(\sqrt{5} - 1) < 2$. Следовательно, $[x] = 0$ или 1, а $x = 0$ или $(1 + \sqrt{5})/2$.

[Д. Силвермэн, М. М., 43, 56 (January 1970).]

290. Для доказательства достаточно заметить, что

$$2^{5n+1} + 5^{n+2} = 2(27 + 5)^n + 5^n(27 - 2) = 27k.$$

[А. Сатклифф, М. М., 43, 56 (January 1970).]

291. Мы можем считать без ограничения общности, что k равно наименьшему целому числу, при котором $x^2 + y^2 = 3^k$, причем из условия задачи вытекает, что $k > 0$. Тогда $x^2 + y^2$ делится на 3, откуда следует, что x и y должны делиться на 3. Значит, $x = 3m$, $y = 3n$ и $(3m)^2 + (3n)^2 = 3^k$. Но тогда $m^2 + n^2 = 3^{k-2}$, что противоречит минимальности числа k .

[Э. Джаст, Н. Шаумбергер, М. М., 43, 56 (January 1970).]

292. I. Пусть R — радиус описанной окружности. Тогда сторона $a = 2R \sin A$ и т. д., а данное неравенство примет вид

$$(a + b + c)R^2 \geq abc. \quad (1)$$

Поскольку

$$a + b + c = 2p, \quad abc = 4RS,$$

где p — полупериметр, а S — площадь треугольника ABC , мы получаем из (1)

$$Rp \geq 2S = 2rp, \quad (2)$$

где r — радиус вписанного круга. Но (2) эквивалентно известному неравенству

$$R \geq 2r,$$

которое обращается в равенство только в случае равностороннего треугольника¹.

[Л. Карлицц, *М. М.*, 43, 49 (January 1970).]

II. Поскольку $A + B + C = \pi$, мы легко можем привести данную дробь к виду

$$\frac{1}{2 \sin(A/2) \sin(B/2) \cos\{(A+B)/2\}} = \frac{1}{D}.$$

Найдем максимум величины D , для чего приравняем к нулю соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial D}{\partial A} = \sin(B/2) \cos(A+B/2) = 0,$$

$$\frac{\partial D}{\partial B} = \sin(A/2) \cos(A/2+B) = 0.$$

Отсюда мы получаем, что величина D достигает своего абсолютного максимума, равного $1/4$, при $A = B = \pi/3$. Следовательно, исходная дробь достигает своего абсолютного минимума, равного 4, при $A = B = C = \pi/3$.

[Д. Дункан, *М. М.*, 43, 49 (January 1970).]

III. Известно, что $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \geq \frac{2}{R}$, где h_a , h_b , h_c — высоты треугольника ABC , а r и R — радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей, причем равенство достигается только в случае равностороннего треугольника

Следовательно,

$$\frac{2R}{h_a} + \frac{2R}{h_b} + \frac{2R}{h_c} \geq 4,$$

¹ См. задачу 285 и др. — *Прим. ред.*

что эквивалентно неравенству

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A \sin B \sin C} \geq 4.$$

[Л. Бэнкоф, М. М., 43, 49 (January 1970).]

293. Очевидно, $N = 1$, поскольку предположения, что $N = 2$ или 0 , приводят к противоречию. Рассмотрим столбцы по очереди справа налево. Первый столбец показывает, что $E + H + 2S + 1 = E + 10l$, то есть $H + 2S = 9 + 10(l - 1)$. Отсюда мы получаем, что $H = 5, S = 7$, поскольку остальные возможные пары (H, S) приводят к противоречию.

Второй столбец дает нам соотношение $2 + 5 + 2U + T + R = 1 + 10m$, а взяв третий столбец, мы получаем $2 + T + R + U + C_2 = U + 10n$, где C_2 означает величину, оставшуюся «в уме» при сложении во втором столбце.

Отсюда $2U \equiv 6 + C_2$, так что C_2 четно и $C_2 = 2$.

Следовательно, $U = 4$. ($U = 9$ приводит к $C_2 > 2$.)

Поэтому $T + R = 6$, а значит, $T, R = 6, 0$ в каком-то порядке. У нас остались неиспользованными цифры 2, 3, 8, 9. Производя сложение в четвертом столбце, мы получим $1 + 2A + E = 10p$, так что $A = 8, E = 3$. Пятый столбец приводит к соотношению $2 + E + U + A + R = P + 10q$, или $3 + V + R = P + 10(q - 1)$, где $R = 0$ или 6 , а $P, V = 2, 9$ в некотором порядке. Все эти соотношения выполняются лишь при $P = 2, V = 9, R = 0$; следовательно, $T = 6$. Таким образом, мы приходим к единственному решению:

$$\begin{array}{r} 6 \ 5 \ 3 \\ 3 \ 8 \ 0 \ 6 \ 5 \\ 9 \ 3 \ 1 \ 4 \ 7 \\ 7 \ 8 \ 6 \ 4 \ 0 \ 1 \\ 4 \ 0 \ 8 \ 1 \ 4 \ 7 \\ \hline 1 \ 3 \ 2 \ 6 \ 4 \ 1 \ 3 \end{array}$$

[К. Уилки, М. М., 43, 50 (January 1970).]

294. Поскольку $x^y = e^{y \ln x}$ для всех положительных x и y , то для того, чтобы сравнить x^y с y^x , нам надо сравнить между собой $y \ln x$ и $x \ln y$. Функция e^z строго возрастает. Поэтому $x^y < y^x$ в том и только в том случае,

если $\ln x/x < \ln y/y$; $x^y = y^x$ в том и только в том случае, если $\ln x/x = \ln y/y$; наконец, $x^y > y^x$ в том и только в том случае, если $\ln x/x > \ln y/y$. Таким образом, для того чтобы ответить на все вопросы данной задачи, мы должны исследовать при всех положительных x поведение функции $g(x) = \ln x/x$. Далее, $g'(x) = (1 - \ln x)/x^2$ и $g''(x) = (-3 + 2 \ln x)/x^3$.

Следовательно, $g(x)$ отрицательна при $0 < x < 1$, строго возрастает при $0 < x \leq e$, достигает своего максимального значения, равного $1/e$, в точке e и строго убывает при $x \geq e$. Кроме того, $g(1) = 0$ и при неограниченном возрастании x график $g(x)$ асимптотически приближается к оси x . Значит, уравнение $y^x = x^y$ имеет только тривиальное решение $y = x$ лишь при $0 < x \leq 1$ и $x = e$. Далее, при $1 < x$, но $x \neq e$ исходное уравнение имеет ровно одно нетривиальное решение y . Рассмотрим это y . При $1 < x < e$ мы получаем $y > e$; если же $x > e$, то $1 < y < e$. Значит, вероятность, о которой идет речь в пункте «в», равна нулю, поскольку нетривиальное решение для $0 < x < e$ существует только при $1 < x < e$, а в этом случае y превышает e .

[А. Аллен, М. М., 43, 51 (January 1970).]

295. Докажем более общее неравенство. Возьмем произвольные вещественные числа $T_i, x_i, i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k, j=1}^n x_k [\cos (T_k - T_j)] x_j &= \\ &= \sum_{k, j=1}^n x_k \{ \cos T_k \cos T_j + \sin T_k \sin T_j \} x_j = \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \cos T_k \right\}^2 + \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \sin T_k \right\}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

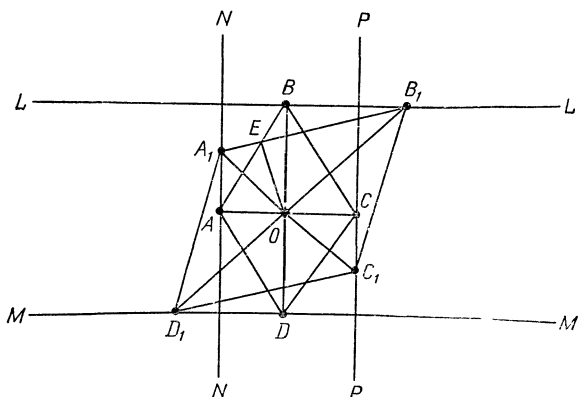
[Дж. Уилкинс мл., М. М., 43, 53 (January 1970).]

296. I. Мы докажем более сильное утверждение: все ромбы, «вписанные» в две взаимно перпендикулярные пары параллельных прямых, подобны.

Заметим сначала, что диагонали всех таких ромбов пересекаются в точке O — центре прямоугольника, образованного данными парами прямых. Пусть $ABCD$ — ромб, вершины которого служат серединами сторон этого

прямоугольника, а $A_1B_1C_1D_1$ — какой-то «вписанный» ромб. Поскольку $\triangle OAA_1 \sim \triangle OBB_1$, мы получаем соотношение $(OA/OB) = (OA_1/OB_1)$, из которого следует, что $\triangle AOB \sim \triangle A_1OB_1$. Другими словами, каждый «вписанный» ромб подобен ромбу $ABCD$.

Отсюда можно получить некоторые интересные следствия. Поскольку $\angle ABO = \angle A_1B_1O$ и $\angle OAB = \angle OA_1B_1$,



мы заключаем, что вокруг каждого из четырехугольников $OEBB_1$ и OAA_1E можно описать окружность. Далее, поскольку $A_1A \perp AO$, отсюда следует, что $OE \perp A_1B_1$.

[А. Зуйус, М. М., 43, 53 (January 1970).]

II. Рассмотрим на плоскости ромб $ABCD$, у которого вершина A расположена на прямой $y = -a$, вершина B — на прямой $x = b$, вершина C — на прямой $y = a$ и вершина D — на прямой $x = -b$. (Очевидно, что подобным образом можно задать всякий ромб, вписанный в прямоугольник. Для этого надо провести оси координат через центр данного прямоугольника параллельно его сторонам: стороны запишутся уравнениями $x = \pm b$ и $y = \pm a$.)

Ясно, что AC и BD пересекаются в начале координат. (Заметим, что ось x делит пополам сторону AC , а ось y — сторону BD .)

Пусть координаты C равны (x_1, a) ; тогда координаты A будут равны $(-x_1, -a)$ и прямая AC задается уравнением $y = (a/x_1)x$. Следовательно, уравнение BD имеет вид $y = (-x_1/a)x$.

Поэтому координаты точки B равны $(b, -bx_1/a)$.

Значит, $OC = \sqrt{x_1^2 + a^2}$, $OB = \sqrt{b^2 + x_1^2 b^2/a^2}$ и $\operatorname{tg} \angle CBO = b/a$.

Таким образом, все ромбы, вписанные в данный прямоугольник, подобны.

[У. Фокс, М. М., 43, 54 (January 1970).]

297. Из равенства $9n + x_{k+1} = x_k + x_{k-1} + \dots + x_1 + x_0 = x_k + x_k + 9m$ легко выводится, что x_k есть остаток от деления $2^{k-1}x_0 = 2^{k-1}$ на 9.

Докажем теперь более общий результат. Рассмотрим последовательность $\{x_{k+1}\}$ остатков от деления чисел $r^k x_0$ на n . Запишем с помощью этой последовательности число $x_0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots$ в системе счисления с основанием $b > n$. Поскольку число различных остатков конечно, существуют по крайней мере два равных элемента x_k и x_{k+p} . Поэтому

$$\begin{aligned} x_{k+j} &= r^j x_k + n \cdot p = r^j x_{k+p} + n \cdot p = \\ &= x_{k+p+j} + n \cdot m \quad \text{для } j = 0, 1, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство $x_{k+j} = x_{k+p+j}$, поскольку $0 \leq x_i \leq n-1$. Следовательно, запись нашего числа состоит из периодически повторяющегося блока из p цифр, а значит, данное число рационально.

[К. Иокон, М. М., 43, 56 (January 1970).]

298. Положим $\sqrt{\sin \theta} = a/b$ и $\sqrt{\cos \theta} = c/d$, где a, b, c, d — положительные целые числа; тогда

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{a^4}{b^4} + \frac{c^4}{d^4}.$$

Отсюда, используя соотношение

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

мы получим

$$(bd)^4 = (ad)^4 + (bc)^4.$$

Но это неравенство не выполняется, поскольку уравнение $x^4 + y^4 = z^4$ не имеет положительных целых решений*.

Следовательно, $\sqrt{\sin \theta}$ и $\sqrt{\cos \theta}$ не могут одновременно принимать рациональные значения.

[Н. Шаумбергер, М. М., 43, 174 (March 1970).]

299. Натуральное число, которое в десятичной системе записывается с помощью $6k - 1$ единицы, может быть простым. Например, известно, что $(10^{23} - 1) : 9$, которое записывается с помощью 23 единиц, — простое.

Всякое число, которое записывается с помощью $q = 6k - 1$ единиц, можно представить в виде $(10^q - 1) : 9$. Поскольку $6k - 1$ не делится на 9, все простые делители числа $(10^q - 1) : 9$ должны быть делителями числа $10^q - 1$. Хорошо известно, что если q составное, то составным будет и $(10^q - 1) : 9$. Следовательно, если число $(10^q - 1) : 9$ просто, то простым будет и q . Более того, из теоремы Ферма следует, что любой простой делитель p числа $(10^q - 1) : 9$ обязан представляться в виде $2kq + 1$, где k — целое число.

Далее, если $p = 2q + 1$ — простое число, q — тоже простое и $p \neq 5$, то, как следует из обобщения одного результата Эйлера, $p = 2q + 1$ представляет собой делитель числа $(10^q - 1) : 9$.

[К. Уилки, М. М., 43, 167 (March 1970).]

300. I. Пусть диаметр полукруга с центром в точке O равен $2R$. Сторона вписанного квадрата равна $2\sqrt{5}R/5$. Если A и B — вершины квадрата, лежащие на данной полуокружности, то длина перпендикуляра, опущенного из A на OB , равна $u = 4R/5$. Наш треугольник, очевидно, прямоуголен. Если мы опустим из его прямого угла высоту h на гипотенузу $2R$, то в силу равенства площадей $u = h$. Далее, если центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на стороне квадрата и если d — расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей, то

$$d^2 = r^2 + R^2/5 = R^2 - 2Rr^*,$$

где r — радиус вписанной окружности. Следовательно, $r = R(3\sqrt{5}/5 - 1)$. Но в прямоугольном треугольнике $h = 2r + r^2/R$, откуда $h = 4R/5 = u$, как и было показано выше.

[П. Томас, М. М., 43, 167 (March 1970).]

II. Введем декартову систему координат так, чтобы наша полуокружность задавалась уравнением $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$. Тогда $(\pm 1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ — координаты вершин, а $4/5$ — площадь вписанного квадрата. Пусть $A = (-1, 0)$

и $B = (1, 0)$. У данного вписанного треугольника ABC координаты вершины C равны $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ или $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. Возьмем $C = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. Тогда $\sin A = \cos B = 1/\sqrt{5}$, $\cos A = \sin B = 2/\sqrt{5}$, $\operatorname{tg} A/2 = \sqrt{5} - 2$ и $\operatorname{tg} B/2 = (\sqrt{5} - 1)/2$. Точка пересечения $[1/\sqrt{5}, (3 - \sqrt{5})/\sqrt{5}]$ прямых $y = \operatorname{tg} A/2 \cdot (x + 1)$ и $y = \operatorname{tg} B/2 \cdot (1 - x)$ совпадает с центром вписанной окружности и лежит на правой стороне квадрата. Аналогично, если $C = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, можно показать, что центр вписанной окружности лежит на левой стороне квадрата.

[Л. Рингенберг, М. М., 43, 167 (March 1970).]

III. В любом прямоугольном треугольнике ABC ($C = 90^\circ$) выполняется соотношение $r = s - c$, где r — радиус вписанной окружности, s — полупериметр, а c — гипотенуза. Следовательно,

$$rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = (s-a)(s-b).$$

Другими словами, площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые точка касания вписанной окружности делит гипотенузу.

В нашем случае каждая из двух вершин квадрата, расположенных на гипотенузе, делит ее симметрично на два отрезка, произведение которых равно площади данного квадрата.

Так как площади квадрата и треугольника равны между собой, одна из вершин квадрата совпадает с точкой касания вписанной окружности и гипотенузы. Поэтому центр вписанной окружности лежит на одной из сторон данного квадрата.

[Д. Дункан, М. М., 43, 167 (March 1970).]

301. Если зафиксировать основание треугольника и сумму двух остальных его сторон, то наибольшей высотой будет обладать равнобедренный треугольник. Аналогичным образом, если задать основание и зафиксировать сумму длин трех отрезков, таких, что из них попарно можно составить недостающие боковые стороны трех треугольников с заданным основанием, то сумма высот таких треугольников будет максимальной в том случае, когда все они будут равнобедренными и конгру-

энтными. Этот результат можно обобщить на случай n треугольников*.

[М. Голдберг, М. М., 43, 169 (March 1970).]

302. Рассмотрим частичную сумму нашего ряда:

$$S_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} \ln \frac{i+1}{i} = \ln \left(\frac{\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2n}{2n-1}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2n+1}{2n}} \right).$$

Обозначив через σ_{2n} выражение, стоящее в круглых скобках под знаком логарифма, мы получим

$$\begin{aligned} \sigma_{2n} &= \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n)^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)]^2 (2n+1)} = \\ &= \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n)^2 (2n+1)}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)]^2} = \left[\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \right]^2 \cdot (2n+1). \end{aligned}$$

Используя формулу Стирлинга, находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi}{2(2n+2)} \right] (2n+1) = \frac{\pi}{2},$$

так что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \ln \frac{\pi}{2}$ в силу непрерывности логарифмической функции. Поскольку $S_{2n+1} = S_{2n} + \ln \frac{2n+2}{2n+1}$, мы получаем, что и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \ln \frac{\pi}{2}$. Таким образом, данный ряд условно сходится к $\ln \frac{\pi}{2}$.

[Дж. Браун, М. М., 43, 170 (March 1970).]

303. Легко показать, что в прямоугольнике любые три точки ограничивают треугольник, площадь которого не превосходит половины площади данного прямоугольника. (Мы можем, если потребуется, сначала сжать наш прямоугольник так, чтобы данный треугольник оказался в него вписанным. Затем можно разбить получившийся прямоугольник на меньшие прямоугольники так, чтобы наш треугольник покрывал не больше половины каждого из этих маленьких прямоугольников.)

Далее, разделим наш единичный квадрат на четыре равных меньших квадрата. По крайней мере в одном из таких квадратов (включая границу) должно ока-

заться не менее 3 наших точек. Требуемый результат теперь немедленно следует из сказанного выше.

Обобщение: среди $2pq + 1$ точек единичного квадрата есть по крайней мере 3 точки, определяющие треугольник, площадь которого не превосходит $1/(2pq)$. Действительно, разобьем наш квадрат на pq конгруэнтных прямоугольников с помощью $p - 1$ горизонтальной и $q - 1$ вертикальной прямой. Далее применим утверждение первого абзаца.

[Б. Шварц, М. М., 43, 170 (March 1970).]

304. При любых вещественных α и β функция

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^M a_i^{x-\alpha} \right) \left(\sum_{j=1}^M a_j^{\beta-x} \right)$$

выпукла, симметрична относительно точки $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$ и, таким образом, возрастает, когда x удаляется от точки $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Если мы положим $\alpha = 0$, а $\beta = P$, то нужное неравенство запишется в виде $f(P) \leq f(P + 1)$, откуда в силу вышесказанного его справедливость становится очевидной.

[Д. Дейкин, М. М., 43, 235 (May 1970).]

305. Обозначив $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$ и $\operatorname{tg} C$ соответственно через a , b , c и применив формулу для тангенса разности, мы придем к соотношению

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = 0.$$

После элементарных преобразований получим равенство

$$(a-b)(b-c)(c-a) = 0,$$

из которого и следует равнобедренность исходного треугольника. Отметим, что мы нигде не воспользовались тем условием, что $A + B + C = \pi$.

[М. Кламкин, М. М., 43, 236 (May 1970).]

306. Разность половин диагоналей равна $1 - \sqrt{2}/2$, поэтому длины отрезков, проведенных через вершины меньшего квадрата, равны $2 - \sqrt{2}$. Эти отрезки отсекают в каждом углу от стороны квадрата по $(2 - \sqrt{2})/\sqrt{2}$. Значит, длины частей, оставшихся от сторон большого

квадрата, равны $\sqrt{2} - 2(2 - \sqrt{2})/\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$. Кроме того, каждый внутренний угол получившегося восьмиугольника равен 135° . Следовательно, этот восьмиугольник правильный.

[Т. Мемп, М. М., 43, 236 (May 1970).]

307. Целое число и его пятая степень всегда оканчиваются на одну и ту же цифру. Поэтому величина $n^5 - n$ оканчивается на 0 и, таким образом, делится на 2 и 5. Разложим далее ее на множители $(n-1)n(n+1)(n^2+1)$ и заметим, что один из первых трех сомножителей обязан делиться на 3. Таким образом, $n^5 - n$ делится на $2 \times 3 \times 5$.

[Р. Хэтчер, М. М., 43, 236 (May 1970).]

308. Буква M должна означать один из элементов множества $\{1, 2, 3\}$, буква A — один из элементов множества $\{4, 5, 9\}$, откуда следует, что буква G совпадает с каким-то элементом множества $\{4, 7, 8\}^*$. Заглянув в таблицу простых чисел, мы обнаружим, что единственным подходящим простым числом может быть только 8923.

После этого уже легко расшифровать весь крипто-рифм:

9		9
2 9 6 7		2 9 6 5
2 9 8 0	или	2 9 8 4
2 9 6 7		2 9 6 5
<hr style="width: 100%;"/>		<hr style="width: 100%;"/>
8 9 2 3		8 9 2 3

[С. Диано, М. М., 43, 227 (May 1970).]

309. I. Высоты треугольника удовлетворяют соотношениям $h_a = b \sin C$, $h_b = c \sin A$ и $h_c = a \sin B$. Следовательно, $h_a + h_b + h_c = b \sin C + c \sin A + a \sin B < a + b + c$; откуда

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} < 1. \quad (1)$$

Далее, пусть ортоцентр делит высоты на следующие отрезки:

$$h_a = x + w,$$

$$h_b = v + z,$$

$$h_c = y + u.$$

Тогда справедливы неравенства:

$$\begin{aligned}u + v + v + x &> b, \\x + y + y + z &> c, \\z + w + w + u &> a.\end{aligned}$$

Сложив между собой все эти неравенства, мы получим, что $2(h_a + h_b + h_c) > a + b + c$; откуда

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} > \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Объединяя (1) и (2), мы и приходим к нужному результату.

[С. М. Диано, М. М., 43, 228 (May 1970).]

II. Если P — произвольная внутренняя точка остроугольного треугольника ABC , то $AP + BP + CP > (a + b + c)/2$. Выбрав в качестве P ортоцентр H , мы получим

$$h_a + h_b + h_c > AH + BH + CH > \frac{a + b + c}{2}.$$

Более того, известно, что $\sqrt{3}(a + b + c) \geq \geq 2(h_a + h_b + h_c)$. Отсюда мы и получим неравенство

$$\frac{1}{2} < \frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1.$$

[Л. Бэнкоф, М. М., 43, 229 (May 1970).]

310. I. Определитель равен ориентированному объему параллелепипеда, построенного на векторах, чьи проекции в декартовой системе координат совпадают со строками этого определителя. Квадрат длины первого вектора (а следовательно, в силу симметрии и квадрат длины каждого из остальных двух векторов) равен $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$. Скалярное произведение первой пары векторов равно 0, поэтому в силу симметрии все наши векторы попарно ортогональны. Следовательно, наш параллелепипед представляет собой куб объемом $\pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^3$. Поскольку непосредственно видно, что в данном определителе коэффициент при a^6 совпадает с $+1$, то этот определитель равен $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^3$.

С помощью того же метода можно получить более общие результаты. Например, пусть $s_n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, пусть далее I_n — единичная матрица n -го порядка, а A_n —

матрица n -го порядка, у которой элемент $a_{ij} = (-1)^{i+j+1}x_i x_j$. Тогда при $n = 1, 2, \dots$ мы получим

$$|s_n I_n + 2A_n| = -s_n^n.$$

[Н. Неттхейм, М. М., 43, 229 (May 1970).]

II. Пусть D — данный определитель, и пусть

$$A = \begin{vmatrix} a & d & -c \\ -d & a & b \\ c & -b & a \end{vmatrix}$$

Легко видеть, что определитель A' присоединенной матрицы¹ равен

$$A' = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & bc + ad & bd - ac \\ bc - ad & a^2 + c^2 & ab + cd \\ bd + ac & cd - ab & a^2 + d^2 \end{vmatrix}$$

и что

$$A \cdot A' = \begin{vmatrix} a(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) & 2a(bc + ad) & 2a(bd - ac) \\ 2a(bc - ad) & a(a^2 + c^2 - b^2 - d^2) & 2a(ab + cd) \\ 2a(ac + bd) & 2a(cd - ab) & a(a^2 + d^2 - b^2 - c^2) \end{vmatrix},$$

то есть $A \cdot A' = a^3 D$. В силу элементарных свойств определителей мы получаем, что $A' = A^2$, то есть $a^3 D = A^3$.

Поскольку $A = a(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$, мы немедленно находим $D = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^3$.

[Е. Моррисон, М. М., 43, 230 (May 1970).]

III. Обозначив исходный определитель через Δ , а определитель транспонированной матрицы через Δ_t , мы получим, что

$$\Delta^2 = \Delta \cdot \Delta_t = \begin{vmatrix} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \end{vmatrix}.$$

¹ То есть определитель матрицы, у которой в i -й строке и j -м столбце стоит алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} исходной матрицы. — Прим. перев.

Следовательно,

$$\Delta = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^3,$$

[Б. Ианссон, М. М., 43, 230 (May 1970).]

311. Положим

$$S(n, p) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} \right)^p = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \right)^p.$$

При $0 < \theta < \pi/2$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{n} = \frac{\frac{\theta}{n}}{\theta \operatorname{tg} \frac{\theta}{n}} < \frac{1}{\theta},$$

откуда

$$\frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} < \frac{2}{k\pi} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} = \frac{2}{k\pi}.$$

Поэтому при $p > 1$ мы получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n, p) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \right)^p = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} \right)^p < +\infty.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{k\pi} < \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}$$

для достаточно больших n , поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n, p) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k\pi} \right)^p = +\infty$$

при $p \leq 1$ *.

[Н. Шаумбергер, М. М., 43, 231 (May 1970).]

312. Если в каждой точке пересекается не более двух больших кругов, то число точек пересечения n таких окружностей максимально. Каждая пара больших кругов дает 2 точки пересечения, так что максимальное число этих точек равно $2 \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) = n(n-1)$.

Если мы возьмем какой-то большой круг и будем поворачивать его до тех пор, пока он не пройдет через уже имеющиеся точки пересечения, то общее число таких точек уменьшится. Повторяя этот процесс, мы придем наконец к случаю, когда все окружности будут проходить через 2 противоположные точки на сфере.

Если $n - 1$ окружность проходит через 2 точки, то оставшаяся окружность дает еще $2(n - 1)$ точек, так что общее число точек пересечения равно $2(n - 1) + 2 = 2n$. На следующем шаге эта последняя окружность будет проходить через те же 2 точки, что и остальные, и число точек пересечения станет равным 2^* .

[Л. Бэнкоф, М. М., 43, 233 (May 1970).]

313. Обозначим, двигаясь по часовой стрелке, координаты последовательных вершин данного четырехугольника через (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) и (x_4, y_4) . Тогда точки, делящие стороны четырехугольника в отношении r , будут иметь координаты

$$A[(x_2 - x_1)r + x_1, (y_2 - y_1)r + y_1],$$

$$B[(x_3 - x_2)r + x_2, (y_3 - y_2)r + y_2],$$

$$C[(x_4 - x_3)r + x_3, (y_4 - y_3)r + y_3],$$

$$D[(x_1 - x_4)r + x_4, (y_1 - y_4)r + y_4].$$

Если угловые коэффициенты отрезков AB и CD равны между собой, то

$$\frac{(y_3 - 2y_2 + y_1)r + y_2 - y_1}{(x_3 - 2x_2 + x_1)r + x_2 - x_1} = \frac{(y_1 - 2y_4 + y_3)r + y_4 - y_3}{(x_1 - 2x_4 + x_3)r + x_4 - x_3}.$$

Поскольку мы рассматриваем такое r , что равенство справедливо при всевозможных (x_i, y_i) , образующих четырехугольник, то можно проверить его на каком-нибудь одном. Пусть

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \quad (x_2, y_2) = (0, 1), \quad (x_3, y_3) = (2, 2),$$

$$(x_4, y_4) = (1, 0).$$

Тогда

$$\frac{1}{2r} = \frac{2r - 2}{-1},$$

$$\text{откуда } 4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \text{и} \quad r = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, в общем случае единственными точками на сторонах четырехугольника, которые всегда приведут к параллелограмму, будут последовательные середины этих сторон. Если мы будем соединять середины сторон не последовательно, а через одну, то получим самопересекающийся четырехугольник.

По-видимому, полупроснувшийся Хиппи спутал слишком длинные для него слова «четырехугольник» и «прямоугольник». Поскольку в его воображении возник прямоугольник, то и утверждение, которое он взял буквально «с потолка», оказалось правильным, так как, если мы выберем на сторонах прямоугольника (или параллелограмма) соответствующие точки, из тех, которые делят его стороны на n равных частей, и соединим их между собой, то при этом получится параллелограмм. Скорее всего, наш Хиппи проделал в уме подобную операцию с квадратом и увидел, что при этом снова получился квадрат, но не высказал такого утверждения, поскольку само слово «квадрат» для него ненавистно¹. Питая органическое отвращение ко всему общепринятому и пытаясь идти сразу двумя путями, Хиппи, быть может, соединил, не отдавая сам себе в том отчета, две ближайшие точки (из тех, что делят стороны на три равные части) при одной из вершин, затем перешел к наиболее удаленной точке на соседней стороне, затем к ближайшей точке на следующей стороне и т. д., пока он не вернулся в исходную позицию. В этом случае, если мы проведем диагональ через исходную вершину, то получим две пары подобных треугольников, стороны которых относятся как 2:3, а две стороны в каждой паре параллельны между собой (одной такой стороной в каждой паре служит проведенная диагональ). При этом действительно получится параллелограмм.

Хиппи говорил о точках, которые «делят стороны на 3 равные части», не указывая, какие именно из этих точек надо взять. Поскольку на каждой из сторон имеется по 2 такие точки, то, если мы будем брать последовательные стороны, возможных четырехугольников ока-

¹ Хиппи используют слово «square» (квадрат) для обозначения ограниченного самодовольного человека, безоговорочно принимающего законы общества, другими словами, оно близко для них по значению к слову «конформист». — *Прим. перев.*

жется 2^4 , из которых только 2 — параллелограммы. Если мы станем выбирать точки на чередующихся сторонах, то найдется еще $2(2^4)$ самопересекающихся четырехугольников. Таким образом, утверждение Хиппи окажется справедливым только в $1/24$ части всех возможных случаев. Если же мы рассмотрим точки, делящие стороны на n равных частей, то соответствующее утверждение окажется справедливым всего лишь в $n-1$ случае из $3(n-1)^4$ и, следовательно, доля верных ответов будет равна $1/3(n-1)^3$.

[Ч. Тригг, М. М., 43, 234 (May 1970).]

314. Пусть n — число маленьких треугольников, а e — число их сторон, расположенных внутри исходного треугольника. Из $3n$ сторон всех n маленьких треугольников 3 стороны принадлежат исходному треугольнику, а остальные стороны лежат внутри этого треугольника, причем каждая из них считается дважды. Следовательно, $e = \frac{1}{2}(3n - 3)$. Поскольку число e целое, n должно быть нечетным.

[Л. Ту, М. М., 44, 54 (January 1971).]

315. Если мы выберем прямоугольную систему координат, оси которой идут вдоль данных хорд, то центр сферы будет расположен в точке с координатами $(b-a, d-c, f-e)$, где мы можем считать без ограничения общности, что $b \geq a, d \geq c$ и $f \geq e$. Тогда мы получим следующее соотношение для радиуса данного шара:

$$\begin{aligned} R^2 &= (b-a-2b)^2 + (d-c-0)^2 + (f-e-0)^2 = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 - 2ef \end{aligned}$$

(поскольку $ab = cd = ef$).

Стоит отметить, что результат легко переносится и на случай n -мерной сферы. В специальном случае круга ($n=2$) остаются только квадраты, а произведение разных отрезков исчезает.

[М. К л а м к и н, М. М., 44, 55 (January 1971).]

316. Разделите треугольный периметр на 11 равных частей, а затем проведите разрезы по прямым, соединяющим центр вписанного круга с получившимися точками деления. Впервые эту задачу поставил Г. С. М. Коксетер

для квадрата. Данный метод проходит и для случая любого многоугольника, в который можно вписать круг.

[М. К л а м к и н, М. М., 44, 55 (January 1971).]

317. Для доказательства заметим, что

$$4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x + 1)^4 - x^4 = \\ = [(x + 1)^2 - x^2][(x + 1)^2 + x^2] = (2x + 1)[(x + 1)^2 + x^2].$$

[Н. Ш а у м б е р г е р, М. М., 44, 55 (January 1971).]

318. Пусть

$$c = \prod_{i=1}^7 \cos \frac{i\pi}{15} \quad \text{и} \quad s = \prod_{i=1}^7 \sin \frac{i\pi}{15}.$$

Тогда

$$2^7 cs = \prod_{i=1}^7 2 \cos \frac{i\pi}{15} \cdot \sin \frac{i\pi}{15} = \prod_{i=1}^7 \sin \frac{2i\pi}{15}.$$

Но

$$\sin \frac{8\pi}{15} = \sin \left(\pi - \frac{7\pi}{15} \right) = \sin \frac{7\pi}{15}.$$

Аналогично

$$\sin \frac{10\pi}{15} = \sin \frac{5\pi}{15},$$

$$\sin \frac{12\pi}{15} = \sin \frac{3\pi}{15}$$

и

$$\sin \frac{14\pi}{15} = \sin \frac{\pi}{15}.$$

Следовательно, $2^7 cs = s$, откуда $c = (1/2)^7$.

[К. В е н к а т а р а м а н, М. М., 44, 55 (January 1971).]

319. Поместим собаку в произвольную точку между теми положениями, которые мальчик и девочка займут через час, и повернем ее мордой в любом из двух направлений. Затем «прокрутим весь фильм» в обратном направлении, пока мальчик, девочка и собака не окажутся все вместе в начальной точке в начальный момент времени. Таким образом, собака через час может оказаться в любом месте между мальчиком и девочкой и может смотреть в любом направлении.

[А. О с т и н, М. М., 44, 56 (January 1971).]

320. Если $\frac{N^2 - 71}{7N + 55} = M$ — целое число, то

$$N^2 - 7MN - (55M + 71) = 0.$$

Когда мы будем решать это квадратное уравнение относительно N , то обнаружим, что под радикалом обязан стоять полный квадрат. Поскольку справедливы неравенства

$$(7M + 15)^2 = 49M^2 + 210M + 225 < 49M^2 + 220M + 284 < 49M^2 + 238M + 289 = (7M + 17)^2,$$

подкоренное выражение должно равняться $(7M + 16)^2$. Отсюда $M = 7$, а $N = 57$ или (-8) .

[Д. Силвермэн, М. М., 44, 56 (January 1971).]

321. Поскольку центр меньшей сферы радиуса r лежит на диагонали и отстоит от соответствующего угла ящика на $16\sqrt{3} - 15 - r$ сантиметров, для решения задачи нам нужно лишь приравнять эту величину к $r\sqrt{3}$ и решить полученное уравнение относительно r . В результате мы найдем искомый диаметр

$$D = (16\sqrt{3} - 15)(\sqrt{3} - 1) = 63 - 31\sqrt{3} \approx 9,308 \text{ см.}$$

[Г. Кертис, М. М., 44, 56 (January 1970).]

322.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!} &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+2)!} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+2)!} \right) = \\ &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} = 2 - \frac{n+3}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что искомый предел равен 2.

[Е. Джаст и Х. Джик, М. М., 44, 56 (January 1971).]

323. Пусть $1, a, b, \dots, n$ — делители числа n , записанные в возрастающем порядке; предположим, что выполняется равенство

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{n} = 2.$$

Умножив обе части данного равенства на n , мы получим

$$\frac{n}{a} + \frac{n}{b} + \dots + 1 = n,$$

где левая часть представляет собой сумму правильных делителей числа n , записанных в убывающем порядке. Но это означает, что n — совершенное число. Следующими после 6 совершенными числами будут 28 и 496.

[Д. Силвермэн, *М. М.*, 44, 56 (January 1971).]

324. Логарифмируя обе части данного уравнения, мы получим эквивалентное уравнение

$$f(x) = x \ln x + \ln(x+1) = 0.$$

Так как $\ln(1+x) < x$ при всех $x > 0$, то при $0 < x \leq 1/e$

$$f(x) < x \ln x + x = x \ln \frac{x}{e} < 0,$$

а при $x > 1/e$

$$f'(x) = \ln x + 1 + \frac{1}{1+x} = \ln xe + \frac{1}{1+x} > 0$$

и, значит, $f(x)$ монотонно возрастает при $x > 0$; следовательно, у данного уравнения есть не более одного вещественного корня. Приближенные вычисления приводят к значению корня $x \approx 0,43605$.

[П. Ла Фратта, *М. М.*, 44, 56 (January 1971).]

325. Квадраты любых трех последовательных членов арифметической прогрессии с разностью d удовлетворяют уравнению

$$a_i^2 - 2(a_i + d)^2 + (a_i + 2d)^2 = 2d^2.$$

В нашем случае оно принимает вид

$$x - 2y + z = 2d^2.$$

Следовательно, все четыре вершины тетраэдра компланарны, а его объем равен нулю.

Мы видим, что можно было бы взять a_i , которые все вместе не составляли бы арифметическую прогрессию, но такие, что каждая тройка последовательных a_i представляла бы собой арифметическую прогрессию с одной и той же разностью d .

[Ч. Тригг, *М. М.*, 44, 114 (February 1971).]

326. Из условия задачи можно сделать вывод, что множество S содержит ровно 3 элемента. Отрицание в стандартной формулировке звучит следующим образом: «Множество T содержит не более одного элемента из S .» Допустим, что S состоит из s элементов. Тогда \bar{P} можно переформулировать так: «По крайней мере $s - 1$ элемент из S не содержится в T ». Воспользовавшись второй частью условия, мы находим отсюда, что $s - 1 = 2$. Следовательно, $s = 3$.

[С. Уилсон, М. М., 44, 114 (February 1971).]

327. При $n \geq 3$ число диагоналей n -мерного куба равно 2^{n-1} , что больше n . Следовательно, все диагонали не могут быть взаимно перпендикулярными. Неравенство $2^{n-1} > n$ можно легко доказать по индукции, начиная, например, с $n = 3$.

[Ф. Пэпп, М. М., 44, 114 (February 1971).]

328. Данную двойную сумму можно переписать в виде

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j (n-j)^n.$$

Но это число представляет собой n -ю конечную разность, построенную для функции $f(x) = x^n$ и точек $x = 0, 1, 2, \dots, n$, а значение такой разности, равное $n!$, хорошо известно.

[Р. Гиббс, М. М., 44, 114 (February 1971).]

329. $T = 1$. Если $C = 6$, то R равнялось бы нулю и потребовалось бы оставить 2 «в уме» после сложения в столбце HRU . Однако максимальное значение величины $H + R + U +$ «величина в уме» было бы равно 19, так что «занять» 2 из HRU невозможно. Поэтому остаются следующие варианты:

$$\begin{array}{rcl} C = 9 & | & 8 & | & 7 \\ R = 2 & 3 & | & 0 & 2 & | & 0 \end{array}$$

Далее, $K + G = 10$.

Перебирая указанные выше значения C, R , мы находим соответствующие K, G , а затем I, U и H . Все это не так трудно сделать, как может показаться на первый взгляд.

Отбрасывая «невозможные» варианты, когда они падаются, мы приходим в итоге к значениям $C = 9$, $R = 2$, $K = 4$, $G = 6$, $N = 8$, $U = 5$, $I = 0$, $H = 3$. Поскольку $T = 1$, $S = 7$.

Таким образом, весь криптоарифм принимает вид

$$\begin{array}{r} 9\ 3\ 5\ 9\ 4 \\ 1\ 2\ 0\ 6\ 6 \\ 1\ 5\ 2\ 8\ 7 \\ \hline 1\ 2\ 0\ 9\ 4\ 7 \end{array}$$

[Дж. Хантер, М. М., 44, 107 (February 1971).]

330. I. Можно доказать несколько более сильное утверждение. Оказывается, что для произвольного натурального n существуют два нечетных простых числа p_1 и p_2 , таких, что $n - p_1$ делится на p_2 . Действительно, возьмем произвольное натуральное n . Выберем, далее, нечетное простое число p_1 , такое, чтобы $n - p_1$ не имело вида $2^\alpha p_1^\beta$ *. После этого разложим число $n - p_1$ на простые сомножители. В этом разложении будет содержаться некоторое нечетное простое число p_2 . Например, $1 = 11 - 5 \cdot 2$, $2 = 7 - 5$, $3 = 13 - 5 \cdot 2$, $4 = 11 - 7$, $5 = 11 - 3 \cdot 2$ и т. д.

[Ш. Кумар, М. М., 44, 108 (February 1971).]

II. Из хорошо известной теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии следует гораздо более сильное утверждение. Пусть p_2 — произвольное нечетное простое число, которое не делит n . Теорема гарантирует, что в арифметической прогрессии $2n + kp_2$, $k = 1, 2, \dots$ содержится бесконечно много простых членов. Пусть p_1 — один из таких членов. Тогда $2n - p_1$ делится на p_2 .

[Е. Старк, М. М., 44, 108 (February 1971).]

331. I. Задачу можно обобщить и показать, что в произвольном треугольнике ABC соответствующие предельные точки делят сторону BC на три равные части. Действительно, последовательности $\{P_{2k}\}$ и $\{P_{2k+1}\}$ представляют собой бесконечные подмножества компактного множества ABC и, следовательно, имеют предельные точки. Пусть P' и P'' — произвольные предельные точки соответственно для $\{P_{2k}\}$ и $\{P_{2k+1}\}$. Поскольку $P_{2k}P_{2k-1} =$

$= AP_{2k} = \frac{1}{2} AP_{2k-1}$ и $P_{2k}P_{2k+1} = BP_{2k+1} = \frac{1}{2} BP_{2k}$, то $P'P'' = AP' = \frac{1}{2} AP''$ и $P'P'' = BP'' = \frac{1}{2} BP''$. Следовательно, A , P' и P'' — коллинеарны, причем P' совпадает с серединой AP'' ; а B , P' , P'' также коллинеарны, и P'' совпадает с серединой BP' . Таким образом, точки P' и P'' делят отрезок AB на три равные части и представляют собой единственные предельные точки соответственно для последовательностей $\{P_{2k}\}$ и $\{P_{2k+1}\}$. Значит, $P_{2k} \rightarrow P'$, $P_{2k+1} \rightarrow P''$, и мы получаем требуемый результат.

[Д. Оумэн, *М. М.*, 44, 110 (February 1971).]

II. Данный результат справедлив для любого треугольника ABC .

Пусть $C = O$, $\vec{CB} = \vec{OB} = B$ и $\vec{CA} = \vec{OA} = A$.

Радиус-вектор любой точки P_i , принадлежащей нашей последовательности, выражается в виде линейной комбинации векторов B и A , то есть

$$P_i = xA + yB;$$

а именно:

$$P_1 = \frac{1}{2} B = 0 \cdot A + \frac{1}{2} B,$$

$$P_2 = \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} A + \frac{1}{4} B,$$

$$P_3 = \frac{1}{2} P_2 + \frac{1}{2} B = \frac{1}{4} A + \frac{5}{6} B$$

и т. д.

Вообще, проекции x точек P_{2k} образуют последовательность $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{21}{32}, \dots, x_k, \dots$, где

$$x_k = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} 4^i}{2 \cdot 4^{n-1}} = \frac{4^k - 1}{6 \cdot 4^{k-1}} = \frac{1}{6} \left(4 - \frac{1}{4^{k-1}} \right);$$

откуда видно, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \frac{2}{3}.$$

Проекция y точек P_{2k} образуют, с другой стороны, последовательность

$$\frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{21}{64}, \dots, y_k = \frac{4^k - 1}{3 \cdot 4^k}, \dots,$$

¹ Найдите нестрогость в этом месте! — *Прим. ред.*

откуда ясно, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, последовательность P_{2k} сходится к точке $\frac{3}{2}A + \frac{1}{3}B$, которая лежит, очевидно, на \overrightarrow{BA} и отсекает от этой стороны $\frac{1}{3}$ ее длины.

Аналогично для P_{2k+1} мы получим

$$x_k = \frac{4^k - 1}{3 \cdot 4^k} \rightarrow \frac{1}{4}$$

и

$$y_k = \frac{1}{6} \left(4 - \frac{1}{4^k} \right) \rightarrow \frac{2}{3},$$

так что последовательность P_{2k+1} сходится к точке $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$, также расположенной на стороне \overrightarrow{BA} и отсекающей от нее $\frac{1}{3}$.

[Е. Кинкейд, М. М., 44, 110 (February 1971).]

332. Будем считать все отрезки направленными: например, $AG = -GA$ и т. д. Далее заметим, что точки B , A' и C коллинеарны и расположены по одной на каждой из сторон (или на продолжении стороны) треугольника AGB' . По теореме Менелая мы получаем соотношение*

$$\frac{AA'}{A'G} \cdot \frac{GB}{BB'} \cdot \frac{B'C}{CA} = -1. \quad (1)$$

Аналогично, рассматривая в треугольнике CGB' коллинеарные точки C' , B и A , мы получим

$$\frac{CC'}{C'G} \cdot \frac{GB}{BB'} \cdot \frac{B'A}{AC} = -1. \quad (2)$$

Прибавляя единицу к обеим частям равенства $\frac{AG}{GA'} = \frac{CG}{GC'}$, мы получим

$$\frac{AA'}{GA'} = \frac{CC'}{GC'}. \quad (3)$$

Из равенств (1), (2), (3) можно легко найти соотношение

$$CB' = B'A. \quad (4)$$

Поскольку в (4) участвуют направленные отрезки, это означает, что B' — середина A . Точно так же, выбирая другие треугольники, мы получим, что C' — середина AB и A' — середина BC .

Таким образом, мы с необходимостью получаем, что точки A' , B' , C' лежат строго внутри отрезков BC , CA и AB , и делать дополнительно такое предположение не нужно.

Для того чтобы сделать какой-либо другой вывод, истолкуем отрезки исходной пропорции как ненаправленные. Тогда, заменяя их направленными отрезками, мы можем заметить, что либо все дроби имеют одинаковые знаки (уже разобранный нами случай), либо знак одной из дробей отличается от знака двух остальных. Пусть, скажем,

$$\frac{AG}{GA'} = \frac{CG}{GC'} = -\frac{BG}{GB'}. \quad (5)$$

Воспользовавшись приведенными выше рассуждениями, мы приходим к равенству (4), из которого, как и прежде, будет следовать, что B' — середина AC . Из пропорции

$$\frac{AG}{GA'} = -\frac{BG}{GB'}$$
 мы получим

$$\frac{AG}{GA'} + \frac{GA'}{GA'} - 1 = -\frac{BG}{GB'} - \frac{GB'}{GB'} + 1,$$

откуда

$$\frac{AA'}{GA'} = 2 - \frac{BB'}{GB'}. \quad (6)$$

Далее, из (5) следует, что $B'C/CA = -1/2$, и поэтому (1) примет вид

$$\frac{AA'}{A'G} \cdot \frac{GB}{BB'} = 2. \quad (7)$$

Полагая в (7) $GB/BB' = GB'/BB' - 1$ и исключая $AA'/A'G$ из (6), мы получим

$$2r^2 - r + 1 = 0, \quad (8)$$

где $r = GB'/BB'$. Но уравнение (8) имеет комплексные корни, так что этот случай отпадает.

Таким образом, остается единственно возможным случаем медиан, разобранный выше.

[Е. Старк, М. М., 44, 112 (February 1970).]

333. Интеграл, стоящий в левой части данного равенства, представляет собой площадь области, заключенной между полуокружностью $y = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ и осью x , равную, очевидно, π . Интеграл, стоящий в правой части, совпадает с длиной той же полуокружности, то есть тоже равен π .

[П. Линдстром, М. М., 45, 47 (January 1972).]

334.

$$e^{2737} \gg e^{1610} \approx 5^{1000} = (1 + 1 + 1 + 1 + 1)^{1000} = \\ = \sum_{(\sum n_i = 1000)} \frac{1000!}{n_1! n_2! n_3! n_4! n_5!} \gg \frac{1000!}{70! 270! 300! 220! 140!}.$$

[Ю. Уэрмер, М. М., 44, 47 (February 1970).]

335. Допустим, что квадратные корни из трех различных простых чисел p_1, p_2, p_3 являются членами некоторой геометрической прогрессии. Тогда должны выполняться равенства $ar^{n_1} = \sqrt{p_1}$, $ar^{n_2} = \sqrt{p_2}$, $ar^{n_3} = \sqrt{p_3}$ (n_1, n_2, n_3 — различные целые числа, и можно считать, что $n_1 > n_2 > n_3$).

Исключая из этих равенств a и r , мы получим равенство

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{n_2-n_3} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{n_1-n_2}, \text{ или } p_1^{n_2-n_3} p_3^{n_1-n_2} = p_2^{n_1-n_3},$$

которое, очевидно, не может быть верным, поскольку каждое целое число разлагается на простые сомножители единственным образом.

[М. Кламкин, М. М., 44, 47 (February 1972).]

336. Пусть $N = (p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1)^{2^k} - 1$. Тогда, поскольку $a^{2^k} - 1 = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^{2^2} + 1) \dots (a^{2^{k-1}} + 1)$,

$$N = (p_1 p_2 \dots p_n) [(p_1 p_2 \dots p_n + 1) + 1] \times \\ \times [(p_1 p_2 \dots p_n + 1)^2 + 1] \dots [(p_1 p_2 \dots p_n + 1)^{2^{k-1}} + 1].$$

Обозначим далее $(p_1 p_2 \dots p_n + 1)^r + 1$ через N_r . Так как $(b + 1)^r = \sum_{j=0}^r C_r^j b^{r-j}$,

$$N_r = \sum_{j=0}^{r-1} C_r^j (p_1 p_2 \dots p_n)^{r-j} + 2.$$

Поскольку p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) делят $\sum_{j=0}^{r-1} C_r^j (p_1 p_2 \dots p_n)^{r-j}$, но не делят 2, число N_r не делится на p_i . Следовательно, N_r должно содержать по крайней мере один простой сомножитель P_r , отличный от p_1, p_2, \dots, p_n . В силу нечетности N_r число $P_r \neq 2$. Рассмотрим теперь $M = N_{2^t+s} + N_{2^t}$, где $t \geq 0, s \geq 1$. Заметим, что

$$M = (p_1 p_2 \dots p_n + 1)^{2^t+s} + (p_1 p_2 \dots p_n + 1)^{2^t} + 2 = \\ = (p_1 p_2 \dots p_n + 1)^{2^t} \{ (p_1 p_2 \dots p_n + 1)^{(2^s-1) 2^t} + 1 \} + 2.$$

Разлагая это выражение на множители, мы получим

$$M = (p_1 p_2 \dots p_n + 1)^{2^t} \{ [(p_1 p_2 \dots p_n + 1)^{2^t} + 1] \times \\ \times \left[\sum_{i=2}^{2^s} (-1)^i (p_1 p_2 \dots p_n + 1)^{(i-2) 2^t} \right] \} + 2 = \\ = (p_1 p_2 \dots p_n + 1)^{2^t} N_{2^t} \times \\ \times \left[\sum_{i=2}^{2^s} (-1)^i (p_1 p_2 \dots p_n + 1)^{(i-2) 2^t} \right] + 2.$$

Далее существует простой делитель P_{2^t} числа N_{2^t} , отличный от p_1, p_2, \dots, p_n . Поэтому M не делится на P_{2^t} , а значит, и N_{2^t+s} не делится на P_{2^t} . Итак, при каждом s (соответственно t), равном $0, 1, \dots, k-1$, у числа N_{2^s} (соответственно N_{2^t}) есть простой делитель P_{2^s} (соответственно P_{2^t}), отличный от всех p_i . Кроме того, $P_{2^s} \neq P_{2^t}$ при $s \neq t$. Следовательно, $n+k$ простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, P_1, P_2, P_{2^2}, \dots, P_{2^{k-1}}$ все различны между собой и являются делителями числа

$$N = \left(\prod_{i=1}^n p_i \right) \left(\prod_{j=0}^{k-1} N_{2^j} \right).$$

[А. Пэтш, М. М., 44, 48 (February 1972).]

337. Мы получаем немедленно, что $M = 1, O = 0, S = b - 1, E + 1 = N$, а $N + R + 1 = E + b$ или $N +$

$+R = E + b$. Подставляя сюда N , мы находим, что $R = b - 2$ или $R = b - 1$. Но $b - 1$ — это значение S ; следовательно, $R = b - 2$.

Криптарифм теперь принимает вид

	$b - 1$	E	$E + 1$	D
	1	0	$b - 2$	E
1	0*	$E + 1$	E^*	Y^*

(звездочками отмечены те места, где приходится что-то «запоминать в уме»).

Рассмотрев правый столбец, мы находим, что (1) $D + E = Y + b$. Более того, поскольку $S = b - 1$ и $R = b - 2$, $D \leq b - 3$, $N \leq b - 3$ и (2) $E \leq b - 4$. Вычитая (2) из (1), мы приходим к неравенствам $D \geq Y + 4$, причем $Y \geq 2$. Значит, если $Y = 2$, то $D \geq 6$ и D может принимать не более чем $b - 3 - 6 + 1 = b - 8$ различных значений. Заметим, однако, что D не может быть расположено между двумя последовательными числами E и N . Следовательно, при $Y = 2$ величина D может принимать $b - 9$ различных значений. При $Y = 3$ число таких значений равно $b - 10$, и вообще с увеличением Y на 1 число значений, принимаемых D , тоже уменьшается на 1.

Таким образом, число решений исходного криптарифма совпадает с суммой членов арифметической прогрессии

$$(b - 9) + (b - 10) + \dots + 1 = \frac{(b - 9 + 1)(b - 9)}{2} = C_{b-8}^2.$$

В десятичной системе единственное решение имеет вид

$$\begin{array}{r} 9\ 5\ 6\ 7 \\ 1\ 0\ 8\ 5 \\ \hline 1\ 0\ 6\ 5\ 2. \end{array}$$

В качестве еще одного примера возьмем систему с основанием 12. В этом случае во всех $C_{12-8}^2 = 6$ решениях

$O = 0, M = 1, R = \alpha, S = \beta$, а значения остальных букв задаются таблицей

Y	D	E	N
2	6	8	9
2	8	6	7
2	9	5	6
3	7	8	9
3	9	6	7
4	9	7	8

[В. Б л а н к о, *М. М.*, 44, 48 (February 1972).]

338. Пусть $x = a - d, y = a, z = a + d$ и $u = a + 2d$.

Тогда $(a - d)^3 + a^3 + (a + d)^3 = (a + 2d)^3$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, мы получим уравнение

$$2a^3 - 6a^2d - 6ad^2 - 8d^3 = 0,$$

или после деления на 2

$$a^3 - 3a^2d - 3ad^2 - 4d^3 = 0.$$

Поскольку a и d целые, их отношение $a/d = r$ рационально. Подставляя rd вместо a в уравнение, мы получим

$$(rd)^3 - 3(rd)^2d - 3(rd)d^2 - 4d^3 = 0,$$

$$r^3d^3 - 3r^2d^3 - 3rd^3 - 4d^3 = 0.$$

Разделив уравнение на d^3 (так как $d \neq 0$), мы находим

$$r^3 - 3r^2 - 3r - 4 = 0,$$

$$(r - 4)(r^2 + r + 1) = 0.$$

Приравнивая каждую скобку к нулю, мы находим $r = 4$ и $r = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Отбросив комплексные корни (поскольку, как сказано выше, r должно быть рациональ-

ным), мы получим единственное возможное значение $r = 4$. Поэтому $a = 4d$, так что

$$\begin{aligned}x &= a - d = 3d, \\y &= a = 4d, \\z &= a + d = 5d, \\u &= a + 2d = 6d.\end{aligned}$$

[Д. Розен, М. М., 44, 51 (February 1972).]

339. Пусть R — радиус описанной, а r — радиус вписанной окружностей; $x = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, $y = \operatorname{tg} \frac{B}{2}$, $z = \operatorname{tg} \frac{C}{2}$; ΔXYZ — площадь треугольника XYZ .

Вне зависимости от того, будет ли угол C тупым или острым, угол $OBH = C - A$ и BI делит его пополам внутренним образом, так что I лежит между BO и BH .

Кроме того, $BH = 2R \cos B$, $BI = r \operatorname{cosec} \frac{B}{2} = 4R \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$. Далее,

$$\Delta OBH = \frac{1}{2} \cdot 2R^2 \cos B \cdot \sin(C - A) = \alpha.$$

$$\begin{aligned}\Delta BIO + \Delta BIH &= \frac{1}{2} (1 + 2 \cos B) R \cdot BI \cdot \sin \left[\frac{1}{2} (C - A) \right] = \\&= 2R^2 (1 + 2 \cos B) \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \sin \left[\frac{1}{2} (C - A) \right] = \beta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha - \beta &= 2R^2 \sin \left[\frac{1}{2} (C - A) \right] \left\{ \cos B \cos \frac{1}{2} (C - A) - \right. \\&\quad \left. - (1 + 2 \cos B) \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \right\} = \\&= 2R^2 \sin \left[\frac{1}{2} (C - A) \right] \cos B \left\{ \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} - \right. \\&\quad \left. - (\sec B + 1) \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \right\} = \\&= 2R^2 \sin \left[\frac{1}{2} (C - A) \right] \cos B \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \left\{ 1 - \frac{2xz}{1 - y^2} \right\}.\end{aligned}$$

Поскольку $B < \pi/2$, $1 - y^2 > 0$ и каждый из сомножителей, кроме последнего, положителен. Значит, знак $\alpha - \beta$ совпадает со знаком $\gamma = 1 - y^2 - 2xz$. Но $xy + yz + zx = 1$, так что $\gamma = -[y^2 - (x + z)y + xz]$. Последнее выражение положительно при $x < y < z$; следо-

вательно, $\alpha > \beta$. Отсюда, учитывая сказанное выше про положение точки I , мы получаем, что I лежит внутри треугольника $ОВН$.

[М. Грининг, М. М., 44, 54 (February 1972).]

340. Предположим, что $\log_e 2$ рационально. Очевидно, $\log_e 2 \neq 0$; следовательно, $\log_e 2 = p/q$, где p и q — целые числа, $p > 0$, а $q \neq 0$. Поэтому $e^{p/q} = 2$, или $e^p = 2^q$. Это означает, что e удовлетворяет уравнению $x^p - 2^q = 0$, что невозможно, поскольку число e трансцендентно (то есть не является корнем ни одного многочлена с рациональными коэффициентами)*.

[Е. Кларк, М. М., 45, 102 (February 1972).]

341. Пусть d — наибольший общий делитель чисел $a^n - 1$ и $a^m - 1$. Тогда при некоторых целых k и r выполняются равенства $a^n = kd + 1$, $a^m = rd - 1$. Следовательно,

$$a^{mn} = (a^n)^m = (kd + 1)^m = td + 1$$

при некотором целом t , и

$$a^{mn} = (a^m)^n = (rd - 1)^n = ud - 1$$

при некотором целом u (напомним, что n нечетно).

Таким образом, $td + 1 = ud - 1$, или $(u - t)d = 2$. Отсюда следует, что $d = 1$ или $d = 2$.

[Э. Джаст, М. М., 45, 102 (February 1972).]

342.

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\right] = 0. \end{aligned}$$

[М. Демос, М. М., 45, 102 (February 1972).]

343. I. (Решение в десятичной системе.) Разыскивая решение данной задачи, мы вспоминаем хорошо известную теорему арифметики, согласно которой, если мы выделим в знаменателе степени двойки и пятерки, то оставшийся сомножитель s является делителем числа $10^n - 1$, где n длина периода данной дроби.

Поскольку в нашем случае $n = 3$, s должно быть делителем числа 999, а

$$999 = 3^3 \cdot 37.$$

Перепробовав различные дроби со знаменателем 37, меньшие $\frac{1}{2}$, найдем искомое решение

$$\frac{13}{37} = .351351351 \dots$$

[М. Бариеби, М. М., 45, 103 (February 1972).]

II. (Решение в девятеричной системе.) Пусть

$$F = \frac{SO}{HE} = .(RAN).$$

Тогда $1000F = RAN.(RAN)$, так что $888F = RAN$. Далее, $888 = 14 \cdot 62 = 15 \cdot 57 = 28 \cdot 31$, причем здесь представлены все двузначные делители числа 888 и, следовательно, все возможные варианты для HE ¹. Обозначим частное от деления 888 на HE через HE' ; так, например, $28' = 31$. Теперь заметим, что $RAN = SO \cdot HE'$. Возможные значения 14 и 15 мы отбрасываем, так как при таких значениях HE не найдется SO , удовлетворяющего неравенству $2SO < HE$; $HE \neq 31$, поскольку отсюда следовало бы, что $S = E$; $HE \neq 28$, так как из $SO = 13$ следует, что $A = S$; $HE \neq 62$, так как из соотношения $12 \leq SO < 31$ следует, что $SO = 13, 14, 15, 17, 18, 30$; а в любом из этих случаев произведение $SO \cdot HE' = RAN$ приводит к повторяющимся цифрам.

Из равенства $HE = 57$ следовало бы, что $12 \leq SO < 28$ или $SO = 12, 13, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 24, 26$.

Из этих возможных значений для SO только $SO = 13$ и $SO = 26$ приводят к $RAN = 206$ и $RAN = 413$, где нет повторяющихся цифр. Поскольку все «зашифрованные» цифры отличны от нуля, мы находим, что $SO = 26$, $HE = 57$ и $RAN = 413$. Разумеется, все проведенные выше выкладки мы производили в системе счисления с основанием, равным 9.

[К. Уилки, М. М., 45, 103 (February 1972).]

344. Если мы расположим все $n + m$ жуков, так сказать, «в одну шеренгу», позаботившись, чтобы они не расползались, то места, в которых помещаются n самцов, можно будет выбрать C_{m+n}^n способами. Среди первых $x - 1$ мест мы можем разместить $k - 1$ самца C_{x-1}^{k-1} способами,

¹ 888_{дев} играет ту же роль, что 999_{дес} в предыдущем рассуждении. — Прим. ред.

а $n - k$ оставшихся самцов мы можем (после того, как первые k особей получают свои места) разместить среди оставшихся $m + n - x$ мест C_{m+n-x}^{n-k} способами. Следовательно, вероятность $f(x)$ того, что $x_k = x$, равна

$$f(x) = \frac{C_{k-1}^{x-1} C_{m+n-x}^{n-k}}{C_{m+n}^n},$$

$$x = k, k+1, \dots, k+m,$$

а искомое среднее значение числа x_k равно

$$E(x_k) = \sum_{x=k}^{k+m} x f(x).$$

Положим $y = x - k$ и рассмотрим сумму

$$\sum_{x=k}^{k+m} x C_{x-1}^{k-1} C_{m+n-x}^{n-k} = k \sum_{y=0}^m C_{y+k}^y C_{m+n-y-k}^{n-y}.$$

Заметим, что C_{y+k}^y представляет собой коэффициент при t^y в разложении $(1-t)^{-k-1}$ по степеням t , а $C_{m+n-y-k}^{n-y}$ — коэффициент при t^{m-y} в разложении $(1-t)^{-n+k-1}$. Поскольку $(1-t)^{-k-1} (1-t)^{-n+k-1} = (1-t)^{-n-2}$, наша сумма равна числу k , умноженному на коэффициент при t^m в разложении $(1-t)^{-n-2}$. Следовательно,

$$E(x_p) = \frac{k C_{m+n+1}^m}{C_{m+n}^n} = \frac{k(m+n+1)}{n+1}.$$

[Дж. Хикмэн, М. М., 45, 106 (February 1972)¹.]

345. Пусть гномон-магический квадрат имеет вид

$$a_1 \quad b_1 \quad c_1$$

$$a_2 \quad b_2 \quad c_2$$

$$a_3 \quad b_3 \quad c_3$$

В соответствии с определением

$$\begin{aligned} a_2 + b_2 + a_3 + b_3 &= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 = \\ &= b_1 + c_1 + b_2 + c_2 = b_2 + c_2 + b_3 + c_3. \end{aligned}$$

¹ Формулировка этой задачи в нашем издании несколько изменена; соответствующие изменения внесены также и в решение. — Прим. ред.

Приравнивая первые две суммы, находим, что

$$a_3 + b_3 = a_1 + b_1 \quad \text{и} \quad b_3 - b_1 = a_1 - a_3,$$

приравнивая две вторые суммы, находим, что

$$b_1 + c_1 = b_3 + c_3 \quad \text{и} \quad c_1 - c_3 = b_3 - b_1.$$

Следовательно,

$$a_1 - a_3 = c_1 - c_3 \quad \text{и} \quad a_1 + c_3 = a_3 + c_1.$$

Прибавляя к обеим частям данного равенства b_2 , мы и получаем требуемое утверждение. Это свойство не распространяется на квадраты 4×4 . Чтобы в этом убедиться, рассмотрим два таких квадрата:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Пример первого квадрата показывает, что если суммы подквадратов 3×3 равны между собой, то тем не менее суммы диагоналей не обязаны совпадать. Второй пример показывает, что суммы диагоналей не обязаны совпадать даже в том случае, если все суммы подквадратов 2×2 равны между собой.

[З. У с и с к и н, М. М., 45, 107 (February 1972).]

346. Мы покажем, что неравенство

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \geq \frac{3}{r},$$

вообще говоря, не верно*. В самом деле, пусть Q внутренняя точка данного треугольника, такая, что расстояния y_1, y_2, y_3 от нее до сторон треугольника удовлетворяют соотношениям

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}}, \quad \frac{y_3}{y_1} = \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_3}},$$

где a_1, a_2, a_3 — стороны треугольника $A_1A_2A_3$ (такая точка, очевидно, ровно одна). Мы покажем, что

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \geq \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3},$$

причем равенство достигается в том и только в том случае, когда заданная точка совпадает с Q .

Прежде всего заметим, что

$$a_1 y_1^2 = a_2 y_2^2 = a_3 y_3^2;$$

общее значение этих величин обозначим M^2 .

Далее,

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = y_1 a_1 + y_2 a_2 + y_3 a_3 = 2S,$$

где S — площадь треугольника. Тогда

$$2S = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = M^2 \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} \right).$$

Точно так же

$$2S = M(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}),$$

откуда

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = \frac{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3})^2}{2S}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} - \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} \right) = \\ &= \frac{x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2}{x_1 x_2 x_3} - \frac{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3})^2}{2S} = \\ &= \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)(x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2) - (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3})^2 x_1 x_2 x_3}{2x_1 x_2 x_3 S}. \end{aligned}$$

Числитель этой дроби равен

$$\begin{aligned} & a_1 x_1^2 (x_2 + x_3) + a_2 x_2^2 (x_3 + x_1) + a_3 x_3^2 (x_1 + x_2) - \\ & - 2(a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2) x_1 x_2 x_3 = \\ &= x_1 (\sqrt{a_2} x_2 - \sqrt{a_3} x_3)^2 + x_2 (\sqrt{a_3} x_3 - \sqrt{a_1} x_1)^2 + \\ & + x_3 (\sqrt{a_1} x_1 - \sqrt{a_2} x_2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Равенство достигается только в том случае, когда

$$\sqrt{a_1} x_1 = \sqrt{a_2} x_2 = \sqrt{a_3} x_3,$$

то есть когда

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3.$$

В частности, для центра вписанного круга $x_1 = x_2 = x_3 = r$, так что

$$\frac{3}{r} \geq \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3}.$$

В случае равенства $y_i = r$ и $a_i = M^2/r^2$ равны между собой. Таким образом, если треугольник равносторонний, то для всякой внутренней точки

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \geq \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = \frac{3}{r},$$

а если неравносторонний, то найдется точка Q , для которой

$$\frac{3}{r} > \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = \frac{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3})^2}{2S}.$$

[Л. Карлиц, М. М., 45, 107 (February 1972).]

347. Вместо того чтобы решать исходную задачу, мы решим ее обобщение, которое формулируется следующим образом.

Пусть задан N -мерный прямоугольный блок с целыми сторонами $m \times n \times \dots \times p$. Разобьем его на $V = mn \dots p$ ячеек (единичных N -мерных кубов) гиперплоскостями, параллельными его простым, то есть N -мерным, граням. Назовем «спичкой» единичный $(N-1)$ -мерный куб. Очевидно, что спичка конгруэнтна простой грани ячейки. Мы хотим расположить спички на простых гранях ячеек так, чтобы:

1) каждая спичка точно покрывала простую грань какой-нибудь ячейки;

2) у каждой из ячеек ровно две простые грани были покрыты спичками и

3) ни одна из спичек не располагалась на простых гранях исходного блока.

Требуется найти необходимые и достаточные условия на N, m, n, \dots, p , при которых такая задача разрешима.

Мы утверждаем, что задача разрешима в том и только в том случае, если объем V нашего блока четен и блок состоит более чем из одного ряда ячеек (откуда следует, в частности, что $N \geq 2$). В терминах сторон m, n, \dots, p эти условия означают, что последовательность m, n, \dots, p состоит по крайней мере из двух членов, что по крайней мере одна из сторон четна и что по крайней мере две

стороны отличны от 1. Общее число нужных спичек равно V . Для исходной задачи о картонном квадрате все эти условия выполняются, если n четно (здесь $N = 2$).

Заметим, что из пп. 1 и 3 вытекает, что спички покрывают те простые грани, которые лежат внутри блока. Поэтому мы получаем следующее условие, двойственное к п. 2:

4) каждая спичка покрывает простые грани ровно у двух ячеек. (Такие ячейки мы назовем связанными.)

Заметим еще, что условие п. 3 запрещает нам, в частности, помещать спички на гиперплоскостях, перпендикулярных любой стороне блока, длина которой равна 1. Поэтому мы можем по желанию менять размерность N нашего блока, добавляя или выбрасывая стороны единичной длины в последовательности m, n, \dots, p и не меняя при этом расположения спичек (с той, разумеется, оговоркой, что размерность нашей спички $N - 1$ меняется вместе с изменением N).

Перейдем теперь к самому доказательству. Предположим, что для некоторого блока существует нужное расположение спичек. Тогда в силу пп. 2 и 4 у каждой ячейки есть ровно две другие ячейки, с ней связанные. Если бы блок состоял только из одного ряда ячеек, то у концевой ячейки могло бы существовать не более одной ячейки с ней связанной. Поэтому, чтобы существовало нужное расположение спичек, блок должен иметь эффективную размерность (то есть размерность, которая получается после удаления всех сторон единичной длины) не ниже 2.

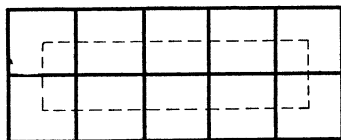
Далее, начав с произвольной ячейки, перейдем к одной из ячеек, с ней связанной. «Попав» в эту новую ячейку, мы переходим к следующей (единственной), связанной с ней ячейке, отличной от той, из которой мы вышли. Тем самым определяется путь, составленный из ячеек. Поскольку же число ячеек конечно, а каждая из ячеек связана ровно с двумя другими ячейками, мы в конце пути вернемся в ту самую ячейку, с которой начали наше движение. Назовем такой замкнутый путь обходом. Заметим, что при каждом обходе между ячейками, спичками и шагами устанавливается взаимно-однозначное соответствие, при котором каждая ячейка соответствует спичке, пересекая которую, мы входим в данную ячейку; каждый шаг соответствует спичке, пересекая

которую, мы входим в очередную ячейку, а также самой этой ячейке.

Возможны два случая: либо при данном обходе мы побываем во всех ячейках нашего блока, либо есть ячейки, в которые мы не попадаем ни на каком шаге. Во втором случае мы берем одну из этих «обделенных» ячеек и устраиваем, начиная с нее, новый обход. Условие п. 2 гарантирует нам, что эти два обхода не пересекутся.

Каждый обход представляет собой замкнутый путь; значит, он содержит столько же шагов в одном из $2N$ основных направлений (то есть направлений, параллельных ребрам блока), сколько и в противоположном ему направлении. Поэтому число шагов (а следовательно, спичек и ячеек), участвующих в обходе, обязано быть четным. Поскольку весь блок распадается на конечное число не пересекающихся между собой обходов, общее число V ячеек в блоке обязано быть четным. В силу взаимно-однозначного соответствия число спичек также равно V . Тем самым мы завершили доказательство в одну сторону.

Проведем его теперь в обратную сторону. Пусть $N \geq 2$, m четно, $k = m/2$ и $n > 1$. Разобьем наш блок на V/kn плиток, каждая из которых имеет размеры $2 \times n \times 1 \times \dots \times 1$ ($2 \times n$, если $N = 2$). Мы можем устроить обход каждой плитки так, как показано на рисунке.



Пунктирная линия соединяет центры связанных ячеек в данном обходе; спички располагаются на простых гранях, пересекаемых пунктирной линией. Данную фигуру можно рассматривать как изображение 2×5 плитки $2 \times 5 \times 1 \times \dots \times 1$, которое получилось при проектировании этой плитки на плоскость, перпендикулярную всем ее единичным сторонам, или (в силу второго замечания) как плитку, у которой удалены все единичные стороны. Теперь, расположив «спички» в каждой из плиток, мы можем получить искомое расположение спичек, просто сложив из этих плиток исходный блок. Таким образом, мы полностью завершили наше доказательство.

Отметим прежде всего, что мы решили одно из двух непосредственных обобщений исходной задачи. Другое ее обобщение получится, если мы заменим условие п. 2 на условие п. 2', а именно:

2') у каждой ячейки ровно половина (то есть N) простых граней должна быть покрыта спичками.

Мы можем пойти дальше и заменить п. 2 на п. 2'':

2'') ровно r простых граней каждой ячейки должно быть покрыто спичками, где r фиксировано.

Необходимые и достаточные условия существования такого покрытия должны теперь формулироваться в терминах r, N, m, n, \dots, p .

Еще одно обобщение получится, если мы отбросим требования, чтобы размерность спички равнялась $N - 1$ и чтобы покрывались только простые грани. Спичка представляет собой теперь M -мерный куб, конгруэнтный M -мерной грани каждой ячейки. Условия соответственно примут вид:

1) каждая спичка покрывает M -мерную грань некоторой ячейки;

2) у каждой ячейки ровно $\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 2') \quad \text{половина, то есть} \\ \quad 2^{N-M-1} C_N^M \\ 2'') \quad r, \text{ при фиксированном } r \end{array} \right.$

M -мерных граней покрыто спичками и

3) ни одна из спичек не расположена на границе блока.

Какие теперь нужно наложить необходимые и достаточные условия на r (в случае п. 2''), M, m, n, \dots, p , чтобы нужное расположение спичек существовало? Естественный частный случай такого обобщения состоит в том, что $M = 1$, и спичка тем самым представляет собой единичный отрезок, покрывающий ребро ячейки.

[Т. Урей, *М.М.*, 45, 110 (February 1972).]

348. Заметим, что при $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{(f - A)(f - B)}{f} \leq 0.$$

Проинтегрировав это равенство в пределах от 0 до 1, мы и получим требуемое соотношение.

[Е. Шмейхель, *М.М.*, 45, 229 (March 1972).]

349. Из равенства

$$(3 \cdot 2 - 1)^x + 2 = (3 \cdot 6 - 1)^y$$

находим, что

$$(-1)^x + 2 = (-1)^y + 3k,$$

откуда ясно, что y должно быть четным. С другой стороны, из равенства $5^x + 2 = (5 \cdot 3 + 2)^y$ видно, что $2^y - 2$ делится на 5, а значит, $y - 1$ делится на 4; откуда следует, что y нечетно. Полученное противоречие и доказывает нужное утверждение.

[Э. Джаст, *М. М.*, 45, 230 (March 1972).]

350. Положим $(TW) = x$, $(O) = y$, $(ELVE) = z$, где, очевидно, $x \geq 23$. Путем ряда проб мы быстро находим, что $SIX = 987$ или 986.

Тогда $10\,000x + z = 987(10x + y)$ или $986(10x + y)$. Пусть, скажем, $SIX = 987$, откуда $z = 987y - 130x$. Пробуя значения $y = 6, 5, 4$ и помня, что каждая буква изображает лишь одну цифру и что, кроме того, начальная и четвертая цифры y z совпадают, мы находим, что этот случай невозможен.

Поэтому $SIX = 986$ и $z = 986y - 140x$, буквы O и E не могут представлять одну и ту же цифру; следовательно, y должно быть нечетным. Придавая y значения 7 и 5, мы получаем, что $y = 5$, $x = 34$, $z = 0170$.

Таким образом, расшифрованный криптоарифм примет вид

$$\begin{array}{r} \times 986 \\ 345 \\ \hline 4930 \\ 3944 \\ 2958 \\ \hline 340170 \end{array}$$

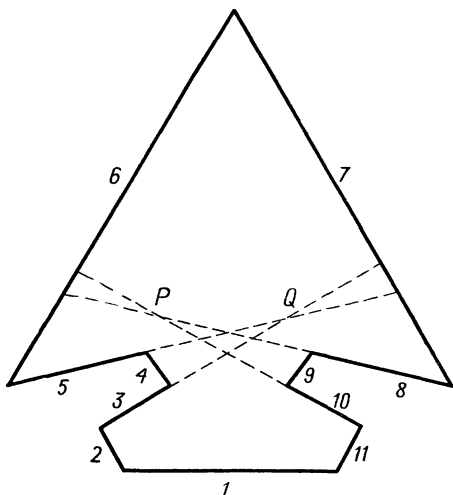
[Дж. Хантер, *М. М.*, 45, 230 (March 1972).]

351. I. Разделим каждую сторону равностороннего треугольника T , высота которого равна 4, на 4 равные части. Перенумеруем в циклическом порядке от A_1 до A_{12} все вершины и точки деления, начав из некоторой вершины треугольника T . Построим на отрезках A_1A_2 , A_5A_6 и A_9A_{10} как на сторонах три равносторонних тре-

угольника, внешних по отношению к T , а сами отрезки удалим. Получившийся при этом многоугольник обладает нужным свойством, поскольку каждая пара добавленных сторон видна из некоторой внутренней точки, отстоящей от соответствующей стороны треугольника T не более чем на единичное расстояние. В то же время если бы все добавленные стороны были видны из некоторой точки P , то P отстояла бы от каждой из трех сторон T не более чем на 1, что невозможно.

[Н. Гундерсон, М. М., 45, 232 (March 1972).]

II. Решение, показанное на рисунке, представляет собой стрелообразный многоугольник, стороны которого перенумерованы от 1 до 11. Стороны 3 и 5 пересекаются



в точке Q . Стороны 8 и 10 пересекаются в точке P . Стороны 3 и 5 одновременно видны только из точек, лежащих внутри маленького треугольника, расположенного справа от Q . Стороны 8 и 10 одновременно видны только из точек маленького треугольника, расположенного слева от P . Следовательно, ни из одной точки стороны 3, 5, 8 и 10 нельзя увидеть одновременно. С помощью простых проб мы устанавливаем, что каждую пару сторон можно увидеть из некоторой внутренней точки.

[М. Голдберг, М. М., 45, 232 (March 1972).]

352. Функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$) обратна к функции $y = a^x$. В силу симметрии их графиков относительно прямой $y = x$ мы заключаем, что в случае касания оба графика либо касаются прямой $y = x$, либо перпендикулярны ей. Следовательно, в точке касания выполняются соотношения

$$y' = a^x \ln a = \pm 1, \quad x = a^x.$$

Решениями этих уравнений будут соответственно $a = e^{1/e}$ ($x = e$) для знака «+» и $a = e^{-e}$ ($x = e^{-1}$) для знака «-». Таким образом, график $y = a^x$ касается графика $y = \log_a x$ при $a = e^{1/e}$ и $a = e^{-e}$.

[В. Конечный, М. М., 45, 234 (March 1972).]

353. Если бы центры равностороннего треугольника и описанного около него эллипса совпадали, эллипс и окружность, описанная около данного треугольника, оказались бы концентрическими. Следовательно, четыре точки пересечения эллипса и окружности служили бы вершинами некоторого прямоугольника. Поскольку вершины равностороннего треугольника не могут быть тремя вершинами ни для какого прямоугольника, исходное предположение ложно.

Аналогичное допущение относительно вписанного эллипса означало бы, что каждая хорда, соединяющая точки касания, делилась бы пополам биссектрисой соответствующего внутреннего угла треугольника. Однако последнее возможно только в случае, если каждая вершина треугольника лежит на продолжении одной из главных осей эллипса. Но две вершины описанного треугольника не могут лежать на одной прямой, проходящей через центр эллипса. Следовательно, в правильный треугольник нельзя вписать эллипс, центр которого совпал бы с центром данного треугольника.

[Л. Бэнкоф, М. М., 45, 236 (March 1972).]

354. Докажем более сильный результат. Для этого заметим, что число $(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$ представляет собой произведение пяти последовательных целых чисел, так что одно из них делится на 3 и одно делится на 5. Если $a-1$ и $a+1$ — простые числа, то $a-2$, a , $a+2$ — последовательные четные числа, так что по крайней мере одно из них делится на 4, а два остальных на 2. Следовательно, произведение трех целых чисел,

смежных с простыми близнецами > 5 , делится на $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2$. Другими словами, $a^3 - 4a$ делится на 240. На самом деле если a представляет собой удвоенное нечетное число, скажем 42, то $a^3 - 4a$ делится на 480. В последнем случае простые близнецы имеют вид $6k - 1$ и $6k + 1$, где k нечетно.

[Ч. Тригг, М. М., 45, 295 (May 1972).]

355. Любые четыре вершины полностью определяют некоторый четырехугольник. Единственная точка пересечения диагоналей такого четырехугольника лежит в силу выпуклости внутри исходного многоугольника. Эта точка принадлежит ровно двум диагоналям нашего n -угольника. Следовательно, число пересечений диагоналей исходного n -угольника окажется максимальным, когда все такие точки будут отличны друг от друга. Но в этом случае их число будет совпадать с количеством четырехугольников, которые можно составить из вершин исходного многоугольника, а именно с

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

[Р. Худ, М. М., 45, 284 (May 1972).]

356. Мы можем записать следующее соотношение:

$$3[1000(BID) + (FOR)] = 4[1000(FOR) + (BID)].$$

Раскрывая квадратные скобки, мы получим

$$3000(BID) + 3(FOR) = 4000(FOR) + 4(BID).$$

Приводя «подобные члены», мы придем к соотношению $2996(BID) = 3997(FOR)$. Разделим обе части данного равенства на 7, при этом получится соотношение

$$428(BID) = 571(FOR), \quad \text{или} \quad \frac{428}{571} = \frac{(FOR)}{(BID)}.$$

Поскольку у данной дроби нет другой формы, содержащей в числителе и знаменателе трехзначные числа, мы находим, что $B = 5$, $I = 7$, $D = 1$, $F = 4$, $O = 2$, $R = 8$, а весь криптоарифм расшифровывается следующим образом:

$$3(571\,428) = 4(428\,571), \quad \text{или} \quad 1\,714\,284 = 1\,714\,284.$$

[Э. Кейлог, М. М., 45, 285 (May 1972).]

357. I. Если мы окажемся достаточно изобретательными и проведем дополнительные линии, показанные на

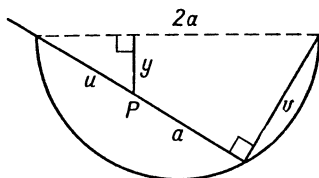


Рис. 1.

рис. 1, то немедленно получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} y &= u \sin \theta, \\ v &= 2a \sin \theta, \\ v^2 + (u + a)^2 &= 4a^2. \end{aligned}$$

Исключая отсюда u и v , мы приходим к уравнению

$$y = a(\sin 2\theta - \sin \theta).$$

Если P — центр тяжести нашей палки, то положение равновесия будет достигнуто в том случае, когда P будет расположен в самом низком из возможных положений.

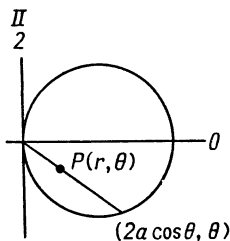


Рис. 2.

Поэтому искомым углом будет тот угол, при котором y примет максимальное значение. Приравнявая к нулю $y'(\theta)$, мы приходим к уравнению

$$4 \cos^2 \theta - \cos \theta - 2 = 0,$$

из которого находим

$$\cos \theta = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}.$$

Но искомый угол острый. Поэтому единственным решением задачи будет $\theta \approx 32^\circ 32'$.

II. Введем полярные координаты так, как показано на рис. 2. Тогда траектория центра тяжести P (рис. 3)

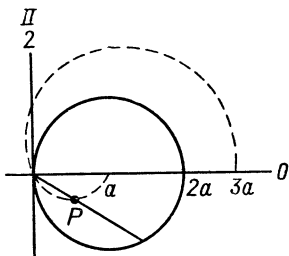


Рис. 3.

будет задаваться уравнением

$$r = 2a \cos \theta - a, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0.$$

Для того чтобы найти наинизшее положение P , вспомним выражение для углового коэффициента касательной к кривой, заданной в полярных координатах,

$$k = \frac{r + r' \operatorname{tg} \theta}{r' - r \operatorname{tg} \theta}$$

и приравняем его к нулю. Подставляя выражение $r(\theta)$ в равенство

$$r + r' \operatorname{tg} \theta = 0,$$

мы и получим уравнение

$$4 \cos^2 \theta - \cos \theta - 2 = 0.$$

Решая его, найдем $\theta \approx -32^\circ 32'$. Знак «—» связан с интервалом изменения θ в полярных координатах.

Второе решение обладает теми преимуществами, что здесь нам не потребовалось проводить дополнительные построения, а также оно позволяет найти траекторию центра тяжести и дать интерпретацию для второго значения $\cos \theta$.

[Дж. С т а б, М. М., 45, 286 (May 1972).]

358. Проведем окружность, которую мы обозначим через $A(AB)$, с центром в точке A радиуса AB . Начиная от точки B , раствором AB отметим на окружности точки C, D, E так, чтобы $BC = CD = DE = AB$. Тогда $BD = \sqrt{3}(AB)$. Проведем дуги $B(BD)$ и $E(BD)$, пересекаю-

щиеся в точке F . При этом $AF = \sqrt{2}(AB)$. Проведем дуги $B(AF)$ и $E(AF)$, пересекающиеся в точке G , которая лежит на окружности $A(AB)$. Если A и B — смежные вершины искомого квадрата, то G представляет собой его третью вершину. При этом четвертой вершиной H служит точка пересечения дуг $G(AB)$ и $B(AB)$.

Если же A и B — противоположные вершины искомого квадрата, то найдем точку L , которая получается из точки F с помощью инверсии относительно окружности $A(AB)$. Для этого мы сначала проведем дугу $F(AF)$, которая пересечет $A(AB)$ в точках J и K , а затем проведем дуги $J(AJ)$ и $K(AK)$, пересекающиеся в нужной точке L . Тогда $AL = AB/\sqrt{2}$. Следовательно, другими вершинами M и N искомого квадрата будут точки пересечения дуг $A(AL)$ и $B(AL)$.

[М. Голдберг, М. М., 45, 290 (May 1972).]

359. Пусть G — центр тяжести, I — центр вписанной окружности, S — площадь, h_a и h_b — высоты, опущенные соответственно на стороны a и b в треугольнике ABC . Обозначим через P и Q точки пересечения прямой GI соответственно со сторонами BC и CA . Поскольку сумма площадей треугольников GPC и GQC совпадает с аналогичной суммой для треугольников IPC и IQC и $CP = CQ$, мы находим, что $\frac{1}{3}h_a + \frac{1}{3}h_b = 2r$. Требуемое равенство получится теперь немедленно из соотношений

$$h_a = \frac{2S}{a}, \quad h_b = \frac{2S}{b} \quad \text{и} \quad r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

[Ф. Лейенбергер, А. М. М., 77, 80 (January 1970).]

360. Мы можем считать без ограничения общности, что центр многоугольника попадает внутрь некоторого квадрата в точку, которая находится на расстоянии l от ближайшей к нему стороны этого квадрата. Опустим перпендикуляр из центра нашего многоугольника на эту сторону и рассмотрим углы, образованные этим перпендикуляром и «радиусами» (то есть прямыми, соединяющими центр с вершинами) многоугольника. Один из таких углов, наименьший по абсолютной величине, обозначим через θ . Вершина, лежащая на соответствующем «радиусе», расположена ближе всех к данной стороне, поскольку расстояние от нее до этой стороны равно $l - \cos \theta$,

а эта величина принимает минимальное значение, когда $\cos \theta$ максимален.

Если многоугольник пересекает данную сторону квадрата, то l должно быть меньше $\cos \theta$. Поскольку число сторон многоугольника кратно 4, ситуация одинакова по отношению ко всем сторонам квадрата. Следовательно, центр многоугольника должен находиться не дальше чем на $\cos \theta$ от одной из сторон квадрата. Вероятность такого события равна

$$\frac{16 \cos \theta - 4 \cos^2 \theta}{16}. \quad (1)$$

Данная величина представляет собой отношение площади той области, в которой может находиться центр многоугольника, пересекающего квадрат, к площади всего квадрата.

Далее очевидно, что $0 \leq \theta$ и $\theta \leq \pi/4n$. Следовательно, вероятность того, что наш угол окажется в бесконечно малом интервале между каким-то θ и $\theta + d\theta$, равна

$$\frac{4n d\theta}{\pi}. \quad (2)$$

Вероятность того, что наш многоугольник пересечет квадрат и при этом угол θ окажется в нужном интервале, равна произведению (1) и (2). Искомая вероятность получится теперь интегрированием по всем значениям θ , то есть окажется равной

$$\frac{4n}{\pi} \int_0^{\pi/4n} \left(\cos \theta - \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right) d\theta = \frac{4n}{\pi} \sin \frac{\pi}{4n} - \frac{n}{4\pi} \sin \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{8}.$$

[К. Кессел, *A. M. M.*, 71, 81 (January 1970).]

361. Заметим, что

1) если 2^a делит $p^n - 1$, то $a \leq 4$, поскольку $2^5 + 1$ не равно степени простого числа;

2) если q^b делит $p^n - 1$ (q — нечетное простое), то $q = 2^k - 1$ и, более того, $b = 1$, поскольку $q^2 + 1$ четно и содержит по крайней мере нетривиальный делитель (а значит, не может быть степенью простого числа);

3) если q и r оба имеют вид $2^k - 1$, то они не могут одновременно делить $p^n - 1$, так как число $qr + 1$ четно и обладает по крайней мере одним нетривиальным делителем (а значит, не совпадает со степенью простого числа);

4) если 2 и $q = 2^k - 1$ оба делят $p^n - 1$, то число $2q + 1$ тоже должно быть вида $2^k - 1$, откуда $q = 3$.

Таким образом, искомыми числами будут простые числа вида $2^k - 1$ и делители числа $48 (= 2^4 \cdot 3)$.

[Д. Марш, А. М. М., 71, 194 (February 1970).]

362. Утверждение справедливо и является следствием тождества

$$|ac| - \operatorname{Re} ac = \frac{1}{2} |\bar{c} - a|^2 - \frac{1}{2} (|c| - |a|)^2.$$

Достаточность данного условия очевидна. Чтобы убедиться в его необходимости, выберем такие a и c , чтобы $|a| = |c| = |z|^{1/2}$; при этом исчезнет второе слагаемое в правой части данного тождества.

[Дж. Каттлер, А. М. М., 71, 194 (February 1970).]

363. Положим $\omega = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$. По формуле Муавра $\omega^{\pm j} = \cos \frac{\pi j}{n} \pm i \sin \frac{\pi j}{n}$, а потому $\cos \frac{\pi j}{n} = \frac{1}{2} (\omega^j + \omega^{-j})$ и $-1 = \omega^n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \cos^n \left(\frac{\pi j}{n} \right) &= \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{nj} \left[\frac{\omega^j + \omega^{-j}}{2} \right]^n = \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^n \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{nj} \sum_{k=0}^n C_n^k \omega^{j(n-2k)} = \left(\frac{1}{2} \right)^n \sum_{k=0}^n C_n^k \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(2n-2k)}. \end{aligned}$$

Далее заметим, что $\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(2n-2k)} = 0$, если только k не равно 0 или n ; в последнем случае данная сумма равна n . Таким образом, исходная сумма равна

$$\frac{1}{2^n} [nC_n^0 + nC_n^n] = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

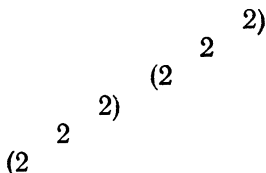
[Г. Рикардо, А. М. М., 71, 405 (March 1970).]

364. Поскольку

$$(2^2)^2 = 2^{(2^2)} = 16,$$

данная величина не зависит от способа расстановки скобок и $N_3 = 1$. Точно так же $(2^{(2^2)^2}) = 16^2 = 256$, в то

время как $2^{(2^{2^2})} = 2^{16}$. Следовательно, $N_4 = 2$. Выражения вроде



не допускаются, поскольку в них скобки не вложены друг в друга. Поэтому каждую новую двойку можно добавить только к вершине или к основанию «лесенки» меньшего порядка.

При $n = 5$ мы получим

$$(256)^2 = (2^8)^2 = 2^{16}; \quad (2^{16})^2 = 2^{32}; \quad 2^{256}; \quad 2^{(2^{16})} \quad \text{и} \quad N_5 = 4.$$

При больших значениях n числа, полученные добавлением двойки к вершине «лесенки», гораздо меньше тех чисел, которые получаются добавлением двойки к основанию «лесенки»*. Таким образом, $N_{n+1} = 2N_n$, или $N_n = 2^{(n-3)}$ при $n = 3, 4, 5 \dots$

[M. Голдберг, А.М.М., 77, 525 (May 1970).]

365. I. Пусть $f(x) = x^{1/x}$. Легко показать, что $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, $f(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$, f возрастает, когда x изменяется от 0 до e , и f убывает, когда x изменяется от e до ∞ *. Следовательно, максимальное значение, C , величин $f(k)$, где $k = 1, 2, \dots$, равно $\max(f(2), f(3))$. Поскольку $3^2 > 2^3$, $f(3) > f(2)$, откуда $C = 3^{1/3}$. Тогда $f(m) \leq 3^{1/3}$ для всех положительных целых m . Если $n \geq m$, то $m^{1/n} \leq m^{1/m} \leq 3^{1/3}$; следовательно, $\min(m^{1/n}, n^{1/m}) \leq 3^{1/3}$.

[Д. Линд, А. М. М., 77, 768 (July 1970).]

II. Предположим сначала, что $m = n$; тогда нам нужно доказать, что $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$, или что $3^n \geq n^3$. Но последнее неравенство легко доказать при $n \geq 1$ с помощью математической индукции. Действительно,

$$3^n \geq n^3 \Rightarrow 3^{n+1} \geq 3n^3 = \\ = n^3 + 3n^2 + 3n + (n-3)n^2 + (n^2-3)n.$$

Но это выражение больше $(n+1)^3$ при $n \geq 3$. Случаи $n = 1, 2$ тривиальны.

Далее предположим, что $1 \leq n < m$. Тогда

$$n^{1/m} \leq n^{1/n} \leq 3^{1/3}.$$

[Ч. Уэкслер, А. М. М., 77, 768 (July 1970).]

366. Записав 2^{-m} в виде

$$\left(\frac{5}{10}\right)^m = 5^m \cdot 10^{-m},$$

мы и получим нужный результат, поскольку 5^m никогда не оканчивается на 0.

[Дж. Доддс, М. М., 41, 50 (January 1968).]

367. Поскольку в слове *Romney* 6 различных букв, длина периода десятичной дроби равна 6. Единственный однозначный знаменатель, при котором это возможно, равен 7. Следовательно, $O = 7$. Буква *N* заменяет какую-то цифру от 1 до 6. Единственной цифрой, при которой все условия будут выполнены, является 4. Таким образом, расшифрованный криптоарифм принимает вид

$$\frac{4}{7} = .571428\ 571428 \dots,$$

а

$$Romney = 571428.$$

[Б. Парк, М. М., 41, 50 (January 1968).]

368. Такого числа не существует. Действительно, пусть искомое число имеет вид $a \dots \overline{b}$; тогда

$$\overline{b \dots a} = 2(\overline{a \dots b}).$$

Далее, a может равняться 1, 2, 3 или 4, а соответствующие значения b могут быть равными (2, 3), (4, 5), (6, 7) или (8, 9). Сравнивая последние цифры исходного числа и его палиндрома, мы замечаем, что каждый из перечисленных выше случаев приводит к противоречию.

[М. Кламкин, М. М., 41, 50 (January 1968).]

369. Предположим, что p и $p+2$ — два простых числа-близнеца, такие, что

$$p^2 + (p+2)^2 = k^2,$$

где k — целое число. Тогда

$$2p^2 + 4p + 4 = k^2.$$

Но отсюда следует, что k^2 , а значит, и k четны. Пусть $k = 2n$, тогда наше соотношение переписывается в виде

$$2p^2 + 4p + 4 = 4n^2,$$

или

$$p^2 + 2p + 2 = 2n^2.$$

Левая часть данного равенства нечетна, поскольку нечетно p , правая же часть четна. Следовательно, это равенство противоречиво.

[Дж. Тайнер, М.М., 41, 50 (January 1968).]

370. Поскольку помощник, узнав четность исходного числа, сумел решить задачу, то перед тем, как задать свой вопрос, он должен был свести задачу к возможным криптоарифмам, допускающим либо n нечетных решений и одно четное, либо n четных и одно нечетное решение, где $n > 1$. Существуют три криптоарифма, удовлетворяющих этим условиям:

$$\frac{ab}{ab}, \text{ где } ab = 35, 46, 65 \text{ или } 85 \quad (1)$$

(3 нечетных и 1 четное решение);

$$\frac{ef}{ef}, \text{ где } ef = 45, 56, 81 \text{ или } 91 \quad (2)$$

(3 нечетных и 1 четное решение);

$$\frac{jk}{jk}, \text{ где } jk = 42, 48 \text{ или } 93 \quad (3)$$

(1 нечетное и 2 четных решения).

Если бы издатель прошептал «четное», то помощник все еще не мог бы решить задачу, так как он не сумел бы выбрать между криптоарифмами (1) и (2). Поэтому издатель должен был сказать «нечетное», из чего конкуренты сделали вывод, что решение имеет вид

$$\begin{array}{r} 9\ 3 \\ 9\ 3 \\ \hline 8\ 6\ 4\ 9 \end{array}$$

[З. Усискин, М.М., 41, 43 (January 1968).]

371. Таких четырехугольников существует бесконечно много. Обозначим заданные окружности через C_1, C_2, C_3 и C_4 . Построим на плоскости произвольный циклический четырехугольник со сторонами s_1, s_2, s_3 и s_4 . Затем проведем прямую t_i , параллельную s_i и касающуюся C_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда четырехугольник со сторонами t_i будет циклическим, поскольку сумма двух его противоположных углов равна 180° , а его стороны будут касаться четырех заданных окружностей.

[С. Рабинович, М. М., 41, 45 (January 1968).]

372. Обозначим центр круга через P , и пусть AC и BD — две взаимно перпендикулярные хорды, проходящие через точку O . Пусть, далее, $OP = a$ и θ — угол между BD и OP . Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\frac{AC}{2} = \sqrt{r^2 - a^2 \cos^2 \theta},$$

$$AO = \sqrt{r^2 - a^2 \cos^2 \theta} - a \sin \theta,$$

$$AO^2 = r^2 - a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta - 2a \sin \theta \sqrt{r^2 - a^2 \cos^2 \theta},$$

$$CO = \sqrt{r^2 - a^2 \cos^2 \theta} + a \sin \theta,$$

$$CO^2 = r^2 - a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta + 2a \sin \theta \sqrt{r^2 - a^2 \cos^2 \theta},$$

$$AO^2 + CO^2 = 2r^2 - 2a^2 \cos^2 \theta + 2a^2 \sin^2 \theta.$$

Аналогично

$$BO^2 + DO^2 = 2r^2 - 2a^2 \sin^2 \theta + 2a^2 \cos^2 \theta,$$

и потому

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 4r^2,$$

где r — радиус нашего круга.

Последняя сумма не зависит ни от A , ни от θ . Следовательно, если хорду, проходящую через точку O , повернуть на угол φ , то при этом «заметется» площадь, равная

$\frac{4r^2\varphi}{2} *$. Если $\varphi = \frac{\pi}{4}$, то соответствующая площадь равна $\frac{\pi r^2}{2}$.

Мы можем обобщить этот результат на случай $2n$ хорд, расположенных под равными углами. В этом случае $\varphi = \frac{\pi}{2n}$, а соответствующая площадь равна $\frac{\pi r^2}{n}$.

[М. Голдберг, М. М., 41, 46 (January 1968).]

373. После первого распила куб распадается на 2 части. Большая из них (состоящая из 17 однодюймовых кубиков) содержит один центральный кубик, для четырех граней которого требуется провести еще по одному распилу. После того как последний из них будет сделан, останутся еще не разделенными — независимо от любой перестановки кусков — по крайней мере два однодюймовых кубика, для которых потребуется провести еще один распил. Таким образом, минимальное число распилов равно 6.

[С. Ньюмэн, М. М., 41, 102 (February 1968).]

374. Функция $f(x)$ не меняется, если заменить a на $-a$, или b на $-b$, или x на $-x$. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что x , a и b неотрицательны и, кроме того, что $a \geq b$. Ясно, что наименьшее значение $f(x)$ надо искать там, где она отрицательна, то есть при $a - b < x < a + b$. При этих условиях существует треугольник со сторонами $2a$, $2b$ и $2x$. Обозначив через S его площадь, заметим, что $f(x) = -S^2$. Поскольку S максимальна тогда, когда угол между сторонами фиксированной длины $2a$ и $2b$ равен 90° , мы находим, что $x = a^2 + b^2$ и

$$S_{\max} = \frac{1}{2} (2a)(2b) = 2ab.$$

Таким образом,

$$f_{\min} = -4a^2b^2.$$

[Р. Егглтон, М. М., 41, 102 (February 1968).]

375. Легко проверить, что

$$P(x) = \sum_{k=1}^n T_k(x) = \left[\prod_{k=1}^n (x - k) \right]'$$

Поэтому

$$\int_s^t P(x) dx = \prod_{i=1}^n (x-i)|_s^t,$$

откуда и следует нужное равенство.

[Э. Джаст, М. М., 41, 102, (February 1968).]

376. Если мы попытаемся найти нужный нам треугольник среди тех, у которых целочисленные стороны взаимно просты, то нас постигнет неудача. Однако треугольники, удовлетворяющие условию задачи, все же существуют. Например, мы можем взять $182(3, 4, 5) = 546, 728, 910$. Еще одно решение имеет вид: $178(3, 4, 5) = 534, 712, 890$.

[М. Голдберг, М. М., 41, 96 (February 1968).]

377. Если $x < y - x$ и R подобен R'' , то

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y - 2x},$$

или

$$\frac{y}{x} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1}.$$

Если $y - x < x$, а R подобен R'' и бо́льшая сторона R параллельна бо́льшей стороне R'' , то

$$\frac{y}{x} = \frac{y - x}{2x - y},$$

или

$$\frac{y}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

В этом случае, однако, нарушается условие, что R' не подобен R .

Если $y - x < x$ и R подобен R'' , а бо́льшая сторона R параллельна меньшей стороне R'' , то

$$\frac{y}{x} = \frac{2x - y}{y - x},$$

или

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1}.$$

[Дж. Тайнер, М. М., 41, 98 (February 1968).]

378. Поскольку площади пропорциональны квадратам соответствующих диаметров, достаточно найти 3 различ-

ных целых числа, сумма которых равнялась бы 26 и сумма квадратов которых равнялась бы $676 \cdot 2 = 338$.

Пусть x, y, z — диаметры лепешек. Тогда

$$\begin{aligned}x + y + z &= 26, \\x^2 + y^2 + z^2 &= 338\end{aligned}$$

и, значит,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(x + y + z)^2}{2}.$$

Это приводит к диофантову уравнению:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0,$$

или

$$(x - y - z)^2 = 4yz.$$

Следовательно, yz является полным квадратом, откуда $y = k^2m$, $z = l^2m$ для некоторых целых k, l, m и

$$\begin{aligned}x - y - z &= \pm 2klm, \\x &= m(k \pm l)^2,\end{aligned}$$

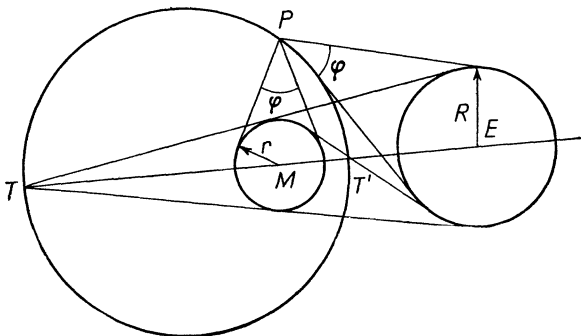
а значит,

$$\begin{aligned}2 \cdot 13 &= 26 = m[(k \pm l)^2 + k^2 + l^2], \\2 \cdot 13^2 &= 338 = m^2[(k \pm l)^4 + k^4 + l^4].\end{aligned}$$

Отсюда $m = 1$ или 13. Прямой проверкой убеждаемся, что второе невозможно. Остается найти три различных квадрата, в сумме дающих 26. Единственные числа, удовлетворяющие этому условию, суть 1, 9, 16.

[А. Брусс, М. М., 41, 100 (February 1968).]

379. Пусть радиус Земли E равен R , а радиус Луны M равен r (см. рисунок). Поскольку из любой точ-



ки орбиты Земля и Луна должны быть видны под одинаковым углом φ , мы можем указать две такие точки, а именно T и T' — точки пересечения соответственно внешних и внутренних касательных к E и M . Из уравнения

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{PE^2 - R^2}{R^2} = \frac{PM^2 - r^2}{r^2}$$

мы заключаем, что все искомые точки образуют окружность с центром на прямой $TMT'E^*$.

[Ч. Мейли, *М. М.*, 41, 166 (March 1968).]

380. I. Из рисунка видно, что у многочлена $ax^2 + bx + c$ есть два действительных корня, поэтому $b^2 - 4ac > 0$. Из $2ax + b = 0$ следует, что $x = -\frac{b}{2a}$.

Но из рисунка видно и то, что

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < -\frac{b}{2a},$$

а это невозможно.

[С. Спиндлер, *М. М.*, 41, 159 (March 1968).]

II. Очевидно, что координата точки пересечения данной прямой с осью x равна $-b/2a$, что совпадает с абсциссой вершины данной параболы. Но из рисунка видно, что эти две точки не совпадают. В этом и состоит противоречие.

[Д. Мьюенч, *М. М.*, 41, 159 (March 1968).]

381. I. Если мы можем пользоваться только ненулевыми цифрами, то существует не менее четырех решений данного криптоарифма, например:

7 4 6 6 5	6 1 7 7 9
1 7 9 3	2 6 8 4
2 6 8 7	3 7 5 6
<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>
7 9 1 4 5	6 8 2 1 9
4 1 3 3 7	2 1 5 5 7
2 4 9 6	4 2 9 8
5 3 8 4	3 5 6 2
<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>
4 9 2 1 7	2 9 4 1 7

Если же можно пользоваться и цифрой 0, то существует еще не менее 16 других решений, так что говорить о «единственности» данного рождественского поздравления не приходится.

[Л. Новак, М. М., 41, 160 (March 1968).]

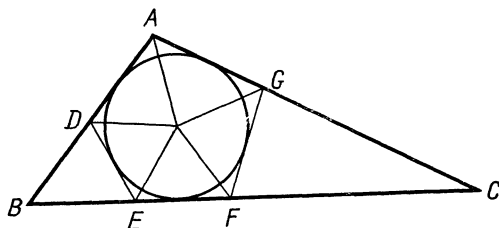
II. Если мы будем действовать в девятеричной системе, то, как подсчитала вычислительная машина UNIVAC—1107 за 256 секунд, существует 5 следующих решений, «единственность» которых состоит лишь в том, что в каждом из них $E = 0$:

4 0 2 2 3	3 0 7 7 4	2 0 3 3 5
1 4 8 5	1 3 8 6	1 2 6 7
6 2 7 4	5 7 2 3	4 3 8 2
<hr/>	<hr/>	<hr/>
4 8 1 0 3	3 8 1 0 4	2 6 1 0 5
1 0 4 4 5	2 0 4 4 6	
2 1 6 8	3 2 5 7	
3 4 7 1	1 4 8 2	
<hr/>	<hr/>	
1 6 2 0 5	2 5 3 0 6	

Разумеется, существуют также многочисленные решения в десятичной системе и в системах с основанием, большим 10; их число быстро растет с увеличением основания системы, и, следовательно, поле нашей деятельности расширяется.

[К. Хэммер, М. М., 41, 160 (March 1968).]

382. В журнале А. М. М. [67, 923 (1960)] приведен следующий метод разбиения треугольника ABC , у которого



угол A — тупой. Проведем отрезки DE и FG (D на AB , G на AC , E и F на BC), касающиеся вписанной окружности с центром в O , так, чтобы DE был перпендикуля-

рен OB , а FG — перпендикулярен OC . Тогда мы получим два остроугольных равнобедренных треугольника BDE и FGC . Все углы пятиугольника $ADEFG$ тупые. Проведем отрезки OA , OD , OE , OF , OG , которые разделят эти углы пополам и разобьют пятиугольник на 5 треугольников. Центральные углы в точке O все острые, поскольку каждый из других углов полученных пяти треугольников больше 45° . Следовательно, все пять треугольников остроугольны.

[М. Голдберг, М. М., 41, 165 (March 1968).]

383. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — последовательные стороны нашего многоугольника и пусть x — отрезок a_1 , расположенный между первой вершиной и точкой касания. Выразим через x каждый последующий отрезок, расположенный между вершиной и точкой касания. Последний отрезок стороны a_n равен первому отрезку стороны a_1 . Поэтому

$$x = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots + a_1 - x,$$

или

$$x = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \dots + a_1).$$

Следовательно, длина x рациональна. Поскольку те же рассуждения проходят и для любого другого отрезка, мы получаем требуемое утверждение.

[Н. Харрелл, М. М., 41, 224 (April 1968).]

384. $N = 3^n n! = 3^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)$. В произведении $(3n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots$ сомножители, кратные трем, разделены парами соседних целых чисел, из которых одно четное. Поэтому число $(3n)!$, кроме N , содержит еще n четных сомножителей. Следовательно, число

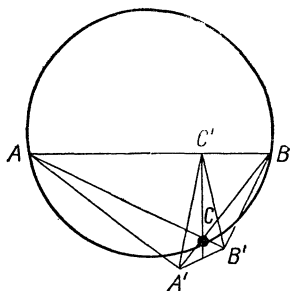
$$\frac{(3n)!}{2^n N} = \frac{(3n)!}{6^n n!}$$

будет целым.

[Ч. Тригг, М. М., 41, 224 (April 1968).]

385. Возьмем тупоугольный треугольник ABC , у которого углы подчинены условию $C > B > A$. Обозначим через A' , B' , C' проекции точек A , B , C соответственно на BC , AC и AB . В треугольнике $A'B'C'$ для углов выполняются соотношения $B' > A' > C'$, которые можно установить, рассматривая касательные, проведенные в

точках A, B, C к окружности, описанной около треугольника ABC , которые параллельны сторонам треугольника $A'B'C'$. Таким образом, мы требуем, чтобы выполнялись равенства $A = C', B = A', C = B'$.



Рассматривая циклические¹ четырехугольники $AA'CC'$ и $C'SB'B$ и замечая, что высоты треугольника ABC делят внутренние углы высотного треугольника пополам, мы находим, что $B = A' = 2A$, $C = B' = 2B$ и $C = 2B = 4A$. Отсюда следует, что $A = \frac{\pi}{7}$, $B = \frac{2\pi}{7}$ и $C = \frac{4\pi}{7}$.

Если исходный тупоугольный треугольник является еще и равнобедренным, то задача не имеет решения, поскольку при $C > B = A$ мы получаем противоречивую цепочку равенств

$$A = B = A' = B' = 2A = 2B.$$

Следовательно, полученное выше решение единственно.

Легко показать, что среди остроугольных треугольников единственным треугольником, подобным своему высотному, будет равносторонний треугольник.

[Л. Бэнкоф, М. М., 41, 219 (April 1968).]

386. Рассмотрим тетраэдр, у которого все плоские углы при одной из вершин прямые, а ребра, выходящие из этой вершины, равны соответственно a, b и c . Остальные три ребра тетраэдра равны соответственно $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{b^2 + c^2}$ и $\sqrt{c^2 + a^2}$. Поскольку сумма квадратов площадей тех граней, которые прилегают к данной вер-

¹ См. примечание на стр. 76. — *Прим. перев.*

шине, равна квадрату площади четвертой грани*, мы получаем, что квадрат площади четвертой грани равен

$$\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{4}.$$

Если мы рассмотрим аналогичный тетраэдр, у которого ребра, образующие прямые углы, равны соответственно p , q и r , то квадрат площади его четвертой грани окажется равным

$$\frac{p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2}{4}.$$

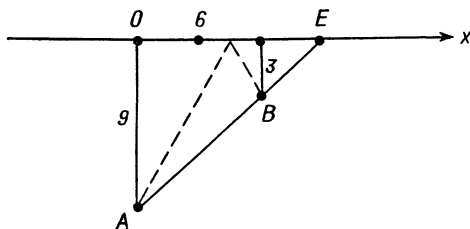
Поскольку же нам дано, что

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2,$$

то площади двух исходных треугольников равны между собой независимо от соотношения между a , p , b и q .

[М. Голдберг, М.М., 41, 221 (April 1968).]

387. Выберем береговую линию в качестве оси x и возьмем точку O за начало координат. Направление оси x и положение точки B возьмем такими, чтобы прямая AB пересекла ось в точке E с координатой $x = 9$, располо-



женной справа от O . Обозначим через f сумму в долларах, которую пассажир платит за каждую милю.

Если $f = 2$, то владелец лодки не получает прибыли при условии, что он забирает пассажира в точке $x = -3$, и разоряется, если эта точка находится справа от $x = -3$ (причем максимальные потери будут в точке E). Слева от точки $x = -3$ он получает прибыль, которая монотонно возрастает и стремится к 6 долларам при $x \rightarrow -\infty$.

Если $2 < f < 4$, то точка, в которой владелец не получает прибыли, приближается к E при $f \rightarrow 4$; если $f = 4$, то эта точка совпадает с E , а во всех остальных точках владелец получает прибыль.

При всех $f > 2$ прибыль возрастает неограниченно при $x \rightarrow -\infty$.

Существует значение $f \approx 1,82$, такое, что при любом меньшем f владелец лодки вовсе не может получить прибыли. Если $f = 1,82$, то место встречи должно быть расположено в точке $x = -12,5$, и в этом случае владелец не получает прибыли; во всех остальных точках он разоряется.

При $1,82 < f < 2$ существует не менее двух «бесприбыльных» точек (нулей функции прибыли) с «доходными» точками, расположенными между некоторой парой «бесприбыльных» *.

[К. Огилви, М. М., 41, 222 (April 1968).]

388. Если центры салфеток, радиусы которых равны 2, 3 и 10 дюймам, находятся соответственно в точках C , A и B , то эти точки образуют вершины прямоугольного треугольника со сторонами 5, 12 и 13 дюймов. Дополним фигуру ABC до прямоугольника, обозначив его четвертую вершину через O . Из точки O проведем прямые через точки B , C и A , пересекающие данные окружности соответственно в точках P , Q и R . Тогда $OP = OQ = OR = 15$ дюймам. Это и есть искомый радиус. Более общее решение можно найти в журнале *Scripta Mathematica* [21, 46—47 (1955)].

[У. Хоурд, М. М., 41, 295 (May 1968).]

389. Допустим, что ученица не разделяла антипатии своего учителя к отрицательным радиусам. Тогда она могла бы свести три квадратных уравнения

$$(h - h_1)^2 + (k - k_1)^2 = (r + r_1)^2,$$

$$(h - h_2)^2 + (k - k_2)^2 = (r + r_2)^2,$$

$$(h - h_3)^2 + (k - k_3)^2 = (r + r_3)^2$$

(здесь (h, k) , (h_1, k_1) , (h_2, k_2) , (h_3, k_3) — координаты центров окружностей, а r , r_1 , r_2 , r_3 — их радиусы) к трем линейным уравнениям вида

$$\begin{aligned} 2(h_1 - h_2)h + 2(k_1 - k_2)k + 2(r_1 - r_2)r = \\ = (h_1^2 - h_2^2) + (k_1^2 - k_2^2) - (r_1^2 - r_2^2). \end{aligned}$$

.

Далее следовало бы подставить все возможные комбинации знаков для r_1 , r_2 и r_3 в выражение

$$\begin{pmatrix} h \\ k \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1 - h_2 & k_1 - k_2 & r_1 - r_2 \\ h_2 - h_3 & k_2 - k_3 & r_2 - r_3 \\ h_3 - h_1 & k_3 - k_1 & r_3 - r_1 \end{pmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{bmatrix} (h_1^2 - h_2^2) + (k_1^2 - k_2^2) - (r_1^2 - r_2^2) \\ (h_2^2 - h_3^2) + (k_2^2 - k_3^2) - (r_2^2 - r_3^2) \\ (h_3^2 - h_1^2) + (k_3^2 - k_1^2) - (r_3^2 - r_1^2) \end{bmatrix},$$

чтобы получить координаты центров и радиусы восьми возможных кругов.

[Ч. Мейли, М. М., 41, 295 (May 1968).]

390. Если основание системы счисления равно b , то данное число запишется в виде

$$\sum_{i=0}^n a_i b^{n-i}.$$

Обозначим цифру, которая будет стоять на месте a_i после перестановки, через a_{i_p} . Тогда разность между нашими двумя числами можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i b^{n-i} - \sum_{i=0}^n a_{i_p} b^{n-i} &= \sum_{i=0}^n (a_i - a_{i_p}) b^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^n (a_i - a_{i_p}) (b^{n-i} - 1) + \sum_{i=0}^n (a_i - a_{i_p}). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно нулю, и можно доказать по индукции, что $(b^{n-i} - 1)$ делится на $b - 1$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$.

[М. Гаррики Дж. Лочхед, М. М., 41, 295 (May 1968).]

391. Это хорошо известная задача, решение которой легко можно получить, если воспользоваться линиями уровня. Ради большей общности мы вместо окружности возьмем произвольную выпуклую замкнутую кривую, кривизна которой меняется непрерывно.

Рассмотрим семейство кривых, определяемых условием

$$AP + PB = k \text{ (константа).}$$

Этими кривыми будут эллипсы с фокусами в точках A и B . Очевидно, что величина k принимает минимальное значение для наименьшего эллипса из этого семейства, касающегося нашей кривой. Точка (или точки) касания и будет искомой точкой P . Поскольку фокальные радиусы, проведенные в точку касания, образуют с касательной к эллипсу равные углы, выполняется закон отражения. Аналогично величина $AP + PB$ достигает максимума на наибольшем эллипсе из данного семейства, касающемся нашей кривой.

Обратную теорему также не трудно доказать. Если отрезки AP и PB образуют равные углы с заданной кривой, то эллипс, проходящий через точку P , фокусы которого расположены в точках A и B , обязан касаться этой кривой в точке P . Такой эллипс будет локально расположен либо с внутренней стороны данной кривой, либо с ее внешней стороны. В первом случае величина $AP + BP$ будет достигать своего локального минимума, а во втором — локального максимума *.

[М. К л а м к и н, М. М., 41, 285 (May 1968).]

392. I. Проведем через точку O прямую EF , которая не проходит ни через какую из вершин данного четырехугольника. Возьмем на стороне, содержащей E , две точки, равноотстоящие от E , и проведем через них и точку O еще две прямые. Эти две прямые пересекут сторону, на которой расположена точка F , в двух точках, равноотстоящих от F , так как каждая из этих прямых делит периметр пополам. Поскольку три точки на одной из сторон получаются из трех точек, лежащих на другой стороне, с помощью центрального проектирования, данные две стороны параллельны между собой. Это же верно и для другой пары сторон. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

[М. Г о л д б е р г, М. М., 41, 287 (May 1968).]

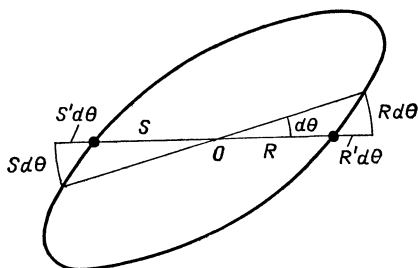
II. Мы рассмотрим более общую задачу, в которой вместо четырехугольника берется замкнутая кривая, звездная относительно фиксированной точки O , и для

этой кривой выполняется то же свойство, относящееся к периметру, что и для $ABCD$.

В силу этого свойства для бесконечно малого приращения угла θ (см. рисунок) выполняется равенство

$$\sqrt{R^2(\theta) + R'(\theta)^2} d\theta = \sqrt{S^2(\theta) + (S'(\theta))^2} d\theta.$$

Следовательно, $R(\theta) \equiv S(\theta)^*$ и наша кривая центрально симметрична относительно точки O . Если мы рассмотрим



четырехугольник $ABCD$, то из сказанного выше следует, что он является параллелограммом.

[М. К л а м к и н, М. М., 41, 287 (May 1968).]

393. I. Пусть $(A > B > C)$, $(D > E > F)$, $(X > Y > Z)$ — количество конвертов, полученных девятью наследниками, причем в скобки объединены величины, соответствующие одной семье.

Условия задачи можно символически представить следующим образом:

$$0 < (A \neq B \neq C \neq D \neq E \neq F \neq X \neq Y \neq Z) < 1000 \quad (1)$$

$$A^2 + C^2 = 2B^2; \quad D^2 + F^2 = 2E^2; \quad X^2 + Z^2 = 2Y^2, \quad (2)$$

$$A + B + C = D + E + F = X + Y + Z. \quad (3)$$

Число конвертов (миссис Дж. + миссис См.) = числу конвертов (миссис У. + мистер Дж.). (4)

Отметим, что условие, состоящее в том, что все три семьи получили разные суммы, излишне, ибо

$$A^2 + B^2 + C^2 = 3B^2;$$

$$D^2 + E^2 + F^2 = 3E^2;$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 3Y^2,$$

а, согласно (1), $3B^2 \neq 3E^2 \neq 3Y^2$.

Наш способ состоит в том, что мы сначала находим все решения, удовлетворяющие (1), (2) и (3), а затем выбрасываем те из них, которые не согласуются с (4). Детально уравнение $a^2 + c^2 = 2b^2$ ($a > b > c$) обсуждается в книге Диксона «История теории чисел»¹. Мы же здесь приводим простой вывод параметрического решения.

Для того чтобы найти целые числа, удовлетворяющие условию (2), мы рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = b^2,$$

которое можно истолковать как соотношение между целыми сторонами прямоугольного треугольника, и возьмем два семейства таких треугольников (примитивные пифагоровы триплеты), стороны которых выражаются взаимно простыми целыми числами, а именно

$$\frac{a+c}{2} = u^2 - v^2; \quad \frac{a-c}{2} = 2uv; \quad b = u^2 + v^2$$

$$\text{и} \quad \frac{a+c}{2} = 2uv; \quad \frac{a-c}{2} = u^2 - v^2; \quad b = u^2 + v^2,$$

где $u > v$ — взаимно простые положительные числа разной четности. Заметим, что из соотношения $a^2 + c^2 = 2b^2$ следует, что числа a и c обязаны обладать одинаковой четностью, а числа $\frac{a+c}{2}$ и $\frac{a-c}{2}$ — не обязаны.

Решая эти две системы, мы находим выражение целых чисел a , b и c , удовлетворяющих соотношению $a^2 + c^2 = 2b^2$, через u и v :

$$\begin{cases} a = 2uv + u^2 - v^2 \\ b = u^2 + v^2 \\ c = \pm (u^2 - v^2 - 2uv). \end{cases}$$

В этом общем решении мы должны выбирать такой знак, чтобы число c оказалось положительным. Заметим также, что для величины $a + b + c$ мы получаем в зависимости

¹ Dickson, History of the Theory of Numbers, N. G., 11, 1952, 435.

от знака c два различных параметрических представления, а именно

$$a + b + c = 4uv + u^2 + v^2$$

$$\text{и } a + b + c = 3u^2 - v^2.$$

Далее, пусть

$$(A, B, C) = j \cdot (a, b, c); \quad (D, E, F) = k \cdot (d, e, f)$$

$$\text{и } (X, Y, Z) = h \cdot (x, y, z),$$

где j, k и h — целые числа и малыми буквами в скобках обозначены различные примитивные решения, полученные подстановкой различных пар, скажем, (r, s) , (m, n) и (p, q) соответственно вместо u и v .

Придавая минимальные значения парам (r, s) и (m, n) , а именно: $r = 2, s = 1, m = 3, n = 2$, мы получим два минимальных решения: $a = 7, b = 5, c = 1$ и $d = 17, e = 13, f = 7$. Попутно заметим, что любые другие пары допустимых параметров приводят к бóльшим значениям для a, b, c и d, e, f .

Мы можем теперь записать

$$A + B + C = j \cdot (a + b + c) = 13j,$$

$$D + E + F = k \cdot (d + e + f) = 37k,$$

$$X + Y + Z = h \cdot (x + y + z) = 13j = 37k.$$

Таким образом, величина $X + Y + Z$ делится на 13 и 37, а значит, и на 481. Если частное от деления этой величины на 481 обозначить через ω , то мы получим

$$X + Y + Z = 481\omega = h \cdot (4pq + p^2 + q^2) \text{ или } h \cdot (3p^2 - q^2),$$

причем значение величины в правой части выбирается в зависимости от знака z как функции p и q .

Решения уравнения

$$481\omega = h \cdot (4pq + p^2 + q^2)$$

при данных ограничениях находятся подстановкой $h = \omega$; при этом получается $p = 20, q = 1$ и $p = 15, q = 4$. Никакое из этих решений нам не подходит, потому что выражение $4pq + p^2 + q^2$ соответствует отрицательному значению z , что находится в противоречии с (1).

Единственное целое решение уравнения

$$481w = h(3p^2 - q^2),$$

удовлетворяющее заданным ограничениям, получится, если мы положим $w = q = 3$ и $h = 1$ и возьмем значения параметров $m = 22$ и $n = 3$, порождающие тройку X, Y, Z , связанную с другими двумя тройками. Таким образом,

$$X + Y + Z = x + y + z = 1443 = 13j = 37k,$$

откуда мы находим $j = 111$ и $k = 39$. Теперь мы уже получаем полное решение нашей задачи:

$$A = 777, \quad D = 663, \quad X = 607,$$

$$B = 555, \quad E = 507, \quad Y = 493,$$

$$C = 111, \quad F = 273, \quad L = 343.$$

Условие (4) будет выполнено, если мы «отдадим» A, B, C Уайтам, D, E, F — Смитам и X, Y, Z — Джонсам.

Для того чтобы доказать единственность данного решения, потребуется утомительно перебирать остальные возможности, удовлетворяющие заданным ограничениям, причем в каждом случае требуется убедиться, что нарушено условие (4).

Чтобы удовлетворить самых взыскательных любителей головоломок, мы приводим ниже все такие «неудачные» решения вместе со значениями параметров, порождающих примитивные триады.

847	924	693	231	462	987	497	994	533	769
605	660	495	165	330	705	353	706	377	565
121	132	99	33	66	141	47	94	13	217
803	876	657	219	438	897	483	966	527	759
583	636	477	159	318	663	345	690	373	561
187	204	153	51	102	273	69	138	23	231
637	764	573	191	382	713	357	714	497	617
533	596	447	149	298	617	303	606	355	533
403	356	267	89	178	503	237	474	71	401
(2,1)	(2,1)	(2,1)	(17,8)	(5,2)	(23,6)				
(7,2)	(7,2)	(4,1)	(2,1)	(18,7)	(4,1)				
(5,4)	(17,10)	(19,16)	(10,1)	(2,1)	(22,7)				

[Л. Бэнкоф, М. М., 41, 291 (May 1968).]

II. Пусть W , H и C — число конвертов, а W^2 , H^2 и C^2 — число долларов, полученных соответственно женой, мужем и ребенком одной из семей. Тогда

$$W^2 - H^2 = H^2 - C^2, \text{ или } W^2 + C^2 = 2H^2.$$

Положим $W = x + y$, а $C = x - y$, в то время как $x^2 + y^2 = H^2$. Прimitивные решения последнего уравнения задаются следующим образом:

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad H = m^2 + n^2,$$

где m и n — числа разной четности, $m > n$ и $(m, n) = 1$. Отсюда следует, что

$$W = m^2 + 2mn + n^2,$$

$$C = m^2 - 2mn - n^2,$$

и число конвертов, полученных каждой семьей, равно

$$N = W + C + H = 3m^2 - n^2.$$

Поскольку ни один из наследников не стал миллионером, ни одна из величин C , H , W не может превзойти 999, так что $N \leq 2997$.

Из таблицы пифагоровых треугольников¹ мы немедленно находим значения W , C и H . Например, триплет $(x, y, H) = (3, 4, 5)$ дает $(W, C, H) = (7, 1, 5)$. Таким образом мы можем выписать 128 примитивных решений, для которых $N \leq 2997$, а C , H , W не превосходят 999. Поскольку в этом множестве значения N не повторяются, если решение существует, то по крайней мере два значения N получаются из примитивных решений. Последний этап нашей работы состоит в проверке различных групп из трех решений, удовлетворяют ли они условию, что сумма, полученная совместно миссис Джонс и миссис Смит, равна сумме, полученной совместно миссис Уайт и мистером Джонсом. При этом мы находим следующее решение данной задачи:

	Джонс	Смит	Уайт		Джонс	Смит	Уайт
W	607	663	777	W^2	368 449	439 569	603 729
H	493	507	555	H^2	243 049	257 049	308 025
C	343	273	111	C^2	117 649	74 529	12 321
	<u>1443</u>	<u>1443</u>	<u>1443</u>		<u>729 147</u>	<u>771 147</u>	<u>924 075</u>

[Ф. Микса, М. М., 41, 293 (May 1968).]

¹ То есть прямоугольных треугольников с целыми сторонами. — Прим. перев.

ВМЕСТО ПОСЛЕСЛОВИЯ

Пояснительные выражения объясняют темные мысли.

К. Прутков, «Плоды раздумья».

Эти разнородные заметки не являются ни комментарием в строгом смысле этого слова, ни послесловием. Скорее всего это размышления, которые были навеяны задачами из сборника Ч. Тригга и их решениями. Как и всякие размышления (даже если это размышления титульного редактора), они, конечно же, достаточно субъективны.

Большая часть задач и их решения бесспорно интересны, но иногда мне казалось, что какой-то поворот мысли понятен лишь специалисту, иногда — что решение неполно; иногда решение опиралось на утверждения, которые, будучи элементарными, не слишком известны, на мой взгляд, широкому читателю; в некоторых случаях, предъявляя решение, автор не утруждал себя доказательством его единственности, и тогда, как всякому математику, мне хотелось проверить это, причем анализ задачи оказывался порою довольно кропотливым. Все это ниже нашло свое отражение.

Наконец, несколько решений вызвало у меня чувство досады своей некорректностью. В этих случаях я старался заполнить недостающие места или найти новые доказательства. Однако все же осталось с полдюжины задач, решения которых мне либо вообще не удалось исправить, либо я не смог сделать их элементарными или по крайней мере дать к ним подходящую ссылку. Причины, по которым эти задачи все же не были исключены из книги, я уже оговорил в предисловии и не стану их повторять.

О субъективности «размышлений редактора» выше уже было сказано. Тем не менее, полагая (это весьма распространенное заблуждение), что те же самые места, которые дали повод для этих размышлений, поставят в тупик и большинство читателей или обратят на себя их особое внимание, я написал этот комментарий.

Составляя комментарий, я исходил из того, что читатель знаком с элементарной математикой в объеме программы средней школы и в немногих случаях — с началами высшей математики (производная, интеграл, определители). Номера задач, условие или решение которых не является вполне элементарным, выделены курсивом. Поскольку, с одной стороны, в последнее время программы по математике претерпели значительные изменения, а с другой — читатель мог кое-что и позабыть, целесообразно вначале напомнить некоторые математические факты, неоднократно используемые в книге и не всегда присутствующие в школьном преподавании.

1. Системы счисления и признаки делимости

Задав натуральное число b (основание системы счисления), мы можем каждое натуральное число N представить единственным образом в виде

$$N = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0, \quad (1)$$

где каждое a_i равно одному из чисел $0, 1, \dots, b-1$. Такое число записывается в виде

$$\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}.$$

В десятичной системе счисления общеизвестен признак делимости на 9 и менее известен признак делимости на 11. В системе счисления с основанием b также имеются эти два признака.

а. Для того чтобы число N делилось на $b-1$, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его b -ичной записи делилась на $b-1$.

В самом деле, используя (1), находим

$$N - (a_0 + \dots + a_k) = a_k(b^k - 1) + \dots + a_2(b^2 - 1) + a_1(b - 1).$$

Поскольку

$$b^l - 1 = (b - 1)(b^{l-1} + \dots + b + 1),$$

разность $N - (a_0 + \dots + a_k)$ делится на $b-1$, а тогда оба числа N и $a_0 + \dots + a_k$ делятся на $b-1$ или нет одновременно.

б. Для того чтобы число N делилось на $b+1$, необходимо и достаточно, чтобы разность между суммами цифр, стоящих в его b -ичной записи на четных и нечетных местах, делилась на $b+1$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} N - (a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^k a_k) &= \\ &= a_1(b+1) + a_2(b^2-1) + \dots + a_k(b^k - (-1)^k). \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$b^{2n+1} + 1 = (b+1)(b^{2n} - b^{2n-1} + \dots - b + 1),$$

$$b^{2n} - 1 = (b+1)(b-1)(b^{2n-2} + b^{2n-4} + \dots + b^2 + 1)$$

и остальное делается, как в случае а.

2. Арифметика остатков

В оригинале книги Тригга и особенно в дополнительных задачах часто используются сравнения $\text{mod } b$. При работе над переводом я старался заменить соответствующие места непосредственными рассуждениями с остатками от деления на b . Основное, что здесь надо знать, сводится к следующему. Если N и N' имеют при делении на b остатки r и r' , то есть

$$N = kb + r, \quad N' = k'b + r',$$

то числа $N + N'$, $N - N'$, NN' и N^m имеют при делении на b те же остатки, что

$$r + r', \quad r - r', \quad rr', \quad r^m$$

соответственно.

3. Бином Ньютона и комбинаторика

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n =$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

То же самое число C_n^k есть число способов, которыми из множества, содержащего n различных элементов, можно выбрать подмножество из k элементов (отсюда название: число сочетаний из n по k).

Популярные формулы:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{n+1}{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

(см. задачу 179); $C_n^k = C_n^{n-k}$;

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = (1+1)^n = 2^n$$

и т. д.

4. Формулы Виета

Если x_1, \dots, x_n — корни уравнения n -й степени

$$x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \dots + p_1x + p_0 = 0$$

или

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0,$$

то

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -p_{n-1} = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = +p_{n-2} = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\dots \dots \dots x_2 x_3 \dots x_n + x_1 x_3 \dots x_n + \dots + x_1 x_2 \dots x_{n-1} =$$

$$= (-1)^{n-1} p_1 = (-1)^{n-1} \frac{a_1}{a_n},$$

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n p_0 = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

5. Принцип Дирихле

«Если в четыре клетки посадить пять зайцев, то по крайней мере в одной клетке будут сидеть не менее двух зайцев».

Или: невозможно установить взаимно однозначное соответствие между элементами двух конечных множеств, если эти множества содержат разное число элементов.

Задачи на принцип Дирихле очень популярны. В качестве примера его использования я приведу доказательство так называемой «малой теоремы Ферма», тем более, что у Тригга есть на нее ссылка.

Если p — простое число, то при любом целом a разность $a^p - a$ делится на p .

Утверждение очевидно, если a делится на p . Если же это не так, то каждое из $p-1$ чисел $a, 2a, \dots, (p-1)a$ («зайцев») дает при делении на p ненулевой остаток:

$$\begin{aligned} a &= k_1 p + r_1, \\ 2a &= k_2 p + r_2, \\ &\dots \dots \dots \\ (p-1)a &= k_{p-1} p + r_{p-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Если число различных встречающихся здесь остатков («клеток») меньше $p-1$, то среди них найдутся по крайней мере два одинаковых («в клетке по крайней мере два зайца»). Но это невозможно, так как при $r_n = r_m$ число $(n-m)a = (k_n - k_m)p$ делится на p , что противоречиво, ибо $|n-m| < p$ и a взаимно просто с p . Значит, все остатки r_1, \dots, r_{p-1} между собой различны и образуют перестановку чисел $1, 2, \dots, p-1$. Перемножая все равенства (2), получаем

$$(p-1)! a^{p-1} = N \cdot p + r_1 r_2 \dots r_{p-1} = Np + (p-1)!$$

Следовательно, $(p-1)!(a^{p-1} - 1)$ делится на p , а тогда $a^{p-1} - 1$ и $a^p - a$ делятся на p .

* * *

В оставшейся части выделенные цифры означают номера тех задач или их решений, которые комментируются.

2. Рассуждение можно завершить еще и так: ...значит,

$$\frac{S_{CHB}}{a^2} = \frac{S_{AHC}}{b^2} = \frac{S_{ABC}}{c^2},$$

поскольку площади подобных фигур относятся как квадраты соответствующих линейных элементов. Но $S_{ABC} = S_{CHB} + S_{AHC}$ и, следовательно, $c^2 = a^2 + b^2$ (Д. Поля, Математика и правдоподобные рассуждения, М., ИЛ, 1957, стр. 35—36).

3. Это рассуждение некорректно. В самом деле, число различных решений системы уравнений *может* быть больше, чем произведение степеней уравнений системы (например, одно из уравнений системы может быть следствием остальных, и тогда, вообще говоря, одному из неизвестных можно придавать произвольные значения).

Поэтому из того, что мы нашли $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ различных решения, вовсе не вытекает, что мы нашли их все. Вот другое решение: из нашей системы следует, что

$$\begin{aligned} & xy + xz + xw + yz + yw + zw = \\ &= \frac{1}{2} [(x + y + z + w)^2 - (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)] = 35, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & xyz + xyw + xzw + yzw = \\ &= \frac{1}{6} [(x + y + z + w)^3 + 2(x^3 + y^3 + z^3 + w^3) - \\ & - 3(x + y + z + w)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)] = 50. \end{aligned}$$

Учитывая еще первое и четвертое уравнения системы и формулы Виета, мы убеждаемся, что x, y, z, w , удовлетворяющие системе, — корни уравнения 4-й степени

$$\lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24 = 0.$$

Каждое решение системы *обязано* быть перестановкой четырех корней этого уравнения, а зная одно решение, мы находим эти корни 1, 2, 3, 4.

7. Итак, доказано правило (впрочем, довольно популярное) устного счета: чтобы возвести в квадрат двузначное число, оканчивающееся на 5, нужно число его десятков умножить на это же число, увеличенное на единицу, и к результату приписать справа 25.

15. Оправданием этого рассуждения является «принцип Кавальери». По своему стилю оно, как и приведенное ниже вычисление площади поверхности, относится к интегральному исчислению.

18. Обозначим противоположные вершины куба через A и D , вершины, соединенные ребрами с вершиной A , — через B_1, B_2, B_3 , а остальные — C_1, C_2, C_3 . Вычисляя сопротивление, автор рассуждает так, как если бы в описанной им конструкции три вершины B_i были соединены накоротко и то же самое было сделано с вершинами C_i . Почему так можно делать? Добавим к исходному проводочному кубу шесть проводников $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C_1$, сопротивлением которых можно пренебречь, и подключим к A и D какой-нибудь источник тока. В силу симметрии потенциалы в точках B_i окажутся равными между собой, то же будет справедливо для точек C_i . Следовательно, токи в добавленных нами проводниках будут равны нулю, а потому если мы их выкинем, то суммарный ток в цепи не изменится. Отсюда и вытекает, что сопротивление «закороченной» конструкции равно сопротивлению данного в условии задачи проводочного куба.

20. Математик не может примириться с такой нелогичностью. Вполне возможно, что очарованный красотой девушки продавец не думал о доходах своего магазина и запрошенная им цена — 2 доллара — не больше y . Поэтому мы остаемся с уравнением

$$\frac{100y}{x} - \frac{200}{x+10} = \frac{80}{12}$$

или

$$x^2 + (40 - 15y)x - 150y = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$x = \frac{15y - 40 + \sqrt{(15y - 40)^2 + 600y}}{2} = \\ = \frac{15y - 40 + \sqrt{225y^2 - 600y + 1600}}{2}$$

(знак «—» перед радикалом приводит к отрицательному значению x). Для того чтобы x было целым, нужно, чтобы радикал был целым числом, а подкоренное выражение — полным квадратом. Выделив множитель 25, мы приходим к равенству

$$9y^2 - 24y + 64 = (3y - 4)^2 + 48 = n^2,$$

откуда

$$(n - 3y + 4)(n + 3y - 4) = 48.$$

Раскладывая 48 на два множителя всевозможными способами и учитывая, что y должно быть натуральным числом, находим два решения: $y = 1$ и $y = 5$. Первое совпадает с авторским, а второе дает $x = 50$. Первоначально девушка купила 50 роз за 5 долларов (1 доллар 20 центов за дюжину), а предложенная продавцом цена — 60 роз за 2 доллара (40 центов за дюжину), что согласуется с условиями задачи.

41. Неравенство

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

($x_i \geq 0$) хорошо известно, но здесь используется менее популярный факт: среднее арифметическое равно среднему геометрическому, если *только* все x_i равны между собой. Докажем это, считая, как в тексте, что оба средних равны 1 (этого всегда можно добиться, разделив все x_i на одно и то же число).

Если не все x_i равны между собой, то среди них есть и такой, который меньше 1, пусть, например, это будет x_1 . Положим $q = \sqrt[n-1]{x_1}$,

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = qx_2, \quad \dots, \quad \xi_n = qx_n.$$

Тогда

$$n - (\xi_1 + \dots + \xi_n) = n - 1 - q(x_2 + \dots + x_n) = \\ = n - 1 - q(n - q^{n-1});$$

$$n - 1 - nq + q^n = (1 - q)[n - (1 + q + \dots + q^{n-1})] > 0.$$

Поэтому

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} < 1 = \sqrt[n]{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n},$$

что противоречиво.

52. Эта задача (вернее, ее ключевое место — правило расположения плиток) известна многим поколениям студентов, так как она имеется в «Сборнике задач по теоретической механике» И. В. Мещерского (М., ГИТТЛ, 1954, изд. 20-е; 1-е издание вышло в 1914 году).

$p_{kij} = \frac{1}{6} p_{kit}$. Отсюда находим вероятность P_i того, что предпоследняя сумма равна $N - i$:

$$P_i = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=i+1}^5 p_{kij} = \frac{5-i}{6} \sum_{k=0}^{\infty} p_{ki}$$

(события, вероятности которых здесь суммируются, несовместны между собой, и $(k+1)$ -е бросание будет последним, если $j > i$). С другой стороны, вероятность Q_i того, что последняя сумма будет $N+l$, равна

$$Q_l = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^4 p_{ki} (l+i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{5-l} p_{ki} = \sum_{i=0}^{5-l} \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} p_{ki} = \sum_{i=0}^{5-l} \frac{P_i}{5-i}.$$

Итак,

$$Q_1 = \frac{P_0}{5} + \frac{P_1}{4} + \frac{P_2}{3} + \frac{P_3}{2} + P_4,$$

$$Q_2 = \frac{P_0}{5} + \frac{P_1}{4} + \frac{P_2}{3} + \frac{P_3}{1},$$

$$Q_3 = \frac{P_0}{5} + \frac{P_1}{4} + \frac{P_2}{3},$$

$$Q_4 = \frac{P_0}{5} + \frac{P_1}{4},$$

$$Q_5 = \frac{P_0}{5}.$$

Отсюда видно, что Q_1 действительно имеет наибольшую вероятность, если только $P_4 > 0$. Это действительно так, если $N \geq 4$. Если же $N \leq 3$, то $P_i = 0$ при $i \geq N$, а значит, некоторые Q_i равны между собой.

54. Читатели, не привыкшие к свойственной Великому Математику манере изъясняться, возможно, как и Бедняжка, окажутся в затруднении прежде всего потому, что не смогут правильно написать систему, о которой идет речь. Вот она:

$$\begin{aligned} ax_1 + (a+d)x_2 + (a+2d)x_3 + \dots + [a+(n-1)d]x_n &= a+nd \\ (a+nd+d)x_1 + (a+nd+2d)x_2 + \dots + (a+nd+nd)x_n &= \\ &= a+nd+nd+d \end{aligned} \quad (1)$$

$$[a + n(n+1)d]x_1 + \dots + [a + n(n+1)d + (n-1)d]x_n = \\ = a + [(n+1)^2 - 1]d.$$

Вычитая в этой системе любое уравнение из последующего, мы получаем одно и то же, а именно

$$(n+1)dx_1 + (n+1)dx_2 + \dots + (n+1)dx_n = (n+1)d.$$

Поэтому все уравнения рассматриваемой системы, начиная с третьего, получаются комбинацией первых двух уравнений или же уравнений системы

$$\begin{aligned} 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + (n-1)x_n &= n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Поэтому при $n \geq 3$ уравнения нашей системы действительно зависимы. Этого, однако, еще мало для того, чтобы сделать вывод о неединственности решения: вообще говоря, система могла бы оказаться еще и несовместной, но эта возможность исключается заявлением Великого Математика о существовании решения. [Читатели, не знакомые с общей теорией линейных уравнений, могут непосредственно проверить, что система (2) при $n \geq 3$ действительно имеет бесконечно много решений

$$x_1 = 1 - n + C, \quad x_2 = n - 2C, \quad x_3 = C, \quad x_4 = \dots = x_n = 0,$$

где C — произвольное число; все эти решения являются также и решениями системы (1).] Таким образом, $n = 2$, $x_2 = 2$ и $x_1 = -1$ в силу (2).

56. См. выше признак делимости на $b+1$, где b — основание системы счисления.

61. Выведем эти формулы, тем более что они используются далее в задаче 278. Проведем в треугольнике ABC биссектрису AE и высоту AH (рис. 1). Поскольку биссектриса делит противоположную

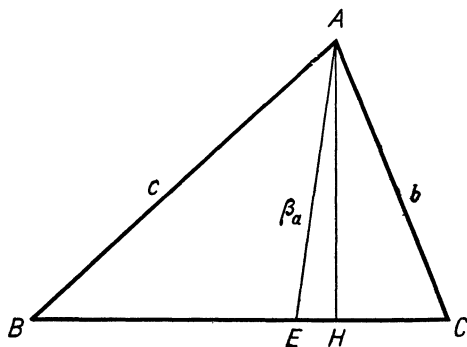


Рис. 1.

сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам,

$$BE : EC = AB : AC = c : b,$$

а потому

$$BE = \frac{ac}{b+c}, \quad EC = \frac{ab}{b+c}.$$

Воспользовавшись теоремой косинусов (или теоремами о квадрате стороны, лежащей против тупого или острого угла), находим, что

$$c^2 = \left(\frac{ac}{b+c} \right)^2 + \beta_a^2 + 2 \cdot \frac{ac}{b+c} \cdot EH,$$

$$b^2 = \left(\frac{ab}{b+c} \right)^2 + \beta_a^2 - 2 \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot EH,$$

откуда

$$c^2 b + b^2 c = b \left(\frac{ac}{b+c} \right)^2 + c \left(\frac{ab}{b+c} \right)^2 + (b+c) \beta_a^2,$$

$$bc(b+c) = \frac{a^2 bc(b+c)}{(b+c)^2} + (b+c) \beta_a^2,$$

$$\beta_a^2 = bc \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} = \frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}.$$

Аналогично

$$\beta_b^2 = \frac{ac(a+b+c)(c+a-b)}{(a+c)^2}, \quad \beta_c^2 = \frac{ac(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}.$$

Чисто геометрическое решение задачи 61 сообщила мне М. М. Белова. Пусть ABC — данный треугольник, BE и AK — равные биссектрисы. Проведем $EM \parallel AK$ и $KM \parallel AC$ (рис. 2). Тогда

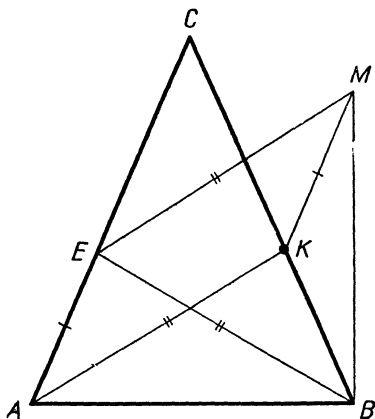


Рис. 2.

$EM = AK = BE$ и, следовательно, $\angle EMB = \angle EBM$. Предположим, что $\angle A > \angle B$. Тогда

$$\begin{aligned} \angle KMB &= \angle EMB - \angle EMK = \angle EMB - \angle EAK = \\ &= \angle EMB - \frac{1}{2} \angle A < \angle EBM - \frac{1}{2} \angle B = \angle KBM. \end{aligned}$$

В треугольнике KBM против большего угла должна лежать большая сторона, а потому $KB < KM = AE$.

Теперь обратимся к треугольникам EBA и KAB . У них AB общая, $AK = EB$ и $\angle EBA = \frac{1}{2} \angle B < \frac{1}{2} \angle A = \angle KAB$ по предположению. Из теоремы косинусов (или непосредственно геометрическим рассуждением) выводим, что $AE < KB$.

62. Это красивое рассуждение неверно: считая обруч неподвижным, мы совершаем неэквивалентную подмену задачи. Верное элементарное решение мне неизвестно.

63. Из этого рассуждения следует лишь, что множество точек пересечения изучаемых кривых переходит в себя при повороте на 45° ; но это отнюдь не значит, что оно пусто или не содержит более 8 точек (любое число, кратное 8, или даже бесконечное число). Поэтому придется решить задачу без «изюминки». Полагая $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$ (что возможно, поскольку $x^2 + y^2 = 1$) и подставляя в уравнение кривой, мы после упрощений придем к уравнению

$$4 \cos 4\varphi + k \sin 4\varphi = 0,$$

которое имеет решение

$$\varphi = \delta + \frac{\pi}{8} (2n + 1)$$

(где δ находится из соотношений $\cos 4\delta = \frac{4}{\sqrt{16 + k^2}}$, $\sin 4\delta = \frac{k}{\sqrt{16 + k^2}}$; $n = 0, 1, \dots, 7$).

65. Докажем эту красивую теорему. Для произвольного простого (с границей, состоящей из одного контура) многоугольника F с вершинами в узлах решетки будем обозначать:

$c(F)$ — число узлов решетки, попавших внутрь F ,

$b(F)$ — число узлов решетки, попавших на границу F ,

$$m(F) = c(F) + \frac{1}{2} b(F) - 1.$$

Если F разбивается на два простых многоугольника F_1 и F_2 ломаной L , вершины которой лежат в узлах решетки (рис. 3), и если l — общее число узлов на L (на звеньях L могут быть узлы и кроме ее вершин), то

$$c(F) = c(F_1) + c(F_2) + (l - 2)$$

(концы L считать не нужно),

$$b(F) = b(F_1) + b(F_2) - l - (l - 2),$$

и потому

$$\begin{aligned} m(F) &= c(F_1) + c(F_2) + (l - 2) + \frac{1}{2} [b(F_1) + b(F_2) - l - (l - 2)] - \\ &- 1 = \left[c(F_1) + \frac{1}{2} b(F_1) - 1 \right] + \left[c(F_2) + \frac{1}{2} b(F_2) - 1 \right] = \\ &= m(F_1) + m(F_2). \end{aligned}$$

Следовательно, если для двух из трех многоугольников F , F_1 , F_2 величина m равна площади, то и для третьего справедливо то же самое.

Всякий многоугольник с вершинами в узлах решетки можно разбить отрезками прямых на треугольники с тем же свойством. По-

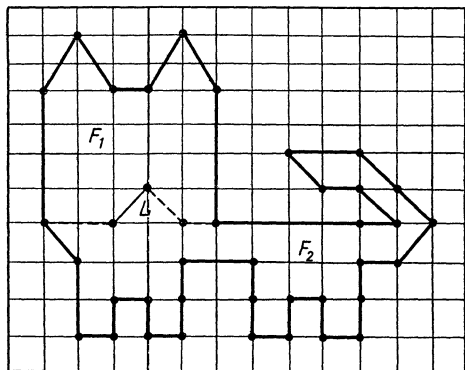


Рис. 3.

этому равенство $m(F) = S(F)$ достаточно доказать для треугольников.

Рассмотрим сначала прямоугольник размерами $m \times n$, составленный из квадратов решетки. Для него (рис. 4)

$$c(F) = (m-1)(n-1), \quad b(F) = 2m + 2n,$$

$$m(F) = (m-1)(n-1) + (m+n) - 1 = mn.$$

Разбив этот прямоугольник диагональю на два равных треугольника, убеждаемся по симметрии, что для каждого из них $m(F) = S(F)$. Следовательно, доказываемое утверждение верно для прямоугольных треугольников, катеты которых идут вдоль линий решетки. Наконец, произвольный треугольник можно дополнить прямоугольными треугольниками до прямоугольника (рис. 4). Для трех из четырех фигур на этом рисунке равенство $m(F) = S(F)$ верно, значит, оно верно и для четвертого.

66. Точный смысл этой несколько туманной фразы состоит в следующем. Разложим обе части равенства

$$n[(n-1)!]^2 = m!$$

на простые множители. Если правая часть содержит какой-нибудь простой множитель p в нечетной степени, то n делится на p (в противном случае левая часть содержит этот множитель в четной степени). Следовательно, n должно делиться на произведение всех тех простых множителей, которые входят в $m!$ в нечетных степенях. Если это произведение $> m$, то оно тем более $> n$, и мы приходим к противоречию. Каждое из простых чисел p и q , участвующих в

дальнейшем рассуждении, входит в $m!$ только один (то есть нечетное число) раз, так как среди всех чисел $1, 2, \dots, m-1, m$ только само p делится на p (следующее по величине число, делящееся на p , есть $2p > m$), а ввиду простоты p не может получиться из произведения других чисел. Аналогично обстоит дело и с q . Поэтому n должно по доказанному выше делиться на pq , что невозможно, ибо $pq > m$.

Однако в приведенном автором решении содержится «косточка» покрепче. В нем используется следующий факт:

Если $m > 10$, то всегда можно найти два различных простых числа, которые $\leq m$ и $> \frac{m}{2}$.

Элементарное доказательство этого утверждения, связанного с распределением простых чисел, мне неизвестно. Неэлементарное может быть получено так.

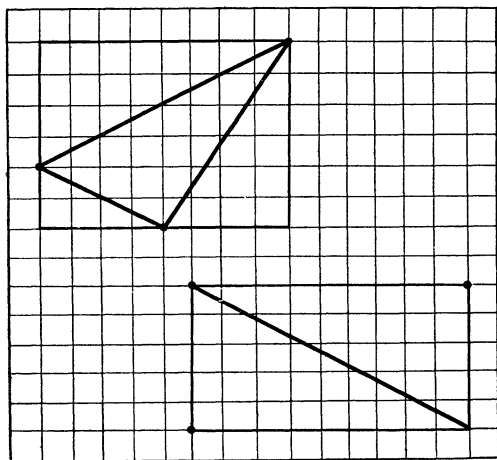


Рис. 4.

Обозначим $\pi(x)$ число различных простых чисел $\leq x$. Имеют место следующие оценки:

$$\text{Для } x \geq 17 \quad \pi(x) > \frac{x}{\ln x}.$$

$$\text{Для } x \geq 2 \quad \pi(x) < 1,26 \frac{x}{\ln x}.$$

(См. J. B. Rosser, L. Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois Mathematical Journal*, 1962, № 6, 64—69; следствие из теоремы 2.)

Отсюда для $m \geq 17$

$$\pi(m) - \pi\left(\frac{m}{2}\right) > \frac{m}{\ln m} - \frac{0,63m}{\ln \frac{m}{2}} = f(m).$$

Дифференцируя, находим

$$f'(m) = \frac{0,37 \ln^3 m - (1,37 \ln 2 + 0,37) \ln^2 m + (\ln^2 2 + 2 \ln 2) \ln m - \ln^2 2}{\ln^2 m \cdot \ln^2 \frac{m}{2}} >$$

$$\geq \frac{0,37 \ln^2 m - 1,33 \ln m + 1,38}{\ln m \cdot \ln^2 \frac{m}{2}} > 0,$$

и, следовательно, функция $f(m)$ возрастает. Поскольку

$$f(20) = \frac{20}{2,996} - \frac{12,6}{2,303} > 1,$$

при $m \geq 20$ разность $\pi(m) - \pi\left(\frac{m}{2}\right)$ (а это и есть искомое число различных простых между m и $\frac{m}{2}$) > 1 и, значит, равна по крайней мере двум. Чтобы доказать наше утверждение полностью, остается проверить его для $m < 20$. Непосредственно подсчитывая число простых $\leq m$ и $> \frac{m}{2}$, находим, что оно равно 1 для $m = 2, 4, 6$ и 10. Первое отвечает решению $1! \cdot 2! = 2!$, последнее — решению $5! \cdot 6! = 10!$, а два другие новых решений не дают. (Доказательство выделенного утверждения мне сообщил Н. И. Фельдман.)

70. Пусть некоторое число N оканчивается цифрой x , то есть имеет вид $10k + x$. Тогда

$$N^2 = 100k^2 + 20kx + x^2,$$

и поэтому цифра его десятков получается от сложения десятков в x^2 и десятков в $20kx$. Последнее слагаемое дает четное число десятков, а потому четность числа десятков, то есть четность предпоследней цифры в N^2 та же, что и четность числа десятков в x^2 . Непосредственной проверкой убеждаемся, что квадраты всех нечетных x содержат четное число десятков.

Далее, в решении задачи 81 предпоследняя цифра в некотором числе N^2 оказывается нечетной. Тогда число десятков в x^2 также должно быть нечетным, а это бывает только у 16 и 36, откуда и делается заключение, что последняя цифра есть 6.

71. Мне не удалось доказать, что описанная процедура действительно дает максимальное число кусков.

77. Из этого рассуждения не видно, почему нельзя тем же способом определить температуру в какой-нибудь точке листа, отличной от центра. На самом деле оно позволяет сделать только следующий вывод: среднее арифметическое температур, измеренных в четырех точках, получающихся друг из друга при повороте квадрата на угол 90° относительно центра, будет равно 25° . Покажем это, появив заодно и приведенное автором решение, оставаясь сначала на физическом уровне строгости.

Разобьем квадратный лист на столь малые одинаковые элементы, что в пределах одного из них температуру можно считать

постоянной. Условие теплового равновесия состоит в том, что температура каждого элемента равна среднему арифметическому температур всех его соседей. Когда мы наложим четыре листа друг на друга, то элементы совместятся по четыре, причем совместятся как раз те элементы, которые получаются поворотом листа на 90° относительно центра. После совмещения условие теплового равновесия между четвертым элементом и его соседями не нарушится, а внутри его произойдет перераспределение тепла, так что в результате температура станет равной среднему арифметическому температур всех четырех составляющих его элементов. Для элементов, принадлежащих краю листа, это среднее равно 25° , а так как у листа с постоянной температурой на краю равновесное состояние будет тогда, когда весь лист имеет ту же температуру, то среднее во всех точках равно 25° .

В частности, и для понимания авторского решения это очень существенно: при повороте квадратного листа центр его остается на месте и потому центральный элемент совмещается четырежды сам с собой. Среднее арифметическое четырех одинаковых чисел есть то же число.

Если приведенное рассуждение не удовлетворяет приверженцев математической строгости, то прежде всего им придется перевести на аккуратный математический язык самое постановку задачи. Обычно это делается в терминах так называемой задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Для тех, кто сумеет это сделать, не представит труда перевести на тот же язык и наше физическое рассуждение. В награду за усилия они получают также равенство

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi}{2}} = \frac{1}{4}.$$

83. А нельзя ли усмотреть, что остатка не будет, не производя самого деления? Отбросив 0 и запятую, которые при выполнении деления существенной роли не играют, запишем наше число в виде

$$\begin{aligned} N &= 142857 (1 + 10^6 + \dots + 10^{36}) = \\ &= 142857 [7 + (10^6 - 1) + \dots + (10^{36} - 1)]. \end{aligned}$$

В квадратных скобках каждое слагаемое делится на 7, так как все они, начиная со второго, делятся на $10^6 - 1 = 142857 \cdot 7$.

84. Справедливо тождество

$$abc = \frac{1}{6} [(a+b+c)^3 + 2(a^3+b^3+c^3) - 3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)]$$

(аналогичное тождество для четырех переменных встретилось в комментарии к задаче 3).

89. Конечно, доказываемое утверждение общеизвестно, и его можно доказать и без теоремы Чебы. Эта последняя, впрочем, достаточно красива и позволяет получить много интересных следствий. Вот ее формулировка (сразу для прямой и обратной теорем).

Для того чтобы прямые AA' , BB' , CC' , соединяющие вершины треугольника ABC с точками A' , B' , C' , лежащими соответственно на прямых BC , CA и AB , пересекались в одной

точке или были все параллельны друг другу, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1.$$

В этой теореме не предполагается, что точки A' , B' , C' лежат обязательно на отрезках BC , CA и AB . Поэтому, вычисляя отношения, следует учитывать также и направления отрезков. Например, если B' лежит на продолжении AC в сторону A (так что A лежит между B' и C), то отрезки AB' и $B'C$ имеют противоположные направления и отношение $AB'/B'C$ отрицательно. Тем самым порядок букв в написанной выше формуле весьма существен. Если точка пересечения трех прямых AA' , BB' , CC' уходит в бесконечность, то они становятся параллельными.

Из теоремы Чева можно легко вывести также, что три биссектрисы в треугольнике или три высоты пересекаются в одной точке. Доказательство этой теоремы, ее обобщения и различные следствия см.: Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, Библиотека математического кружка, вып. 2, М., ГИТТЛ, 1952, задача 133 и др. (есть и другие издания).

101. Очень старая и очень популярная задача.

104. Ревнитель строгости рассуждений сказал бы здесь: «Следовательно, либо $a = 2$, либо такого a вовсе не существует». Только после выполнения деления мы можем утверждать, что $a = 2$ является решением.

105. А зачем фермеру вообще покупать телят? Он может, не нарушая условия задачи, купить 20 ягнят и 80 поросят. Если обозначить через x и y число купленных телят и ягнят, то (учитывая, что с каждым теленком надо покупать 18 поросят, а с каждым ягненком — 5 поросят) мы получаем систему

$$19x + 5y = 100;$$

$100 - 19x$ неотрицательно и делится на 5 только при $x = 0$ и 5. Первая возможность дает указанное выше решение, вторая — приведенное автором.

107. Обозначим $S_{CED} = S_{EFD} = S_1$, $S_{EHD} = S_2$. Приведенное решение исходит из предположения, что $3 < S_1 < S_2$. Но почему это так? Из рисунка видно, что $3 < S_1$ и $3 < S_2$, так как $\triangle EFD$ и $\triangle EHD$ содержат $\triangle EGK$, а $S_{EGK} = S_{BEH} = 3$. Но почему не может быть $3 < S_2 < S_1$?

Снова обратившись к рисунку, находим, что

$$S_2 = 3 + S_{KGD} + 2S_{EHJ},$$

$$S_1 = 3 + 2S_{KGD}.$$

Если $3 < S_2 < S_1$ и эти величины образуют арифметическую прогрессию, то $S_2 = \frac{1}{2}(3 + S_1)$ и, следовательно,

$$3 + S_{KGD} + 2S_{EHJ} = 3 + S_{KGD},$$

откуда $S_{EHJ} = 0$, что невозможно.

114. Нужно сделать линейное преобразование

$$\begin{aligned}x' &= x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}, \\y' &= \frac{\sqrt{3}}{2} y + \frac{\sqrt{3}}{6} z, \\z' &= \frac{\sqrt{6}}{3} z.\end{aligned}$$

Хуже обстоит дело со вторым из предлагаемых способов, так как из правильных тетраэдров нельзя составить кристаллической структуры. В самом деле, возьмем на ребре l одного из тетраэдров точку P , которая не является ни вершиной одного из тетраэдров, ни точкой (строгого) пересечения никаких двух ребер. Такая точка всегда существует. Вблизи этой точки ребро l будет общим ребром двугранных углов нескольких правильных тетраэдров. Эти углы либо заполняют всю окрестность точки P , если она не является внутренней ни для одной из граней какого-либо тетраэдра, либо заполняют полупространство, примыкающее к той грани, для которой P — внутренняя точка. В первом случае двугранный угол правильного тетраэдра должен быть равен $\frac{360^\circ}{n}$, во втором — $\frac{180^\circ}{n}$, где n — целое число. Но этот угол φ легко вычислить, причем оказывается, что

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ < \varphi = 2 \arcsin \frac{1}{3} < 72^\circ = \frac{360^\circ}{5}.$$

Поэтому кристаллической структуры, составленной из одних правильных тетраэдров, не существует.

116. Неискушенному читателю в этом месте, возможно, и не придет в голову вопрос: «А почему, собственно говоря, это очевидно?», знаток математического анализа сразу сообразит, что непрерывная функция $f(A, B, C) = \sin A + \sin B + \sin C$, определенная на замкнутом ограниченном, а стало быть, и компактном множестве

$$A \geq 0, \quad B \geq 0, \quad C \geq 0, \quad A + B + C = \pi,$$

достигает своего максимума по теореме Вейерштрасса, но читатель, не принадлежащий ни к одной из этих двух категорий, может пожелать обойтись чисто геометрическими средствами, без ссылки на эту теорему

По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где $2R$ — диаметр описанного круга. Поскольку нас интересуют только углы, то мы можем положить $2R = 1$. Теперь синусы углов будут равны длинам противоположных сторон, и мы приходим к задаче: доказать, что среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, равносторонний имеет наибольший периметр $2p = a + b + c$.

В эквивалентной форме: $p^2 \leq \frac{27}{4} R^2$, или $\frac{\sqrt{3}}{9} p \leq \frac{1}{2} R$, это утверждение содержится в книге Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома «Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум» (Библиотека математического кружка, вып. 12, М., изд-во «Наука», 1970, задачи 95, в и 97). Впрочем, приведенное там доказательство достаточно длинно.

118. Интересно, является ли это решение единственным? (Решения, получающиеся друг из друга круговым пересаживанием или зеркальной симметрией, различными не считаются.)

122. См. формулы Виета.

129. Без дополнительных пояснений это рассуждение ничем не лучше следующего классического парадокса.

Пусть

$$\begin{aligned} S &= 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \\ &\dots = 0 + 0 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$1 - S = 1 - (1 - 1 + \dots) = 1 - 1 + \dots = S.$$

Поэтому

$$1 = 2S.$$

Следовательно,

$$1 = 0$$

(я нарочно сохранил те же самые слова). В чем же дело? Конечно, в сходимости ряда, определяющего M , и расходимости ряда, определяющего S . Первую можно установить, пользуясь известными признаками сходимости (например, Даламбера) или заметив, что ряд для M мажорируется бесконечно убывающей геометрической прогрессией: так как $n < 2^n$ при $n \geq 1$, то

$$\frac{1}{3} + \dots + \frac{n}{3^n} + \dots < \frac{2}{3} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots = 2.$$

140. В трехгранном угле сумма двух плоских углов всегда больше третьего.

150. Логика этой фразы не совсем понятна. Из написанного далее уравнения решение $x = k + m$ получается мгновенно.

151. $C_6^3 = 20 = 8$ граней + 12 внутри октаэдра.

153. 1. Если одно из чисел p, q, r четно, то есть равно 2, то $N \leq 2 \cdot 47 \cdot 47 < 2 \cdot 50 \cdot 50 = 5000$. По условию же существует не менее 7560 чисел, меньших, чем данное.

2. Кроме 11 и 19, других простых чисел < 22 , квадрат которых кончается единицей, нет. Поскольку в условии не сказано, что p, q, r должны быть различными, следует испытать еще две возможности: $p = q = 11$ и $p = q = 19$. Случай $N = 43 \cdot 11 \cdot 11 = 5203$ следует отбросить по той же причине, что и выше $N = 2 \cdot 47 \cdot 47$. Остаются два конкурента: приведенное Триггом $N = 11 \cdot 19 \cdot 43 = 8987$ и $N = 19 \cdot 19 \cdot 43$.

Однако это не самое существенное; из наших рассуждений никак не следует, что хотя бы одно из этих чисел действительно является решением задачи: вполне возможно, что эта задача неразрешима. Кстати, она и была бы неразрешимой, если бы в условии го-

ворилось, например, о 7561 — числе, меньшем данного и взаимно простым с ним, хотя на все наши предыдущие рассуждения это никак бы не повлияло.

Поэтому мы должны проверить, что среди чисел $1, 2, \dots, 8986$ действительно ровно 7560 взаимно просто с 8987. Легче сосчитать наоборот, сколько среди этих чисел имеют с $8987 = 11 \cdot 19 \cdot 43$ общий делитель. Это будут:

$11, 22, \dots, (43 \cdot 19 - 1) \cdot 11$ — всего $43 \cdot 19 - 1 = 816$ чисел;

$19, 38, \dots, (43 \cdot 11 - 1) \cdot 19$ — всего $43 \cdot 11 - 1 = 472$ числа;

$43, 86, \dots, (11 \cdot 19 - 1) \cdot 43$ — всего $11 \cdot 19 - 1 = 208$ чисел.

В этом перечне по два раза встретились:

$11 \cdot 19, 2 \cdot 11 \cdot 19, \dots, 42 \cdot 11 \cdot 19$ — 42 числа;

$11 \cdot 43, 2 \cdot 11 \cdot 43, \dots, 18 \cdot 11 \cdot 43$ — 18 чисел;

$19 \cdot 43, 2 \cdot 19 \cdot 43, \dots, 10 \cdot 19 \cdot 43$ — 10 чисел.

Итого чисел, меньших 8987 и взаимно простых с ним: $8986 - 816 - 472 - 208 + 42 + 18 + 10 = 8986 - 1496 + 70 = 7560$.

Значит, 8987 удовлетворяет всем условиям задачи.

Для $N = 19 \cdot 19 \cdot 43$ аналогичный подсчет дает 14 383 числа.

154. Это рассуждение некорректно, поскольку нигде не следует, что эта процедура не будет продолжаться бесконечно. На каждом шагу число слагаемых растет, может возрасти и число равных среди них.

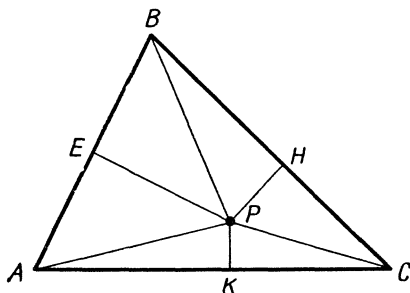


Рис. 5.

155. В самом деле, если внутренняя точка P , а основания перпендикуляров на сторонах AB, BC, CA обозначены соответственно E, H, K (рис. 5), то

$$\begin{aligned} AK^2 + BE^2 + CH^2 &= AP^2 - PK^2 + BP^2 - PE^2 + CP^2 - PH^2 = \\ &= AE^2 + EP^2 - PK^2 + BH^2 + HP^2 - PE^2 + CK^2 + KP^2 - PH^2 = \\ &= AE^2 + BH^2 + CK^2. \end{aligned}$$

159. Действительно, радиус вписанного круга здесь равен

$$\frac{2S_{ABC}}{a+b+c} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2 - c^2} = \\ = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2 - a^2 - b^2} = \frac{a+b-c}{2}.$$

164. См. комментарий к задаче 129.

173. Здесь следовало бы прибегнуть к такому рассуждению. В четверичной системе счисления таблица умножения имеет вид:

$$0 \cdot m = m \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot m = m \cdot 1 = m,$$

$$2 \times 2 = 0, \quad 2 \times 3 = 12, \quad 3 \times 3 = 21.$$

Поэтому, если $**1 = p \cdot (*q)$, то либо $p = q = 1$, что невозможно (двузначное число не может равняться трехзначному), либо $p = q = 3$. Поэтому третья цифра частного и последняя в делителе суть 3.

176. Автор неявно предполагает, что возраст жениха в момент заключения брака был меньше 150 лет. В противном случае возможно, например, еще такое решение: будучи 150 лет от роду, сосед взял в жены 35-летнюю женщину; сейчас ему 169 лет, его жене 54 года, дочери 16, а сыну 9 лет.

Возможны и другие решения. Найдя их, вы, без сомнения, как и я, улыбнетесь.

185. Применяемая автором процедура на первый взгляд кажется «взятой с потолка». Поэтому естественно спросить: не имеет ли эта задача других решений? Соответствующий анализ довольно любопытен и показался мне заслуживающим внимания.

Будем, как и автор, изображать расписание тура матрицей 4×4 , где строки соответствуют играющим четверкам. Расписание не меняется, если буквы внутри одной строки произвольно переставляются и если строки целиком меняются местами. Кроме того, для наших целей безразличен порядок туров.

Составив произвольно расписание пятого тура, присвоим игрокам первой четверки инициалы A, B, C, D . Во всех остальных турах эти игроки должны быть в разных четверках, и мы условимся (переставляя, если нужно, строки) писать всегда A в первой строке, B — во второй и т. д. При этом, переставляя инициалы игроков внутри строки, можно добиться того, чтобы игроки из четверки k -й строки матрицы пятого тура были вписаны в k -й столбец во всех матрицах остальных туров (в каждой матрице, кроме пятой, все они должны быть в разных строчках). Наконец, переставляя инициалы игроков в строках матрицы пятого тура, мы можем добиться того, чтобы строки матрицы пятого тура стали столбцами матрицы первого тура, то есть чтобы эти матрицы, как и у автора, имели вид

$AEIM \quad ABCD$

$BFJN \quad EFGH$

$CGKO \quad IJKL$

$DHLP \quad MNOP$

Таким образом, произвол в составлении расписания сводится лишь к перестановкам внутри столбцов матриц второго, третьего и четвертого туров (кроме первого столбца, который уже зафиксирован). Это вполне соответствует процедуре, применяемой автором, и нужно лишь объяснить, почему им были выбраны P_2, P_3, P_4 , а не какие-нибудь иные перестановки. В дальнейшем мы будем обозначать одной и той же буквой как перестановку некоторого фиксированного набора элементов, например $\alpha = (G, H, E, F)$, $\beta = (H, G, F, E)$, $\gamma = (F, E, H, G)$ суть перестановки четверки (E, F, G, H) , так и операцию, которой эта перестановка осуществляется, причем эту операцию можно применять к различным наборам элементов: $\alpha(1, 2, 3, 4) = (3, 4, 1, 2)$, $\beta(1, 2, 3, 4) = (2, 1, 3, 4)$.

Рассмотрим вторые столбцы матриц второго — четвертого туров. Они получаются из второго столбца матрицы первого тура, то есть из букв (E, F, G, H) (для удобства я пишу здесь и далее столбец в строчку), тройкой перестановок, которая должна обладать следующим свойством: при каждой перестановке ни одна из букв не остается на том же месте, что и в исходном столбце, и каждая буква непременно должна побывать на всех остальных трех местах. Существует четыре тройки перестановок, удовлетворяющие этому условию:

Id	1) α β γ	2) δ ϵ ζ	3) η θ ι	4) κ ξ χ
1	3 4 2	3 4 2	3 4 2	3 4 2
2	4 3 1	4 3 1	1 3 4	4 1 3
3	1 2 4	2 1 4	4 2 1	1 2 4
4	2 1 3	1 2 3	2 1 3	2 3 1

(Id означает тождественную перестановку).

Те же рассуждения применимы к третьим и четвертым столбцам матриц второго — четвертого туров, и они также должны получаться из столбцов (I, J, K, L) и (M, N, O, P) одной из этих троек перестановок, например $\epsilon(I, J, K, L) = (L, K, I, J)$ и т. д.

Теперь рассмотрим второй — четвертый столбцы одной и той же матрицы любого из второго — четвертого туров. Они снова получаются из соответствующих столбцов матрицы первого тура тройкой перестановок, и нетрудно заметить, что эта тройка должна обладать тем же характерным свойством, что и выше, поскольку игроки из одной четверки первого тура должны быть рассеяны по всем четверкам в любом из остальных туров. Следовательно, это опять должна быть одна из четырех выписанных выше троек перестановок.

Докажем, что тройка перестановок, отвечающая столбцам i -й матрицы, и тройка перестановок, отвечающая k -м столбцам всех трех матриц, совпадают при любом выборе i, k . Отсюда следует, что это будет одна и та же тройка при всех i и k .

Пусть, например, $i = k = 2$. Если тройки не совпадают, то перестановкой, отвечающей второму столбцу матрицы второго тура, может быть только α, β или γ (другие перестановки входят лишь в одну из троек). Все три случая идентичны, так что пусть это будет α . Сначала рассмотрим случай, когда тройка матрицы второго тура есть (α, β, γ) . Тогда второму столбцу третьей или четвертой матрицы отвечает ξ . Следовательно, третьему или четвертому

столбцу той же матрицы отвечает κ , что невозможно, ибо κ не образует тройки ни с β , ни с γ , отвечающими тем же столбцам в матрице второго тура. Аналогично опровергается случай, когда матрице второго тура отвечает тройка (α, ζ, κ) .

Таким образом, все перестановки должны входить в одну из троек 1—4 (у автора $P_2 = \gamma$, $P_3 = \beta$, $P_4 = \alpha$). Теперь нужно выяснить, как следует распределять перестановки по столбцам и матрицам. Поскольку номера туров для нас не существенны, то можно вместе с автором считать, что второму столбцу во втором туре соответствует α , в третьем — β , в четвертом — γ . Тогда для третьего столбца мы будем иметь две возможности — γ и β . Легко видеть, что четвертый столбец и остальные столбцы других матриц выбором одной из этих возможностей определяются однозначно. Результат может быть представлен следующим образом (приведены перестановки второго — четвертого столбцов в каждом из туров):

	1-е решение	2-е решение	
Второй тур	$\alpha \gamma \beta$	$\alpha \beta \gamma$	(1)
Третий тур	$\beta \alpha \gamma$	$\beta \gamma \alpha$	
Четвертый тур	$\gamma \beta \alpha$	$\gamma \alpha \beta$	

Эти два решения дают оба авторских решения (второе с перестановкой туров).

У нас остается еще возможность испытать одну из троек 2—4. В предыдущем анализе мы заботились о том, чтобы игроки первого столбца (то есть A, B, C, D) получали в каждом туре новых партнеров, но ниоткуда не следует, что игроки остальных столбцов не могут оказаться в одной четверке (строчке) дважды. Те же рассуждения, что и выше, показывают, что распределение перестановок по турам (с точностью до нумерации туров) имеет вид (для тройки 2)

Второй тур	$\delta \varepsilon \gamma$	$\delta \gamma \varepsilon$	(2)
Третий тур	$\varepsilon \gamma \delta$	$\varepsilon \delta \gamma$	
Четвертый тур	$\gamma \delta \varepsilon$	$\gamma \varepsilon \delta$	

Построив по левой из этих таблиц расписание второго и четвертого туров, получим

$\delta \varepsilon \gamma$	$\gamma \delta \varepsilon$	
$\hat{A}GLN$	$AFKP$	
$BHKM$	или $BELO$	(3)
$CFIP$	$CHJM$	
$DEJO$	$DGIN$	

Мы видим, что G и N , H и M и т. д. дважды играют в одной четверке. Таким образом, это не есть решение задачи. Точно так же приходится отбросить правую таблицу, отвечающую тройке 2, и остальные две перестановки.

В чем же дело? Оказывается, здесь существенную роль играет различие в алгебраической природе троек 2—4 и тройки 1. Добавив к каждой из них тождественную перестановку Id , мы во всех случаях получаем подгруппу в группе перестановок, но для тройки 1 это будет группа Клейна ($\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = Id$), а для троек 2—4 — циклическая группа четвертого порядка (например, $\delta^2 = \gamma$, $\delta^3 = \varepsilon$,

$\delta^4 = \text{Id}$). Опуская подробности, я замечу только, что, взяв в таблицах (1) произведения элементов одного столбца на обратные к элементам другого (то есть $\alpha\beta^{-1} = \alpha\beta = \gamma$, $\beta\gamma^{-1} = \beta\gamma = \alpha$, $\gamma\alpha^{-1} = \gamma\alpha = \beta$), мы получаем три различные перестановки, то есть всю тройку 1. В конечном счете именно это обеспечивает выполнение всех условий задачи в авторском решении.

Продельвая то же самое в (2), мы получаем

$$\delta\gamma^{-1} = \varepsilon, \quad \varepsilon\delta^{-1} = \gamma, \quad \gamma\varepsilon^{-1} = \varepsilon.$$

Совпадение произведений $\delta\gamma^{-1}$ и $\gamma\varepsilon^{-1}$ имеет следствием появление в (3) повторов.

198. Вот еще решение этой популярной задачи. Поместим в каждую из точек A, B, C, D массу 1. Обе точки, указанные в условии задачи, должны совпадать с центром тяжести полученной системы, а следовательно, и между собой.

200. Пусть $\overline{KO} = x$, $C = y$. Тогда

$$\frac{28}{25} = \frac{\overline{KOC}}{\overline{CKO}} = \frac{10x + y}{100y + x},$$

откуда $25y = 2x$. Это дает $x = 50$, $y = 2$.

205. Уединяя один из радикалов и возводя обе части уравнения в квадрат, мы вместе с многоумным Е. П. Б. Умбуджо получим следующее:

$$\left(x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)^2 = \left(\sqrt{x - \frac{1}{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x},$$

$$x^2 - 2x\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x},$$

$$x^2 - x + 1 = 2x\sqrt{1 - \frac{1}{x}},$$

$$(x^2 - x + 1)^2 = 4x^2 - 4x.$$

Кажется, теперь пришло время, подобно незадачливому профессору, угадывать корень этого уравнения 4-й степени. Но ... не будем торопиться:

$$(x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) + 1 = 4(x^2 - x),$$

$$(x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x) + 1 = 0,$$

$$(x^2 - x - 1)^2 = 0$$

и далее, как у автора.

206. Это «следовательно» совершенно нелогично. Что значит «самое равномерное распределение»? Кто сказал, что оно самое плохое? К сожалению, задачи этого типа, в которых суть дела связана с принципом Дирихле, нередко оказываются камнем преткновения. Часто нелегко бывает убедить автора подобного «решения» в том, что его рассуждение не укладывается в рамки строгой логики, хотя оно основано на здравом смысле и приводит к правильному ответу (последнее обычно рассматривается как неопровержимый довод в пользу правильности решения).

Логически безукоризненным рассуждением здесь будет, например, такое. Пусть *менее* 20 человек обладают всеми четырьмя характеристиками. Тогда общее число записей будет меньше чем $20 \cdot 4 + (100 - 20) \cdot 3 = 320$.

Вообще же мне больше нравится такое решение: среди 100 мужчин 30 не имеют карих глаз, 25 — темных волос, 15 из них малорослы и 10 имеют «вес мухи» (140 фунтов \approx 50 кг). Даже если это личности разные, их число не превосходит $30 + 25 + 15 + 10 = 80$. Значит, остальные, число которых не может быть меньше $100 - 80 = 20$, должны иметь все перечисленные в условии задачи достоинства. В общем случае

$$P = 100 - \sum_{i=1}^n (100 - p_i),$$

что, конечно, совпадает с приведенным автором ответом.

207. Действительно, проведем опорные прямые перпендикулярно CD . Тогда $CD \leq$ расстоянию между ними = ширине = 1.

214. Я склонен отнести это красивое утверждение к разряду «косточек в изюме». Во всяком случае, известное мне доказательство вряд ли заслуживает эпитета «элегантное».

Пусть (x_0, y_0) — точка пересечения, а $y = y_0 + k(x - x_0)$ — уравнение касательной. Решая систему

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = y_0 + k(x - x_0), \end{cases}$$

приходим к квадратному уравнению $Ax^2 + Bx + C = 0$, где

$$A = b^2 + a^2k^2,$$

$$B = 2ka^2(y_0 - kx_0),$$

$$C = a^2(y_0 - kx_0)^2 - a^2b^2.$$

Поскольку мы имеем дело с касательной, обе точки пересечения прямой и эллипса совпадают, а потому совпадают и корни найденного квадратного уравнения. Следовательно, его дискриминант $B^2 - 4AC = 0$, откуда

$$k^2(x_0^2 - a^2) - 2kx_0y_0 + y_0^2 - b^2 = 0.$$

Два корня k_1 и k_2 этого квадратного уравнения отвечают двум касательным к эллипсу, проходящим через точку (x_0, y_0) . Условием их перпендикулярности будет равенство $k_1k_2 = -1$. Но по формуле Виета

$$-1 = k_1k_2 = \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2},$$

откуда

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2.$$

215. Это рассуждение никуда не годится прежде всего потому, что задача не поставлена корректно, так как вычисляемая величина не определена в точных математических терминах. Попытка сделать это привела меня к маленькому исследованию, не лишенному интереса.

Обозначим сначала чисто формально

$$y_k = \sqrt[3]{8 + 3k + (k^2 + 3k) \sqrt[3]{8 + 3(k+1) + \dots}} \quad (1)$$

Если этому выражению можно придать какой-то естественный смысл, то, конечно, должно выполняться соотношение

$$y_k = \sqrt[3]{8 + 3k + (k^2 + 3k) y_{k+1}} \quad (2)$$

или

$$y_{k+1} = \frac{y_k^3 - (8 + 3k)}{k^2 + 3k}. \quad (3)$$

Примем (2) и (3) в качестве первого постулата, ограничивающего выбор y_k .

Из соотношения (3) видно, что вся последовательность $\{y_k\}$ полностью определяется заданием своего первого члена, который может быть произвольным. Поэтому для придания однозначного смысла величине y_1 — а именно к этому мы стремимся — следует привлечь какие-то дополнительные соображения. Естественно считать — и это будет нашим вторым постулатом, — что y_k неотрицательны.

Положим $y_k = (k+2)\eta_k$. Тогда (3) приведет к виду

$$\eta_{k+1} = (1 + \varepsilon_k) \eta_k^3 - \varepsilon_k, \quad (4)$$

где

$$\varepsilon_k = \frac{8 + 3k}{k(k+3)^2}.$$

Прежде всего заметим, что последовательность $\eta_k \equiv 1$ удовлетворяет соотношению (4), откуда $y_k = k+2$ удовлетворяет соотношению (3). Собственно говоря, автор решения только и ограничился этим замечанием. Если же $\eta_k \neq 1$, то из равенства

$$\eta_{k+1} - \eta_k = (\eta_k^3 - \eta_k) + \varepsilon_k (\eta_k^3 - 1)$$

видно, что либо $\eta_{k+1} > \eta_k > 1$, либо $\eta_{k+1} < \eta_k < 1$ (последнее в предположении $\eta_k \geq 0$).

Рассмотрим вторую из этих возможностей, предполагая в соответствии со вторым постулатом, что $\eta_k \geq 0$. Ввиду монотонности существует $\lim \eta_k = \eta_\infty$, и, переходя к пределу в (4), находим, что $\eta_\infty = \eta_\infty^3$, то есть $\eta_\infty = 0$ (невозможно $\eta_\infty = 1$, так как $\eta_\infty \leq \eta_k < 1$). Следовательно, при $k > k_0$ будет выполняться неравенство $\eta_k < \frac{1}{2}$, а потому

$$\eta_{k+1} < 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \eta_k = \frac{1}{2} \eta_k$$

(ε_k при всех k меньше 1). По индукции $\eta_{k_0+l} < \frac{\eta_{k_0}}{2^l}$, а тогда

$$\eta_{k_0+l+1} < \frac{\eta_{k_0}}{2^{l+1}} - \varepsilon_{k_0+l}$$

и так как $\varepsilon_k \sim \frac{3}{k^2}$, то при достаточно больших k правая часть отрицательна, что приводит нас к противоречию.

Таким образом, либо $\eta_k \equiv 1$, либо $\eta_k > 1$, и тогда

$$\eta_{k+1} = \eta_k^3 + \varepsilon_k (\eta_k^3 - 1) > \eta_k^3,$$

откуда по индукции $\eta_k > (\eta_1)^{3^{k-1}}$. Это означает, что последовательности $\{y_k\}$, удовлетворяющие двум нашим постулатам, бывают двух видов. Первый соответствует $y_1 = 3$ — это авторское решение задачи. Во втором выполняется неравенство

$$y_k > (k+2) \eta^{3^{k-1}} = (k+2) \left(\frac{y_1}{3}\right)^{3^{k-1}}. \quad (5)$$

Желая теперь придать точный смысл величинам y_k , мы поступим следующим образом. Из (1) вытекает, что

$$y_k = \sqrt[3]{8+3k + (k^2+3k) \sqrt[3]{8+3(k+1) + \dots \sqrt[3]{8+3n+(n^2+3n) y_{n+1}}}}$$

Возьмем произвольную неотрицательную последовательность $\{\theta_n\} = \theta$ и обозначим

$$x_{k,n}(\theta) =$$

$$= \sqrt[3]{8+3k + (k^2+3k) \sqrt[3]{8+3(k+1) + \dots \sqrt[3]{8+3n+(n^2+3n) \theta_{n+1}}}}$$

Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k,n}(\theta)$, если таковой существует, мы и будем принимать за значение величины y_k в (1). Предыдущие рассуждения позволяют нам указать некоторые условия, при которых эти пределы действительно существуют и даже иногда не зависят от выбора θ .

Прежде всего, если мы возьмем $\theta_k = y_k$, где y_k удовлетворяют соотношению (3), то при $n > k$ будем иметь $x_{k,n} = y_k$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k,n} = y_k$. Таким образом, произвол все еще остается.

Докажем теперь, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \theta_n}{3^n} = 0, \quad (6)$$

то существуют пределы

$$\bar{y}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k,n}(\theta) = k+2 \quad (7)$$

(в частности, $\bar{y}_1 = 3$).

Задав произвольно $y_1 > 1$, построим последовательность y_k по соотношению (3). В силу (5) и (6) при достаточно больших n выполняется неравенство $y_n > \theta_n$ и из определения $x_{k,n}(\theta)$ мы находим, что при $n > N_k(y_1)$ выполняются неравенства

$$x_{k,n}(\theta) < x_{k,n}(\{y_n\}) = y_k.$$

При $y_1 \rightarrow 1$, применяя последовательно соотношение (3), находим, что $y_k \rightarrow k + 2$. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое y_1^* , а затем и $N_k^* = N_k(y_1^*)$, что при $n > N_k^*$ выполняются неравенства

$$x_{k,n}(\theta) < k + 2 + \varepsilon. \quad (8)$$

С другой стороны, рассмотрим последовательность $\theta_n = 0$. Тогда, как легко видеть, $x_{k,n+1} > x_{k,n}$ и по тому существуют пределы

$$\tilde{y}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k,n}(0).$$

Кроме того,

$$0 \leq \tilde{y}_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k,n}(\{k+2\}) = k + 2,$$

а переходя к пределу в равенстве

$$x_{k,n+1} = \sqrt[3]{8 + 3k + (k^2 + 3k)x_{k,n+1}},$$

мы находим, что \tilde{y}_k удовлетворяют соотношениям (2) и (3). Из проделанного нами выше анализа вытекает, что $\tilde{y}_k = k + 2$. Так как имеет место неравенство

$$x_{k,n}(0) \leq x_{k,n}(\theta),$$

то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_k^{**} , что при $n > N_k^{**}$ будет выполняться неравенство

$$k + 2 - \varepsilon < x_{k,n}(0) \leq x_{k,n}(\theta). \quad (9)$$

Вместе с (8) это дает (7).

225. Разумеется, здесь используются нематематические соображения, хотя этот случай все равно пришлось бы отбросить, так как соответствующее уравнение $131 + m = d^2$ при $1 \leq m \leq 12$ не имеет целочисленных решений. Если же забыть о продолжительности человеческой жизни, то задача допускает еще одно решение: 15 октября 1722 года. В 1937 году возраст 215 лет; $215 + 10 = 15^2$.

228. Принцип Дирихле в чистом виде.

229. Это рассуждение ошибочно. По-видимому, ход мысли автора был таков. Из равенства

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = y^2$$

видно, что y^2 делится на $x+1$, следовательно, y должен делиться на $x+1$, следовательно,

$$\frac{y^2}{(x+1)^2} = x - 2 + \frac{3}{x+1}$$

— целое число, а значит, $\frac{3}{x+1}$ должно быть целым. Выделенное место неверно: например, $6^2 = 36$ делится на 4, хотя 6 на 4 и не делится.

Элементарное решение уравнения $x^3 + 1 = y^2$ мне неизвестно, хотя я встречал его еще в школьном математическом кружке. В. Серпинский («О решении уравнений в целых числах», М., Физматгиз, 1961, стр. 56) также весьма пессимистично пишет об элементарном решении этого уравнения.

Неэлементарное решение может быть получено так:

$$x^3 + 1 = y^2 \Rightarrow x^3 = y^2 - 1 = (y + 1)(y - 1).$$

Общий наибольший делитель чисел $y + 1$ и $y - 1$ должен быть делителем их разности, то есть это либо 1, либо 2.

В первом случае $y + 1$ и $y - 1$ взаимно просты, а поэтому каждый делитель x должен войти только в одно из этих чисел. Следовательно, $x = uv$, $y + 1 = u^3$, $y - 1 = v^3$, $u^3 - v^3 = 2$ и 2 делится на $u - v > 0$. Значит, $u - v = 1$ или $u - v = 2$.

Первое приводит к противоречию:

$$2 = (v + 1)^3 - v^3 = 3v^2 + 3v + 1 \Rightarrow 1 = 3(v^2 + v),$$

что невозможно. Поэтому $u = v + 2$. Отсюда

$$2 = (v + 2)^3 - v^3 = 6v^2 + 12v + 8,$$

$$0 = v^2 + 2v + 1,$$

$$v = -1, \quad u = 1.$$

Это дает первое решение: $x = -1$, $y = 0$.

Во втором случае $y - 1$, $y + 1$, а следовательно, и x должны быть четными:

$$y - 1 = 2\xi, \quad y + 1 = 2\eta, \quad x = 2\zeta,$$

причем ξ и η взаимно просты и $\eta = \xi + 1$. Отсюда

$$8\zeta^3 = x^3 = (y + 1)(y - 1) = 4\xi\eta \Rightarrow 2\zeta^3 = \xi\eta.$$

Снова каждый делитель ζ должен войти только в одно из чисел ξ , η . Поэтому $\zeta = uv$ и либо $\xi = 2u^3$, $\eta = v^3$, либо $\xi = u^3$, $v = 2v^3$. Следовательно, либо

$$v^3 - 2u^3 = 1,$$

причем $x = 2uv$ и $y = 2\xi + 1 = 4u^3 + 1$, либо

$$2v^3 - u^3 = 1,$$

причем $x = 2uv$, $y = 2\xi + 1 = 2u^3 + 1$.

Воспользуемся теперь следующей теоремой (Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, Теория иррациональностей третьей степени, Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 11 (1940), стр. 261 и далее):

Уравнение $AX^3 + Y^3 = 1$, где A — целое число, кроме тривиального решения $X = 0$, $Y = 1$, имеет не более одного целочисленного решения.

В частности, уравнение $2X^3 + Y^3 = 1$, два решения которого мы без труда угадываем: $X = 0$, $Y = 1$ и $X = 1$, $Y = -1$, других целочисленных решений не имеет (цитируемые мною авторы сообщают, что этот результат доказал еще Л. Эйлер методом «бесконечного спуска»).

Уравнение $v^3 - 2u^3 = 1$ приводится к виду $2X^3 + Y^3 = 1$, если положить $X = -u$, $Y = v$. Поэтому либо $u = 0$, $v = 1$, откуда $x = 0$ и $y = +1$, либо $u = -1$, $v = -1$, откуда $x = 2$, $y = -3$.

Уравнение $2v^3 - u^3 = 1$ приводится к виду $2X^3 + Y^3 = 1$, если положить $X = v$, $Y = -u$. Поэтому либо $v = 0$, $u = -1$, откуда $x = 0$ и $y = -1$, либо $v = 1$, $u = 1$, откуда $x = 2$, $y = 3$.

241. Поскольку теорема Стюарта не входит в программу нашей школы, а ее формулировка довольно сложна и тяжеловесна для

того, чтобы считать основанное на ней решение изящным, я приведу другое решение (основанное, в сущности, на той же идее).

Пусть O (рис. 6) — центр окружности радиуса 15 см, O_1 — радиуса 10 см, O_2 — радиуса 5 см, O_3 — радиуса X см (искомая). Тогда $O_1O_3 = 10 + X$, $O_2O_3 = 5 + X$, $O_1O = 5$, $OO_2 = 10$ и $OO_3 =$

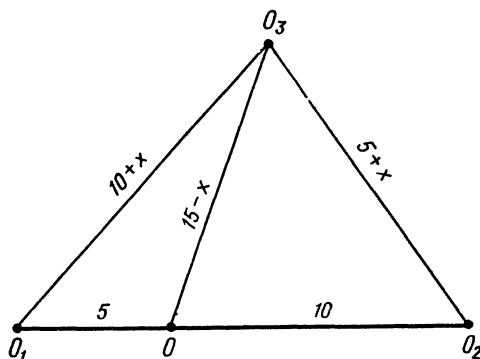


Рис. 6.

$= 15 - X$. По теореме косинусов, примененной к $\triangle O_1OO_3$ и $\triangle O_2OO_3$:

$$(15 - x)^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot (15 - x) \cos \angle O_3OO_2 = (x + 5)^2,$$

$$(15 - x)^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot (15 - x) \cos \angle O_3OO_2 = (x + 10)^2.$$

Исключая \cos , приходим к тому же уравнению, что и у автора.

242. Без комбинаторики: найдем коэффициент при x^n в разложении бинома $(1 + x)^{2n}$. С одной стороны, он равен C_{2n}^n , с другой,

$$(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n (1 + x)^n = (1 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n) \times \\ \times (1 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n),$$

и, подсчитывая коэффициенты членов степени x^n после раскрытия скобок, приходим к нужному равенству.

252. Можно обойтись и без ссылки на «малую теорему Ферма». Если ни одно из чисел a , b , c не делится на 3, то в равенстве

$$a^2 + b^2 = c^2$$

каждый член при делении на 3 дает остаток 1 ($(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm \pm 6k + 1$), что приводит к противоречию: $2 = 1$.

256. Признак делимости на 5 в шестеричной системе аналогичен признаку делимости на 9 в десятичной (см. начало комментария): число делится на 5 тогда и только тогда, когда сумма цифр его шестеричной записи делится на 5. В нашем случае сумма цифр

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15_{\text{дес}} = 23_{\text{шест}} \text{ делится на 5.}$$

264. Эти рассуждения доказывают лишь, что «если решение существует, то $-x = y = -v = u = 2$ », то есть что решение единственно. Логическая строгость требует для завершения решения про-

верки, что найденный набор чисел действительно удовлетворяет системе (1)–(4).

273. Это утверждение совсем нетривиально (см. Д. О. Шклярский и др., соч. цитируемое в комментарии к задаче 116, задача 104а). Используемое далее утверждение о периметре эквивалентно утверждению задачи 116 (см. тот же комментарий).

274. Для полноты решения заметим, что в квадрате со стороной $< \sqrt{2}$ нельзя разместить без перекрытия два квадрата со сторонами $\frac{\sqrt{2}}{2}$, хотя их общая площадь равна $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$.

275. Рассмотрим сначала случай, когда ни одна из точек не совпадает с нулем. Проведя радиусы-векторы точек z_i , мы получим не менее семи векторов с общим началом, а потому по крайней мере один из углов между ними будет $\leq \frac{360^\circ}{7} < 60^\circ$. Пусть это будет угол φ , образованный радиусами-векторами точек z_i, z_j , причем без ограничения общности $|z_i| \leq |z_j|$. По теореме косинусов

$$\begin{aligned} |z_i - z_j|^2 &= |z_i|^2 + |z_j|^2 - 2|z_i||z_j|\cos\varphi < \\ &< |z_i|^2 + |z_j|^2 - 2|z_i||z_j|\cos 60^\circ = \\ &= |z_j|^2 + |z_i|(|z_i| - |z_j|) \leq |z_j|^2 \leq |z_m|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $|z_i - z_j| < |z_m|$.

Если же одна из точек совпадает с нулем, скажем $z_n = 0$, то обязательно $|z_i| = |z_m|$ для $i = 1, \dots, n-1$ (в неравенстве условия задачи надо положить $j = n$). Если z_i не лежат в вершинах правильного шестиугольника, то опять-таки один из углов между их радиусами-векторами будет $< 60^\circ$, что позволяет провести предыдущее рассуждение.

277. Среди номеров $i = 1, 2, \dots, n$ обязательно найдутся такие, для которых $a_i = i$ (например, $i = 1$ обладает этим свойством). В каждом наборе $\{a_i\}$, удовлетворяющем условиям задачи, выделим последний из номеров, обладающих указанным свойством, и разобьем все наборы на n подмножеств:

$$\mathcal{A}_k = \{\{a_i\}; a_k = k, a_i < i, k < i \leq n\}, k = 1, \dots, n.$$

Каждый набор из \mathcal{A}_k разбивается на «голову» a_1, \dots, a_k и «хвост» a_{k+1}, \dots, a_n , причем их мы можем выбирать независимо друг от друга. Числа a_1, \dots, a_{k-1} удовлетворяют условию задачи, и потому их, а значит, и «головы» можно выбрать A_{k-1} способами (при $k = 1$ голова определяется однозначно и состоит только из a_1 ; A_0 по сделанному соглашению также равно 1).

Обозначим далее $\alpha_j = a_{k+j} - (k-1)$. Тогда

$$1 = a_k - (k-1) \leq a_1 = a_{k+1} - (k-1) \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{n-k},$$

и так как $a_{k+j} < k+j$, то $a_{k+j} \leq k+j-1$, откуда $\alpha_j \leq j$. Следовательно, последовательность α_j удовлетворяет условию задачи, а потому ее, а значит, и «хвост» можно выбрать A_{n-k} способами (снова при $n = k$ хвост определяется единственным образом и $A_0 = 1$).

Поэтому \mathfrak{A}_k содержит $A_{k-1}A_{n-k}$ наборов и

$$A_n = A_0 A_{n-1} + A_1 A_{n-2} + \dots + A_{n-1} A_0.$$

Авторский способ отыскания A_n из этого рекуррентного соотношения, основанный на вычислении производящей функции $f(x)$, очень изящен, но требует некоторого навыка в математическом анализе (надо доказать сходимость ряда и уметь раскладывать бином с дробным показателем):

$$\sqrt{1-4x} = [1+(-4x)]^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(-4x) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-4x)^2 + \dots$$

Попытка доказать формулу $A_n = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$ элементарными средствами по индукции приводит к сложным вычислениям с факториалами.

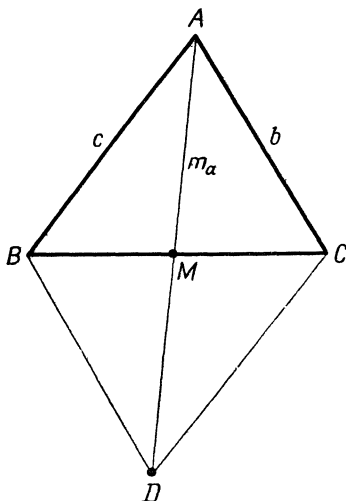


Рис. 7.

Для отыскания чисел A_n можно воспользоваться следующим аналогом треугольника Паскаля (см. задачу 179):

1	0						
1	1	0					
1	2	2	0				
1	3	5	5	0			
1	4	9	14	14	0		
1	5	14	28	42	42	0	
1	6	20	48	90	132	132	0
1	7	27	75	165	297	429	429

Здесь каждое число получается сложением двух: стоящего непосредственно над ним и стоящего слева от него. Последовательность

$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ стоит в этом треугольнике по диагонали под нулями, так что $A_0 = 1, A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 5, \dots, A_7 = 429$.

Доказательство предоставляется читателю.

278. Бывод формулы для биссектрисы см. в комментарии к задаче 61. Используемая ниже формула для медианы получается из теоремы о диагоналях параллелограмма: если $BM = MC$ и $DM = AM = m_a$ (рис. 7), то

$$2b^2 + 2c^2 = (2m_a)^2 + a^2.$$

283. Если $t > 1$, то $4^{y-x-1}(4^{z-2y+x+1} - t^2) > 0$, откуда

$$4^{z-2y+x+1} > t^2 > 1$$

и $z - 2y + x + 1 > 0$. Значит, обе скобки в равенстве

$$t - 1 = 4^{y-x-1}(2^{z-2y+x+1} + t)(2^{z-2y+x+1} - t)$$

суть нечетные числа. Поскольку все числа в правой части целые положительные, каждое из них ≥ 1 . Следовательно,

$$t - 1 \geq (2^{z-2y+x+1} + t) > 1 + t,$$

что невозможно.

285. См. Д. О. Шклярский и др. (соч., цитируемое в комментарии к задаче 89), задачи 106 и 107, а также ссылки в комментарии к задаче 116. Другие соотношения, встречающиеся в рассуждении, читателю проще доказать самому.

288. Эта задача имеет красивую геометрическую интерпретацию. Радиус-вектор комплексного числа $f(x)$ получается сложением векторов

$$\lambda^n, a_1\lambda^{n-1}, \dots, a_n,$$

причем каждый последующий вектор в этом ряду по длине не больше предыдущего и повернут по отношению к нему на один и тот же

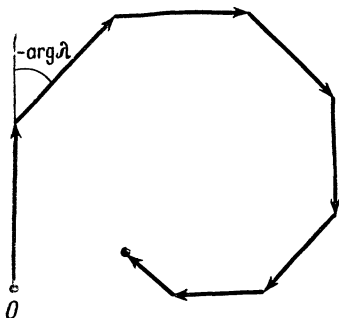


Рис. 8.

угол $-\arg \lambda$. Суммируя векторы, получаем спираль (рис. 9). Утверждение задачи состоит в том, что спираль может замкнуться, если только она правильный многоугольник.

289. Если ограничиться положительными числами, то это есть не что иное, как задача о «золотом сечении».

298. См., например, А. О. Гельфонд, Решение уравнений в целых числах, серия «Популярные лекции по математике», ГИТТЛ, М., 1956, стр. 55.

300. См. комментарий к задаче 285.

301. Проведем это рассуждение подробнее. Если в треугольнике известны основание l и сумма боковых сторон $a + b = d$ (а значит, известен и полупериметр $p = \frac{d + l}{2}$), то его высоту h можно оценить при помощи формулы Герона:

$$h = \frac{2S}{l} = \frac{2 \sqrt{p(p-l)(p-a)(p-b)}}{l} = \frac{\sqrt{(d^2 - l^2)(p-a)(p-b)}}{l} \leqslant \leqslant \frac{1}{l} \sqrt{d^2 - l^2} \left(p - \frac{d}{2} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - l^2}, \quad (1)$$

причем равенство имеет место только в случае $a = b$ [так как сумма $p - a + p - b = 2p - (a + b) = l$ постоянная, то произведение $(p - a)(p - b)$ максимально, когда сомножители равны].

Рассмотрим теперь n треугольников с одинаковыми основаниями l , боковыми сторонами a_i и b_i , $a_i + b_i = d_i$, и высотами h_i , причем известна сумма $D = \sum_i d_i = \sum_i (a_i + b_i)$. Надо доказать неравен-

ство

$$\sum_{i=1}^n h_i \leqslant n \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{D}{n} \right)^2 - l^2} = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - n l^2}. \quad (2)$$

Складывая неравенства (1) для всех i , получаем прежде всего оценку

$$\sum_{i=1}^n h_i \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sqrt{d_i^2 - l^2}. \quad (3)$$

Для того чтобы найти максимальное значение правой части, прибегнем к математическому анализу. Функция $f(x) = \sqrt{x^2 - l^2}$, $x \geqslant l$, вогнута (то есть любая дуга ее графика лежит над стягивающей ее хордой); в этом можно убедиться, проверив, что производная

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - l^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - l^2}} = \sqrt{1 + \frac{l^2}{x^2 - l^2}}$$

убывает с ростом x , или из геометрических соображений, поскольку график $f(x)$ является половиной ветви гиперболы (рис. 9).

Для вогнутых функций справедливо неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (4)$$

являющееся частным случаем так называемого *неравенства Иенсена*. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i \sqrt{d_i^2 - l^2} &= \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_i \sqrt{d_i^2 - l^2} \leq \\ &\leq \frac{n}{2} \sqrt{\left(\frac{\sum d_i}{n}\right)^2 - l^2} = \frac{n}{2} \sqrt{\left(\frac{D}{n}\right)^2 - l^2}, \end{aligned}$$

что вместе с (3) дает (2).

Обратимся теперь к той задаче, которая упомянута в примечании на стр. 65. В оригинальном тексте автор считал, что величина $\lambda(P)$ достигает максимума, когда P является центром тетраэдра, обосновывая это тем, что только в этом случае все треугольники

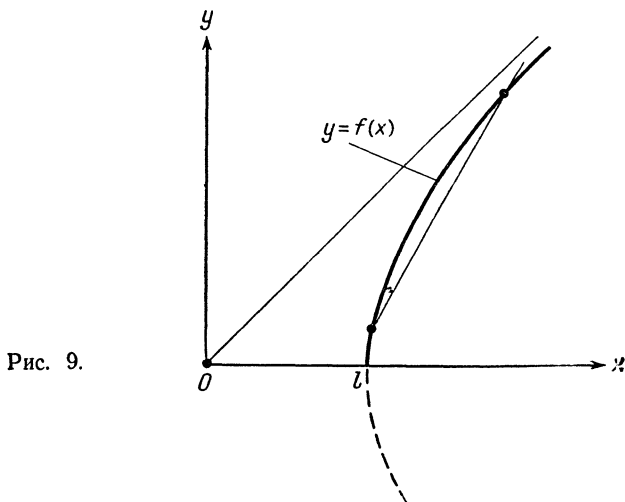


Рис. 9.

$A_i A_j P$ являются равнобедренными и равными между собой, и ссылаясь на только что доказанное утверждение. При этом $\lambda(P) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Позднее в том же журнале был приведен контрпример:

для некоторой точки P было явно вычислено $\lambda(P) > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, легко убедиться, что $\lambda(P)$ принимает значение $\frac{\sqrt{3}}{2}$, кроме центра еще и в вершинах тетраэдра. Чему равно максимальное значение $\lambda(P)$, мне неизвестно.

В рассматриваемом случае число треугольников равно 6 (по числу сторон тетраэдра) и сумма $\sum d_i$ боковых сторон равна ут-

роенной сумме $\sum_i p_i$ расстояний до вершин. Поэтому из (2) мы получаем

$$\frac{\sum x_{ij}}{\sum p_i} = \frac{3 \sum_{i=1}^6 h_i}{\sum_{i=1}^4 p_i} \leq \frac{3}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{6l}{\sum p_i} \right)^2}, \quad (5)$$

Однако сумма $\sum_{i=1}^4 p_i$ в центре тетраэдра принимает минимальное значение, а потому для всех остальных точек мы получаем заведомо завышенную оценку, которая, по всей видимости, не достигается. (Даже утверждение о минимальности $\sum_{i=1}^4 p_i$ не является тривиальным. Элементарное доказательство см.: I. Berkes, Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecksungleichung, *Elemente der Mathematik*, 22, № 6 (1967), 135—136.)

304. Выпуклость $f(x)$ проще всего проверить, записав ее в виде

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^M a_i^{x-\alpha} a_j^{\beta-x} = \sum_{i,j=1}^M \frac{a_j^{\beta}}{a_i^{\alpha}} \left(\frac{a_i}{a_j} \right)^x.$$

Каждое слагаемое имеет вид CA^x , и его вторая производная > 0 . Поэтому $f''(x) > 0$.

Далее, симметрия f означает, что имеет место тождество $f(x_0 + x) \equiv f(x_0 - x)$ (проверьте его!). Дифференцируя и полагая $x = 0$, находим, что $f'(x_0) = -f'(x_0)$, откуда $f'(x_0) = 0$ (так как $f'' > 0$, то x_0 — точка минимума, но это нам не понадобится). Поскольку $f'' > 0$, f' возрастает и $f'(x) > f'(x_0) = 0$ при $x > x_0$. Следовательно, f возрастает при $x > x_0$.

308. Эти утверждения следуют из рассмотрения первых двух столбцов, причем возможность $A = 0$ отпадает, ибо тогда из третьего столбца $2T + G \leq M \leq 3$, что при $T \neq 0$ невозможно. Кроме того, автор пропускает возможность $G = 5$. Теперь могло бы показаться, что надо проверять на простоту по таблице 180 чисел: в *GAME* для первых трех цифр имеется $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ возможностей и для E — пять (она нечетна). На самом деле это не так, ибо комбинации не произвольны. Простой анализ показывает, что *GAM* может быть лишь 742, 451, 752, 591, 892, и так как цифра E нечетна и должна быть отличной от уже имеющихся, то остается проверить в таблице простых лишь 17 чисел. Это количество можно еще сократить анализом третьего и четвертого столбцов.

311. Здесь нужна некоторая осторожность в перестановке суммирования и предельного перехода. Заметим, что $a_{n,k} = \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}$ не просто сходится к $\frac{2}{k\pi}$ при $n \rightarrow \infty$, но еще и $a_{n+1,k} > a_{n,k}$. Поэтому $S(n,p)$ также монотонна (каждое слагаемое растет и добав-

ляются новые положительные слагаемые), а значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n, p)$ (конечный или бесконечный) существует.

При $p > 1$

$$S(n, p) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \right)^p \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{k\pi} \right)^p < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi} \right)^p < \infty,$$

и потому $\lim S(n, p)$ конечен.

При $p \leq 1$ и $n > N$

$$S(n, p) > \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \right)^p > \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k\pi} \right)^p,$$

если n достаточно велико (для конечного числа членов можно подобрать единый номер n , при котором $\frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} > \frac{1}{k\pi}$). Отсюда

$$\lim S(n, p) > \sum_{k=1}^N \left(\frac{2}{k\pi} \right)^p \quad \text{при любом } N, \text{ что возможно лишь, если}$$

этот предел бесконечен.

312. В этом довольно расплывчатом рассуждении неявно предполагается, что конфигурация больших кругов обладает достаточной подвижностью. Круги нужно поворачивать так, чтобы при этом уже совмещенные точки пересечения оставались совмещенными и чтобы круги не сливались. Возможность такой свободы действий, конечно, нуждается в обосновании. В некоторый момент все точки пересечения могли бы, например, оказаться кратными, и конфигурация могла бы при этом не допускать никакого дальнейшего шевеления без рассыпания этих кратных точек, от чего число точек пересечения сразу же возрастает.

Невозможность подобной ситуации является ключевым местом и в том рассуждении, которое я хочу предложить.

Докажем, что если на сфере даны n различных больших кругов ($n > 2$), то либо все они пересекаются в паре диаметрально противоположных точек, либо найдется пара точек, в которых пересекаются ровно два больших круга.

Прежде всего заметим, что точки пересечения распадаются на диаметрально противоположные пары. Пусть всего таких пар m и в диаметрально противоположных точках i -й пары пересекается d_i больших кругов. Тогда в тех же точках сходится $2d_i$ дуг, и, значит, всего дуг, на которые разбиты наши большие круги, будет

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m 4d_i = 2 \sum_{i=1}^m d_i \quad (\text{каждая дуга соединяет две точки — отсюда}$$

коэффициент $1/2$; каждой паре отвечает $2d_i + 2d_i$ дуг).

Рассматриваемые большие круги разбивают сферу на N областей. Если среди этих областей есть хотя бы один двуугольник (то есть фигура, ограниченная двумя полукружностями и имеющая два угла в диаметрально противоположных точках), то все остальные

большие круги обязаны проходить через те же точки. В альтернативном случае каждая область ограничена не менее чем тремя дугами и потому удвоенное общее число дуг $\geq \frac{3}{2} N$ (каждая дуга

разделяет две области). Отсюда $N \leq \frac{4}{3} \sum_{i=1}^m d_i$.

Но по формуле Эйлера

$$2m - 2 \sum_{i=1}^m d_i + N = 2.$$

Значит,

$$2m - 2 \sum_{i=1}^m d_i + \frac{4}{3} \sum_{i=1}^m d_i \geq 2,$$

$$3m - \sum_{i=1}^m d_i \geq 3.$$

Это неравенство противоречиво, если все $d_i \geq 3$. Следовательно, найдется пара точек, в которых пересекаются только два больших круга.

Теперь докажем по индукции основное утверждение.

При $n = 2$ оно тривиально верно (два различных больших круга пересекаются в двух точках). Предположим, что это утверждение верно для конфигураций из $n - 1$ большого круга, $n - 1 \geq 2$. Рассмотрим n различных больших кругов. В соответствии с доказанным выше вспомогательным утверждением, если число точек пересечения этих кругов больше двух, то найдется пара диаметрально противоположных точек, в которых пересекаются только два круга нашей конфигурации. Удалим один из этих кругов, тогда число точек пересечения уменьшится по крайней мере на две. К оставшейся конфигурации из $n - 1$ круга применимо индуктивное предположение. Если все эти $n - 1$ кругов пересекаются в паре диаметрально противоположных точек, то в исходной конфигурации будет $2 + 2(n - 1) = 2n$ точек пересечения (как и в авторском решении). Если же в конфигурации из $n - 1$ круга будет больше двух точек пересечения, то по индукционной гипотезе их будет не менее $2(n - 1)$, а в конфигурации из n кругов — по крайней мере на 2 больше, то есть не менее $2n$.

328. При фиксированном шаге h конечные разности определяются так:

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x),$$

$$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x)), \quad k = 2, 3, \dots$$

Для данного набора точек $h = 1$, и, действуя по индукции, находим, что

$$\Delta^n f(0) = f(n) - C_n^1 f(n-1) + \dots = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j f(n-j),$$

что действительно совпадает с вычисленным выражением при $\hat{f}(x) = x^n$.

Если $f(x) = x^k$, то $\Delta f = (x+1)^k - x^k$ является полиномом степени $k-1$ со старшим членом $k \cdot x^{k-1}$. Отсюда мы заключаем, что если $f(x)$ — полином степени n со старшим членом x^n , то $\Delta^l f(x)$ — полином степени $n-l$ со старшим членом $n(n-1) \dots (n-l+1)x^{n-l}$. При $l = n$ получаем то, что нужно.

330. Я не смог ни доказать, ни опровергнуть возможность такого выбора.

332. Теорема Менелая состоит как раз в том, что равенство (1) вместе с соглашением о знаке направленных отрезков является необходимым и достаточным условием коллинеарности точек A', B, C , взятых соответственно на прямых AG, GB' и $B'A$. Ее доказательство и разнообразные применения см.: Д. О. Шклярский и др., (соч., цитируемое в комментарии к задаче 89, задачи 131 и 132). Аналогичное замечание относится к (2).

340. См., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, ГИТТЛ, М. — Л., 1948, стр. 170.

346. Некоторые оценки для величины $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ см. у Д. О. Шклярского и др. (соч., цитируемое в комментарии к задаче 116), задачи 111в, 117а.

349. Поскольку $2^{y+4} = 2^y \cdot 5 \cdot 3 + 2^y$, остатки от деления чисел 2^y на 5 периодически повторяются через четыре. Остаток 2 дают $2^1, 2^5$ и т. д.

Приведенное автором рассуждение неявно предполагает, что $x \geq 0, y \geq 0$ (а во второй части даже, что $x > 0$). Прямой проверкой убеждаемся, что $5^0 + 2 = 3 \neq 17^y$ ни при каком целом y . Если же x или y или оба вместе < 0 , то мы получаем одно из трех уравнений:

$$\begin{aligned} 17^{-y}(5^x + 2) &= 1, \quad x > 0, \quad y < 0, \\ (1 + 2 \cdot 5^{-x}) &= 17^y \cdot 5^{-x}, \quad x < 0, \quad y \geq 0, \\ (1 + 2 \cdot 5^{-x}) 17^{-y} &= 5^{-x}, \quad x < 0, \quad y < 0, \end{aligned}$$

неразрешимость которых в целых числах с указанными ограничениями на знаки очевидна.

364. Действительно, эти два числа имеют вид A^2 и 2^A . Если A больше четырех, то A^2 меньше 2^A .

365. $f(x)$ и $\ln f(x)$ возрастают и убывают одновременно. Но знак производной

$$(\ln f(x))' = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{\ln \frac{e}{x}}{x^2}.$$

совпадает со знаком $e - x$.

372. При повороте на бесконечно малый угол $d\varphi$ каждый из отрезков AO, BO, CO, DO замечает соответственно площадь

$$\frac{AO^2}{2} d\varphi, \quad \frac{BO^2}{2} d\varphi, \quad \frac{CO^2}{2} d\varphi, \quad \frac{DO^2}{2} d\varphi,$$

а все они вместе —

$$\frac{AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2}{2} d\varphi = 2r^2 d\varphi.$$

Интегрируя, получаем нужный результат.

Читателю предоставляется возможность получить тот же результат элементарными средствами.

376. Попробуйте выяснить, являются ли найденные решения единственно возможными или нет.

379. Из этого уравнения вытекает, что

$$PE : PM = R : r,$$

а известно, что геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных точек находятся в постоянном отношении, есть окружность.

386. Если плоскость четвертой грани образует с тремя остальными гранями углы α , β , γ , то $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, а площади граней связаны соотношениями

$$S_1 = S \cos \alpha, \quad S_2 = S \cos \beta, \quad S_3 = S \cos \gamma,$$

откуда $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2$.

387. Если пункт встречи находится в точке берега с абсциссой x , то доход перевозчика есть

$$F(x) = (f - 1) \sqrt{(x - 6)^2 + 3^2} - \sqrt{x^2 + 9^2}.$$

Исследуя эту функцию, получаем все приведенные в тексте утверждения.

390. См. в начале комментария признак делимости на $b - 1$.

391. Хотя предложенный автором рецепт очень нагляден, реализовать его практически — дело нелегкое.

392. Вот как это можно доказать (предполагая, что функция $R(\theta)$, а следовательно, и $S(\theta) = R(\theta + \pi)$ всюду дифференцируемы). Если $R(\theta) \neq S(\theta)$, то разность $f(\theta) = R(\theta) - S(\theta)$ должна принимать как положительные, так и отрицательные значения, ибо

$$\int_0^{2\pi} [R^2(\theta) - S^2(\theta)] d\theta = \int_0^{2\pi} R^2(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} S^2(\theta) d\theta = 0$$

(оба интеграла равны удвоенной площади, ограниченной нашей кривой). Воспользовавшись еще периодичностью $f(\theta)$, мы сможем найти такой интервал (α, β) , что

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0, \quad f(\theta) > 0, \quad \alpha < \theta < \beta.$$

По теореме Ролля существует такое c , $\alpha < c < \beta$, что $f'(c) = R'(c) - S'(c) = 0$. Поскольку $f(c) = R(c) - S(c) > 0$, равенство

$$\sqrt{R^2(c) + (R'(c))^2} = \sqrt{S^2(c) + [S'(c)]^2}$$

не может выполняться.

Заметим еще, что равенство $\sqrt{R^2 + (R')^2} = \sqrt{S^2 + (S')^2}$ можно получить и не опираясь на нестрогие геометрические соображения, а прямо из формулы для дифференциала длины дуги в полярных координатах. (В оригинале этого решения задачи 392 содержалась неточность.)

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Из предисловия автора	11
ЗАДАЧИ	13
РЕШЕНИЯ	81
Вместо послесловия	263

Ч. Тригг

ЗАДАЧИ С ИЗЮМИНКОЙ

Редактор А. Белевцева
Художник Л. Муратова
Художественный редактор Ю. Урманчеев
Технический редактор Н. Толстикова

Сдано в набор 29/IV 1975 г. Подписано к печати
6/XI 1975 г. Бумага тип. № 2 84×108¹/₃₂=4,75 бум. л.
15,96 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 14. Изд. № 12/8335.
Цена 87 коп. Зак. 753

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
198052. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

