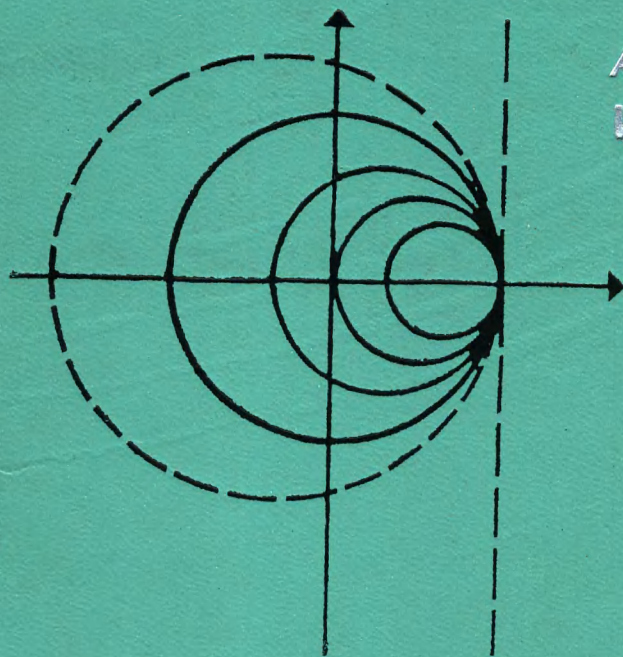


ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ РАДИО- ТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ



А. М. ЗАЕЗДНЫЙ
И. В. ГУРЕВИЧ

А. М. ЗАЕЗДНЫЙ, И. В. ГУРЕВИЧ

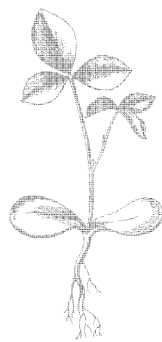
ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

(линейные цепи при гармонических
воздействиях)

*Издание второе,
исправленное и дополненное*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «СВЯЗЬ»
МОСКВА 1968



УДК 621.396.1.001.24

А. М. Заездный, И. В. Гуревич

**ОСНОВЫ РАСЧЕТА РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ.
ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ, ИЗДАНИЕ 2-е, ДОПОЛНЕННОЕ, 1968 г.**

В книге рассмотрены вопросы теории и расчета различных линейных цепей, колебательных контуров и электрических фильтров, цепей с распределенными постоянными. Впервые излагаются вопросы применения теории графов к расчету линейных электрических цепей.

Книга рассчитана на широкий круг инженеров электрической связи, она представляет также большой интерес для преподавателей и студентов электротехнических и радиотехнических вузов а также факультетов и вузов связи.

Иллюстраций 475. Таблиц 15. Библиографий 19.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Отличие настоящего издания от первого заключается, главным образом, в существенном расширении материала по применению теории сигнальных графов к расчету линейных цепей: этим вопросам посвящены шесть разделов (вместо одного раздела в первом издании). Целесообразность расширения материала по графам обоснована в разделе 11. Преимущества применения теории графов иллюстрируются расчетом довольно сложных цепей, содержащих лампы и транзисторы, работающие в линейном режиме.

Во втором издании устранены опечатки и другие мелкие недочеты первого издания; часть задач переработана.

Первые восемь разделов составлены А. М. Заездным, остальные — совместно А. М. Заездным и И. В. Гуревичем. Задачи 6.41—6.67, а также пояснительный текст к ним составлены А. А. Ланнэ.

Авторы выражают искреннюю признательность читателям и своим коллегам, которые обнаружили опечатки в первом издании и сделали, кроме того, ценные замечания по его тексту.

Все замечания и пожелания читателей следует направлять в издательство «Связь» (Москва-центр, Чистопрудный бульвар, 2).

АВТОРЫ

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Цель предлагаемой книги — помочь инженерам в решении задач, связанных с расчетом линейных радиотехнических цепей при гармонических воздействиях. Автор надеется, что принятая форма изложения наилучшим образом отвечает поставленным целям. Книга представляет собой нечто среднее между учебником и задачником и может быть определена как руководство к расчетам, содержащее большое число примеров и задач. Она может быть также полезна и студентам при изучении соответствующих курсов.

В каждом разделе даются краткие теоретические сведения, как правило, в виде расчетной процедуры; за этими сведениями следуют примеры расчетов в виде задач, значительная часть которых снабжена подробными решениями¹⁾.

В книге, в том числе, дан материал по таким радиотехническим расчетам, о которых еще мало известно в широких инженерных кругах. В первую очередь, к таким вопросам нужно отнести разд. 9 и 10 по синтезу цепей, разд. 11 по теории графов и последнюю часть разд. 6 по расчету фильтров. Нет сомнений в том, что эти вопросы заслуживают более широкой популяризации, чем это имеет место в настоящее время.

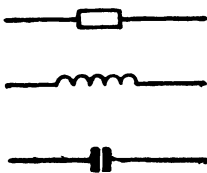
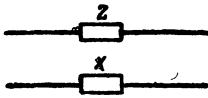
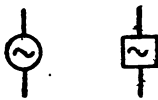
В дальнейшем предполагается издать книги подобного содержания по линейным цепям при сложных воздействиях и по нелинейным и параметрическим цепям, а также по расчету радиотехнических цепей при случайных воздействиях.

Автор пользуется случаем поблагодарить рецензентов И. С. Гоноровского и И. Г. Кляцкина за ряд ценных советов. Редактор книги А. А. Ланнэ тщательно отредактировал рукопись, проверил решения всех задач и, кроме того, составил задачи 6.41—6.67, а также пояснительный текст к ним; большой труд А. А. Ланнэ отмечается автором с глубокой признательностью. Автор приносит свою благодарность В. А. Билевичу за помощь в составлении задач разд. 8 и И. В. Гуревичу за помощь в составлении задач и текста разд. 9 и 10, а также за помощь в чтении корректур.

АВТОР

¹⁾ Задачи, снабженные решениями, отмечаются в условиях символом *).

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

| Обозначение | Содержание обозначения |
|---|---|
|  | <p>Активный, индуктивный и емкостный линейные элементы R, L, C</p> |
|  | <p>Комплексный или реактивный линейный элемент</p> |
| $N(i\omega), Z(i\omega)$ | <p>Комплексная функция вещественной переменной ω</p> |
| $N(\omega); Z(\omega)$ | <p>Модуль комплексной функции $N(i\omega), Z(i\omega)$</p> |
|  | <p>Генераторы напряжения и тока синусоидальной формы</p> |
| U, I \dot{U}, \dot{I} | <p>Амплитудные значения и значения комплексных амплитуд напряжения и тока</p> |

1.

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Частотные характеристики линейной системы дают ответ на вопрос о ее реакции на гармоническое воздействие и в общем виде определяются комплексной передаточной функцией, которую чаще называют комплексным коэффициентом передачи

$$N(i\omega) = \frac{\dot{X}_2}{\dot{X}_1},$$

представляющим собой отношение комплексных амплитуд реакции и воздействия. Смысл и размерность комплексного коэффициента передачи $N(i\omega)$ определяются схемой включения и соотношением заданных и искомых величин. В частных случаях роль $N(i\omega)$ может играть комплексный коэффициент передачи напряжения $K(i\omega)$, комплексное входное сопротивление $Z(i\omega)$, комплексная входная проводимость $Y(i\omega)$ и т. д., причем по определению

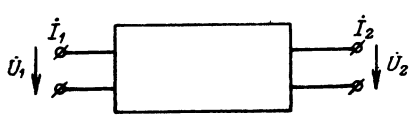


Рис. 1.1

$$K(i\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}; \quad Z(i\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1},$$
$$Y(i\omega) = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}.$$

Принятые обозначения ясны из рис. 1.1.
Комплексный коэффициент передачи ¹⁾

$$N(i\omega) = N_1(\omega) + i N_2(\omega) = N(\omega) e^{i\varphi(\omega)} \quad (1.1)$$

представляет собой запись двух характеристик: амплитудно-частотной и фазо-частотной.

¹⁾ В обозначениях $N(i\omega)$ и $N(\omega)$ операторы N представляют собою различные функции; эти функции совпадают, если $\text{Im}[N(i\omega)] \equiv 0$.

Первая характеристика $N(\omega)$ выражается модулем комплексного коэффициента передачи, а вторая $\varphi(\omega)$ — его аргументом:

$$\left. \begin{aligned} N(\omega) &= \sqrt{N_1^2(\omega) + N_2^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) &= \arctg \frac{N_2(\omega)}{N_1(\omega)} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

$\dot{X}_2 \rightarrow \dot{X}_1$

Нахождение частотных характеристик цепей, составленных из малого числа элементов, как правило, не встречает затруднений. Для цепей, образованных большим числом элементов, целесообразно пользоваться приемами общей теории четырехполюсников (разд. 2) и теории сигнальных графов (разд. 11—16).

В настоящем разделе рассматриваются задачи по нахождению частотных характеристик только цепей, составленных из малого числа элементов и представляющих собой цепи с сосредоточенными постоянными параметрами; частотные характеристики этих цепей выражаются дробно-рациональными функциями и могут быть представлены в виде отношения двух полиномов²⁾:

$$N(i\omega) = \frac{A(i\omega)}{B(i\omega)} = \frac{\sum_{n=0}^M a_n (i\omega)^n}{\sum_{n=0}^N b_n (i\omega)^n}.$$

Полагая $i\omega = p$, последнее выражение можно записать в виде

$$N(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{\sum_{n=0}^M a_n p^n}{\sum_{n=0}^N b_n p^n}. \quad (1.3)$$

Исследование свойств полиномов $A(p)$ и $B(p)$ позволяет ответить на многие вопросы, связанные с определением реакции линейной цепи на сложное воздействие. В целях изучения реакции цепи на гармоническое воздействие достаточно рассмотреть только некоторые общие свойства частотных характеристик.

Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики для подавляющего числа цепей связаны между собой однозначно (с точностью до постоянной). Указанная связь является свойством цепей минимально-фазового типа. Минимально-фазовой называется цепь, имеющая наименьший по абсолютной величине сдвиг фа-

¹⁾ Обозначение $\varphi_{\dot{X}_2 \rightarrow \dot{X}_1}$ следует читать так: сдвиг фаз величины \dot{X}_2 по отношению к \dot{X}_1 ; обозначение $\varphi_{\dot{X}_1 \rightarrow \dot{X}_2}$ отличается от $\varphi_{\dot{X}_2 \rightarrow \dot{X}_1}$ знаком.

²⁾ На полиномы числителя и знаменателя должны быть наложены некоторые ограничения, несущественные, однако, для излагаемого здесь материала.

зы для данной амплитудно-частотной характеристики при любой частоте ¹⁾).

Наряду с фазо-частотной характеристикой удобно пользоваться характеристикой «времени задержки» («времени замедления»), определяемой как производная фазо-частотной характеристики:

$$\tau(\omega) = \frac{d\varphi}{d\omega}. \quad (1.4)$$

В тех случаях, когда соотношения между амплитудами, определяющими амплитудно-частотную характеристику, меняются в небольших пределах, пользуются обычными числами и выражают эти изменения в процентах. Если же они меняются в широких пределах, целесообразно пользоваться логарифмическим масштабом. С этой целью вводятся логарифмические единицы измерения — непер и децибел, определяемые равенствами:

$$\left. \begin{aligned} N &= \ln \frac{A_1}{A_2}, \text{ непер} \\ D &= 20 \lg \frac{A_1}{A_2}, \text{ дб} \end{aligned} \right\}. \quad (1.5)$$

Здесь A_1 и A_2 — амплитудные значения напряжения или тока. Для перевода неперов в децибелы и обратно служат формулы:

$$\left. \begin{aligned} 1 \text{ непер} &= 8,69 \text{ дб} \\ 1 \text{ дб} &= 0,115 \text{ непер} \end{aligned} \right\}. \quad (1.6)$$

Логарифмическим масштабом пользуются и для функциональных зависимостей. В частности, широко пользуются понятием логарифмической амплитудной характеристики (ЛАХ), которая определяется как логарифм амплитудно-частотной характеристики.

Логарифмируя выражение (1.1), находим.

$$\ln N(i\omega) = \ln N(\omega) + i\varphi(\omega) \text{ } ^2). \quad (1.7)$$

Таким образом, логарифмическая частотная характеристика $\ln N(i\omega)$ составляется из логарифмической амплитудной характеристики $\ln N(\omega)$ и оставшейся неизменной фазо-частотной характеристики.

Преимущества ЛАХ перед АЧХ проявляются при решении задач со сложными схемами и в задачах аппроксимации характеристик; широко пользуются ЛАХ в теории фильтров (разд. 6).

В сложных схемах, образованных каскадным (см. разд. 2) со-

¹⁾ В частности, к цепям неминимально-фазового типа относятся многие «мостовые» схемы.

²⁾ Имеется в виду только главное значение логарифма.

единением m простых направленных¹⁾ схем, общий комплексный коэффициент передачи напряжения $K(i\omega)$ равен произведению частных комплексных коэффициентов передачи напряжения:

$$K(i\omega) = K_1(i\omega) K_2(i\omega) \dots K_m(i\omega).$$

Следовательно, для получения характеристик сложной схемы нужно в соответствии с ф-лой (1.1) амплитудно-частотные характеристики перемножить, а фазо-частотные — сложить:

$$\begin{aligned} K(\omega) &= K_1(\omega) K_2(\omega) \dots K_m(\omega); \\ \varphi(\omega) &= \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_m(\omega). \end{aligned}$$

Из выражения (1.7) следует, что при пользовании логарифмическими амплитудными характеристиками встречаются только операции сложения:

$$\left. \begin{aligned} \ln K(\omega) &= \ln K_1(\omega) + \ln K_2(\omega) + \dots + \ln K_m(\omega) \\ \varphi(\omega) &= \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_m(\omega) \end{aligned} \right\}, \quad (1.8)$$

Преимущества применения ЛАХ в задачах аппроксимации следуют из того, что значения амплитудно-частотных характеристик чисто реактивных элементов либо прямо, либо обратно пропорциональны частоте ω , иначе говоря, имеют вид функций $K_{1\omega}$ или $\frac{K_2}{\omega}$ (K_1 и K_2 — коэффициенты пропорциональности).

В соответствии с этим логарифмические амплитудные характеристики имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \ln K_1 + \ln \omega \\ \ln K_2 - \ln \omega \end{aligned} \right\}, \quad (1.9)$$

т. е. представляют собой прямые в системе координат, где по осям отложены коэффициент передачи и частота в логарифмическом масштабе. Аналогичные характеристики схем, содержащих не только реактивные, но и активные элементы, будут, конечно, отличаться от прямых; однако аппроксимация таких характеристик отрезками прямых дает лучшие результаты, чем аппроксимация отрезками прямых исходных характеристик.

На рис. 1.2 изображены ЛАХ для двух видов комплексных сопротивлений: с одним реактивным элементом $M(i\omega) = 1 + i\omega T$ и с двумя (независимыми) реактивными элементами $N(i\omega) = 1 + id \frac{\omega}{\omega_0} + \left(i \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$. Асимптотами ЛАХ являются прямые с накло-

¹⁾ Здесь имеются в виду так называемые «направленные» простые схемы, в которых передача сигнала может происходить только в одном направлении, т. е. схемы, входные сопротивления которых определяются параметрами данной схемы и не зависят от сопротивления нагрузки (например, электронные усилители); для «ненаправленных» схем нужно пользоваться формулами, приводимыми в разд. 2.

ном, соответствующим изменению $6 \frac{\partial \delta}{\text{окт}}$ или $20 \frac{\partial \delta}{\text{дек}}$ для цепей с одним реактивным элементом и $12 \frac{\partial \delta}{\text{окт}}$ или $40 \frac{\partial \delta}{\text{дек}}$ для цепей с двумя

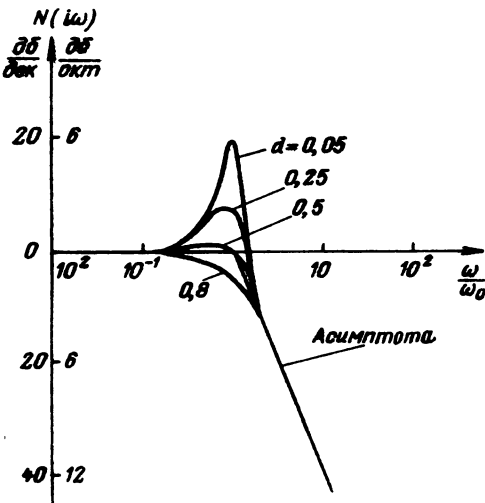
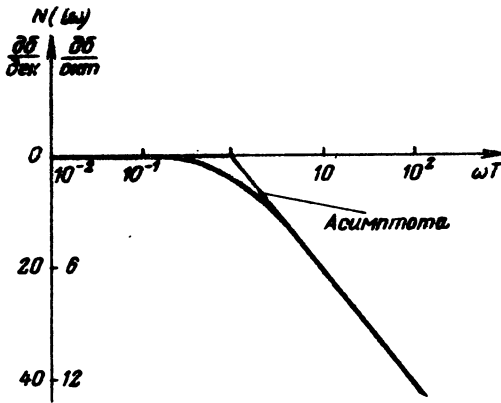


Рис. 1.2

реактивными элементами (см. задачи 1.31—1.33).

В практических расчетах часто пользуются не величиной $\ln N(\omega)$, выражаемой в неперлах, а пропорциональной ей величиной

$$L(\omega) = 20 \lg N(\omega) = 8,69 \ln N(\omega), \quad (1.10)$$

выражаемой в децибелах.

Как указывалось выше, частотные характеристики [ф-ла (1.2)] представляются двумя функциями — $N(\omega)$ и $\phi(\omega)$ и соответственно двумя кривыми. Однако используя полярную систему координат, эти кривые можно совместить. На такой характеристике длина вектора равна модулю $N(\omega)$, а угол наклона соответствует $\phi(\omega)$ ¹⁾. Положение вектора фиксируется для каждой данной частоты ω . Функция или кривая, описываемая концом вектора при изменении частоты, называется годографом частотной характеристики и содержит исчерпывающую информацию об амплитудно-частотной и фа-

зо-частотной характеристиках. На годограф наносится стрелка, показывающая направление изменения частоты, а также указываются точки, соответствующие конкретным значениям ω .

¹⁾ Положительным, как и всегда, считается угол поворота против часовой стрелки.

Годографы обычно строят по известным значениям $N(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. Аналитическое выражение этих кривых возможно только в задачах по изучению самых простых схем; для построения такого выражения нужно в соответствии с ф-лой (1.1) найти зависимость

$$N_2 = f(N_1), \quad (1.11)$$

представляющую собой запись функций $N_1(\omega)$ и $N_2(\omega)$ в параметрической форме (параметром является вещественная частота ω).

Как уже указывалось, в настоящем разделе рассматриваются частотные характеристики в плане их применения к анализу цепей при гармоническом воздействии. Вопросы распределения нулей и полюсов, связи между амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками, а также между действительной и мнимой частями комплексного коэффициента передачи, имеющие большое значение для анализа цепей при сложных воздействиях, здесь не рассматриваются.

Задачи расположены в следующей последовательности.

Первые пятнадцать задач (1.1—1.15) посвящены нахождению и исследованию частотных характеристик конкретных схем; следующие девять задач (1.16—1.24) содержат условия по выяснению некоторых общих свойств частотных характеристик и определению времени запаздывания; девять задач (1.25—1.33) связаны с вопросами применения логарифмических единиц измерения. Задачи 1.34—1.36 посвящены вопросам нахождения и аппроксимации логарифмических амплитудных характеристик, а задачи 1.37—1.44 — построению годографов частотных характеристик.

Задачи и упражнения

- 1.1.* Найти выражения амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик комплексного коэффициента передачи напряжения для цепи, изображенной на рис. 1.3а. Полученные выражения представить в виде графиков.
- 1.2.* Задана цепь рис. 1.3а. Данные цепи: $R=10^3$ ом, $C=10^3$ нф. Найти частоту f , при которой амплитуда напряжения на выходе будет составлять 0,8 амплитуды напряжения на входе, и определить сдвиг фаз между выходным и входным напряжениями на этой частоте.
- 1.3. Для цепей, изображенных на рис. 1.3 (б, в и г), найти выражения амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик комплексного коэффициента передачи напряжения, а затем построить соответствующие графики.
- 1.4.* Найти амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики комплексного коэффициента пе-

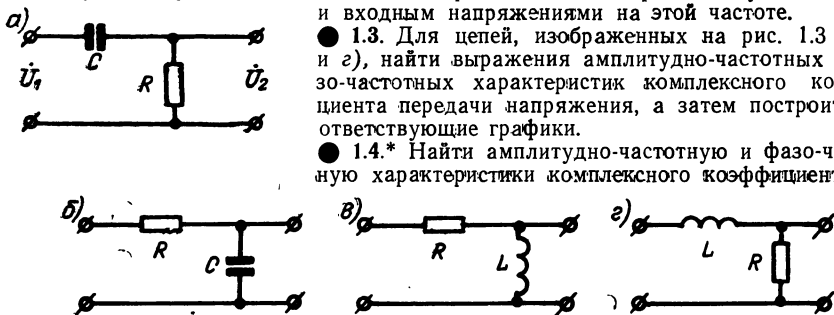


Рис. 1.3

редачи напряжения для цепи рис. 1.4, являющейся в определенных условиях (на высоких частотах) эквивалентной схемой лампового усилителя на резисторах. Построить графики для случая $R_1=R_2$.

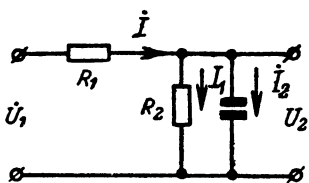


Рис. 1.4

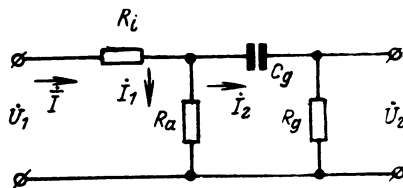


Рис. 1.5

● 1.5.* Найти амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики комплексного коэффициента передачи напряжения для цепи рис. 1.5, являющейся эквивалентной схемой лампового усилителя на резисторах для нижних частот. Затем найти приближенные выражения при $R_i \gg R_a$ и $R_g \gg R_a$ (пентоды) и построить графики.

● 1.6.* Амплитудно-частотная характеристика цепи рис. 1.4, как было установлено в задаче 1.4, определяется выражением

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + (\omega CR_1)^2}}$$

Определить диапазон частот, в котором коэффициент передачи уменьшается не более чем на 20% от максимального значения.

● 1.7.* Амплитудно-частотная характеристика цепи рис. 1.5, как было установлено в задаче 1.5, определяется выражением

$$K(\omega) = \frac{\omega C_g R_g}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_i}{R_a}\right)^2 + \left(1 + \frac{R_i}{R_a} + \frac{R_i}{R_g}\right)^2 \omega^2 C_g^2 R_g^2}}$$

Найти диапазон частот, в котором амплитуда напряжения на выходе будет составлять от 70 до 90% амплитуды напряжения на входе.

● 1.8. Найти выражения амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик комплексного входного сопротивления двухполюсников, изображенных на рис. 1.6.

● 1.9.* Задана цепь, состоящая из емкости C и сопротивления R (рис. 1.3а), причем $C = 100 \text{ нф}$, а $R = 10^3 \text{ ом}$. Найти, как изменится амплитуда напряжения

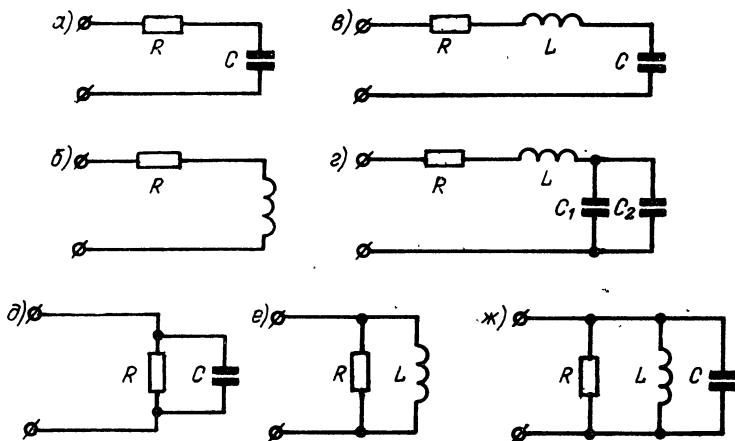


Рис. 1.6

на выходе при частоте $f=0,6 \text{ МГц}$, если к сопротивлению цепи параллельно подключить еще одно активное сопротивление, равное 400 Ом .

● 1.10.* Найти величины отклонений фазо-частотной характеристики от линейной для цепи рис. 1.3а (задача 1.1) в пределах изменения частоты от $\omega_1=0,8 \frac{1}{RC}$ до $\omega_2=1,2 \frac{1}{RC}$, если линейная характеристика получена разложением общего

выражения в степенной ряд Тэйлора вокруг точки $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

● 1.11. Найти фазо-частотные характеристики (между $\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1$ и $\dot{U}_1 \rightarrow I$) схемы простого колебательного контура без потерь (рис. 1.7) переходом к пределу при $R \rightarrow 0$. Найденные характеристики изобразить в виде графиков.

● 1.12. Показать, что емкость C_1 в схеме рис. 1.8 не влияет на вид амплитудно-частотной характеристики по напряжению [т. е. $K(\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$].

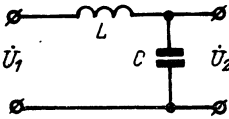


Рис. 1.7

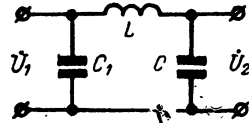


Рис. 1.8

● 1.13. Найти выражение комплексного коэффициента передачи напряжения для цепи рис. 1.9.

● 1.14.* Показать, что если в цепи рис. 1.10, используемой обычно в качестве фазовращателя, сопротивления Z_1 и Z_2 имеют чисто реактивный характер и, кроме того, имеет место равенство $R^2 = Z_1 Z_2$, то коэффициент передачи напряжения постоянен для всех частот ($0 < \omega < \infty$). Найти выражение фазо-частотной характеристики комплексного коэффициента передачи напряжения.

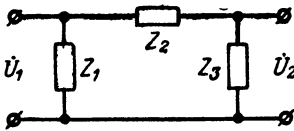


Рис. 1.9

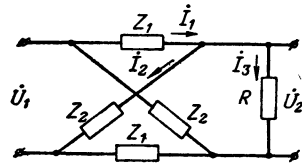


Рис. 1.10

● 1.15. Дана цепь рис. 1.11. Найти частоту, на которой сдвиг фаз между \dot{U}_2 и \dot{U}_1 равен нулю, а также найти отношение амплитуд $\frac{U_2}{U_1}$ на этой частоте.

● 1.16.* Доказать, что в выражении комплексного коэффициента передачи $N(i\omega) = N_1(\omega) + iN_2(\omega)$ вещественная часть характеристики $N_1(\omega)$ представляет собой четную функцию частоты, а мнимая часть $N_2(\omega)$ — нечетную.

● 1.17.* Показать, что для двухполюсника, составленного только из реактивных элементов, наклон графика зависимости реактивного сопротивления от

частоты всегда положителен, т. е. $\frac{dX}{d\omega} > 0$.

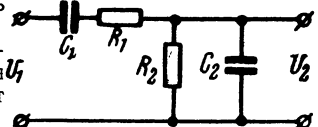


Рис. 1.11

● 1.18. В теории цепей пользуются понятием «постоянной передачи», представляющим собой логарифм комплексного коэффициента передачи. Таким образом, по определению

$$\Theta(i\omega) = \ln N(i\omega) = A(\omega) + i\Psi(\omega).$$

Показать связь между $A(\omega)$ и $\Psi(\omega)$, с одной стороны, и воздействием \dot{X}_1 и реакцией \dot{X}_2 — с другой.

● 1.19.* В теории цепей доказывается¹⁾, что связь между вещественной и мнимой частями комплексного коэффициента передачи минимально-фазовых схем дается следующими интегральными соотношениями:

$$N_1(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Omega N_2(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega; \quad N_2(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{N_1(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega.$$

Используя эти соотношения, найти выражения фазо-частотной характеристики идеального фильтра нижних частот, для которого

$$K(\omega) = K_0 \quad (0 < \omega < \omega_0); \quad K(\omega) = 0 \quad (\omega > \omega_0).$$

● 1.20.* Даны две цепи с комплексными коэффициентами передачи:

$$N_1(i\omega) = \frac{1 + i\omega T_1}{1 + i\omega T_2}; \quad N_2(i\omega) = \frac{1 - i\omega T_1}{1 + i\omega T_2};$$

первая из них является минимально-фазовой цепью.

Показать, что фазовый сдвиг первой цепи (по абсолютному значению) при любых соотношениях между T_1 и T_2 на всех частотах меньше фазового сдвига второй цепи.

● 1.21. Исходя из определения времени задержки [Ф-ла (1.4)], доказать, что для обеспечения одинакового запаздывания всех частотных составляющих сложного сигнала необходимо выполнить условие линейности фазо-частотной характеристики.

● 1.22. В задаче 1.4 было найдено выражение фазо-частотной характеристики эквивалентной схемы лампового усилителя на резисторах для высоких частот:

$$\varphi_{U_2 \rightarrow U_1} = -\arctg \frac{\omega CR_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}.$$

Найти частотную характеристику времени задержки для этой схемы.

● 1.23. Найти частотную характеристику времени задержки для симметричной схемы фильтра нижних частот (рис. 1.8; $C_1 = C_2 = \frac{1}{2} C$); фазо-частотная характеристика для этой схемы определяется выражением

$$\cos \varphi = 1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2,$$

где $\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ (см. разд. 6).

¹⁾ См., например, И. С. Гоноровский. Радиосигналы и переходные явления в радиочепях. Связьиздат, 1954, стр. 106—110.

- 1.24. Для фазовращателя, схема которого изображена на рис. 1.12, фазо-частотная характеристика определяется выражением

$$\varphi(\omega) = 2 \arctg \frac{2\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}$$

Найти частотную характеристику времени задержки.

- 1.25. Составить таблицу отношений входа и выхода, выраженных в обычных числах, неперах и децибелах. Взять следующие числа: 1, 10, 10², 10³, 10⁴, 10⁵, 10⁶, 10⁻¹, 10⁻², 10⁻³.

- 1.26.* Найти, какому соотношению амплитуд соответствует изменение (увеличение и уменьшение) на 1 *неп*.

- 1.27. Найти, какому соотношению амплитуд соответствует изменение (увеличение и уменьшение) на 1 *дб*.

- 1.28. Напряжение на частоте f_1 больше напряжения на частоте f_2 на 7%. Выразить это соотношение в неперах и децибелах.

- 1.29. Напряжение на частоте f_1 превышает напряжение на частоте f_2 на 0,1 *неп*. Выразить это превышение в процентах.

- 1.30. Найти, какому уровню в децибелах и неперах соответствует уровень $\frac{1}{\sqrt{2}}$, принятый для определения полосы пропускания колебательных контуров.

- 1.31.* Найти максимальное изменение коэффициента передачи напряжения для схемы рис. 1.3г при изменении частоты на октаву, т. е. в два раза, и выразить найденное число в децибелах и неперах на октаву.

Проделать тот же расчет при изменении частоты на декаду, т. е. в десять раз.

Выполнить аналогичные расчеты для схем рис. 1.3а, 1.3б и 1.3в.

- 1.32.* Найти максимальное изменение коэффициента передачи напряжения для схемы последовательного колебательного контура (рис. 1.6в) в децибелах и неперах на октаву и на декаду.

- 1.33. Найти изменения коэффициента передачи в децибелах на октаву и в децибелах на декаду для цепей, логарифмические амплитудные характеристики которых выражаются линейными зависимостями.

- 1.34.* Найти и построить ЛАХ для цепи рис. 1.3г, а затем аппроксимировать найденную функцию двумя отрезками прямых линий, исходя из условия асимптотического равенства аппроксимирующих и аппроксимируемой функций при очень низких и при очень высоких частотах. Определить наибольшее расхождение и выразить его в неперах и децибелах.

- 1.35.* Дана цепь, комплексный коэффициент передачи которой определяется выражением

$$K(i\omega) = \frac{1}{(1 + i\omega T_1)(1 + i\omega T_2)}$$

Найти выражение ЛАХ и аппроксимировать его отрезками прямых линий, считая, что $T_1 > T_2$.

- 1.36. Даны цепи, комплексные коэффициенты передачи которых определяются выражениями:

$$K_1(i\omega) = \frac{K_0}{i\omega T_0(1 + i\omega T_1)};$$

$$K_2(i\omega) = \frac{(1 + i\omega T_2)}{i\omega T_0(1 + i\omega T_1)} \quad (T_1 > T_2);$$

$$K_3(i\omega) = \frac{K_0(1 + i\omega T_2)}{i\omega T_0(1 + i\omega T_1)} \quad (T_1 < T_2).$$

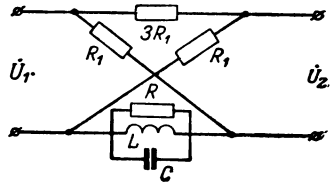


Рис. 1.12

- Найти выражения ЛАХ и аппроксимировать их отрезками прямых линий.
- 1.37.* Найти уравнения и построить кривую годографа комплексного коэффициента передачи напряжения схемы, изображенной на рис. 1.3в.
 - 1.38. Найти уравнение и построить кривые годографов комплексного коэффициента передачи напряжения для цепей, изображенных на следующих рисунках: 1) рис. 1.3а, 2) рис. 1.3б, 3) рис. 1.3г.
 - 1.39.* Построить годограф для входного сопротивления цепи рис. 1.3в.
 - 1.40.* Найти уравнение и построить годографы комплексного коэффициента передачи, соответствующего выражению

$$N(i\omega) = (1 + i\omega T_1)(1 + i\omega T_2)$$

для двух соотношений между T_1 и T_2 : 1) $T_1 = T_2$; 2) $T_2 = 3T_1$.

- 1.41.* Найти уравнение и построить годограф комплексного коэффициента передачи последовательного колебательного контура (рис. 1.6в), определяемого как

$$N(i\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2},$$

где \dot{U}_2 — напряжение на конденсаторе, для двух соотношений $\frac{\rho}{R}$ ($\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$):

- 1) $\frac{\rho}{R} = 1$; 2) $\frac{\rho}{R} = 4$.

- 1.42. Построить годограф комплексного коэффициента передачи напряжения схемы фазовращателя (см. задачу 1.14), модуль которого является постоянной величиной.

- 1.43.* Найти в общем виде уравнение годографа комплексного коэффициента передачи

$$N(i\omega) = (1 + i\omega T_1)(1 + i\omega T_2)(1 + i\omega T_3)$$

и затем построить график при $T_1 = T_2 = T_3 = T$.

- 1.44. Найти уравнение и построить годограф комплексного коэффициента передачи

$$N(i\omega) = (1 + i\omega T)^4.$$

2.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Системы уравнений четырехполюсника

Использование теории четырехполюсников позволяет упростить расчет линейных цепей путем типизации уравнений и табулирования их коэффициентов для наиболее распространенных схем.

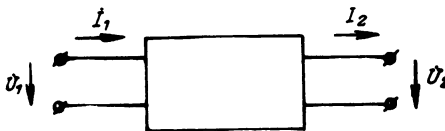


Рис. 2.1

Любой линейный четырехполюсник (рис. 2.1) можно охарактеризовать рядом уравнений, связывающих токи и напряжения на входе стоками и напряжениями на выходе¹⁾.

¹⁾ Принятое здесь направление стрелок соответствует [6]. В литературе широко используются и другие направления, что отражается только на знаках коэффициентов уравнений четырехполюсника. В настоящей книге всюду, где используются другие направления, это специально оговаривается.

Наибольшее распространение получили уравнения, связывающие «вход с выходом», которые обычно называют основными уравнениями четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.1)$$

В тех случаях, когда другие уравнения четырехполюсника (см. ниже) не используются, основные уравнения (2.1) удобнее представлять в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 \end{aligned} \right\}, \quad (2.2)$$

отличающемся от вида (2.1) только обозначениями коэффициентов.

Уравнения, связывающие напряжения на входе и выходе с соответствующими токами, записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.3)$$

а уравнения, связывающие токи входа и выхода с соответствующими напряжениями, в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.3a)$$

Так называемые смешанные или «гибридные» уравнения записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 &= H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{aligned} \right\}, \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= F_{11}\dot{U}_1 + F_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= F_{21}\dot{U}_1 + F_{22}\dot{I}_2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.4a)$$

Наконец, уравнения, связывающие «выход со входом», имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_2 &= B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 &= B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}_1 \end{aligned} \right\}. \quad (2.1a)$$

В общем случае коэффициенты A , Z , Y , H , F и B являются комплексными. В тех случаях, когда они являются вещественными, их обозначают буквами a , r , g , h , f и b .

Коэффициенты A , так же как и другие коэффициенты, можно определять для каждой конкретной схемы при помощи «опытов» холостого хода и короткого замыкания.

При холостом ходе $i_2=0$, и ур-ния (2.1) упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

При коротком замыкании $\dot{U}_2=0$ и ур-ния (2.1) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{12}i_2 \\ \dot{I}_1 &= A_{22}i_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Выражая напряжения и токи через параметры схемы и решая системы (2.5) и (2.6), получаем значения коэффициентов A .

Коэффициенты A можно также определять по известным входным сопротивлениям при холостом ходе и коротком замыкании (задача 2.12 и последующие).

По найденным значениям коэффициентов A можно определить другие коэффициенты при помощи формул, которые выводятся из сопоставления ур-ний (2.1) — (2.4).

Например, коэффициенты Z и Y выражаются через коэффициенты A по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= \frac{A_{11}}{A_{21}}; & Z_{12} &= -\frac{1}{A_{21}} \\ Z_{21} &= \frac{1}{A_{21}}; & Z_{22} &= -\frac{A_{22}}{A_{21}} \end{aligned} \right\}; \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= \frac{A_{22}}{A_{12}}; & Y_{12} &= -\frac{1}{A_{12}} \\ Y_{21} &= \frac{1}{A_{21}}; & Y_{22} &= -\frac{A_{11}}{A_{12}} \end{aligned} \right\}. \quad (2.8)$$

В табл. 2.1 даны формулы пересчета одних коэффициентов в другие. Между коэффициентами основных уравнений существует зависимость

$$|A| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1, \quad (2.9)$$

Таблица 2.1

СВЯЗЬ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ РАЗЛИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

| Коэффи- циенты | A | Z | Y | H | F | B |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|
| A | $A_{11} \quad A_{12}$ $A_{21} \quad A_{22}$ | $\frac{Z_{11}}{Z_{21}} - \frac{ Z }{Z_{21}}$ $\frac{1}{Z_{21}} - \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$ | $-\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \frac{1}{Y_{21}}$ $-\frac{ Y }{Y_{21}} \frac{Y_{11}}{Y_{21}}$ | $-\frac{ H }{H_{22}} \frac{H_{11}}{H_{21}}$ $-\frac{H_{22}}{H_{21}} \frac{1}{H_{21}}$ | $\frac{1}{F_{11}} - \frac{F_{12}}{F_{11}}$ $\frac{F_{21}}{F_{11}} - \frac{ F }{F_{11}}$ | $B_{22} - B_{12}$ $-B_{21} \quad B_{11}$ |
| Z | $\frac{A_{11}}{A_{21}} - \frac{1}{A_{21}}$ $\frac{1}{A_{21}} - \frac{A_{22}}{A_{21}}$ | $Z_{11} \quad Z_{12}$ $Z_{21} \quad Z_{22}$ | $\frac{Y_{22}}{ Y } - \frac{Y_{12}}{ Y }$ $-\frac{Y_{21}}{ Y } \frac{Y_{11}}{ Y }$ | $\frac{ H }{H_{22}} \frac{H_{12}}{H_{22}}$ $-\frac{H_{21}}{H_{22}} \frac{1}{H_{22}}$ | $\frac{1}{F_{21}} - \frac{F_{22}}{F_{21}}$ $\frac{F_{11}}{F_{21}} - \frac{ F }{F_{21}}$ | $-\frac{B_{22}}{B_{21}} \frac{1}{B_{21}}$ $-\frac{1}{B_{21}} \frac{B_{11}}{B_{21}}$ |
| Y | $\frac{A_{22}}{A_{12}} - \frac{1}{A_{12}}$ $\frac{1}{A_{12}} - \frac{A_{11}}{A_{12}}$ | $\frac{Z_{22}}{ Z } - \frac{Z_{12}}{ Z }$ $-\frac{Z_{21}}{ Z } \frac{Z_{11}}{ Z }$ | $Y_{11} \quad Y_{12}$ $Y_{21} \quad Y_{22}$ | $\frac{1}{H_{11}} - \frac{H_{12}}{H_{11}}$ $\frac{H_{21}}{H_{11}} \frac{ H }{H_{11}}$ | $-\frac{ F }{F_{12}} \frac{F_{22}}{F_{12}}$ $-\frac{F_{11}}{F_{12}} \frac{1}{F_{12}}$ | $-\frac{B_{11}}{B_{12}} \frac{1}{B_{12}}$ $-\frac{1}{B_{12}} \frac{B_{22}}{B_{12}}$ |
| H | $\frac{A_{12}}{A_{22}} - \frac{F}{A_{22}}$ $\frac{1}{A_{22}} - \frac{A_{21}}{A_{22}}$ | $\frac{ Z }{Z_{22}} \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$ $-\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \frac{1}{Z_{22}}$ | $\frac{1}{Y_{11}} - \frac{Y_{12}}{Y_{11}}$ $\frac{Y_{21}}{Y_{11}} \frac{ Y }{Y_{11}}$ | $H_{11} \quad H_{12}$ $H_{21} \quad H_{22}$ | $-\frac{F_{12}}{ F } \frac{F_{22}}{ F }$ $\frac{F_{11}}{ F } - \frac{F_{21}}{ F }$ | $-\frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{1}{B_{11}}$ $\frac{1}{B_{11}} \frac{B_{21}}{B_{11}}$ |
| F | $\frac{A_{21}}{A_{11}} - \frac{1}{A_{11}}$ $\frac{1}{A_{11}} - \frac{A_{12}}{A_{11}}$ | $\frac{1}{Z_{11}} - \frac{Z_{12}}{Z_{11}}$ $\frac{Z_{21}}{Z_{11}} \frac{ Z }{Z_{11}}$ | $\frac{ Y }{Y_{22}} \frac{Y_{12}}{Y_{22}}$ $-\frac{Y_{21}}{Y_{22}} \frac{1}{Y_{22}}$ | $\frac{H_{22}}{ H } - \frac{H_{12}}{ H }$ $-\frac{H_{21}}{ H } \frac{H_{11}}{ H }$ | $F_{11} \quad F_{12}$ $F_{21} \quad F_{22}$ | $-\frac{B_{21}}{B_{22}} \frac{1}{B_{22}}$ $\frac{1}{B_{22}} \frac{B_{12}}{B_{22}}$ |
| B | $A_{22} \quad -A_{12}$ $-A_{21} \quad A_{11}$ | $\frac{Z_{22}}{Z_{12}} - \frac{ Z }{Z_{12}}$ $\frac{1}{Z_{12}} - \frac{Z_{11}}{Z_{12}}$ | $-\frac{Y_{11}}{Y_{12}} \frac{1}{Y_{12}}$ $-\frac{ Y }{Y_{12}} \frac{Y_{22}}{Y_{12}}$ | $\frac{1}{H_{12}} - \frac{H_{11}}{H_{12}}$ $\frac{H_{22}}{H_{12}} - \frac{ H }{H_{12}}$ | $\frac{ F }{F_{11}} \frac{F_{12}}{F_{11}}$ $-\frac{F_{21}}{F_{11}} \frac{1}{F_{11}}$ | $B_{11} \quad B_{12}$ $B_{21} \quad B_{22}$ |

Примечания: 1. $|Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$; $|Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$ и т. д.

2. $|Z| = -\frac{A_{12}}{A_{21}}$; $|Y| = -\frac{A_{21}}{A_{12}}$; $|H| = -\frac{A_{11}}{A_{22}}$;

$|F| = -\frac{A_{22}}{A_{11}}$; $|A| = 1$; $|B| = 1$.

которая для симметричного четырехполюсника ($A_{11}=A_{22}$) упрощается:

$$|A| = A_{11}^2 - A_{12}A_{21} = 1. \quad (2.10)$$

Входное сопротивление четырехполюсника находится из основных уравнений

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{i_1} = \frac{A_{11}Z_2 + A_{12}}{A_{21}Z_2 + A_{22}}, \quad (2.11)$$

где $Z_2 = \frac{\dot{U}_2}{i_2}$ — сопротивление нагрузки.

Выходное сопротивление рассчитывается по формуле

$$Z_{\text{вых}} = \frac{A_{22}Z_{\text{вн}} + A_{12}}{A_{21}Z_{\text{вн}} + A_{11}}, \quad (2.11a)$$

где $Z_{\text{вн}}$ — внутреннее сопротивление генератора.

Входные сопротивления четырехполюсника для режимов холостого хода и короткого замыкания определяются выражениями:

$$Z_{\text{хх}} = \frac{A_{11}}{A_{21}}; \quad Z_{\text{кз}} = \frac{A_{12}}{A_{22}}. \quad (2.12)$$

Формула для комплексного коэффициента передачи напряжения имеет вид

$$K(i\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_2}}. \quad (2.13)$$

Для ненагруженного четырехполюсника ($Z_2 = \infty$) последнее выражение упрощается

$$K(i\omega) = \frac{1}{A_{11}}. \quad (2.13a)$$

Из выражения (2.11) можно найти значение сопротивления нагрузки Z_2 при условии $Z_2 = Z_{\text{вх}}$. Четырехполюсники, отвечающие этому условию, называются согласованными. Для симметричного согласованного четырехполюсника соответствующее значение нагрузки определяется выражением

$$Z_2 = Z_{\text{вх}} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}},$$

которое обозначают символом Z_c и называют характеристическим сопротивлением.

Для согласованных четырехполюсников вводят понятие характеристической постоянной передачи g , определяемой следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} e^g &= \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{i_1}{i_2} \\ g &= \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = a + ib \\ a &= \ln \frac{U_1}{U_2} \\ b &= \varphi_{\dot{U}_1 \rightarrow \dot{U}_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Величина a , измеряемая в неперх, называется коэффициентом затухания (или «затуханием»), а величина b , измеряемая в радианах, — коэффициентом фазы (или «фазой»). Этими понятиями широко пользуются в теории фильтров (разд. 6) и теории длинных линий (разд. 7).

Пользуясь ур-ниями (2.1), (2.3) и (2.4), можно составить удобные формулы для расчета токов и напряжений по известным параметрам схемы, сопротивлению нагрузки, напряжению и внутреннему сопротивлению источника.

В табл. 2.2. дана сводка этих формул вместе со схемой. Все формулы выражены через коэффициенты A , определяемые по табл. 2.3.

Таблица 2.2

СВОДКА ФОРМУЛ

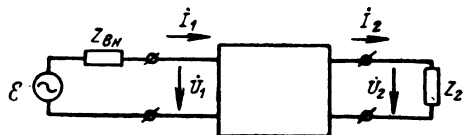
| Определяемая величина | Формула | № формулы |
|-----------------------|--|-----------|
| Входное напряжение | $\dot{U}_1 = \dot{\mathcal{E}} \frac{A_{11}Z_2 + A_{12}}{H_a}$ | 2.15 |
| Входной ток | $i_1 = \dot{\mathcal{E}} \frac{A_{21}Z_2 + A_{22}}{H_a}$ | 2.16 |
| Выходное напряжение | $\dot{U}_2 = \dot{\mathcal{E}} \frac{Z_2}{H_a}$ | 2.17 |
| Выходной ток | $i_2 = \frac{\dot{\mathcal{E}}}{H_a}$ | 2.18 |

| Определяемая величина | Формула | № формулы |
|---|---|-----------|
| Отношение выходного и входного напряжений (коэффициент передачи напряжения) | $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_2}};$ $\left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}\right)_{Z_2=\infty} = \frac{1}{A_{11}}$ | 2.19 |
| Отношение выходного и входного токов | $\frac{\dot{i}_2}{\dot{i}_1} = \frac{1}{A_{21}Z_2 + A_{22}};$ $\left(\frac{\dot{i}_2}{\dot{i}_1}\right)_{Z_2=0} = \frac{1}{A_{22}}$ | 2.20 |
| Отношение выходного тока к входному напряжению | $\frac{\dot{i}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{A_{11}Z_2 + A_{12}};$ $\left(\frac{\dot{i}_2}{\dot{U}_1}\right)_{Z_2=0} = \frac{1}{A_{12}}$ | 2.21 |
| Отношение выходного напряжения к входному току | $\frac{\dot{U}_2}{\dot{i}_1} = \frac{1}{A_{21} + \frac{A_{22}}{Z_2}}; \quad \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{i}_1}\right)_{Z_2=\infty} = \frac{1}{A_{21}}$ | 2.22 |
| Входное сопротивление | $Z_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{i}_1} = \frac{A_{11}Z_2 + A_{12}}{A_{21}Z_2 + A_{22}};$ $Z_{xx} = \frac{A_{11}}{A_{21}}; \quad Z_{кз} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \quad (Z_2=\infty) \quad (Z_2=0)$ | 2.23 |

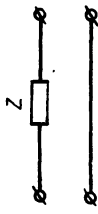
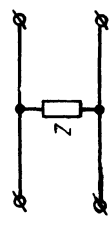
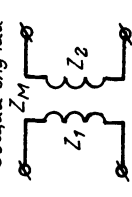
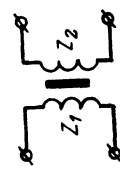
Примечание. $H_a = A_{22}Z_{вн} + A_{11}Z_2 + A_{21}Z_{вн}Z_2 + A_{12}$.

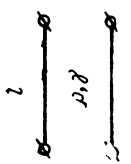
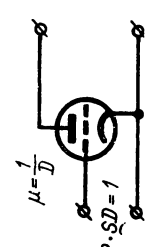
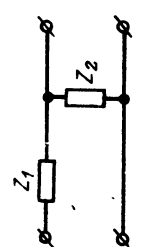
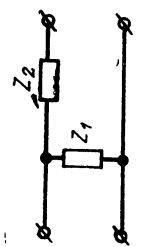
Схема

Величина H_a называется сопротивлением передачи [см. ф-лу (2.18)]



МАТРИЦЫ НЕКОТОРЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛУСНИКОВ

| № пп. | Схема | Матрица A | Матрица Z | Матрица Y |
|-------|--|---|---|---|
| 1 |  | $\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | — | $\frac{1}{Z} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ |
| 2 |  | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix}$ | $Z \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ | — |
| 3 | <i>Общий случай</i>  | $\pm \frac{1}{Z_M} \begin{bmatrix} Z_1 & Z_1 Z_2 - Z_M^2 \\ Z_M & Z_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} Z_1 & \mp Z_M \\ \pm Z_M & -Z_2 \end{bmatrix}$ | $\frac{1}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \begin{bmatrix} Z_2 \mp Z_M \\ \pm Z_M & -Z_1 \end{bmatrix}$ |
| 4 | <i>Случай жесткой связи</i>  | $\begin{bmatrix} \pm \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} & 0 \\ \pm \frac{1}{\sqrt{Z_1 Z_2}} & \pm \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} Z_1 & \mp \sqrt{Z_1 Z_2} \\ \pm \sqrt{Z_1 Z_2} & -Z_2 \end{bmatrix}$ | — |

| № пп. | Схема | Матрица A | Матрица Z | Матрица Y |
|-------|---|---|---|---|
| 5 |  | $\begin{bmatrix} \text{ch } \gamma l & \rho \text{ sh } \gamma l \\ \text{sh } \gamma l & \text{ch } \gamma l \\ \hline \rho & \end{bmatrix}$ | $\frac{\rho}{\text{sh } \gamma l} \begin{bmatrix} \text{ch } \gamma l & -1 \\ 1 & -\text{ch } \gamma l \end{bmatrix}$ | $\frac{1}{\rho \text{ sh } \gamma l} \begin{bmatrix} \text{ch } \gamma l & -1 \\ 1 & -\text{ch } \gamma l \end{bmatrix}$ |
| 6 |  | $\begin{bmatrix} -D & -\frac{1}{S} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ | <p style="text-align: center;">-</p> | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -S & -\frac{1}{R_t} \end{bmatrix}$ |
| 7 |  | $\begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ Z_2 & -Z_2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} & -\frac{1}{Z_1} \\ \frac{1}{Z_1} & -\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right) \end{bmatrix}$ |
| 8 |  | $\begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ \frac{1}{Z_1} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} Z_1 & -Z_1 \\ Z_1 & -(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \end{bmatrix}$ |

Продолжение таблицы 2.3

| № пп. | Схема | Матрица A | Матрица Z | Матрица Y |
|-------|-------|--|--|--|
| 9 | | $\begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_2}{Z_3} & Z_2 \\ \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1 + Z_2 + Z_3} & \times \\ Z_1 Z_3 & -Z_3(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix} \times$ | $\begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_3} & -\frac{Z_2 + Z_3}{Z_2 Z_3} \end{bmatrix}$ |
| 10 | | $\begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_3}{Z_2} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ Z_3 & -(Z_2 + Z_3) \end{bmatrix}$ | $\frac{1}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} \times \begin{bmatrix} Z_2 + Z_3 & -Z_2 \\ Z_2 & -(Z_1 + Z_3) \end{bmatrix}$ |
| 11 | | $\frac{1}{Z_2 - Z_1} \times \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & 2Z_1 Z_2 \\ 2 & Z_1 + Z_2 \end{bmatrix} \times$ | $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_1 - Z_2 \\ -(Z_1 - Z_2) & -(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix}$ | $\frac{1}{2Z_1 Z_2} \times \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_1 - Z_2 \\ -(Z_1 - Z_2) & -(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix}$ |

| № пп. | Схема | Матрица A |
|-------|-------|--|
| 12 | | $\begin{bmatrix} \frac{Z_2(Z_3 + Z_4) + Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4)}{Z_2Z_4} & \frac{Z_1Z_5 + Z_1Z_6 + Z_2Z_3}{Z_2} \\ \frac{Z_2 + Z_3 + Z_4}{Z_2Z_4} & \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2} \end{bmatrix}$ |
| 13 | | $\begin{bmatrix} \frac{Z_1(Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} & \frac{Z_4(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)}{Z_1Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} \\ \frac{Z_1 + Z_3 + Z_4}{Z_1Z_2 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} & \frac{Z_3(Z_1 + Z_4) + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} \end{bmatrix}$ |
| 14 | | $\begin{bmatrix} \frac{(Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_5) + Z_2Z_3}{Z_3Z_5} & \frac{Z_2Z_3 + Z_2Z_4 + Z_3Z_4}{Z_3} \\ \frac{Z_3(Z_1 + Z_2) + (Z_4 + Z_5)(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_1Z_3Z_5} & \frac{Z_3(Z_1 + Z_2) + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_1Z_5} \end{bmatrix}$ |

Применение матричного исчисления к теории четырёхполюсников ¹⁾

Матричное исчисление (матричная алгебра) упрощает расчет параметров сложных четырёхполюсников и, можно сказать, автоматизирует операции, производимые над системами уравнений.

Сложный четырёхполюсник можно рассматривать как сочетание элементарных четырёхполюсников, параметры которых известны. Параметры сложного четырёхполюсника соответствуют матрице, которая представляет собой результат действия над матрицами элементарных четырёхполюсников.

Напомним самые основные сведения из матричной алгебры.

1. Матрицей называется совокупность чисел, обычно записываемых в следующем виде:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m,n}. \quad (2.24)$$

Порядок матрицы указывает на число строк m и число столбцов n и обозначается обычно (m, n) . Индекс i обозначает принадлежность элемента a_{ij} к соответствующей строке, а индекс j — к столбцу.

При $m \neq n$ — матрица называется прямоугольной,

$m = n$ — квадратной,

$m = 1$ — матрицей-строкой,

$n = 1$ — матрицей-столбцом.

Матрицы равны друг другу, если равны все их соответственно расположенные элементы.

Любая матрица может быть сведена к квадратной путем добавления нулей:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}; \quad [ab] = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

2. Матрица порядка (m, n) , все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей порядка (m, n) и обозначается $[0]_{m,n}$.

3. Квадратная матрица порядка n , все элементы которой, кроме элементов главной диагонали ²⁾, равны нулю, называется диагональной матрицей порядка n . У диагональной матрицы $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

4. Диагональная матрица, каждый элемент диагонали которой равен единице, называется единичной матрицей порядка n . У единичной матрицы $a_{jj} = 1$ и $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Единичные матрицы обозначают как $[1]_n$.

Пр и м е р.

$$[1]_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Квадратные матрицы, у которых $a_{ij} = a_{ji}$, называются симметричными.

¹⁾ Приводимые здесь элементарные сведения из теории матриц предназначаются для использования не только в теории четырёхполюсников, но и в теории сигнальных графов (разд. 11—16).

²⁾ Главной диагональю называется диагональ, соединяющая левый верхний угол матрицы с правым нижним углом; вторая диагональ называется побочной.

6. Матрица $[A]^t$ называется транспонированной по отношению к матрице $[A]$, если в данной матрице $[A]=[a_{ij}]_{m,n}$ поменять местами строки и столбцы, т. е. $[A]^t=[a_{ij}]_{n,m}$.

У транспонированных матриц $a_{ij}=a_{ji}$.

Пример.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 12 & 19 & 3 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad [A]^t = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 5 \\ 4 & 19 & 2 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

7. Две матрицы $[A]=[a_{ij}]$ и $[B]=[b_{ij}]$ называются равными, если у них один и тот же порядок и

$$a_{ij} = b_{ij}$$

для всех i и j .

8. Сложение двух матриц определяется операцией нахождения третьей матрицы, каждый элемент которой равен сумме элементов исходных матриц,

$$[A] \div [B] = [C],$$

где

$$c_{ij} = a_{ij} \div b_{ij}.$$

Пример.

$$\left. \begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; [B] = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ [C] &= [A] \div [B] = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

9. Умножение матрицы $[A]=[a_{ij}]_{m,n}$ на матрицу $[B]=[b_{ij}]_{p,q}$ имеет смысл лишь в случае равенства n и p , т. е. если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Элементы матрицы-произведения $[C]$ находятся по следующему выражению:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Матрица $[C]$ имеет порядок (m, q) .

10. Система линейных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n &= f_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n &= f_2 \\ \dots & \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n &= f_n \end{aligned} \right\}$$

может быть записана в матричной форме

$$[B][X] = [F],$$

где $[B]$ — квадратная матрица коэффициентов:

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

а $[X]$ и $[F]$ — матрицы-столбцы неизвестных и свободных членов:

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad [F] = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Возможность представления систем линейных уравнений в матричной форме проверяется непосредственно с помощью правила умножения матриц (п. 9) и условия равенства матриц (п. 7).

11. Если над матрицами совершается какое-нибудь действие, то эти матрицы могут быть разбиты прямыми линиями на субматрицы и указанное действие производится так, как будто субматрицы являются элементами матрицы. Порядок разбиения произволен при условии, что после разбиения выполнение необходимого действия возможно.

Пример.

$$[A] = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}a_{12} & a_{13}a_{14} \\ \hline a_{21}a_{22} & a_{23}a_{24} \\ \hline a_{31}a_{32} & a_{33}a_{34} \\ \hline a_{41}a_{42} & a_{43}a_{44} \end{array} \right]; \quad [B] = \left[\begin{array}{c|c} b_{11}b_{12} & b_{13}b_{14} \\ \hline b_{21}b_{22} & b_{23}b_{24} \\ \hline b_{31}b_{32} & b_{33}b_{34} \\ \hline b_{41}b_{42} & b_{43}b_{44} \end{array} \right];$$

$$[C] = [A] + [B].$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix}, \text{ где } [A_{11}] = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{bmatrix}, [A_{13}] = \begin{bmatrix} a_{13}a_{14} \\ a_{23}a_{24} \end{bmatrix} \text{ и т. д.};$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] \\ [B_{21}] & [B_{22}] \end{bmatrix};$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [A_{11} + B_{11}] & [A_{12} + B_{12}] \\ [A_{21} + B_{21}] & [A_{22} + B_{22}] \end{bmatrix}.$$

Уравнения четырехполюсника могут быть записаны в матричном виде. Например, основные уравнения

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2, \quad \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2$$

можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

что легко проверить, пользуясь правилом умножения.

Аналогично можно записать и другие уравнения четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Как уже указывалось, матрицы сложных четырехполюсников можно находить, совершая операции над матрицами элементарных четырехполюсников.

В случае каскадного соединения четырехполюсников (рис. 2.2) общая матрица « A » равна матричному произведению матриц « A_i » отдельных четырехполюсников, взятому в том же порядке, в каком соединены эти четырехполюсники, т. е.

$$[A] = [A_1] \cdot [A_2] \cdot \dots \cdot [A_n]. \quad (2.31)$$

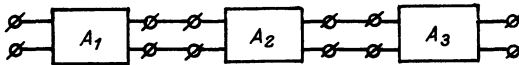


Рис. 2.2

В случае параллельного соединения четырехполюсников (рис. 2.3) общая матрица « Y » равна сумме матриц « Y_i » отдельных четырехполюсников, т. е.

$$[Y] = [Y_1] + [Y_2] + \dots + [Y_n]. \quad (2.32)$$

В случае последовательного соединения четырехполюсников (рис. 2.4) общая матрица « Z » равна сумме матриц « Z_i » отдельных четырехполюсников, т. е.

$$[Z] = [Z_1] + [Z_2] + \dots + [Z_n]. \quad (2.33)$$

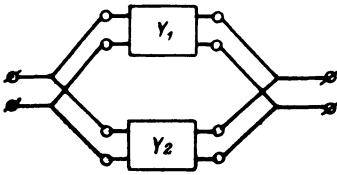


Рис. 2.3

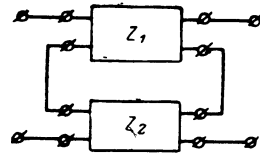


Рис. 2.4

При последовательно-параллельном соединении четырехполюсников (рис. 2.5) общая матрица « H » равна сумме матриц « H_i », т. е.

$$[H] = [H_1] + [H_2], \quad (2.34)$$

а при параллельно-последовательном (рис. 2.6) — общая матрица « F » равна сумме матриц « F_i », т. е.

$$[F] = [F_1] + [F_2]^1. \quad (2.35)$$

¹ Формулы (2.31)—(2.35) справедливы по отношению к цепям, образованным «регулярным соединением» четырехполюсников; встречаются также «нерегулярные соединения» [6].

В настоящем разделе задачи расположены в следующей последовательности.

В первой группе (2.1—2.11) собраны задачи, в которых определяются выражения и конкретные значения коэффициентов четырехполюсников, матрицы которых даны в табл. 2.3.

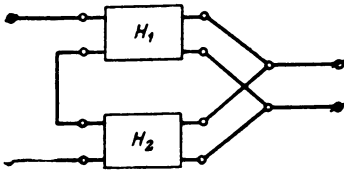


Рис. 2.5

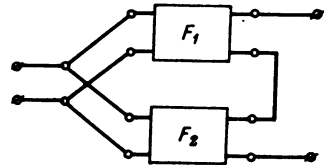


Рис. 2.6

Во второй группе (2.12—2.17) приведены задачи, условия которых содержат выяснения связей между коэффициентами и сопротивлениями входа и выхода схемы, а также между коэффициентами и характеристическими параметрами схемы.

В задачах третьей группы (2.18—2.28) ставятся условия по нахождению входных сопротивлений, токов и напряжений в конкретных четырехполюсниках, матрицы которых даны в табл. 2.3.

Задачи четвертой группы (2.29—2.32) состоят в нахождении общих выражений комплексного коэффициента передачи для четырехполюсников, матрицы которых даны в табл. 2.3. В этой группе рассматриваются также задачи на эквивалентность схем, которая устанавливается рассмотрением соответствующих матриц.

Пятая группа содержит задачи (2.33—2.47) по нахождению коэффициентов (или выражений комплексного коэффициента передачи) сложных четырехполюсников, матрицы которых находятся с помощью операций над матрицами табл. 2.3. В этой группе рассматриваются также задачи на составление эквивалентных схем.

Наконец, в шестой группе (2.48—2.51) собраны задачи, в которых должны быть найдены токи и напряжения в сложных четырехполюсниках.

Задачи и упражнения

● 2.1.* Для цепи, изображенной на рис. 2.7, вывести формулы для расчета коэффициентов A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} .

● 2.2.* Для цепи, изображенной на рис. 2.8, вывести формулы для расчета коэффициентов A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} .

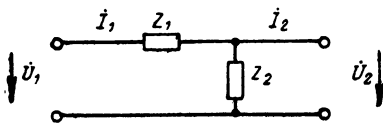


Рис. 2.7

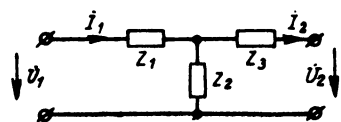


Рис. 2.8

- 2.3. Вывести формулы для расчета коэффициентов A для цепей, изображенных на рис. 2.9 (а и б).
- 2.4.* По найденным в задаче 2.1 коэффициентам A_{11} , A_{12} , A_{21} и A_{22} найти коэффициенты Z , Y , H , F и B .
- 2.5. По найденным в задаче 2.2 коэффициентам A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} определить коэффициенты Z , Y , H , F и B .

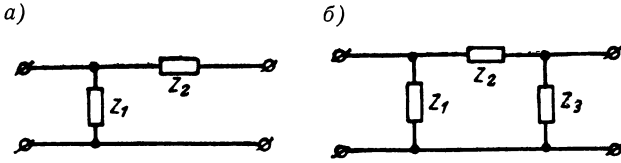


Рис. 2.9

- 2.6.* Дана цепь, изображенная на рис. 2.10. Определить коэффициенты A и, кроме того, проверить, удовлетворяется ли равенство $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$.

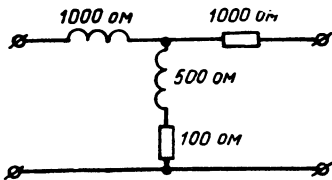


Рис. 2.10

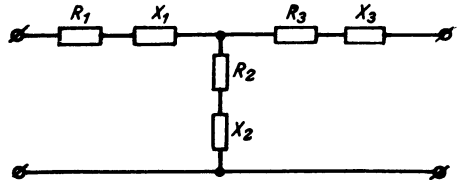


Рис. 2.11

- 2.7. Определить коэффициенты A на частоте f четырехполюсника, схема которого изображена на рис. 2.11. Проверить, кроме того, удовлетворяется ли соотношение

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1.$$

Данные для расчета приведены в таблице.

| № примера | R_1 ом | Параметры X_1 | R_2 ом | Параметры X_2 | R_3 ом | Параметры X_3 | Частота f гц |
|-----------|-------------|--------------------|-------------|--------------------|-------------|--------------------|-------------------|
| 1 | 10 | $L=0,318$ мкГн | 0 | $C=0,1$ мкФ | 10 | $L=0,318$ мкГн | 10 000 |
| 2 | 0 | $C=36\ 200$ пФ | 10* | $L=1,01$ Гн | 0 | $C=36\ 200$ пФ | 550 |
| 3 | 0 | $L=320$ мкГн | 10 | $L=100$ мкГн | 100 | 0 | 50 000 |

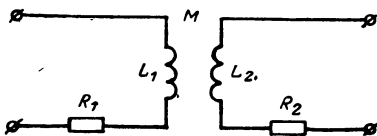


Рис. 2.12

- 2.8.* Определить коэффициенты A схемы, состоящей из двух связанных катушек (рис. 2.12), по следующим данным: индуктивность первой катушки $L_1=100$ мкГн, индуктивность второй катушки $L_2=400$ мкГн, активное сопротивление первой катушки $R_1=10$ ом, активное сопротивление второй катушки $R_2=40$ ом, коэффициент связи $K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 0,1$, частота $f=159$ кГц.

● 2.9. Определить коэффициенты A для схем рис. 2.13. Данные параметров указаны на схемах.

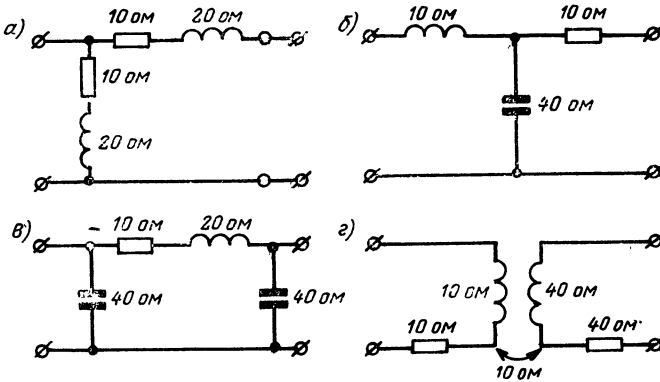


Рис. 2.13

● 2.10.* Определить на частоте $f=500$ гц коэффициенты A четырехполосника, схема которого изображена на рис. 2.14; по найденным коэффициентам определить коэффициенты Z и Y на той же частоте.

● 2.11. По найденным в задаче 2.7 (пример 1) коэффициентам A определить коэффициенты Z и Y .

● 2.12.* Вывести общие формулы для определения коэффициентов A симметричного четырехполосника по известным значениям входных сопротивлений холостого хода Z_{xx} и короткого замыкания $Z_{кз}$.

● 2.13.* По формулам, полученным в задаче 2.12, найти коэффициенты A для схемы рис. 2.15.

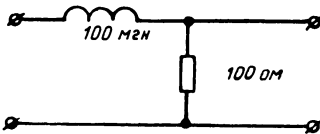


Рис. 2.14

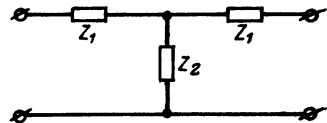


Рис. 2.15

● 2.14.* Изменить основные уравнения четырехполосника (рис. 2.16а),

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2 \end{aligned} \right\}$$

применительно к схеме, в которой генератор и нагрузку поменяли местами (рис. 2.16б), и найти выражение для выходного сопротивления.

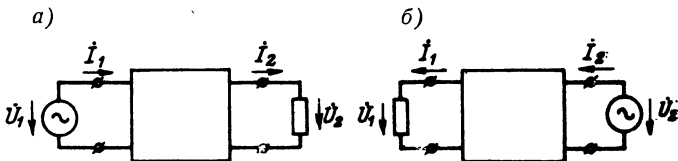


Рис. 2.16

● 2.15.* Вывести общие формулы для расчетов коэффициентов $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ несимметричного четырехполюсника по известным значениям сопротивлений входа в режиме холостого хода Z_{xx} и в режиме короткого замыкания $Z_{кз}$, а также сопротивления выхода в режиме короткого замыкания $Z_{вых.кз}$.

● 2.16. Выразить характеристическую постоянную передачи g (согласованного четырехполюсника) через коэффициент A_{11} . Составить систему, состоящую из двух уравнений, решение которой позволяет определить затухание a и фазу b через вещественную и мнимую части коэффициента A_{11} .

● 2.17. Составить матрицу симметричного четырехполюсника, в которой коэффициенты A выражены через характеристическую постоянную передачи g и характеристическое сопротивление Z_c . Рассмотреть далее цепь, состоящую из m каскадно соединенных согласованных четырехполюсников, и составить общую матрицу A , коэффициенты которой выражены через g, Z_c и m .

● 2.18.* Найти входное сопротивление четырехполюсника, схема которого изображена на рис. 2.14, если нагрузка представляет собой чисто активное сопротивление $Z_c = R_2 = 100 \text{ ом}$. Частота $f = 500 \text{ гц}$.

● 2.19. Найти значения входного сопротивления закороченного в нагрузке четырехполюсника по данным первых двух примеров задачи 2.7.

● 2.20.* Дан четырехполюсник, схема которого изображена на рис. 2.17. Известно, что на вход схемы подается синусоидальное напряжение, амплитуда которого $U_1 = 1 \text{ в}$. Найти амплитуду напряжения U_2 , а также сдвиг фаз между \dot{U}_1 и \dot{U}_2 .

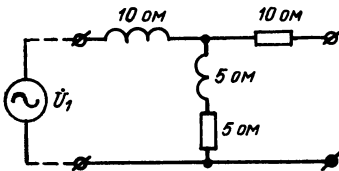


Рис. 2.17

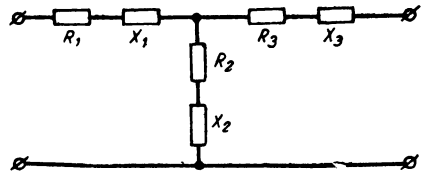


Рис. 2.18

● 2.21. Дан четырехполюсник, схема которого приведена на рис. 2.18. Найти абсолютное значение амплитуды напряжения на выходе U_2 при частоте f , если известна амплитуда напряжения на входе. Данные для расчета приведены в таблице.

| № примера | U_1 в | f гц | R_1 ом | Параметры X_1 | R_2 ом | Параметры X_2 | R_3 ом | Параметры X_3 |
|-----------|------------|-----------|-------------|-----------------------|-------------|------------------------|-------------|-----------------------|
| 1 | 10 | 15 000 | 10 | $L = 0,5 \text{ мГн}$ | 0 | $C = 0,05 \text{ мкФ}$ | 20 | $L = 1 \text{ мГн}$ |
| 2 | 20 | 1 000 | 0 | $C = 0,1 \text{ мкФ}$ | 10 | $L = 0,05 \text{ мГн}$ | 0 | $C = 0,1 \text{ мкФ}$ |
| 3 | 10 | 500 | 0 | $C = 0,5 \text{ мкФ}$ | 20 | $L = 1 \text{ мГн}$ | 0 | $C = 0,1 \text{ мкФ}$ |
| 4 | 100 | 50 000 | 100 | $L = 2,5 \text{ мГн}$ | 0 | $C = 0,5 \text{ мкФ}$ | 200 | $L = 5 \text{ мГн}$ |

● 2.22.* Дана цепь (рис. 2.19), состоящая из активных сопротивлений: $R_1 = 150 \text{ ом}, R_2 = 80 \text{ ом}, R_3 = 20 \text{ ом}, R_4 = 100 \text{ ом}, R_5 = 100 \text{ ом}$.

Найти напряжение U_2 , если $U_1 = 10 \text{ в}$.

● 2.23.* Четырехполюсник, схема которого изображена на рис. 2.20, нагружен резистором сопротивлением, равным $2,72 \text{ ом}$. Найти ток I_2 , если амплитуда напряжения генератора равна 10 в на частоте $f = 100 \text{ кгц}$. Внутреннее сопротивление генератора можно принять равным нулю.

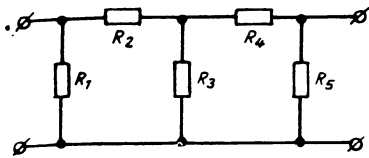


Рис. 2.19

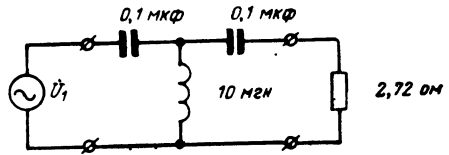


Рис. 2.20

● 2.24. Четырехполюсник, схема которого дана на рис. 2.21, нагружен на сопротивление R_H . Определить абсолютное значение амплитуды тока I_2 в нагрузке, если известны амплитуда напряжения генератора U_1 и рабочая частота f . Внутреннее сопротивление генератора равно нулю.

Данные для расчета приведены в таблице.

| № примера | f кгц | R_1 ом | Параметры X_1 | R_2 ом | Параметры X_2 | R_3 ом | Параметры X_3 | R_H ом | U_1 в |
|-----------|---------|----------|-----------------|----------|-----------------|----------|-----------------|----------|---------|
| 1 | 50 | 100 | $L=5$ мГн | 0 | $C=2000$ пФ | 100 | $L=5$ мГн | 10 | 100 |
| 2 | 0,5 | 0 | $C=0,1$ мкФ | 100 | $L=0,5$ Гн | 0 | $C=0,1$ мкФ | 5 | 50 |
| 3 | 100 | 50 | $L=2,5$ мГн | 0 | $C=5000$ пФ | 75 | $L=3$ мГн | 100 | 100 |

● 2.25. Четырехполюсник, составленный из активных сопротивлений (рис. 2.22), нагружен на сопротивление $R_H=200$ ом. Генератор, подключенный

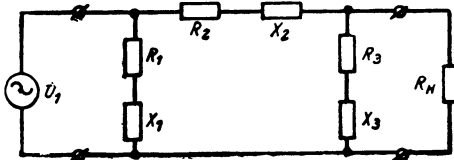


Рис. 2.21

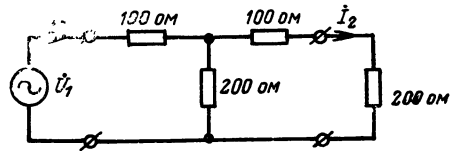


Рис. 2.22

ко входу четырехполюсника, развивает синусоидальное напряжение, амплитуда которого равна 50 в. Внутреннее сопротивление генератора можно принять равным нулю. Найти входной ток I_1 , выходной ток I_2 и напряжение на нагрузке U_2 .

● 2.26. Найти значения I_1 , I_2 и U_2 для схем, изображенных в таблице.

| № пп. | Схема | R_1 , ом | R_2 , ом | R_H , ом | U_1 , в |
|-------|-------|------------|------------|------------|-----------|
| 1 | | 500 | 1000 | 500 | 50 |

| № пп. | Схема | $R_1, \text{ом}$ | $R_2, \text{ом}$ | $R_H, \text{ом}$ | $U_1, \text{в}$ |
|-------|-------|------------------|------------------|------------------|-----------------|
| 2 | | 2000 | 1000 | 5000 | 50 |
| 3 | | 1000 | 1000 | 1000 | 100 |
| 4 | | 200 | 400 | 600 | 100 |

● 2.27. На рис. 2.23 дана эквивалентная схема усилителя звуковых частот на резисторах. Найти напряжение на сетке следующей лампы U_{g2} при следующих, данных.

$$U_{g1} = 1 \text{ в}, \mu = 50, R_i = 50\,000 \text{ ом}, R_a = 20\,000 \text{ ом}, \\ C_g = 0,1 \text{ мкф}, R_g = 0,5 \text{ Мом}, C_0 = 50 \text{ пф}, f_i = 1590 \text{ гц}.$$

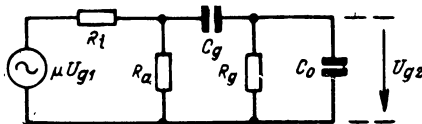


Рис. 2.23

● 2.28. На рис. 2.24 дана эквивалентная схема усилителя звуковых частот на трансформаторе. Найти напряжение на сетке следующей лампы U_{g2} при следующих данных:

$$U_{g1} = 0,1 \text{ в}, \mu = 35, R_i = 12 \cdot 10^3 \text{ ом}, r_1 = 1200 \text{ ом}, \\ L_{s1} = 0,1 \text{ гн}, L_1 = 57 \text{ гн}, r_2 = 4800 \text{ ом}, L_{s2} = 0,4 \text{ гн}, \\ R = 0,5 \text{ Мом}, C = 120 \text{ пф}, f = 4 \cdot 10^3 \text{ гц}.$$

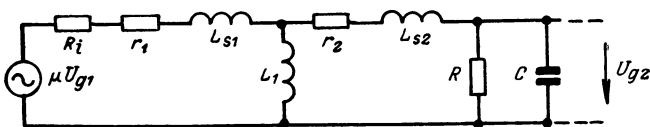


Рис. 2.24

● 2.29. Найти выражения модуля комплексного коэффициента передачи напряжения для цепей, изображенных на рис. 2.25 (а и б).

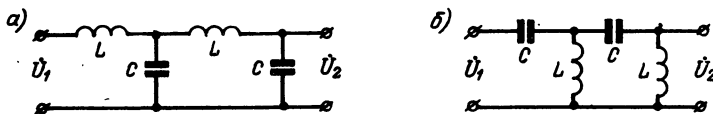


Рис. 2.25

● 2.30. Найти выражение $K(\omega) = \frac{U_2}{U_1}$ для цепи, изображенной на рис. 2.26.

● 2.31. Найти с помощью матриц табл. 2.3 комплексный коэффициент передачи

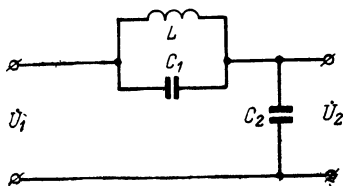


Рис. 2.26

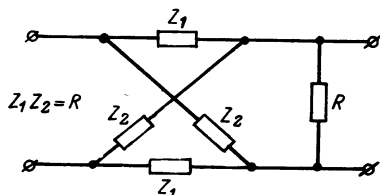


Рис. 2.27

напряжения цепи рис. 2.27 и сравнить решение и результат с решением и результатом задачи 1.14.

● 2.32. Найти выражение комплексного коэффициента передачи напряжения для цепи, изображенной на рис. 2.28.

● 2.33.* Показать возможность замены трансформатора с проводимостью (сопротивлением) на входе эквивалентным Т-образным (Π-образным) четырехполюсником (рис. 2.29 а и б) и рассчитать параметры эквивалентных схем по известным параметрам исходных схем.

● 2.34. Показать возможность замены подключенного к источнику напряжения трансформатора с $k=1$ эквивалентной схемой (рис. 2.30) и рассчитать параметры эквивалентной схемы по известным параметрам исходной, считая, что $L_1=L_2=L$.

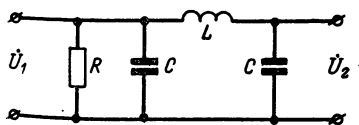


Рис. 2.28

● 2.35.* Определить коэффициенты А (т. е. найти матрицу А) четырехполюсника, схема которого изображена на рис. 2.31, по известным матрицам элементарных четырехполюсников (поз. 1 и 2 табл. 2.3).

● 2.36.* Найти матрицу А низкочастотного фильтра (рис. 2.32), пользуясь матрицами элементарных четырехполюсников табл. 2.3 (поз. 1 и 2).

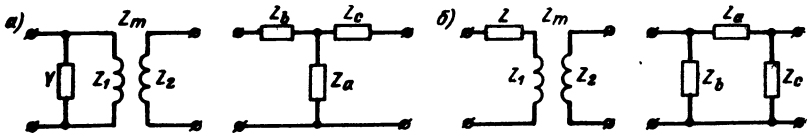


Рис. 2.29

● 2.37.* Найти матрицу A фильтра, схема которого изображена на рис. 2.33, по известным из табл. 2.3 матрицам Π - и T -образных четырехполюсников.

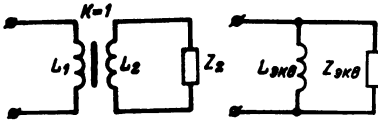


Рис. 2.30

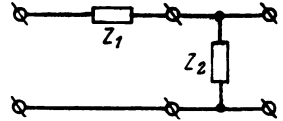


Рис. 2.31

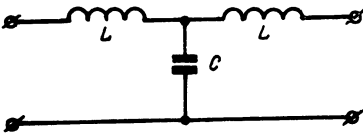


Рис. 2.32

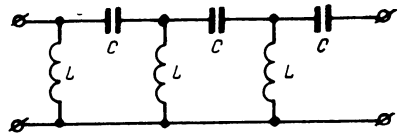


Рис. 2.33

● 2.38.* Найти матрицу для схемы рис. 2.34 по известным матрицам табл. 2.3 (поз. 1 и 10).

● 2.39.* Найти коэффициенты Z четырехполюсника, схема которого изображена на рис. 2.35, по известным матрицам элементарных четырехполюсников табл. 2.3 (поз. 1 и 3).

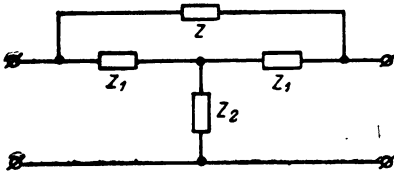


Рис. 2.34

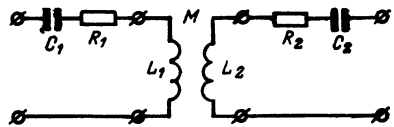


Рис. 2.35

● 2.40.* Найти матрицу A для усилителя, изображенного на рис. 2.36 (сеточные токи принимаются равными нулю), по известным матрицам табл. 2.3 (поз. 2 и 6) и затем получить выражение для коэффициента усиления.

● 2.41. Найти коэффициенты A для трехзвенной RC цепочки (рис. 2.37).

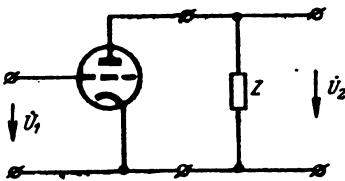


Рис. 2.36

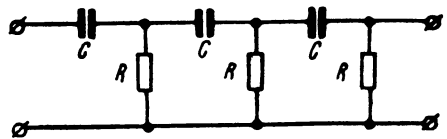


Рис. 2.37

- 2.42.* Найти коэффициент A_{11} для четырехзвенной RC цепочки (рис. 2.38).
- 2.43. Найти комплексный коэффициент передачи напряжения для цепи, изображенной на рис. 2.39.

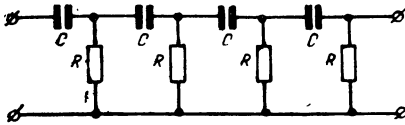


Рис. 2.38

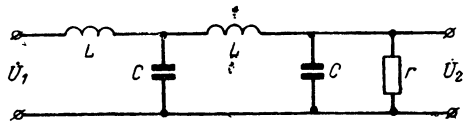


Рис. 2.39

- 2.44. Найти комплексный коэффициент передачи напряжения для схемы фазовращателя, изображенного на рис. 2.40, и составить выражения для амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик схемы.
- 2.45.* Для построения эквивалентной схемы транзистора, включенного по схеме с общей базой (рис. 2.41а), можно воспользоваться системой уравнений (2.3), в которой комплексные коэффициенты Z заменены активными сопротивлениями r , что справедливо при малых сигналах на низких частотах:

$$\begin{cases} U_1 = r_{11}I_1 + r_{12}I_2 \\ U_2 = r_{21}I_1 + r_{12}I_2 \end{cases}$$

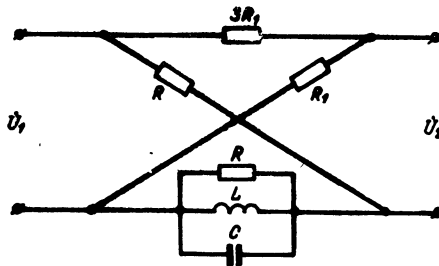


Рис. 2.40

Построенная по этим уравнениям эквивалентная схема изображена на рис. 2.41б¹⁾.

От этой схемы целесообразно перейти к схеме с генератором напряжения (рис. 2.41в) или к схеме с генератором тока (рис. 2.41г), в которых фигурируют сопротивления r_a, \bar{r}_b, r_k, r_m и коэффициент $\alpha = \frac{r_m}{r_k}$ (данные об этих сопротивлениях обычно приводятся в справочниках).

Составить формулы для расчета r_{11}, r_{12}, r_{21} и r_{22} по известным r_a, \bar{r}_b и r_m .

- 2.46.* Составить эквивалентную схему транзистора на основе использования Y -параметров. Направления токов и напряжений принять в соответствии с рис. 2.41.
- 2.47.* Составить эквивалентные схемы транзисторов на основе использования H -параметров и F -параметров. Направления токов и напряжений принять в соответствии с рис. 2.41.
- 2.48.* Доказать, что в случае каскадного соединения четырехполюсников общая матрица A равна произведению частных матриц A_i .

¹⁾ Направление тока I_2 (I_k) в этих схемах по установившейся в теории транзисторов традиции отличается от направления, принятого в общей схеме рис. 2.1.

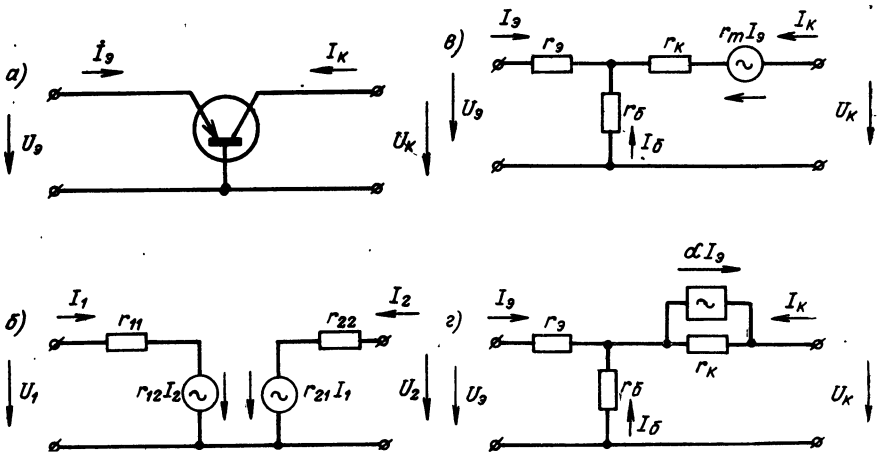


Рис. 2.41

- 2.49*. Доказать, что общая матрица Y для параллельного соединения двух четырехполюсников равна сумме матриц каждого четырехполюсника в отдельности.
- 2.50.* На рис. 2.42 приведена схема четырехполюсника, составленная из резисторов.

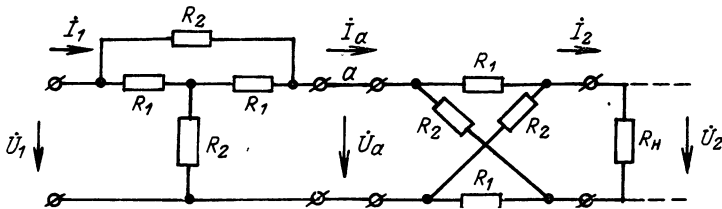


Рис. 2.42

Данные схемы следующие: $R_1=500 \text{ ом}$, $R_2=1000 \text{ ом}$, $R_H=1000 \text{ ом}$, $U_1=100 \text{ в}$. Внутреннее сопротивление генератора равно нулю.

Определить токи на входе и выходе схемы I_1 и I_2 , напряжение на нагрузочном сопротивлении U_2 , а также напряжение и ток в точках $a-a$: U_a и I_a .

- 2.51.* На схему широко применяемого в радиовещании аттенюатора (рис. 2.43) подается синусоидальное напряжение. Рассчитать уменьшение амплитуды напряжения на выходе (затухание) и выразить это уменьшение в децибелах.

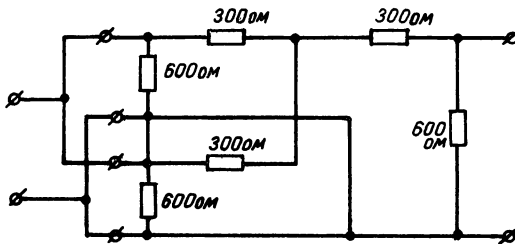


Рис. 2.43

3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Схема, изображенная на рис. 3.1, представляет собой последовательное соединение элементов L , C и R с генератором и сокращенно называется последовательным колебательным контуром.

Входное сопротивление последовательного контура равно:

$$\left. \begin{aligned} Z(i\omega) &= R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \\ &= R + iX = R(1 + i\xi) \\ Z(\omega) &= R\sqrt{1 + \xi^2} \end{aligned} \right\}, \quad (3.1)$$

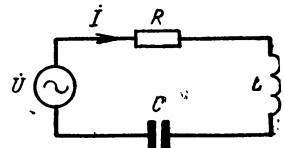


Рис. 3.1

где

$$\xi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (3.2)$$

При высоких частотах и небольших расстройках справедливо приближенное равенство.

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \approx 2(\omega - \omega_0)L = 2\Delta\omega L, \quad (3.3)$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.4)$$

Пользование приближенным равенством (3.3) существенно упрощает формулы и расчеты и не приводит к заметным ошибкам. Относительная ошибка δ тем меньше, чем выше частота, и может быть определена из формулы:

$$\delta = -\frac{\Delta\omega}{2\omega_0}. \quad (3.5)$$

Выражение для тока в контуре имеет вид:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z(i\omega)} = \frac{\dot{U}}{R(1 + i\xi)}. \quad (3.6)$$

При резонансе $\xi=0$ и

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}}{R}. \quad (3.7)$$

Отношение модуля тока при любой частоте к току при резонансной частоте называют уравнением резонансной кривой по току:

$$y_I = \frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (3.8)$$

Из выражения (3.2) с учетом приближенного равенства (3.3) следует, что

$$\xi \approx \frac{2\Delta\omega L}{R} = \frac{\Delta\omega}{\frac{R}{2L}} = \frac{\Delta\omega}{\alpha}. \quad (3.9)$$

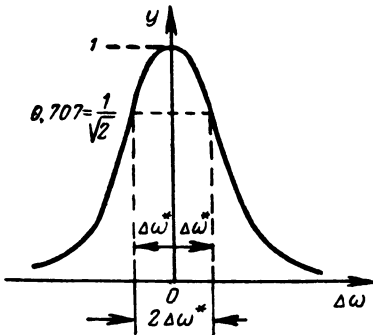


Рис. 3.2

Уравнение резонансной кривой при замене ξ переписывается в виде

$$y_I = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\alpha}\right)^2}}. \quad (3.10)$$

Из ф-лы (3.10) следует, что половина полосы пропускания равна

$$\Delta\omega^* = \pm \alpha. \quad (3.11)$$

Полоса пропускания контура условно определяется по высоте

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{рис. 3.2}).$$

Таким образом, выражение (3.9) для ξ с учетом ф-лы (3.11) можно переписать в виде

$$\xi = \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{|\Delta\omega^*|} = \frac{\Delta f}{|\Delta f^*|}. \quad (3.12)$$

Величину ξ называют обобщенной расстройкой.

Комплексный коэффициент передачи для схемы рис. 3.3 определяется выражением

$$K(i\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = -i \frac{\omega_0}{\omega} \frac{Q}{1 + i\xi} \approx -i \frac{Q}{1 + i\xi}, \quad (3.13)$$

где Q — добротность контура, равная

$$Q = \frac{\rho}{iR} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega^*}. \quad (3.14)$$

¹⁾ В формулах, содержащих $\xi \approx \frac{2\Delta\omega L}{R}$, знак приближенного равенства \approx , как правило, заменяется знаком точного равенства $=$.

Величина $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ называется характеристическим сопротивлением контура.

Коэффициент передачи (амплитудно-частотная характеристика) в соответствии с выражением (3.13) имеет вид

$$K(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Q}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (3.15)$$

При резонансе $K(\omega_0) = Q$. Составляя отношение $K(\omega)$ к $K(\omega_0)$, получаем уравнение резонансной кривой по напряжению

$$y_U = \frac{K(\omega)}{K(\omega_0)} = \frac{U_2}{U_{2_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (3.16)$$

которое для последовательного контура не отличается от уравнения резонансной кривой по току.

Фазовые характеристики легко определяются из выражений (3.6) и (3.13):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{U \rightarrow I}(\omega) &= \arctg \xi \\ \varphi_{U_2 \rightarrow U_1}(\omega) &= -\frac{\pi}{2} - \arctg \xi \end{aligned} \right\}. \quad (3.17)$$

Уравнение резонансной кривой по емкости имеет вид

$$y_C = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\Delta C}{C_0}\right)^2}}, \quad (3.18)$$

где $\Delta C = C - C_0$, а C_0 — значение емкости, соответствующее резонансу.

Полагая $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, можно получить формулу для определения добротности:

$$Q = \frac{C_0}{\Delta C^*}, \quad (3.19)$$

где $\Delta C^* = C_1 - C_0$, а C_1 — значение емкости, соответствующее $y = 0,707$.

Расчет контура обычно сводится к определению его параметров L , C и R по заданной резонансной частоте:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (3.20)$$

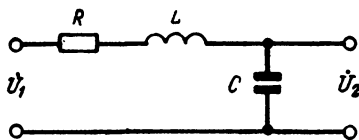


Рис. 3.3

и полосе пропускания $2\Delta f^*$:

$$2\Delta f^* = \frac{2\Delta\omega^*}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{R}{2L}. \quad (3.21)$$

Двух равенств (3.20) и (3.21) для определения трех параметров недостаточно, и поэтому одним из параметров приходится задаваться.

В настоящем разделе задачи сгруппированы по следующим признакам.

В первой группе (3.1—3.15) собраны задачи, в которых должны быть определены токи и напряжения, а также различные параметры контура.

Вторая группа (3.16—3.22) состоит из задач, в которых развиваются представления о взаимосвязях параметров контура.

Условия третьей группы задач (3.23—3.32) требуют вывода некоторых общих выражений; в этой группе также даны задачи, по характеру совпадающие с задачами первой группы, но являющиеся более сложными.

Задачи и упражнения

● 3.1.* К колебательному контуру последовательно подключен генератор синусоидальной эдс, развивающий амплитуду $U_1=1$ в. Контур настроен на частоту $f_0=3$ Мгц; емкость контура $C=60$ пф, а сопротивление $R=20$ ом. Определить следующие величины при расстройке $\Delta f=6$ кгц:

1. Амплитуду тока в контуре.
2. Величину реактивного сопротивления.
3. Амплитуду выходного напряжения (на конденсаторе).
4. Фазовые углы $\varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1}$, $\varphi_{\dot{U}_1 \rightarrow i}$.

5. Относительную ошибку, совершаемую при пользовании приближенными формулами.

● 3.2. Рассчитать по данным, приведенным в таблице для частоты f (длины волны λ , расстройки Δf), следующие величины:

1. Амплитуду тока в контуре.
2. Величину реактивного сопротивления.
3. Амплитуду напряжения на конденсаторе.
4. Фазовые углы: $\varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1}$, $\varphi_{\dot{U}_1 \rightarrow i}$.

5. Относительную ошибку δ , совершаемую при пользовании приближенными формулами.

| № примера | U_1 в | f_0 Мгц | λ_0 м | λ м | f Мгц | Δf кгц | L мкгн | C пф | R ом | Q |
|-----------|------------|--------------|------------------|----------------|------------|-------------------|-------------|-----------|-----------|-----|
| 1 | 1,0 | — | 300 | — | — | +2 | — | 160 | 20 | — |
| 2 | 2,0 | 3,2 | — | — | — | +3 | 100 | — | — | 80 |
| 3 | 0,6 | — | 600 | — | — | -8 | — | 300 | 16 | — |
| 4 | 0,2 | 12 | — | — | 12,03 | — | — | 80 | — | 70 |
| 5 | 0,1 | — | 1200 | — | — | +4 | — | 600 | — | 40 |

● 3.3.* К настроенному на частоту f_0 контуру, включенному емкостью на сетку лампы (рис. 3.4), подводится напряжение с амплитудой U_1 . Найти, при каких частотах f внешнего напряжения напряжение на сетке лампы U_2 будет больше U_1 в t раз.

Сопротивление контура равно R , емкость равна C и индуктивность — L .
Данные для расчета приведены в таблице.

| № примера | t | L мкГн | C пФ | R ом | f_0 МГц | λ_0 м |
|-----------|-----|-------------|-----------|-----------|--------------|------------------|
| 1 | 20 | — | 200 | 16 | — | 400 |
| 2 | 30 | — | 60 | 10 | — | 100 |
| 3 | 16 | 200 | — | 18 | 0,6 | — |
| 4 | 28 | — | 30 | 12 | — | 60 |
| 5 | 36 | — | 40 | 16 | — | 80 |

● 3.4. Рассчитать индуктивность контура, настроенного на частоту 8,2 МГц, если известно, что емкость контура составляет 40 пФ. Контур включен так, как показано на схеме рис. 3.5, причем емкость $C_{gf} = 12$ пФ.

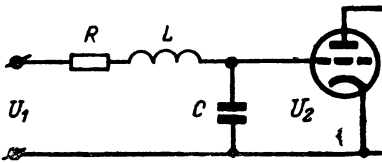


Рис. 3.4

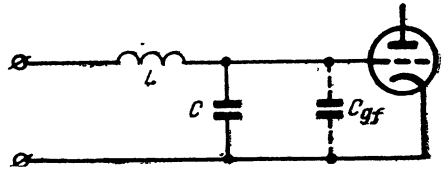


Рис. 3.5

● 3.5. Найти добротность контура Q по следующим измерениям: $f_0 = 475$ кГц, $f_1 = 478$ кГц. Здесь f_1 — значение частоты, соответствующей границе полосы пропускания.

● 3.6.* По данным предыдущей задачи найти максимальное и минимальное значения емкости конденсатора, обеспечивающего настройку в диапазоне частот от 472 до 478 кГц, если известно, что средняя емкость (при резонансе) $C_0 = 300$ пФ.

● 3.7. Рассчитать параметры двух элементов последовательного колебательного контура по заданной резонансной частоте f_0 , полосе пропускания $2\Delta f^*$ (или добротности контура Q) и известному параметру третьего элемента.

Данные для расчета приведены в таблице.

| № примера | f_0 МГц | $2\Delta f^*$ кГц | Q | Третий параметр |
|-----------|--------------|----------------------|-----|-----------------|
| 1 | 0,38 | — | 40 | $C = 395$ пФ |
| 2 | 0,8 | 9 | — | $R = 12$ ом |
| 3 | 1,6 | 20 | — | $R = 40$ ом |
| 4 | 4,0 | — | 60 | $L = 42$ мкГн |
| 5 | 12,0 | 8 | — | $C = 12,5$ пФ |

● 3.8.* При некоторой частоте f в последовательном контуре $X_C = 220$ ом, а $X_L = 178$ ом. Определить добротность контура, если известно, что $R = 4$ ом.

● 3.9.* Входной контур приемника должен настраиваться в диапазоне от $f_{\text{мин}}$ до $f_{\text{макс}}$. Найти пределы изменения емкости переменного конденсатора, который обеспечивает настройку в указанном диапазоне при неизменной индуктивности L .

● 3.10.* По данным предыдущей задачи рассчитать секции катушки индуктивности L контура с тем, чтобы конденсатор

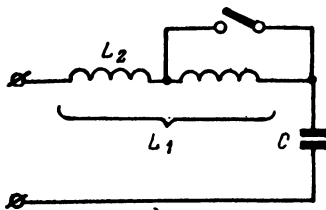


Рис. 3.6

переменной емкости 50–500 пф перекрывал диапазон частот от 100 до 800 кГц (рис. 3.6).

● 3.11. Контур с постоянной индуктивностью и постоянной основной емкостью должен настраиваться на заданную частоту f_0 (длину волны λ_0) при помощи подстроечного переменного конденсатора C_x , который может включаться последовательно или параллельно с основным конденсатором C . По приведенным в таблице данным вычислить значения C_x и указать способ включения конденсатора C_x .

| № примера | L мкГн | C пф | f_0 кГц | λ_0 м |
|-----------|-------------|-----------|--------------|------------------|
| 1 | 200 | 700 | — | 1000 |
| 2 | 500 | 420 | — | 500 |
| 3 | 100 | 1000 | — | 800 |
| 4 | 10 | 160 | — | 60 |
| 5 | 120 | 340 | 800 | — |

● 3.12.* Найти частоту f , при которой реактивное сопротивление контура имеет индуктивный характер и численно равно 30 Ом. Параметры контура: $L = 100$ мкГн, $C = 100$ пф.

● 3.13. Найти величину абсолютной расстройки Δf , при которой ток в контуре уменьшается до 0,5 своего значения при резонансе. Данные контура: $Q = 125$, $f_0 = 10^6$ Гц. Расчет вести по приближенной формуле с обобщенной расстройкой ξ и затем вычислить величину относительной ошибки. Найти также угол сдвига фаз между напряжением и током при вычисленной расстройке.

● 3.14. Частота генератора внешней эдс равна 1,2 МГц. При значениях емкости 140 пф и 145 пф амплитуда тока в контуре составляет 60% от максимальной амплитуды. Рассчитать индуктивное сопротивление катушки контура, а также активное сопротивление контура.

● 3.15. Дан контур, параметры которого равны: $L = 400$ мкГн, $C = 300$ пф. Добротность катушки, определяемая как $Q_L = \frac{\omega_0 L}{r_L}$ (где r_L — активное сопротивление, включенное последовательно с катушкой), равна 80; добротность конденсатора, определяемая как $Q_C = \frac{1}{\omega_0 C r_C}$ (где r_C — активное сопротивление, включенное последовательно с конденсатором), равна 1000. Амплитуда синусоидального напряжения равна 1 в.

Определить: резонансную частоту контура f_0 , характеристическое сопротивление ρ , сопротивления r_L и r_C , полное активное сопротивление контура $R = r_L + r_C$, добротность контура Q и амплитуду напряжения на конденсаторе U_C .

● 3.16.* Найти, при каком соотношении сопротивления контура R и внутреннего сопротивления R_i генератора в контуре выделяется максимальная мощность при резонансе.

● 3.17.* Найти отношение магнитной энергии колебательного контура при резонансе к энергии потерь за один период. Убедиться далее в том, что это отношение равно отношению электрической энергии к энергии потерь за один период.

● 3.18. Получить формулы для расчета L и C по известной частоте f и второму параметру, причем в этих формулах величина L должна быть выражена в мкГн, C — в пф, а f — в МГц.

● 3.19. Выразить обобщенную расстройку $\xi = \frac{\Delta\omega}{\alpha} = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ через $\Delta C = C - C_0$ вместо $\Delta\omega$; здесь C_0 — значение емкости при резонансе ($\Delta C \ll C_0$).

● 3.20. Найти время задержки $\tau = \frac{d\varphi}{d\omega}$ колебательного контура; определить далее время задержки τ_0 на резонансной частоте.

● 3.21.* Доказать справедливость равенства

$$Q = \frac{\omega_0}{2R} \left(\frac{dX}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0}$$

● 3.22.* Показать справедливость приближенного равенства (3.3) с помощью разложения реактивной составляющей $X(\omega) = X(\omega_0 + \Delta\omega)$ в ряд Тэйлора в окрестности резонансной частоты ω_0 .

● 3.23. Вывести точные выражения (т. е. при выводе не следует пользоваться приближенным равенством 3.3) резонансных кривых по току и напряжению для обычного последовательного контура. Найти частоту ω_m , при которой коэффициент передачи напряжения имеет максимальное значение.

● 3.24.* Найти точное выражение коэффициента передачи для контура, изображенного на рис. 3.7. Вывести далее формулы для расчета резонансной частоты и коэффициента передачи на резонансной частоте.

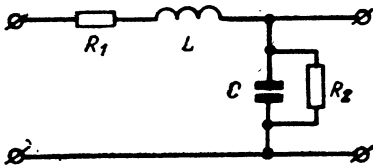


Рис. 3.7

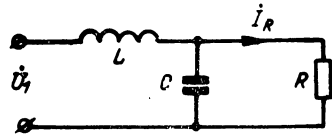


Рис. 3.8

● 3.25.* Дан обычный последовательный колебательный контур (рис. 3.3), имеющий активное сопротивление $R_1 = 10$ ом. Вольтметром с бесконечно большим входным сопротивлением измерили добротность контура Q , которая оказалась равной 100, т. е. $\frac{U_2}{U_1} = 100$ на резонансной частоте. Затем были произведены эти же измерения вольтметром, внутреннее сопротивление которого $R_2 = 100\,000$ ом.

Рассчитать амплитуду напряжения на конденсаторе в последнем случае, если на вход контура подается напряжение с амплитудой, равной 1 в.

● 3.26.* На последовательный колебательный контур воздействуют синусоидальные напряжения с частотами $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots, n\omega_0$ и с одинаковыми амплитудами.

Найти соотношения между токами, вызванными этими напряжениями.

● 3.27.* В схеме рис. 3.8 напряжение U_1 стабилизировано; сопротивление R является переменным.

Подобрать индуктивность L и емкость C так, чтобы ток i_R при данной частоте оставался постоянным по амплитуде, несмотря на изменение сопротивления R .

- 3.28.* Найти фазо-частотные характеристики $\varphi(\omega)$ для схем, изображенных на рис. 3.9а и б, и построить графики этих характеристик.

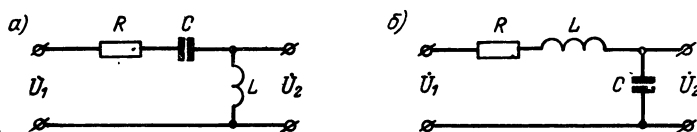


Рис. 3.9

- 3.29. Найти значение емкости C_0 (рис. 3.10), при котором амплитуда напряжения U_2 будет иметь максимальное значение на фиксированной частоте, а затем найти максимальное значение U_2 .

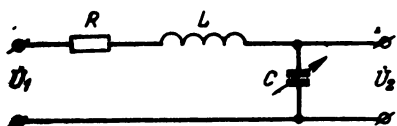


Рис. 3.10

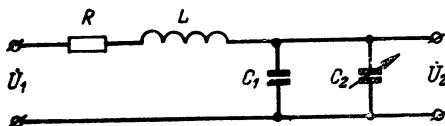


Рис. 3.11

- 3.30. В схеме, изображенной на рис. 3.11, конденсатор C_2 представляет собой датчик некоторого механического воздействия. Известно, что емкость C_2 меняется линейно с изменением расстояния между пластинами конденсатора, т. е.

$$C_2 = C_{20} \left(1 + \frac{\Delta d}{d} \right) = C_{20} (1 + x),$$

причем $\Delta d \ll d$, т. е. $x \ll 1$, а $C_{20} \ll C_1$.

Найти закон изменения амплитуды напряжения U_2 в зависимости от x при любой частоте, а затем в окрестности резонанса, т. е. при $\omega \approx \omega_0$.

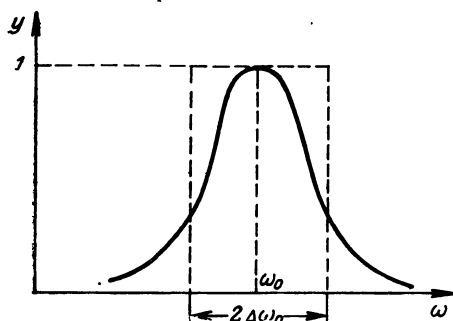


Рис. 3.12

ответствовала середине «прямолинейного» участка одного из склонов резонансной кривой. Эта точка примерно совпадает с точкой перегиба, нахождение которой и составляет условие настоящей задачи.

- 3.32. Определить ширину полосы $2\Delta\omega_0$ (рис. 3.12) идеального фильтра, площадь характеристики которого равна площади резонансной кривой контура. При определении площади резонансной кривой допустимо считать, что область частот, охватываемая этой кривой, в 10 раз больше полосы пропускания контура, что соответствует уменьшению тока примерно в 10 раз.

4.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Схема, изображенная на рис. 4.1, представляет собой параллельное соединение элементов колебательного контура с генератором и называется простой схемой параллельного контура.

Входное сопротивление простого параллельного контура определяется выражением ¹⁾

$$Z(i\omega) = \frac{R_\alpha}{1 + i\xi}, \quad (4.1)$$

где R_α — сопротивление контура при параллельном резонансе, т. е. при

$$\xi = 0 \text{ и } \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

величина R_α вычисляется по формуле:

$$R_\alpha = \frac{L}{RC} = \frac{\left(\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2}{R} = \frac{\rho^2}{R} = Q^2 R. \quad (4.2)$$

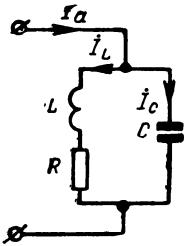


Рис. 4.1

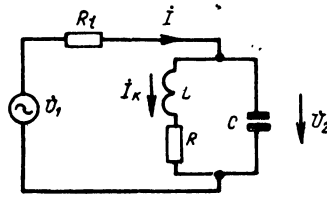


Рис. 4.2

Активная составляющая полного входного сопротивления контура зависит от частоты и равна

$$R_0 = \frac{R_\alpha}{1 + \xi^2}. \quad (4.3)$$

Реактивная составляющая X_0 определяется выражением

$$X_0 = -\frac{R_\alpha}{1 + \xi^2} \xi = -R_0 \xi. \quad (4.4)$$

Модуль полного сопротивления равен

$$Z(\omega) = \frac{R_\alpha}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (4.5)$$

Для выяснения резонансных свойств параллельного контура необходимо учитывать внутреннее сопротивление генератора R_i .

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 4.2.

¹⁾ Напоминаем (см. разд. 3), что все формулы, содержащие приближенное равенство $X \approx 2\Delta\omega L$, т. е. $\xi = \frac{\Delta\omega}{\alpha}$, являются приближенными; относительная ошибка рассчитывается по ф-ле (3.5).

Уравнение резонансной кривой по току для этой схемы определяется выражением

$$y_I = \frac{\dot{I}}{\dot{I}_0} = \frac{(1 + \beta)(1 + i\xi)}{1 + \beta + i\xi}$$

или по модулю

$$y_I = (1 + \beta) \frac{\sqrt{1 + \xi^2}}{\sqrt{(1 + \beta^2) + \xi^2}}. \quad (4.6)$$

Коэффициент β определяется из формулы:

$$\beta = \frac{R_\alpha}{R_i}. \quad (4.7)$$

Уравнение резонансной кривой по напряжению соответствует выражению

$$y_U = \frac{U_2}{U_{2_0}} = \frac{1 + \beta}{\sqrt{(1 + \beta^2) + \xi^2}}. \quad (4.8)$$

Полоса пропускания контура найдется из выражения (4.8) при $y = 0,707$. Решив уравнение (4.8) относительно $\xi = \xi^*$ и далее относительно $\Delta\omega^*$, получим:

$$\Delta\omega^* = \pm \alpha(1 + \beta). \quad (4.9)$$

Таким образом, полоса пропускания параллельного контура всегда шире полосы пропускания последовательного контура в $(1 + \beta)$ раз.

Соотношения между токами в неразветвленной и разветвленной цепях (рис. 4.1) при резонансной частоте определяются выражением

$$\frac{I_C}{I_a} \approx \frac{I_L}{I_a} \approx Q. \quad (4.10)$$

Мощность, выделяемая в параллельном контуре при резонансе, равна:

$$P = \frac{I_a^2}{2} R_\alpha = \frac{I_L^2}{2} R. \quad (4.11)$$

Условие, при котором в контуре выделяется максимальная мощность, записывается в виде

$$R_\alpha = R_i \quad (4.12)$$

или

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{RR_i}. \quad (4.13)$$

Параллельными контурами, собранными по сложной схеме, называются контуры, содержащие одноименные реактивности в обоих

ветвях. На рис. 4.3 дана схема, к которой может быть приведен любой параллельный контур.

Резонансные частоты сложного контура находятся из условия равенства нулю реактивной составляющей входного сопротивления:

$$X_1(R_2^2 + X_2^2) + X_2(R_1^2 + X_1^2) = 0. \quad (4.14)$$

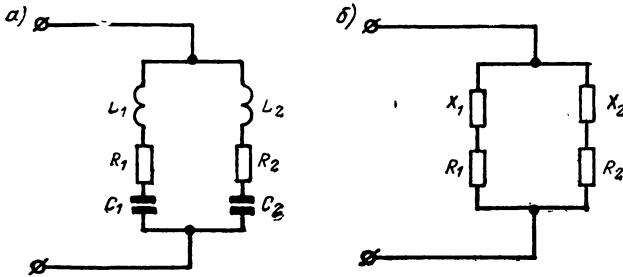


Рис. 4.3

Так как на высоких частотах $R_1 \ll X_1$ и $R_2 \ll X_2$, уравнение (4.14) существенно упрощается и принимает вид

$$X_1 X_2 (X_1 + X_2) = 0. \quad (4.15)$$

Любой из этих трех множителей в общем случае может быть равен нулю:

$X_1 = 0$ — «последовательный резонанс» в первом плече,

$X_2 = 0$ — «последовательный резонанс» во втором плече,

$X_1 + X_2 = 0$ — «параллельный резонанс».

Последняя формула

$$X_1 + X_2 = 0 \quad (4.16)$$

является расчетной для нахождения частоты параллельного резонанса. На этой частоте сопротивление сложного параллельного контура определяется выражением

$$Z_\alpha = R_\alpha = \frac{-X_1 X_2}{R_1 + R_2} = \frac{X_1^2 R_2 + R_1 X_2^2}{R_1 + R_2}. \quad (4.17)$$

Таким образом, резонансная частота сложного контура определяется суммой реактивностей обоих плеч, а эквивалентное сопротивление при резонансе — реактивным сопротивлением каждого из плеч в отдельности. Это дает возможность регулировать Z_α при неизменной резонансной частоте (см., например, схему рис. 4.4).

Резонансная частота для такой схемы определяется формулой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}, \quad (4.18)$$

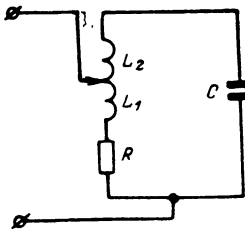


Рис. 4.4

а эквивалентное сопротивление при резонансе

$$R_{\text{эк}} = \frac{X_1^2}{R} \approx \frac{\omega_0^2 L_1^2}{R} = \left(\frac{L_1}{L_0}\right)^2 \frac{\omega_0 L_0^2}{R} = p^2 \frac{\omega_0^2 L_0^2}{R}. \quad (4.19)$$

При расчете параллельного колебательного контура обычно задаются резонансная частота ω_0 и внутреннее сопротивление генератора (внутреннее сопротивление лампы) R_i .

Используя соотношения (4.13) и (4.16), получаем уравнения для определения двух из трех (L , C , R) параметров. Для определения третьего параметра приходится привлекать дополнительные условия.

В настоящем разделе задачи расположены в следующей последовательности.

Первая группа (4.1—4.17) состоит из задач, в которых рассматривается расчет параметров и данных электрического режима простого параллельного контура по приближенным формулам.

Во второй группе задач (4.18—4.36) ставятся условия по нахождению точных и приближенных формул для резонансной частоты и эквивалентного сопротивления при резонансе в сложных контурах, а также условия по расчету параметров и данных электрического режима в этих контурах.

В третьей группе (4.37—4.43) задачи содержат условия по использованию сложных параллельных контуров для фильтрации гармоник и субгармоник, а также задачи по составлению эквивалентных схем.

Задачи и упражнения

● 4.1.* Рассчитать эквивалентное сопротивление при резонансе простого параллельного контура со следующими параметрами:

$$L = 100 \text{ мкГн}; C = 100 \text{ пф}; R = 10 \text{ ом}.$$

● 4.2. Рассчитать по приведенным в таблице данным сопротивление параллельного контура при резонансе.

| № примера | L мкГн | C пф | R ом | f_0 МГц | λ_0 м | Q |
|-----------|-------------|-----------|-----------|--------------|------------------|-----|
| 1 | 140 | 80 | 15 | — | — | — |
| 2 | — | 120 | — | — | 200 | 40 |
| 3 | — | 150 | 20 | 1 | — | — |
| 4 | 180 | 100 | — | — | — | 30 |
| 5 | — | 300 | 16 | — | 600 | — |

● 4.3. Для ослабления помех от мешающих станций применяют либо фильтр, который часто называют «фильтр-пробка» (рис. 4.5а), либо «фильтр-цепочку» (рис. 4.5б).

Рассчитать, во сколько раз сопротивление «фильтра-пробки», настроенного на частоту мешающей станции, больше сопротивления «фильтра-цепочки», настроенного на ту же частоту, если $L=640$ мкГн, $C=400$ пФ и $R=20$ Ом.

● 4.4.* Найти значения активной составляющей, реактивной составляющей и полного сопротивления простого параллельного контура, питаемого генератором с частотой $f=935$ кГц.

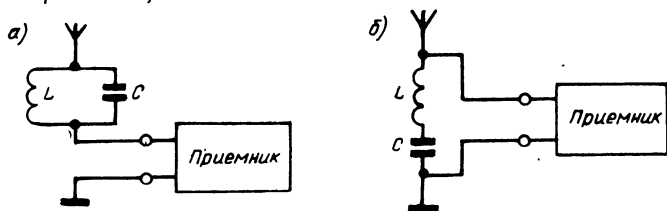


Рис. 4.5

Параметры контура: $L=240$ мкГн; $C=120$ пФ; $R=20$ Ом.

● 4.5. Рассчитать активную и реактивную составляющие, а также полное сопротивление простого параллельного контура по приведенным в таблице данным.

| № примера | L мкГн | C пФ | R Ом | f МГц | λ м | Δf кГц | Q | f_0 МГц | λ_0 м |
|-----------|-------------|-----------|-----------|------------|----------------|-------------------|-----|--------------|------------------|
| 1 | 600 | 200 | 20 | — | — | 5 | — | — | — |
| 2 | — | 400 | — | — | 704 | — | 30 | — | 700 |
| 3 | 280 | — | — | 0,964 | — | — | 60 | 0,96 | — |
| 4 | — | 1000 | 30 | — | 1620 | — | — | — | 1600 |
| 5 | — | 200 | — | — | — | 6 | 40 | — | 400 |

● 4.6.* Задана схема простого параллельного контура, причем известно, что

$$\beta = \frac{R_{\alpha}}{R_i} = 0,2.$$

Для настройки контура в резонанс можно использовать либо амперметр, либо вольтметр. Решить, каким прибором целесообразнее воспользоваться при данных условиях, и определить границы шкалы этого прибора, если известно, что $I_a \approx 10$ мА, а $R_{\alpha} = 20 \cdot 10^3$ Ом.

● 4.7.* В схеме простого параллельного контура $R_i = 10\,000$ Ом и $R_{\alpha} = 50\,000$ Ом.

Для настройки контура в резонанс можно использовать либо амперметр, либо вольтметр. Решить, каким прибором целесообразнее воспользоваться при данных условиях, и определить границы шкалы прибора, если известно, что напряжение генератора $U = 200$ В и настройку необходимо вести в пределах полосы пропускания.

● 4.8. В схеме простого параллельного контура (рис. 4.2) емкость изменили так, что эквивалентное сопротивление увеличилось в 2 раза, т. е. $R_{\alpha 1} = 2R_{\alpha}$. Определить значение полосы пропускания $2\Delta\omega_1^*$ при измененной емкости (по отношению к полосе пропускания $2\Delta\omega^*$ при прежней емкости) для двух условий: 1) $R_i \gg R_{\alpha}$, 2) $R_i = R_{\alpha}$.

● 4.9. Рассчитать по данным, приведенным в таблице, параметры простого параллельного контура. Расчет вести, исходя из условия (4.13), т. е. равенства резонансного сопротивления контура внутреннему сопротивлению генератора.

| № примера | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------|-----|-----|-----|------|------|
| R_i , ком | 20 | 100 | 180 | 400 | 600 |
| f_0 , кгц | 280 | 640 | 240 | 1200 | 3400 |
| C , пф | — | 240 | 625 | 125 | — |
| L , мкгн | 806 | — | — | — | 80 |

● 4.10. Рассчитать емкость и индуктивность колебательного контура, собранного по простой схеме. Данные для расчета: $\lambda_0=900$ м, $R=10$ ом, $R_{\alpha}=9 \cdot 10^3$ ом.

● 4.11.* Найти среднюю мощность, выделяемую в простом параллельном контуре, если известно, что его сопротивление при резонансе $R_{\alpha}=40\,000$ ом, а амплитуда тока в контуре равна 0,6 а. Добротность контура $Q=30$.

● 4.12. Найти мощность, выделяемую в параллельном контуре при резонансе, по приведенным в таблице данным.

| № примера | L мкгн | C пф | R ом | Q | f_0 Мгц | λ_0 м | I_K а | I_a ма | U в | R_i ком |
|-----------|-------------|-----------|-----------|-----|--------------|------------------|------------|-------------|----------|--------------|
| 1 | — | 300 | 10 | — | — | 600 | — | — | 200 | 80 |
| 2 | 300 | 200 | — | 40 | — | — | 0,4 | — | — | — |
| 3 | — | 60 | 15 | — | 3 | — | — | — | 160 | R_{α} |
| 4 | 800 | 400 | — | 30 | — | — | — | 20 | — | — |
| 5 | 100 | 60 | — | 50 | — | — | — | 15 | — | — |

Здесь как и прежде I_K, I_a, U — амплитудные значения.

● 4.13. Два параллельных контура, настроенные на частоту генератора, включены последовательно. Найти отношение мощностей P_1 к P_2 , если $r_1=200$ ом; $R_1=4$ ом; $r_2=300$ ом; $R_2=10$ ом.

● 4.14. К параллельному колебательному контуру, собранному по простой схеме, подводится напряжение с резонансной частотой $f_0=0,5$ Мгц и амплитудой $U=3$ кв. Ток в контуре (эффективное значение) равен 5 а, мощность, расходуемая в контуре, составляет 500 вт. По этим данным определить параметры контура L и C .

● 4.15. К простому параллельному контуру, включенному по схеме рис. 4.2, подведено напряжение с резонансной частотой 300 кгц и амплитудой 5500 в. Данные схемы следующие: $R=20$ ом, $C=900$ пф, $R_{\alpha}=10^4$ ом. Рассчитать индуктивность контура L , добротность Q , напряжение на контуре U_K и мощность в контуре P_K .

● 4.16. По данным нижеприведенной таблицы выполнить соответствующий расчет. Обозначения соответствуют схеме рис. 4.2.

| № примера | L мкгн | C пф | R ом | R_{α} ком | f_0 кгц | λ_0 м | I ма | I_K ма | U_2 в | R_i ком | U_1 в |
|-----------|-------------|-----------|-----------|---------------------|--------------|------------------|-----------|-------------|------------|--------------|------------|
| 1 | — | 222 | 22 | — | — | 400 | ? | ? | 910 | 0 | — |
| 2 | — | 150 | 3,5 | — | — | 100 | 5 | — | ? | 0 | — |
| 3 | 150 | — | 3,6 | — | 600 | — | ? | — | 1000 | 0 | — |
| 4 | 100 | — | 7 | — | — | 300 | ? | 240 | — | 0 | — |
| 5 | 12 | 58 | 18 | — | — | — | ? | — | ? | 10 | 43 |
| 6 | — | — | — | ? | — | — | — | — | 40 | 10 | 50 |
| 7 | — | — | 6 | 15 | — | — | 6 | ? | — | — | — |

- 4.17. Чему равно входное сопротивление схемы, изображенной на рис. 4.6? (Вычисления должны быть произведены в уме.)
- 4.18.* Найти точное выражение для резонансной частоты простого параллельного контура.
- 4.19.* Найти точное выражение для резонансной частоты параллельного контура, изображенного на рис. 4.7.

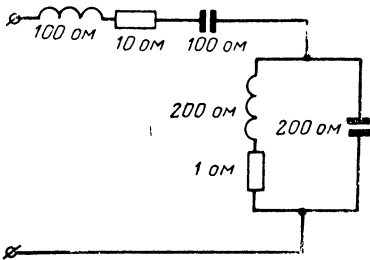


Рис. 4.6

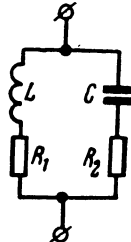


Рис. 4.7

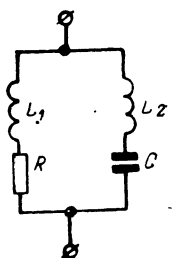


Рис. 4.8

- 4.20. Найти выражения для частоты резонанса и резонансного сопротивления параллельного контура, схема которого изображена на рис. 4.8, при условии, что $R \ll \omega L_1$.
- 4.21.* Найти выражение для резонансной частоты параллельного контура, изображенного на рис. 4.9.

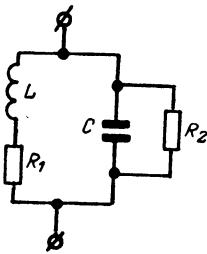


Рис. 4.9

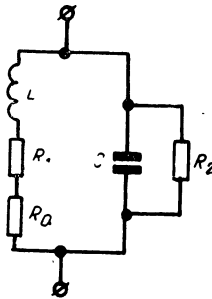


Рис. 4.10

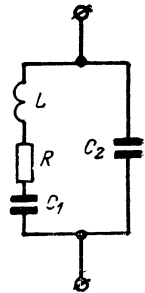


Рис. 4.11

- 4.22. Получить выражение для абсолютного значения ошибки, которая возникает при пользовании приближенной формулой расчета резонансной частоты простого параллельного контура. Найти соответствующую ошибку для контура со следующими параметрами: $L=200$ мкГн; $C=800$ пФ; $R=10$ Ом.
- 4.23.* Рассчитать, чему равно эквивалентное резонансное сопротивление параллельного контура (рис. 4.9), если известно, что $L=9$ мкГн, $R_1=3$ Ом, $C=100$ пФ и $R_2=30$ ком.
- 4.24.* Контур, изображенный на схеме рис. 4.9, должен быть подключен к генератору с внутренним сопротивлением R_i , причем индуктивность L и емкость C , равно как и сопротивление катушки L (R_L), изменять нельзя. Требуется, рассчитать дополнительное сопротивление R_2 таким образом, чтобы $R_{\text{э}}=R_i$.
- 4.25. Чему должно быть равно сопротивление R_0 , включенное последовательно с сопротивлением R_1 (рис. 4.10), если известно, что включение R_0 изменяет резонансное сопротивление $R_{\text{э}}$ так же, как шунтирование контура сопротивлением R_2 .
- 4.26. Эквивалентная схема кварцевого резонатора может быть представлена схемой параллельного контура (рис. 4.11). Найти частоту параллельного резонанса и эквивалентное сопротивление такого контура.

● 4.27. Найти частоты последовательного и параллельного резонансов для схемы рис. 4.11 по следующим данным: $L=300 \text{ мкГн}$; $R=5 \text{ ом}$; $C_1=300 \text{ пф}$; $C_2=300 \text{ пф}$.

● 4.28. Найти частоту параллельного резонанса и эквивалентное сопротивление контура схемы рис. 4.11 по следующим данным: $C_1=80 \text{ пф}$; $L=2,7 \text{ мкГн}$; $R=9 \text{ ом}$; $C_2=50 \text{ пф}$.

● 4.29.* Выяснить, во сколько раз сопротивление простого параллельного контура на частоте $n\omega_0$ (n — номер гармоники, любое число натурального ряда) меньше сопротивления на частоте ω_0 .

● 4.30.* Определить сопротивление простого параллельного контура при резонансной частоте и при частоте, соответствующей второй гармонике. Данные контура: $L=250 \text{ мкГн}$; $C=1000 \text{ пф}$; $R=5 \text{ ом}$.

● 4.31.* Дан контур, схема которого изображена на рис. 4.4. Составить формулу, по которой можно было бы рассчитать, как нужно распределить индуктивности L_1 и L_2 , чтобы получить заданное резонансное сопротивление $R_{\text{э}}$.

● 4.32.* Колебательный контур, собранный по схеме рис. 4.4, имеет $L_0=150 \text{ мкГн}$; $C=600 \text{ пф}$ и $R=10 \text{ ом}$. Определить, как следует распределить индуктивность контура между его ветвями, чтобы его резонансное сопротивление было равно 10 ком .

Решить эту же задачу для других условий: $L_0=160 \text{ мкГн}$; $C=500 \text{ пф}$, $R=10 \text{ ом}$ и $R_{\text{э}}=21 \text{ ком}$.

● 4.33.* Найти значения емкостей C_1 и C_2 контура (рис. 4.11), если известно, что $R_{\text{э}}=10 \text{ ком}$; $L=150 \text{ мкГн}$; $C_0=500 \text{ пф}$ и $R=10 \text{ ом}$. Здесь $C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

Решить эту же задачу для условий: $R_{\text{э}}=20 \text{ ком}$; $L=160 \text{ мкГн}$; $C_0=450 \text{ пф}$.

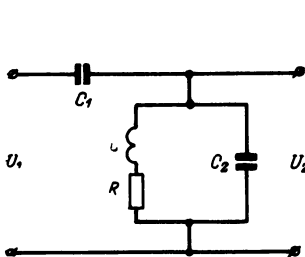


Рис. 4.12

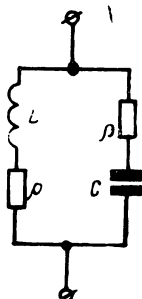


Рис. 4.13

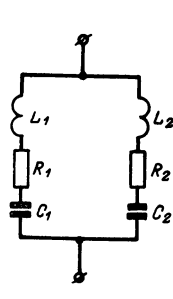


Рис. 4.14

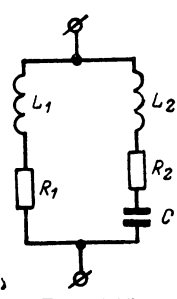


Рис. 4.15

● 4.34. Дана схема, изображенная на рис. 4.12. Составить выражение для расчета максимального значения U_2 макс.

● 4.35. Показать что входное сопротивление контура (рис. 4.13) является чисто активным и равно ρ .

● 4.36. Для контура (рис. 4.14) найти резонансную частоту, эквивалентное сопротивление и добротность. Данные контура: $L_1=4,5 \text{ мкГн}$; $L_2=7,5 \text{ мкГн}$; $C_1=100 \text{ пф}$; $C_2=500 \text{ пф}$; $R_1=8 \text{ ом}$; $R_2=11 \text{ ом}$.

● 4.37.* Контур, изображенный на рис. 4.15, на практике используется для подавления второй гармоники. Достигается это настройкой всего контура в резонанс с частотой ω_0 , равной

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}},$$

а правой ветви контура — в резонанс с частотой $2\omega_0$, т. е.

$$2\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}.$$

Тогда для напряжения частоты ω_0 контур будет представлять большое сопротивление, определяемое ф-лой (4.19):

$$R_{\alpha} = \rho^2 \frac{\omega_0^2 L_0^2}{R},$$

а для колебаний частоты $2\omega_0$ правая ветвь контура будет представлять очень малое сопротивление R_2 и падение напряжения с частотой $2\omega_0$ будет малым.

Составить формулы для расчета параметров контура по заданной частоте ω_0 и резонансному сопротивлению R_{α} , имея в виду, что правая ветвь должна быть настроена в резонанс по отношению ко второй гармонике. Сопротивление контура $R=R_1+R_2$ считаем известным.

● 4.38.* Контур, предназначенный для подавления второй гармоники (рис. 4.15), настроен на основную длину волны $\lambda=500$ м ($\omega_0=3,77 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$) и должен иметь эквивалентное сопротивление $R_{\alpha}=10\,000$ ом; активное сопротивление контура $R=5$ ом. Найти все параметры контура.

● 4.39.* Контур, изображенный на рис. 4.11, используют для подавления колебаний, имеющих частоту в два раза меньше основной частоты.

Достигается это настройкой всего контура в резонанс с частотой ω_0 , равной (задача 4.33):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}},$$

а левой ветви контура — в резонанс с частотой $\frac{1}{2} \omega_0$, т. е.

$$\frac{1}{2} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}.$$

Тогда для напряжения частоты ω_0 контур будет представлять большое сопротивление, определяемое формулой (задача 4.33):

$$R_{\alpha} = \frac{1}{\omega_0^2 C_2^2 R} = \left(\frac{C_0}{C_2}\right)^2 \frac{L}{C_0 R} = \rho^2 \frac{L}{C_0 R},$$

а для колебаний частоты $\frac{1}{2} \omega_0$ левая ветвь будет представлять очень малое сопротивление R .

Составить формулы для расчета параметров контура по заданной частоте ω_0 , активному сопротивлению R и резонансному сопротивлению R_{α} .

● 4.40.* Контур (рис. 4.11) при настройке на частоту $\omega_0 = \pi \cdot 10^7 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$ ($\lambda_0 = 60$ м) имеет сопротивление $R_{\alpha} = 10$ ком. Активное сопротивление контура $R = 10$ ом. Определить остальные параметры контура, имея в виду, что напряжение «половинной» частоты должно быть подавлено.

● 4.41.* Заменить схему простого параллельного контура на резонансной частоте эквивалентной схемой, представляющей собой параллельное соединение контура без потерь с активным сопротивлением R' , и рассчитать это сопротивление (рис. 4.16).

● 4.42. Найти значения L_A , C_A и C_B (рис. 4.17), при которых входные сопротивления обеих схем будут одинаковыми.

● 4.43.* Показать при помощи предельного перехода, в какие кривые вырождаются кривые активной и реактивной составляющих входного сопротивления простого параллельного контура без потерь (т. е. при $R \rightarrow 0$).

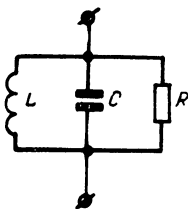


Рис. 4.16

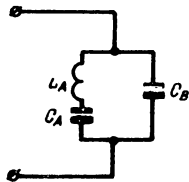
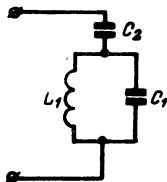


Рис. 4.17

5.

СВЯЗАННЫЕ КОНТУРЫ

Общие положения

По схемным признакам связанные контуры можно классифицировать на контуры с внутренней и внешней связью (рис. 5.1а и б).

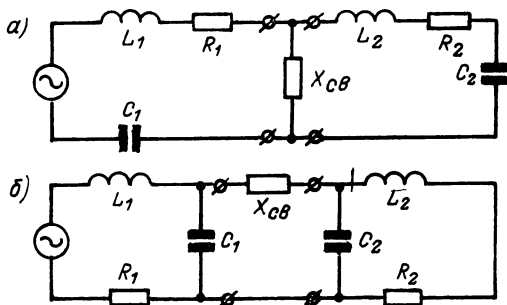


Рис. 5.1

Схему с внешней связью можно привести к схеме с внутренней связью при помощи формул перехода от треугольника к звезде (рис. 5.2 а и б):

$$\left. \begin{aligned} Z'_a &= \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c} \\ Z'_b &= \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c} \\ Z'_c &= \frac{Z_c Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

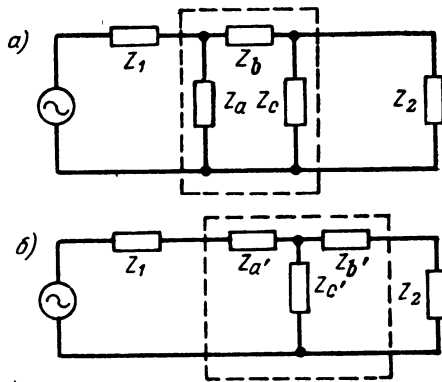


Рис. 5.2

По виду связи различают схемы с индуктивной трансформаторной, индуктивной автотрансформаторной, емкостной, активной и комбинированной связью (рис. 5.3 а, б, в, г и д).

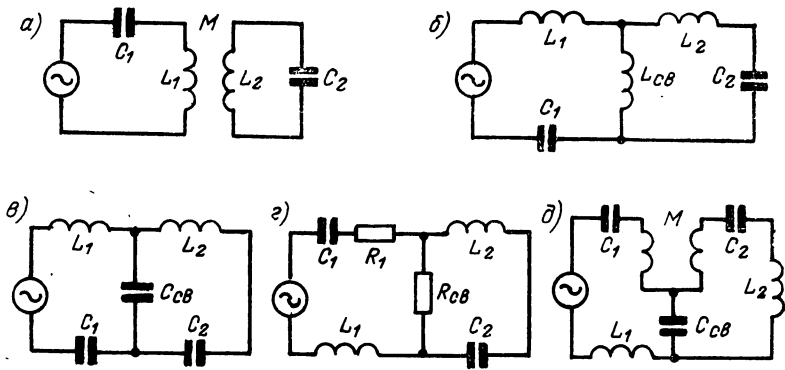


Рис. 5.3

Сопротивления связи для этих схем определяются выражениями:

а) для схем с индуктивной трансформаторной связью

$$Z_{св} = R_{св} + i X_{св} \approx i \omega M; \quad (5.2)$$

б) с индуктивной автотрансформаторной связью

$$Z_{св} = R_{св} + i X_{св} \approx i \omega L_{св}; \quad (5.3)$$

в) с емкостной связью

$$Z_{св} = -i \frac{1}{\omega C_{св}}; \quad (5.4)$$

г) с активной связью

$$Z_{св} = R_{св}; \quad (5.5)$$

д) с комбинированной связью

$$Z_{св} \approx i \left(\omega M - \frac{1}{\omega C_{св}} \right). \quad (5.6)$$

Связанные системы могут содержать два, три и более контуров, каждый из которых может быть как колебательным, так и неколебательным (апериодическим).

Для обобщенной схемы, состоящей из двух связанных контуров (рис. 5.4), легко составить общие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{I}_1 Z_1 + i \dot{I}_2 X_{св}, \\ 0 &= \dot{I}_2 Z_2 + i \dot{I}_1 X_{св}. \end{aligned}$$

В этих выражениях Z_1 и Z_2 включают в себя все элементы, обтекаемые соответственно токами \dot{I}_1 и \dot{I}_2 .

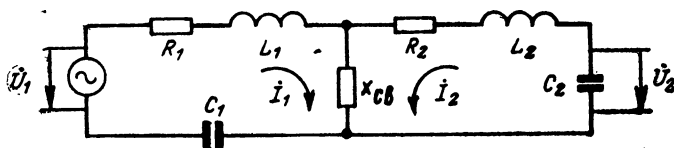


Рис. 5.4

Из общих уравнений можно найти связь между напряжением U_1 и любым из двух токов (I_1 или I_2), а также между токами \dot{I}_1 и \dot{I}_2 .

Входное сопротивление связанных колебательных контуров

Для обобщенной схемы (рис. 5.4) входное сопротивление связанных колебательных контуров на любой частоте определяется из общих уравнений как частное от деления входного напряжения \dot{U}_1 на ток в первом контуре \dot{I}_1 :

$$Z(i\omega) = R_1 + \frac{X_{св}^2}{|Z_2|^2} R_2 + i \left(X_1 - \frac{X_{св}^2}{|Z_2|^2} X_2 \right) \quad (5.7)$$

или

$$Z(i\omega) = R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right) + i \xi_1 R_1 \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \cdot \frac{\xi_2}{\xi_1} \right). \quad (5.7a)$$

В этих формулах:

$$\xi_1 = \frac{X_1}{R_1} \approx \frac{\Delta\omega_1}{\alpha_1} \text{ — обобщенная расстройка первого контура,}$$

$$\xi_2 = \frac{X_2}{R_2} \approx \frac{\Delta\omega_2}{\alpha_2} \text{ — обобщенная расстройка второго контура,}$$

$$A = \frac{X_{св}}{\sqrt{R_1 R_2}} \text{ — фактор связи}^1).$$

¹⁾ Здесь, как и в разд. 3 и 4, формулы, содержащие приближенное равенство $X \approx 2\Delta\omega L$, т. е. $\xi \approx \frac{\Delta\omega}{\alpha}$ являются приближенными; ошибка имеет порядок относительной расстройки и вычисляется по ф-ле (3.5).

В сопротивлениях X_1 и X_2 должны учитываться относящиеся к каждому контуру сопротивления элемента связи.

Для схемы с индуктивной связью фактор связи A определяется выражением

$$A = \frac{X_{св}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\omega \sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Если контуры одинаковы ($R_1 = R_2 = R$; $L_2 = L_1 = L$) и расстройки невелики, т. е. можно считать, что $\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1$, выражение для фактора связи A переписывается в виде:

$$A = \frac{\omega L}{R} \frac{M}{L} \approx \frac{\omega_0 L}{R} \frac{M}{L} = Q\kappa, \quad (5.8)$$

где κ — коэффициент связи.

В практических расчетах удобно вычислять отдельно активную и реактивную составляющие полного сопротивления; они обычно называются эквивалентными и обозначаются R_3 и X_3 :

$$\left. \begin{aligned} R_3 &= R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right) \\ X_3 &= \xi_1 R_1 \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (5.9)$$

Из этих выражений очевидна возможность замены двух связанных контуров одним эквивалентным контуром, имеющим на данной частоте входное сопротивление

$$Z(i\omega) = R_3 + iX_3.$$

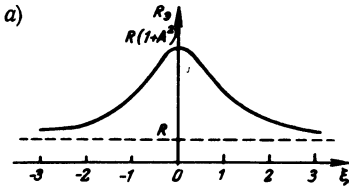
В случае применения контуров, у которых $R_1 = R_2 = R$ и $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, ф-лы (5.9) упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} R_3 &= R \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi^2} \right) \\ X_3 &= \xi R \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi^2} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (5.10)$$

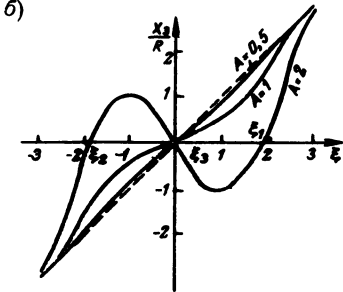
Реактивная составляющая входного сопротивления двух связанных контуров [ф-ла (5.10)] обращается в нуль при следующих значениях обобщенной расстройки:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{A^2 - 1} \\ \xi_2 &= -\sqrt{A^2 - 1} \\ \xi_3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.11)$$

Соответствующие этим расстройкам частоты, называемые частотами резонанса, равны:



$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 + \alpha \sqrt{A^2 - 1} \\ \omega_2 &= \omega_0 - \alpha \sqrt{A^2 - 1} \\ \omega_3 &= \omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$



Частоты ω_1 и ω_2 называют также частотами связи.

Графики активной и реактивной составляющих входного сопротивления для случая одинаковых контуров даны на рис. 5.5 а и б.

Рис. 5.5

Амплитудно-частотные характеристики связанных колебательных контуров

Для схемы, изображенной на рис. 5.4, амплитудно-частотная характеристика (коэффициент передачи напряжения) определяется выражением

$$K(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\omega C_2 \sqrt{R_1 R_2}} \frac{A}{\sqrt{(A^2 + 1 - \xi_1 \xi_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}} \quad (5.13)$$

В случае одинаковых контуров и общей настройки, а также при

$$\frac{1}{\omega CR} \approx \frac{1}{\omega_0 CR} = Q$$

выражение для коэффициента передачи упрощается и принимает вид

$$K(\omega) = \frac{QA}{\sqrt{(A^2 + 1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}} \quad (5.14)$$

Экстремальные значения коэффициент передачи приобретает на частотах, при которых реактивная составляющая обращается в нуль [ф-лы (5.11) и (5.12)].

Значения $K_{\max}(\omega)$ определяются выражением:

$$K_{\max}(\omega) = \frac{Q}{2} \quad (5.15)$$

Относя текущее значение коэффициента передачи $K(\omega)$ к его

максимальному значению $K_{\text{макс}}(\omega)$, получаем уравнение резонансной кривой по напряжению

$$y = \frac{K(\omega)}{K_{\text{макс}}(\omega)} = \frac{\frac{U_2}{U_1}}{\frac{U_{2\text{макс}}}{U_1}} = \frac{U_2}{U_{2\text{макс}}} = \frac{2A}{\sqrt{(A^2 + 1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (5.16)$$

Семейство кривых, построенных по выражению (5.16), дано на рис. 5.6.

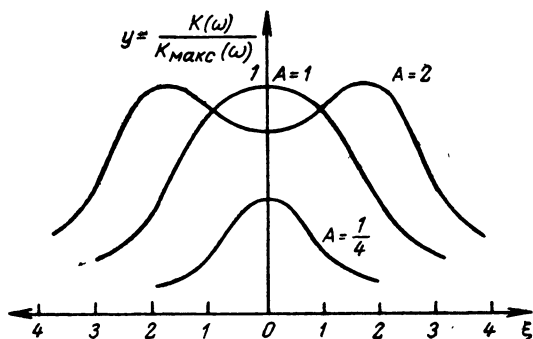


Рис. 5.6

Уравнение резонансной кривой по току во втором контуре имеет такой же вид (5.16).

Значение критической (оптимальной) связи, при которой коэффициент передачи на резонансной частоте достигает максимума, находится из выражения

$$A_{\text{кр}} = 1.$$

Зависимость $K(\omega)$ от фактора связи A при $\xi=0$ дана на рис. 5.7.

Для расчета одинаковых связанных контуров целесообразно использовать величину y_0 — значение ординаты резонансной кривой при $\omega = \omega_0$, т. е. при $\xi=0$ (рис. 5.8):

$$y_0 = \frac{2A}{A^2 + 1}. \quad (5.17)$$

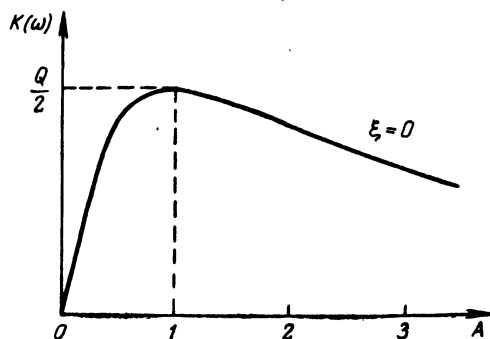


Рис. 5.7

Полоса пропускания двухконтурной системы (рис. 5.8) на высоте, соответствующей y_0 , определяется из ур-ния (5.16)

$$\xi^* = \pm \sqrt{2} \sqrt{A^2 - 1}. \quad (5.18)$$

При расчете двух одинаковых контуров обычно задаются резонансная частота ω_0 и полоса пропускания, оговариваемая либо величиной y_0 , либо «расстоянием между горбами» — $2\xi_m$ (рис. 5.8), либо полосой пропускания на уровне y_0 . Расчету подлежат параметры контуров и связь между контурами.

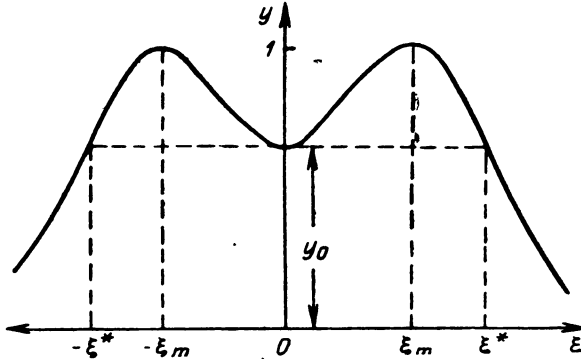


Рис. 5.8

Расчет проводится в следующем порядке:

1. Из выражения для резонансной частоты

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.19)$$

находится один из двух параметров (вторым параметром приходится задаваться, исходя из дополнительных соображений).

2. Из выражения (5.17) определяется фактор связи

$$A = \frac{1}{y_0} + \sqrt{\frac{1}{y_0^2} - 1}. \quad (5.20)$$

Если задано «расстояние между горбами» ξ_m , а не y_0 , то фактор связи определяется по ф-ле (5.11)

$$A = \sqrt{\xi_m^2 + 1}. \quad (5.21)$$

3. Из выражения для ξ_m :

$$\xi_m = \frac{\Delta\omega_m}{\alpha} = \frac{\omega_m - \omega_0}{\alpha} = 2L \frac{\omega_m - \omega_0}{R}$$

1) Формула для расчета полосы на уровне 0,707 дана в задаче 5.38.

определяется активное сопротивление R :

$$R = 2L \frac{\omega_m - \omega_0}{\xi_m}. \quad (5.22)$$

4. Наконец, из выражения $A = \frac{X_{св}}{R}$ определяется $X_{св}$:

$$X_{св} = AR \quad (5.23)$$

и далее из последней формулы находится величина элемента связи ($M_{св}$, $C_{св}$, $L_{св}$).

5. Если задана полоса пропускания на уровне y_0 , то сопротивление R следует определять из ф-лы (5.18)

$$R = \frac{L}{\sqrt{2}} \frac{2\Delta\omega^*}{\sqrt{A^2 - 1}}. \quad (5.24)$$

В случае, когда изменяется не частота генератора, а настройка второго контура, выражение для коэффициента передачи (5.13) сохраняет силу, но при этом $\xi_1 = \text{const}$, а ξ_2 является величиной переменной.

Для частного случая настройки первого контура в резонанс, т. е. при $\xi_1 = 0$, это уравнение принимает вид

$$K(\omega) = \frac{1}{\omega C_2 \sqrt{R_1 R_2}} \frac{A}{\sqrt{(A^2 + 1)^2 + \xi_2^2}}. \quad (5.25)$$

Если $\xi_1 \neq 0$, нужно пользоваться ф-лой (5.13).

Для того чтобы коэффициент передачи имел максимальное значение при $\xi_1 \neq 0$, необходимо второй контур настроить так, чтобы выполнялось равенство

$$\xi_2 = A^2 \frac{\xi_1}{1 + \xi_1^2}. \quad (5.26)$$

Связь колебательного контура с аperiodическим и аperiodических между собой

Входное сопротивление любой системы, состоящей из двух связанных контуров (причем один из контуров, либо оба являются аperiodическими), рассчитывается по общей ф-ле (5.7) с учетом того, что у аperiodического контура $\xi = \frac{X}{R} \gg 1$.

Амплитудно-частотные характеристики для системы, состоящей из колебательного и аperiodического контуров, рассчитываются также по общей ф-ле (5.13) с учетом того же условия.

Настройка связанных контуров

Настройка связанных контуров может осуществляться изменением параметров первого или второго контура или обоих контуров

и изменением параметра связи между ними. В соответствии с этим следует различать следующие способы настройки ¹⁾).

1. Настройка первого контура при неизменных параметрах второго — так называемый первый частный резонанс; при этом следует выполнить условия:

$$X_1 + X_{\text{вн}} = 0, \quad X_1 - \frac{X_{\text{св}}^2}{|Z_2|^2} X_2 = 0, \quad \xi_1 = \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \xi_2.$$

2. Настройка второго контура при неизменных параметрах первого — так называемый второй частный резонанс; при этом следует выполнить условия:

$$X_2 + X_{\text{вн}} = 0, \quad X_2 - \frac{X_{\text{св}}^2}{|Z_1|^2} X_1 = 0, \quad \xi_2 = \frac{A^2}{1 + \xi_1^2} \xi_1.$$

3. Подбор связи при заданных расстройках первого и второго контуров; при этом следует выполнить условия:

$$X_{\text{св}} = X_{\text{опт}}, \quad A_{\text{опт}} = \sqrt[4]{1 + \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

При одинаковых контурах это условие упрощается

$$A_{\text{опт}} = \sqrt{1 + \xi^2}.$$

4. Настройка первого контура и подбор связи — первый сложный резонанс; при этом следует выполнить условия:

$$X_1 - \frac{X_{\text{св}}^2}{|Z_2|^2} X_2 = 0, \quad X_{\text{св}} = X_{\text{св опт}}, \quad A_{\text{опт}} = \sqrt{1 + \xi_2^2}.$$

5. Настройка второго контура и подбор связи — второй сложный резонанс; при этом следует выполнить условия:

$$X_2 - \frac{X_{\text{св}}^2}{|Z_1|^2} X_1 = 0, \quad X_{\text{св}} = X_{\text{св опт}}, \quad A_{\text{опт}} = \sqrt{1 + \xi_1^2}.$$

6. Настройка обоих контуров — полный резонанс; при этом следует выполнить условия:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0.$$

7. Настройка обоих контуров и подбор связи — полный сложный резонанс; при этом следует выполнить условия:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_{\text{св}} = X_{\text{св опт}}, \quad A_{\text{опт}} = 1.$$

¹⁾ Терминология, относящаяся к методам настройки связанных контуров, строится следующим образом. Слова «первый», «второй» и «полный» адресуют к параметрам первого, второго и обоих контуров; слово «сложный» адресуют к связи между контурами.

Энергетические соотношения в связанных контурах

Мощность, расходуемая в первом контуре, равна

$$P_1 = \frac{I_1^2}{2} R_1 = \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{|Z_1|^2} R_1 = \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{R_1^2 + X_1^2} R_1. \quad (5.27)$$

Мощность, расходуемая во втором контуре, равна

$$P_2 = \frac{I_2^2}{2} R_2 = \frac{I_1^2}{2} \frac{X_{св}^2}{|Z_2|^2} R_2 = \frac{I_1^2}{2} \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} R_1. \quad (5.28)$$

Полная мощность, расходуемая в обоих контурах, определяется выражением

$$P_0 = P_1 + P_2 = \frac{I_1^2}{2} \left(R_1 + \frac{X_{св}^2}{|Z_2|^2} R_2 \right) = \frac{I_1^2}{2} R_1 = \frac{I_1^2}{2} R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right). \quad (5.29)$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{P_2}{P_0} = \frac{A^2}{A^2 + 1 + \xi_2^2}. \quad (5.30)$$

Максимальное значение при фиксированной связи коэффициент полезного действия имеет при $\xi_2 = 0$:

$$\eta_{\max} = \frac{A^2}{A^2 + 1}. \quad (5.31)$$

Из ф-л (5.27) и (5.29) следует

$$P_2 = \frac{I_1^2}{2} \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} R_1 = \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{|Z_1|^2} \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} R_1;$$

легко видеть, что $P_2 = P_{2 \max}$ при $X_1 = 0$ и $X_2 = 0$, т. е.

$$P_{2 \max} = \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{R_1^2} A^2 R_1 = \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{R_1^2 (1 + A^2)^2} A^2 R_1 = \frac{U_1^2}{2 R_1} \frac{A^2}{(1 + A^2)^2}. \quad (5.32)$$

В свою очередь, максимальная мощность во втором контуре имеет максимально возможное значение при $A = 1$, т. е.

$$P_{2 \max \max} = \frac{U_1^2}{8 R_1}. \quad (5.33)$$

Фазовые характеристики связанных контуров

Фазовая характеристика находится из выражения для комплексного коэффициента передачи (схема рис. 5.4):

$$K(i\omega) = \frac{1}{\omega C_2 \sqrt{R_1 R_2}} \frac{A}{[(A^2 + 1 - \xi_1 \xi_2) + i(\xi_1 + \xi_2)]}$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\xi_1 + \xi_2}{A^2 + 1 - \xi_1 \xi_2} \quad (5.34)$$

Для частного случая одинаковых контуров выражение (5.34) упрощается:

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{2\xi}{A^2 + 1 - \xi^2} \quad (5.35)$$

В настоящем разделе задачи расположены в следующей последовательности.

В первой группе (5.1—5.7) собраны задачи, в которых должны быть определены параметры, характеризующие связь между контурами.

Во второй группе задач (5.8—5.27) ставятся условия по определению входного сопротивления связанной системы и нахождению частот, при которых реактивная составляющая обращается в нуль.

Третья группа (5.28—5.42) состоит из задач по расчету данных электрического режима, параметров и полосы двухконтурной связанной системы.

В четвертой группе (5.43—5.56) собраны задачи, в которых рассматриваются различные методы настройки связанных контуров.

Пятая группа (5.57—5.60) содержит задачи по энергетическим соотношениям, а шестая (5.61—5.63) — по фазовым характеристикам.

Задачи и упражнения

- 5.1.* Два контура (рис. 5.9а) связаны между собой внешней емкостной связью через междуэлектродную емкость.

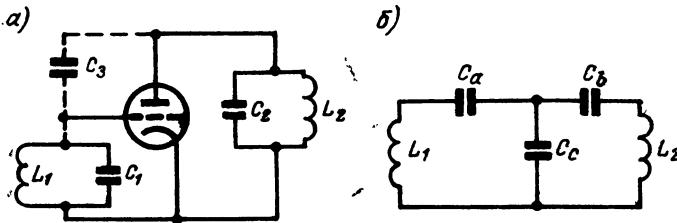


Рис. 5.9

Представить данную схему в виде эквивалентной схемы с внутренней емкостной связью (рис. 5.9б).

Данные контуров: $C_1=50$ пф, $C_2=50$ пф, $C_3=10$ пф.

● 5.2. Два колебательных контура связаны между собой индуктивной связью. Произвести расчет в соответствии с данными нижеприведенной таблицы.

| № примера | Параметры 1-го контура | | Параметры 2-го контура | | Данные связи | | | | f, кгц |
|-----------|------------------------|----------------------|------------------------|----------------------|--------------|-----------------------|--------|---|--------|
| | L ₁ мкГн | R ₁ ом | L ₂ мкГн | R ₂ ом | M мкГн | X _{св} ом | κ % | A | |
| 1 | 400 | — | 900 | — | ? | — | 2 | — | — |
| 2 | 25 | 10 | 40 | 10 | 10 | — | ? | ? | 159 |
| 3 | 90 | 12 | 160 | 12 | — | — | 20 | ? | 159 |
| 4 | 20 | — | 20 | — | — | 100 | 40 | — | ? |

● 5.3. Два колебательных контура связаны между собой автотрансформаторной связью. Индуктивности контуров одинаковы и равны 35 мкГн; индуктивность катушки связи — 15 мкГн. Активные сопротивления контуров: R₁=4 ом и R₂=9 ом. Частота генератора, питающего систему, равна 159 кгц. Определить фактор связи A, а также коэффициент связи κ, определяемый для данной схемы формулой

$$\kappa = \frac{L_{св}}{\sqrt{L'_1 L'_2}},$$

где L'₁ и L'₂ — полные индуктивности каждого контура, т. е. L'₁ = L₁ + L_{св} и L'₂ = L₂ + L_{св}.

● 5.4. Найти величину фактора связи A в системе, состоящей из двух колебательных контуров, связанных между собой внутренней емкостной связью. Данные для расчета: R₁=36 ом; R₂=16 ом; C_{св}=20 000 пф; f=159 кгц.

● 5.5.* В схеме с комбинированной связью (5.3д) сопротивление связи определяется ф-лой (5.6)

$$X_{св} = \pm \omega M - \frac{1}{\omega C_{св}}.$$

Если направление витков выбрано так, что

$$X_{св} = \omega M + \frac{1}{\omega C_{св}},$$

то сопротивление связи в пределах некоторой полосы остается более или менее постоянным (рис. 5.10).

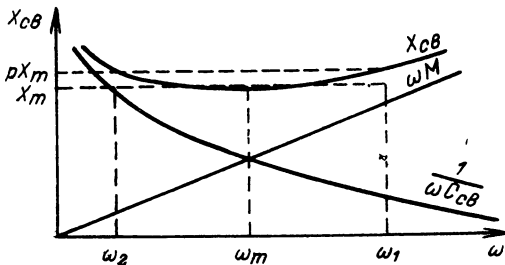


Рис. 5.10

Найти значение частоты ω_m , при которой $X_{св}$ приобретает минимальное значение, а затем полосу частот справа от ω_m : $\Delta\omega_1 = \omega_1 - \omega_m$ и полосу частот

слева от ω_m : $\Delta\omega_2 = \omega_m - \omega_2$, при которых сопротивление связи $X_{св}$ меняется не более чем в p раз (например, $p=1,1$ и т. д.).

● 5.6.* В схеме с комбинированной связью (рис. 5.3д) рассчитать диапазон частот, в пределах которого сопротивление связи будет меняться не более, чем на 10%, если $M=10$ мкГн, а $C_{св}=50$ пф.

● 5.7. В схеме с внутримкостной связью (рис. 5.11) нужно включить дополнительный конденсатор C_n так, чтобы фактор связи A был равен 2. Данные для расчета: $f=795$ кГц; $R_1=R_2=10$ Ом; $C_0=20\ 000$ пф.

● 5.8. Построить график изменения активной составляющей эквивалентного сопротивления связанных колебательных контуров в зависимости от расстройки второго контура, а также в зависимости от частоты генератора ω (величину фактора связи A считать не зависящей от частоты).

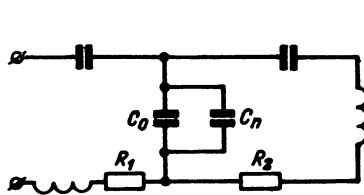


Рис. 5.11

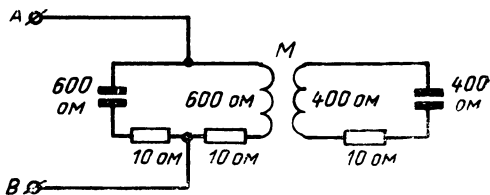


Рис. 5.12

● 5.9.* Параметры двух связанных индуктивной трансформаторной связью контуров следующие: $L_1=510$ мкГн; $L_2=208$ мкГн; $C_1=2000$ пф; $C_2=5000$ пф; $R_1=2$ Ом; $R_2=6$ Ом; $M=7$ мкГн.

Найти эквивалентное (входное) сопротивление связанной системы на частоте $f=159$ кГц.

● 5.10. Рассчитать эквивалентное (входное) сопротивление системы, состоящей из двух связанных индуктивной трансформаторной связью контуров, по приведенным в таблице данным.

| № примера | L_1 мкГн | C_1 пф | f_{01} кГц | R_1 Ом | Q_1 | L_2 мкГн | C_2 пф | f_{02} кГц | R_2 Ом | Q_2 | $X_{св}$ Ом | M мкГн | f кГц | λ м |
|-----------|---------------|-------------|-----------------|-------------|-------|---------------|-------------|-----------------|-------------|-------|----------------|---------------|------------|----------------|
| 1 | 164 | 600 | — | 4 | — | 195 | 540 | — | 6 | — | — | 4 | 500 | — |
| 2 | — | 500 | 340 | — | 30 | — | 460 | 320 | — | 34 | — | 6 | 330 | — |
| 3 | 226 | 220 | — | 6 | — | 248 | 200 | — | 8 | — | 12 | — | — | 420 |
| 4 | — | 60 | 3000 | 6 | — | — | 54 | 3004 | 5 | — | 9 | — | 3010 | — |
| 5 | 374 | 1600 | — | — | 36 | 333 | 2000 | — | 8 | — | — | 10 | 200 | — |
| 6 | — | 990 | 300 | 50 | — | — | 825 | 333 | 10 | — | — | $\kappa=30\%$ | 318 | — |
| 7 | 320 | 1000 | — | 3 | — | 500 | 1500 | — | 5 | — | — | $\kappa=25\%$ | 160 | — |

● 5.11.* Найти сопротивление между зажимами A и B (рис. 5.12), если сопротивление связи $X_{св}=20$ Ом, а остальные данные указаны на рисунке.

● 5.12. Найти сопротивление между зажимами A и B (рис. 5.13) по следующим данным: $f_{01}=f_{02}=500$ кГц; $M=6$ мкГн; $L_1=200$ мкГн; $R_1=10$ Ом; $R_2=12$ Ом.

● 5.13.* Найти резонансную частоту контура L_1, R_1, C_1 (рис. 5.14), связанного с аperiodическим контуром L_2, R_2 .

● 5.14.* Дана схема, изображенная на рис. 5.14.

Колебательный контур, имеющий $L_1=40$ мкГн и $C_1=250$ пф, связан с короткозамкнутой катушкой $L_2=5$ мкГн; взаимдуктивность может изменяться в пределах от 0 до 4 мкГн.

Найти пределы изменения настройки контура при помощи короткозамкнутой катушки.

- 5.15.* Найти выражение для эквивалентного активного сопротивления схемы, изображенной на рис. 5.14.
- 5.16.* Генератор имеет внутреннее сопротивление $R_i=200$ ом и должен быть нагружен на сопротивление нагрузки $R_2=2000$ ом. Для согласования нагрузки с внутренним сопротивлением генератора применена схема, изображенная на рис. 5.15.

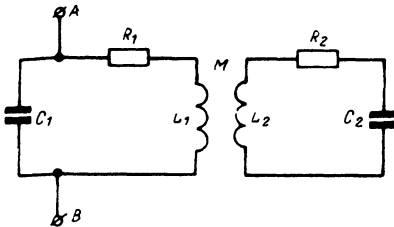


Рис. 5.13

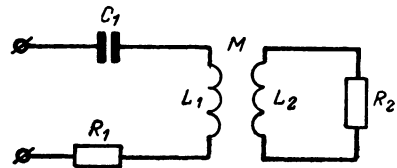


Рис. 5.14

Рассчитать связь M между контурами, если $R_1=20$ ом и $L_2=800$ мкГн, причем известно, что первый контур настроен в резонанс.

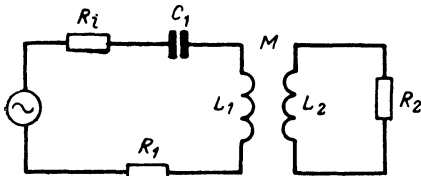


Рис. 5.15

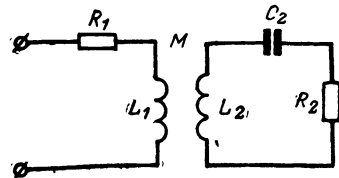


Рис. 5.16

- 5.17.* Для схемы (рис. 5.16), содержащей аperiодический контур L_1, R_1 , связанный с колебательным контуром L_2, C_2, R_2 , привести выражения эквивалентных активного и реактивного сопротивлений. Найти, на какую частоту должен быть настроен второй контур, чтобы входное сопротивление было чисто активным.
- 5.18.* В предыдущей задаче было показано, что для создания чисто активного сопротивления в схеме рис. 5.16 второй контур должен быть расстроен относительно частоты генератора на величину ξ_2 , определяемую выражением

$$\xi_2 = \frac{A^2}{2\xi_1} \pm \sqrt{\frac{A^4}{4\xi_1^2} - 1}.$$

Для практики представляет интерес установить минимально возможную связь, при которой еще выполняется указанное условие (эти требования объясняются трудностью конструктивного выполнения воздушного трансформатора с большой связью). Найти такое соотношение между A и ξ_1 , которое бы позволило иметь связь минимально возможной.

- 5.19.* Дана схема, изображенная на рис. 5.16.

Известно, что $R_1=100$ ом, $L_1=2,5$ мГн, $R_2=12$ ом, $L_2=240$ мкГн и частота генератора $f=750$ кГц.

Рассчитать частоту, на которую должен быть настроен второй контур, чтобы генератор нагружался на чисто активное сопротивление, а также рассчитать минимальную взаимную индуктивность M между катушками контуров.

- 5.20.* Для схемы, состоящей из двух аperiодических индуктивно связанных

контуров (рис. 5.17), вывести выражение эквивалентных сопротивлений, приняв, что $X_1 \gg R_1$ и $X_2 \gg R_2$.

● 5.21.* Даны два одинаковых контура, настроенные каждый в отдельности на частоту $f_0 = 2 \cdot 10^6$ гц. Определить частоты связи f_1 и f_2 , если известно, что активное сопротивление каждого контура $R = 10$ ом, а сопротивление связи $X_{св} = 16$ ом. Емкость каждого контура равна 100 пф.

● 5.22. Найти частоты связи двух одинаковых индуктивно связанных контуров по следующим данным:

1. $L = 450$ мкгн; $C = 200$ пф; $M = 50$ мкгн.

2. $f_0 = 2$ Мгц; $\kappa = 19\%$.

● 5.23.* Рассчитать и построить график зависимости частот связи ω_1 и ω_2 от фактора связи A для одинаковых контуров, настроенных на одну частоту. Построение графика выполнить для $Q = 10$.

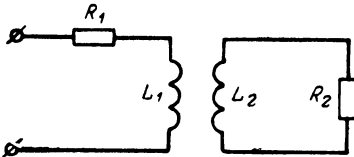


Рис. 5.17

● 5.24.* Два связанных одинаковых контура настроены каждый в отдельности на частоту $f_0 = 1,6 \cdot 10^6$ гц. Экспериментально определены частоты связи: $f_1 = 1,64 \cdot 10^6$ гц и $f_2 = 1,56 \cdot 10^6$ гц.

Найти значение фактора связи A , если известно, что добротность каждого контура $Q = 20$.

● 5.25.* Для системы, состоящей из двух неодинаковых связанных контуров, найти частоты, при которых реактивная составляющая входного сопротивления обращается в нуль.

● 5.26.* Два колебательных контура связаны трансформаторной индуктивной связью. Рассчитать частоты резонанса, при которых реактивное сопротивление обращается в нуль, если данные контуров следующие:

$$L_1 = 260 \text{ мкгн}; L_2 = 280 \text{ мкгн}, C_1 = 900 \text{ пф}, C_2 = 920 \text{ пф}, R_1 = 10 \text{ ом}, \\ R_2 = 10 \text{ ом}, X_{св} = 60 \text{ ом}.$$

● 5.27. Для схемы, составленной из двух одинаковых индуктивно связанных контуров, рассчитать пределы изменения взаимной индуктивности M катушек связи, при которых частоты связи будут меняться в пределах от ω_0 до $1,05 \omega_0$.

● 5.28.* Найти значения напряжения на конденсаторе второго контура схемы рис. 5.4 в диапазоне частот от 770 до 850 кгц, если известно, что

$$f_{01} = f_{02} = 810 \text{ кгц}, R_1 = R_2 = 10 \text{ ом}, X_{св} = \omega_0 M = 20 \text{ ом}, \\ Q_1 = Q_2 = 30, U_1 = 0,1 \text{ в}.$$

Результаты расчета изобразить в виде графика.

● 5.29. Построить графики коэффициента передачи для системы, состоящей из двух одинаковых индуктивно связанных контуров, по приведенным в таблице данным. Диапазон изменения частоты принять равным

$$\omega_0 \pm \Delta\omega = \omega_0 \left(1 \pm \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{2}{Q} \right).$$

| № примера | f_0 Мгц | λ_0 м | R ом | L мкгн | C пф | Q | M | $X_{св}$ ом |
|-----------|--------------|------------------|-----------|-------------|-----------|-----|--------|----------------|
| 1 | 1 | — | 12 | — | — | 40 | — | 16 |
| 2 | — | 600 | — | — | 300 | 40 | 0,05 L | — |
| 3 | — | 1260 | 16 | 720 | — | — | — | 26 |

● 5.30. Дана система, состоящая из двух индуктивно связанных контуров, имеющих следующие параметры: $L_1=282$ мкГн; $C_1=1000$ пФ; $R_1=12$ Ом; $L_2=274$ мкГн; $C_2=830$ пФ; $R_2=10$ Ом. Взаимоиндукция $M=83,4$ мкГн. В первый контур включен генератор, развивающий напряжение $U_1=500$ В с частотой $f=320$ кГц.

Найти токи в контурах I_1 и I_2 , а также напряжение на конденсаторе второго контура U_2 .

● 5.31. Найти ток в первом из двух настроенных на волну $\lambda=60$ м индуктивно связанных контуров по следующим данным:

$$U_1 = 100 \text{ в}; \quad L_1 = L_2 = 20 \text{ мкГн}; \quad M = 0,2 \text{ мкГн}; \quad Q_2 = 100.$$

● 5.32.* Рассчитать параметры системы, состоящей из двух одинаковых индуктивно связанных контуров, по следующим данным:

- резонансная частота $f_0=600$ кГц;
- полоса пропускания, соответствующая уровню $y_0=0,707$, равна 8 кГц,
- емкость каждого контура равна 250 пФ.

● 5.33. Рассчитать параметры двух одинаковых индуктивно связанных контуров по приведенным в таблице данным.

Емкость контура рассчитать по формуле: $C_{(пф)} \approx \frac{1}{2} \lambda_{0(м)}$.

| № примера | f_0 МГц | λ_0 м | y_0 | Интервал между горба- ми, кГц | Полоса про- пускания на уровне y_0 , кГц | Q |
|-----------|--------------|------------------|-------|-------------------------------------|--|-----|
| 1 | 1,2 | — | 0,707 | — | 12 | — |
| 2 | 12,8 | — | 0,707 | — | 60 | — |
| 3 | — | 600 | — | 6 | — | 100 |
| 4 | — | 1200 | 0,707 | — | 8 | — |
| 5 | — | 300 | — | 8 | — | 100 |

● 5.34.* Определить частоты связи системы, состоящей из двух одинаковых индуктивно связанных контуров с параметрами: $L=10$ мГн, $C=100$ пФ, $R=240$ Ом, $M=340$ мкГн. Рассчитать уровень y_0 и полосу пропускания на этом уровне.

● 5.35. Найти полосу пропускания (на высоте 0,707) системы, состоящей из двух одинаковых связанных колебательных контуров, при критической связи, т. е. при $A=1$.

● 5.36.* По экспериментально снятой резонансной кривой системы, состоящей из двух одинаковых контуров, получено значение полосы пропускания $2\Delta f^*=12$ кГц при $f_0=600$ кГц. Параметр связи $A=1$. Определить добротность контуров.

● 5.37. Найти полосу пропускания системы, состоящей из двух одинаковых связанных колебательных контуров при связи, соответствующей уровню $y_0=0,707$.

● 5.38. Получить формулу для расчета полосы пропускания системы, состоящей из двух одинаковых связанных колебательных контуров; полосу пропускания определить как полосу между двумя ординатами, равными 0,707 от максимальной.

● 5.39. Определить полосу пропускания на уровне 0,707 по следующим данным:

1. $L_1 = L_2 = 250$ мкГн; $R_1 = R_2 = 10$ Ом; $M = M_{кр}$;

2. $Q_1 = Q_2 = 100$; $f_0 = 1$ МГц; $A = 1$;

3. $Q_1 = Q_2 = 100$; $f_0 = 1$ МГц; $A = 2,41$.

- 5.40.* Приемная антенна индуктивно связана с настроенным в резонанс входным контуром (рис. 5.18). Контур имеет следующие данные: $C=300$ пф, $R=8$ ом. Определить напряжение на сетке лампы, если ток в приемной антенне $I_A=0,17$ мка. Взаимная индуктивность $M=20$ мкгн.

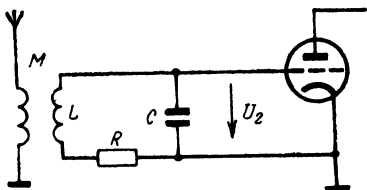


Рис. 5.10

- 5.41. Приемная антенна индуктивно связана с настроенным в резонанс входным контуром (рис. 5.18). Определить напряжение на сетке лампы по следующим данным:

- $f_0 = 2$ Мгц; $M = 10$ мкгн; $L = 30$ мкгн; $R = 10$ ом; $I_A = 1$ мка;
- $f_0 = 1$ Мгц; $X_{св} = 20$ ом; $C = 150$ пф; $R = 5$ ом; $I_A = 0,5$ мка.

- 5.42. Колебательный контур индуктивно связан с апериодической цепью (рис. 5.14). Произвести расчет по следующим данным:

- $U_1=200$ в; $f=333$ кГц; $L_1=250$ мкгн; $C_1=910$ пф; $R_1=30$ ом; $L_2=600$ мкгн; $R_2=3000$ ом; $\kappa=0,4$.

Найти ток I_2 в апериодической цепи.

- $f_0=1$ Мгц; $L_1=300$ мкгн; $R_1=10$ ом; $L_2=60$ мкгн; $R_2=1000$ ом; $\kappa=0,1$.

Определить добротность контура Q с учетом влияния апериодической цепи.

- 5.43. Исходя из выражения для тока во втором контуре

$$I_2 = \frac{U_1}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{A}{\sqrt{(A^2 + 1 - \xi_1 \xi_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}},$$

получить условие первого и второго частных резонансов.

- 5.44.* Даны два индуктивно связанных колебательных контура со следующими параметрами: $L_1=200$ мкгн; $L_2=250$ мкгн; $R_2=100$ ом; $C_2=900$ пф; $M=40$ мкгн; $f=700$ кГц.

Расчитать, при каком значении емкости конденсатора C_1 первого контура будет выполнено условие первого частного резонанса.

- 5.45. Колебательный контур L, C, R индуктивно связан с передающей антенной, которая может быть представлена эквивалентным контуром, имеющим параметры R_A и X_A . Частота генератора меняется в пределах от f_1 до f_2 и при этом реактивное сопротивление антенны меняется в пределах от X_{A1} до X_{A2} . Определить значения емкости (или индуктивности) первого контура C_1 и C_2 (или L_1 и L_2), при которых обеспечивается настройка заданной связанной системы по первому частному резонансу. Данные задачи сведены в таблицу.

| № примера | C пф | L мкгн | λ_1 м | f_1 Мгц | λ_2 м | f_2 Мгц | R_A ом | X_{A1} ом | X_{A2} ом | M мкгн |
|-----------|-----------|-------------|------------------|--------------|------------------|--------------|-------------|----------------|----------------|-------------|
| 1 | 400 | — | 680 | — | 600 | — | 16 | -18 | -24 | 20 |
| 2 | — | 500 | — | 0,8 | — | 0,9 | 10 | 50 | 10 | 10 |
| 3 | — | 600 | — | 0,4 | — | 0,6 | 12 | 20 | 6 | 40 |

- 5.46. Приемная антенна, которая может быть представлена эквивалентным контуром с параметрами R_A, X_A , индуктивно связана с колебательным контуром L, C, R . Частота принимаемых колебаний меняется в пределах от f_1 до f_2 . Найти пределы изменения емкости контура C_1 и C_2 , при которых обеспечивается

настройка заданной системы по второму частному резонансу. Данные для расчета сведены в таблицу.

| № примера | f_1 МГц | f_2 МГц | R_A ом | X_{A_1} ом | X_{A_2} мкГн | L мкГн | M мкГн |
|-----------|--------------|--------------|-------------|-----------------|-------------------|-------------|-------------|
| 1 | 0,60 | 0,64 | 8 | -16 | -12 | 400 | 20 |
| 2 | 1,2 | 1,28 | 12 | 6 | 8 | 200 | 3 |
| 3 | 0,24 | 0,30 | 20 | -24 | -20 | 1000 | 50 |

● 5.47.* Даны два индуктивно связанных контура, причем частота генератора $f=600$ кГц, а частота, на которую настроен первый контур, $f_{01}=610$ кГц. Найти частоту f_{02} , при которой ток во втором контуре системы имеет максимальное значение, если известно, что $R_1=12$ ом, $R_2=16$ ом, $Q=60$, $L_2=360$ мкГн, $M=20$ мкГн.

● 5.48. Рассчитать данные второго контура при настройке системы по методу второго частного резонанса по следующим данным:

1. $f=4$ МГц; $L_1=25$ мГн; $C_1=64$ нФ; $R_1=12$ ом; $L_2=16$ мкГн; $M=10$ мкГн; $C_2=?$

2. $X_1=20$ ом; $R_1=4$ ом; $R_2=200$ ом; $X_{св}=10$ ом; $X_2=?$

● 5.49. Найти значение фактора связи $A_{\text{опт}}$, при котором ток во втором контуре системы, состоящей из двух неодинаковых связанных контуров, имеет максимальное значение (сложный резонанс). Упростить полученное выражение для случая двух одинаковых контуров.

● 5.50. Дана система из двух одинаковых индуктивно связанных колебательных контуров, каждый из которых настроен на частоту $f_0=10^6$ Гц; частота генератора больше собственной частоты f_0 на 3,18 кГц. Данные контуров следующие: $L=500$ мкГн; $R=10$ ом.

Найти взаимную индукцию $M_{\text{опт}}$, при которой ток второго контура будет при данной расстройке наибольшим.

● 5.51. Дана система из двух неодинаковых индуктивно связанных контуров со следующими данными: $L_1=500$ мкГн; $R_1=20$ ом; $f_{01}=993,6$ кГц; $L_2=150$ мкГн; $R_2=30$ ом; $f_{02}=984,1$ кГц.

Частота генератора, питающего систему, равна 10^6 Гц. Найти значение $M_{\text{опт}}$, при котором ток во втором контуре будет максимальным.

● 5.52. Найти условия для оптимальной настройки по способам первого и второго сложных резонансов. Найти значение $M_{\text{опт}}$ для индуктивно связанных колебательных контуров.

● 5.53. Рассчитать необходимые параметры системы, состоящей из двух связанных контуров, по условиям настройки при первом сложном резонансе при следующих данных:

1. $L_1=100$ мкГн; $R_1=8$ ом; $L_2=400$ мкГн; $C_2=333$ нФ; $R_2=12$ ом; $f=477$ кГц; $X_{св \text{ опт}}=?$; $C_1=?$

2. $R_1=20$ ом; $R_2=30$ ом; $X_2=50$ ом; $X_{св \text{ опт}}=?$; $X_1=?$

● 5.54. Вывести условия для настройки системы по методу полного сложного резонанса.

● 5.55. Два индуктивно связанных контура настроены методом полного сложного резонанса. Данные схемы следующие: $f=400$ кГц; $U_1=100$ в; $M_{\text{опт}}=20$ мкГн. Определить значение тока во втором контуре.

● 5.56. Рассчитать необходимые параметры связанных контуров C_1 , C_2 и $M_{\text{опт}}$ по условиям настройки при полном сложном резонансе, если известно, что $L_1=100$ мкГн; $R_1=8$ ом; $L_2=400$ мкГн; $R_2=12$ ом; $f=400$ кГц.

● 5.57.* Даны два индуктивно связанных контура со следующими данными: $L_1=400$ мкГн; $L_2=410$ мкГн; $f=460 \cdot 10^3$ Гц; $C_1=310$ нФ; $C_2=290$ нФ; $U=100$ в; $R_1=16$ ом; $R_2=14$ ом; $M=36$ мкГн.

Рассчитать мощность, расходуемую в каждом контуре, коэффициент полезного действия при заданной связи, оптимальную связь и значение $P_{2 \max}$ макс при оптимальной связи и настройке обоих контуров в резонанс с частотой генератора.

● 5.58. Рассчитать по приведенным в таблице данным мощность, расходуемую в первом и втором связанных индуктивной связью контурах, коэффициент полезного действия и оптимальную связь. Найти значение максимально возможной мощности при оптимальной связи и настройке обоих контуров в резонанс.

| № примера | L_1 мкГн | C_1 пФ | R_1 ом | L_2 мкГн | C_2 пФ | R_2 ом | U_1 в | f МГц | M мкГн | $X_{св}$ ом |
|-----------|---------------|-------------|-------------|---------------|-------------|-------------|------------|------------|-------------|----------------|
| 1 | 350 | 250 | 10 | 360 | 240 | 8 | 200 | 0,54 | 30 | — |
| 2 | 200 | 130 | 6 | 210 | 120 | 4 | 100 | 0,995 | — | 15 |

● 5.59. Каждый из контуров двухконтурной связанной системы настроен в резонанс. Данные системы следующие $R_1=R_2=5$ ом; $\eta=0,95$; $P_2=10$ квт. Найти токи I_1 и I_2 .

● 5.60. Два контура настроены в резонанс и связаны между собой критической связью. Известно, что $P_2=1$ вт, $R_1=25$ ом. Определить ток в первом контуре.

● 5.61.* Найти фазовый сдвиг между напряжением на конденсаторе второго контура и напряжением входа, если контуры одинаковы и известно, что $\xi=0,8$, а $A=1,6$.

● 5.62.* Найти фазовый сдвиг между напряжением на конденсаторе второго контура и напряжением входа по данным задачи 5.57.

● 5.63. Найти время замедления $\tau = \frac{d\varphi}{d\omega}$ для системы, состоящей из двух одинаковых связанных контуров при частоте $\omega = \omega_0$.

6.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

Общие положения

Электрическим фильтром называют устройство, служащее для преимущественного ослабления колебаний одной части спектра по отношению к другой.

Фильтры классифицируют по назначению, частотным диапазонам и схемным признакам.

Свойства фильтра целиком определяются амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками. Задачи, связанные с расчетами фильтров, сводятся обычно либо к нахождению частотных характеристик по заданным элементам цепи (анализ), либо к расчету элементов цепи и определению ее структуры по заданным частотным характеристикам (синтез).

Амплитудно-частотные характеристики могут выражаться в обычных числах, неперах и децибелах. При расчете элементарных несимметричных радиотехнических фильтров применяются обычные

числа; во всех остальных случаях чаще всего пользуются неперами (децибелами) и вместо амплитудно-частотной характеристики вводят понятие затухания, характеризующего в логарифмическом масштабе зависимость изменения напряжения или тока от частоты на выходе фильтра относительно входа ¹⁾).

К элементарным, в первую очередь, относятся разделительные и блокировочные фильтры, а также их комбинации, развязывающие и простейшие сглаживающие фильтры цепей питания, фильтры, служащие для подавления радиопомех, и т. п. Эта классификация является условной, так как, например, в качестве сглаживающих часто применяют симметричные фильтры, а также такие несимметричные, которые нельзя назвать элементарными.

Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики элементарных несимметричных фильтров рассчитываются либо по общим законам теории цепей (разд. 1), либо при помощи таблиц четырехполюсников (разд. 2).

Расчет более сложных фильтров требует и более сложного расчетного аппарата. Методы расчета этих фильтров основаны на использовании либо характеристических, либо рабочих параметров цепей.

Наиболее простым и наглядным является метод, основанный на использовании характеристических параметров. Этот метод удобно рассматривать как введение в общую теорию расчета фильтров. Расчеты, проведенные на указанной основе, как правило, не дают хорошего совпадения с практикой, однако ценность этой теории достаточно велика, так как с ее помощью легко получить общую ориентировку в вопросах, относящихся к устройству и действию фильтров, а во многих случаях и близкие к оптимальным результаты.

Особенно просто рассчитываются симметричные звенья фильтров без потерь, согласованные с нагрузкой во всей полосе частот.

В настоящем разделе материал излагается в следующей последовательности.

В первой группе собраны задачи (6.1—6.16) по расчету элементарных несимметричных радиотехнических фильтров (пояснения к расчету здесь не приводятся, так как они содержатся в разд. 1 и 2).

Далее рассматривается материал, необходимый для расчета звеньев фильтров без потерь по характеристическим параметрам (задачи 6.17—6.40); этот материал излагается так, как это принято в распространенной радиотехнической литературе. Здесь считается, что номинальное характеристическое сопротивление звена равно нагрузочному сопротивлению, хотя при этих условиях согласование оказывается далеко не наилучшим. При решении этих задач применяются обозначения параметров элементов звеньев, соответствующую

¹⁾ Логарифмические амплитудно-частотные характеристики в общем виде рассматривались в разд. 1.

щие принятым в радиотехнической литературе (эти обозначения ясны из табл. 6.1; в остальных таблицах они отличаются от табл. 6.1).

В последней группе задач (6.41—6.67) дается расчет наиболее часто применяемых классов сложных фильтров по характеристическим параметрам, но с привлечением рабочих параметров, как это принято в современной теории фильтров. Этот материал до последнего времени в радиотехнической литературе не приводился, и обозначения параметров элементов звеньев здесь сохранены в том виде, в каком они используются в указанной теории фильтров (табл. 6.2—6.6).

Теоретический материал, соответствующий первым сорока задачам, можно найти в учебниках по радиотехнике (см. [2, 4] и др.); с материалом, относящимся к остальным задачам, рекомендуется ознакомиться по книге [9].

Элементы расчета звеньев по характеристическим параметрам

Для расчета простейших симметричных фильтров (звеньев)¹⁾ по характеристическим параметрам требуется знание только двух параметров: характеристической постоянной передачи g_c и характеристического сопротивления Z_c . Характеристическая постоянная передачи определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} g_c &= \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = a_c + i b_c \\ a_c &= \ln \frac{U_1}{U_2} \\ b_c &= \varphi_{\dot{U}_1 \rightarrow \dot{U}_2} \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Здесь \dot{U}_1 и \dot{U}_2 — комплексные амплитуды напряжений на входе и выходе звена фильтра при условии равенства характеристического и нагрузочных (со стороны входа и со стороны выхода) сопротивлений. В свою очередь, характеристическое сопротивление Z_c определяется как нагрузочное сопротивление, при котором имеет место равенство входного и нагрузочного сопротивлений на всех частотах (разд. 2) (для симметричных звеньев характеристические сопротивления со стороны входа и выхода равны).

Характеристические параметры звена фильтра связаны с коэффициентами A , B , C матрицы четырехполюсника формулами (см. разд. 2):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} g_c &= A \\ Z_c &= \sqrt{\frac{B}{C}} \end{aligned} \right\}; \quad (6.2)$$

¹⁾ Простейшие звенья симметричных фильтров приведены в табл. 6.1 (см. ниже).

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} g_c &= \frac{1}{Z_c} B \\ \operatorname{sh} g_c &= Z_c C \\ \operatorname{th} g_c &= \frac{1}{Z_c} \cdot \frac{B}{A} = \frac{\sqrt{BC}}{A} = \frac{\sqrt{A^2 - 1}}{A} = \sqrt{\frac{Z_{кз}}{Z_{хх}}} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Эти формулы являются основными для расчета простейших звеньев симметричных фильтров. Из ф-л (6.2) следует, что

$$A = A_1 + i A_2 = \operatorname{ch}(a_c + i b_c) = \operatorname{ch} a_c \cos b_c + i \operatorname{sh} a_c \sin b_c,$$

которое дает систему из двух уравнений:

$$\operatorname{ch} a_c \cos b_c = A_1, \quad (6.4)$$

$$\operatorname{sh} a_c \sin b_c = A_2. \quad (6.5)$$

Символы A_1 и A_2 представляют собой соответственно вещественную и мнимую части коэффициента A (A_{11}) матрицы четырехполюсника.

Для фильтров без потерь вводят понятие полосы прозрачности, в пределах которой характеристическое затухание равно нулю ($a_c=0$, $\operatorname{ch} a_c=1$, $\operatorname{sh} a_c=0$). Здесь коэффициент A матрицы таких фильтров не содержит мнимой части, т. е. $A_2=0$ и $A=A_1$. Это обстоятельство позволяет существенно упростить выражения (6.4) и (6.5), составив отдельно уравнения в полосе прозрачности ($a_c=0$) и вне полосы прозрачности ($a_c \neq 0$).

| В полосе прозрачности | Вне полосы прозрачности | Номер формулы |
|-----------------------|---------------------------------|---------------|
| $a_c = 0$ | $\pm \operatorname{ch} a_c = A$ | (6.6) |
| $\cos b_c = A$ | $b_c = \pm \pi$ | (6.7) |

Границы полосы прозрачности определяются из выражения

$$-1 \leq A \leq 1. \quad (6.8)$$

Пользуясь известными тождествами:

$$\operatorname{th} x = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x},$$

ф-лам (6.6) и (6.7) можно придать и другой, иногда встречающийся в литературе вид:

| В полосе прозрачности | Вне полосы прозрачности |
|--|--|
| $a_c = 0$ | $\pm \operatorname{th} a_c = \frac{\sqrt{A^2 - 1}}{A}$ |
| $\operatorname{tg} b_c = \frac{\sqrt{1 - A^2}}{A}$ | $b_c = \pm \pi$ |

Приведенные формулы дают возможность рассчитать характеристическое затухание и характеристическую фазу звена простейшего фильтра без потерь. Для расчета элементов фильтра известной схемы по заданным полосе прозрачности и сопротивлению нагрузки последние формулы нужно преобразовать. При этом, как уже указывалось, считается, что нагрузочное сопротивление равно номинальному характеристическому сопротивлению фильтра $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

В табл. 6.1 сведены расчетные формулы для простейших звеньев симметричных фильтров, выведенные из выражений (6.2), (6.6), (6.7), (6.8). Примеры их вывода даны в задачах. В последних двух графах таблицы приведены кривые и формулы для расчета затухания и фазового сдвига этих фильтров. Формулы для затухания приведены только для областей частот, лежащих вне полосы прозрачности, так как в пределах полосы прозрачности затухание равно нулю.

Формулы для фазового сдвига даны только для частот, заключенных в пределах полосы прозрачности, так как вне полосы прозрачности фазовый сдвиг постоянен.

Элементы расчета фильтров по характеристическим параметрам

Рассмотрим теперь более сложные (составные) фильтры, которые, как правило, представляют собой каскадное соединение ряда звеньев. Для этого определим следующие характеристические параметры четырехполюсника, изображенного на рис. 6.1¹⁾:

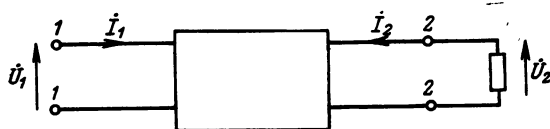


Рис. 6.1

- 1) характеристическую постоянную передачи g_c ,
- 2) характеристическое сопротивление Z_{c1} со стороны входа (зажимы 1—1),
- 3) характеристическое сопротивление Z_{c2} со стороны выхода (зажимы 2—2).

При подключении сопротивления Z_{c2} к зажимам 2—2 сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов 1—1 равно Z_{c1} ;

¹⁾ Здесь направления токов и напряжений соответствуют направлениям, принятым в теории фильтров (см. примечание на стр. 16).

Таблица 6.1

| Тип фильтра | Схема | | Формулы для расчета параметров | Характеристика затухания | Фазовая характеристика |
|-----------------------|-------|-----|---|--------------------------|------------------------|
| | "Т" | "П" | | | |
| Фильтр нижних частот | | | $L = 2 \frac{R_0}{\omega_0}$, $C = \frac{2}{\omega_0 R_0}$ $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$; $\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ | | |
| Фильтр верхних частот | | | $C = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_0 R_0}$; $L = \frac{R_0}{2\omega_0}$ $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$, $\omega_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{LC}}$ | | |
| Полосовой фильтр | | | $L_1 = 2R_0 \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}$, $C_2 = \frac{2}{R_0(\omega_2 - \omega_1)}$ $L_1 C_1 = L_2 C_2 = \frac{1}{\omega_1 \omega_2}$, $R_0 = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ | | |
| Заграждающий фильтр | | | $C_1 = \frac{1}{2R_0(\omega_2 - \omega_1)}$; $L_2 = \frac{R_0}{2(\omega_2 - \omega_1)}$ $L_1 C_1 = L_2 C_2 = \frac{1}{\omega_1 \omega_2}$, $R_0 = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ | | |

при подключении сопротивления Z_{c1} к зажимам 1—1 сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов 2—2 равно Z_{c2} .

Характеристическая постоянная передачи определяется формулой

$$g_c = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2}, \quad (6.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{\dot{U}_1^2}{Z_{c1}} \\ P_2 &= \frac{\dot{U}_2^2}{Z_{c2}} \end{aligned} \right\}. \quad (6.10)$$

Таким образом,

$$g_c = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} + \ln \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}}. \quad (6.11)$$

Для симметричных четырехполюсников, у которых $Z_{c1} = Z_{c2}$ ф-ла (6.11) упрощается:

$$g_c = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \quad (6.12)$$

и совпадает с вышеприведенной ф-лой (6.1).

Величины

$$a_c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{P_1}{P_2} \right| \quad (6.13)$$

и

$$b_c = \frac{1}{2} \arg \left(\frac{P_1}{P_2} \right), \quad (6.14)$$

как и прежде, называются соответственно характеристическим затуханием и характеристической фазой.

Очевидно, как и для простейших звеньев [см. ф-лу (6.1)]

$$g_c = a_c + i b_c. \quad (6.15)$$

Характеристические параметры удобно определять через сопротивления холостого хода (Z_{xx}) и короткого замыкания ($Z_{кз}$):

$$Z_{c1} = \sqrt{Z_{кз1} Z_{xx1}}, \quad (6.16)$$

$$Z_{c2} = \sqrt{Z_{кз2} Z_{xx2}}, \quad (6.17)$$

$$g_c = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_{кз1}}{Z_{xx1}}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_{кз1}}{Z_{xx1}}}}. \quad (6.18)$$

Характеристические параметры связаны с коэффициентами A матрицы четырехполюсника следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} = A &= \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \operatorname{ch} g_c \\ A_{12} = B &= \sqrt{Z_{c1}Z_{c2}} \operatorname{sh} g_c \\ A_{21} = C &= \frac{1}{\sqrt{Z_{c1}Z_{c2}}} \operatorname{sh} g_c \\ A_{22} = D &= \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \operatorname{ch} g_c \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

В фильтрах с каскадным соединением звеньев стремятся обеспечить равенство выходного характеристического сопротивления данного звена входному характеристическому сопротивлению следующего звена: такое включение называется согласованным. При этом, в общем случае, не ставится требование равенства выходного и входного характеристических сопротивлений сложного (составного) четырехполюсника. В случае согласованного включения четырехполюсников их характеристические постоянные передачи суммируются (см. задачу 6.41).

Рабочие характеристики электрических фильтров

Для расчета простейших звеньев принималось, что нагрузочное сопротивление равно номинальному характеристическому сопротивлению, в то время как при выводе основных соотношений для характеристического затухания и характеристической фазы предполагалось, что нагрузка согласована с характеристическим

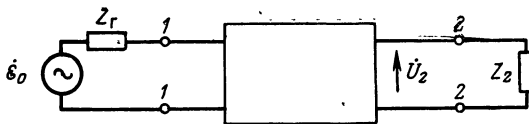


Рис. 6.2

сопротивлением во всей области частот. Вследствие этого расчетные характеристики не совпадают с реальными.

В реальных условиях несогласованности нагрузочного сопротивления с характеристическим целесообразно пользоваться так называемыми рабочими параметрами.

Рассмотрим схему четырехполюсника (рис. 6.2), включенного между генератором напряжения с внутренним сопротивлением Z_r и нагрузкой Z_2 .

Рабочая постоянная передачи g_p определяется выражением

$$g_p = \frac{1}{2} \ln \frac{P_0}{P_2}, \quad (6.20)$$

где P_0 — мощность, отдаваемая генератором в согласованную нагрузку, непосредственно подключенную к нему, а P_2 — мощность, которая потребляется нагрузкой Z_2 в реальной схеме.

Вещественная часть g_p называется рабочим затуханием и определяется формулой

$$a_p = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{P_0}{P_2} \right|, \text{ неп}, \quad (6.21)$$

а мнимая часть — рабочей фазой

$$b_p = \frac{1}{2} \arg \left(\frac{P_0}{P_2} \right), \text{ рад}. \quad (6.22)$$

Рабочая постоянная передачи g_p и рабочее затухание a_p связаны с эдс генератора \mathfrak{E} , напряжением U_2 и сопротивлениями генератора и нагрузки следующими соотношениями:

$$g_p = \ln \frac{\mathfrak{E}}{2U_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_2}{Z_r}, \quad (6.23)$$

$$a_p = \ln \left| \frac{\mathfrak{E}}{2U_2} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{Z_2}{Z_r} \right|. \quad (6.24)$$

Если $Z_r = Z_{c1}$ и $Z_2 = Z_{c2}$, то рабочая постоянная передачи g_p равна характеристической постоянной передачи g_c .

Рабочие параметры четырехполюсника связаны с другими его параметрами и, в частности, с характеристическими следующим образом:

$$g_p = g_c + \ln \frac{Z_r + Z_{c1}}{2 \sqrt{Z_r Z_{c1}}} + \ln \frac{Z_2 + Z_{c2}}{2 \sqrt{Z_2 Z_{c2}}} + \ln \left(1 - \frac{Z_r - Z_{c1}}{2 \sqrt{Z_r Z_{c1}}} \frac{Z_2 - Z_{c2}}{Z_2 + Z_{c2}} e^{-2g_c} \right); \quad (6.25)$$

$$a_p = a_c + \ln \left| \frac{Z_r + Z_{c1}}{2 \sqrt{Z_r Z_{c1}}} \right| + \ln \left| \frac{Z_2 + Z_{c2}}{2 \sqrt{Z_2 Z_{c2}}} \right| + \ln \left| 1 - \frac{Z_r - Z_{c1}}{Z_r + Z_{c1}} \frac{Z_2 - Z_{c2}}{Z_2 + Z_{c2}} e^{-2g_c} \right|. \quad (6.26)$$

Легко видеть, что при $Z_r = Z_{c1}$ и $Z_2 = Z_{c2}$ $a_p = a_c$.

Практический расчет фильтров

Для фильтров, рассчитываемых по характеристическим параметрам, схемы составляются из каскадно включенных простейших звеньев (полузвеньев). Включение звеньев должно быть обязательно согласованным, так как только при этом условии можно суммировать характеристические постоянные передачи.

Характеристическое затухание каждого звена в пределах полосы прозрачности равно нулю, вне этой полосы частот оно отлично

от нуля. Включая каскадно звенья с одинаковыми полосами прозрачности и одинаковыми характеристическими сопротивлениями, можно обеспечить необходимую величину затухания в заданной полосе частот.

Для расчета фильтров имеется каталог типовых звеньев (табл. 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6) вместе с характеристиками и необходимыми расчетными формулами.

К сожалению, характеристические сопротивления звеньев фильтра выражаются физически нереализуемыми функциями, и по этой причине согласованное включение в реальных схемах можно осуществить только приближенно. Как правило, фильтр включается между активными сопротивлениями. При этом рабочее затухание будет отличаться от характеристического и, в частности, не будет равно нулю в полосе частот, которая при согласованном включении определялась как полоса прозрачности.

Ниже излагаются приемы расчета симметричных фильтров нижних и верхних частот, полосовых и заграждающих фильтров с симметричными характеристиками, а также «фильтров сосредоточенной селекции» с несимметричными характеристиками.

Расчет фильтров нижних частот

Излагаемая ниже методика расчета фильтра нижних частот является основополагающей и для других типов фильтров.

Для расчетов вводятся следующие определения и обозначения:

1. Нормированная частота

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}.$$

2. Рабочая полоса пропускания — полоса частот, в пределах которой рабочее затухание не превышает величины Δa . Границы рабочей полосы пропускания: нижняя — 0, верхняя — f_x (в нормированной шкале — $0 \div x$).

3. Рабочая полоса задерживания — полоса частот, в которой рабочее затухание не менее заданной величины. Границы: нижняя — f_k , верхняя — f_{k1} или ∞ (в нормированной шкале $\eta_k = \kappa$; $\eta_{k1} = \kappa_1$ или ∞).

Как уже отмечалось, несогласованность включения звеньев фильтра приводит к появлению затухания в полосе $0 < \eta < 1$.

Рабочее затухание симметричного фильтра в полосе пропускания определяется выражением¹⁾

$$a_p = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{R_2}{Z_c} - \frac{Z_c}{R_2} \right)^2 \sin^2 a_c \right]. \quad (6.27)$$

¹⁾ Вывод приводимых ниже формул дан в [9].

ЭВЕНЬЯ ФИЛЬТРОВ НИЖНИХ ЧАСТОТ

Таблица 6.2

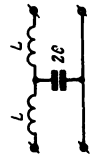
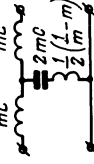
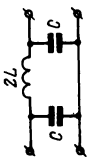
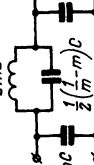
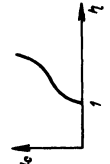
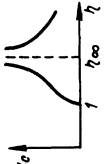

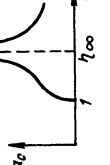
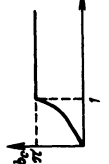
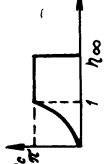
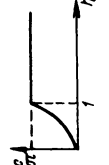
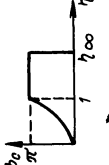
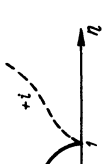

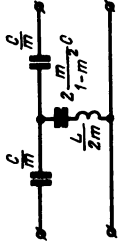
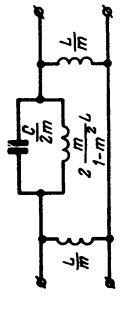
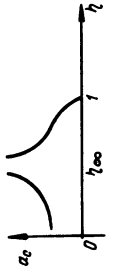
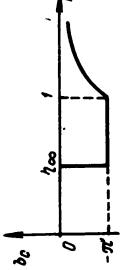
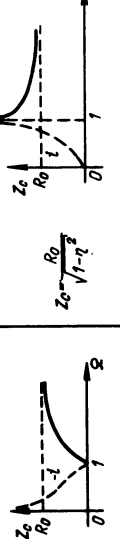
| | | | | |
|---|--|---|---|---|
| Схема фильтра |  |  |  |  |
| Характеристическое затухание |  |  |  |  |
| Характеристическая фаза |  |  |  |  |
| Характеристическая передаточная функция | $g_c = 2\eta \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} - 1}$ | $g_c = 2\eta \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} + m}{\sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} - m}$ | $g_c = 2\eta \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} - 1}$ | $g_c = 2\eta \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} + m}{\sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} - m}$ |
| Характеристическое сопротивление | $Z_c = R_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ |  | $Z_c = R_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ |  |
| Расчетные формулы | $\eta = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{f}{f_0}; \quad \eta_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}}; \quad m = \sqrt{1 - \frac{1}{h_{\infty}^2}}$ $L = \frac{R_0}{\omega_0}; \quad C = \frac{1}{R_0 \omega_0}$ | | | |

Таблица 6.3

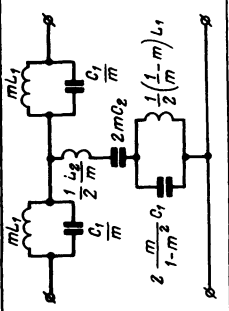
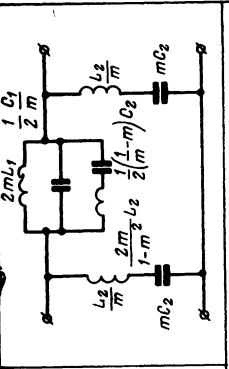
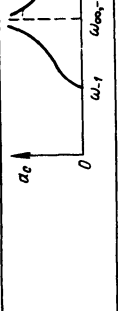
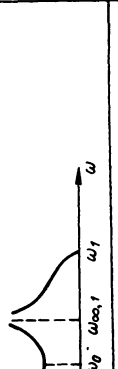
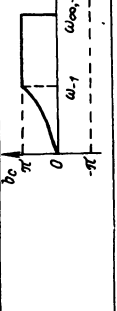
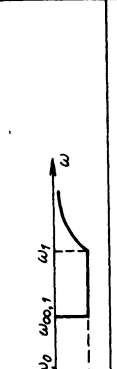
ЗВЕНЬЯ ФИЛЬТРОВ ВЕРХНИХ ЧАСТОТ

| | |
|--|--|
| <p>Схема фильтра</p>  |  |
| <p>Характеристическое затухание</p> |  |
| <p>Характеристическая фаза</p> |  |
| <p>Характеристическая постоянная передачи</p> | $g_c = 2m \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\eta^2} + m}{1 - \frac{1}{\eta^2} - m}}$ |
| <p>Характеристическое сопротивление</p> |  |
| <p>Расчетные формулы</p> | $\eta = \frac{\omega_0}{\omega}; \quad \eta_{\infty} = \sqrt{1 - m^2}; \quad L = \frac{R_0}{\omega_0}; \quad C = \frac{1}{R_0 \omega_0}$ |

ЗВЕНЬ ПОЛОСОВЫХ ФИЛЬТРОВ

| | | |
|--|--|--|
| Схема фильтра | | |
| Характеристическое затухание | | |
| Характеристическая фаза | | |
| Характеристическая постоянная передачи | $g_c = 2\eta \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{\tau^2} + m}$ $\sqrt{1 - \frac{\eta^2}{\tau^2} - m}$ | |
| Характеристическое сопротивление | | |
| Расчетные формулы | $\eta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(\omega_1 - \omega_2)\omega}$ $\eta_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}}$ $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \sqrt{\omega_{огр,1} \omega_{огр,2}}$ $L_1 = \frac{R_0}{\omega_1 - \omega_2}; \quad L_2 = \frac{R_0(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_1 \omega_2}$ $C_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{R_0 \omega_1 \omega_2}; \quad C_2 = \frac{1}{R_0(\omega_1 - \omega_2)}$ | |

ЗВЕНЬЯ ЗАГРАЖДАЮЩИХ ФИЛЬТРОВ Таблица 6.5

| | |
|--|--|
| <p>Схема фильтра</p>  |  |
| <p>Характеристическое затухание</p>  |  |
| <p>Характеристическая фаза</p>  |  |
| <p>Характеристическая постоянная передачи</p> $g_c = 2\ln \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} + m}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} - m}$ | $Z_c = R_0 \sqrt{1 - \eta^2}$ |
| <p>Характеристическое сопротивление</p> $\eta = \frac{(\omega_1 - \omega_2) \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ | $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \sqrt{\omega_{\infty 1} \omega_{\infty 2}}$ |
| <p>Расчетные формулы</p> | $L_1 = \frac{R_0 (\omega_1 - \omega_2)}{\omega_1 \omega_2}, \quad C_1 = \frac{1}{R_0 (\omega_1 - \omega_2)},$ $L_2 = \frac{R_0}{\omega_1 - \omega_2}, \quad C_2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{R_0 \omega_1 \omega_2}$ |

ЗВЕНЬЯ ФИЛЬТРОВ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СЕЛЕКЦИИ

| | |
|--|---|
| Схема фильтра | |
| Характеристическое затухание | |
| Характеристическая фаза | |
| Характеристическая постоянная передачи | $g_c = \ln \frac{1 + \frac{\omega_1}{\omega_1} \sqrt{\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_1^2 - \omega_{-1}^2}}}{1 - \frac{\omega_1}{\omega_1} \sqrt{\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_1^2 - \omega_{-1}^2}}}$ |
| Характеристическое сопротивление | $Z_c = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \eta^2}}$ |
| Расчетные формулы | $L_1 = \frac{\omega_1 - \omega_{-1}}{\omega_1 \omega_{-1}} R_0;$ $\eta = \frac{\omega^2 - \omega_1 \omega_{-1}}{(\omega_1 - \omega_{-1}) \omega};$ $C_1 = \frac{\omega_{-1}}{\omega_1} \frac{1}{(\omega_1 - \omega_{-1}) R_0}; \quad C_2 = \frac{\omega_1 + \omega_{-1}}{\omega_1 \omega_{-1} R_0}$ |

Неравномерность характеристики затухания Δa для звеньев, данные о которых приведены в таблицах, при правильном выборе параметров фильтра не превышает величины

$$\Delta a = \ln \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{1 - \chi^2}} + \sqrt[4]{1 - \chi^2} \right). \quad (6.28)$$

В полосе задерживания рабочее затухание определяется равенством

$$a_p = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{R_2}{|Z_c|} + \frac{|Z_c|}{R_2} \right)^2 \text{sh}^2 a_c \right]. \quad (6.29)$$

На одних частотах в пределах этой полосы рабочее затухание может быть больше, а на других — меньше (но не более, чем на 0,7 *nep*) характеристического, т. е.

$$a_p \geq a_c - 0,7. \quad (6.30)$$

Поэтому при расчете фильтра по характеристическим параметрам требования к расчетной величине затухания нужно увеличивать на 0,7 *nep* по сравнению с заданной.

Для наилучшего согласования звена фильтра с нагрузкой необходимо правильно выбрать параметр звена R_0 . По заданной нагрузке R_2 этот параметр находится из формул:

для Т-образных звеньев

$$R_0 = \frac{R_2}{\sqrt[4]{1-x^2}}; \quad (6.31)$$

для П-образных звеньев

$$R_0 = R_2 \sqrt[4]{1-x^2}. \quad (6.32)$$

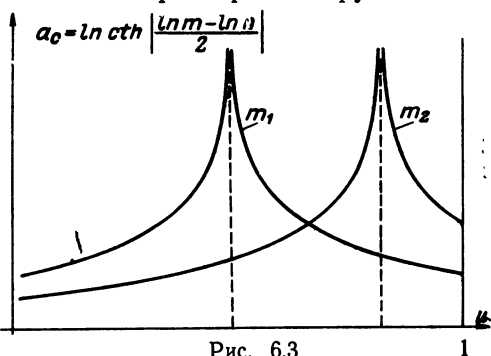


Рис. 6.3

Наиболее трудоемкой частью расчета фильтра является подбор звеньев для обеспечения необходимых требований к затуханию в полосе задерживания. Звенья подбираются при помощи специального шаблона.

Основная идея «метода шаблонов» состоит в том, что на шкале $\ln u$ (где $u = \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}}$) характеристическое затухание любого звена фильтра (см. табл. 6.2).

$$a_c = \ln \left| \frac{u+m}{u-m} \right| = \ln \operatorname{cth} \left| \frac{\ln m - \ln u}{2} \right| \quad (6.33)$$

может быть построено с помощью одного шаблона (лекала) — см. рис. 6.3.

В соответствии с (6.33) на шкале $\ln u$ характеристическое затухание звена зависит только от абсолютного значения разности $\ln m - \ln u$ (рис. 6.3), и, следовательно, достаточно иметь только один шаблон (лекало), при помощи которого можно построить семейство характеристик путем параллельного перемещения лекала. Такое семейство для четырех значений m дано на рис. 6.4 (m определяет значения параметров элементов звена).

При помощи шаблона путем ряда последовательных испытаний (построений) можно выбрать необходимое число звеньев и значения параметра m .

В качестве условий расчета обычно формулируются следующие требования:

- 1) рабочая полоса пропускания — $(0 < f < f_x)$;

- 2) допустимое затухание в рабочей полосе пропускания Δa ;
- 3) рабочая полоса задерживания ($f_k < f < f_{k1}$);
- 4) кривая (таблица, функция), определяющая требования к затуханию в полосе задерживания;
- 5) сопротивления нагрузок R_2 и R_T .

Кроме того, естественным требованием является требование минимального числа звеньев.

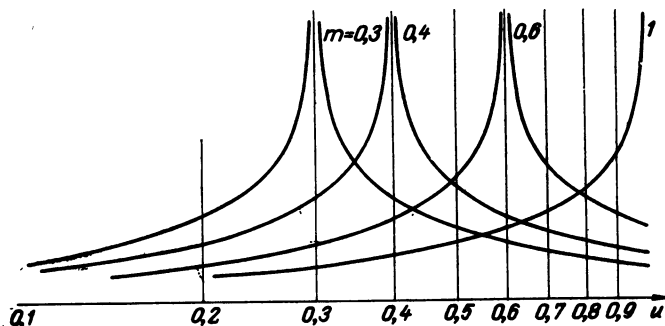


Рис. 6.4

Расчет проводится в следующем порядке.

1. По заданному Δa определяется коэффициент использования полосы κ ¹⁾, после чего вычисляется параметр f_0 :

$$f_0 = \frac{f_x}{\kappa}.$$

2. Выбирается структура звеньев и рассчитывается оптимальное значение параметра R_0 [по ф-ле (6.32) или (6.33)].

3. При помощи шаблона выбираются необходимое число звеньев и значения параметров m .

4. По формулам, приведенным в таблицах, рассчитываются параметры элементов фильтра.

Расчет фильтров верхних частот

Расчет фильтра верхних частот можно свести к расчету эквивалентного фильтра нижних частот.

По заданному Δa рассчитывается коэффициент κ [ф-ла (6.28)] и затем определяется параметр f_0 :

$$f_0 = f_x \kappa,$$

где f_x — граничная частота полосы пропускания фильтра верхних частот.

После этого подготовительного расчета формулируются требования к эквивалентному фильтру нижних частот.

¹⁾ Формула для расчета κ следует из ф-лы (6.28) (см. задачу 6.56).

Полоса пропускания эквивалентного фильтра нижних частот (в нормированной шкале) определяется неравенством $0 < \eta < \kappa$, а полоса задерживания — неравенством $\frac{f_0}{f_k} < \eta < \infty$, где f_k — граничная частота полосы задерживания фильтра верхних частот. Требования к затуханию и сопротивлению сохраняются прежними. После расчета фильтра нижних частот (исключая расчет параметров элементов звеньев) по формулам, приведенным в табл. 6.3, определяют параметры элементов фильтра верхних частот.

Расчет полосовых фильтров

Методика расчета полосовых фильтров с симметричными характеристиками полностью совпадает с расчетом фильтра верхних частот. Здесь также необходимо перейти к эквивалентному фильтру нижних частот.

Требования к полосовому фильтру удобно формулировать при помощи графика (рис. 6.5). Они могут и не содержать условий

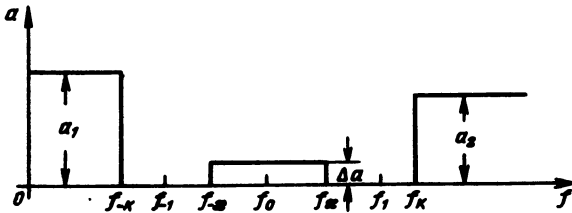


Рис. 6.5

симметрии характеристик (в отличие от характеристик рассматриваемых фильтров — см. табл. 6.4), поэтому при расчете необходимо ориентироваться на выполнение требований к затуханию в «наиболее опасной» полосе частот. Например, по рис. 6.5 нужно ориентироваться на полосу $0 < f < f_{-к}$, так как в полосе $f > f_k$ заданные требования будут «перевыполнены»¹⁾. В таких случаях приходится мириться с неоптимальностью решения во имя простоты расчета. Следует отметить, что такое положение вообще характерно для методов построения фильтров по характеристическим параметрам.

Переход к эквивалентному фильтру нижних частот состоит в определении рабочей полосы пропускания и рабочей полосы задерживания фильтра нижних частот в нормированной шкале. С этой целью по заданному Δa определяется κ [ф-ла (6.28)]; затем вычисляется значение κ :

$$\kappa = \kappa \frac{f_k - f_{-к}}{f_x - f_{-x}}$$

¹⁾ Предполагается, что $f_x f_{-x} = f_k f_{-к} = f_0^2$.

После этого расчет выполняется обычными приемами (исключая определение параметров элементов звеньев, которые рассчитываются по формулам табл. 6.4).

При вычислениях удобно пользоваться равенством

$$f_1 - f_{-1} = \frac{f_x - f_{-x}}{\kappa}.$$

Расчет заграждающих фильтров

Расчет заграждающих фильтров также основан на переходе к эквивалентному фильтру нижних частот. Пользуясь обозначениями рис. 6.6, который отражает требования к характеристике затухания заграждающего фильтра, эквивалентный фильтр нижних частот можем рассчитать следующим образом.

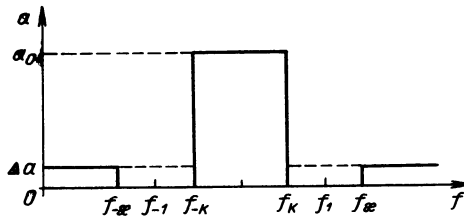


Рис. 6.6

В нормированной полосе частот, определяемой неравенствами $0 < \eta < \kappa$, затухание фильтра нижних частот не должно превышать величины Δa .

Значение κ получим, исходя из

Δa , по ф-ле (6.28). В полосе частот, где $\eta > \kappa$, затухание фильтра должно быть не ниже величины a_0 . Значение κ найдется из выражения

$$\kappa = \kappa \frac{f_x - f_{-x}}{f_k - f_{-k}}.$$

После перехода к фильтру нижних частот расчет выполняется обычными приемами (за исключением определения параметров элементов звеньев). Расчет параметров осуществляется на основе формул, приведенных в табл. 6.5.

При вычислениях полезно пользоваться формулой

$$f_1 - f_{-1} = \kappa (f_x - f_{-x}).$$

Расчет фильтров сосредоточенной селекции

Фильтры сосредоточенной селекции по своей структуре относятся к классу симметричных, но с несимметричными характеристиками. Эти фильтры состояются из нескольких одинаковых звеньев, параметры которых определяются согласно требованиям, предъявляемым к фильтру. Схема звена, его характеристики и расчетные формулы приведены в табл. 6.6.

Методика расчета фильтра сосредоточенной селекции изложена в решении задачи 6.66. Отличительной особенностью здесь является учет потерь в элементах фильтра.

Задачи и упражнения

● 6.1. Вывести выражения амплитудно-частотных характеристик простейших фильтров, схемы которых изображены на рис. 6.7 (а, б, в, г и д). Рекомендуется ввести обозначения:

$$\omega RC = x; \quad \frac{\omega L}{R} = y.$$

● 6.2.* Нагрузкой в схеме простого сглаживающего (дрессельного) фильтра (рис. 6.7а) является активное сопротивление $R=0,03 \text{ ом}$. Внутреннее сопротивление генератора $R_{вн}$ можно принять равным нулю. Рассчитать индуктивность

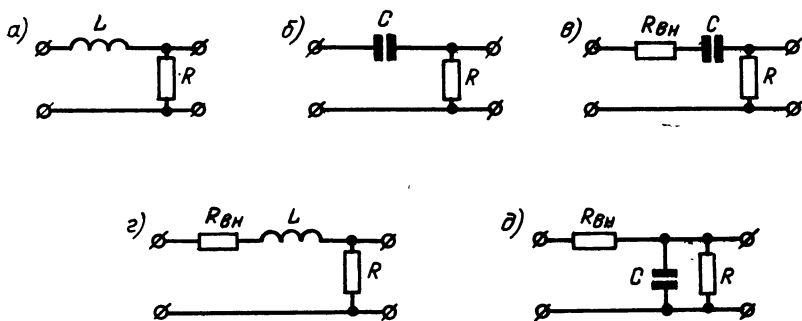


Рис. 6.7

дресселя, при которой ослабление на частоте $f=350 \text{ гц}$ равно десяти, т. е. чтобы амплитуда напряжения на нагрузке при заданной частоте была в десять раз меньше, чем амплитуда входного напряжения.

● 6.3. Рассчитать индуктивность L дроссельного фильтра по условиям ослабления на заданной частоте. Внутреннее сопротивление генератора принять равным нулю. Данные для расчета указаны в таблице.

| № примера | Сопротивление нагрузки, ом | Частота гц | Ослабление (число раз) |
|-----------|----------------------------|------------|------------------------|
| 1 | 0,05 | 50 | 10 |
| 2 | 0,1 | 100 | 20 |
| 3 | 0,025 | 100 | 5 |
| 4 | 0,3 | 50 | 15 |

● 6.4.* Используя полученные в задаче 6.1 выражения для амплитудно-частотных характеристик фильтров, изображенных на рис. 6.7 г и д, а также построенные по ним графики, решить, для каких схем питания выпрямленным током (в смысле соотношения сопротивлений нагрузки и генератора) целесообразно применять дроссельный фильтр, а для каких — конденсаторный.

● 6.5.* Вывести формулу для расчета простого конденсаторного фильтра (рис. 6.7 д), т. е. рассчитать емкость C по заданным сопротивлениям R и $R_{вн}$, а также величине ослабления, равной $\frac{1}{K(\omega)}$.

● 6.6.* Найти емкость простого конденсаторного фильтра (рис. 6.7 д) при условии, что пульсации на частоте $f=50 \text{ гц}$ должны быть уменьшены в 30 раз. Данные схемы: $R_{вн}=60 \text{ ком}$; $R=10^3 \text{ ком}$.

● 6.7. Рассчитать емкость простого конденсаторного фильтра по заданным в нижеприведенной таблице условиям фильтрации и данным схемы.

| № примера | $f, \text{гц}$ | $\frac{1}{K(f)}$ | $R \cdot 10^6, \text{ом}$ | $R_{\text{вн}} \cdot 10^6, \text{ом}$ |
|-----------|----------------|------------------|---------------------------|---------------------------------------|
| 1 | 50 | 10 | 0,5 | 2 |
| 2 | 100 | 20 | 1 | 5 |
| 3 | 100 | 40 | 2 | 5 |
| 4 | 50 | 50 | 1 | 2,5 |

● 6.8. Вывести выражения амплитудно-частотной характеристики для дроссельно-конденсаторного сглаживающего фильтра без учета внутреннего сопротивления генератора R_i (рис. 6.8а) и с учетом последнего (рис. 6.8б).

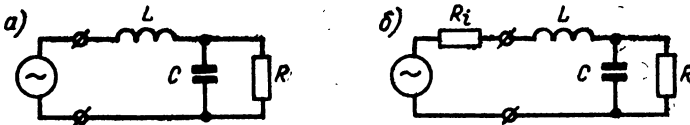


Рис. 6.8

● 6.9. В схеме рис. 6.8а нагрузочное сопротивление $R=300 \text{ ом}$, индуктивность дросселя $L=1,5 \text{ гн}$ и емкость конденсатора $C=50 \text{ мкф}$. Найти уменьшение пульсаций на частоте $f=300 \text{ гц}$.

● 6.10.* Дать общий вид графика амплитудно-частотной характеристики дроссельно-конденсаторного фильтра (рис. 6.8а).

● 6.11.* Рассчитать индуктивность дросселя в схеме дроссельно-конденсаторного фильтра (рис. 6.8а), если ослабление на частоте $f=50 \text{ гц}$ должно быть равно 80 и на выходе фильтра предполагается включить конденсатор емкостью $C=30 \text{ мкф}$. Сопротивление нагрузки равно $0,5 \cdot 10^6 \text{ ом}$.

● 6.12.* Определить емкость C дроссельно-конденсаторного фильтра (рис. 6.8а), если индуктивность дросселя равна $L=20 \text{ гн}$, а ослабление на частоте $f=50 \text{ гц}$ должно быть равно 350. Сопротивление нагрузки $R=10^6 \text{ ом}$.

● 6.13. Расчет дроссельно-конденсаторного фильтра (рис. 6.8а) сводится к определению индуктивности L и емкости C по заданной нагрузке R и условиям фильтрации $K(\omega)$ на данной частоте f . Обычно одним из этих параметров (L или C) приходится задаваться, и, таким образом, расчету подлежат либо L , либо C .

Рассчитать по условиям, приводимым в таблице, L или C дроссельно-конденсаторного фильтра (рис. 6.8а).

| № примера | Ослабление (число раз) | Частота $f, \text{гц}$ | Нагрузка $R \cdot 10^6, \text{ом}$ | $L, \text{гн}$ | $C, \text{мкф}$ |
|-----------|------------------------|------------------------|------------------------------------|----------------|-----------------|
| 1 | 100 | 50 | 1 | ? | 16 |
| 2 | 150 | 50 | 2 | 30 | ? |
| 3 | 200 | 50 | 0,5 | ? | 20 |
| 4 | 300 | 50 | 1 | 15 | ? |

● 6.14.* В схеме параллельного питания (рис. 6.9) применяются разделительный конденсатор C_D , разделительный дроссель L_D и блокировочный конденсатор C_B . Контур настроен на частоту ω_0 ; сопротивление контура равно

$$R_{\omega} = \frac{L}{CR}.$$

Составить формулы для расчета C_D , L_D и C_B .

● 6.15.* Рассчитать разделительные конденсатор и дроссель в схеме параллельного питания (рис. 6.9), если сопротивление контура на резонансной частоте $f = 3 \cdot 10^6$ гц равно $R_{\omega} = 10^4$ ом.

● 6.16. Рассчитать по приводимым в таблице условиям разделительные конденсатор и дроссель в схеме параллельного питания (рис. 6.9).

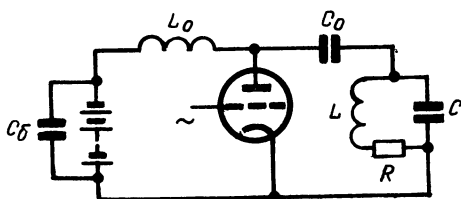


Рис. 6.9

| № примера | L , мкн | C , пф | R , ом | $f_0 \cdot 10^6$, гц | $R_{\omega} \cdot 10^3$, ом |
|-----------|-----------|----------|----------|-----------------------|------------------------------|
| 1 | 0,18 | 60 | 35 | — | — |
| 2 | — | — | — | 0,15 | 15 |
| 3 | — | — | — | 0,4 | 38 |

● 6.17.* Найти выражения характеристик затухания, фазового сдвига и характеристического сопротивления для простейших звеньев фильтров (без потерь) нижних и верхних частот.

● 6.18. Вывести формулы для расчета параметров простейших звеньев фильтров нижних и верхних частот по заданным значениям полосы прозрачности и

нагрузки $R = R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

● 6.19.* Рассчитать звено фильтра нижних частот, имеющего полосу прозрачности от нуля до $f_0 = 10\,000$ гц. Сопротивление нагрузки равно 600 ом.

● 6.20. Рассчитать по данным таблицы параметры элементов звеньев фильтров нижних частот.

| Данные | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------------------|---------|-----------|-----------|-----------|------------|
| Полоса прозрачности, гц | 0 ÷ 300 | 0 ÷ 2 000 | 0 ÷ 10 00 | 0 ÷ 8 000 | 0 ÷ 10 000 |
| Нагрузка R , ом | 1 000 | 660 | 2 000 | 1 000 | 500 |

● 6.21.* Рассчитать затухание звена фильтра нижних частот на частоте $f = 20\,000$ гц (данные для расчета взять из задачи 6.19). Выразить затухание в неперах, децибелах и простым числом, равным отношению амплитуд входа и выхода.

● 6.22. Рассчитать затухание звена фильтра нижних частот на заданной частоте по данным, приведенным в таблице. Затухание выразить в неперах, децибелах и простым числом.

| № примера | f , гц | Полоса прозрачности, гц | L , гн | C , мкф |
|-----------|----------|-------------------------|----------|-----------|
| 1 | 6 000 | 0 ÷ 1 000 | — | — |
| 2 | 4 000 | — | 0,64 | 0,16 |
| 3 | 3 000 | 0 ÷ 2 000 | — | — |
| 4 | 10 000 | 0 ÷ 2 500 | — | — |

● 6.23.* Найти частоту, на которой затухание звена фильтра нижних частот будет равно 2,4 неп, если полоса прозрачности фильтра простирается до 10 000 гц.

● 6.24.* Найти фазовый сдвиг звена фильтра нижних частот на частоте 5000 гц, если полоса прозрачности фильтра соответствует пределам от 0 до 10 000 гц.

● 6.25. По данным задачи 6.22 рассчитать фазовые сдвиги на следующих частотах:

| № примера | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------|-----|-----|-----|------|
| f , гц | 300 | 500 | 700 | 1000 |

● 6.26. На какой частоте фазовый сдвиг фильтра нижних частот будет равен 40° , если граничная частота равна 10 000 гц.

● 6.27.* С сопротивления R_2 усилительной лампы \mathcal{L}_1 (рис. 6.10) снимается напряжение, содержащее колебания радио и звуковых частот. На сетку лампы \mathcal{L}_2 должны подаваться только колебания низкой частоты, причем частота среза

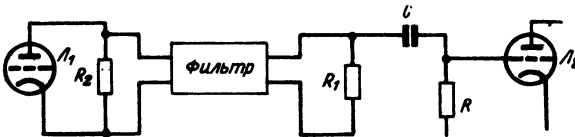


Рис. 6.10

$f_0 = 20$ кгц. Нагрузочное сопротивление фильтра $R_1 = 50$ ком. Затухание на частоте 25 кгц должно быть не менее 10 дб. Внутреннее сопротивление лампы \mathcal{L}_2 $R_i = 200$ ком. Выбрать схему звена фильтра, рассчитать параметры его элементов и сопротивление R_2 .

● 6.28.* Рассчитать звено фильтра верхних частот, имеющего полосу прозрачности от 12 000 гц. Нагрузка фильтра равна 2000 ом.

● 6.29. Рассчитать звено фильтра верхних частот по заданным в таблице полосе прозрачности и нагрузке.

| № примера | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------------|-------|-------|--------|-------|--------|
| Граничная частота f , гц | 500 | 1 000 | 20 000 | 5 000 | 10 000 |
| Нагрузка R , ом | 5 000 | 1 000 | 2 000 | 1 000 | 5 000 |

● 6.30. Найти затухание (в неперах и децибелах) и фазовый сдвиг звена фильтра верхних частот по данным, приводимым в таблице.

| № примера | Данные фильтра | | | Частота, на которой определяется затухание, гц | Частота, на которой определяется фазовый сдвиг гц |
|-----------|----------------|-----------|-----------|--|---|
| | f_0 , гц | L , мгн | C , мкф | | |
| 1 | 2 000 | — | — | 500 | 4 000 |
| 2 | — | 16 | 0,1 | 1 000 | 3 000 |
| 3 | 5 000 | — | — | 4 000 | 10 000 |
| 4 | 8 000 | — | — | 1 000 | 24 000 |
| 5 | — | 3,2 | 0,01 | 5 000 | 30 000 |

● 6.31. Найти, на каких частотах будут иметь место заданные затухание и фазовый угол в звеньях фильтров верхних частот. Данные для расчета приведены в таблице.

| № примера | a , неп | b , град | f_0 , гц | L , мгн | C , мкф |
|-----------|-----------|------------|------------|-----------|-----------|
| 1 | 0,45 | 45 | 10 000 | — | — |
| 2 | 0,8 | 30 | 5 000 | — | — |
| 3 | 1,0 | 60 | — | 3,2 | 0,01 |
| 4 | 1,25 | 80 | 8 000 | — | — |
| 5 | 1,6 | 15 | — | 16 | 0,1 |

● 6.32. Найти значения характеристического сопротивления звеньев фильтров по данным, приводимым в таблице.

| № примера | Тип фильтра (звена) | Элементы фильтра | | Граничная частота гц | Частота, на которой определяется характеристическое сопротивление, гц |
|-----------|----------------------------|----------------------|-----------|----------------------|---|
| | | L , гн | C , мкф | | |
| 1 | Т-образный, нижних частот | 1,06 | 1,06 | 300 | 600 |
| 2 | П-образный, нижних частот | 0,795 | 3,18 | 200 | 310 |
| 3 | П-образный, верхних частот | $19,9 \cdot 10^{-3}$ | 0,0796 | 2000 | 1000 |

● 6.33. Рассчитать параметры звена полосового фильтра, если известны полоса прозрачности: $f_1=290$ гц, $f_2=1090$ гц и номинальное характеристическое сопротивление $R_0=800$ ом.

● 6.34.* Получить формулы для расчета граничных частот f_1 и f_2 полосы прозрачности звена полосового фильтра по «центральной» частоте f_0 (см. табл. 6.1) и параметрам элементов.

● 6.35.* В горизонтальные ветви звена полосового фильтра, собранного по Т-образной схеме, включены катушки индуктивностью по 80 мгн каждая и конденсаторы емкостью по 1 мкф; в вертикальную ветвь включена катушка индуктивностью 160 мгн и конденсатор емкостью 0,5 мкф.

Рассчитать полосу прозрачности и номинальное характеристическое сопротивление звена.

● 6.36. Найти полосу прозрачности и номинальное характеристическое сопротивление звена Т-образного полосового фильтра по данным, приводимым в таблице.

| № примера | Горизонтальная ветвь | | Вертикальная ветвь | |
|-----------|--|--|-----------------------------------|----------------------------------|
| | Индуктивность каждой катушки L , мкн | Емкость каждого конденсатора C_1 , мкф | Индуктивность катушки L_2 , мкн | Емкость конденсатора C_2 , мкф |
| 1 | 80 | 2 | 160 | 1 |
| 2 | 14,4 | 1 | 14,4 | 1 |

● 6.37. Определить параметры звена заграждающего фильтра по следующим данным:

$$1. f_1=300 \text{ гц}, f_2=2500 \text{ гц}, R_0=2000 \text{ ом.}$$

$$2. f_1=500 \text{ гц}, f_2=2500 \text{ гц}, R_0=2500 \text{ ом.}$$

● 6.38. Схема двух одинаковых связанных контуров без потерь может быть представлена в виде эквивалентной схемы (рис. 6.11), представляющей собой звено полосового фильтра, в котором

$$L_S = L - M = L(1 - \kappa).$$

Найти характеристическое сопротивление и граничные частоты полосы прозрачности.

● 6.39. При расчете предполагается, что фильтр нагружен на сопротивление R , равное сопротивлению R_0 , что в действительности имеет место только при частоте $\omega=0$ для звена фильтра нижних частот и при $\omega = \infty$ для звена фильтра верхних частот. Обычной нагрузкой фильтра является активное сопротивление, в то время как характеристическое зависит от частоты. Очевидно, можно получить лучшее согласование, если нагрузить фильтр не на

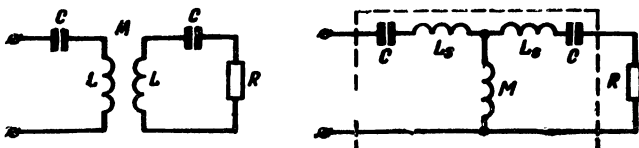


Рис. 6.11

$R=R_0$, а на сопротивление $R=\alpha R_0$, где $\alpha < 1$ в случае Т-образного фильтра и $\alpha > 1$ для П-образного фильтра. При этом точное согласование будет достигаться на некоторой частоте, лежащей ближе к граничной.

Определить значения коэффициента α и частоты точного согласования для фильтра нижних частот, исходя из предположения, что наилучшее согласование будет при нагрузке, равной высоте равнобедренного прямоугольника (рис. 6.12).

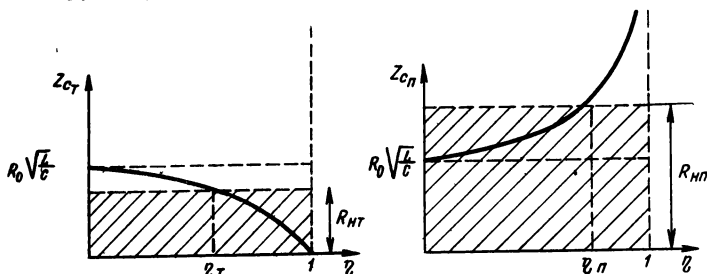


Рис. 6.12

● 6.40. Найти время задержки $\tau = \frac{db}{d\omega}$ при $\omega \rightarrow 0$ для звена фильтра нижних частот и при $\omega \rightarrow \infty$ для звена фильтра верхних частот.

● 6.41.* Показать, что при согласованном включении четырехполюсников их характеристические постоянные передачи суммируются.

● 6.42.* Определить характеристические параметры сложного четырехполюсника, изображенного на рис. 6.13, считая известными характеристические параметры всех трех четырехполюсников.

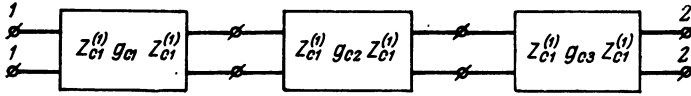


Рис. 6.13

● 6.43. Определить характеристические параметры сложного четырехполюсника, изображенного на рис. 6.14.

● 6.44.* Определить характеристические параметры Г-образного четырехполюсника (рис. 6.15) по данным опытов «короткого замыкания» и «холостого хода».

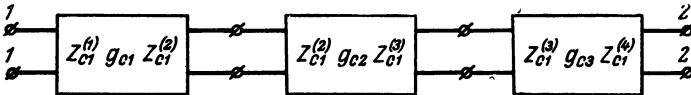


Рис. 6.14

● 6.45.* Вывести формулы для определения характеристических параметров четырехполюсников по известным коэффициентам А.

● 6.46. Пользуясь формулами, полученными в задаче 6.45, найти характеристические параметры Г-образного четырехполюсника (рис. 6.15, задача 6.44). Значения коэффициентов А взять из табл. 2.3.

● 6.47.* Используя результаты решения задачи 6.44, определить характеристические параметры П-образного четырехполюсника (рис. 6.16).

● 6.48. Определить характеристические параметры Т-образного четырехполюсника, изображенного на рис. 6.17.

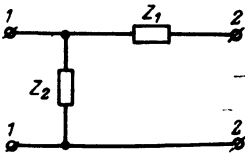


Рис. 6.15

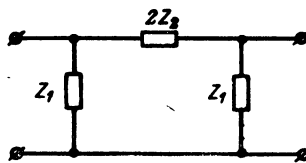


Рис. 6.16

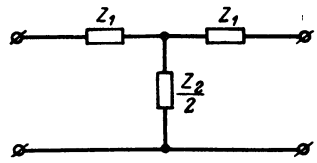


Рис. 6.17

● 6.49. По данным опытов «холостого хода» и «короткого замыкания» определить характеристические параметры «мостового четырехполюсника» (рис. 6.18).

● 6.50.* Определить характеристические параметры Т-образного фильтра нижних частот, изображенного на рис. 6.19. При решении рекомендуется использовать следующие обозначения:

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2; \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \eta; \quad \frac{L}{C} = R_0^2.$$

● 6.51. Определить характеристические параметры П-образного фильтра нижних частот, изображенного на рис. 6.20. При решении рекомендуется использовать обозначения, принятые в задаче 6.50.

● 6.52.* Определить характеристические параметры Т-образного звена фильтра нижних частот, изображенного на рис. 6.21 (фильтра типа m). Рекомендуется воспользоваться обозначениями, которые были приняты в задаче 6.50.

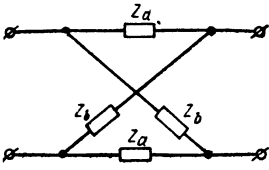


Рис. 6.18

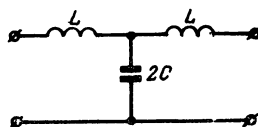


Рис. 6.19

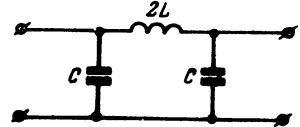


Рис. 6.20

● 6.53. Определить характеристические параметры П-образного фильтра нижних частот, изображенного на рис. 6.22.

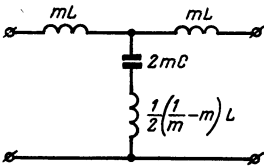


Рис. 6.21

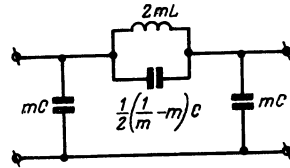


Рис. 6.22

● 6.54. По полученным в задаче 6.52 выражениям характеристических параметров фильтра (типа m) нижних частот построить графики характеристических сопротивления, затухания и фазы.

● 6.55. Построить графики характеристических сопротивления, затухания и фазы П-образного фильтра типа m нижних частот, схема которого дана на рис. 6.22 (задача 6.53).

● 6.56.* Определить значения номинального характеристического сопротивления R_0 Т-образного звена фильтра нижних частот по известным $\Delta a = 0,115 \text{ nep}$ (1 дБ) и $R_2 = 600 \text{ ом}$.

● 6.57. Рассчитать параметры R_0 , R_2 , m и Δa Т-образных и П-образных фильтров нижних частот по данным, приведенным в таблице.

| № примера | Т-образное звено | | α | $\Delta a, \text{ nep}$ | П-образное звено | |
|-----------|-------------------|-------------------|----------|-------------------------|-------------------|-------------------|
| | $R_0, \text{ ом}$ | $R_2, \text{ ом}$ | | | $R_0, \text{ ом}$ | $R_2, \text{ ом}$ |
| 1 | — | — | ? | 0,115 | 600 | ? |
| 2 | 600 | ? | ? | 0,1 | — | — |
| 3 | 1000 | 860 | ? | ? | — | — |
| 4 | — | — | ? | ? | 1000 | 1400 |
| 5 | — | — | ? | 0,2 | ? | 800 |

● 6.58. Построить график зависимости $a_c = f(u)$ для звена фильтра нижних частот при $m=1$ [по ф-ле (6.33)]. Данный график будет определять форму шаблона. При построении рекомендуется на ось абсцисс нанести основную шкалу 25-сантиметровой логарифмической линейки, а на ось ординат — линейную шкалу в масштабе 1 nep — 2 см.

● 6.59. Рассчитать значения элементов Т- и П-образных звеньев фильтров по данным, приведенным в таблице. Обозначения элементов соответствуют схемам рис. 6.23.

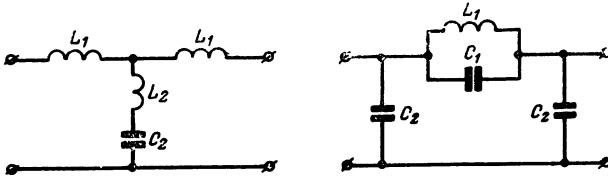


Рис. 6.23

| № примера | Т-образное звено | | | $R_0, \text{ ом}$ | $f_0, \text{ гц}$ | $f_{\text{г}}, \text{ гц}$ | α | m | П-образное звено | | |
|-----------|-------------------|-------------------|-----------------------|-------------------|-------------------|----------------------------|----------|------|-------------------|------------------|------------------|
| | $L_1, \text{ гн}$ | $L_2, \text{ гн}$ | $C_2, \text{ ф}$ | | | | | | $L_1, \text{ гн}$ | $C_1, \text{ ф}$ | $C_2, \text{ ф}$ |
| 1 | ? | ? | ? | 600 | $5 \cdot 10^3$ | — | — | 1 | ? | ? | ? |
| 2 | ? | ? | ? | 600 | $2,4 \cdot 10^3$ | — | — | 0,6 | — | — | — |
| 3 | — | — | — | 98 | ? | $12 \cdot 10^4$ | 0,85 | 0,84 | ? | ? | ? |
| 4 | 0,065 | 0 | $0,117 \cdot 10^{-6}$ | ? | ? | — | — | ? | — | — | — |

● 6.60.* Рассчитать фильтр нижних частот, удовлетворяющий следующим техническим требованиям:

- 1) рабочая полоса пропускания $0 \div 2700 \text{ гц}$;
- 2) допустимое рабочее затухание $\Delta \alpha \leq 0,1 \text{ nep}$;
- 3) в полосе частот, определяемой неравенством $f > 3500 \text{ гц}$, рабочее затухание должно быть не менее 5 nep ;
- 4) фильтр должен работать между сопротивлениями $R_1 = R_2 = 600 \text{ ом}$;
- 5) дополнительно требуется, чтобы число индуктивностей в схеме фильтра было минимальным.

● 6.61. Рассчитать фильтр нижних частот, удовлетворяющий следующим требованиям:

- 1) рабочая полоса пропускания $0 \div 6 \text{ кгц}$;
- 2) затухание в рабочей полосе пропускания $\Delta \alpha \leq 0,05 \text{ nep}$;
- 3) в полосе частот, соответствующих неравенству $f > 12 \text{ кгц}$, рабочее затухание не должно быть меньше $5,4 \text{ nep}$;
- 4) сопротивление $R_1 = R_2 = 135 \text{ ом}$;
- 5) фильтр должен содержать минимальное число индуктивностей.

● 6.62.* Рассчитать фильтр верхних частот, удовлетворяющий следующим требованиям:

- 1) рабочая полоса пропускания $f > f_x = 5 \text{ кгц}$;
- 2) допустимое затухание в полосе пропускания $\Delta \alpha \leq 0,115 \text{ nep}$;
- 3) рабочая полоса задерживания $0 < f < f_k = 4,28 \text{ кгц}$;
- 4) затухание в рабочей полосе задерживания не должно быть меньше $3,4 \text{ nep}$;
- 5) сопротивление $R_1 = R_2 = 1000 \text{ ом}$.

● 6.63. Рассчитать фильтр верхних частот, удовлетворяющий следующим требованиям:

- a) рабочая полоса пропускания $f > f_x = 10,9 \text{ кгц}$;
- б) допустимое затухание в рабочей полосе пропускания $\Delta \alpha \leq 0,1 \text{ nep}$;
- в) рабочая полоса задерживания $0 < f < f_k = 7,9 \text{ кгц}$;
- г) затухание в полосе задерживания не должно быть меньше $3,3 \text{ nep}$;
- д) сопротивление $R_1 = R_2 = 600 \text{ ом}$.

● 6.64.* Рассчитать полосовой фильтр, удовлетворяющий следующим требованиям (см. рис. 6.5):

а) в полосе частот $450 \text{ кГц} = f_{-x} < f < f_x = 470 \text{ кГц}$, рабочее затухание $\Delta a \leq 0,05 \text{ nep}$;

б) в полосах частот: $f < f_{-k} = 440 \text{ кГц}$, $f > f_k = 480 \text{ кГц}$, рабочее затухание не должно быть меньше $4,3 \text{ nep}$;

в) фильтр с обеих сторон нагружается на сопротивления $R_1 = R_2 = 10 \text{ ком}$.
● 6.65. Рассчитать полосовой фильтр с симметричными характеристиками, удовлетворяющий следующим требованиям:

а) рабочая полоса пропускания $9300 = f_{-x} \leq f \leq f_x = 11\,700 \text{ гц}$;

б) затухание в рабочей полосе пропускания $\Delta a \leq 0,05 \text{ nep}$;

в) рабочая полоса задерживания: $f \leq f_{-x} = 8,85 \text{ кГц}$, $f > f_x = 12,3 \text{ кГц}$;

г) затухание в полосе задерживания — не менее $5,3 \text{ nep}$;

д) нагрузочные сопротивления $R_1 = R_2 = 1200 \text{ ом}$.

● 6.66.* Рассчитать фильтр сосредоточенной селекции для усилителя промежуточной частоты, удовлетворяющий следующим требованиям:

1) номинальное значение промежуточной частоты $f_0 = 400 \text{ кГц}$;

2) рабочая полоса пропускания $f_x - f_{-x} = 17 \text{ кГц}$;

3) неравномерность характеристики затухания в полосе пропускания Δa_0 не должна превышать $1,5 \text{ дБ}$ ($0,173 \text{ nep}$);

4) вне частотной полосы шириной 52 кГц затухание a_0 должно быть не менее 50 дБ ($5,75 \text{ nep}$);

5) значения добротностей катушек индуктивностей $Q_L = 400$;

6) фильтр включается в анодную цепь лампы с паразитной емкостью 15 пФ .
Паразитная емкость нагрузки фильтра (следующей лампы) также равна 15 пФ ;

7) значение внешних емкостей фильтра должно быть не менее 200 пФ (для того чтобы исключить влияния паразитных емкостей при смене лампы).

● 6.67. Рассчитать фильтр сосредоточенной селекции усилителя промежуточной частоты, удовлетворяющий следующим требованиям:

1) средняя частота рабочей полосы пропускания $f_0 = 215 \text{ кГц}$;

2) неравномерность характеристики затухания в полосе пропускания шириной 11 кГц должна быть не более 6 дБ ($0,69 \text{ nep}$);

3) при ослаблении в 1000 раз (60 дБ , $6,9 \text{ nep}$) ширина соответствующей полосы частот не должна превышать 30 кГц ;

4) добротность катушек индуктивности фильтра $Q_L = 250$;

5) значения внешних емкостей должны быть не менее 500 пФ .

7.

ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПОСТОЯННЫМИ (ДЛИННЫЕ ЛИНИИ)

Общие положения

Первичные параметры линии

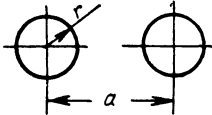
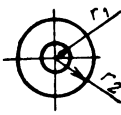
Электрические цепи, геометрические размеры которых сопоставимы с длиной волны распространяющихся в них колебаний и, как следствие этого, амплитуды тока и напряжения в любой точке которых зависят от ее координат, называются цепями с распределенными постоянными или, короче, длинными линиями. Конструктивно длинные линии чаще всего выполняются в виде коаксиального кабеля, двухпроводных, четырехпроводных и однопроводных линий.

Длинные линии характеризуются первичными параметрами:
 L_1 — погонная индуктивность, $гн/м$,
 C_1 — погонная емкость, $фл/м$,
 R_1 — погонное сопротивление, $ом/м$,
 G_1 — погонная проводимость, $сим/м$.

Формулы для расчета погонных параметров некоторых из наиболее распространенных конструкций длинных линий приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРВИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

| | Двухпроводная линия | Коаксиальная линия |
|---|---|--|
| Обозначения |  |  |
| Индуктивность L_1 | $L_1 = 0,4 \ln \frac{d}{r} \frac{мкгн}{м} =$ $= 0,4 \cdot 10^{-6} \ln \frac{d}{r} \frac{гн}{м}$ | $L_1 = 0,2 \ln \frac{r_2}{r_1} \frac{мкгн}{м} =$ $= 0,2 \cdot 10^{-6} \ln \frac{r_2}{r_1} \frac{гн}{м}$ |
| Емкость C_1 | $C_1 = \frac{27,8 \varepsilon_r}{\ln \frac{d}{r}} \frac{нф}{м} =$ $= \frac{27,8 \varepsilon_r}{\ln \frac{d}{r}} 10^{-12} \frac{ф}{м}$ | $C_1 = \frac{55,5 \varepsilon_r}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{нф}{м} =$ $= \frac{55,5 \varepsilon_r}{\ln \frac{r_2}{r_1}} 10^{-12} \frac{ф}{м}$ |
| Сопротивление R_1 (для меди с $\sigma = 5,80 \cdot 10^7 \frac{сим}{м}$) | $R_1 = \frac{8,32}{r_{см}} \sqrt{f_{Гц}} \frac{мком}{м} =$ $= \frac{8,32}{r_{см}} \sqrt{f_{Гц}} 10^{-6} \frac{ом}{м} =$ $= \frac{1,44}{r_{мм} \sqrt{\lambda_m}} \frac{ом}{м}$ | $R_1 = 4,16 \left(\frac{1}{r_{1см}} + \frac{1}{r_{2см}} \right) \times$ $\times \sqrt{f_{Гц}} \frac{мком}{м} = 4,16 \left(\frac{1}{r_{1см}} + \right.$ $\left. + \frac{1}{r_{2см}} \right) \sqrt{f_{Гц}} 10^{-6} \frac{ом}{м} =$ $= \frac{0,72}{\sqrt{\lambda_m}} \left(\frac{1}{r_{1мм}} + \frac{1}{r_{2мм}} \right) \frac{ом}{м}$ |
| Проводимость G_1 | $G = \omega C_1 \operatorname{tg} \delta \frac{сим}{м}$ | $G_1 = \omega C_1 \operatorname{tg} \delta \frac{сим}{м}$ |

Примечание. ε_r — относительная диэлектрическая проницаемость,
 δ — угол диэлектрических потерь.

Значения ϵ_r и $\text{tg} \delta$ для некоторых диэлектриков даны в табл. 7.2.

Т а б л и ц а 7.2

ϵ_r и $\text{tg} \delta$ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

| Наименование диэлектрика | ϵ_r | $\text{tg} \delta \times 10^4$ (на радиочастотах) |
|--------------------------|--------------|--|
| Полистирол | 2,5 | 1,5÷3 |
| Полиэтилен | 2,3 | 2÷5 |
| Полихлорвинил | 3,1÷3,4 | 200 |

Уравнения длинной линии Вторичные параметры линии

Исследование длинных линий в установившемся режиме проводится на базе уравнений длинной линии (телеграфных уравнений), составленных по заданным граничным условиям либо в начале, либо в конце линии:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 \text{ch} \gamma x - \dot{I}_1 Z_c \text{sh} \gamma x \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 \text{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z_c} \text{sh} \gamma x \end{aligned} \right\}; \quad (7.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \text{ch} \gamma y + \dot{I}_2 Z_c \text{sh} \gamma y \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \text{ch} \gamma y + \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \text{sh} \gamma y \end{aligned} \right\}. \quad (7.2)$$

В этих формулах:

\dot{U}_1, \dot{I}_1 — напряжение и ток в начале линии,

\dot{U}_2, \dot{I}_2 — напряжение и ток в конце линии,

\dot{U}, \dot{I} — напряжение и ток в любой точке линии,

x — координата, отсчитываемая от начала линии,

y — координата, отсчитываемая от конца линии,

Z_c, γ — соответственно волновое сопротивление и коэффициент распространения, являющиеся вторичными параметрами линии.

Волновое сопротивление

$$\left. \begin{aligned} Z_c &= \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} = \sqrt{\frac{R_1 + i \omega L_1}{G_1 + i \omega C_1}} = \rho + i X_c \\ Z_c &= \rho \left(1 - i \frac{1}{2} \frac{\frac{R_1}{\rho} - G_1 \rho}{\beta} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (7.3)$$

На высоких частотах, если выполняется условие $R_1 \ll \omega L_1$ и $G \ll \omega C_1$, волновое сопротивление приближенно равно

$$Z_c \approx \rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}. \quad (7.3a)$$

Коэффициент распространения

$$\gamma = \sqrt{Z_1 Y_1} = \alpha + i\beta. \quad (7.4)$$

Коэффициент затухания

$$\alpha = \frac{R_1}{2\rho} + \frac{1}{2} G \rho \approx \frac{R_1}{2\rho}, \quad \frac{\text{неп}}{\text{м}}. \quad (7.5)$$

Коэффициент фазы

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} \approx \omega \sqrt{L_1 C_1}, \quad \frac{\text{рад}}{\text{м}}, \quad (7.6)$$

где v — скорость распространения электромагнитных волн вдоль линии

$$v \approx \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (7.6a)$$

Используя формулы табл. 7.1, легко составить выражения для расчета волнового сопротивления непосредственно по геометрическим размерам линии:

для двухпроводной линии

$$\rho = 120 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{d}{r}; \quad (7.7)$$

для коаксиальной линии

$$\rho = 60 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (7.8)$$

По аналогии с четырехполюсником можно ввести понятие комплексного коэффициента передачи линии, представляющего собой, например, отношение комплексных амплитуд напряжения в любой точке и в начале (или в конце) линии.

Из выражений (7.1) и (7.2) получаем:

$$\left. \begin{aligned} K(i\omega, ix) &= \frac{\dot{U}}{\dot{U}_1} = \text{ch } \gamma x - \frac{Z_c}{Z_{\text{вх}}} \text{sh } \gamma x \\ K(i\omega, iy) &= \frac{\dot{U}}{\dot{U}_2} = \text{ch } \gamma y + \frac{Z_c}{Z_2} \text{sh } \gamma y \end{aligned} \right\}. \quad (7.9)$$

Здесь

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{i_1} \quad (7.10)$$

— комплексное входное сопротивление в начале линии, а

$$Z_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \quad (7.11)$$

— комплексное сопротивление нагрузки.

Распределение амплитуд тока и напряжения вдоль линии при различных нагрузках

Распределение амплитуд тока и напряжения вдоль сравнительно коротких отрезков длинных линий обычно рассматривают, пренебрегая потерями в линии и считая волновое сопротивление ее чисто активным.

Уравнения (7.2) в этом случае упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \cos \beta y + i \dot{I}_2 \rho \sin \beta y \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 \cos \beta y + i \frac{\dot{U}_2}{\rho} \sin \beta y \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

В режимах короткого замыкания и холостого хода выражения для мгновенных значений напряжения и тока примут соответственно следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= I_2 \rho \sin \beta y \cos \omega t \\ i &= I_2 \cos \beta y \sin \omega t \end{aligned} \right\}; \quad (7.13)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= U_2 \cos \beta y \sin \omega t \\ i &= \frac{U_2}{\rho} \sin \beta y \cos \omega t \end{aligned} \right\}. \quad (7.14)$$

Распределение тока и напряжения при этих режимах соответствует стоячим волнам.

В случае согласованной нагрузки ($Z_2 = \rho$):

$$\left. \begin{aligned} u &= U_2 \sin(\omega t + \beta y), \\ i &= \frac{U_2}{\rho} \sin(\omega t + \beta y) \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

и в линии устанавливается режим чисто бегущей волны.

Если нагрузка имеет чисто активный характер ($Z_2 = R_2$), но $R_2 \neq \rho$, в линии имеют место стоячие и бегущие волны:

$$\left. \begin{aligned} u &= U_2 \frac{\rho}{R_2} \sin(\omega t + \beta y) + U_2 \left(1 - \frac{\rho}{R_2}\right) \cos \beta y \sin \omega t \\ i &= \frac{U_2}{R_2} \sin(\omega t + \beta y) + \frac{U_2}{\rho} \left(1 - \frac{\rho}{R_2}\right) \sin \beta y \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

Если нагрузка имеет чисто реактивный характер ($Z_2 = iX_2$), в линии устанавливаются стоячие волны:

$$\left. \begin{aligned} u &= U_2 \left(\cos \beta y + \frac{\rho}{X_2} \sin \beta y \right) \sin \omega t \\ i &= \frac{U_2}{\rho} \left(\sin \beta y - \frac{\rho}{X_2} \cos \beta y \right) \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

При комплексной нагрузке ($Z_2 = R_2 + iX_2$) в линии наблюдаются стоячие и бегущие волны (задача 7.33):

$$\left. \begin{aligned} u &= U_2 \frac{\rho R_2}{Z_2^2} \sin(\omega t + \beta y) + U_2 \left[\cos \beta y \left(1 - \frac{\rho R_2}{Z_2^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin \beta y \frac{\rho X_2}{Z_2^2} \right] \sin \omega t \\ i &= \frac{U_2}{\rho} \frac{\rho R_2}{Z_2^2} \sin(\omega t + \beta y) + \frac{U_2}{\rho} \left[\sin \beta y \left(1 - \frac{\rho R_2}{Z_2^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \cos \beta y \frac{\rho X_2}{Z_2^2} \right] \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

Величины амплитуд тока и напряжения в реальной линии, т. е. линии с потерями, отличаются от рассмотренных только величиной и фазой амплитудного множителя: амплитуда напряжения U_2 должна быть умножена на величину

$$\left[\operatorname{ch} \alpha y + \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{sh} \alpha y \right],$$

а амплитуда тока I_2 — на величину

$$\left[\operatorname{ch} \alpha y + \frac{Z_2}{\rho} \operatorname{sh} \alpha y \right].$$

Если длина линии невелика, указанные множители мало отличаются от единицы.

Входное сопротивление длинной линии

Входное сопротивление длинной линии определяется непосредственно из телеграфных уравнений (7.2):

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}}{I} = Z_2 \frac{1 + \frac{Z_c}{Z_2} \operatorname{th} \gamma y}{1 + \frac{Z_2}{Z_c} \operatorname{th} \gamma y} \quad (7.19)$$

В случае линии без потерь ($\gamma=i\beta$) и $Z_c=\rho$ выражение для $Z_{вх}$ примет вид

$$Z_{вх} = Z_2 \frac{1 + i \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{tg} \beta y}{1 + i \frac{Z_2}{\rho} \operatorname{tg} \beta y}. \quad (7.20)$$

При согласованной нагрузке

$$Z_{вх} = Z_2 = \rho. \quad (7.21)$$

В режиме короткого замыкания ($Z_2=0$) входное сопротивление равно

$$Z_{вх кз} = i \rho \operatorname{tg} \beta y. \quad (7.22)$$

В режиме холостого хода ($Z_2 = \infty$)

$$Z_{вх хх} = -i \rho \operatorname{ctg} \beta y. \quad (7.23)$$

В общем случае входное сопротивление линии без потерь нужно определять по ф-ле (7.20). При этом выражению для входного сопротивления линии с потерями лучше придать следующий вид (при $Z_c=\rho$):

$$Z_{вх} = Z_2 \frac{1 + \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{th}(\alpha + i\beta)y}{1 + \frac{Z_2}{\rho} \operatorname{th}(\alpha + i\beta)y}. \quad (7.24)$$

Для частного случая короткозамкнутой линии имеем

$$Z_{вх кз} = \rho \operatorname{th}(\alpha + i\beta)y = \rho \frac{\operatorname{th} \alpha y + i \operatorname{tg} \beta y}{1 + i \operatorname{th} \alpha y \operatorname{tg} \beta y}.$$

После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} Z_{вх кз} &= R_{вх} + i X_{вх} = \\ &= \rho \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} 2\alpha y}{\operatorname{sh}^2 \alpha y + \cos^2 \beta y} + i \rho \frac{1}{2} \frac{\sin 2\beta y}{\operatorname{sh}^2 \alpha y + \cos^2 \beta y}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Аналогично для режима холостого хода:

$$Z_{вх хх} = \rho \operatorname{cth}(\alpha + i\beta)y = R_{вх} + i X_{вх}$$

или

$$Z_{вх хх} = \rho \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} 2\alpha y}{\operatorname{sh}^2 \alpha y + \sin^2 \beta y} - i \rho \frac{1}{2} \frac{\sin 2\beta y}{\operatorname{sh}^2 \alpha y + \sin^2 \beta y}. \quad (7.26)$$

Использование отрезка линии в качестве колебательного контура

Входное сопротивление короткозамкнутого отрезка длиной $\frac{\lambda}{4}$ существенно зависит от частоты, поэтому его можно на децимет-

ровых волнах с успехом использовать в качестве колебательного контура.

При небольших расстройках, т. е. когда

$$x = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1,$$

входное сопротивление четвертьволнового отрезка короткозамкнутой линии ($y=l$) на частоте ($\omega_0 + \Delta\omega$) можно с достаточной точностью выразить формулой

$$Z(\omega) = \frac{\frac{\rho}{\alpha l}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2\alpha l} x\right)^2}}. \quad (7.27)$$

На частоте ω_0 ($\Delta\omega=0$)

$$Z(\omega_0) = \frac{\rho}{\alpha l}. \quad (7.28)$$

Составив уравнение резонансной кривой в виде отношения $\frac{Z(\omega)}{Z(\omega_0)}$, найдем

$$\frac{Z(\omega)}{Z(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2\alpha l} x\right)^2}}. \quad (7.29)$$

Составив это равенство с выражением для резонансной кривой одиночного контура

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\alpha}\right)^2}},$$

получим выражение для добротности контура, образованного отрезком длиной линии:

$$Q = \frac{\pi}{4\alpha l} = \frac{\pi}{\alpha\lambda}. \quad (7.30)$$

Неоднородные линии

Входное сопротивление неоднородной линии, составленной из двух однородных участков (рис. 7.1), подсчитывается по формуле

$$Z_{вх} = Z_{aa} \frac{1 + i \frac{\rho_1}{Z_{aa}} \operatorname{tg} \beta l_1}{1 + i \frac{Z_{aa}}{\rho_1} \operatorname{tg} \beta l_1}, \quad (7.31)$$

где

$$Z_{aa} = Z_2 \frac{1 + i \frac{\rho_2}{Z_2} \operatorname{tg} \beta l_2}{1 + i \frac{Z_2}{\rho_2} \operatorname{tg} \beta l_2}. \quad (7.32)$$

В частном случае неоднородной линии, состоящей из двух участков разомкнутых линий, ф-лы (7.31) и (7.32) упрощаются (см. задачу 7.71).

Для согласования сопротивления генератора и нагрузки широко применяются экспоненциальные линии (рис. 7.2), у которых

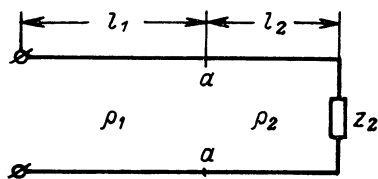


Рис. 7.1

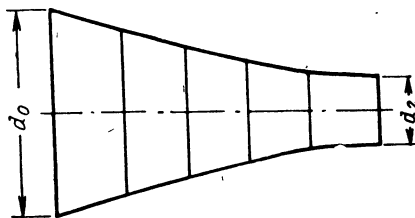


Рис. 7.2

параметры L_1 и C_1 меняются вдоль линии по экспоненциальному закону:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= L_0 e^{-\delta x} \\ C_1 &= C_0 e^{-\delta x} \\ \rho &= \rho_0 e^{-\delta x} \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Индекс «0» указывает на то, что величины параметров относятся к широкому концу линии, а индекс «2» — к узкому. Для расчета ρ_0 и ρ_2 обычно задаются, по ним можно определить коэффициент расширения линии:

$$\delta = \frac{1}{l} \ln \frac{\rho_0}{\rho_2} \quad (7.34)$$

Энергетические соотношения в длинной линии

Коэффициент полезного действия линии определяется формулой

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \quad (7.35)$$

Здесь

$$P_2 = \frac{I_2^2 R_2}{2} \quad (7.36)$$

— мощность, отдаваемая в нагрузку, и

$$P_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\dot{U}_1 \dot{I}_1^*) \quad (7.37)$$

— мощность, отдаваемая в линию генератором.

Реактивная составляющая волнового сопротивления, как правило, весьма мала, и ее можно не учитывать. Это позволяет по-

лучить из ф-л (7.35), (7.36) и (7.37) следующее выражение для кпд линии:

$$\eta = \frac{2R_2 \rho}{(R_2^2 + \rho^2 + X_2^2) \operatorname{sh} 2\alpha l + 2R_2 \rho \operatorname{ch} 2\alpha l}. \quad (7.38)$$

Для случая чисто активной нагрузки ($X_2=0$) последнее выражение приобретает вид

$$\eta = \frac{1}{\operatorname{ch} 2\alpha l + \frac{1}{2} \left(\kappa + \frac{1}{\kappa} \right) \operatorname{sh} 2\alpha l}, \quad (7.39)$$

где

$$\kappa = \frac{R_2}{\rho}. \quad (7.40)$$

Обычно $\alpha l \ll 1$, $\operatorname{ch} 2\alpha l \approx 1$, $\operatorname{sh} 2\alpha l \approx 2\alpha l$, тогда

$$\eta = \frac{1}{1 + \left(\kappa + \frac{1}{\kappa} \right) \alpha l}. \quad (7.41)$$

Максимальное значение кпд имеет при $\kappa=1$

$$\eta = \frac{1}{\operatorname{ch} 2\alpha l + \operatorname{sh} 2\alpha l} = e^{-2\alpha l} \approx 1 - 2\alpha l. \quad (7.42)$$

В настоящем разделе задачи расположены в следующей последовательности.

В первой группе (7.1—7.24) собраны задачи по расчету первичных и вторичных параметров длинных линий.

Задачи второй группы (7.25—7.35) содержат условия по нахождению значений токов и напряжений в различных сечениях линии при заданных нагрузках.

Третья группа составлена из задач (7.36—7.52), в условия которых входит определение входного сопротивления линии.

В четвертой группе собраны задачи (7.53—7.65) по использованию отрезков длинных линий в качестве согласующих устройств и в качестве колебательных контуров.

В пятой группе даны задачи (7.66—7.75) по неоднородным линиям и в шестой группе задачи (7.76—7.81) — по энергетическим соотношениям в линиях.

В задачах настоящего раздела преимущественно рассматриваются условия, соответствующие простым нагрузкам: чисто активным и чисто реактивным. Задачи, связанные с комплексными нагрузками, рассматриваются в следующем разделе (8) с помощью круговых номограмм. Там же приведены задачи, условия которых содержат в том или ином виде сведения о коэффициентах отражения и коэффициентах бегущей и стоячей волн.

Задачи и упражнения

● 7.1.* Рассчитать погонные параметры двухпроводной воздушной линии ($\operatorname{tg} \delta = 0$), составленной из медного провода диаметром 6 мм. Расстояние между проводами $d=200$ мм. Рабочая частота $f=100$ кГц.

● 7.2. Рассчитать первичные параметры открытой двухпроводной линии по приведенным в таблице данным.

| Данные линии | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------------------|---------------|------|-----|-----|
| Расстояние между проводами, см | 40 | 30 | 22 | 16 |
| Диаметр провода, см | 0,6 | 0,6 | 1,6 | 0,3 |
| Данные генератора | λ , м | — | 600 | 10 |
| | f , МГц | 0,10 | — | — |

● 7.3.* Рассчитать погонные параметры коаксиального медного кабеля с полистироловой изоляцией, если известно: $r_1=6$ мм, $r_2=24$ мм, $f=10^7$ гц.

● 7.4. Рассчитать первичные параметры медной коаксиальной линии, если наружный диаметр внутреннего провода (трубки) равен $2r_1=2$ см, а внутренний диаметр наружного — $2r_2=16$ см. Угол потерь $\text{tg}\delta$ принять равным нулю (изолятор — воздух). Частота колебаний $f=10^6$ гц.

● 7.5. Рассчитать первичные параметры медного коаксиального кабеля по приведенным в таблице данным.

| Данные линии | 1 | 2 | 3 |
|---------------------------------|------------|------------|--------|
| $2r_2$, см | 1,2 | 1,8 | 12 |
| $2r_1$, см | 0,3 | 0,4 | 2 |
| f , МГц | 10 | 1 | — |
| λ , м | — | — | 20 |
| Вид изоляции | полистирол | полистирол | воздух |
| $\text{tg}\delta \cdot 10^{-4}$ | 2 | 2 | — |

● 7.6.* Определить, каким должно быть соотношение диаметров наружного и внутреннего проводников в медной коаксиальной трубке, чтобы погонная емкость была равна 20 пф/м.

● 7.7.* Рассчитать коэффициент затухания, коэффициент фазы и номинальное волновое сопротивление воздушной двухпроводной медной линии на частоте 10^6 гц. Данные линии: $r=1,5$ мм; $d=200$ мм. Коэффициент потерь $\text{tg}\delta$ принять равным нулю.

● 7.8. Рассчитать волновое сопротивление ρ , коэффициент затухания α и коэффициент фазы β для линий, данные которых приведены в таблице. Значения погонной проводимости G_1 принять равными нулю.

| № примера | Вид линии | f , МГц | λ , м | Двухпроводная медная линия | | Коаксиальная линия | |
|-----------|------------------------|-----------|---------------|----------------------------|-----------|--------------------|-------------|
| | | | | d , см | $2r$, мм | $2r_1$, см | $2r_2$, см |
| 1 | Открытая двухпроводная | 0,6 | — | 20 | 6 | — | — |
| 2 | Открытая двухпроводная | — | 80 | 12 | 4 | — | — |
| 3 | Концентрическая | 1,2 | — | — | — | 1,2 | 8 |
| 4 | Концентрическая | 10,0 | — | — | — | 0,8 | 30 |

● 7.9. Рассчитать волновое сопротивление ρ коаксиального кабеля, заполненного диэлектриком, у которого $\epsilon_r=3$. Внутренний диаметр наружного проводника равен 10 мм, а наружный диаметр внутреннего — 2,4 мм.

● 7.10. Найти затухание α линии с волновым сопротивлением $\rho=100 \frac{\text{ом}}{\text{м}}$, погонное сопротивление которой составляет 230 ом/км. Выразить α в $\frac{\text{дб}}{\text{км}}$ и $\frac{\text{дб}}{\text{ми}}$.

● 7.11. Представить общее выражение для комплексного волнового сопротивления Z_c в виде $Z_c = |Z_c| e^{i\varphi}$ и дать точные ф-лы для $|Z_c|$ и φ . Полученную формулу для $|Z_c|$ упростить для условий, соответствующих высоким частотам, т. е. $\omega L_1 \gg R_1$, $\omega C_1 \gg G_1$, а из точного выражения для φ получить приближенное, совпадающее с (7.3). Найти, при каком соотношении параметров $\varphi=0$ (на любой частоте).

● 7.12.* Вывести формулу для расчета коэффициента затухания α непосредственно по геометрическим размерам двухпроводной медной линии и длине волны генератора, считая, что $G_1=0$.

● 7.13.* Найти соотношение между первичными параметрами линии L_1 , C_1 , R_1 , G_1 (R_1 и G_1 заданы и не равны нулю), при котором затухание будет минимальным, и выразить это минимальное затухание через параметры линии.

● 7.14.* Найти соотношение между внешним и внутренним радиусами коаксиального кабеля, при котором затухание будет минимальным, считая, что $G_1=0$.

● 7.15.* В предыдущей задаче было установлено, что минимальное затухание будет иметь место при отношении внешнего и внутреннего радиусов, равном 3,6. На практике, однако, по конструктивным соображениям не всегда удается реализовать это соотношение.

Выяснить, в каких пределах можно изменять отношение $\frac{r_2}{r_1}$, чтобы затухание в линии отличалось не более чем на 10% от минимального.

● 7.16.* Найти соотношение между радиусом провода r и расстоянием между проводами d в двухпроводной линии, при котором затухание будет минимальным (считать, что $G_1=0$).

● 7.17. Найти соотношение между внешним и внутренним радиусами коаксиального кабеля, при котором затухание будет минимальным, если известно, что внешний и внутренний провода изготовлены из разных материалов с удельными проводимостями σ_1 и σ_2 . Для случая $\sigma_1=\sigma_2$ проверить совпадение результатов решений задач настоящей и 7.14.

● 7.18. Составить выражение для коэффициента затухания α коаксиального кабеля с учетом зависимости R_1 и G_1 от частоты, пользуясь формулами табл. 7.1.

● 7.19.* Линия, питаемая генератором синусоидального напряжения с частотой $f=25 \text{ МГц}$, имеет погонные параметры $C_1=16 \frac{\text{пф}}{\text{м}}$ и $L_1=1 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}$. Найти скорость распространения радиоволн в такой линии и длину волны.

● 7.20.* Составить общую формулу для расчета длины волны в линии $\lambda_{\text{л}}$ по известной длине волны в воздухе $\lambda_{\text{в}}$ и параметрам линии.

● 7.21. Радиостанция работает на волне $\lambda_{\text{в}}=300 \text{ м}$. Определить длину волн внутри фидера, соединяющего передатчик с антенной, если изолирующий слой обладает относительной диэлектрической постоянной $\epsilon_r=2,25$.

● 7.22. Считая, что скорость распространения волн в линии $v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$, найти время задержки τ_1 на один метр длины линии.

● 7.23.* Как известно, при выводе телеграфных уравнений линию представляют в виде бесконечно большой цепи соединений ячеек с бесконечно малыми сосредоточенными параметрами (рис. 7.3а). При этом коэффициент распространения γ [Ф-ла (7.4)] равен

$$\gamma = \sqrt{Z_1 Y_1} = \sqrt{(R_1 + i\omega L_1)(G_1 + i\omega C_1)} = \alpha + i\beta.$$

В линии без потерь $\gamma = i\beta$.

Задана линия, изображенная на рис. 7.3б. Составить выражение для коэффициента распространения этой линии и выяснить (только для линии без потерь), при каких частотах возможно распространение.

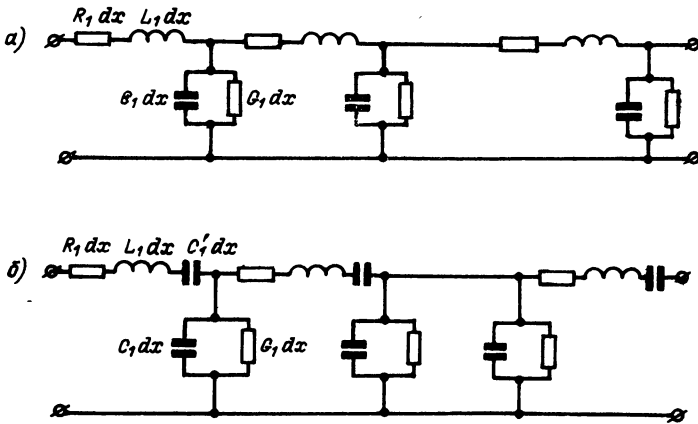


Рис. 7.3

● 7.24. Задана линия, которую можно представить в виде, изображенном на рис. 7.4. Найти выражение для коэффициента распространения данной линии и выяснить (только для линии без потерь) границу значений L_1' , при которых возможно распространение.

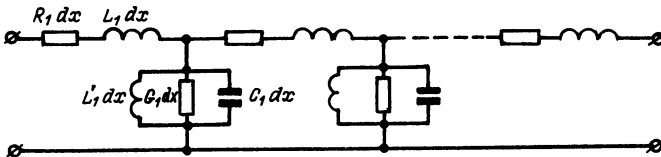


Рис. 7.4

● 7.25.* Найти напряжение на конце разомкнутой линии длиной 20 м, если напряжение на зажиме генератора, питающего линию без потерь, равно 20 в а частота равна $3 \cdot 10^6$ гц. Внутреннее сопротивление генератора принять равным нулю.

Задачу решить: 1) на основе уравнений с отсчетом от конца линии и 2) на основе уравнений с отсчетом от начала линии.

● 7.26. Найти напряжение на конце разомкнутой линии (антенны) длиной l по известному напряжению генератора, включенного в начале линии, и частоте. Данные для расчета указаны в таблице.

| № примера | $U_1, \text{ в}$ | $\lambda, \text{ м}$ | $f, \text{ гц}$ | $l, \text{ м}$ |
|-----------|------------------|----------------------|-----------------|----------------|
| 1 | 40 | 40 | — | 8 |
| 2 | 120 | — | $30 \cdot 10^6$ | 12 |
| 3 | 15 | 80 | — | 18 |
| 4 | 40 | — | $3 \cdot 10^6$ | 20 |

● 7.27. Разомкнутая двухпроводная воздушная линия имеет следующие данные: $d=12 \text{ мм}$; $r=2 \text{ мм}$; $l=2,2 \text{ м}$. Измерениями установлено, что на расстоянии $0,75 \text{ м}$ от конца линии напряжение имеет амплитуду, равную 30 в .

Найти U_1 и I_1 , если частота генератора $f=200 \text{ Мгц}$.

● 7.28.* Амплитуда напряжения на конце разомкнутой линии (антенны) равна 600 в . Найти амплитуды напряжения и тока на расстоянии 40 м от конца линии на частоте $f=10^6 \text{ гц}$, приняв, что волновое сопротивление $\rho=300 \text{ ом}$.

● 7.29. Найти амплитуды напряжения и тока в данной точке разомкнутой линии по следующим условиям (см. таблицу).

| № примера | $U_s, \text{ в}$ | $f, \text{ гц}$ | $\lambda, \text{ м}$ | $y, \text{ м}$ | $\rho, \text{ ом}$ |
|-----------|------------------|-----------------|----------------------|----------------|--------------------|
| 1 | 10 000 | $3 \cdot 10^6$ | — | 166,6 | 200 |
| 2 | 2 000 | — | 40 | 8 | 260 |
| 3 | 250 | — | 20 | 2,5 | 500 |
| 4 | 120 | $30 \cdot 10^6$ | — | 12 | 240 |
| 5 | 100 | 10^6 | — | 40 | 250 |

● 7.30. Амплитуда напряжения на конце разомкнутой линии, подключенной к генератору с частотой 100 Мгц , равна 100 в . Волновое сопротивление линии $\rho=500 \text{ ом}$. Определить амплитуды тока в точке, находящейся от конца линии на расстоянии $0,5 \text{ м}$, и в тучности.

● 7.31. Дана короткозамкнутая линия со следующими данными: $U_1=30 \text{ в}$; $f=150 \text{ Мгц}$; $\rho=55 \text{ ом}$. Найти U_y и I_y при $y=0,4 \text{ м}$ (т. е. на расстоянии $0,4 \text{ м}$ от конца линии).

● 7.32. Дана двухпроводная воздушная короткозамкнутая линия со следующими данными: $l=5 \text{ м}$; $d=20 \text{ мм}$; $r=2,5 \text{ мм}$; $f=20 \text{ Мгц}$; $I_2=0,8 \text{ а}$. Найти U_1 , т. е. амплитуду напряжения на входе линии.

● 7.33.* Вывести выражения, дающие распределение напряжения и тока в длинной линии без потерь, нагруженной на комплексное сопротивление $Z_2=R_2+iX_2$.

● 7.34.* В разомкнутой линии были измерены напряжение в конце линии $U_2=200 \text{ в}$ и ток на расстоянии, равном 2 м от конца линии, $I=0,5 \text{ а}$. Длина волны генератора $\lambda=20 \text{ м}$.

По полученным данным найти волновое сопротивление линии.

● 7.35. Получить формулы для расчета амплитуд напряжения и тока в любой точке линии по известным значениям U_1 и Z_2 , а также параметров линии.

● 7.36.* Рассчитать входное сопротивление короткозамкнутой линии без потерь длиной 24 м , если рабочая длина волны $\lambda=62 \text{ м}$. Линия выполнена из коаксиального воздушного кабеля, у которого радиус наружной трубы равен 200 мм , а радиус внутренней — 60 мм .

Определить также значение емкости или индуктивности, которое соответствует найденному входному сопротивлению.

● 7.37. Рассчитать входное сопротивление короткозамкнутой линии без потерь по данным, приведенным в таблице. Определить, кроме того, эквивалентные

емкость и индуктивность, соответствующие найденному входному сопротивлению.

| № примера | Тип линии | Геометрические размеры линии, мм | Длина линии, м | Данные генератора | |
|-----------|--|----------------------------------|----------------|-------------------|-----------|
| | | | | λ , м | f , МГц |
| 1 | Коаксиальный кабель с полистироловой изоляцией | $r_1 = 12$ $r_2 = 32$ | 1,5 | — | 74 |
| 2 | Открытая двухпроводная медная | $r = 4$ $d = 200$ | 10 | 70 | — |
| 3 | Воздушная коаксиальная из медных труб | $r_1 = 16$ $r_2 = 60$ | 6 | 20 | — |
| 4 | Открытая двухпроводная медная | $r = 3$ $d = 160$ | 14 | — | 80 |

● 7.38. По данным, приведенным в таблице, рассчитать входное сопротивление короткозамкнутой линии:

| № примера | λ , м | f , МГц | l , м | ρ , ом |
|-----------|---------------|-----------|---------|-------------|
| 1 | 2,2 | — | 3 | 56 |
| 2 | — | 200 | 1,25 | 500 |
| 3 | 4 | — | 0,8 | 564 |

● 7.39.* Для согласования нагрузочного сопротивления с волновым применяют шлейфы, представляющие собой отрезки короткозамкнутых линий, длину которых можно менять.

Рассчитать наименьшую длину такого отрезка, обеспечивающего входное сопротивление емкостного характера, равное 120 ом.

Волновое сопротивление линии $\rho = 100$ ом. Длина волны генератора, питающего линию, $\lambda = 10$ м.

● 7.40. Рассчитать наименьшую длину короткозамкнутой линии, входное сопротивление которой имеет заданные характер и величину. Данные для расчета приведены в таблице.

| № примера | Характер входного сопротивления | $Z_{вх}$, ом | ρ , ом | λ , м | f , МГц |
|-----------|---------------------------------|---------------|-------------|---------------|-----------|
| 1 | Емкостный | 80 | 200 | 60 | — |
| 2 | Индуктивный | 60 | 180 | — | 70 |
| 3 | Индуктивный | 140 | 120 | — | 110 |
| 4 | Индуктивный | 126 | 600 | — | 1 |

● 7.41.* Рассчитать входное сопротивление разомкнутой линии без потерь длиной 9,7 м, имеющей волновое сопротивление 200 ом. Длина волны генератора, питающего линию, 36 м. Рассчитать также емкость или индуктивность, соответствующую данному входному сопротивлению.

● 7.42. Найти входное сопротивление разомкнутой линии без потерь, имеющей волновое сопротивление ρ и длину l . Данные для расчета приведены в таблице.

| № примера | ρ , ом | l , м | Данные генератора | |
|--------------|-------------|---------|-------------------|-----------|
| | | | λ , м | f , Мгц |
| 1 | 140 | 14 | — | 80 |
| 2 | 80 | 60 | 320 | — |
| 3 | 200 | 22 | — | 180 |
| 4 | 160 | 6 | 40 | — |

● 7.43. Рассчитать минимальные длины короткозамкнутой и разомкнутой линий, входные сопротивления которых носят индуктивный характер и равны 100 ом каждое. Исходные данные: $\rho=100$ ом; $\lambda=0,4$ м.

● 7.44.* Вывести формулу для расчета волнового сопротивления по известным значениям входного сопротивления в режимах короткого замыкания и холостого хода. Найти значение волнового сопротивления для условий:

$$X_{кз} = 60 \text{ ом}, X_{хх} = 44 \text{ ом}.$$

● 7.45.* Линия без потерь, имеющая волновое сопротивление $\rho=100$ ом, нагружена на чисто индуктивное сопротивление, равное 50 ом. Найти входное сопротивление линии на частоте $f=3 \cdot 10^6$ гц при длине линии, равной 5 м.

● 7.46. Нагрузка линии без потерь представляет собой либо индуктивность, либо емкость. Рассчитать входное сопротивление по условиям, приведенным в таблице.

| № примера | ρ , ом | Нагрузка | | Данные генератора | | Длина линии l , м |
|--------------|-------------|----------|-------------|-------------------|-----------|---------------------------|
| | | C , пф | L , мкген | λ , м | f , Мгц | |
| 1 | 120 | 400 | — | — | 1,6 | 8 |
| 2 | 400 | — | 200 | 300 | — | 6 |
| 3 | 220 | 300 | — | — | 1,2 | 12 |
| 4 | 180 | — | 800 | 60 | — | 4 |

● 7.47.* Генератор, питающий линию без потерь длиной 60 м, имеет частоту $f=10^6$ гц. Рассчитать величину нагрузочного сопротивления, при котором входное сопротивление линии равно нулю, если известно, что $\rho=100$ ом.

● 7.48.* Вывести общие формулы для расчета входного сопротивления четвертьволновой и полуволновой линий (при любых нагрузках).

● 7.49. Определить характер входного сопротивления линии по следующим условиям:

$$1. l = \frac{\lambda}{4}; Z_2 = i\omega L.$$

$$2. l = \frac{\lambda}{2}; Z_2 = \frac{1}{i\omega C}.$$

● 7.50. Показать, что сумма реактивных составляющих входных сопротивлений отрезков линий без потерь l_1 и l_2 (рис. 7.5), из которых один разомкнут, а другой короткозамкнут, равна нулю, если $l_1 + l_2 = \frac{\lambda}{4}$.

● 7.51* Показать, что модуль входного сопротивления линии без потерь, имеющей длину $\lambda/8$ и нагруженной на активное сопротивление $Z_2=R_2$, численно равен волновому сопротивлению при любом значении R_2 .

● 7.52* Показать, что входное сопротивление короткозамкнутой линии небольшой длины ($l \ll \lambda$) имеет индуктивный характер и входная индуктивность численно (приблизительно) равна общей индуктивности, а входное сопротивление разомкнутой линии имеет емкостный характер и входная емкость численно равна общей емкости.

● 7.53* Составить график изменения активной составляющей входного сопротивления короткозамкнутой и разомкнутой линий без потерь.

● 7.54* Линия с волновым сопротивлением ρ должна быть нагружена на активное сопротивление $R \neq \rho$. Нужно включить между линией и нагрузкой (рис. 7.6) четвертьволновый отрезок (вставку) и выбрать его волновое сопротивление ρ_1 так, чтобы в точках соединения линии со вставкой не было отражения. Нужно, кроме того, показать, что в четвертьволновом отрезке несогласованность между ρ_1 и R будет меньшей, чем несогласованность между ρ и R .

● 7.55* Чтобы предотвратить возникновение стоячих волн в линиях, нагруженных на активное сопротивление, прибегают к согласованию при помощи шлейфа по схеме, изображенной на рис. 7.7.

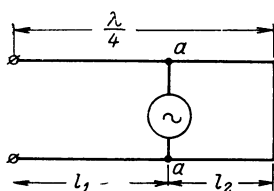


Рис. 7.5

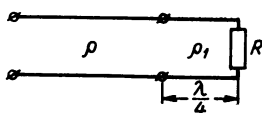


Рис. 7.6

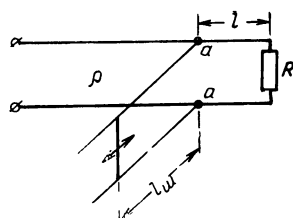


Рис. 7.7

Составить формулы для расчета минимальной длины участка l и минимальной длины шлейфа $l_{ш}$, если известно сечение линии $a-a$, в котором составляющая входного сопротивления равна волновому сопротивлению ρ . Реактивная часть входного сопротивления может быть скомпенсирована при помощи короткозамкнутого шлейфа, проводимость которого равна и противоположна по знаку проводимости участка линии правее сечения $a-a$.

● 7.56. Линия, нагруженная на активное сопротивление $R=73 \text{ ом}$, питается от генератора, длина волны которого $\lambda=25 \text{ м}$. Рассчитать шлейф (рис. 7.7), при помощи которого в линии устанавливается режим бегущих волн, если $\rho=550 \text{ ом}$.

● 7.57. Найти добротность контура, представляющего собой отрезок длиной линии с данными: $\rho=200 \text{ ом}$, $R_1=0,1 \frac{\text{ом}}{\text{м}}$ на волне $\lambda=3,5 \text{ м}$.

● 7.58* Вывести формулу для расчета добротности контура, образованного коаксиальным кабелем, по геометрическим размерам контура и длине волны.

Отношение $\frac{r_2}{r_1}$ принять равным 3,6, т. е. соответствующим максимально возможному значению добротности.

● 7.59. Рассчитать добротность контура, представленного в виде четвертьволнового отрезка коаксиальной линии, если $r_2=2 \text{ см}$, а $\lambda=60 \text{ см}$. Соотношение внешнего и внутреннего радиусов равно 3,6.

● 7.60. Рассчитать радиус внешнего проводника коаксиального кабеля, при котором на волне $\lambda=40 \text{ см}$ можно получить добротность, равную $Q=2500$. Отношение внешнего и внутреннего радиусов равно 3,6.

● 7.61. Вывести формулу для расчета добротности контура, представляющего собой отрезок коаксиального кабеля, по заданным геометрическим размерам и частоте.

● 7.62. Контур, образованный отрезком медного коаксиального кабеля, работает на частоте $f=3000$ Мгц. Размеры кабеля: $r_2=10$ мм, $r_1=5$ мм. Рассчитать добротность контура.

● 7.63. Составить формулу для расчета резонансного сопротивления четвертьволнового отрезка длинной линии по известному волновому сопротивлению ρ и полному активному сопротивлению $R=R_1 l$.

● 7.64. Сопротивление потерь четвертьволнового отрезка линии $R=0,241$ ом. Найти значение резонансного сопротивления, если $\rho=41$ ом.

● 7.65. Задан отрезок короткозамкнутой линии длиной $l=\frac{\lambda_0}{4}$. По известным

значениям $\rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ и R_1 ($G=0$) найти значения L_k, C_k, R_k параметров параллельного колебательного контура, эквивалентного данной линии в окрестности резонансной частоты ω_0 .

● 7.66.* Линия состоит из двух однородных участков: $l_1=45$ м, $l_2=70$ м, $\rho_1=480$ ом, $\rho_2=60$ ом. В конце линии включена нагрузка $Z_2=R_2=60$ ом. Длина волны генератора $\lambda=40$ м.

Найти входное сопротивление данной неоднородной линии.

● 7.67. Линия состоит из двух однородных участков с данными l_1, l_2, ρ_1, ρ_2 . Длина волны генератора равна λ , нагрузка в конце второго участка Z_2 . Найти входное сопротивление всей линии по данным, приведенным в таблице, считая, что $Z_2=R_2=\rho_2$.

| № примера | $l_1, \text{ м}$ | $\rho_1, \text{ ом}$ | $\rho_2, \text{ ом}$ | $\lambda, \text{ м}$ |
|-----------|------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1 | 55 | 450 | 580 | 60 |
| 2 | 60 | 450 | 560 | 70 |
| 3 | 10 | 700 | 500 | 50 |

● 7.68. Каковы волновые сопротивления различных участков длиной линии AB, BC и CD (рис. 7.8), если во всех трех участках наблюдается режим бегущей волны? Каждое из трех активных сопротивлений равно 240 ом.

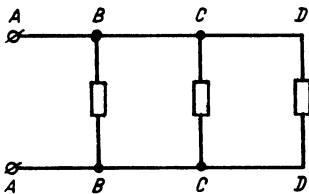


Рис. 7.8

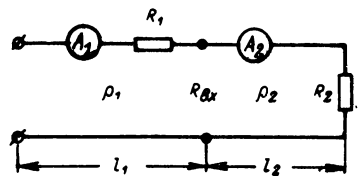


Рис. 7.9

● 7.69.* Волновое сопротивление левого участка линии (рис. 7.9) $\rho_1=60$ ом, а правого — $\rho_2=40$ ом. Какую величину должны иметь сопротивления R_1 и R_2 , чтобы в обоих участках имел место режим бегущей волны? Что покажут при этом амперметры A_1 и A_2 , если эдс генератора 150 в, а его внутреннее сопротивление $R_i=15$ ом.

● 7.70. В неоднородную линию, составленную из двух однородных участков (рис. 7.10), с $\rho_1=60$ ом и $\rho_2=100$ ом, нужно включить сопротивления R_1 и R_2 с таким расчетом, чтобы в линии имел место режим бегущей волны. Определить сопротивления R_1 и R_2 .

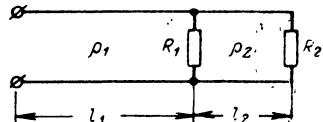


Рис. 7.10

● 7.71.* Неоднородную линию, состоящую из двух однородных участков l_1 и l_2 с волновыми сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 (рис. 7.11а), заменить эквивалентной по входному сопротивлению однородной линией с волновым сопротивлением ρ_1 (рис. 7.11б). Рассчитать длину участка эквивалентной линии $l_{экв}$.

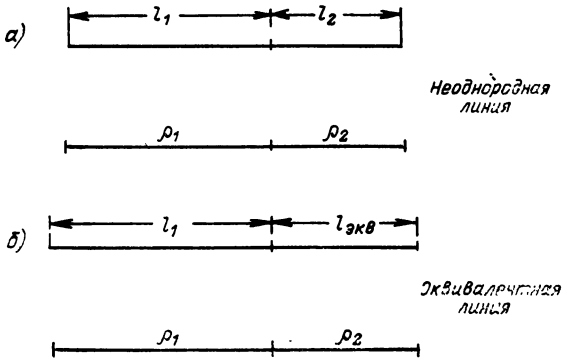


Рис. 7.11

● 7.72. Рассчитать коэффициент расширения δ экспоненциальной линии, предназначенной для согласования сопротивлений 800 и 400 ом , если известно, что длина линии должна быть равна 10 м.

● 7.73.* Вывести формулу для расчета расстояния между проводами d_x в любой точке экспоненциальной двухпроводной линии.

● 7.74.* Рассчитать расстояние между проводами в начале и конце экспоненциальной двухпроводной линии по условиям задачи 7.7: радиус провода r принять равным 0,2 см.

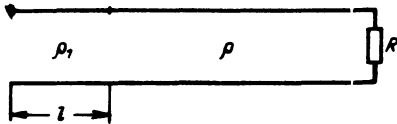


Рис. 7.12

● 7.75.* К началу согласованной линии с волновым сопротивлением ρ (рис. 7.12) подключен небольшой отрезок ($l \ll \lambda$) с волновым сопротивлением ρ_1 . Выяснить, как меняется характер входного сопротивления общей неоднородной

линии в зависимости от соотношения ρ и ρ_1 .

● 7.76. Линия длиной 50 м нагружена на комплексную нагрузку $Z_2 = (100 - i1000) \text{ ом}$. Волновое сопротивление линии $\rho = 100 \text{ ом}$; погонное сопротивление $R_1 = 10 \text{ ом/км}$. Рассчитать кпд линии.

● 7.77. Линия получает питание от генератора, имеющего внутреннее сопротивление $R_1 = 200 \text{ ом}$ и развивающего синусоидальную эдс с амплитудой $E = 60 \text{ в}$. Линия нагружена на активное сопротивление $R_2 = 100 \text{ ом}$, которое равно волновому сопротивлению.

Найти напряжение U_1 на зажимах генератора и мощность, выделяемую на активной нагрузке.

● 7.78. Радиопередатчик, развивающий мощность $P_1 = 400 \text{ вт}$, работает на фидер, нагруженный на чисто активное сопротивление $R_2 = 500 \text{ ом}$, и имеющий затухание $\alpha l = 0,05 \text{ неп}$.

В фидере имеет место режим бегущей волны. Найти амплитуду напряжения и тока в конце линии, мощность, выделяемую на нагрузке, и кпд линии; кроме того, определить амплитуду напряжения в начале линии.

● 7.79. Линия с волновым сопротивлением $\rho = 200 \text{ ом}$ нагружена на активное сопротивление $R_2 = 600 \text{ ом}$. Затухание линии — 0,1 неп. Определить коэффициент полезного действия.

● 7.80. Произвести расчет по следующим данным:

1. Коаксиальный фидер: $d_1 = 0,68 \text{ мм}$; $d_2 = 7,3 \text{ мм}$; $\epsilon_r = 2,65$; $l = 30 \text{ м}$; $\lambda = 30 \text{ м}$;

$P_2=5$ вт. Определить P_1 , считая, что в фидере имеет место режим бегущей волны.

2. Двухпроводный фидер: $d=2$ мм; $r=0,25$ мм; $\epsilon_r=5,3$; $l=1,2$ м; $f=30$ МГц; $P_2=15$ мквт. Определить P_1 и η , считая, что в фидере имеет место режим бегущей волны.

3. Коаксиальный фидер: $d_1=1,3$ мм; $d_2=10$ мм; $\epsilon_r=2,5$; $l=20$ м; $\lambda=0,7$ м; $U_1=25$ в. Определить I_2 , P_2 и η , считая, что в фидере имеет место режим бегущей волны.

4. $P_1=500$ вт; $al=0,05$ nep; $R_2=300$ ом; $\rho=300$ ом. Определить U_2 , I_2 , P_2 и η .

● 7.81.* Получить ф-лу (7.5) для коэффициента затухания α , исходя из потерь мощности на единицу длины фидера, в котором имеет место режим бегущих волн.

8.

КРУГОВАЯ НОМОГРАММА ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

Круговая номограмма, которой посвящается настоящий раздел, существенно упрощает и облегчает расчеты длинных линий в установленном режиме, нагруженных на комплексное сопротивление, а также расчеты согласующих и других устройств (шлейфов, мостиков, трансформаторов сопротивления и т. д.).

Здесь рассматривается одна из наиболее удобных и распространенных круговых номограмм — номограмма Вольперта—Смитта¹⁾.

Эта номограмма предназначена для расчетов однородных линий и волноводов без потерь; однако ценой некоторых усложнений можно учитывать затухание в линии.

При помощи круговой номограммы по известным параметрам линии и рабочей частоте можно решать следующие основные задачи:

— рассчитывать входное сопротивление (проводимость) линии в любом сечении по известному сопротивлению в другом сечении, в частности, по нагрузке;

— находить сопротивление нагрузки по заданному входному сопротивлению (проводимости);

— находить сопротивление нагрузки по известному положениюлучины (узла) напряжения (тока) и коэффициенту бегущей или стоячей волны.

В теории круговой номограммы основную роль играет понятие комплексного коэффициента отражения в произвольном сечении.

Из основных телеграфных уравнений²⁾ [ф-ла (7.2)], переписанных в виде:

¹⁾ Круговые номограммы одновременно и независимо были предложены советским ученым А. Р. Вольпертом (Производственно-технический бюллетень НКЭП, 1940, № 2) и американским ученым П. Смитом (P. H. Smith. Electronics, 1939, 12 (1), 29). В литературе круговые номограммы часто называют круговыми диаграммами.

²⁾ Волновое сопротивление принимается чисто активным.

$$\dot{U} = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \rho) e^{\gamma y} + \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \rho) e^{-\gamma y} = \dot{U}_{\text{пад}} + \dot{U}_{\text{отр}},$$

$$\dot{I} = \frac{1}{2\rho} (\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \rho) e^{\gamma y} - \frac{1}{2\rho} (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \rho) e^{-\gamma y} = \dot{I}_{\text{пад}} - \dot{I}_{\text{отр}},$$

коэффициент отражения в данном сечении определяется как отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей:

$$\rho_u = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}}, \quad \rho_i = \frac{\dot{I}_{\text{отр}}}{\dot{I}_{\text{пад}}}.$$

Так как $\rho_u = -\rho_i$, в дальнейшем будем рассматривать только коэффициент отражения по напряжению, обозначая его буквой ρ без индекса:

$$\rho = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \rho}{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \rho} \frac{e^{-\gamma y}}{e^{\gamma y}} = \frac{Z_2 - \rho}{Z_2 + \rho} e^{-2\gamma y}. \quad (8.1)$$

Из выражения (8.1) следует, что в общем случае коэффициент отражения является комплексной величиной, причем в линии с потерями как его модуль, так и аргумент зависят от координаты y . В частном случае при $y=0$

$$\rho_{y=0} = \rho_2 = \frac{Z_2 - \rho}{Z_2 + \rho}, \quad (8.2)$$

где ρ_2 — уже встречавшийся ранее коэффициент отражения от нагрузки.

Для линии без потерь ($\gamma = i\beta$) выражение (8.1) упрощается

$$\rho = \frac{Z_2 - \rho}{Z_2 + \rho} e^{-i2\beta y}. \quad (8.3)$$

Представим коэффициент отражения от нагрузки ρ_2 в виде, несколько отличном от (8.2), и выразим его через $|\rho_2|$

$$\rho_2 = \frac{Z_2 - \rho}{Z_2 + \rho} = |\rho_2| e^{i\psi_n}, \quad (8.4)$$

где модуль коэффициента отражения от нагрузки

$$|\rho_2| = \frac{\sqrt{(R_2 - \rho)^2 + X_2^2}}{\sqrt{(R_2 + \rho)^2 + X_2^2}}, \quad (8.5)$$

а фазовый угол

$$\psi_n = \arctg \frac{X_2}{R_2 - \rho} - \arctg \frac{X_2}{R_2 + \rho}. \quad (8.6)$$

Коэффициент отражения в любом сечении [ф-ла (8.3)] теперь можно представить в виде

$$\rho = |\rho_2| e^{i(\psi_n - 2\beta y)} = |\rho| e^{i(\psi_n - 2\beta y)}. \quad (8.7)$$

Здесь важно обратить внимание на то, что зависимость коэффициента отражения от координаты y заключена только в аргументе комплексного числа; модуль же коэффициента отражения от координаты y не зависит. Именно поэтому $|\rho_2| = |\rho|$. Это обстоятельство и используется при построении круговых номограмм.

Установим связь коэффициента отражения ρ с входным сопротивлением.

По определению

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}} + I_{\text{отр}}} = \frac{U_{\text{пад}}}{I_{\text{пад}}} \frac{1 + \frac{U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}}}}{1 + \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}}}} = \rho \frac{1 + \rho}{1 - \rho}. \quad (8.8)$$

Из последнего равенства легко получить

$$\rho = \frac{Z_{\text{вх}} - \rho}{Z_{\text{вх}} + \rho}. \quad (8.9)$$

Формула (8.2) является частным случаем ф-лы (8.9).

Найдем теперь связь между коэффициентом отражения ρ и коэффициентом бегущей волны κ_6 . По определению

$$\kappa_6 = \frac{U_{\text{мин}}}{U_{\text{макс}}} = \frac{U_{\text{пад}} - U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}}} = \frac{U_{\text{пад}}(1 - |\rho|)}{U_{\text{пад}}(1 + |\rho|)} = \frac{1 - |\rho|}{1 + |\rho|}. \quad (8.10)$$

Из выражения (8.10) следует

$$|\rho| = \frac{1 - \kappa_6}{1 + \kappa_6}. \quad (8.11)$$

Легко видеть, что ф-лы (8.10) и (8.11) весьма схожи с ф-лами (8.8) и (8.9). Это свойство ниже будет использовано.

В дальнейшем изложении будем нормировать сопротивления Z , R и X по волновому сопротивлению ρ , а координату y и расстояние l по длине волны λ :

$$\frac{Z}{\rho} = \hat{Z}; \quad \frac{R}{\rho} = \hat{R}; \quad \frac{X}{\rho} = \hat{X}; \quad \frac{y}{\lambda} = \hat{y}; \quad \frac{l}{\lambda} = \hat{l}.$$

Нормированные сопротивления \hat{Z} , \hat{R} и \hat{X} часто называют приведенными.

Обозначив вещественную и мнимую части коэффициента отражения соответственно символами ρ_{Re} и ρ_{Im} , представим выражение (8.8) в нормированном виде:

$$\hat{Z} = \hat{R} + i\hat{X} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = \frac{1 + \rho_{\text{Re}} + i\rho_{\text{Im}}}{1 - \rho_{\text{Re}} - i\rho_{\text{Im}}}. \quad (8.12)$$

Отделив вещественную и мнимую части, получим два равенства:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{R} &= \frac{1 + \rho_{\text{Re}}^2 - \rho_{\text{Im}}^2}{(1 - \rho_{\text{Re}})^2 + \rho_{\text{Im}}^2} \\ \widehat{X} &= \frac{2\rho_{\text{Im}}}{(1 - \rho_{\text{Re}})^2 + \rho_{\text{Im}}^2} \end{aligned} \right\}, \quad (8.13)$$

в которых \widehat{R} и \widehat{X} представляют собой функции от ρ_{Re} и ρ_{Im} . Преобразуем каждое из них к виду $\rho_{\text{Im}} = f(\rho_{\text{Re}})$; в новой функциональной зависимости \widehat{R} и \widehat{X} являются параметрами. Характеристики $\rho_{\text{Im}} = f(\rho_{\text{Re}})$ представляют собой семейства кривых [на плоскости комплексного коэффициента отражения $(\rho_{\text{Re}}, \rho_{\text{Im}})$] равных сопротивлений R и X .

Из верхнего равенства (8.13) имеем

$$\widehat{R}(1 - \rho_{\text{Re}})^2 + \widehat{R}\rho_{\text{Im}}^2 = 1 - \rho_{\text{Re}}^2 - \rho_{\text{Im}}^2$$

или, после элементарных преобразований,

$$\rho_{\text{Re}}^2 - \frac{2\widehat{R}\rho_{\text{Re}}}{\widehat{R} + 1} + \rho_{\text{Im}}^2 = \frac{1 - \widehat{R}}{\widehat{R} + 1}.$$

Прибавим и вычтем $\frac{\widehat{R}^2}{(\widehat{R} + 1)^2}$;

$$\left(\rho_{\text{Re}} - \frac{\widehat{R}}{\widehat{R} + 1} \right)^2 + \rho_{\text{Im}}^2 = \frac{1 - \widehat{R}}{\widehat{R} + 1} + \frac{\widehat{R}^2}{(\widehat{R} + 1)^2}$$

или

$$\left(\rho_{\text{Re}} - \frac{\widehat{R}}{\widehat{R} + 1} \right)^2 + \rho_{\text{Im}}^2 = \left(\frac{1}{\widehat{R} + 1} \right)^2. \quad (8.14)$$

Последнее выражение представляет собой уравнение окружности с центром, смещенным по оси ρ_{Re} в сторону положительных значений на $\frac{\widehat{R}}{\widehat{R} + 1}$, и с радиусом, равным $\frac{1}{\widehat{R} + 1}$.

На рис. 8.1 дано семейство кривых равных приведенных активных сопротивлений для нескольких значений параметра \widehat{R} . Так как активное сопротивление в длинных линиях не может быть от-

рицательным ($0 \leq R \leq \infty$), номограмму ограничивают кругом единичного радиуса (при $\hat{R}=0$), выделенным на рисунке жирной линией.

Перейдем к реактивным сопротивлениям.

Из нижнего равенства (8.13) имеем

$$(1 - p_{Re})^2 + p_{Im}^2 = 2 \frac{p_{Im}}{\hat{X}}.$$

Прибавим и вычтем $\frac{1}{\hat{X}^2}$:

$$(p_{Re} - 1)^2 + \left(p_{Im}^2 - 2 \frac{p_{Im}}{\hat{X}} + \frac{1}{\hat{X}^2} \right) = \frac{1}{\hat{X}^2}$$

или

$$(p_{Re} - 1)^2 + \left(p_{Im} - \frac{1}{\hat{X}} \right) = \frac{1}{\hat{X}^2}. \quad (8.15)$$

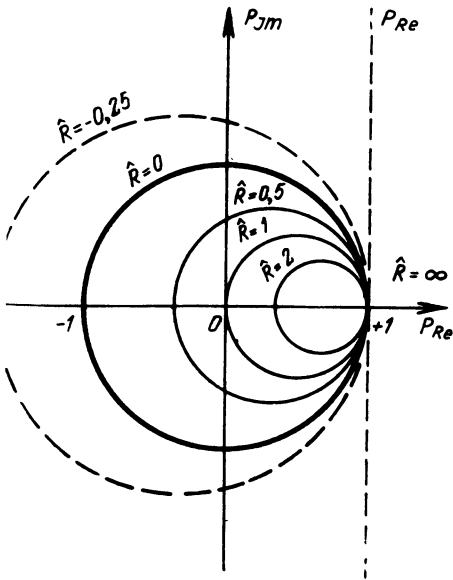


Рис. 8.1

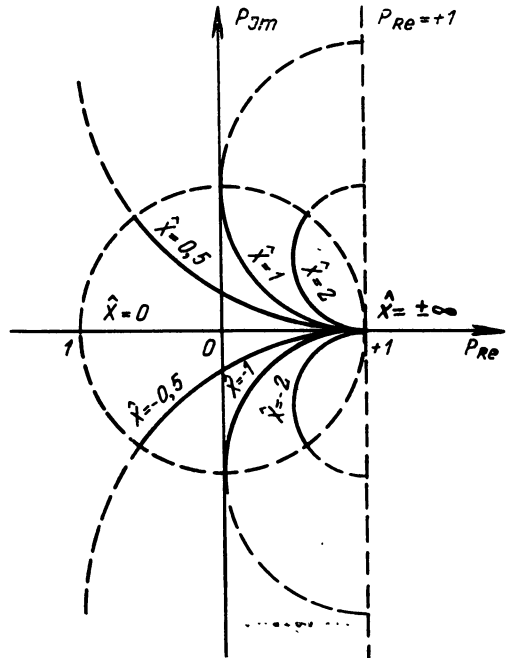


Рис. 8.2

Кривая равных реактивных сопротивлений также представляет собой окружность с координатами центра $1, \pm \frac{1}{\hat{X}}$ и радиусом $\frac{1}{\hat{X}}$.

Семейство кривых равных реактивных сопротивлений показано на рис. 8.2.

Подставив в (8.16) значение $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ и учитывая принятые выше обозначения, получим

$$\arg p = \psi = \psi_n - 2\pi \frac{2y}{\lambda} = \psi_n - 2\pi \hat{2}y. \quad (8.17)$$

Из последнего выражения следует, что при перемещении вдоль линии на расстояние $y = \frac{\lambda}{2}$ аргумент p изменится на 2π , т. е. вектор p совершает один оборот. Таким образом, коэффициент отражения p является периодической функцией координаты y с пространственным периодом, равным $\frac{\lambda}{2}$ или, в приведенных единицах, равным 0,5.

Вытекающее из ф-лы (8.17) соотношение «расстояние в полволны» — «один оборот по кругу коэффициента отражения» определяет круговой масштаб шкалы расстояний на номограмме. Шкала выносится на внешний круг номограммы и отмечается обычно в двух направлениях: «к генератору» и «к нагрузке».

По мере перемещения вдоль линии от нагрузки к генератору, сопровождающегося увеличением координаты y , $\arg p = \psi$ уменьшается. На номограмме это соответствует вращению вектора по часовой стрелке; движение в обратном направлении — вращение вектора против часовой стрелки. Нуль отсчета расстояний помещен на отрицательной полуоси.

Для определения угла ψ по номограмме необходимо найти только угол ψ_n (угол $2\pi \hat{2}y$ рассчитывается по известному значению y).

Пусть дана линия, нагруженная в точках a — a на сопротивление $Z_2 = R_2 + iX_2$ (рис. 8.4а). Создадим эквивалентную линию, подключив к точкам a — a отрезок длиной $l' < \frac{\lambda}{2}$ с входным сопротивлением $Z_{вх} = Z_2$ (рис. 8.4б). Длину l' выберем такой, чтобы в конце эквивалентной линии фазовый угол коэффициента отражения был равен нулю; сопротивление в конце эквивалентной линии при этом будет иметь чисто активный характер и его можно не определять по величине. Так как модуль коэффициента отражения не зависит от длины линии, значение коэффициента отражения в конце экви-

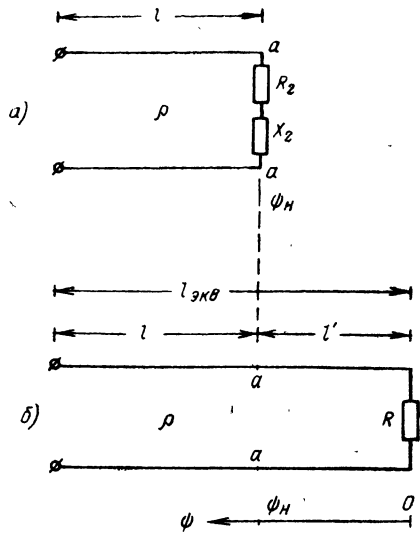


Рис. 8.4

валентной линии будет отличаться от его значения в сечении « $a-a$ » только углом ψ_n . Последний легко определить по круговой номограмме, поворачивая радиус-вектор от нуля (верхняя точка) по направлению «к генератору» до точки, соответствующей

$$\hat{Z}_2 = \hat{R}_2 + i \hat{X}_2.$$

Угол ψ_n , таким образом, найден.

Изложенный материал позволяет наметить особенности решения типовых задач в следующем виде.

Заданное в некотором сечении, например в сечении нагрузки, сопротивление \hat{Z} определяется по номограмме точкой пересечения соответствующих кривых \hat{R} и \hat{X} ; это позволяет осуществить переход от сопротивления \hat{Z} к модулю коэффициента отражения $|\rho|$: соответствующая окружность модуля проходит через точку \hat{Z} . Далее учитывается изменение ρ по мере движения вдоль линии: конец вектора ρ описывает окружность (пунктирные линии на номограмме), затем к найденному, как указано выше, углу ψ_n нужно прибавить значение $2\beta y$. Конец вектора ρ , соответствующий новому значению y , определяет новое значение \hat{Z} , т. е. новые значения \hat{R} и \hat{X} .

Отметим, что в тех случаях, когда длина линии превышает $\frac{\lambda}{2}$, необходимо из полной приведенной длины отбросить «целое число полуволновых отрезков линии» (т. е. число полных кругов на номограмме) и в расчет вводить только остаток.

Схематическое изображение круговой номограммы дано на рис. 8.3; рабочий образец номограммы дан на рис. 8.5 (вклейка).

Значения окружности \hat{R} помечены вдоль вертикальной оси, соответствующей $\hat{X}=0$; значения окружностей \hat{X} нанесены в точках пересечения их с внешней окружностью ($\hat{R}=0$), причем вправо от вертикали расположены положительные значения \hat{X} (индуктивность), а влево — отрицательные (емкость).

Значения модуля коэффициента отражения на пунктирных концентрических окружностях не отмечаются, так как в большинстве случаев он требуется лишь для промежуточных вычислений. В случае необходимости величину $|\rho|$ можно определить по номограмме при помощи циркуля или линейки.

Остановимся теперь на некоторых подробностях, расширяющих возможности использования круговых номограмм.

Ось AB (рис. 8.3) соответствует нулевым реактивным сопротивлениям, т. е. сопротивление \hat{Z} , отсчитываемое по этой оси, име-

ет чисто активный характер. На верхней полуоси OA пределы изменения сопротивления составляют $0 \leq \hat{R} \leq 1$, а на нижней $1 \leq \hat{R} \leq \infty$. Точка A соответствует короткому замыканию ($\hat{R}=0$); центр номограммы O — согласованной нагрузке ($\hat{R}=1$), а точка B — холостому ходу ($\hat{R}=\infty$).

После этих замечаний рассмотрим вопрос определения коэффициентов бегущей κ_6 и стоячей κ_c волн.

Для случая $p_{\text{Im}}=0$ верхняя формула выражения (8.12) принимает следующий вид:

$$\hat{R} = \frac{1 + p_{\text{Re}}}{1 - p_{\text{Re}}}. \quad (8.18)$$

Если $0 < \hat{R} < 1$, мы имеем дело с полуосью OA , где значения p_{Re} отрицательны (см. также рис. 8.1); для этой полуоси в последней формуле нужно заменить знаки перед p_{Re} . Так как на вертикальной оси реактивные сопротивления равны нулю, вместо p_{Re} можно подставить модуль коэффициента отражения $|p|$; таким образом,

$$\hat{R} = \frac{1 - |p|}{1 + |p|}. \quad (8.19)$$

Из равенства правых частей (8.10) и (8.19) следует, что $\hat{R} = \kappa_6$. Следовательно, значения точек на окружностях \hat{R} , нанесенные по радиусу OA , одновременно являются значениями коэффициента бегущей волны κ_6 .

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что значения точек на окружностях \hat{R} , отмеченные вдоль радиуса OB , являются также значениями коэффициентов стоячей волны κ_c .

В некоторых случаях удобнее пользоваться проводимостями, а не сопротивлениями. Переход к проводимостям осуществляется следующим образом.

Введем понятие «приведенной входной проводимости линии»

$$\hat{Y}_{\text{вх}} = \frac{Y_{\text{кх}}}{\sigma} = \frac{1}{\frac{Z_{\text{вх}}}{\rho}} = \frac{\rho}{Z_{\text{вх}}} = \frac{1}{\hat{R} + i\hat{X}}, \quad (8.20)$$

где $\sigma = \frac{1}{\rho}$ — волновая проводимость линии.

Исключим мнимость в знаменателе:

$$\hat{Y}_{\text{вх}} = \frac{\hat{R}}{\hat{R}^2 + \hat{X}^2} - i \frac{\hat{X}}{\hat{R}^2 + \hat{X}^2} = \hat{G} - i\hat{B}. \quad (8.21)$$

Сопоставив эти формулы с (8.12), получим

$$\widehat{Y}_{\text{вх}} = \widehat{G} - i\widehat{B} = \frac{1-p}{1+p}. \quad (8.22)$$

Отсюда следует, что при использовании номограммы для расчетов по проводимостям, а не по сопротивлениям, нужно p заменить на $(-p)$, \widehat{R} на \widehat{G} и \widehat{X} на $(-\widehat{B})$.

Таким образом, окружности R как бы становятся окружностями активных проводимостей \widehat{G} , а дуги \widehat{X} — дугами реактивных проводимостей, но с переменной знака. Следовательно, на правой половине номограммы в этом случае реактивные проводимости являются отрицательными (емкостными), а на левой — положительными (индуктивными). Верхняя точка номограммы, т. е. точка короткого замыкания ($\widehat{R}=0$), становится точкой холостого хода ($\widehat{G}=0$), а нижняя — точкой короткого замыкания ($\widehat{G}=\infty$).

В тех задачах, где заданы сопротивления, а определению подлежат проводимости, нужно совершить переход от сопротивлений к проводимостям. Этот переход осуществляется на основе следующих рассуждений.

Входное сопротивление четвертьволновой линии, как известно, определяется равенством

$$Z_{\text{вх}} \left(\frac{\lambda}{4} \right) = \frac{\rho^2}{Z_{\text{н}}}$$

или

$$\widehat{Z}_{\text{вх}} \left(\frac{\lambda}{4} \right) = \frac{\rho}{Z_{\text{н}}}. \quad (8.23)$$

Из ф-лы (8.20) следует, что

$$\widehat{Y}_{\text{н}} = \frac{\rho}{Z_{\text{н}}}. \quad (8.24)$$

Из сопоставления двух последних равенств получаем

$$\widehat{Y}_{\text{н}} = \widehat{Z}_{\text{вх}} \left(\frac{\lambda}{4} \right). \quad (8.25)$$

Следовательно, чтобы перейти на номограмме от известной нагрузки $\widehat{Z}_{\text{н}}$ к ее проводимости $\widehat{Y}_{\text{н}}$, нужно пройти по кругу k_6 (или k_5) расстояние $0,25\lambda$ в любую сторону. Новая, диаметрально противоположная $\widehat{Z}_{\text{н}}$ точка и есть $\widehat{Y}_{\text{н}}$.

После этого номограммой можно пользоваться как номограммой проводимости так, как было указано выше.

Приведенных теоретических данных достаточно для решения основных задач при помощи круговых номограмм; дополнительные сведения приводятся в решениях конкретных задач.

В настоящем разделе задачи расположены в следующей последовательности.

В первой группе задач (8.1—8.6) рассчитывается либо входное сопротивление по заданной нагрузке, либо нагрузка по заданному входному сопротивлению; во второй группе (8.7—8.10) заданными величинами являются либо коэффициент бегущей (стоячей) волны, либо положения максимумов, а расчету подлежат входное или нагрузочное сопротивления. Последние две задачи (8.11 и 8.12) отличаются по условию только заменой сопротивления проводимостью.

Задачи и упражнения

● 8.1.* Рассчитать входное сопротивление линии, если ее длина $l=3,4$ м, волновое сопротивление $\rho=200$ ом, рабочая длина волны $\lambda=20$ м, сопротивление нагрузки $Z_n=120+i220$ ом.

● 8.2.* Найти входное сопротивление линии с нагрузкой $Z_n=100+i100$ ом, если $\rho=100$ ом, $l=24$ м, $\lambda=10$ м.

● 8.3. Рассчитать входное сопротивление линии по данным, приведенным в следующей таблице.

| № примера | ρ , ом | Z_n , ом | l , м | λ , м | f , МГц |
|-----------|-------------|------------|---------|---------------|-----------|
| 1 | 100 | 300—1100 | 5,28 | 24 | — |
| 2 | 300 | 45+178 | 72 | 75 | — |
| 3 | 220 | 120—188 | 10,7 | 4,5 | — |
| 4 | 150 | 90+1120 | 1,2 | — | 375 |
| 5 | 500 | 0 | 4 | 16 | — |
| 6 | 72 | ∞ | 0,15 | 15 | — |

● 8.4. По условиям задачи 8.3 рассчитать входное сопротивление в указанном ниже сечении:

- 1) середина линии;
- 2) расстояние $0,21\lambda$ от конца;
- 3) расстояние $1,05$ м от конца;
- 4) расстояние $0,376\lambda$ от конца;
- 5) середина линии.

● 8.5.* В линию длиной $l=85$ м с волновым сопротивлением $\rho=100$ ом включен генератор, у которого $\lambda=100$ м. Рассчитать величину нагрузочного сопротивления линии, при котором ее входное сопротивление равно $Z_{вх}=150-i260$ ом.

● 8.6. Рассчитать нагрузочное сопротивление так, чтобы входное сопротивление линии было равно заданному.

Данные для расчета приведены в таблице.

| № примера | $Z_{вх}$, ом | ρ , ом | l , м | λ , м | f , МГц |
|-----------|---------------|-------------|---------|---------------|-----------|
| 1 | 72—172 | 240 | 16,4 | — | 2,5 |
| 2 | 80—124 | 100 | 24,4 | 17,5 | — |
| 3 | 182—152 | 130 | 164 | 41 | — |
| 4 | 200+1120 | 400 | 0,64 | 13 | — |
| 5 | 170+1100 | 200 | 6 | 16 | — |

● 8.7.* Линия, волновое сопротивление которой $\rho=500$ ом, подключена к генератору с длиной волны $\lambda=12$ м. Измерениями установлено, что $\kappa_6=0,4$ а расстояние от конца линии до ближайшего минимума (рис. 8.6) составляет $l_{\text{мин}}=2,5$ м. Определить нагрузочное сопротивление линии, представляющее собой входное сопротивление антенны.

● 8.8. Определить нагрузочное сопротивление в конце линии по известным значениям коэффициента бегущей волны κ_6 (или коэффициента стоячей волны $\kappa_с$) и расстояниям от минимумов (или максимумов) напряжения (или тока) до конца линии.

Данные для расчета приведены в таблице.

| № примера | ρ , ом | κ_6 | $\kappa_с$ | Расстояние от конца линии до | | | | λ , м |
|-----------|-------------|------------|------------|------------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|---------------|
| | | | | $U_{\text{макс}}$ м | $U_{\text{мин}}$ м | $I_{\text{макс}}$ м | $I_{\text{мин}}$ м | |
| 1 | 50 | 0,15 | — | $0,42\lambda$ | — | — | — | — |
| 2 | 150 | — | 12 | — | — | $0,21\lambda$ | — | — |
| 3 | 90 | 0,3 | — | — | $0,16\lambda$ | — | — | — |
| 4 | 200 | — | 1,6 | — | — | — | 4 | 16 |
| 5 | 400 | 0,7 | — | 2 | — | — | — | 4 |

● 8.9.* Измерениями установлено, что пучности напряжения, соответствующие условиям нагрузки и холостого хода, отстоят друг от друга на $\Delta l=0,18\lambda$, причем при включении нагрузки пучность передвигается в направлении «к нагрузке».

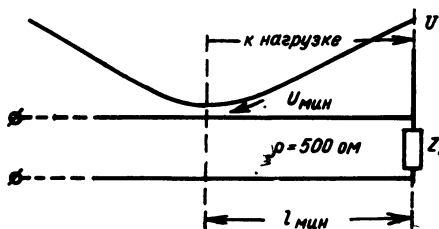


Рис. 8.6

Рассчитать величину нагрузочного сопротивления линии, если известно, что $\rho=394$ ом, а коэффициент стоячей волны при нагрузке $\kappa_с=1,4$.

Условия настоящей задачи встречаются на практике, когда измерения в конце линии мало доступны, а отключение нагрузки осуществляется легко. В этих случаях измеряют смещение пучностей (или узлов) с учетом направлений.

● 8.10. Определить величину нагрузки, если известно, что при коротком замыкании линии минимум (или максимум) напряжения смещается на величину и в направлении, которые указаны в таблице.

| № примера | ρ , ом | $\kappa_с$ | κ_6 | Смещение | | Направление смещения |
|-----------|-------------|------------|------------|-------------------|------------------|----------------------|
| | | | | $U_{\text{макс}}$ | $U_{\text{мин}}$ | |
| 1 | 600 | 2 | — | $0,09\lambda$ | — | к генератору |
| 2 | 120 | — | 0,8 | — | $0,12\lambda$ | » |
| 3 | 400 | 10 | — | $0,19\lambda$ | — | к нагрузке |
| 4 | 75 | — | 0,4 | — | $0,38\lambda$ | » |

● 8.11.* Дана линия, нагруженная на $Z_n=180-i240$ ом. Волновое сопротивление линии $\rho=100$ ом. Найти проводимость линии на расстоянии $0,143\lambda$ от ее конца.

- 8.12.* Рассчитать сопротивление нагрузки, при котором входная проводимость линии на расстоянии $0,075\lambda$ от конца имеет значение $Y_{вх} = 0,007 - i 0,014 \frac{1}{\text{ом}}$.

Волновое сопротивление линии $\rho = 400 \text{ ом}$.

9.

ЭЛЕМЕНТЫ СИНТЕЗА ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Общие положения

В задачах предыдущих разделов проводился анализ свойств цепи, т. е. по известным элементам цепи и схеме их соединения определялись частотные характеристики. В настоящем разделе рассматриваются задачи, в которых по заданным свойствам (характеристикам) цепи нужно определить ее элементы и схему их соединения — задачи синтеза линейных цепей. В задачу синтеза электрической цепи входит:

- 1) аппроксимация заданных частотных характеристик в виде функций, удобных для реализации;
- 2) реализация электрической цепи по аппроксимированным характеристикам.

Первая задача связана с выбором подходящих функций и последующим определением коэффициентов аппроксимации по заданным условиям точности. Для ее решения требуются специальные, часто весьма сложные по существу и громоздкие по вычислениям, методы. Эта задача здесь не рассматривается; в дальнейшем предполагается, что частотные характеристики синтезируемой цепи заданы в виде дробно-рациональной функции.

Вторая задача, которую мы здесь будем называть задачей синтеза, имеет ряд качественных особенностей:

1. Неоднозначность решения, так как различные цепи могут иметь одни и те же характеристики; в связи с этим дополнительно возникает задача оптимизации, т. е. задача выбора наипростейшей (в определенном смысле) цепи.

2. Необходимость проверки реализуемости функции, полученной в первой задаче, так как не всем характеристикам отвечают осуществимые цепи, составленные из элементов R , L и C .

3. Относительная сложность решения задач синтеза линейных цепей.

Здесь рассматриваются только самые простые приемы синтеза линейных цепей по заданным частотным характеристикам комплексного входного сопротивления (входной проводимости). Материал этого раздела следует рассматривать как введение в изучение теории синтеза линейных цепей. В частности, здесь совершенно

не рассматриваются вопросы реализуемости, устойчивости и др. Материал, который составляет основу представлений, необходимых для развития теории синтеза цепей, излагается вместе с теорией переходных процессов.

Основные идеи синтеза линейных цепей заключаются в реализации такого преобразования (представления) частотных характеристик, при котором каждый член математического выражения характеристики соответствовал бы определенному элементу цепи, а взаимосвязь между этими членами соответствовала бы определенной схеме соединений.

Здесь будут рассмотрены следующие методы синтеза:

- 1) представление комплексного входного сопротивления в виде непрерывной (цепной) дроби;
- 2) разложение комплексного входного сопротивления (входной проводимости) на простейшие дроби.

Метод синтеза на основе представления комплексного входного сопротивления в виде непрерывной дроби

Этот метод основан на преобразовании (путем непосредственного деления) выражения для входного сопротивления в такую непрерывную дробь, каждому элементу которой можно поставить в соответствие элемент линейной цепи.

Напомним, что отношение двух полиномов (дробно-рациональная функция) называется правильной дробью, если степень m старшего члена числителя меньше степени n старшего члена знаменателя, и неправильной, если $m \geq n$. Всякую неправильную дробь можно преобразовать при помощи выделения целой части (деления полинома на полином) в сумму полинома и правильной дроби. Поясним сказанное примером.

Пример. Дана дробно-рациональная функция

$$N(p) = \frac{3p^4 - 10ap^3 + 22a^2p^2 - 24a^3p + 10a^4}{p^2 - 2ap + 3a^2},$$

представляющая собой неправильную дробь; нужно представить ее в виде суммы полинома и правильной дроби.

Проводим непосредственное деление:

$$\begin{array}{r|l} 3p^4 - 10ap^3 + 22a^2p^2 - 24a^3p + 10a^4 & \frac{p^2 - 2ap + 3a^2}{3p^2 - 4ap + 5a^2} \\ \hline 3p^4 - 6ap^3 + 9a^2p^2 & \\ \hline - 4ap^3 + 13a^2p^2 - 24a^3p + 10a^4 & \\ - 4ap^3 + 8a^2p^2 - 12a^3p & \\ \hline 5a^2p^2 - 12a^3p + 10a^4 & \\ 5a^2p^2 - 10a^3p + 15a^4 & \\ \hline - 2a^3p - 5a^4 & \end{array}$$

Итак,

$$N(p) = 3p^2 - 4ap + 5a^2 + \frac{-2a^3p - 5a^4}{p^2 - 2ap + 3a^2}$$

Общее правило, которым нужно руководствоваться при подобных преобразованиях, вытекает из выражения для входного сопротивления схемы, изображенной на рис. 9.1. Все элементы, включенные последовательно, определяются как сопротивления, а элементы, включенные параллельно, — как проводимости.

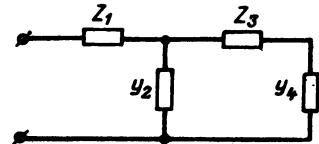


Рис. 9.1

Входное сопротивление схемы рис. 9.1 записывается в виде (пользуемся здесь и далее обозначением $i\omega = p$)

$$Z(p) = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4}}}$$

Заметим, что подобные выражения можно «читать» как слева направо, так и справа налево, причем последнее чтение более наглядно.

Необходимые условия физической реализуемости схемы заключаются в том, что, во-первых, степени полиномов числителя и знаменателя должны быть равны или отличаться не более, чем на единицу (так как только при этом выделяемая целая часть представляет собой соответственно R , pL или $\frac{1}{pC}$), и, во-вторых, коэффициенты непрерывной (цепной) дроби должны быть положительны. В тех случаях, когда в процессе выделения целых частей появляются отрицательные коэффициенты, нужно попробовать изменить порядок выполнения процедуры деления: обычно деление совершают, начиная со старших степеней (см. задачи 9.1, 9.2 и др.), однако можно совершать деление, начиная с младших степеней. Во многих случаях это позволяет освободиться от отрицательных коэффициентов (задачи 9.3, 9.8, 9.9 и др.).

Вопросам синтеза методом разложения в непрерывные дроби посвящены первые двенадцать задач настоящего раздела.

Метод синтеза на основе разложения комплексного входного сопротивления (входной проводимости) на элементарные (простейшие) дроби

Напомним, что всякая правильная несократимая дробь

$$N(p) = \frac{Q(p)}{P(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}$$

может быть единственным образом преобразована в сумму элементарных дробей вида

$$\frac{A}{(p-\alpha)^k} \text{ или } \frac{Bp+C}{(p^2+\beta p+\gamma)^l},$$

где $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \gamma < 0$.

При этом возможны следующие случаи:

1. Полюсы $N(p)$, т. е. нули уравнения $P(p)=0$, являются вещественными и простыми. В этом случае (при обозначении полюсов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$) разложение ведется по формуле

$$\begin{aligned} \frac{Q(p)}{P(p)} &= \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{(p-\alpha_1)(p-\alpha_2)\dots(p-\alpha_n)} = \\ &= \frac{A_1}{p-\alpha_1} + \frac{A_2}{p-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{p-\alpha_n}. \end{aligned}$$

2. Полюсы $N(p)$ вещественные, но среди них есть кратные. Разложение ведется по формуле

$$\begin{aligned} \frac{Q(p)}{P(p)} &= \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{(p-\alpha_1)^{k_1}(p-\alpha_2)^{k_2}\dots(p-\alpha_i)^{k_i}} = \\ &= \frac{A_1^{(1)}}{(p-\alpha_1)} + \frac{A_1^{(2)}}{(p-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_1^{(k_1)}}{(p-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_2^{(1)}}{(p-\alpha_2)} + \\ &+ \frac{A_2^{(2)}}{(p-\alpha_2)^2} + \dots + \frac{A_2^{(k_2)}}{(p-\alpha_2)^{k_2}} + \dots + \frac{A_i^{(1)}}{(p-\alpha_i)} + \\ &+ \frac{A_i^{(2)}}{(p-\alpha_i)^2} + \dots + \frac{A_i^{(k_i)}}{(p-\alpha_i)^{k_i}}. \end{aligned}$$

Задачи синтеза, в которых появляются кратные корни, встречаются редко.

3. Среди полюсов $N(p)$ есть комплексные простые. Разложение ведется по формуле

$$\begin{aligned} \frac{Q(p)}{P(p)} &= \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{(p-\alpha_1)^{k_1}(p-\alpha_2)^{k_2}\dots(p^2+\beta_1 p+\gamma_1)(p^2+\beta_2 p+\gamma_2)\dots} = \\ &= \frac{A_1^{(1)}}{(p-\alpha_1)} + \dots + \frac{A_2^{(1)}}{(p-\alpha_2)} + \dots + \frac{B_1 p + C_1}{p^2 + \beta_1 p + \gamma_1} + \\ &+ \frac{B_2 p + C_2}{p^2 + \beta_2 p + \gamma_2} \dots \end{aligned}$$

4. Среди полюсов $N(p)$ есть комплексные, кратные. Разложение ведется по формуле, которая строится аналогично формуле разложения для второго случая.

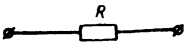
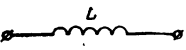
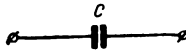
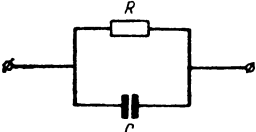
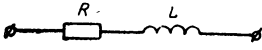
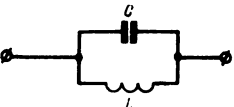
Постоянные A_1, A_2, \dots, A_n могут быть определены методом неопределенных коэффициентов, а также по формуле

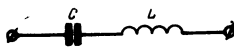
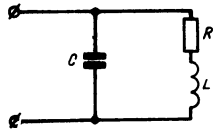
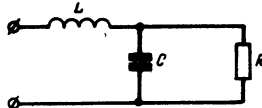
$$A_i = \frac{Q(\alpha_i)}{P'(\alpha_i)},$$

где $P'(\alpha_i)$ — значение производной $\frac{dP}{dp}$ при $p = \alpha_i$.

Таблица 9.1

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВХОДНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ (ПРОВОДИМОСТЕЙ)
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СХЕМ

| № пп. | Схема | Выражение входного сопротивления (проводимости) |
|-------|---|---|
| 1 |  | $Z(p) = R; \quad Y(p) = \frac{1}{R}$ |
| 2 |  | $Z(p) = pL; \quad Y(p) = \frac{1}{pL}$ |
| 3 |  | $Z(p) = \frac{1}{pC}; \quad Y(p) = pC$ |
| 4 |  | $Z(p) = \frac{R}{1 + pRC} = \frac{\frac{1}{C}}{p + \frac{1}{RC}}$ |
| 5 |  | $Y(p) = \frac{1}{R + pL} = \frac{\frac{1}{L}}{p + \frac{R}{L}}$ |
| 6 |  | $Z(p) = \frac{p \frac{1}{C}}{p^2 + \frac{1}{LC}}$ |

| № пп. | Схема | Выражение входного сопротивления (проводимости) |
|-------|---|--|
| 7 |  | $Y(p) = \frac{p \frac{1}{L}}{p^2 + \frac{1}{LC}}$ |
| 8 |  | $Z(p) = \frac{\frac{1}{C} p + \frac{R}{LC}}{p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}}$ |
| 9 |  | $Y(p) = \frac{\frac{1}{L} p + \frac{1}{RLC}}{p^2 + \frac{1}{RC} p + \frac{1}{LC}}$ |

После того как выполнено разложение на элементарные дроби, составляется общая схема, где каждая элементарная цепь соответствует элементарной дроби.

В табл. 9.1 приведены элементарные схемы и соответствующие им выражения входных сопротивлений (входных проводимостей).

Если заданное входное сопротивление (входная проводимость) представляет собой неправильную дробь, т. е. высшая степень числителя равна или больше высшей степени знаменателя, необходимо выделить целую часть и оставшуюся правильную дробь разложить на элементарные.

Во всех задачах имеется в виду, что $R > 0$, $L > 0$ и $C > 0$; из этого условия вытекают необходимые соотношения между коэффициентами, при которых возможна реализация заданного сопротивления.

Синтезу цепей по методу разложения на элементарные дроби посвящены задачи 9.13—9.21.

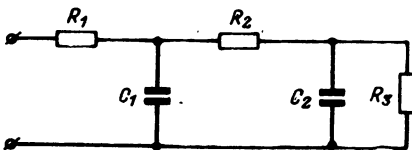


Рис. 9.2

Задачи и упражнения

● 9.1.* Для схемы, изображенной на рис. 9.2, найти комплексное входное сопротивление, а затем по найденному выражению осуществить синтез цепи методом разложения в непрерывные дроби.

Данные схемы следующие:

$$R_1 = 100 \text{ ом}; R_2 = 133,3 \text{ ом}; R_3 = 33,3 \text{ ом}; \\ C_1 = 0,005 \text{ ф}; C_2 = 0,015 \text{ ф}.$$

● 9.2.* Найти схему, соответствующую следующему выражению для входного сопротивления:

$$Z(p) = \frac{10^{-4} p^2 + 2 \cdot 10^{-1} p + 1,1 \cdot 10^3}{10^{-7} p^2 + 10^{-4} p + 1}.$$

● 9.3.* Составить схему, выражение для входного сопротивления которой имеет вид

$$Z(p) = \frac{2 \cdot 10^{-6} p^2 + 1001 \cdot 10^{-3} p + 10^3}{10^{-9} p^2 + 10^{-3} p + 1}.$$

● 9.4. Найти схему и элементы фильтра нижних частот с активной нагрузкой, имеющего входное сопротивление

$$Z(p) = \frac{10^{-7} p^2 + 10^{-2} p + 10^3}{10^{-5} p + 1}.$$

● 9.5.* Найти схему и элементы фильтра верхних частот с активной нагрузкой, имеющего входное сопротивление

$$Z(p) = \frac{10^{-7} p^2 + 10^{-3} p + 10^2}{10^{-9} p^2 + 10^{-4} p}.$$

● 9.6*. Найти схему, соответствующую следующему выражению для входного сопротивления:

$$Z(p) = \frac{10^{-13} p^3 + 10^{-7} p^2 + 1001 \cdot 10^{-4} p + 10^2}{1001 \cdot 10^{-12} p^2 + 10^{-6} p},$$

причем первым элементом в схеме должен быть конденсатор.

● 9.7. Найти схему, отвечающую следующему выражению для входного сопротивления:

$$Z(p) = \frac{5 \cdot 10^{-12} p^3 + 10^{-7} p^2 + 6 \cdot 10^{-3} p + 10^2}{5 \cdot 10^{-9} p^2 + 10^{-4} p + 1}.$$

● 9.8.* Найти схему, соответствующую следующему выражению для входного сопротивления:

$$Z(p) = \frac{12 \cdot 10^{-11} p^3 + 12 \cdot 10^{-8} p^2 + 12 \cdot 10^{-4} p + 1}{2 \cdot 10^{-13} p^3 + 12 \cdot 10^{-9} p^2 + 10^{-5} p}.$$

● 9.9.* Составить схему по следующему выражению для входного сопротивления:

$$Z(p) = \frac{106 \cdot 10^{-7} p^2 + 32 \cdot 10^{-2} p + 10^4}{53 \cdot 10^{-5} p + 1}.$$

● 9.10.* Найти схему, соответствующую выражению для входного сопротивления:

$$Z(p) = \frac{11 \cdot 10^{-15} p^4 + 1011 \cdot 10^{-12} p^3 + 13 \cdot 10^{-6} p^2 + 1011 \cdot 10^{-3} p + 10^3}{11 \cdot 10^{-12} p^3 + 1011 \cdot 10^{-9} p^2 + 2 \cdot 10^{-3} p + 1}.$$

- 9.11.* Найти схему, соответствующую выражению для входного сопротивления:

$$Z(p) = \frac{11 \cdot 10^{-10} p^3 + 1121 \cdot 10^{-7} p^2 + 121 \cdot 10^{-2} p + 11 \cdot 10^2}{11 \cdot 10^{-12} p^3 + 1011 \cdot 10^{-9} p^2 + 2 \cdot 10^{-3} p + 1}.$$

- 9.12. Составить схему, соответствующую следующему выражению для входного сопротивления:

$$Z(p) = \frac{0,03p^4 + 450p^2 + 5 \cdot 10^5}{0,015p^3 + 15 \cdot 10^2 p}.$$

- 9.13.* Найти схему, соответствующую следующему выражению для входного сопротивления:

$$Z(p) = \frac{10^{-6} p^2 + 1111 \cdot 10^{-3} p + 111 \cdot 10^2}{10^{-9} p^2 + 1001 \cdot 10^{-6} p + 1}.$$

Синтез цепи провести методом разложения на элементарные дроби.

- 9.14.* Найти схему, соответствующую следующему выражению для входной проводимости:

$$Y(p) = \frac{10^{-9} p^2 + 2011 \cdot 10^{-5} p + 12 \cdot 10^2}{10^{-6} p^2 + 1001 \cdot 10^{-2} p + 10^5}.$$

- 9.15.* Найти схему, соответствующую следующему выражению для входного сопротивления:

$$Z(p) = \frac{402 \cdot 10^{-13} p^3 + 7 \cdot 10^{-3} p}{8 \cdot 10^{-19} p^4 + 81 \cdot 10^{-10} p^2 + 1}.$$

- 9.16.* Найти схему, соответствующую следующему выражению для входной проводимости:

$$Y(p) = \frac{10^{-21} p^4 + (101 \cdot 10^{-13} + 10^{-8}) p^2 + 1}{10^{-16} p^3 + 10^{-3} p}.$$

- 9.17.* Найти схему, соответствующую следующему выражению для входного сопротивления:

$$Z(p) = \frac{10^{-13} p^3 + 1001 \cdot 10^{-9} p^2 + 111 \cdot 10^{-4} p + 11 \cdot 10^2}{10^{-9} p^2 + 10^{-5} p + 1}.$$

- 9.18.* Найти схему, соответствующую следующему выражению для входной проводимости:

$$Y(p) = \frac{10^{-13} p^3 + 21 \cdot 10^{-9} p^2 + 11 \cdot 10^{-4} p + 11}{10^{-11} p^3 + 10^{-6} p^2 + 10^{-2} p + 10^3}.$$

- 9.19. Найти схему, соответствующую следующему выражению для входной проводимости:

$$Y(p) = \frac{10^{-10} p^2 + (10^{-1} + 10^{-6}) p + 1001 \cdot 10^3}{10^{-7} p^2 + 10^{-3} p + 10^9}.$$

- 9.20.* Найти схему, соответствующую следующему выражению для входной проводимости:

$$Y(p) = \frac{(10^{-1} + 10^{-7}) p^3 + (1 + 10^{-6}) p^2 + 1001 \cdot 10^{-1} p + 1}{10^{-5} p^4 + 10^{-4} p^3 + (10^4 + 10^{-5}) p^2 + 10^{-4} p + 10^4}.$$

- 9.21. Найти схему, соответствующую следующему выражению для входного сопротивления:

$$Z(p) = \frac{2 \cdot 10^{-2} p^2 + 2001 \cdot 10^{-12} p + (10 + 10^5)}{10^{-7} p^3 + (10^{-7} + 10^{-4}) p^2 + (10^{-4} + 1) p + 1}.$$

10. ЭЛЕМЕНТЫ СИНТЕЗА ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Общие положения

Настоящий раздел посвящен построению схем линейных четырехполюсников по заданным частотным характеристикам, но в отличие от двухполюсников (см. разд. 9) здесь рассматриваются частотные характеристики (называемые комплексными передаточными функциями), характеризующие прохождение колебаний от входа к выходу.

Обычно при решении задач синтеза четырехполюсников предполагают, что нагрузкой является активное сопротивление, равное единице. Передаточные функции, определенные в таком предположении, называются нормализованными (относительно нагрузки).

Передаточные функции связаны с различными параметрами четырехполюсников простыми соотношениями. В табл. 10.1 приведены выражения для нормализованных передаточных функций через Z - и Y -параметры¹⁾.

Рассмотрим два метода синтеза четырехполюсников:

1. По передаточной функции, заданной в виде дробно-рациональной функции, находится система Z - или Y -параметров четырехполюсника, а затем по известным параметрам реализуется цепь.

2. Реализация цепи осуществляется непосредственно по передаточной функции.

Следует отметить, что материал данного раздела, так же как и предыдущего, необходимо рассматривать как введение в теорию синтеза четырехполюсников. Все ограничения, обусловленные в предыдущем разделе, остаются в силе и здесь.

¹⁾ При анализе размерностей нормализованных передаточных функций и других нормализованных величин необходимо принимать во внимание размерность единичной нагрузки. Например, согласно (10.4) $N_Z = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{Z_{21}}{1 - Z_{22}}$;

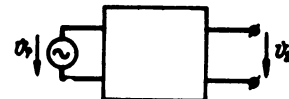



полное выражение для $\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}$ (см. табл. 2.2) имеет вид

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{Z_{21}}{1 - \frac{Z_{22}}{R}} = R \frac{Z_{21}}{R - Z_{22}},$$

и, так как $R=1$ ом, приходим к выражению (10.4).

Таблица 10.1

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

| Определяемая величина | Схема | Формула | № формулы |
|---------------------------------|---|--|-----------|
| Коэффициент передачи напряжения |  | $N_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} = \frac{-Y'_{21}}{Y_{22}} \quad (10.1)$ | |
| Коэффициент передачи тока |  | $N_I = \frac{i_2}{i_1} = \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad (10.2)$ | |
| Передачная проводимость |  | $N_Y = \frac{i_2}{\dot{U}_1} = \frac{Y_{21}}{1 - Y_{22}} \quad (10.3)$ | |
| Передачное сопротивление |  | $N_Z = \frac{\dot{U}_2}{i_1} = \frac{Z_{21}}{1 - Z_{22}} \quad (10.4)$ | |

Будем считать, что комплексная передаточная функция N_U или N_I задана в виде рациональной дроби

$$N(p) = \frac{Q(p)}{P(p)} = K \frac{p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}$$

Здесь $p = i\omega$, а K — коэффициент, называемый постоянной усиления.

Существует много способов реализации, позволяющих получать различные структуры; здесь рассматриваются наипростейшие.

Свойства четырехполюсников и методы их реализации зависят от корней уравнений $Q(p) = 0$ и $P(p) = 0$.

В зависимости от характера корней разложение полинома знаменателя на множители может быть осуществлено в различных видах.

В задачах синтеза представляют интерес следующие случаи.

1. Все множители $P(p)$ имеют вид $p^2 + \omega_i^2$, т. е. корни являются мнимыми; кратные корни отсутствуют.

2. Все множители $P(p)$ имеют вид $p + \sigma_i$, т. е. корни являются вещественными; кратные корни отсутствуют.

3. Множители имеют вид $p + \sigma_i$ и $p^2 + \beta_i p + \gamma_i$, причем $\left(\frac{\beta_i}{2}\right)^2 - \gamma_i < 0$, т. е. корни могут быть как вещественными, так и комплексными; кратные корни допускаются.

Другие сочетания сомножителей здесь не рассматриваются.

В первом случае возможно реализовать четырехполюсник в виде реактивной цепи (цепи LC); во втором — в виде цепи, содержащей активные сопротивления и реактивные элементы одного вида (цепи RL или RC); в третьем — в виде цепи общего типа (цепи RLC).

Следует отметить, что перечисленные условия не являются достаточными для физической реализуемости цепи (эти вопросы здесь не рассматриваются).

Синтез реактивных четырехполюсников

Синтез реактивных четырехполюсников проводится в два этапа.

1. По передаточной функции находят Z - или Y -параметры (способ нахождения параметров зависит от того, какие передаточные характеристики заданы).

2. По известным параметрам строится цепь.

Нахождение параметров по N_z и N_x

Рассмотрим передаточное сопротивление

$$N_z = \frac{Q(p)}{P(p)} = \frac{Q(p)}{m(p) + n(p)},$$

где $m(p)$ и $n(p)$ представляют собой соответственно четную и нечетную части полинома $P(p)$; $Q(p)$ должен быть четным или нечетным полиномом.

Если $Q(p)$ является четным полиномом, то числитель и знаменатель нужно разделить на нечетную часть знаменателя:

$$N_z = \frac{\frac{Q(p)}{n(p)}}{1 + \frac{m(p)}{n(p)}}. \quad (10.5)$$

Если $Q(p)$ — нечетный полином, числитель и знаменатель нужно разделить на четную часть знаменателя:

$$N_z = \frac{\frac{Q(p)}{m(p)}}{1 + \frac{n(p)}{m(p)}}. \quad (10.6)$$

Сопоставив (10.5) и (10.6) с (10.4), получим:
для четного $Q(p)$

$$\left. \begin{aligned} Z_{21} &= \frac{Q(p)}{n(p)} \\ Z_{22} &= -\frac{m(p)}{n(p)} \end{aligned} \right\}, \quad (10.7)$$

для нечетного $Q(p)$

$$\left. \begin{aligned} Z_{21} &= \frac{Q(p)}{m(p)} \\ Z_{22} &= -\frac{n(p)}{m(p)} \end{aligned} \right\}. \quad (10.8)$$

Совершенно аналогично можно найти Y -параметры по заданной передаточной функции в виде N_Y .

Нахождение параметров по N_U и N_I

Рассмотрим передаточную функцию N_U ¹⁾:

$$N_U = \frac{Q(p)}{P(p)}.$$

Разделим числитель и знаменатель на нечетный полином $L(p)$, степень которого отличается от степени полинома $P(p)$ на единицу, а корни $L(p)$ чередуются с корнями $P(p)$:

$$N_U = \frac{\frac{Q(p)}{L(p)}}{\frac{P(p)}{L(p)}}. \quad (10.9)$$

Сопоставив (10.9) с (10.1), найдем:

$$Z_{21} = -Y_{21} = \frac{Q(p)}{L(p)}, \quad (10.10)$$

$$Z_{11} = Y_{22} = \frac{P(p)}{L(p)}. \quad (10.11)$$

Параметры Z или Y по передаточной функции вида N_1 определяются аналогично.

Таким образом, по заданной передаточной функции можно найти два из трех параметров.

Одним из самых простых приемов нахождения третьего параметра является реализация в виде симметричной цепи. В этом случае третий параметр определяют, исходя из следующих известных (разд. 2) соотношений:

$$\begin{aligned} Z_{22} &= -Z_{11}; & Z_{12} &= -Z_{21}; \\ Y_{22} &= -Y_{11}; & Y_{12} &= -Y_{21}. \end{aligned}$$

¹⁾ Для чисто реактивных четырехполюсников функции N_U и N_I представляют собой отношение четных полиномов.

По найденным параметрам можно реализовать цепь в виде симметричной мостовой схемы рис. 10.1¹⁾, для которой (см. поз. 11, табл. 2.3)

$$Z_{11} = \frac{Z_1 + Z_2}{2}; \quad Z_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{2}$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= Z_{11} + Z_{12} \\ Z_2 &= Z_{11} - Z_{12} \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

Таким образом, найдены аналитические выражения для сопротивлений Z_1 и Z_2 ; их реализация осуществляется методами, изложенными в разд. 9.

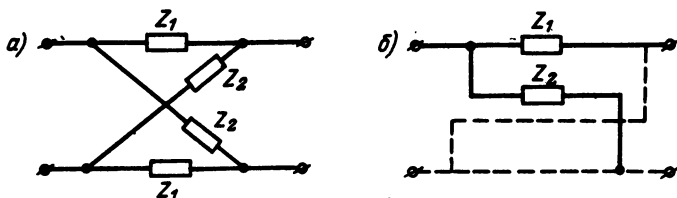


Рис. 10.1

Описанный процесс, как уже указывалось, справедлив в предположении единичной активной нагрузки; для активной нагрузки R реализацию следует осуществлять так же, но затем все индуктивности нужно увеличить, а емкости уменьшить в R раз.

В заключение необходимо отметить следующее.

Если разложить $Z_{22}(Y_{22})$ и $Z_{21}(Y_{21})$ на элементарные дроби:

$$Z_{22} = \frac{a_1 p}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{a_2 p}{p^2 + \omega_2^2} + \dots + \frac{a_n p}{p^2 + \omega_n^2};$$

$$Z_{21} = \frac{b_1 p}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{b_2 p}{p^2 + \omega_2^2} + \dots + \frac{b_n p}{p^2 + \omega_n^2},$$

то для выполнения одного из условий физической реализуемости необходимо, чтобы

$$a_i^2 - b_i^2 \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Выполнения этого условия можно добиться за счет уменьшения постоянной усиления K (см. задачу 10.13). В этом случае реализованная цепь будет иметь передаточную функцию, отличающуюся от заданной постоянным множителем, что может быть скомпенсировано включением усилителя.

Это замечание относится и к цепям RL и RC .

¹⁾ На рис. 10.1 *a* изображена схема симметричного мостового четырехполюсника в обычном начертании, а на рис. 10.1 *б* — та же схема, но в несколько упрощенном виде (симметричные ветви изображаются пунктиром без указания сопротивлений), широко распространенном в теории цепей. Такое начертание будет использовано в дальнейшем изложении.

Синтез четырехполюсников RL и RC

Здесь, как и при синтезе реактивных четырехполюсников, на первом этапе необходимо определить Z - или Y -параметры; однако метод их определения другой.

Нахождение параметров по N_Z и N_Y

В выражении

$$N_Z = \frac{Q(p)}{P(p)}$$

разобьем знаменатель $P(p)$ на две части:

$$N_Z = \frac{Q(p)}{P_1(p) + P_2(p)} = \frac{\frac{Q(p)}{P_2(p)}}{1 + \frac{P_1(p)}{P_2(p)}}. \quad (10.13)$$

Сопоставив ф-лы (10.13) и (10.4), найдем:

$$\left. \begin{aligned} Z_{21} &= \frac{Q(p)}{P_2(p)} \\ Z_{22} &= -\frac{P_1(p)}{P_2(p)} \end{aligned} \right\}. \quad (10.14)$$

Полиномы $P_1(p)$ и $P_2(p)$ выбираются следующим образом. По заданному выражению

$$P(p) = (p + \sigma_1)(p + \sigma_2) \dots (p + \sigma_n)$$

составляем полином

$$P_1(p) = \kappa' (p + \sigma'_1)(p + \sigma'_2) \dots (p + \sigma'_n),$$

корни которого $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n$ можно найти двумя способами:

1. Все корни σ'_i должны отвечать неравенству

$$\sigma'_i > \sigma_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (10.15)$$

Величина постоянной κ' в этом случае определяется из соотношения

$$\kappa' \sigma'_1 \sigma'_2 \dots \sigma'_n < \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n. \quad (10.16)$$

2. Все корни σ'_i должны отвечать неравенству

$$\sigma'_i < \sigma_j, \quad (10.17)$$

а постоянная κ' — неравенству:

$$\kappa' \leq 1. \quad (10.18)$$

Второй полином $P_2(p)$ определяется из равенства

$$P_2(p) = P(p) - P_1(p). \quad (10.19)$$

Таким образом, разложение $P(p)$ на $P_1(p)$ и $P_2(p)$ сводится к следующему:

1. Разложение $P(p)$ на множители.
2. Выбор корней σ_j по ф-лам (10.15) или (10.17).
3. Выбор κ' по ф-лам (10.16) или (10.18).
4. Определение $P_1(p)$ и $P_2(p)$.

Нахождение параметров по N_U и N_I

Рассмотрим передаточную функцию N_U :

$$N_U = \frac{Q(p)}{P(p)}.$$

В данном случае числитель и знаменатель необходимо разделить на полином $L(p)$, степень которого равна степени знаменателя, а корни чередуются с его корнями.

Параметры Z и Y определяются согласно (10.10) и (10.11).

Аналогично можно определить параметры по заданной передаточной функции N_I .

Здесь, так же как и при синтезе реактивных четырехполюсников, находятся два из трех параметров; третий параметр выбирается, исходя из условия симметрии схемы. Дальнейшее построение четырехполюсника проводится, как указывалось выше.

Синтез четырехполюсников типа RLC

При синтезе четырехполюсников типа RLC реализация цепей осуществляется непосредственно по передаточным функциям.

Весьма распространенной схемой реализации является четырехполюсник «постоянного активного сопротивления», т. е. четырехполюсник, входное сопротивление которого на всех частотах равно R , если он нагружен активным сопротивлением R (рис. 10.2).

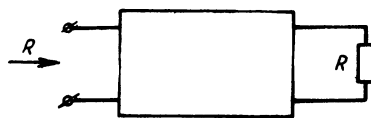


Рис. 10.2

Для симметричного мостового четырехполюсника (рис. 10.1) условие «постоянного активного сопротивления» выражается следующим равенством:

$$Z_1 Z_2 = R^2. \quad (10.20)$$

Здесь нормализованные относительно нагрузки передаточные функции равны друг другу:

$$N_Z = N_Y = \frac{1 - Z_1}{1 + Z_1} = N(p) \quad (10.21)$$

Решив последнее уравнение относительно Z_1 , получим

$$Z_1 = \frac{1 - N(p)}{1 + N(p)}. \quad (10.22)$$

Из этого выражения непосредственно следует порядок построения четырехполюсника:

1. По заданной передаточной функции $N(p)$ из ф-лы (10.22) находится Z_1 .

2. По известному значению Z_1 определяется Z_2 :

$$Z_2 = \frac{1}{Z_1}. \quad (10.23)$$

3. Известными методами (разд. 9) нужно реализовать Z_1 и Z_2 и построить четырехполюсник.

4. Если по условию R не равно единице, все индуктивности и активные сопротивления нужно увеличить, а емкости уменьшить в R раз.

В настоящем разделе задачи расположены в следующей последовательности.

Задачи 10.1—10.7 посвящены синтезу реактивных четырехполюсников, 10.8—10.16 — синтезу четырехполюсников типа RL и RC и 10.17—10.20 — четырехполюсникам общего типа.

Задачи и упражнения

● 10.1.* Найти цепь, соответствующую следующему передаточному сопротивлению:

$$N_Z = \frac{1 - 6 \cdot 10^{-10} p^2}{1 + 12 \cdot 10^{-6} p + 6 \cdot 10^{-10} p^2}.$$

Нагрузкой является активное сопротивление, равное 600 ом.

● 10.2. Найти схему реактивного четырехполюсника, соответствующую следующему передаточному сопротивлению:

$$N_Z = \frac{8 \cdot 10^{-22} p^5 - 321 \cdot 10^{-13} p^3 - 6 \cdot 10^{-3} p}{8 \cdot 10^{-22} p^5 + 16 \cdot 10^{-19} p^4 + 483 \cdot 10^{-13} p^3 + 162 \cdot 10^{-10} p^2 + 8 \cdot 10^{-3} p + 2}.$$

Нагрузкой является активное сопротивление, равное 1 ом.

● 10.3.* Найти схему реактивного четырехполюсника, соответствующую передаточному сопротивлению:

$$N_Z = \frac{10^{-21} p^4 - 8,9 \cdot 10^{-10} p^2 + 1}{10^{-21} p^4 + 2 \cdot 10^{-17} p^3 + 11,1 \cdot 10^{-10} p^2 + 2 \cdot 10^{-6} p + 1}.$$

Нагрузкой является активное сопротивление, равное 100 ом.

● 10.4.* Задан коэффициент передачи напряжения реактивного четырехполюсника

$$N_U = \frac{(p^2 + 3)(p^2 + 10)(p^2 + 17)}{(p^2 + 5)(p^2 + 11)(p^2 + 24)}.$$

Выбрать из приведенных ниже выражений приемлемые полиномы для знаменателей Z - и Y -параметров [ф-лы (10.10) и (10.11)]:

$$\begin{aligned} L_1(p) &= (p^2 + 6)(p^2 + 14)(p^2 + 31); & L_4(p) &= p(p^2 + 16); \\ L_2(p) &= p(p^2 + 2)(p^2 + 3)(p^2 + 16); & L_5(p) &= p(p^2 + 4)(p^2 + 9)(p^2 + 20); \\ L_3(p) &= p(p^2 + 7)(p^2 + 15)(p^2 + 32); & L_6(p) &= p(p^2 + 8)(p^2 + 12). \end{aligned}$$

- 10.5.* Найти схему, соответствующую следующему коэффициенту передачи напряжения:

$$N_U = \frac{10^{-7} p^2 - 0,9 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{-7} p^2 + 2,2 \cdot 10^6}$$

Степень полинома $L(p)$ выбрать в двух вариантах: на единицу меньше и на единицу больше степени знаменателя N_U .

- 10.6.* Найти схему, соответствующую коэффициенту передачи напряжения:

$$N_U = \frac{10^{-21} p^4 - 8,9 \cdot 10^{-10} p^2 + 1}{10^{-21} p^4 + 11,1 \cdot 10^{-10} p^2 + 1}$$

- 10.7.* Найти схему, соответствующую коэффициенту передачи напряжения:

$$N_U = \frac{p^2 + a}{p^2 + b}$$

Степень $L(p)$ выбрать, исходя из условий получения наиболее простой схемы. Выяснить влияние постоянного множителя при $L(p)$ на величину элементов схемы.

- 10.8.* Задано передаточное сопротивление

$$N_Z = \frac{(p+1)(p+7)(p+16)}{(p+2)(p+10)(p+17)}$$

Определить приемлемость приведенных ниже полиномов $P_1(p)$:

1. $P_1 = 0,01(p+2)(p+12)(p+20)$;
2. $P_1 = 0,03(p+3)(p+14)(p+26)(p+40)$;
3. $P_1 = 0,5(p+4)(p+15)(p+20)$;
4. $P_1 = 0,2(p+4)(p+15)(p+20)$;
5. $P_1 = 2(p+1)(p+8)(p+12)$;
6. $P_1 = (p+1)(p+6)(p+14)$;
7. $P_1 = 0,5(p+1,5)(p+7)(p+16)$.

- 10.9.* Задана передаточная проводимость

$$N_Y = \frac{(p+3)(p+8)(p+22)}{(p+7)(p+10)(p+25)}$$

Определить Y -параметры двумя способами [т. е. по ф-лам (10.15) — (10.16) и по ф-лам (10.17) — (10.18)].

- 10.10. Задано передаточное сопротивление

$$N_Z = \frac{(p+5)(p+15)}{(p+9)(p+16)}$$

Определить Z -параметры двумя способами.

- 10.11. Найти схему, соответствующую передаточному сопротивлению:

$$N_Z = \frac{0,33 \cdot 10^{10} + 0,67 \cdot 10^6 p + 0,33 p^2}{(p + 0,017 \cdot 10^6)(p + 1,335 \cdot 10^6)}$$

Нагрузкой является активное сопротивление, равное 1000 ом.

Z -параметры рекомендуется определить первым способом.

- 10.12.* Найти схему, соответствующую передаточному сопротивлению

$$N_Z = \frac{0,2p + 0,3 \cdot 10^{10}}{p + 10^{10}}$$

Нагрузкой является активное сопротивление, равное 1 ом.

Z -параметры найти двумя способами.

- 10.13.* Найти схему, соответствующую передаточному сопротивлению

$$N_Z = \frac{ap + b}{p + c}$$

Z-параметры определить так, чтобы получить более простую схему. Выяснить влияние величины корня $P_1(p)$ на элементы схемы.

- 10.14.* Задан коэффициент передачи напряжения

$$N_U = \frac{(p+3)(p+4)(p+17)}{(p+5)(p+8)(p+20)}$$

Определить приемлемость приведенных ниже полиномов:

$$\begin{aligned} L_1(p) &= (p+2)(p+6)(p+16); & L_3(p) &= 16(p+3)(p+7)(p+18); \\ L_2(p) &= 2(p+6)(p+10)(p+24); & L_4(p) &= (p+6)(p+7)(p+22); \\ L_5(p) &= (p+6)(p+10). \end{aligned}$$

- 10.15.* Найти схему, соответствующую коэффициенту передачи напряжения

$$N_U = \frac{0,5p + 3 \cdot 10^{10}}{p + 5 \cdot 10^{10}}$$

Реализацию произвести в двух вариантах:

- 1) корень полинома $L(p)$ больше корня знаменателя N_U ;
- 2) корень полинома $L(p)$ меньше корня знаменателя N_U .

- 10.16.* Найти схему типа RC, соответствующую коэффициенту передачи напряжения

$$N_U = \frac{10^5 p + 10^9}{(p + 2 \cdot 10^4)(p + 2 \cdot 10^9)}$$

- 10.17.* Показать, что симметричная мостовая схема является четырехполюсником постоянного активного сопротивления при выполнении условия (10.20).

- 10.18.* Показать, что выражение (10.21) справедливо для N_Z .

- 10.19.* Найти схему, соответствующую передаточному сопротивлению:

$$N_Z = \frac{10^{-9} p^2 - 999}{10^{-9} p^2 + 2 \cdot 10^{-3} p + 1001}$$

Нагрузкой является активное сопротивление, равное 100 ом.

- 10.20. Найти схему, соответствующую передаточному сопротивлению:

$$N_Z = \frac{-4,95 \cdot 10^{-7} p^2 - 2,03 \cdot 10^{-1} p - 2099}{5,05 \cdot 10^{-7} p^2 + 2,07 \cdot 10^{-1} p + 2101}$$

Нагрузкой является активное сопротивление, равное 1000 ом.

11.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ СИГНАЛЬНЫХ ГРАФОВ

Общие положения

В первых десяти разделах настоящей книги излагались вопросы расчета радиотехнических схем на основе использования общих законов теории электрических цепей — законов Кирхгофа. Возможен, однако, и другой подход, основанный на использовании причинно-следственных связей между значениями токов и напряжений в различных участках схемы. Такой подход составляет содержание теории сигнальных графов, позволяющей эффективно рассчитывать линейные цепи.

Преимущества теории графов трудно определить количественно; можно привести некоторые качественные оценки.

Достоинство теории графов состоит, прежде всего, в наглядности: система уравнений, выраженная при помощи символов и индексов, заменяется диаграммой, вскрывающей внутренние связи между переменными; система «оживает», раскрывается ее «внутренний мир» и причинно-следственные связи. Благодаря последнему обстоятельству аппарат теории графов адекватен природе вещей. Его с одинаковым успехом можно применить для изучения различных явлений. В частности, теория графов позволяет описывать системы, содержащие разнородные физические элементы — электрические, механические, тепловые и т. д. Одним из достоинств аппарата теории графов является его гибкость, т. е. возможность легко определять связи между любыми переменными, учитывать обратные связи, действие помех, а также рассчитывать чувствительность (оценивать влияние на данную переменную другой переменной или параметра) в любых узлах схемы. Кроме того, применение аппарата сигнальных графов приводит к экономии в вычислениях. Преимущества аппарата теории графов сказываются тем существеннее, чем сложнее изучаемая система. При рассмотрении простых систем эти преимущества остаются незамеченными, а так как овладение теорией графов должно идти «через простые системы», нужно предостеречь читателя от преждевременных выводов.

Основные определения. Уравнения и графы

Граф представляет собой диаграмму, состоящую из совокупности точек (узлов) и направленных линий (ветвей), соединяющих эти точки. Каждый узел графа отображает какую-нибудь переменную; каждая ветвь графа отображает причинно-следственную связь между переменными, образующими начало и конец ветви, причем начало

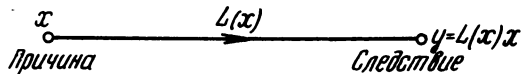


Рис. 11.1

ветви истолковывается как причина, а ее конец — как следствие. Направление ветви указывается стрелкой — от причины к следствию. Длина и кривизна ветвей значения не имеют. Ветвь — оператор (рис. 11.1), в общем случае нелинейный¹⁾.

Узлы обозначаются буквами, представляющими данную переменную, и цифрами, соответствующими порядковым номерам узлов (рис. 11.2а). Иногда, если это возможно, узел обозначается буквой с соответствующим индексом (рис. 11.2б)²⁾.

¹⁾ В настоящей книге в соответствии с названием рассматриваются только линейные операторы.

²⁾ Если сигнал в узле является постоянным числом, то это число обводится кружком (рис. 11.2 в).

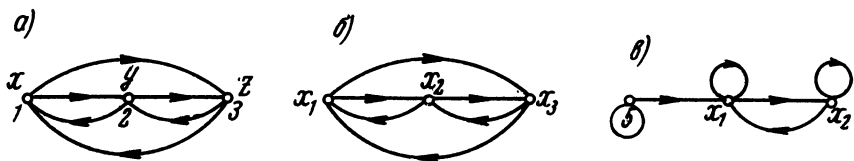


Рис. 11.2

Каждая ветвь графа, называемая «передатчей ветви» или просто «передатчей», обозначается, например, символом a_{ji} , где индексы указывают на то, что ветвь начинается в i -м узле и заканчивается в j -м узле (рис. 11.3)¹⁾. Обозначение a_{ii} указывает на то, что ветвь начинается в узле (исходит из узла) i и кончается в том же узле (входит в тот же узел). Такая ветвь называется петлей.

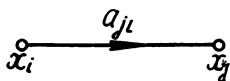


Рис. 11.3

Между переменной x_i (причиной) в i -м узле и переменной x_j (следствием) в j -м узле (рис. 11.3) имеет место равенство

$$x_j = a_{ji}x_i.$$

Так как в узел j может входить ряд ветвей и для каждой из них справедливо аналогичное равенство, переменная x_j называется в этом случае i -й составляющей j -й переменной²⁾. Очень удобна следующая трактовка: i -я составляющая — это произведение сигнала в узле i (причина) на передачу a_{ji} , т. е. на передачу ветви между узлом-причиной i и узлом-следствием j ; именно поэтому рассматриваемые графы называются сигнальными.

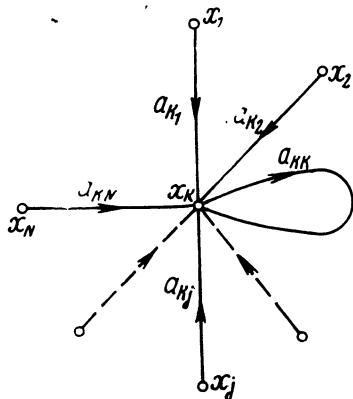


Рис. 11.4

Узлы, имеющие только исходящие ветви, называются источниками, а только входящие — стоками; узлы, имеющие как исходящие, так и входящие ветви, называются смешанными. Узлы-источники являются независимыми узлами, а узлы-стоки и смешанные — зависимыми. Переменная в любом зависимом узле определяется алгебраической суммой составляющих от всех остальных узлов. Например, для узла k (рис. 11.4)

¹⁾ Наряду с приведенным обозначением передачи ветви широко пользуются и другим обозначением, при котором передача отсчитывается от начала к концу ветви; здесь отсчет будет вестись от конца ветви к её началу, что создает известные удобства в вычислениях.

²⁾ Следует обратить внимание на то, что здесь индекс i определяет номер узла-причины, а не порядковый номер составляющей.

$$x_k = \sum_i a_{ki} x_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, k, \dots, N). \quad (11.1)$$

Здесь a_{ki} — передачи входящих в узел k ветвей, а N — число узлов графа.

Следует особо подчеркнуть, что переменная в узле определяется только входящими ветвями; выходящие из узла ветви не оказывают на нее никакого влияния. Так как переменная в каждом узле определяется ф-лой (11.1), граф соответствует (эквивалентен) системе линейных уравнений:

$$x_j = \sum_i a_{ji} x_i \quad (j = 1, 2, 3, \dots, N; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N). \quad (11.2)$$

Передачу ветвей a_{ji} графа всегда можно записать в виде квадратной матрицы $[A]$ ¹⁾:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nj} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}.$$

Здесь N — порядок матрицы, равный числу узлов графа.

В строки записываются передачи к данному узлу от всех узлов, а в столбцы — передачи от данного узла ко всем узлам. Номера строк и столбцов в матрице $[A]$ совпадают с номерами узлов, относительно которых определяются передачи входящих и выходящих ветвей в соответствующих строках и столбцах. Некоторые элементы, а также столбцы и строки матрицы $[A]$ могут быть равны нулю. Если все элементы строки являются нулями, соответствующий узел представляет собой источник; если все элементы столбца являются нулями, соответствующий узел представляет собой сток.

Приведенных определений достаточно для составления графов по заданной системе уравнений (а также и для обратной задачи); дополнительные определения, необходимые для других задач, будут вводиться по ходу изложения.

Для того чтобы построить граф по системе уравнений, необходимо определить совокупность его переменных (узлов) и составить матрицу передач $[A]$. В простейших случаях матрицу $[A]$ в явном виде можно не выписывать. Следует отметить, что одной и той же системе уравнений (или системам, равносильным ей) могут быть эквивалентны разные графы; такие графы будем называть равносильными.

¹⁾ Необходимые сведения из матричной алгебры даны в разд. 2.

Пусть задана система линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1j}x_j + \dots + b_{1n}x_n &= f_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2j}x_j + \dots + b_{2n}x_n &= f_2 \\ \dots &\dots \\ b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{ij}x_j + \dots + b_{in}x_n &= f_i \\ \dots &\dots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nj}x_j + \dots + b_{nn}x_n &= f_n \end{aligned} \right\}, \quad (11.3)$$

по которой нужно построить граф.

На поле предполагаемого графа наносится N точек, причем

$$N = n + m \quad (11.4)$$

где n — число уравнений (число переменных) системы, а m — число правых частей (f_i), не равных нулю¹⁾. Очевидно, что значение N не может превосходить $2n$.

Затем нанесенные точки нумеруются. Каждой точке сопоставляется одна переменная x или f ; в результате образуется совокупность узлов графа. Узлы, которым соответствуют переменные x , являются зависимыми; независимым узлам соответствуют правые части f . В однородных системах, т. е. при $f_i=0$, для всех i все узлы являются зависимыми.

Располагать точки на поле графа и сопоставлять им переменные можно произвольно. Однако для того чтобы обусловить в матрице $[A]$ определенное расположение строк и столбцов, условимся во всех случаях, когда необходимо составление матрицы $[A]$, первым по порядку n точкам сопоставлять зависимые узлы, а оставшимся m точкам — независимые. В тех случаях, когда составлять матрицу $[A]$ не нужно, следует принимать во внимание удобство начертания и наглядность графа (см. ниже).

Передачи ветвей графа по заданной системе уравнений (т. е. определение матрицы $[A]$) можно определять двумя основными способами, каждый из которых приводит к своему графу; эти различные графы являются равносильными. Граф, построенный по первому способу, называется нормализованным, по второму — ненормализованным.

Построение нормализованного графа

Для построения нормализованного графа система (11.3) переписывается таким образом, чтобы в каждом уравнении коэффициент при одной переменной x был равен единице; другими словами — в каждом уравнении должна быть своя нормализованная переменная²⁾. Переносим все члены уравнения, не содержащие

¹⁾ При $m=0$ система является однородной.

²⁾ Здесь слова «нормализация относительно переменной x_i » адресуются к коэффициенту при x_i , а также к тому, что переменная x_i входит только в левую часть уравнения.

этой переменной, в правую часть, выражаем нормализованную переменную через все остальные.

Перепишем, например, первое уравнение системы (11.3) в виде, нормализованном относительно x_1 :

$$x_1 = 0 - \frac{b_{12}}{b_{11}} x_2 - \dots - \frac{b_{1i}}{b_{11}} x_i - \dots - \frac{b_{1n}}{b_{11}} x_n + \frac{1}{b_{11}} f_1. \quad (11.5)$$

Сравнивая выражения (11.5) и (11.1), замечаем, что слагаемые в выражении (11.5) являются составляющими x_1 , а коэффициенты при x и f — передачами ветвей¹⁾. Таким образом, может быть выписана первая строка матрицы нормализованного графа. Переписывая второе уравнение системы (11.3) в виде, нормализованном относительно x_2 , третье — относительно x_3 и т. д., получаем соответствующие строки матрицы $[A_H]$. Указанный порядок не является обязательным; можно, например, первое уравнение нормализовать относительно любого x_j , а все остальные уравнения системы — относительно других переменных x . Номер строки матрицы $[A_H]$ определяется номером узла, соответствующего переменной x_j , относительно которой нормализуется уравнение. Разумеется, при этом графы будут различными, но равносильными.

Матрица $[A_H]$ имеет вид:

$$[A_H] = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1i} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2i} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3i} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{ni} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{1(n+1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & a_{2(n+1)} & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & a_{3(n+1)} & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & a_{nN} \end{bmatrix},$$

где $a_{12} = -\frac{b_{12}}{b_{11}}$; $a_{13} = -\frac{b_{13}}{b_{11}}$; \dots ; $a_{1i} = -\frac{b_{1i}}{b_{11}}$; \dots ;

$$a_{1n} = -\frac{b_{1n}}{b_{11}}; \quad a_{1(n+1)} = \frac{1}{b_{11}}; \quad a_{2(n+2)} = \frac{1}{b_{22}},$$

¹⁾ Передачи ветвей могут иметь различные размерности. В данном случае передачи от узлов $x_i (i=1, 2, 3, \dots, N)$ к x_1 являются безразмерными, а от узла-источника f_1 к узлу x_1 передачи имеют размерность, соответствующую, $\frac{1}{b_{11}}$.

или, в общем виде,

$$a_{ji} = -\frac{b_{ji}}{b_{jj}} \quad (i \neq j) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n; \quad j = 1, 2, 3, \dots, n),$$

$$a_{jj} = 0,$$

$$a_{j(n+\kappa)} = 0 \quad (\kappa \neq j) \quad (\kappa = 1, 2, 3, \dots, m).$$

$$a_{j(n+\kappa)} = \frac{1}{b_{jj}} \quad (\kappa = j).$$

Затем в соответствии с матрицей $[A_H]$ нужно соединить узлы графа между собой. В простых задачах можно наносить передачи ветвей непосредственно, не составляя матрицы $[A_H]$ в явном виде.

Матрица $[A_H]$ нормализованного графа называется нормализованной. Нормализованная матрица характеризуется равенством нулю всех элементов главной диагонали, что соответствует отсутствию петель в нормализованном графе.

Для однородной системы матрицу $[A_H]$ можно составить непосредственно по матрице коэффициентов при помощи равенства

$$[A_H] = [D][B] + [1]_n^1, \quad (11.6)$$

в котором $[B]$ — квадратичная матрица коэффициентов системы (11.3), $[D]$ — диагональная матрица, составленная из соответствующих и противоположных по знаку обратных элементов диагонали матрицы $[B]^2$, а $[1]_n^1$ — единичная матрица порядка n .

Например, если $[B] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, то

$$[D] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{d} \end{bmatrix}.$$

Для неоднородной системы уравнений формула, аналогичная ф-ле (11.6), оказывается громоздкой и неудобной для пользования. В этих случаях целесообразно решать уравнения относительно каждого неизвестного так, как было показано выше.

Построение ненормализованного графа

Для объяснения принципа построения ненормализованного графа прибавим к обеим частям первого уравнения системы (11.3) переменную x_1 и затем решим его относительно x_1 :

$$x_1 = (b_{11} + 1)x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n - f_1.$$

¹⁾ Доказательство ф-лы (11.6) приведено в задаче 11.6.

²⁾ Считается, что все величины являются безразмерными; если этого нет, нужно привести коэффициенты к безразмерному виду (см. разд. 14).

Аналогичным образом выписываются остальные строки. Коэффициенты при переменных x_i и правых частях f_i (равные при такой записи —1) соответствуют элементам матрицы $[A]$, по которой может быть построен граф. Различие между последней записью и ф-лой (11.5) состоит в том, что в последней записи каждая переменная x_i выражается через все переменные. Это обстоятельство приводит к образованию петель с передачами ($b_{ii}+1$). Обратим внимание на то, что передачи ветвей в последней записи структурно проще, чем в ф-ле (11.5).

Перейдем теперь к выводу общего принципа построения ненормализованного графа. С этой целью запишем систему (11.3) в матричной форме:

$$[B][X] = [F], \quad (11.7)$$

причем условимся в верхних строках записывать уравнения, у которых правые части отличны от нуля. Таким образом, в ур-нии (11.7) $[B]$ — как и прежде, квадратная матрица порядка n коэффициентов b , $[X]$ — матрица-столбец переменных x , имеющая n элементов, а $[F]$ — матрица-столбец правых частей f , имеющая m правых элементов, отличных от нуля.

Для нахождения матрицы $[A]$ необходимо систему (11.7) решить относительно переменных x . Для этого прибавим к обеим частям равенства (11.7) матрицу $[X]$:

$$[B][X] + [X] = [F] + [X].$$

Выполнив элементарные преобразования, получим

$$[X] = ([B] + [1]_n)[X] - [F]. \quad (11.8)$$

Перепишем ур-ние (11.8) в виде

$$[X] = \left[([B] + [1]_n) \begin{pmatrix} -[1]_m \\ [0]_{(n-m)m} \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} [X] \\ [F]^\circ \end{bmatrix}, \quad (11.9)$$

в котором матрицы, входящие в выражение (11.8), играют роль элементов (субматриц) матрицы (11.9), а матрица $[F]^\circ$ имеет лишь элементы матрицы $[F]$, отличные от нуля.

Уравнение (11.9) представляет собой записанную в матричной форме систему ур-ний (11.3), разрешенных относительно каждой переменной x , причем эта каждая переменная, как уже указывалось, выражена через все переменные x и все правые части f аналогично записи (11.5). Следовательно, первая матрица правой части есть не что иное, как матрица передач $[A]$. Порядок этой матрицы, конечно, N . Таким образом, по заданной системе линейных уравнений можно сразу записать матрицу $[A]$ в следующем виде:

$$[A] = \left[([B] + [1]_n) \begin{pmatrix} -[1]_m \\ [0]_{(n-m)m} \end{pmatrix} \right]. \quad (11.10)$$

Эта матрица имеет $N = m + n$ столбцов и n строк. Для того чтобы сделать эту матрицу квадратной, нужно добавить m нулевых строк, соответствующих числу узлов-источников. Для составления графа однородной системы используется то же равенство (11.10), но так как в этом случае $m = 0$, формула упрощается и принимает вид

$$[A] = [B] + [1]_n, \quad (11.11)$$

т. е. к диагональным элементам матрицы $[B]$ нужно добавить единицы.

Матрица $[A]$, полученная по второму способу, т. е. по ур-ниям (11.10) или (11.11), отличается от матрицы, полученной по первому способу, т. е. при помощи решений типа (11.5) или (11.6). Однако графы, построенные по этим матрицам, будут равносильными. Различие матриц объясняется тем, что в ур-нии (11.8) переменные x_i входят как в левую, так и в правую часть; в силу этого обстоятельства построенный по второму способу граф не будет нормализованным и в нем могут быть петли.

С точки зрения решения графов (разд. 13), т. е. с точки зрения решения систем уравнений, оба способа дают одинаковый результат и могут считаться эквивалентными. Однако между ними есть и существенные различия, определяющие области их применения. Нормализованный граф (построенный по первому способу) структурно проще ненормализованного, но выражения для передачи ветвей у нормализованного графа оказываются более сложными. Кроме того, при сложении графов (эта операция будет определена позднее при изучении сложных схем) удобнее пользоваться ненормализованными графами. Таким образом, выбор способа построения графа определяется содержанием задачи и, в известной степени, квалификацией выбирающего.

Необходимо обратить внимание на то, что изложенный принцип построения нормализованного графа, вытекающий из ур-ния (11.5), представляется единственно возможным, для построения же ненормализованных графов можно предложить много методов.

Рассмотрим пример. В первом уравнении системы (11.3) прибавим к левой и правой частям $b_{11}x_1$:

$$2b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = f_1 + b_{11}x_1$$

и затем решим уравнение относительно x_1 :

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b_{12}}{b_{11}} x_2 - \dots - \frac{b_{1n}}{b_{11}} x_n + \frac{1}{b_{11}} f_1 \right).$$

Легко видеть, что это выражение, соответствующее ненормализованному графу, совпадает с выражением (11.5) нормализованного графа с тем лишь отличием, что в последнем появляются петли и передачи всех ветвей умножаются на 0,5. Подобный ненормализованный граф, конечно, равносильен ненормализованному

графу с матрицей (11.10). Для расчета электрических цепей несравненно удобнее граф с матрицей (11.10), так как у этого графа передачи ветвей численно равны коэффициентам уравнений, благодаря чему его построение весьма простое. В дальнейшем, говоря о ненормализованном графе, будем иметь в виду графы, соответствующие матрице (11.10).

В заключение следует отметить, что наряду с рассматриваемыми в данной книге сигнальными графами, которые связаны с именем Мэсона (см. разд. 13), распространение получили графы, связанные с именами Коутса и Дезо¹⁾. Характерной особенностью этих графов (которые не называют сигнальными) является то, что матрица передач $[A]$ отождествляется с матрицей $[B]$ коэффициентов системы уравнений (для однородной системы), т. е.

$$[A_d] = [B].$$

При таком способе определения графа основное равенство (11.1) теории сигнальных графов не выполняется. Очевидно, что от одного типа графов легко переходить к другому. В настоящей книге рассматриваются только сигнальные графы.

Дополнительные замечания

Изложенные принципы дают исчерпывающие правила для построения графа. Построенному графу придается, по возможности, наглядная форма. В частности, когда можно выделить узел-источник и узел-сток, все смешанные узлы удобно располагать между источником и стоком.

Как уже упоминалось, одной и той же системе уравнений могут быть эквивалентны разные графы; при этом одни и те же переменные могут соответствовать независимым и зависимым узлам²⁾.

Встречаются задачи, в которых, исходя из условия, можно высказать определенные пожелания относительно того, какие переменные должны являться источниками и стоками (обычно это относится к источникам). При составлении графа следует помнить, что любые переменные можно представить как источники, лишь бы их число не превышало m . После определения «желательных» источников и перенесения их в правую часть системы (11.3) можно определить переменные, которые соответствуют стокам; каждая из таких переменных должна входить лишь в одно уравнение системы (в левую часть).

¹⁾ С. А. Desoer «The Optimum Formula for the Gain of a Flow Graph or a Simple Derivation of Coates' Formula». Proceedings of the IRE, May 1960, pp. 883—889.

²⁾ Другими словами, причинность и следственность не являются «закрепленными» свойствами переменных и их можно менять. В реальных условиях классификация причины и следствия очень часто является условной (например, ток и напряжение, напряжение и ток и т. п.).

Составление системы уравнений по известному графу, т. е. обратная задача, решается следующим образом: для каждого зависимого узла составляется равенство (11.1); совокупность таких равенств и дает искомую систему уравнений.

Следует подчеркнуть, что так же, как можно записать несовместную систему уравнений, можно построить соответствующий этой системе граф; несовместность выясняется при решении графа (разд. 13).

В настоящем разделе задачи расположены в следующей последовательности.

В первой группе (11.1—11.5) собраны задачи, в которых требуется составить нормализованные графы по заданным неоднородным системам уравнений и системы уравнений по известным графам.

Во второй группе задач (11.6—11.8) требуется составить нормализованные графы по заданным однородным системам уравнений и системы уравнений по известным графам.

Задачи третьей группы (11.9—11.11) посвящены составлению ненормализованных графов по заданным неоднородным системам и систем уравнений по известным графам.

Четвертая группа (11.12—11.13) составлена из задач, в условия которых входит составление ненормализованных графов по заданным однородным системам и систем уравнений по известным графам.

Пятая группа (11.14—11.17) состоит из задач по составлению нормализованных и ненормализованных графов по одной и той же системе уравнений и доказательству равносильности этих графов.

Шестая группа задач (11.18—11.19) посвящена выяснению некоторых свойств графов по заданным системам и свойств систем уравнений по заданным графам.

В седьмой группе (11.20—11.21) собраны задачи по преобразованиям матрицы $[A]$, связанным с построением графов по определенным условиям.

Задачи и упражнения

- 11.1.* По заданной системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 8x_2 &= 1 \\ 7x_1 + 11x_2 &= 3 \end{aligned} \right\}$$

не составляя матрицы $[A_H]$ в явном виде, построить нормализованный граф, а затем по графу составить матрицу $[A_H]$. По найденному графу составить систему уравнений.

- 11.2.* По заданной системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a \\ bx_1 - x_2 + fx_3 + ex_4 &= 0 \\ gx_1 + dx_3 - x_4 &= 0 \\ cx_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

не составляя матрицы $[A_H]$ в явном виде, построить нормализованный граф. Определить по нему источники, стоки, смешанные узлы, а затем составить матрицу $[A_H]$. По найденному графу решить обратную задачу, т. е. составить систему уравнений.

● 11.3.* По заданной системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_0x_0 \nrightarrow a_1x_1 \nrightarrow a_2x_2 \nrightarrow a_3x_3 &= 0 \\ b_0x_0 \nrightarrow b_1x_1 \nrightarrow b_2x_2 \nrightarrow b_3x_3 &= 0 \\ c_0x_0 \nrightarrow c_1x_1 \nrightarrow c_2x_2 \nrightarrow c_3x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

составить матрицу $[A_H]$, считая источником x_0 , а затем построить граф. По построенному графу составить систему уравнений.

● 11.4.* По заданной системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= ax_5 \\ x_4 &= dx_5 \\ x_5 &= bx_2 \nrightarrow cx_3 \end{aligned} \right\},$$

не составляя матрицы $[A_H]$, построить нормализованный граф и придать ему наглядную форму. Составить по графу матрицу $[A_H]$ и систему уравнений.

● 11.5.* По заданной системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1x_1 \nrightarrow a_2x_2 \nrightarrow a_3x_3 &= 0 \\ b_2x_2 \nrightarrow b_3x_3 \nrightarrow b_4x_4 &= 0 \\ c_2x_2 \nrightarrow c_3x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

построить нормализованные графы при всех возможных источниках. Определить стоки в каждом случае.

● 11.6.* Вывести соотношение между матрицей $[A_H]$ нормализованного графа и матрицей $[B]$ коэффициентов однородной системы уравнений на примере системы из трех уравнений.

● 11.7.* По заданной матрице $[B]$ коэффициентов однородной системы составить матрицу $[A_H]$ нормализованного графа:

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11}b_{12}b_{13}b_{14} \\ b_{21}b_{22}b_{23}b_{24} \\ b_{31}b_{32}b_{33}b_{34} \\ b_{41}b_{42}b_{43}b_{44} \end{bmatrix}.$$

● 11.8. По заданной системе однородных уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 \nrightarrow 4x_2 \nrightarrow 5x_3 \nrightarrow 7x_4 &= 0 \\ 3x_1 \nrightarrow 6x_2 \nrightarrow 3x_3 \nrightarrow 4x_4 &= 0 \\ 7x_1 \nrightarrow 3x_2 \nrightarrow 2x_3 \nrightarrow 2x_4 &= 0 \\ 8x_1 \nrightarrow 2x_2 \nrightarrow 4x_3 \nrightarrow 3x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

найти нормализованную матрицу $[A_H]$ и построить граф (не нормализуя уравнения относительно неизвестных). По построенному графу найти систему уравнений.

● 11.9.* По системе уравнений, приведенной в задаче 11.2, найти матрицу $[A]$ и построить ненормализованный граф. По полученному графу найти систему уравнений.

● 11.10. По заданной системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} 5x_1 \nrightarrow 6x_2 &= 7 \\ 2x_1 \nrightarrow x_2 &= 10 \end{aligned} \right\}$$

построить ненормализованный граф. Проверить правильность решения путем составления системы уравнений по найденному графу.

● 11.11.* По заданной системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= f_1 \\ b_2x_2 + b_3x_3 &= 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 &= f_3 \end{aligned} \right\}$$

построить ненормализованный граф. Проверить правильность решения путем составления системы уравнений по найденному графу.

● 11.12. По заданной однородной системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 &= 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

построить ненормализованный граф. Проверить правильность решения путем составления системы уравнений по найденному графу.

● 11.13.* По заданной системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 &= a_3x_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 &= 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 &= c_3x_3 \end{aligned} \right\}$$

построить ненормализованный граф. Проверить правильность решения путем составления системы уравнений по найденному графу.

● 11.14.* По заданной системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} bx_1 - x_2 + cx_3 &= 0 \\ ax_1 + dx_2 - x_3 - gx_4 &= 0 \\ ex_2 + fx_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

построить нормализованный и ненормализованный графы, а также выписать матрицу $[A_n]$. Ввиду того что число переменных больше числа уравнений, «лишние» переменные должны играть роль источников. В качестве источника в данной задаче рекомендуется выбрать переменную x_1 .

● 11.15. Составить нормализованный и ненормализованный графы по данной системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned} \right\},$$

а затем по найденным графам составить системы уравнений.

● 11.16.* Составить нормализованный и ненормализованный графы по следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Выписать матрицу $[A_n]$. Доказать, что полученные графы равносильны.

● 11.17.* По заданной матрице $[A]$ найти матрицу $[A_n]$ и построить графы для того и другого случая:

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 \\ 0 & 5 & 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

Проверить равносильность полученных графов, составив системы уравнений.

● 11.18. Не составляя графа, по заданной системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= f_1 \\ 5x_2 + 6x_3 &= f_2 \\ 7x_3 &= f_3 \end{aligned} \right\}$$

определить количество источников. Найти число стоков, считая источниками: 1) f_1, f_2 и f_3 ; 2) f_1, x_2 и x_3 .

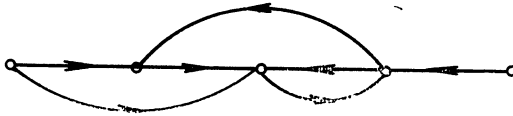


Рис. 11.5

● 11.19. По заданному графу рис. 11.5 определить число уравнений системы и число правых частей, отличных от нуля.

● 11.20.* Доказать, что если $[B]$ — матрица коэффициентов однородной системы уравнений, то

$$[A] = [C][B] + [1]_n,$$

где $[C]$ — произвольная диагональная матрица, порядок которой равен порядку матрицы $[B]$.

● 11.21.* По графу, изображенному на рис. 11.6, построить равносильный граф так, чтобы каждая из передач петель при вершинах равнялась трем.

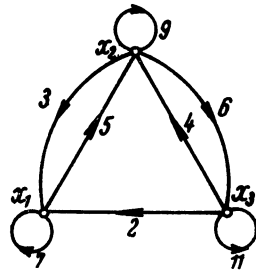


Рис. 11.6

12.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФОВ

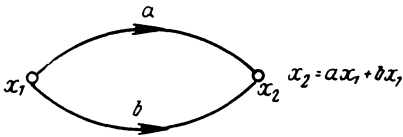
Общие положения

В разделе 11 было показано, что для одной и той же системы уравнений можно построить множество равносильных графов. Равносильные графы могут отличаться друг от друга структурой, т. е. количеством узлов и ветвей, передачами ветвей и соединениями узлов. Приведение графа одной структуры к равносильному графу другой структуры называется преобразованием графа. Как правило, графы преобразуются с целью упрощения «решения графа» (разд. 13); однако преобразование графа может преследовать и другие цели, определяемые условием задачи, например, достижение большей наглядности или выявление существенности каких-либо отдельных ветвей.

Если результатом преобразования является граф, не допускающий дальнейших упрощений (дальнейших исключений узлов

и петель), он называется конечным. Для получения конечного графа необходимо располагать системой правил, позволяющих исключать узлы и петли исходного графа.

Следует отметить, что преобразование можно осуществлять не только непосредственно по графу, но и при помощи операций, выполняемых над матрицей $[A]$, которая соответствует преобразуемому графу. Подвергаясь изменениям матрица $[A]$ будет соответствовать преобразованному графу. В настоящей книге эти операции не рассматриваются, а излагаются правила, позволяющие выполнять преобразования непосредственно по графу. Ниже приводится система правил, по которым осуществляются основные, т. е. наиболее употребительные преобразования графов. Все эти правила доказываются при помощи ф-лы (11.2); в простейших случаях доказательство приведено на соответствующем рисунке.



Объединение однонаправленных параллельных ветвей



Рис. 12.1

Параллельное соединение двух однонаправленных ветвей с передачами a и b можно заменить одной ветвью с передачей $c = a + b$ (рис. 12.1).

Это правило обобщается на любое конечное число параллельных ветвей.

Объединение однонаправленных последовательных ветвей (исключение смешанного узла)

Последовательное соединение двух однонаправленных ветвей с передачами a и b можно заменить одной ветвью с передачей $c = ab$ (рис. 12.2).

Пример преобразования графа с использованием обоих правил дан на рис. 12.3.

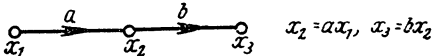


Рис. 12.2

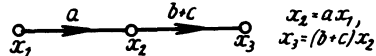
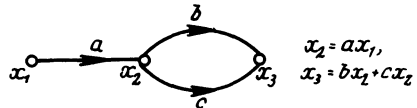
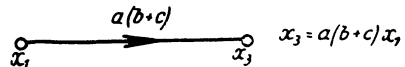
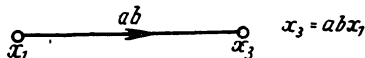
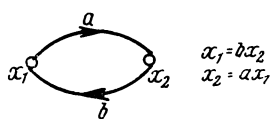


Рис. 12.3

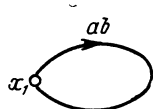


Объединение разнонаправленных параллельных ветвей при помощи петли

Преобразование графа с разнонаправленными ветвями (операция исключения смешанного узла 2) иллюстрируется рис. 12.4. Самостоятельное значение преобразование рис. 12.4 имеет в срав-

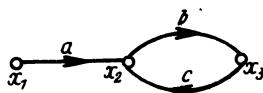


$$\begin{aligned} x_1 &= bx_2 \\ x_2 &= ax_1 \end{aligned}$$

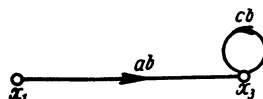


$$\begin{aligned} x_1 &= abx_1 \\ ab &= 1 \end{aligned}$$

Рис. 12.4



$$\begin{aligned} x_2 &= ax_1 + cx_3 \\ x_3 &= bx_2 \end{aligned}$$



$$x_3 = abx_1 + cbx_3$$

Рис. 12.5

нительно редких случаях; однако в сочетании с другими преобразованиями оно применяется весьма часто. Пример подобного смешанного преобразования дан на рис. 12.5.

Исключение петли

Преобразование графа, состоящее в исключении петли, иллюстрируется рис. 12.6. Доказательство тождественности изображенных на рисунке графов строится непосредственно по системе уравнений.

Для верхнего графа

$$x_2 = ax_1 + cx_2; \quad x_3 = bx_2.$$

Решая первое уравнение относительно x_2 , получаем

$$x_2 = a \frac{1}{1-c} x_1.$$

Подставляя значение x_2 во второе уравнение, находим

$$x_3 = \frac{ab}{1-c} x_1^1).$$

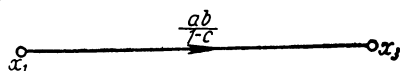
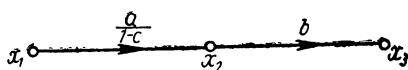
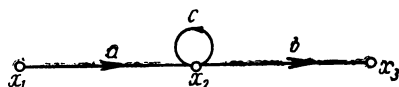


Рис. 12.6

Правило исключения петли формулируется следующим образом: исключение петли с передачей c сопровождается заменой передачи a входящей ветви передачей $\frac{a}{1-c}$. Это правило относится

¹⁾ Другое доказательство правомерности такого преобразования при $|c| < 1$ приведено в задаче 12.4.

к узлу с петлей при условии, что в узел входит и из узла выходит одна ветвь.

Если в узел с петлей входят и из него выходят несколько ветвей, то петля исключается совершенно также, т. е. передачи всех входящих ветвей умножаются на $\frac{1}{1-a}$ (рис. 12.7); исходящие ветви остаются без изменений.

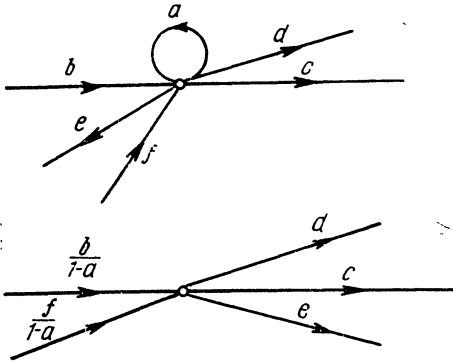


Рис. 12.7

В заключение полезно обратить внимание на следующее. Как было показано выше, при помощи операций над матрицей $[A]$ из ненормализованного графа можно получить нормализованный (задача 11.17). Эти матричные операции являются аналитической записью алгоритма устранения петель¹⁾.

Инверсия ветви

Инверсия ветви — операция, определяемая изменением направления ветви. При инверсии одной ветви должны быть изменены направления, точки присоединения и передачи других ветвей.

Рассмотрим некоторый граф; составим уравнение для его k -го узла:

$$x_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \dots + a_{ki}x_i + \dots + a_{kk}x_k,$$

где a_{kk} — петля в узле k .

В этом уравнении сигнал в узле k является следствием, а все остальные сигналы — причинами. Пусть теперь следствием будет сигнал в узле i . Для сигнала x_i уравнение переписывается в следующем виде:

$$x_i = \frac{1 - a_{kk}}{a_{ki}} x_k - \frac{a_{k1}}{a_{ki}} x_1 - \frac{a_{k2}}{a_{ki}} x_2 - \dots$$

Последнее уравнение позволяет составить основные правила преобразования графа при инверсии, т. е. изменения направления одной ветви. Для инверсии ветви между узлами i и k необходимо:

1) заменить стрелку a_{ki} на противоположную, а передачу a_{ki} заменить передачей $\frac{1}{a_{ki}}$;

¹⁾ Подробнее об этом см. в задаче 12.8.

2) концы всех ветвей, входивших в узел k , перенести в узел i , а передачи этих ветвей умножить на $-\frac{1}{a_{ki}}$;

3) петлю в узле k заменить ветвью от узла k к узлу i с передачей $-\frac{a_{kk}}{a_{ki}}$.

В результате инвертирования нужно получить новый граф, равносильный первому, но отличный от него по структуре. Очевидно, что количество источников в равносильных графах должно быть одинаковым.

Из правил инвертирования ветви следует, что узел, являющийся концом инвертируемой ветви, после инверсии всегда будет источником, а узел, являвшийся началом инвертируемой ветви, после инверсии источником быть не может (рис. 12.8). Таким образом, операция инверсии одной ветви правомерна лишь в том случае, если ветвь начинается в источнике, так как при этом после инверсии источник становится зависимым узлом, а конец инвертируемой ветви — источником, т. е. общее количество источников в исходном и преобразованном графах сохраняется. Так, для графа рис. 12.8 операция инвертирования ветви c неправомерна, поскольку ветвь c начинается в смешанном узле. Для графа же рис. 12.9 инвертирование ветви c правомерно, так как здесь инвертируемая ветвь начинается в узле-источнике.

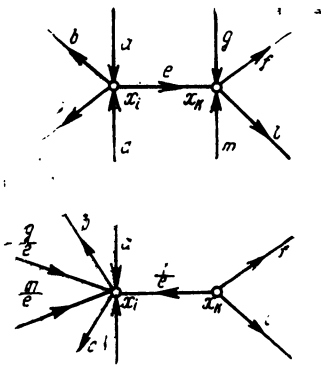


Рис. 12.8

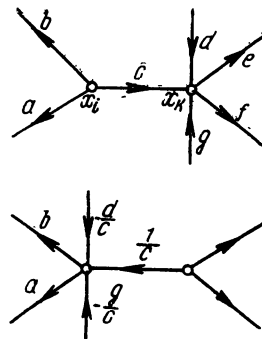


Рис. 12.9

Если нужно инвертировать ветвь, начинающуюся не в источнике, то вместе с ней необходимо инвертировать все ветви, входящие в «путь», содержащий эту ветвь, до какого-нибудь источника. Возможен и другой вариант инвертирования: если ветвь входит в замкнутый контур, то необходимо инвертировать все ветви этого контура. При этом общее количество источников не изменяется.

Расщепление узла

Операция расщепления применима к смешанным узлам и заключается в разложении смешанного узла (рис. 12.10а) на два, один из которых является источником, а другой — стоком. В новый сток собираются все входящие в первоначальный узел ветви; из нового источника исходят все исходящие ветви (рис. 12.10б). Ввиду того что переменная в каждом

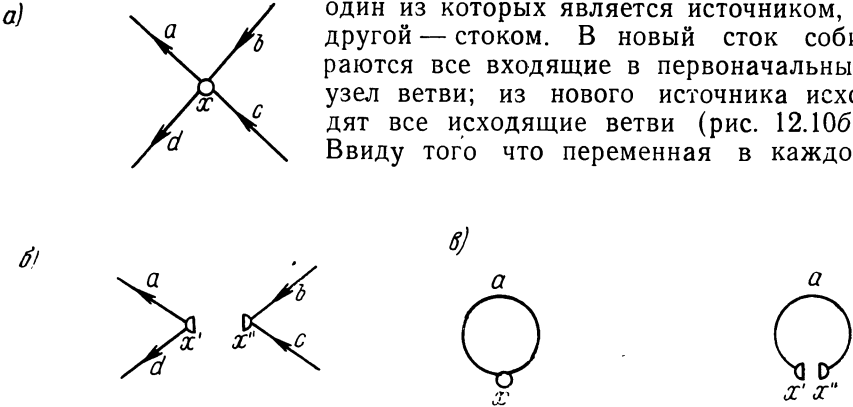


Рис. 12.10

узле определяется только входящими ветвями и передачи ветвей не зависят от переменных, операция расщепления узлов всегда допустима.

Расщепление узла с петлей (рис. 12.10в) соответствует общему правилу.

Исключение узла

Операция исключения узла состоит в объединении ветвей. Наипростейшие случаи исключения узлов были рассмотрены в правилах по объединению однонаправленных последовательных ветвей. Однако непосредственное применение указанных правил для исключения узлов не всегда возможно: во многих графах нет «выделенных» петель, «выделенных» однонаправленных ветвей и т. п. Пример такого графа дан в задаче 12.11. Для исключения узлов в этих случаях необходимо учитывать все возможные пути движения сигнала от причины к следствию.

Общие правила исключения узла формируются следующим образом: исключать узел следует так, чтобы после этой операции все составляющие преобразованного графа во всех оставшихся узлах были такими же, как в исходном (непреобразованном) графе.

В тех графах, где имеется много путей движения сигнала, для облегчения пользования общим правилом можно рекомендовать прием, основанный на использовании операции расщепления узла. Для исключения узла необходимо расщепить все остальные смешанные узлы, вычислить все передачи от источников к стокам,

представить их в виде ветвей и объединить расщепленные узлы. Последовательное применение этих операций к узлам графа позволяет получить конечный граф.

При решении конкретных задач можно устранять узлы как с использованием расщепления, так и без него (т. е. с учетом всех возможных путей движения сигнала). Первый метод более громоздок, чем второй, но оставляет меньше возможностей для ошибок.

Задачи в настоящем разделе распределены в следующей последовательности.

Первая группа задач (12.1—12.16) посвящена преобразованиям графов с целью их упрощения.

Вторая группа (12.17—12.20) содержит задачи по инвертированию ветвей.

Следует отметить, что в выражение «упростить граф» обычно вкладывается смысл исключения всех узлов и петель, которые можно подвергнуть этой операции.

Задачи и упражнения

● 12.1.* Упростить графы, изображенные на рис. 12.11. Составить системы уравнений для заданных и преобразованных графов.

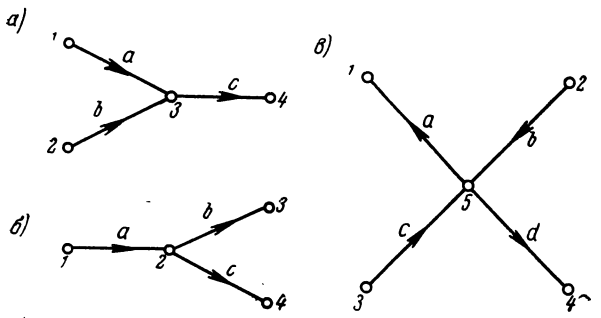


Рис. 12.11

● 12.2.* Исключить петлю и упростить граф, изображенный на рис. 12.12.

● 12.3. Исключить петлю и упростить графы, изображенные на рис. 12.13.

● 12.4.* Показать, что в частном случае, если $|a| < 1$, равенство $x_2 = \frac{1}{1-a} x_1$

для графа, изображенного на рис. 12.14, можно получить суммированием следствий, имеющих место в результате воздействия на причину x_1 всех возможных операторов, т. е. воздействия прямого пути от x_1 до x_2 и воздействия петли один, два, три и т. д. раз.

● 12.5.* Показать, что графы, изображенные на рис. 12.15, сводятся к одному и тому же конечному графу, хотя и не все из них являются равносильными.

- 12.6. Исключить петлю в графе, изображенном на рис. 12.16.
- 12.7.* Нормализовать граф, изображенный на рис. P.11.11a (задача 11.17), не прибегая к операциям над матрицей [A].
- 12.8.* Вывести алгоритм устранения петель в матричной форме.
- 12.9.* Упростить граф, изображенный на рис. 12.17, при помощи операции расщепления узлов.

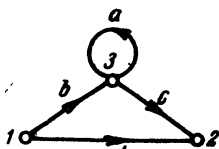


Рис. 12.12



Рис. 12.13

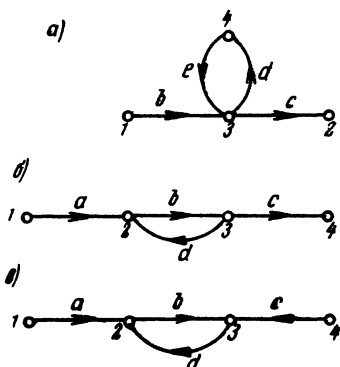


Рис. 12.14

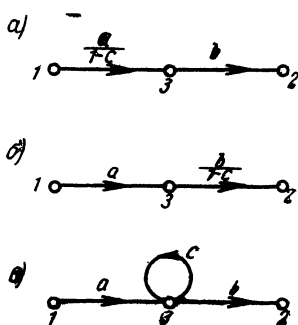


Рис. 12.15

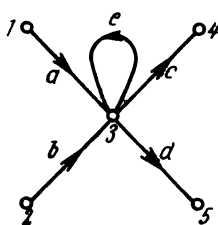


Рис. 12.16

- 12.10.* Решить предыдущую задачу, не прибегая к операции расщепления узлов.

- 12.11.* Упростить граф, изображенный на рис. 12.18. Упрощение выполнять двумя способами: расщепляя и не расщепляя узлы.

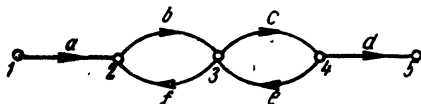


Рис. 12.17

- 12.12. Упростить граф, изображенный на рис. 12.19, показав последовательно все этапы упрощений.

- 12.13.* Упростить изображенные на рис. 12.20 и 12.21 графы, соответствующие системам однородных уравнений.

- 12.14.* Определить, какие из графов, изображенных на рис. 12.22, 12.23, 12.24 и 12.25, могут соответствовать системам уравнений с нулевыми решениями, и найти условия, при которых будут другие решения.

- 12.15. Упростить графы, изображенные на рис. 12.26 и 12.27.

- 12.16. Упростить графы, изображенные на рис. 12.28 и 12.29. Для упрощения графа рис. 12.28 использовать результаты решения задачи 12.14.

- 12.17.* Инвертировать одну ветвь, начинающуюся от источника 1 в графах рис. 12.30.

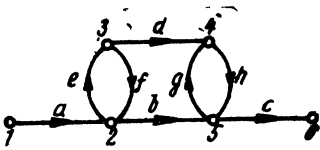


Рис. 12.18

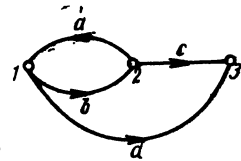


Рис. 12.20

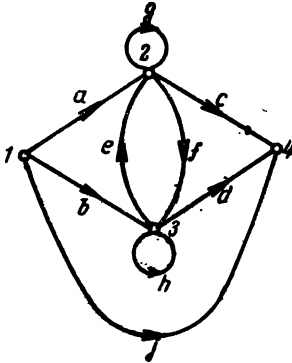


Рис. 12.19

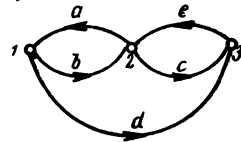


Рис. 12.21

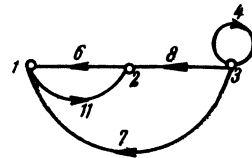


Рис. 12.22

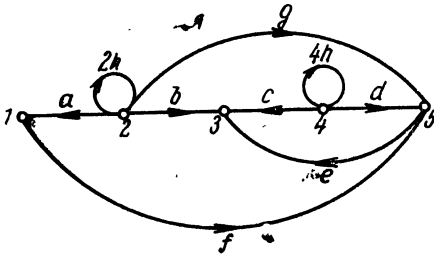


Рис. 12.23

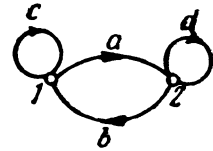


Рис. 12.24

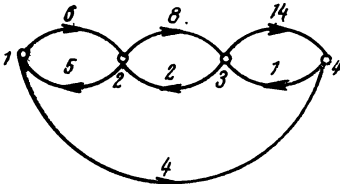


Рис. 12.25

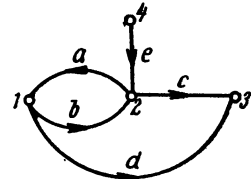


Рис. 12.26

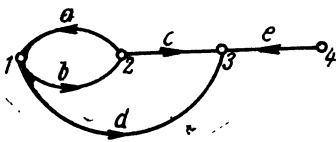


Рис. 12.27

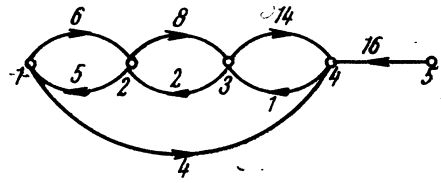


Рис. 12.28

● 12.18.* Инvertировать ветвь b в графе рис. 12.31 и проверить соответствие уравнений исходного и преобразованного графов. Показать, что инвертирование ветви b без инвертирования ветви a (или ветви c) невозможно.

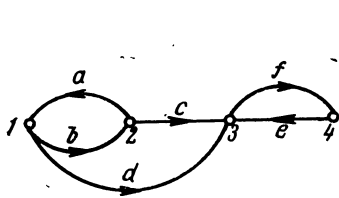


Рис. 12.29

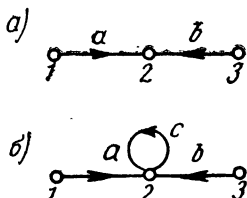


Рис. 12.30

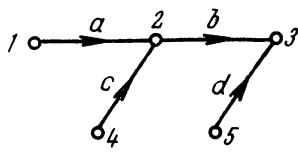


Рис. 12.31

● 12.19.* У графов, изображенных на рис. 12.32, инвертировать ветвь c .

● 12.20.* В графе, изображенном на рис. 12.33, инвертировать ветвь b . Составив системы уравнений, проверить равносильность графов.

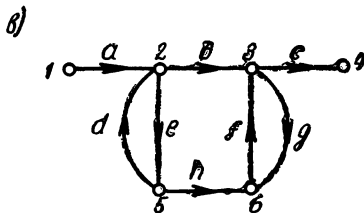
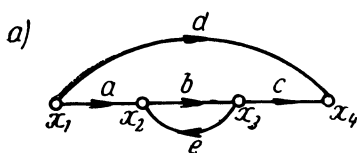


Рис. 12.32

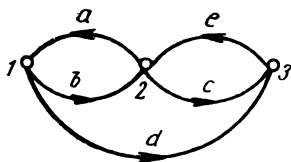
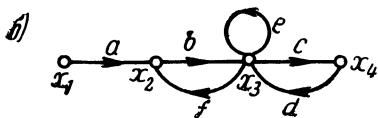


Рис. 12.33

13.

РЕШЕНИЕ ГРАФОВ

Формула Мэсона

Под решением графа понимают решение системы уравнений, соответствующей данному графу. Способы решения систем линейных уравнений хорошо известны. В общем виде системы линейных уравнений решаются, например, при помощи формул Крамера. Результатом применения формул Крамера являются выраженные через коэффициенты и свободные члены (правые части уравнений) значения неизвестных, удовлетворяющие уравнениям си-

стемы. В переводе на «язык графов» это означает, что переменные в зависимых узлах должны быть выражены через передачи ветвей графа и значения переменных в независимых узлах.

Известно, что система линейных уравнений не всегда имеет решение. Напомним кратко признаки, позволяющие установить существование и единственность решения системы линейных уравнений вида (11.3). Для ответа на этот вопрос достаточно знать, равны ли нулю или отличаются от него значения общего определителя Δ^1 системы и частных определителей Δ_i^2 , так как корни системы по формулам Крамера представляют собой отношения указанных величин:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \dots; \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \dots$$

Признаки, позволяющие установить существование и единственность решения системы линейных уравнений, можно представить в виде табл. 13.1.

Таблица 13.1

ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

| № правила | Вид системы | Признаки | Характер решений системы |
|-----------|--|-----------------|---|
| 1 | Однородная; все свободные члены уравнений $f_i = 0$ | $\Delta \neq 0$ | Система имеет только нулевое решение |
| 2 | | $\Delta = 0$ | Система имеет нулевое решение, а также бесконечное множество других, находящихся в связи друг с другом |
| 3 | Неоднородная; хотя бы один свободный член уравнения $f_i \neq 0$ | $\Delta \neq 0$ | Система имеет определенное решение |
| 4 | | $\Delta = 0$ | Система не имеет решения (система несовместна), если хотя бы один частный определитель $\Delta_i \neq 0$ |
| 5 | | | Система либо не имеет решения, либо имеет бесконечное множество решений, находящихся в связи друг с другом, если все $\Delta_i = 0$ |

Как уже указывалось, графы можно решать путем составления, а затем решения соответствующих им систем линейных уравнений. Однако одной из привлекательных сторон теории графов является возможность решения графов непосредственно, без составления систем уравнений. Эту возможность можно реализовать двумя способами.

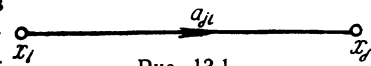


Рис. 13.1

Первый способ состоит в том, что граф при помощи известных правил (разд. 12) преобразуется в конечный (рис. 13.1). Если

¹⁾ Определитель, соответствующий однородной системе уравнений.

²⁾ Определители, образующиеся из общего путем замены коэффициентов i -го столбца свободными членами, т. е. правыми частями уравнений.

конечный граф состоит из одного источника и одного стока, то для этого графа переменная в узле-стоке записывается в виде

$$x_j = a_{ji}x_i,$$

где x_i — значение переменной в узле-источнике, а a_{ji} зависит лишь от передач ветвей исходного графа¹⁾.

Этот способ может оказаться неудобным, так как для определения значений переменных во всех узлах граф необходимо столько раз приводить к конечному, сколько имеется зависимых узлов.

Второй способ открывает возможность непосредственно по виду графа, т. е. по его структурным свойствам, сразу выписать выражения для его решений. Метод, соответствующий второму пути, был разработан С. Мэзоном в 1953—1956 гг. С. Мэзон получил формулу (носящую теперь его имя), которая позволяет решать графы весьма простыми средствами. Для пользования формулой Мэзона необходимо ввести дополнительные определения «открытого контура» и «закрытого контура»²⁾.

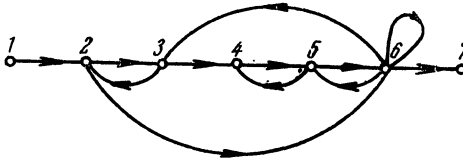


Рис. 13.2

Открытый контур объединяет узлы и однонаправленные ветви, встречающиеся один раз, причем все ветви этого контура являются продолжением друг друга в соответствии с направлением стрелок. На рис. 13.2 показан граф, имеющий несколько простых открытых контуров, например: 1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; 2) 2, 6; 3) 6, 3, 2 и т. д. Открытый контур обозначается символом P с соответствующими индексами. Передача пути открытого контура равна произведению передач всех образующих его ветвей.

Закрытый контур объединяет узлы и однонаправленные ветви, составляющие замкнутую кривую, причем каждый узел встречается один раз, а начальный — два раза. Например, (рис. 13.2): 1) 2, 3, 2; 2) 4, 5, 4; 3) 5, 6, 5; 4) 2, 6, 3, 2; 5) 3, 4, 6, 3 и т. д. Закрытый контур обозначается символом L с соответствующими индексами. Передача пути закрытого контура так же, как и передача пути открытого контура, равна произведению передач всех образующих его ветвей. Петля узла b представляет собой, очевидно, частный случай закрытого контура.

Каждую совокупность контуров дополнительно можно характеризовать признаком, определяемым термином «касание»³⁾. Ка-

¹⁾ Операция исключения узлов графа эквивалентна исключению неизвестных системы уравнений путем подстановок.

²⁾ Вместо термина «открытый контур» часто пользуются термином «открытый путь» и даже просто «путь». В этих случаях «закрытый контур» называют просто «контуром».

³⁾ Для записи свойств «касания» рекомендуется пользоваться обозначениями, приведенными в конце текста настоящего раздела.

сающимися называют контуры, имеющие хотя бы один общий узел.

При помощи введенных определений формулу Мэсона для случая одного источника можно записывать в следующем общем виде:

$$x_{\kappa} = \frac{\left[\sum_i P_{i\kappa} \prod_i (1 - L_j) \right]^*}{\left[\prod_j (1 - L_j) \right]^*} x_i, \quad (13.1)$$

где символ * указывает на то, что все произведения передач касающихся контуров должны быть обращены в нули.

Здесь в качестве L_j фигурируют передачи всех закрытых контуров данного графа, а в качестве $P_{i\kappa}$ — передачи открытых путей только от узла i до узла κ ; x_i представляет собой значение переменной в узле-источнике¹⁾.

Формула (13.1), по существу, является формулой Крамера для случая, когда граф содержит лишь один источник (соответственно лишь одно из уравнений системы имеет правую часть, отличную от нуля). Знаменатель ф-лы (13.1) по аналогии с формулой Крамера называется общим определителем графа, а числитель — частным. Следует отметить, что определители графа с точностью до знака совпадают с соответствующими определителями формул Крамера. Соответствующие формулы имеют вид:

$$\Delta_{\mathbf{m}} = (-1)^n \Delta_{\kappa}; \quad (13.2)$$

$$\Delta_{\mathbf{m}i} = (-1)^n \Delta_{\kappa i}, \quad (13.3)$$

где Δ_{κ} и $\Delta_{\kappa i}$ — общий определитель и соответствующее алгебраическое дополнение в формулах Крамера, а $\Delta_{\mathbf{m}}$ и $\Delta_{\mathbf{m}i}$ — в формулах Мэсона.

Раскрывая скобки в знаменателе ф-лы (13.1), легко получить удобное выражение для вычисления общего определителя графа:

$$\Delta_{\mathbf{m}} = 1 - \sum L_j + \sum L_j L_{\kappa} - \sum L_j L_{\kappa} L_i + \dots \quad (13.4)$$

в котором L_j — передачи закрытых контуров графа; $L_j L_{\kappa}$ — произведения передач непересекающихся пар контуров; $L_j L_{\kappa} L_i$ — произведения передач непересекающихся троек контуров и т. д.

Воспользовавшись ф-лой (13.4), целесообразно переписать формулу Мэсона в виде

$$x_{\kappa} = \frac{1}{\Delta_{\mathbf{m}}} [(P_{i\kappa,1} \Delta_{\mathbf{m}})^* + (P_{i\kappa,2} \Delta_{\mathbf{m}})^* + \dots] x_i, \quad (13.5)$$

¹⁾ Доказательство ф-лы (13.1), равно как и приводимых ниже ф-л (13.2) и (13.3), можно найти в статье И. В. Гуревича «Доказательство формулы Мэсона», опубликованной в Трудах учебных институтов связи, № 35 за 1967 г.

где символ *, как и прежде, указывает на то, что произведения передач, касающихся открытых и закрытых контуров, должны быть обращены в нули.

Часто вместо того, чтобы находить переменные в узлах, находят отношение переменной в данном узле к переменной в источнике. Это отношение называется передачей графа N_{ki} , где символ ki указывает на то, что определяется переменная в k -м узле, а источником является i -й узел. Таким образом,

$$N_{ki} = \frac{x_k}{x_i} = \frac{(P_{i k, 1} \Delta_M)^* + (P_{i k, 2} \Delta_M)^* + \dots}{\Delta_M}. \quad (13.6)$$

Выше были изложены общие положения, устанавливающие соответствие между формулами Крамера для системы уравнений и формулой Мэзона для графа в случае, когда граф содержит один источник, т. е. только в одном уравнении системы правая часть отлична от нуля. Другими словами, был дан принцип нахождения передачи графа, т. е. установления связи между сигналом в данном узле и сигналом в узле-источнике для графа, содержащего один источник. Формула Мэзона допускает обобщения, прежде всего, на случай, когда для графа, содержащего один источник, нужно установить связь между сигналами в зависимых узлах, затем на случай отсутствия источников (однородная система уравнений) и на случай многих источников (неоднородная система уравнений с числом свободных членов $m \geq 2$). Ниже будут рассмотрены приемы решения графов для всех указанных трех случаев.

Решение графов при одном источнике

Для решения графа при одном источнике в случае, когда нужно определить передачу N между источником и зависимым узлом, пользуются формулой Мэзона, например ф-лой (13.6).

Рассмотрим теперь задачу определения передачи между зависимыми узлами, когда непосредственное применение формулы Мэзона невозможно. Передачу между зависимыми узлами обозначим символом T (вместо N) с соответствующими индексами, например

$$T_{pq} = \frac{x_p}{x_q}. \quad (13.7)$$

Для определения T_{pq} можно по формуле Мэзона найти x_q и x_p , а затем и их отношение. Воспользовавшись, например, ф-лой (13.1), получим

$$T_{pq} = \frac{x_p}{x_q} = \frac{\left[\sum_l P_{lp, l} \prod_j (1-L_j) \right]^*}{\left[\prod_j (1-L_j) \right]^*} = \frac{\left[\sum_l P_{lp, l} \prod_j (1-L_j) \right]^*}{\left[\sum_l P_{lq, l} \prod_j (1-L_j) \right]^*} \cdot \frac{\left[\prod_j (1-L_j) \right]^*}{\left[\prod_j (1-L_j) \right]^*}. \quad (13.8)$$

Формулу (13.8) можно записать в более компактном виде:

$$T_{pq} = \frac{\left(\sum_l P_{lp, l} \Delta_M \right)^*}{\left(\sum_l P_{lq, l} \Delta_M \right)^*}. \quad (13.9)$$

Во всех этих формулах узел i является источником.

Для весьма важного в приложениях случая, когда граф имеет лишь один источник с одной исходящей ветвью, можно упростить граф. Тогда методика нахождения передачи T_{pq} будет более простой. Суть этой методики заключается в следующем.

Пусть граф, для которого необходимо найти передачи T_{pq} , соответствует рис. 13.3а. Узлом-источником в этом графе является узел i (от узла i единственная ветвь входит в узел κ). Найдём передачу от κ -го узла до любого другого, например p -го, т. е. передачу $T_{p\kappa}$.

Для нахождения передачи $T_{p\kappa}$ преобразуем граф рис. 13.3а следующим образом. Отбросив узел-источник i и все входящие в κ -й узел ветви, придем к графу рис. 13.3б. Здесь узел κ стал источником. Применим к графу рис. 13.3б формулу Мэсона и найдём передачу $N_{p\kappa}$. Передача $N_{p\kappa}$ для графа рис. 13.3б совпадает с передачей $T_{p\kappa}$ для графа рис. 13.3а. Для доказательства этого утверждения проанализируем систему уравнений, соответствующие исходному и преобразованному графам. Уравнения для всех узлов, кроме κ -го, у исходного и преобразованного графов совпадают; в κ -й узел преобразованного графа ветви не входят, так как он является узлом-источником. Таким образом, система уравнений графа рис. 13.3б отличается от системы уравнений графа 13.3а лишь отсутствием одного уравнения, содержащего в качестве свободного члена сигнал x_κ . Система уравнений для графа рис. 13.3а имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0 & + a_{12}x_2 & + a_{13}x_3 & + \dots & + a_{1\kappa}x_\kappa \\ x_2 &= a_{21}x_1 & + 0 & + a_{23}x_3 & + \dots & + a_{2\kappa}x_\kappa \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_\kappa &= a_{\kappa 1}x_1 & + a_{\kappa 2}x_2 & + a_{\kappa 3}x_3 & + \dots & + 0 & + a_{\kappa i}x_i \end{aligned} \right\}.$$

При отброшенном узле-источнике i узел k станет узлом-источником (рис. 13.3б) и система уравнений будет отличаться от приведенной выше только отсутствием последнего уравнения.

Для графа рис. 13.3б, содержащего один источник с сигналом x_k , передачу от источника к любому узлу, например p , т. е. N_{pk} ,

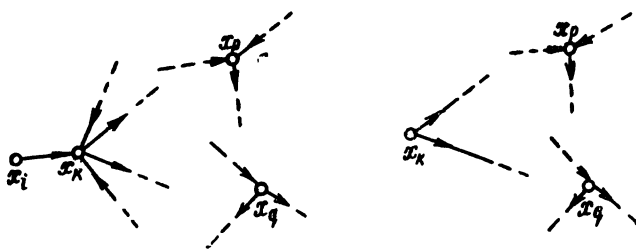


Рис. 13.3

легко найти по формуле Мэзона. Очевидно, что передача N_{pk} , найденная для графа рис. 13.3б, равна передаче T_{pk} для графа рис. 13.3а, так как передача N_{pk} удовлетворяет системе уравнений, соответствующей исходному графу. Таким образом, после перехода от графа рис. 13.3а к графу рис. 13.3б справедлива формула

$$T_{pk} = N_{pk}. \quad (13.10)$$

Напомним, что N_{pk} можно определять по формуле Мэзона [например, по ф-ле (13.4)].

Полезно привести еще одно доказательство сделанного утверждения; это второе доказательство имеет наглядный геометрический смысл. Из рис. 13.3а следует, что

$$T_{pk} = \frac{N_{pl}}{N_{ki}}.$$

При делении N_{pl} на N_{ki} сократится передача ветви a_{ki} .

Кроме того, в соответствии с формулой Мэзона пропадают все закрытые контуры с ветвями, входящими в узел k , как касающиеся с открытым путем от i к p через k . Наглядность приведенного доказательства хорошо иллюстрируется приводимыми ниже задачами.

Теперь вернемся к задаче нахождения передачи T_{pq} для рассматриваемого частного случая одного источника с одной исходящей ветвью. Очевидно, что

$$T_{pq} = \frac{T_{pk}}{T_{qk}}$$

и согласно ф-ле (13.10)

$$T_{pq} = \frac{N_{pk}}{N_{qk}}, \quad (13.11)$$

где N_{pk} и N_{qk} определяются по формуле Мэсона по упрощенному графу рис. 13.3б.

Решение графов при отсутствии источников

Графу, не имеющему источников, соответствует однородная система линейных уравнений, и поэтому говорить о нахождении значений переменных в узлах не имеет смысла — эти значения либо равны нулю, либо их бесконечно много (см. поз. 1 и 2 табл. 13.1). Однако передачи графа в случае, когда его определитель равен нулю (поз. 2, табл. 13.1), могут быть вполне определенными величинами. Очевидно, что для графа без источников можно говорить лишь о передачах T .

При определении передач T графа без источников следует воспользоваться рекомендациями, аналогичными тем, которые приводились выше при определении передач T между зависимыми узлами в графе с одним источником. Для того чтобы сформулиро-

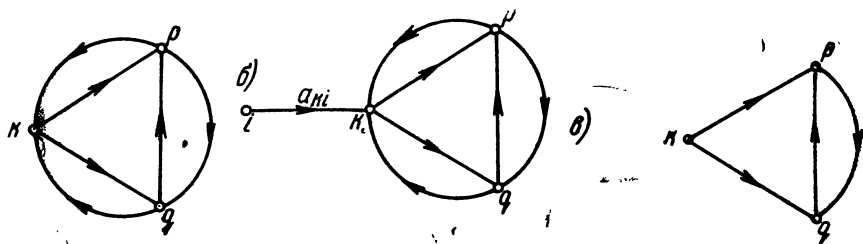


Рис. 13.4

вать общее правило, целесообразно рассмотреть вспомогательные построения, выполненные на рис. 13.4. Легко заметить, что передачи между двумя зависимыми узлами не изменяются при подключении источника к одному из узлов (рис. 13.4б). Показать это можно, например, рассмотрев соответствующие системы уравнений. Граф, изображенный на рис. 13.4б, соответствует рассмотренному выше случаю с одним источником и с одной исходящей из него ветвью (рис. 13.3).

Если необходимо найти, например, передачи T_{pk} или $T_{q'k}$, следует опустить все ветви, входящие в узел k (рис. 13.4в), и для полученного таким образом графа найти передачу $N_{pk}(N_{q'k})$ по формуле Мэсона. При этом справедливо равенство (13.10). Для отыскания передач, которые начинаются не в k -м узле, например T_{pq} , можно либо применить изложенную методику по отношению к узлу q , либо воспользоваться ф-лой (13.11) для графа рис. 13.4в.

Решение графов при нескольких источниках

До сих пор рассматривались случаи, когда граф имеет либо один источник, либо вовсе их не имеет. Основная формула Мэзона (13.1) справедлива для графа с одним источником; однако никаких принципиальных трудностей не возникает в обобщении формулы Мэзона на графы с несколькими источниками.

Для решения графа с несколькими источниками возможны два способа, причем первый целесообразно применять в том случае, если требуется находить значения переменных, а второй — значения передач. По первому способу нужно применить формулу Мэзона для каждого источника и результаты вычислений сложить. Очевидно, что подобные операции правомерны в силу линейности уравнений системы, соответствующей графу. По второму способу нужно преобразовать граф с несколькими источниками в граф с одним источником. Пример такого преобразования показан на рис. 13.5.

Граф рис. 13.5а имеет два источника: x_1 и x_5 . Необходимо найти, например, N_{41} . После добавления ветви x_1-x_5 с передачей $\frac{1}{x_1}$ (рис. 13.5б) получаем равносильный граф, который, однако, содержит лишь один источник. Используя правило объединения последовательных однонаправленных ветвей, получаем граф рис. 13.5в. Графы рис. 13.5а и 13.5в равносильны, так как составляющие переменной x_3 одинаковы. Совпадение переменных в других узлах очевидно, так как сигналы в этих узлах не изменялись. После получения графа с одним источником можно использовать формулу Мэзона и найти необходимую передачу. Если граф имеет более двух источников, указанную операцию следует проделать по отношению ко всем источникам.

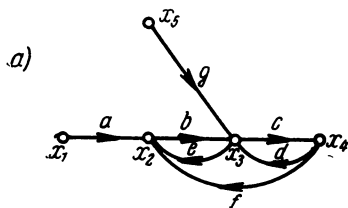
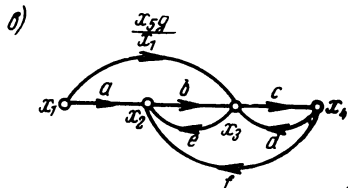
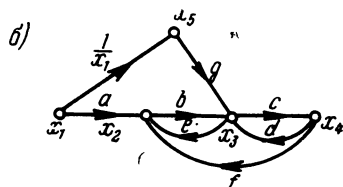


Рис. 13.5



В заключение приведем обозначения для записи свойств касания контуров. Касание контуров отмечается горизонтальной стрелкой, а отсутствие касания — вертикальной. Например:

$$L_1 \rightarrow L_3: \text{контур } L_1 \text{ касается контура } L_3;$$

- $L_1 \uparrow L_2$: контур L_1 не касается контура L_2 ;
 $P_2 \rightarrow L_1$: путь P_2 касается контура L_1 ;
 $P_2 \uparrow L_2$: путь P_2 не касается контура L_2 .

Задачи в настоящем разделе расположены в следующей последовательности.

Первые две задачи посвящены решению графов без привлечения формулы Мэзона.

Следующие шесть задач содержат условия по нахождению путей и контуров.

Задачи 13.9—13.17 посвящены применению формулы Мэзона для нахождения переменных и передач графов с одним источником, причем в первой половине этих задач ставятся условия по нахождению передачи N между зависимым и независимым узлами, а во второй — передачи T между зависимыми узлами.

В задачах 13.18—13.20 требуется найти передачи графов без источников, а в задачах 13.21—13.25 — переменные и передачи графов с несколькими источниками.

Задачи и упражнения

- 13.1.* Дана система уравнений

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 8x_2 &= 1 \\ 7x_1 + 11x_2 &= 3 \end{aligned} \right\}.$$

Построить граф, а затем решить его относительно x_1 и x_2 , не пользуясь формулой Мэзона, т. е. путем преобразования (исключения узлов) графа.

- 13.2.* Найти x_4 графа, изображенного на рис. 13.6, не пользуясь формулой Мэзона.

- 13.3.* Выписать все пути и все контуры графа, изображенного на рис. 13.7.

- 13.4. Выписать все пути между узлами 1 и 8 для графа, изображенного на рис. 13.8.

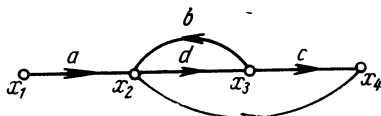


Рис. 13.6

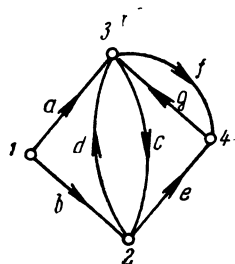


Рис. 13.7

- 13.5. Выписать контуры в пути от узла x_a до узла x_k в графе, изображенном на рис. 13.9, и указать касающиеся и некасающиеся контуры и пути.

- 13.6. Выписать все закрытые контуры в графе, изображенном на рис. 13.10. Указать некасающиеся пары, тройки и т. д. контуров.

- 13.7. Выписать все контуры и все пути (последние между источниками и стоками) для графов, изображенных на рис. 13.11. Указать касающиеся и некасающиеся пути и контуры.

- 13.8. Определить контуры и пути графа, в котором нет ни одного узла-источника (рис. 13.12).

● 13.9.* Найти передачу N_{21} графа, изображенного на рис. 13.13. Задачу решить двумя способами: путем преобразований графа и при помощи формулы Мэсона.

● 13.10.* Найти передачу N_n графа, изображенного на рис. 13.14.

● 13.11. Найти передачу N_{40} графа, изображенного на рис. 13.15, указав пути и контуры и их свойства (касание).

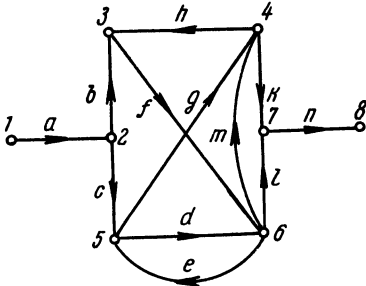


Рис. 13.8

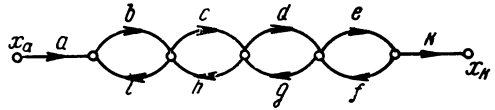


Рис. 13.9

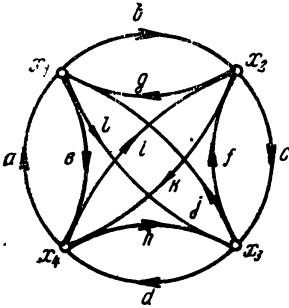


Рис. 13.10

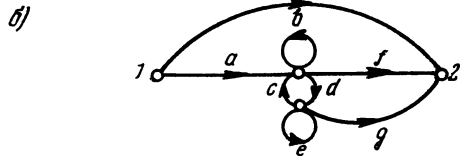
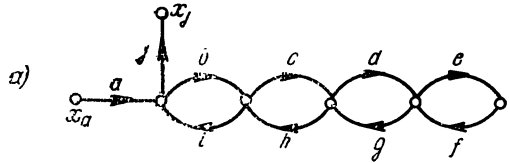


Рис. 13.11

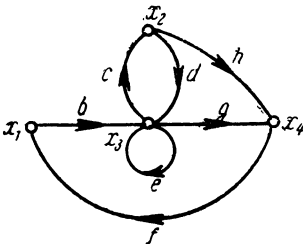


Рис. 13.12

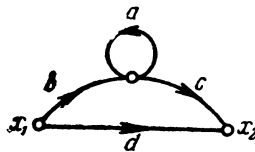


Рис. 13.13

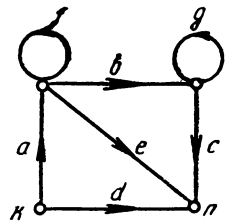


Рис. 13.14

- 13.12. Найти передачи графов, изображенных на рис. 13.16: для рис. 13.16а — передачу N_{ka} ; для рис. 13.16б — передачу N_{ja} ; для рис. 13.16в — передачу N_{51} .
- 13.13. Найти передачи N_{21} графов, изображенных на рис. 13.17.
- 13.14.* Найти передачу T_{43} для графа, изображенного на рис. 13.18. Задачу решить без преобразования графа (т. е. без исключения узла x_1).

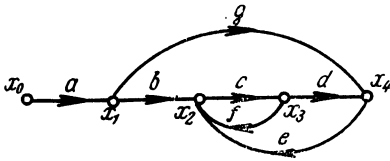


Рис. 13.15

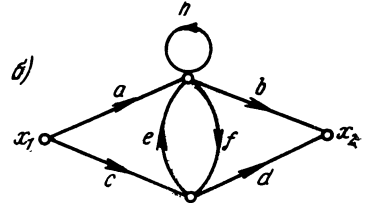
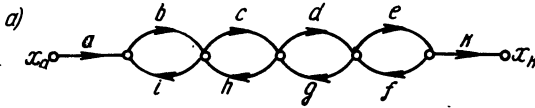
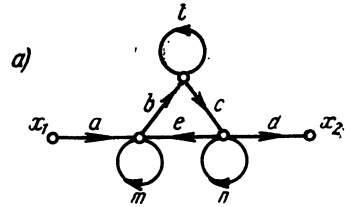


Рис. 13.17

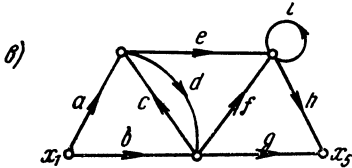
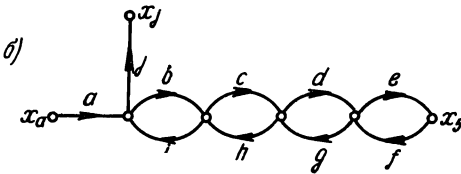


Рис. 13.16

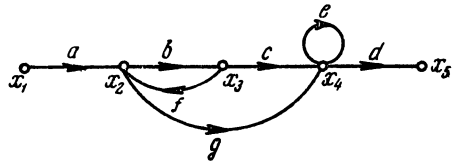


Рис. 13.18

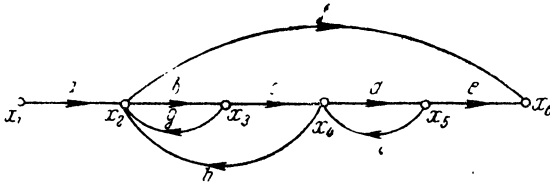


Рис. 13.19

- 13.15.* Найти передачу T_{62} для графа, изображенного на рис. 13.19, путем исключения источника, т. е. не прибегая к ф-ле (13.9).
- 13.16.* Найти передачу T_{54} для графа, изображенного на рис. 13.20, предварительно упростив его исключением источника.
- 13.17.* Найти передачи T_{52} и T_{53} для графа, изображенного на рис. 13.21. Задачу решить двумя способами, т. е. при помощи ф-лы (13.9) и с исключением источника.

● 13.18.* Определить передачи T_{21} и T_{31} для графа, изображенного на рис. 13.22. Найти, при каких соотношениях между передачами ветвей имеет смысл говорить о передачах графа.

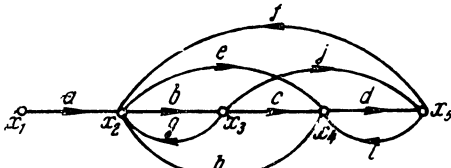


Рис. 13.20

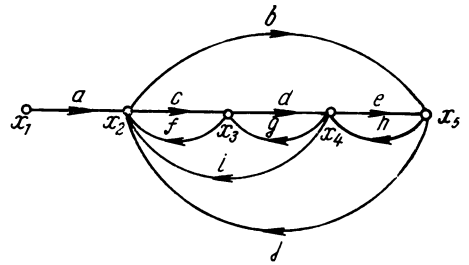


Рис. 13.21

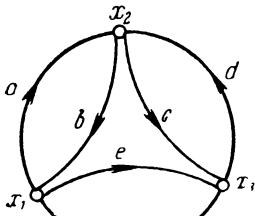


Рис. 13.22

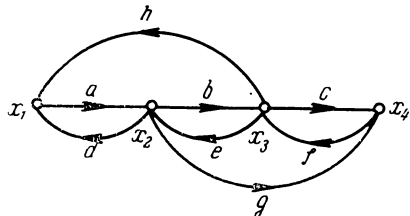


Рис. 13.23

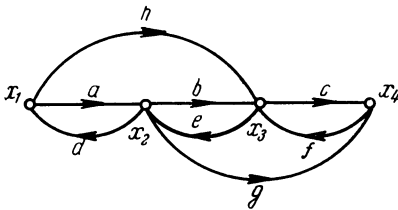


Рис. 13.24

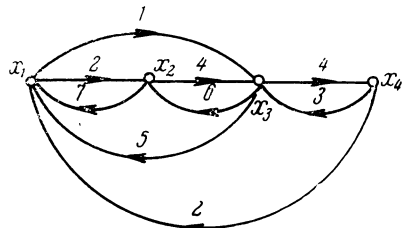


Рис. 13.25

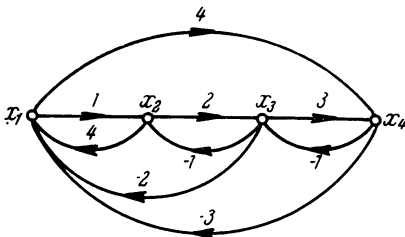


Рис. 13.26

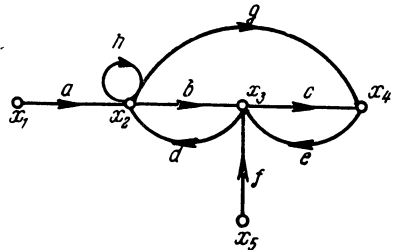


Рис. 13.27

● 13.19.* Определить передачи T_{21} и T_{43} для графа, изображенного на рис. 13.23. Задачу решить в двух вариантах: 1) преобразовать граф относительно узла 1, 2) преобразовать граф относительно узла 3. Показать, что решения, полученные по обоим вариантам, тождественны.

● 13.20.* Определить передачу T_{41} для графов, изображенных на рис. 13.24, 13.25 и 13.26.

● 13.21.* Определить значение x_4 для графа, изображенного на рис. 13.27.

- 13.22.* Определить значение x_3 для графов, изображенных на рис. 13.28.
- 13.23.* Определить передачу N_{41} для графа, изображенного на рис. 13.29.

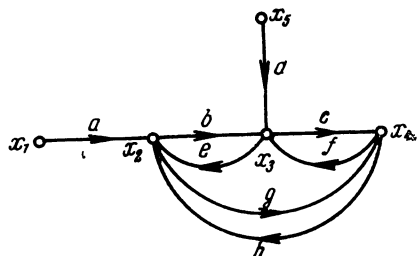
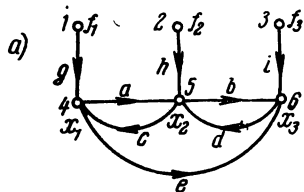


Рис. 13.28

Рис. 13.29

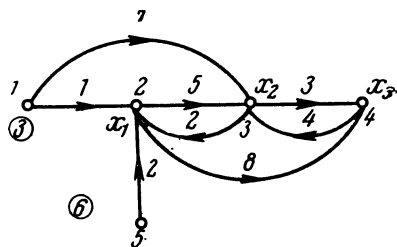
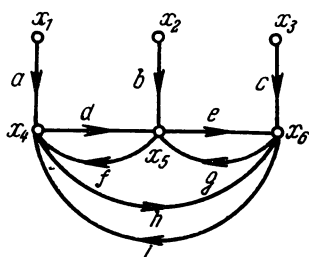
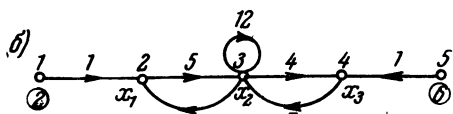


Рис. 13.30

Рис. 13.31

- 13.24.* Решить предыдущую задачу, не сводя заданный граф к графу с одним источником.
- 13.25.* Определить передачи N для графов, изображенных на рис. 13.30—13.32, причем для графа рис. 13.30 определить передачу N_{62} , для графа рис. 13.31 — передачу N_{41} и для графа рис. 13.32 — передачу N_{31} .

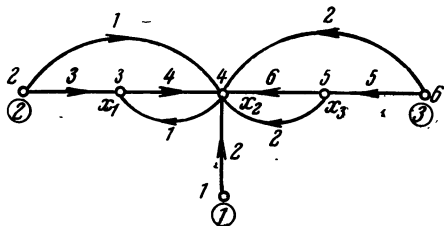


Рис. 13.32

14.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФОВ ОБРАТИМЫХ ЦЕПЕЙ

Общие положения

Графом электрической цепи называется граф, соответствующий системе уравнений электрических величин этой цепи. Задача составления графа по заданной цепи состоит из двух задач: составления системы уравнений и построения графа по данной системе. Следует заметить, что составление системы уравнений как самостоятельную операцию можно исключить и строить граф непосредственно по схеме. При этом вместе с построением графа составляется и система уравнений (в неявном виде). Метод, при котором система уравнений выписывается в явном виде, будем называть косвенным, а метод, при котором граф строится без выписывания уравнений, — прямым. Ниже будут рассмотрены оба метода.

Иначе обстоит дело, когда нужно строить графы по заданным блок-схемам; здесь не нужно составлять систему уравнений, так как блок-схема — это и есть граф, представленный в других обозначениях.

С точки зрения составления графов (так же, как и уравнений) целесообразно делить все цепи на обратимые и необратимые, поскольку матрицы сопротивлений (проводимостей) обратимых цепей, в отличие от матриц необратимых цепей, являются симметричными. Это свойство есть следствие того, что сигнал от любого i -го узла к любому k -му узлу проходит совершенно так же, как и от k -го к i -му¹⁾. Эти различия определяют и различия в построении графов.

Косвенный метод построения графов

Классификация графов электрических цепей

Как уже указывалось, для построения графа косвенным методом необходимо по заданной схеме цепи составить систему уравнений, а затем по системе уравнений — граф²⁾. По заданной схеме электрической цепи на основе законов Кирхгофа всегда можно составить тем или иным способом систему уравнений. Уравнения могут быть составлены относительно разных электри-

¹⁾ Примерами обратимых цепей могут служить все цепи, содержащие элементы R , L и C , а примерами необратимых цепей — схемы, содержащие электронные лампы и транзисторы, работающие в линейном режиме. Взаимные индуктивности — трансформаторы — являются обратимыми цепями; однако в задачах построения графов их целесообразно рассматривать вместе с необратимыми цепями.

²⁾ Вопросы, относящиеся к составлению графов по системе уравнений, подробно рассмотрены в разд. 11.

ческих параметров, например, токов ветвей, напряжений ветвей, контурных токов, узловых напряжений. Наиболее употребительными являются системы уравнений контурных токов и узловых напряжений. Поэтому им будет уделено главное внимание в последующем изложении.

Графы удобно классифицировать по признакам, определяющим искомые величины: если искомыми являются узловые напряжения, граф называется U -графом; если же искомыми являются контурные токи — I -графом. Соответственно для U -графа и I -графа системы уравнений в матричной форме записываются в виде:

$$[Y][U] = [J]; \quad (14.1)$$

$$[Z][I] = [\mathcal{E}]. \quad (14.2)$$

Здесь $[J]$, $[\mathcal{E}]$ — матрицы-столбцы задающих токов и напряжений, $[U]$, $[I]$ — матрицы-столбцы узловых напряжений и контурных токов, $[Y]$, $[Z]$ — квадратные матрицы проводимостей и сопротивлений. Рецепт составления уравнений вида (14.1) и (14.2) подробно дана в литературе, например в [19]; здесь же будут указаны только рабочие правила.

Следует обратить внимание на то, что ф-лы (14.1) и (14.2), которые будем называть каноническими, соответствуют условиям, когда искомыми являются узловые напряжения или контурные токи и цепь находится под воздействием задающих токов или задающих напряжений соответственно. Однако на практике часто встречаются случаи, когда искомыми величинами являются, например, узловые напряжения, а цепь находится под воздействием задающих напряжений, т. е. условия не соответствуют ф-лам (14.1) и (14.2). Ниже будут даны рекомендации для всех возможных случаев.

Составление уравнений U -графа для схемы, соответствующей канонической форме, т. е. содержащей только источники тока

Подготовительные операции. В заданной схеме нумеруются узлы. Нумерация выполняется произвольно, но обычно слева направо. Один из узлов считается базисным; относительно этого узла отсчитываются напряжения всех остальных узлов. Базисному узлу присваивают нулевой номер. Напряжения в узлах обозначают буквами U_i , где i — номер узла ($i=1, 2, 3, \dots, n$)¹⁾.

Составление матрицы $[U]$. Элементы матрицы-столбца $[U]$ представляют собой напряжения узлов цепи относительно

¹⁾ Здесь и далее считается, что цепь находится под воздействием гармонического напряжения или тока и, следовательно, искомыми величинами являются комплексные амплитуды \dot{U} или \dot{I} . Для упрощения записи точки над символами не ставятся. Все нижеприводимые рекомендации сохраняют силу и для мгновенных значений.

базисного узла и располагаются в порядке, соответствующем нумерации узлов. Напряжение базисного узла, принимаемое равным нулю, в матрицу не включается. Так как элементы U являются искомыми величинами, знаки перед ними не ставятся.

Составление матрицы $[J]$. Число элементов матрицы-столбца $[J]$ равно числу элементов матрицы-столбца $[U]$.

Каждый элемент матрицы $[J]$ определяется как сумма задающих токов, относящихся к соответствующему узлу. Токам, входящим в узел, приписывается знак «плюс», а выходящим из узла — знак «минус». Элементы матрицы $[J]$ могут быть и равны нулю, если в данный узел не входит ток непосредственно от задающего генератора и из данного узла не выходит ток непосредственно к задающему генератору.

Составление матрицы Y . Квадратная матрица $[Y]$ содержит n^2 элементов. Каждый элемент главной диагонали Y_{ii} является суммой проводимостей ветвей, примыкающих к узлу i . Недиагональные элементы Y_{ik} определяются проводимостями ветвей между i - и k -м узлами, причем знак Y_{ik} противоположен знаку соответствующей проводимости. Для обратимых цепей, как уже указывалось, матрицы $[Y]$ симметричны относительно главной диагонали, т. е. $Y_{ik} = Y_{ki}$ ¹⁾.

Перечисленные операции позволяют записать уравнения цепи в канонической форме, т. е. в виде (14.1) (см., например, задачу 14.3).

Составление уравнений I -графа для схемы, соответствующей канонической форме, т. е. содержащей только источники напряжения

Подготовительные операции. В заданной схеме нумеруются отдельные контуры. Нумерация выполняется произвольно, но обычно слева направо. Контурные токи обозначаются I_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$). Положительным направлением контурных токов обычно выбирают направление, совпадающее с движением часовой стрелки.

Составление матрицы $[L]$. Элементы матрицы-столбца $[L]$ представляют собой контурные токи и располагаются в порядке, соответствующем их нумерации. Так как элементы I_i являются искомыми величинами, знаки перед ними не ставятся.

Составление матрицы $[E]$. Число элементов матрицы-столбца $[E]$ равно числу элементов матрицы-столбца $[L]$. Каждый элемент матрицы $[E]$ определяется как сумма эдс источников, включенных в соответствующий контур. Каждой эдс приписывается знак «плюс», если ее направление совпадает с направле-

¹⁾ Полезно разбивать матрицы $[Y]$ так же, как и матрицы $[Z]$ (см. ниже), с помощью пунктирных линий на отдельные клетки; эта рекомендация особенно важна для схем, содержащих много элементов или много источников.

нием контурного тока, и знак «минус» — если направления не совпадают. Элементы матрицы $[E]$ могут быть равны нулю, если в данном контуре нет задающего генератора напряжения.

Составление матрицы Z . Квадратная матрица $[Z]$ содержит n^2 элементов. Каждый элемент главной диагонали Z_{ii} является суммой сопротивлений ветвей, образующих отдельный контур. Недиagonальные элементы Z_{ik} определяются общими сопротивлениями i - и k -го контуров, причем знак Z_{ik} противоположен знаку общего сопротивления. В обратимых цепях $Z_{ik} = -Z_{ki}$.

Перечисленные операции позволяют записать уравнения цепи в каноническом виде, т. е. в виде ф-лы (14.2) (см., например, задачу 14.7).

Составление уравнений U -графа для схемы, содержащей только источники напряжения

Канонические формы уравнений и схем. В тех случаях, когда по условию задачи нужно составить U -граф, а схема задана в виде, не соответствующем канонической форме уравнений (14.1), U -граф можно построить двумя путями: 1) привести схему к виду, соответствующему канонической форме уравнений — такое преобразование можно осуществить при любом

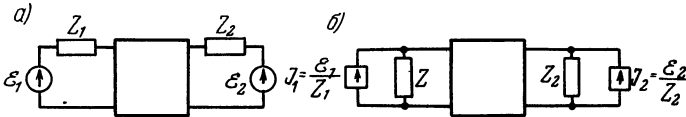


Рис. 14.1

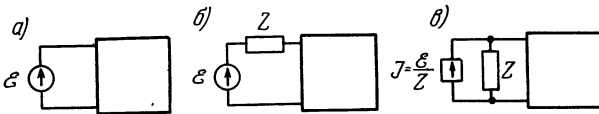


Рис. 14.2

числе источников напряжения и любом их включении; 2) привести уравнения к канонической форме — это возможно либо тогда, когда в схеме один источник напряжения, либо все источники напряжения имеют общий узел.

Рассмотрим первый случай. Для составления уравнений U -графа при наличии только источников напряжения следует заменить все источники напряжения эквивалентными источниками тока (рис. 14.1 и 14.2), т. е. свести задачу к рассмотренной выше.

Если последовательно с источником напряжения не включено сопротивление (рис. 14.2а), его включают условно (рис. 14.2б), заменяют источники напряжения эквивалентными источниками тока (рис. 14.2в) и выполняют необходимые операции. Для получения действительного решения в окончательном выражении не-

обходимо добавочно включенное сопротивление положить равным нулю (и раскрыть неопределенность, если она возникнет).

Во втором случае составление U -графа сводится к приведению уравнений схемы к канонической форме путем переноса задающих напряжений \mathcal{E}_i в левую часть и приравнивания нулю задающих токов J_1 , т. е. к форме вида

$$[Y][U] = [0],$$

где матрица $[U]$ содержит и задающие напряжения \mathcal{E}_i .

Такое преобразование уравнений возможно, если схема содержит один источник напряжения либо тогда, когда все источники напряжения имеют один общий полюс (рис. 14.3).

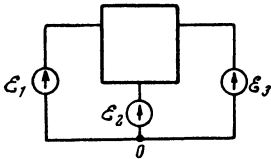


Рис. 14.3

Подготовительные операции. Подготовительные операции отличаются от таковых при составлении U -графа для схемы, соответствующей канонической форме, лишь тем, что в качестве базисного должен быть выбран общий узел всех источников или один из полюсов источника, если в схеме имеется один источник.

Составление матрицы $[U]$. Матрица составляется обычным способом, т. е. ее элементы представляют собой напряжения относительно базисного узла. В тех узлах, к которым подключены ненулевые полюсы источников, узловыми являются задающие напряжения этих источников.

Составление матрицы $[J]$. Все элементы матрицы $[J]$ равны нулю, так как в схеме отсутствуют источники тока.

Составление матрицы $[Y]$. Матрица $[Y]$ составляется так же, как и для схемы, соответствующей канонической форме, однако у нее заменяются нулями (или опускаются) элементы строк, соответствующие узлам, которые совпадают с ненулевыми полюсами источников напряжения. Очевидно, для такой матрицы равенство $Y_{ki} = Y_{ki}$ выполняется не для всех узлов.

Составление уравнений I -графа для схемы, содержащей только источники тока

Канонические формы уравнений и схем. В тех случаях, когда по условию задачи нужно составить I -граф, а схема задана в виде, не соответствующем канонической форме уравнений (14.2), I -граф можно построить двумя путями: 1) привести схему к виду, соответствующему канонической форме уравнений — такое преобразование можно осуществить при любом числе источников тока и любом их включении; 2) привести уравнения к канонической форме — это возможно либо тогда, когда в схеме имеется один источник тока, либо тогда, когда каждый источник тока включен только в один контур.

Рассмотрим первый случай. Для составления уравнений I -графа при наличии только источников тока последние нужно заменить на эквивалентные источники напряжения (рис. 14.4), т. е. свести задачу к рассмотренной выше.

Если параллельно источнику тока не включено сопротивление, то его следует включить условно и для получения действительного значения искомой величины в окончательном выражении устремить это сопротивление к бесконечности (и раскрыть неопределенность, если она возникнет).

Во втором случае составление I -графа заключается в приведении уравнений схемы к канонической форме путем переноса

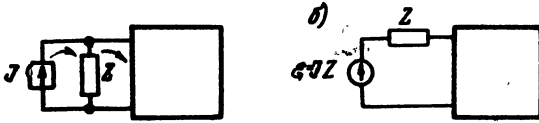


Рис. 14.4

задающих токов J_i в левую часть и приравнивания нулю задающих напряжений \mathcal{E} , т. е. к форме вида

$$[Z][I] = [0],$$

где матрица $[I]$ содержит и задающие токи J_i .

Такое преобразование уравнений возможно только в тех случаях, когда в схеме имеется один источник тока, либо тогда, когда каждый источник тока включен только в один контур.

Подготовительные операции. Подготовительные операции отличаются от таковых для схемы, соответствующей канонической форме, лишь тем, что контуры должны быть выбраны таким образом, чтобы через любой из источников тока протекал только один контурный ток.

Составление матрицы $[I]$. Матрица $[I]$ составляется обычным способом, однако контурные токи тех контуров, в которые входят источники тока, заменяются соответствующими задающими токами источников.

Составление матрицы $[\mathcal{E}]$. Все элементы матрицы равны нулю, так как в схеме отсутствуют источники напряжения.

Составление матрицы $[Z]$. Матрица $[Z]$ составляется так же, как и для схемы, соответствующей канонической форме, однако у нее опускаются или заменяются нулями элементы строк, соответствующие контурам, в которые входят источники тока. Очевидно, что для такой матрицы равенство $Z_{ik} = Z_{ki}$ выполняется не для всех контуров.

Дополнительные замечания

При построении графа по составленной системе уравнений естественно возникает вопрос: какой граф целесообразно строить

для данной схемы — нормализованный или ненормализованный¹⁾? Как уже указывалось в разд. 11, исчерпывающей рекомендации здесь дать нельзя и выбор графа всегда в какой-то степени является делом вкуса и квалификации выбирающего. Нормированный граф по структуре проще (у него нет петель), но выражения передач ветвей проще у ненормализованного графа. Кроме того, операции сложения графов (см. ниже) проще реализуются для ненормализованных.

Отметим еще одно важное обстоятельство. При построении нормализованного графа не возникает никаких затруднений, связанных с размерностями узлов и передач ветвей. В этом случае каждое уравнение решается относительно зависимого узла, который рассматривается как следствие. Для построения графа нужно провести ветви от всех остальных узлов, рассматриваемых как причины. Передачи ветвей, равно как и узлы, могут иметь различные размерности.

Совсем не так обстоит дело при построении ненормализованного графа. Напомним, что при выводе ф-лы (11.10) исходное уравнение (11.7) было преобразовано путем добавления к его правой и левой частям матрицы $[X]$, после чего это преобразованное уравнение было решено относительно $[X]$, что и приводило к ф-ле (11.10). Однако, строго говоря, добавлять матрицу $[X]$ можно только в том случае, если произведение bX имеет размерность x . Это условие означает, что коэффициенты b должны быть безразмерными, причем сигналы f тоже должны иметь размерность x . Так как в уравнениях цепей коэффициенты b соответствуют сопротивлению Z или проводимости Y , а x и f — току I , J и напряжению U , \mathcal{E} , то перед тем, как пользоваться ф-лой (11.10), нужно привести все величины «к безразмерному виду». Безразмерные величины целесообразно обозначать следующим образом:

$$I - \hat{I}; \quad U - \hat{U}; \quad Z - \hat{Z}; \quad Y - \hat{Y}.$$

Для приведения величин к безразмерному виду нужно выбрать масштабы; выбор масштаба произволен. Покажем это на примере приведения к безразмерному виду простого равенства:

$$ZI = \mathcal{E}.$$

Выберем масштабные множители Z_0 и I_0 ; третий множитель определится произведением первых двух: $\mathcal{E}_0 = Z_0 I_0$. Разделим теперь левую и правую части равенства на произведение $Z_0 I_0$. В результате получим

$$\hat{Z}\hat{I} = \hat{\mathcal{E}},$$

где

$$\hat{Z} = \frac{Z}{Z_0}; \quad \hat{I} = \frac{I}{I_0} \quad \text{и} \quad \hat{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}.$$

¹⁾ Эти вопросы подробно рассматриваются в разд. 16.

Если в качестве Z_0 и I_0 выбрать значения 1 ом и 1 а , то $\xi_0 = 1 \text{ в}$ и исходное равенство внешне сохраняет свою силу, но теперь к членам этого равенства можно прибавлять неименованные (безразмерные) величины, т. е. можно пользоваться ф-лой (11.10).

При работе с ненормализованными графами, следовательно, нужно применять только нормированные величины. Однако, так как нормирование можно применить к «единичным» величинам, уравнения будут иметь ту же форму, что и для ненормированных величин; отличие их будет состоять только в наличии символа « \wedge ». В настоящей книге для упрощения записи такое обозначение при решении задач не применяется.

Прямой метод построения

Варианты реализации прямого метода

Как уже указывалось, при прямом методе построения графов уравнения системы в явном виде не выписываются. Здесь возможны два подхода. Первый подход состоит в рассмотрении изучаемой цепи с точки зрения причинно-следственных связей; отдельные цепи схемы представляются как пути движения сигналов. При составлении графа по блок-схемам такой подход является самым удобным. При работе же со схемами электрических цепей такой подход допускает «различные толкования» и требует известной тренировки. В последнем случае четкой последовательности операций указать нельзя хотя бы потому, что не всегда можно точно определить, что является причиной, а что — следствием. В связи с этим рекомендации по прямому методу построения графов на основе причинно-следственных связей будут излагаться вместе с решением задач.

Здесь будет рассмотрен такой метод составления графа, при котором нет необходимости выписывать уравнения в явном виде, т. е. граф можно составить непосредственно по схеме. Однако следует помнить, что возможность прямого построения вытекает из соответствия между цепями схемы и ветвями графа, которое устанавливается при помощи уравнений.

Прямой метод применим как для построения U -графов, так и для построения I -графов. Однако построение U -графа этим методом проще и нагляднее, чем построение I -графа. Это объясняется тем, что узлы U -графа соответствуют узлам схемы. Именно U -графам и посвящено дальнейшее изложение.

Прямой метод построения U -графа будем рассматривать в два этапа: сначала покажем, как строится U -граф пассивной цепи, т. е. цепи без источников, а затем, как его нужно изменить при подключении источников.

Построение U -графа пассивной цепи

Как отмечалось выше (разд. 11); матрица передач $[A]$ дает возможность непосредственно построить граф, так как она содержит сведения о передачах между всеми узлами. Таким образом, задача построения графа непосредственно по схеме сводится к установлению наглядного соответствия между матрицей $[A]$ и схемой цепи.

Пассивная цепь соответствует однородной системе; в этом случае уравнение U -графа имеет вид

$$[Y][U] = [0].$$

Матрица передач $[A]$, соответствующая системе

$$[B][X] = [0],$$

находится по ф-ле (11.11). Следовательно, для U -графа матрица $[A]$ запишется в виде

$$[A] = [\hat{Y}] + [1]_n,$$

где символ « $\hat{}$ », как и прежде, означает, что все элементы матрицы приведены к безразмерному виду.

Из последнего равенства следует, что матрицу $[A]$ легко получить по матрице $[Y]$, которую можно составить «в уме» по виду цепи. Элементы матрицы $[A]$ определяются равенствами:

$$a_{\kappa i} = \hat{Y}_{\kappa i} \quad (\kappa \neq i), \quad (14.5)$$

$$a_{ii} = \hat{Y}_{ii} + 1. \quad (14.6)$$

Теперь можно сформулировать правила построения графа пассивной цепи. Для построения графа необходимо:

1) на поле графа нанести узлы, соответствующие напряжениям U_1, U_2, \dots, U_n (базисный узел, для которого напряжение принимается равным нулю, не наносится); взаимное расположение узлов должно быть таким, как на схеме;

2) соединить каждую пару узлов двумя противоположными по направлению ветвями; передачи ветвей между узлами « κ » и « i »

равны проводимостям $\hat{Y}_{\kappa i}$ с обратным знаком¹⁾;

3) построить в узлах графа петли с передачами, определяемыми по ф-ле (14.6).

В результате получим ненормализованный граф, который можно нормализовать или привести к другому требуемому виду.

Построение U -графа активной цепи

Построение U -графа может потребоваться как для схем, соответствующих уравнениям в канонической форме, т. е. для схем, содержащих только источники тока, так и для схем, содержащих

¹⁾ Напомним, что для обратимых цепей $Y_{\kappa i} = Y_{i\kappa}$.

источники напряжения. Во втором случае, как уже указывалось в начале настоящего раздела, можно преобразовать источники напряжения в эквивалентные источники тока, т. е. свести второй случай к первому. Таким образом, можно ограничиться рассмотрением только первого случая. Однако при некоторых ограничениях, как и прежде, целесообразно не преобразовывать источники напряжения в источники тока.

Рассмотрим построение U -графа активной цепи для случая, когда источниками являются только источники тока. Покажем, как нужно изменить граф, построенный для пассивной цепи, если к его узлам подключаются источники тока. Выпишем из системы уравнений в канонической форме

$$[Y][U] = [J]$$

одно уравнение, соответствующее узлу κ :

$$Y_{\kappa 1}U_1 + Y_{\kappa 2}U_2 + \dots + Y_{\kappa \kappa}U_{\kappa} + \dots + Y_{\kappa n}U_n = J_{\kappa}. \quad (14.7)$$

Здесь n , как и прежде, число узлов схемы (без базисного). Аналогичное уравнение для пассивной цепи отличается только тем, что $J_{\kappa} = 0$, т. е.

$$Y_{\kappa 1}U_1 + Y_{\kappa 2}U_2 + \dots + Y_{\kappa \kappa}U_{\kappa} + \dots + Y_{\kappa n}U_n = 0. \quad (14.8)$$

Запишем последнее уравнение в виде, соответствующем ненормализованному графу. С этой целью прибавим к его правой и

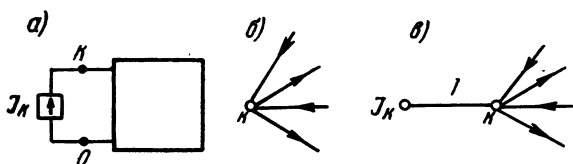


Рис. 14.5

левой частью напряжение U_{κ} и поменяем обе части местами. Предварительно все члены уравнения необходимо привести к безразмерному виду. В результате получим

$$\hat{U}_{\kappa} = \hat{Y}_{\kappa 1}\hat{U}_1 + \hat{Y}_{\kappa 2}\hat{U}_2 + \dots + (\hat{Y}_{\kappa \kappa} + 1)\hat{U}_{\kappa} + \dots + \hat{Y}_{\kappa n}\hat{U}_n. \quad (14.9)$$

Уравнение (14.9) эквивалентно уравнению (14.8), а от уравнения (14.7) оно отличается только отсутствием параметра J_{κ} . Для того чтобы сделать последнее уравнение эквивалентным уравнению (14.7), достаточно учесть параметр J_{κ} , т. е. переписать его в виде

$$\hat{U}_{\kappa} = \hat{Y}_{\kappa 1}\hat{U}_1 + \hat{Y}_{\kappa 2}\hat{U}_2 + \dots + (\hat{Y}_{\kappa \kappa} + 1)\hat{U}_{\kappa} + \dots + \hat{Y}_{\kappa n}\hat{U}_n - \hat{J}_{\kappa}. \quad (14.10)$$

Из выражения (14.10) видно, что если к κ -му узлу схемы подключен источник тока J_{κ} (рис. 14.5а), то для получения U -графа такой схемы необходимо к графу, построенному в пред-

положении отсутствия источника тока (рис. 14.5б), добавить узел-источник J_k и соединить его с k -м узлом графа ветвью с передачей, равной -1 (рис. 14.5в). То же самое следует сделать и с другими источниками тока.

При построении U -графа активной цепи для случая, когда источниками являются только источники напряжения, имеющие общий полюс, уравнение этой цепи, как уже указывалось, соответствует канонической форме вида

$$[Y][U] = [0].$$

Однако матрица-столбец $[U]$ содержит не только искомые напряжения U_1, U_2, \dots, U_n , но и задающие напряжения $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$, а элементы строк матрицы $[Y]$, соответствующих узлам-полюсам (не базовому) источников, заменяются нулями, т. е. опускаются.

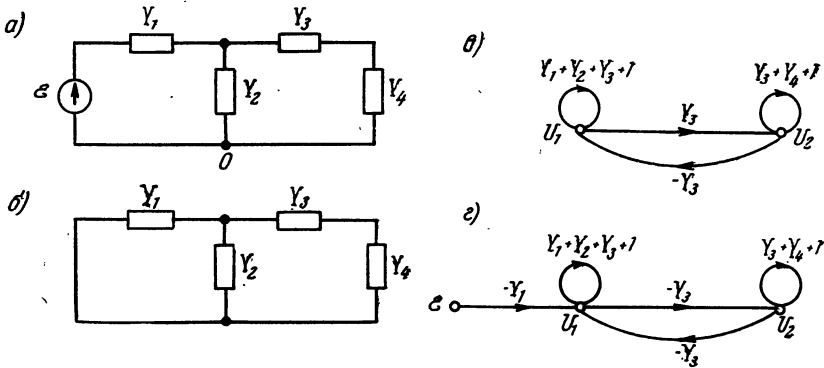


Рис. 14.6

Из этих соображений и следует процедура построения графа активной цепи путем построения графа пассивной цепи и его изменение при подключении источников. Поясним сказанное на примере.

Пусть задана цепь, изображенная на рис. 14.6а. Исключим (закоротим) источник \mathcal{E} , т. е. составим соответствующую пассивную цепь (рис. 14.6б). Для этой пассивной цепи легко составить граф (рис. 14.6в), соответствующий матричному уравнению:

$$\begin{array}{c}
 1 \qquad \qquad \qquad 2 \\
 \left[\begin{array}{c|c} Y_1 + Y_2 + Y_3 & -Y_3 \\ \hline -Y_3 & Y_3 + Y_4 \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{array}$$

Теперь вернемся к рис. 14.6а и составим для него матричное уравнение, имея в виду, что появился новый узел 3 с напряжением $U_3 = \mathcal{E}$:

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_3 & -Y_3 & -Y_1 \\ -Y_3 & Y_3 + Y_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \mathcal{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Раскрывая произведение матриц, приходим к графу рис. 14.6г. Ветвь от источника \mathcal{E} к узлу 1 можно достроить и не прибегая к построению матричного уравнения, т. е. при помощи изложенных выше рассуждений.

В заключение следует отметить, что описанные приемы позволяют строить графы не только в рассмотренных случаях, но и тогда, когда схема содержит как источники тока, так и источники напряжения; можно также строить смешанные U — I -графы, когда одна часть искомым переменных является напряжениями, а другая — токами.

Задачи в настоящем разделе расположены в следующей последовательности.

Первая группа задач (14.1—14.4) и (14.5—14.9) посвящена составлению U - и I -графов косвенным путем.

Во второй группе (14.10—14.14) собраны задачи по составлению как U -графов, так и I -графов косвенным методом для одних и тех же схем.

Третья группа (14.15—14.18) и (14.19—14.22) содержит задачи по составлению U -графов пассивных и активных цепей прямым методом.

Задачи и упражнения

● 14.1.* Составить систему уравнений узловых напряжений для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.7. Построить нормализованный и ненормализованный U -графы и определить напряжение на сопротивлении Z .

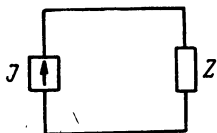


Рис. 14.7

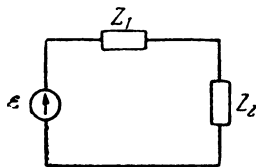


Рис. 14.8

● 14.2.* Составить систему уравнений узловых напряжений для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.8. Задачу решить двумя способами: путем приведения схемы к виду, соответствующему канонической форме уравнений, и без приведения.

Построить нормализованный и ненормализованный U -графы и определить напряжение на сопротивлении Z_2 .

● 14.3.* Составить систему уравнений узловых напряжений и построить ненормализованный и нормализованный U -графы для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.9.

● 14.4.* Составить систему уравнений узловых напряжений и построить ненормализованный и нормализованный U -графы электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.10.

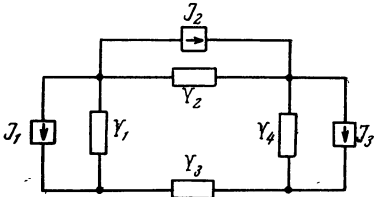


Рис. 14.9

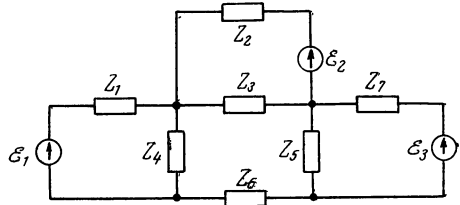


Рис. 14.10

● 14.5.* Составить систему уравнений контурных токов для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.11. Построить ненормализованный I -граф, от него перейти к конечному графу и определить ток в цепи.

● 14.6.* Составить систему уравнений контурных токов электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.12. Задачу решить как путем эквивалентного преобразования источников (схемы), так и путем преобразования уравнений.

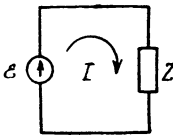


Рис. 14.11

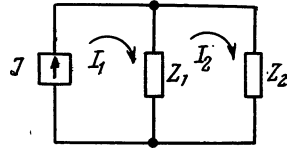


Рис. 14.12

Построить I -графы в том и другом случае и определить ток, протекающий через сопротивление Z_2 .

● 14.7.* Составить систему уравнений контурных токов и построить ненормализованный I -граф для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.13.

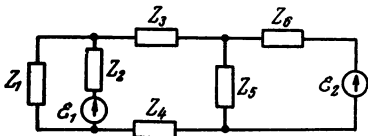


Рис. 14.13

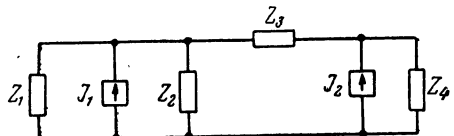


Рис. 14.14

● 14.8. Составить систему уравнений контурных токов и построить ненормализованный и нормализованный I -графы для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.14.

- 14.9. Составить систему уравнений контурных токов и построить нормализованный I -граф для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.15.
- 14.10.* Составить системы уравнений контурных токов и узловых напряжений, а затем построить I - и U -граф для цепи, схема которой изображена на рис. 14.16.

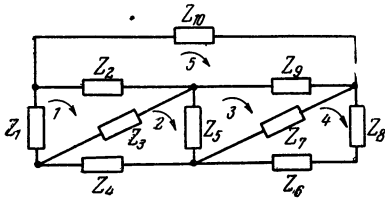


Рис. 14.15

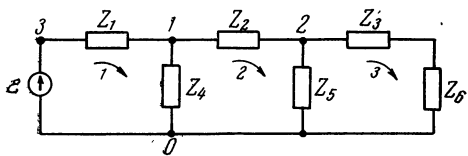


Рис. 14.16

- 14.11.* Составить системы уравнений контурных токов и узловых напряжений, а затем построить I - и U -граф для цепи, схема которой изображена на рис. 14.17.
- 14.12.* Составить системы уравнений контурных токов и узловых напряжений, а затем построить I - и U -граф для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.18.

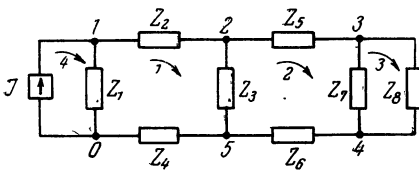


Рис. 14.17

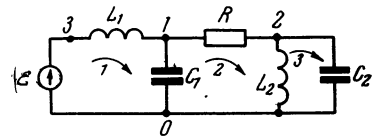


Рис. 14.18

- 14.13. Составить системы уравнений контурных токов и узловых напряжений, а затем построить I - и U -граф для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.19.

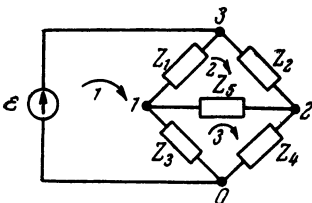


Рис. 14.19

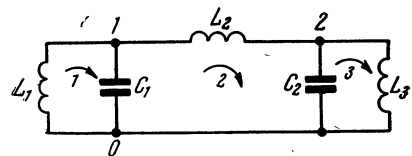


Рис. 14.20

- 14.14.* Составить системы уравнений контурных токов и узловых напряжений, а затем построить нормализованные U - и I -граф для электрической цепи, изображенной на рис. 14.20.

● 14.15.* Не составляя системы уравнений, построить U -граф для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.21.

● 14.16.* Не составляя системы уравнений, построить ненормализованный U -граф для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.22. Составить системы уравнений равновесия узловых напряжений непосредственно по схеме и по построенному графу. Убедиться в их равносильности.

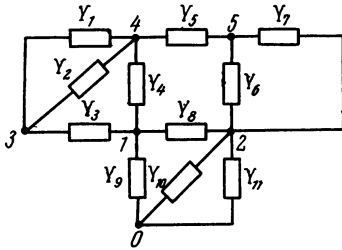


Рис. 14.21

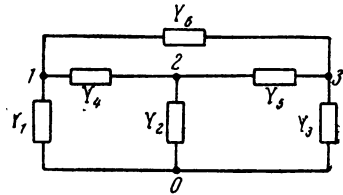


Рис. 14.22

● 14.17. Не составляя системы уравнений, построить ненормализованный U -граф для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.23.

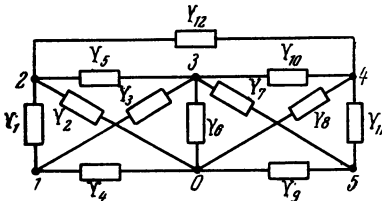


Рис. 14.23

● 14.18. Не составляя системы уравнений, построить ненормализованные U -графы для электрических цепей, схемы которых изображены на рис. 14.24.

Параметры элементов приведены в омах, фарадах и генри.

● 14.19.* Не составляя системы уравнений, построить ненормализованный U -граф для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.25.

● 14.20.* Не составляя системы уравнений, построить ненормализованный U -граф для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.26.

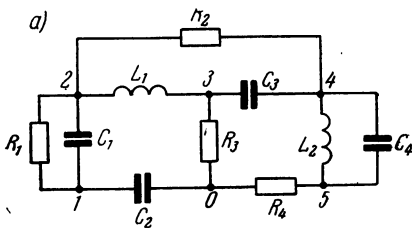


Рис. 14.24

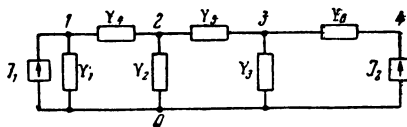
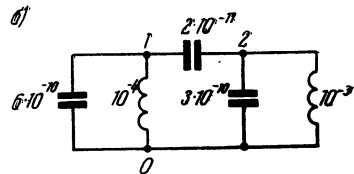


Рис. 14.25

- 14.21.* Не составляя системы уравнений, построить ненормализованный U -граф цепи, схема которой изображена на рис. 14.27.
- 14.22. Не составляя систем уравнений, построить ненормализованные U -графы электрических цепей, схемы которых изображены на рис. 14.28.

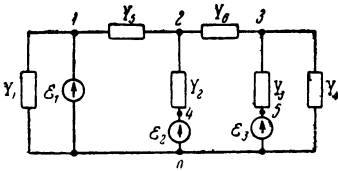


Рис. 14.26

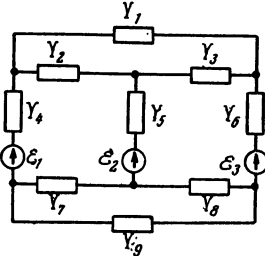


Рис. 14.27

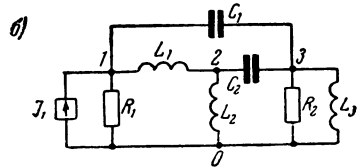
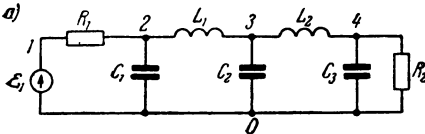


Рис. 14.28

15.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФОВ НЕОБРАТИМЫХ ЦЕПЕЙ

Косвенный метод

При построении графов необратимых цепей косвенным методом, так же как и для обратимых цепей, необходимо предварительно составить систему уравнений. Методика составления систем уравнений контурных токов и узловых напряжений необратимых цепей хорошо известна [19]. Матрицы контурных токов, узловых напряжений, задающих токов и напряжений составляются совершенно так же, как и для обратимых цепей; матрицы же проводимостей и сопротивлений составляются по другим правилам.

При составлении матриц $[Y]$ и $[Z]$ необходимо выделить из схемы обратимую часть (т. е. часть цепи, содержащую элементы L, C, R). Для этого нужно мысленно отключить от данной цепи электронные лампы, транзисторы, трансформаторы и т. д. На

рис. 15.1а показан пример электрической цепи, содержащей обратимые и необратимые элементы, а на рис. 15.1б — обратимая часть цепи, т. е. часть цепи, содержащая только обратимые элементы L, C, R .

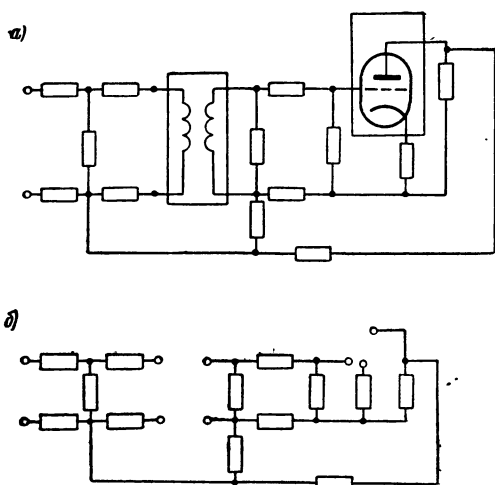


Рис. 15.1

Матрицы $[Y]$ и $[Z]$ составляются отдельно для оставшейся (обратимой) части цепи и исключенных (необратимых) частей цепи. Матрицы $[Y_0]$ и $[Z_0]$ обратимой части цепи составляются уже рассмотренными выше способами (разд. 14). Исключенные, т. е. необратимые части, не отличаются большим разнообразием. Их матрицы $[Y_j]$ и $[Z_j]$ находятся, как правило, по эквивалентным схемам и могут быть сведены в относительно небольшие таблицы. Таблицы матриц $[Y]$ и $[Z]$ для большого числа необра-

тимых элементов и трансформаторов имеются, например, в [19]. Матрицы $[Y]$ и $[Z]$ (вместе с графами) наиболее употребительных элементов приведены в табл. 15.1 (вклейка).

Матрицы $[Y]$ и $[Z]$ для многих необратимых элементов можно получить на соответствующих Y - и Z -матриц параметров четырехполюсников (табл. 2.3). Рассмотрим, например, составление Y -матрицы триода. Будем обозначать Y -матрицу четырехполюсника символом $[Y]$.

Матрица узловых проводимостей $[Y]$ входит в уравнение U -графа [ф-ла (14.1)], где элементами матрицы $[U]$ являются узловые напряжения, отсчитанные от произвольного базисного узла. Как известно, число независимых узловых напряжений на единицу меньше числа узлов. Используя эти обстоятельства, а также законы Кирхгофа, легко показать, что сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце матрицы $[Y]$ должна быть равна нулю. Такие матрицы называются неопределенными. Неопределенные Y -матрицы соответствуют случаю, когда в качестве базисного выбирается произвольный, не совпадающий ни с одним из узлов рассматриваемого элемента узел. Это удобно, так как далеко не всегда известно, какой из узлов в сложной схеме, куда входит рассматриваемый элемент, является базисным.

Рассмотрим рисунок поз. 1 табл. 15.1. Изображенный на этом рисунке триод имеет три узла, и, следовательно, его матрица $[Y]$ должна быть неопределенной матрицей третьего порядка:

$$[Y] = \left[\begin{array}{cc|c} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ \hline Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{array} \right].$$

Будем считать узел 3 базисным; тогда величины U_1 и U_2 будут представлять собой входное и выходное напряжения четырехполюсника (рисунок поз. 6 табл. 2.3) с обратными знаками¹⁾, а матрица $[Y]'$ параметров четырехполюсника будет равна выделенной пунктирной линией части матрицы $[Y]$ с противоположным знаком.

Таким же образом можно решить и обратную задачу. Пусть известной является матрица $[Y]'$. Тогда легко найти «недостающую» часть матрицы $[Y]$. Для того чтобы найти всю матрицу $[Y]$, необходимо к найденной части приписать одну строку и один столбец, соответствующие базисному узлу. Значения элементов строки и столбцов базисного узла находятся в соответствии с изложенным выше правилом относительно сумм элементов строк и столбцов матрицы $[Y]$. Покажем это на примере триода. Из табл. 2.3 находим матрицу $[Y]'$:

$$[Y]' = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -S & -G_i & \end{array} \right].$$

Изменив знак, найдем часть матрицы $[Y]$. Тогда матрица $[Y]$ запишется следующим образом:

$$[Y] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & Y_{13} \\ \hline S & G_i & Y_{23} \\ \hline Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{array} \right].$$

Для нахождения неизвестных элементов матрицы воспользуемся правилом суммирования элементов строк и столбцов и составим соответствующие равенства:

$$\begin{aligned} S + Y_{31} &= 0; & G_i + Y_{32} &= 0; & Y_{13} + Y_{23} + Y_{33} &= 0; \\ 0 + 0 &= Y_{13}; & S + G_i + Y_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Теперь легко найти неизвестные элементы:

$$Y_{13} = 0; \quad Y_{23} = -(S + G_i); \quad Y_{31} = -S; \quad Y_{32} = -G_i; \quad Y_{33} = S + G_i.$$

Матрица

$$[Y] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline S & G_i & -(S + G_i) \\ \hline -S & -G_i & S + G_i \end{array} \right].$$

совпадает с матрицей 15.1.

¹⁾ Направление стрелок на рис. табл. 15.1 противоположно направлению стрелок на рис. табл. 2.3.

Для получения общей матрицы необходимо сложить матрицы всех частей схемы, т. е.

$$[Y] = \sum_{j=0}^N [Y_j]; \quad [Z] = \sum_{j=0}^N [Z_j],$$

где N — число выделенных частей схемы.

При сложении матриц частей схемы, т. е. при построении графа по заданной схеме, прежде всего нужно пронумеровать все узлы (контуры). Очевидно, что номера узлов, относящиеся к необратимым частям схемы, не будут соответствовать номерам узлов тех же частей схемы по табл. 15.1. Поэтому, перед тем как приступить к сложению матриц, нужно перенумеровать узлы табличных схем так, чтобы новая нумерация совпала с нумерацией узлов заданной схемы.

В остальном построение графа по схеме, содержащей обратимые и необратимые части, не отличается от построения графа обратимой цепи (разд. 14).

Прямой метод

При прямом методе построения U -графа необратимой цепи нужно выделить из заданной схемы обратимую часть и, пользуясь методом, изложенным в разд. 14, построить ненормализованный U -граф этой части схемы. Ненормализованные U -графы (а также I -графы) необратимых элементов и трансформаторов приведены в табл. 15.1. После нахождения ненормализованных U -графов всех частей схемы для построения общего графа схемы графы этих частей необходимо сложить. Операция сложения ненормализованных графов выполняется следующим образом.

Пусть даны два графа, один из которых имеет совокупность узлов-переменных (x_1, x_2, \dots, x_n) , а другой — $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Некоторые узлы-переменные являются общими для обоих графов, например,

$$(x_i, x_{i+1}, \dots, x_k) \text{ и } (x'_i, x'_{i+1}, \dots, x'_k).$$

Суммарным графом называется граф, полученный путем совмещения общих узлов-переменных графов-слагаемых, объединения (т. е. сложения) передач однонаправленных ветвей и объединения петель, причем при сложении каждой пары петель из передачи общей петли должна вычитаться единица.

При таком определении операции сложения графов сохраняет силу приведенное выше равенство

$$[Y] = \sum_{j=0}^N [Y_j],$$

где $[Y]$ — матрица всей схемы, а $[Y_0]$ — матрица части схемы, содержащей обратимые элементы, $[Y_1]$ — матрица выделенного первого необратимого элемента и т. д.

Покажем это на простейшем примере двух схем с матрицами:

$$[Y_0] = \left[\begin{array}{c|c} Y_{11} & Y_{12} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} \end{array} \right]; \quad [Y_1] = \left[\begin{array}{c|c} Y'_{11} & Y'_{12} \\ \hline Y'_{21} & Y'_{22} \end{array} \right].$$

Общая матрица $[Y]$ равна сумме матриц:

$$[Y] = \left[\begin{array}{c|c} Y_{11} + Y'_{11} & Y_{12} + Y'_{12} \\ \hline Y_{21} + Y'_{21} & Y_{22} + Y'_{22} \end{array} \right].$$

На рис. 15.2а и б изображены графы, соответствующие матрицам $[Y_0]$ и $[Y_1]$, а на рис. 15.2в — граф, соответствующий матрице $[Y]$. Легко видеть, что при сложении двух графов передачи однонаправленных ветвей складываются; в равной степени складываются и передачи петель, но с вычитанием единицы.

Последовательно выполняя указанные действия, можно складывать между собой несколько графов. При сложении графов ча-

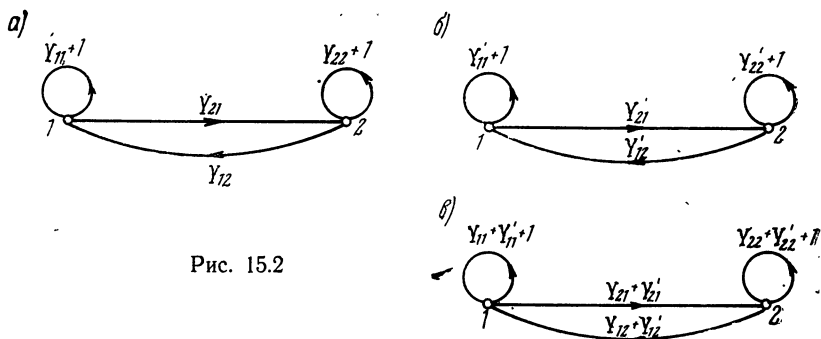


Рис. 15.2

стей схемы необходимо учитывать нумерацию узлов и контуров так же, как и при сложении матриц частей схемы¹⁾. После получения общего графа электрической цепи его можно нормализовать или преобразовать в другой желательный вид.

Задачи в настоящем разделе расположены в следующей последовательности.

Задачи 15.1—15.3 посвящены составлению I -графов на основе косвенного метода.

Остальные задачи содержат условия по составлению U -графов на основе прямого метода. Как правило, в каждой задаче находятся ненормализованные графы, по которым составляются нормализованные графы.

¹⁾ Следует указать, что таким образом можно складывать лишь ненормализованные графы.

Задачи и упражнения

● 15.1.* Построить ненормализованный I -граф электрической цепи, схема которой изображена на рис. 15.3. По ненормализованному графу построить нормализованный.

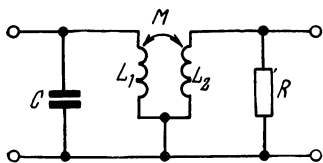


Рис. 15.3

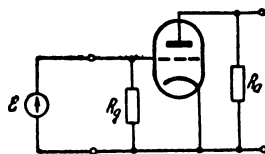


Рис. 15.4

● 15.2.* Построить ненормализованный и нормализованный I -графы лампового резистивного усилителя, схема которого изображена на рис. 15.4.

● 15.3.* Построить ненормализованный и нормализованный I -графы лампового усилителя с обратной связью, схема которого изображена на рис. 15.5.

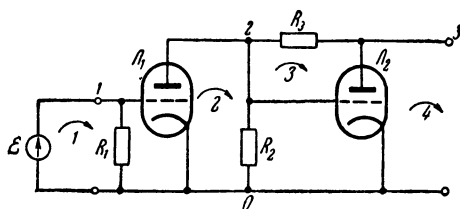


Рис. 15.5

● 15.4.* Построить ненормализованный U -граф для усилителя с отрицательной обратной связью по току, схема которого изображена на рис. 15.6. По ненормализованному графу построить нормализованный.

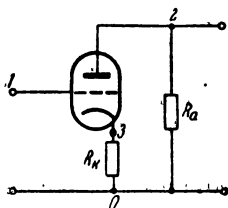


Рис. 15.6

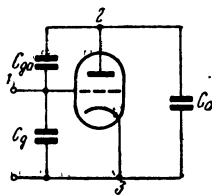


Рис. 15.7

● 15.5.* Построить ненормализованный U -граф триода с учетом межэлектродных емкостей (рис. 15.7). По ненормализованному графу построить нормализованный.

● 15.6. Построить ненормализованный и нормализованный U -графы интегрирующего усилителя, схема которого изображена на рис. 15.8.

- 15.7. Построить ненормализованный U -граф усилителя, схема которого изображена на рис. 15.9. По ненормализованному графу построить нормализованный.
- 15.8. Построить ненормализованный и нормализованный U -графы двухкаскадного усилителя с обратной связью, схема которого изображена на рис. 15.10.

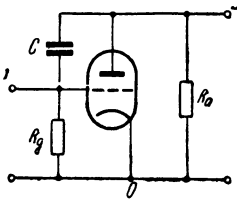


Рис. 15.8

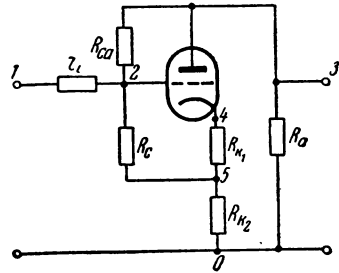


Рис. 15.9

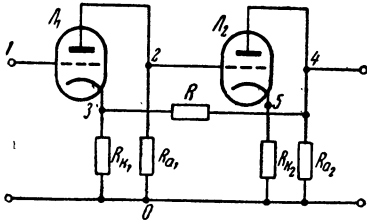


Рис. 15.10

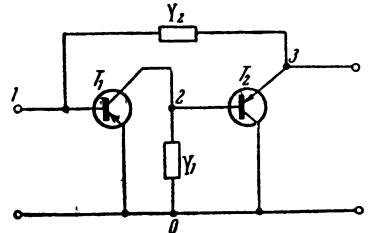


Рис. 15.11

- 15.9. Построить ненормализованный и нормализованный U -графы транзисторного резистивного усилителя, схема которого изображена на рис. 15.11.
- 15.10.* Построить ненормализованный U -граф избирательного транзисторного усилителя, схема которого изображена на рис. 15.12.

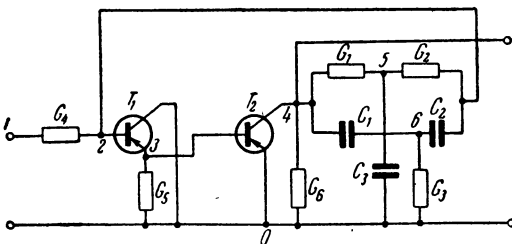


Рис. 15.12

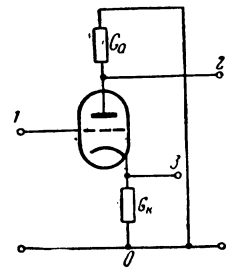


Рис. 15.13

- 15.11. Построить ненормализованный и нормализованный U -графы для фазинверсного каскада, схема которого изображена на рис. 15.13.

● 15.12. Построить ненормализованный U -граф каскада с дифференциальным выходом усилителя постоянного тока (рис. 15.14).

По ненормализованному графу построить нормализованный.

● 15.13. Построить ненормализованный U -граф цепи, используемой для получения отрицательных сопротивлений (рис. 15.15). По ненормализованному графу построить нормализованный.

● 15.14. Построить ненормализованный U -граф каскадного усилителя (рис. 15.16). По ненормализованному графу построить нормализованный.

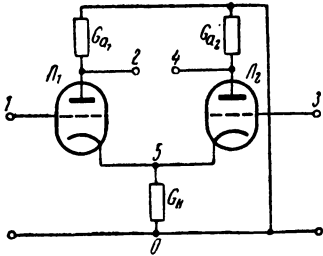


Рис. 15.14

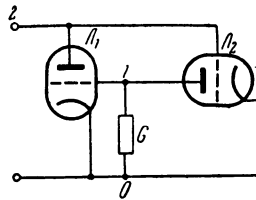


Рис. 15.15

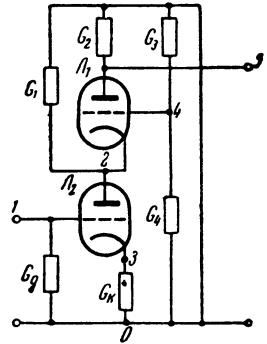


Рис. 15.16

● 15.15.* Построить ненормализованный U -граф RC генератора гармонических колебаний (рис. 15.17). По ненормализованному графу построить нормализованный.

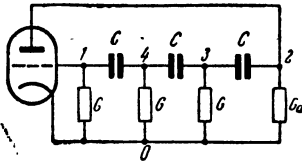


Рис. 15.17

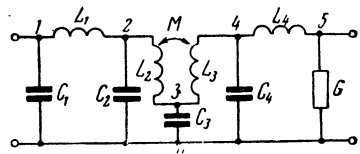


Рис. 15.18

● 15.16.* Построить ненормализованный U -граф электрической цепи, схема которой изображена на рис. 15.18. По ненормализованному графу построить нормализованный.

● 15.17. Построить ненормализованный U -граф связанных колебательных контуров, схема которых изображена на рис. 15.19.

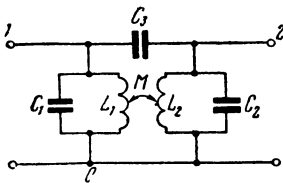


Рис. 15.19

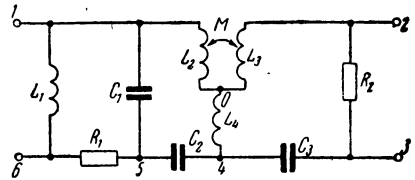


Рис. 15.20

По ненормализованному графу построить нормализованный.

● 15.18. Построить ненормализованный U -граф электрической цепи, схема которой изображена на рис. 15.20.

По ненормализованному графу построить нормализованный.

- 15.19. Построить ненормализованный U -граф электрической цепи, схема которой изображена на рис. 15.21.

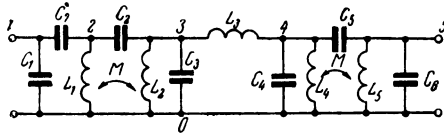


Рис. 15.21

- 15.20. Построить ненормализованный U -граф лампового усилителя с обратной связью, схема которого изображена на рис. 15.5. По ненормализованному графу построить нормализованный.

- 15.21. Построить ненормализованный U -граф двухкаскадного усилителя с обратной связью, схема которого изображена на рис. 15.22.

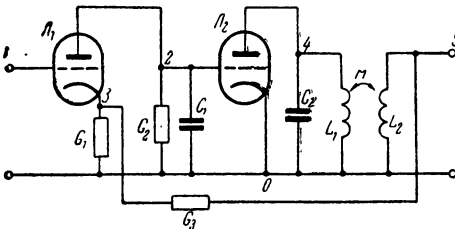


Рис. 15.22

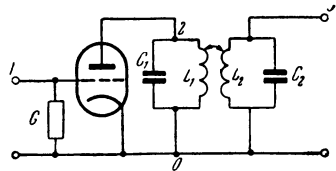


Рис. 15.23

По ненормализованному графу построить нормализованный.

- 15.22. Построить ненормализованный U -граф полосового усилителя, схема которого изображена на рис. 15.23. По ненормализованному графу построить нормализованный.

16.

РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ПОМОЩИ ГРАФОВ

Общие положения

В двух предыдущих разделах рассматривались вопросы составления U - и I -графов линейных электрических цепей. Применяя те или иные методы решения графов (разд. 13), например, используя формулу Мэсона, можно найти контурные токи или узловые напряжения анализируемой схемы. Очень часто интерес представляют другие характеристики электрических цепей, например входные функции двухполюсников или передаточные функции четырехполюсников. По найденным контурным токам и узловым напряжениям всегда можно найти передаточные и входные

функции как функции, представляющие собой отношение токов и напряжений в определенных узлах. Однако можно и сразу находить эти функции, не определяя токи и напряжения в отдельных узлах. Изложению вопросов, упрощающих указанные расчеты, и посвящен настоящий раздел.

Определение входных функций двухполюсников

К входным функциям двухполюсников относятся их входное сопротивление и входная проводимость. Под входным сопротивлением $Z_{вх}$ понимают отношение комплексной амплитуды напряжения на внешних зажимах двухполюсника к комплексной амплитуде тока, втекающего во внешний зажим (рис. 16.1а):

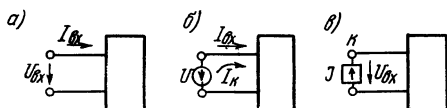


Рис. 16.1

$$Z_{вх} = \frac{U_{вх}}{I_{вх}}. \quad (16.1)$$

Входная проводимость $Y_{вх}$ является величиной, обратной входному сопротивлению:

$$Y_{вх} = \frac{1}{Z_{вх}} = \frac{I_{вх}}{U_{вх}}. \quad (16.2)$$

Таким образом, для определения входных функций двухполюсника необходимо найти либо ток во внешней цепи при включенном источнике напряжения (рис. 16.1б), либо напряжение на внешних зажимах при включенном источнике тока (рис. 16.1в). Задача нахождения напряжения легче решается при использовании U -графа, а задача нахождения тока — при использовании I -графа. Если, исходя из структуры цепи, можно оказать предпочтение тому или иному типу графа, то в соответствии с этим следует выбирать схему для определения входных функций рис. 16.1б или в. Если входные функции определяются по схеме рис. 16.1б и строится I -граф, то ток внешнего контура совпадает с током внешней цепи, I -граф имеет один источник, и ток внешней цепи можно определить по формуле Мэсона:

$$I_{вх} = N_{\kappa} i U,$$

где κ — узел I -графа, соответствующий контурному току $I_{вх}$, а i — узел, соответствующий источнику напряжения. Очевидно, что

$$Y_{вх} = \frac{I_{вх}}{U} = N_{\kappa} i. \quad (16.3)$$

Таким образом, в случае использования схемы рис. 16.1б входная проводимость равна передаче графа от узла-источника, представляющего напряжение U , до узла, представляющего входной ток $I_{вх}$.

Если входные функции определяются по схеме рис. 16.1в и строится U -граф при выборе в качестве базисного узла одного из полюсов источника тока, то узловое напряжение узла, совпадающего с другим полюсом, определяется равенством

$$U_{\text{вх}} = N_{ki}I,$$

где k — узел U -графа, соответствующий узловому напряжению $U_{\text{вх}}$, а i — узел, соответствующий источнику тока I . Очевидно, что

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{вх}}}{I} = N_{ki}, \quad (16.4)$$

т. е. в случае использования схемы рис. 16.1в входное сопротивление равно передаче графа от узла-источника, представляющего ток I , до узла, представляющего входное напряжение $U_{\text{вх}}$.

Определение передаточных функций четырехполюсников

Соотношения между передаточными функциями

Как известно, под передаточными функциями четырехполюсника обычно понимают отношение комплексных амплитуд электрических величин на выходе к комплексным амплитудам электрических величин на входе четырехполюсника. В зависимости от того, какие это величины, определяются различные передаточные функции. Определения передаточных функций четырехполюсника даны в табл. 10.1.

Между указанными в таблице передаточными функциями имеют место определенные связи:

$$N_U = N_Y Z_n |_{Z_n \rightarrow \infty}, \quad (16.5)$$

$$N_I = N_Z Y_n |_{Y_n \rightarrow \infty}, \quad (16.6)$$

в которых $Z_n = \frac{U_{\text{вых}}}{I_{\text{вых}}}$ и $Y_n = \frac{1}{Z_n}$.

Очевидно, что определять передаточные функции при помощи графов можно как по U -графу, так и по I -графу. Однако, исходя из структуры схемы и подлежащей определению передаточной функции, можно дать рекомендации относительно рационального выбора типа графа.

Определение N_U и N_Y

Целесообразно рассматривать отдельно уравновешенные и неуравновешенные четырехполюсники. Неуравновешенным называется четырехполюсник, имеющий общий зажим с входной и

выходной сторон (рис. 16.2а). Уравновешенный четырехполюсник не имеет общего зажима (рис. 16.2б).

Если четырехполюсник имеет неуравновешенную структуру, то для определения функции N_U удобно использовать U -граф. В качестве базисного узла целесообразно выбрать общий зажим входа

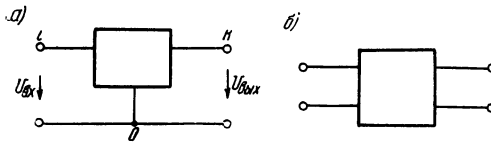


Рис. 16.2

да и выхода. При этом узловые напряжения на зажимах i и k будут совпадать соответственно с $U_{\text{ВЫХ}}$ и $U_{\text{ВХ}}$ (рис. 16.2а), а передаточная функция определится соотношением

$$N_U = N_{ki}, \quad (16.7)$$

где N_{ki} — передача U -графа, k — узел, соответствующий $U_{\text{ВЫХ}}$ и i — узел, соответствующий $U_{\text{ВХ}}$.

Для определения передаточной проводимости четырехполюсника N_Y подключим к выходу четырехполюсника нагрузку (рис. 16.3а). Очевидно, что

$$N_Y = \frac{I_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{U_{\text{ВЫХ}} Y_H}{U_{\text{ВХ}}} = Y_H N_U, \quad (16.8)$$

где N_U относится к четырехполюснику вместе с нагрузкой Y_H .

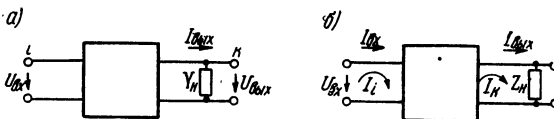


Рис. 16.3

Если четырехполюсник имеет уравновешенную структуру, то для определения N_Y при использовании U -графа пришлось бы находить два узловых напряжения выходных зажимов, а затем $U_{\text{ВЫХ}}$. В этом случае лучше использовать I -граф. Тогда контурный ток, протекающий через нагрузку Z_H , совпадает с током нагрузки $I_{\text{ВЫХ}}$ (рис. 16.3б). Очевидно, что

$$N_Y = N_{ki}, \quad (16.9)$$

где k — узел, соответствующий $I_{\text{ВЫХ}}$, а i — узел, соответствующий $U_{\text{ВХ}}$.

Таким образом определяется N_Y ; переход от N_Y к N_U труда не представляет (16.5).

Определение N_I и N_Z

При определении N_I и N_Z ко входу четырехполюсника следует подключить источник тока. Выходными параметрами являются либо $I_{\text{вых}}$, либо $U_{\text{вых}}$. Учитывая, что подключение источника тока упрощает I -граф (разд. 14), при определении N_I и N_Z следует, как правило, рекомендовать построение I -графа.

Для нахождения N_I необходимо в соответствии с табл. 10.1 замкнуть накоротко выходные зажимы и построить I -граф. Функция N_I находится по формуле:

$$N_I = N_{ki}, \quad (16.10)$$

где смысл индексов k и i ясен из рис. 16.4а:

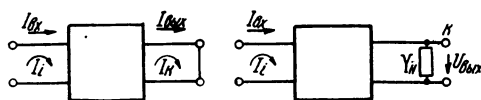


Рис. 16.4

Для определения функции N_Z следует подключить к выходу четырехполюсника нагрузку Z_H (рис. 16.3б). Очевидно, что

$$N_Z = \frac{U_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{Z_H I_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = Z_H N_{ki}, \quad (16.11)$$

где смысл индексов k и i ясен на рис. 16.3б.

В тех случаях, когда U -граф четырехполюсника значительно проще I -графа, можно рекомендовать построение U -графа; причем в качестве базисного необходимо выбирать один из выходных зажимов (рис. 16.4б).

Функция N_Z определяется как

$$N_Z = \frac{U_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = N_{ki}, \quad (16.12)$$

где смысл индексов k и i ясен из рис. 16.4б.

Коэффициент передачи тока можно определить по ф-ле (16.6).

Следует подчеркнуть, что выполнение приведенных рекомендаций не является обязательным; передаточные функции можно находить и другими способами. Однако перечисленные правила позволяют быстрее получать результаты.

Задачи в настоящем разделе расположены в следующей последовательности.

Первая группа задач (16.1 и 16.2) посвящена нахождению узловых напряжений.

Во второй группе (16.3—16.5) собраны задачи по нахождению входных функций двухполюсников.

Третья группа задач (16.6—16.13) содержит условия по нахождению передаточных функций пассивных цепей.

Задачи четвертой группы (16.14—16.20) посвящены нахождению коэффициентов усиления различных усилителей.

Задачи и упражнения

- 16.1.* Определить узловое напряжение U_2 схемы рис. 16.5. Задачу решить двумя способами: при помощи графа и не прибегая к графам.
- 16.2. Определить узловое напряжение U_2 схемы рис. 14.16.
- 16.3.* Определить входную проводимость $Y_{вх}$ между узлами 0 и 1 электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.20.

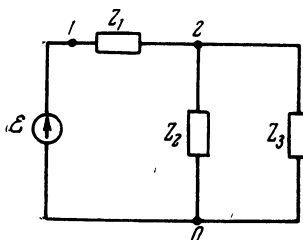


Рис. 16.5

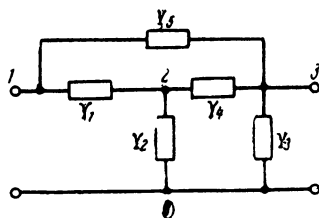


Рис. 16.6

- 16.4.* Определить входное сопротивление $Z_{вх}$ электрической цепи, схема которой изображена на рис. 14.18.
- 16.5.* Определить входное сопротивление $Z_{вх}$ электронного двухполюсника, схема которого изображена на рис. 15.15 (см. задачу 15.13), и найти условия, при которых оно будет отрицательным.
- 16.6.* Найти коэффициент передачи напряжения N_U четырехполюсника, схема которого изображена на рис. 16.6.

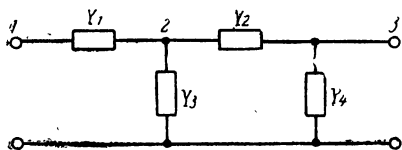


Рис. 16.7

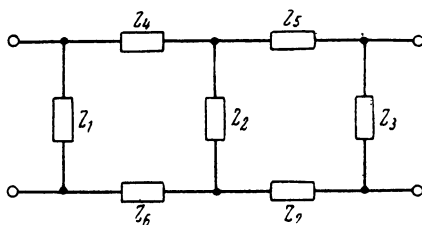


Рис. 16.8

- 16.7. Определить коэффициент передачи напряжения четырехполюсника, схема которого изображена на рис. 16.7.
- 16.8.* Определить коэффициент передачи напряжения N_U и передаточную проводимость N_T четырехполюсника, схема которого изображена на рис. 16.8.
- 16.9. Определить коэффициент передачи напряжения N_U электрической цепи, схема которой изображена на рис. 15.19 (см. задачу 15.17).
- 16.10.* Определить коэффициент передачи тока N_I для четырехполюсника, схема которого изображена на рис. 16.9.

- 16.11. Определить коэффициент передачи тока N_I для четырехполюсника, схема которого изображена на рис. 16.10.
- 16.12.* Определить передаточное сопротивление N_Z и коэффициент передачи тока N_I для четырехполюсника, схема которого изображена на рис. 16.11.
- 16.13.* Определить передаточное сопротивление N_Z и коэффициент передачи тока N_I для четырехполюсника, схема которого изображена на рис. 16.12.
- 16.14.* Определить коэффициент усиления напряжения усилителя с отрицательной обратной связью по току, схема которого изображена на рис. 15.6 (см. задачу 15.4).

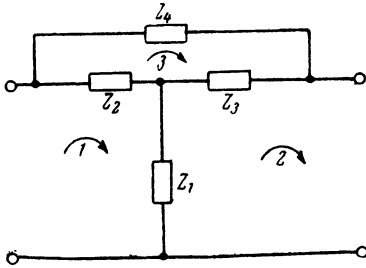


Рис. 16.9

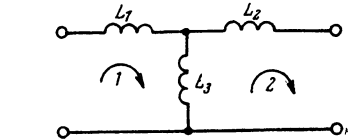


Рис. 16.10

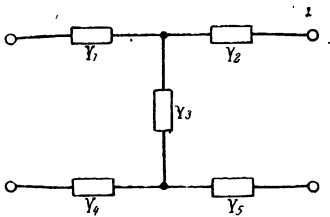


Рис. 16.11

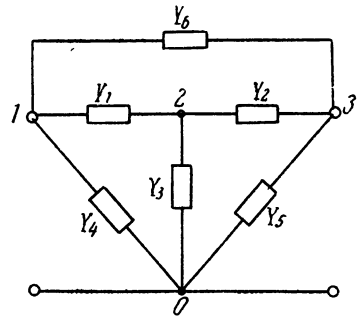
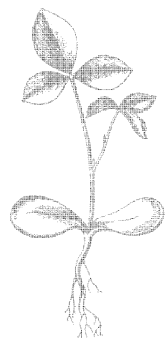


Рис. 16.12

- 16.16. Определить коэффициент усиления напряжения двухкаскадного усилителя с обратной связью, схема которого изображена на рис. 15.10 (см. задачу 15.8).
- 16.17. Определить коэффициент усиления каскадного усилителя, схема которого изображена на рис. 15.16 (см. задачу 15.14).
- 16.18. Определить коэффициент усиления напряжения лампового усилителя с обратной связью, схема которого изображена на рис. 15.5 (см. задачу 15.20).
- 16.19. Определить коэффициент усиления напряжения двухкаскадного усилителя с обратной связью, схема которого изображена на рис. 15.22 (см. задачу 15.21).
- 16.20. Определить коэффициент усиления полосового усилителя, схема которого изображена на рис. 15.23 (см. задачу 15.22).



РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЯМ



1.

● 1.1. Непосредственно по рис. 1.3 находим выражение для комплексного коэффициента передачи напряжения

$$K(i\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC}$$

и затем выражения для амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик:

$$K(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}; \quad \text{tg } \varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1}(\omega) = \frac{1}{\omega RC}$$

Графики, рассчитанные по полученным формулам, показаны на рис. Р.1.1 (а и б).

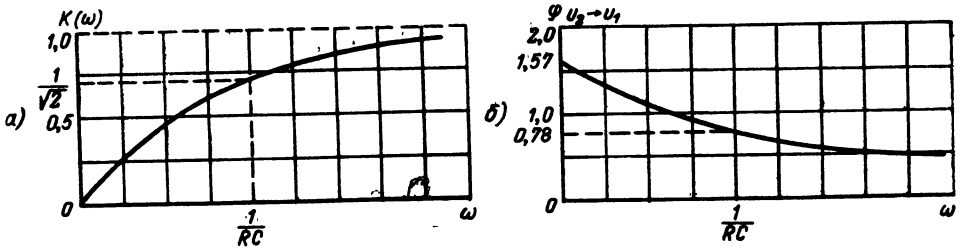


Рис. Р.1.1

● 1.2. Из выражения

$$K(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

находим

$$\omega = \frac{1}{RC} \frac{K(\omega)}{\sqrt{1 - K^2(\omega)}}$$

Так как по условию $K(\omega) = 0,8$ а $RC = 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12} = 10^{-6}$ сек, то

$$\omega = \frac{1}{10^{-6}} \frac{0,8}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = 1,33 \cdot 10^6 \text{ рад/сек}$$

и

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1,33 \cdot 10^6}{6,28} = 0,212 \cdot 10^6 \text{ гц} = 212 \text{ кгц.}$$

Найдем теперь сдвиг фаз $\varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1}$:

$$\text{tg } \varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1} = \frac{1}{\omega RC} = \frac{1}{1,33 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12}} = 0,75;$$

$$\varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1} = 0,646 \approx 37^\circ.$$

$$K(i\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{i_2 \frac{1}{i\omega C}}{iR_1 + i_2 \frac{1}{i\omega C}}.$$

С другой стороны, $i = i_1 + i_2$, а ток i_1 можно выразить через i_2 на основе равенства

$$i_1 R_2 = i_2 \frac{1}{i\omega C};$$

тогда имеем

$$i = i_2 \frac{1}{i\omega CR_2} + i_2.$$

Подставляя значение i в основное выражение, получаем

$$K(i\omega) = \frac{i_2 \frac{1}{i\omega C}}{i_2 \left(\frac{1}{i\omega CR_2} + 1 \right) R_1 + i_2 \frac{1}{i\omega C}}.$$

Преобразовав это выражение, найдем

$$\begin{aligned} K(i\omega) &= \frac{\frac{1}{i\omega C}}{\frac{R_1}{R_2} \frac{1}{i\omega C} + R_1 + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + 1 + i\omega CR_1} = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) - i\omega CR_1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \omega^2 C^2 R_1^2}. \end{aligned}$$

Амплитудно-частотная характеристика определится выражением

$$K(\omega) = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \omega^2 C^2 R_1^2}}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \omega^2 C^2 R_1^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + (\omega CR_1)^2}}.$$

Приняв $R_1 = R_2 = R$ и обозначив $\omega CR = x$, получим

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}.$$

Построенный график $K(\omega)$ показан на рис. Р.1.2а. Фазовая характеристика определяется выражением

$$\operatorname{tg} \varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1} = -\frac{\omega CR_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = -\frac{1}{2} x$$

и изображена на рис. P.1.2.б.

● 1.5. Составляем очевидные уравнения:

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 R_g; \quad \dot{I}_1 R_l = \dot{I}_2 \left(R_g + \frac{1}{i \omega C_g} \right);$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \quad \dot{U}_1 = \dot{I} R_l + \dot{I}_1 R_a.$$

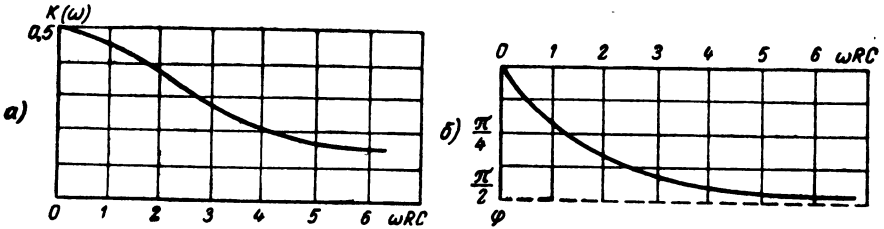


Рис. P.1.2

Найдем $K(i\omega)$:

$$\begin{aligned} K(i\omega) &= \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_2 R_g}{\dot{I} R_l + \dot{I}_1 R_a} = \frac{\dot{I}_2 R_g}{\dot{I}_1 R_l + \dot{I}_2 R_l + \dot{I}_1 R_a} = \\ &= \frac{\dot{I}_2 R_g}{\dot{I}_2 R_l \left(R_g + \frac{1}{i \omega C_g} \right) + \dot{I}_2 R_l + \dot{I}_2 \frac{1}{R_l} \left(R_g + \frac{1}{i \omega C_g} \right) R_a} = \\ &= \frac{1}{\frac{R_l}{R_l} \left(1 + \frac{1}{i \omega C_g R_g} \right) + \frac{R_l}{R_g} + \left(1 + \frac{1}{i \omega C_g R_g} \right)} = \\ &= \frac{i \omega C_g R_g}{(1 + i \omega C_g R_g) \left(\frac{R_l}{R_a} + 1 \right) + i \omega C_g R_l} = \\ &= \frac{i \omega C_g R_g}{\left(1 + \frac{R_l}{R_a} \right) + i \omega C_g R_g \left(\frac{R_l}{R_a} + 1 \right) + i \omega C_g R_l} \end{aligned}$$

Обозначим

$$\omega C_g R_g = x.$$

Тогда

$$K(i\omega) = \frac{ix}{\left(1 + \frac{R_l}{R_a} \right) + i \left[\left(1 + \frac{R_l}{R_l} \right) + \frac{R_l}{R_g} \right] x}$$

$$K(\omega) = \frac{x}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_l}{R_a} \right)^2 + \left(1 + \frac{R_l}{R_a} + \frac{R_l}{R_g} \right)^2 x^2}}$$

Если $R_i \gg R_a$ и $R_g \gg R_a$, получим

$$K(\omega) = \frac{R_a}{R_i} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

График, соответствующий последнему выражению, дан на рис. P.1.3. Фазовая характеристика

$$\operatorname{tg} \varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1} = \frac{1 + \frac{R_i}{R_a}}{\left(1 + \frac{R_i}{R_a} + \frac{R_i}{R_g}\right)x}$$

Если $R_i \gg R_a$ и $R_g \gg R_a$, то

$$\operatorname{tg} \varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1} = \frac{1}{x}$$

и фазовая характеристика будет иметь вид, совпадающий с рис. P.1.1.

● 1.6. Максимальное значение $K(\omega)$ принимает при $\omega_{\text{мин}}=0$; это значение равно

$$K(0) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$$

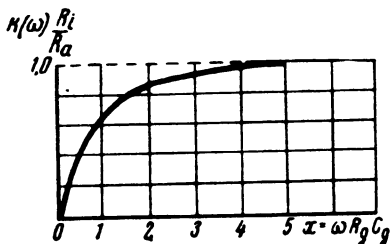


Рис. P.1.3

Составляя отношение по условию задачи

$$\frac{K(\omega)}{K(0)} = \frac{1 + \frac{R_1}{R_2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + (\omega_{\text{гр}} C R_1)^2}} = 0,8,$$

найдем соответствующую этому условию частоту $\omega_{\text{гр}}$.

Продельвая очевидные преобразования, получим

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 0,64 \left[\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + (\omega_{\text{гр}} C R_1)^2 \right]$$

или

$$0,8 \omega_{\text{гр}} C R_1 = 0,6 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right),$$

откуда

$$\omega_{\text{гр}} = \frac{3}{4 C R_1} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

и

$$f_{\text{гр}} = \frac{3}{8\pi C R_1} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right).$$

● 1.7. Для упрощения письма введем временно обозначения:

$$\omega C_g R_g = x; \quad \frac{R_i}{R_a} = \alpha; \quad \frac{R_i}{R_g} = \beta.$$

Тогда получим

$$K(\omega) = \frac{x}{\sqrt{(1+\alpha)^2 + (1+\alpha+\beta)^2 x^2}}$$

По условиям задачи $K(\omega)$ на частотах ω_1 (или x_1) и ω_2 (x_2) должен принимать значения 0,7 и 0,9.

Составляем два очевидных уравнения:

$$K(\omega_1) = 0,7 = \frac{x_1}{\sqrt{(1+\alpha)^2 + (1+\alpha+\beta)^2 x_1^2}};$$

$$K(\omega_2) = 0,9 = \frac{x_2}{\sqrt{(1+\alpha)^2 + (1+\alpha+\beta)^2 x_2^2}},$$

которые нужно решить относительно x_1 и x_2 .

В общем виде решение уравнения относительно x имеет вид

$$x_{\text{гр}} = \frac{(1+\alpha)K(\omega_{\text{гр}})}{\sqrt{1 - (1+\alpha+\beta)^2 K^2(\omega_{\text{гр}})}}.$$

Подставляя в это выражение условия задачи, находим:

$$\omega_1 = \frac{1}{C_g R_g} \frac{0,7 \left(1 + \frac{R_i}{R_a}\right)}{\sqrt{1 - \left(1 + \frac{R_i}{R_a} + \frac{R_i}{R_g}\right)^2 \cdot 0,49}};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{R_g C_g} \frac{0,9 \left(1 + \frac{R_i}{R_a}\right)}{\sqrt{1 - \left(1 + \frac{R_i}{R_a} + \frac{R_i}{R_g}\right)^2 \cdot 0,81}}.$$

Выражение для граничной частоты позволяет выяснить условия, при которых возможно осуществление заданного соотношения амплитуд напряжения выхода и входа.

Из условия отсутствия мнимости следует

$$\left(1 + \frac{R_i}{R_a} + \frac{R_i}{R_g}\right)^2 K^2(\omega_{\text{гр}}) < 1,$$

откуда

$$K(\omega_{\text{гр}}) < \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_a} + \frac{R_i}{R_g}}$$

или

$$R_i \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_g}\right) < \frac{1}{K(\omega_{\text{гр}})} - 1.$$

● 1.9. Выражение для коэффициента передачи рассматриваемой схемы (см. задачу 1.1) имеет вид

$$K(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

Пусть при $R=R_1=10^3$ ом, $K(\omega)=K_1$, а при $R=\frac{10^3 \cdot 400}{10^3 + 400}=286$ ом, $K(\omega)=K_2$.

Тогда, имея в виду, что $K(\omega) = \frac{U_2}{U_1}$, получим отношение искомым амплитуд в виде отношения $\frac{K_2}{K_1}$.

Подставляя условия задачи, находим:

$$K_1 \approx 0,35, K_2 \approx 0,104.$$

Таким образом, при подключении сопротивления 400 ом амплитуда напряжения на выходе уменьшится в

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{0,35}{0,104} \approx 3,36 \text{ раза.}$$

● 1.10. Уравнение фазовой характеристики (задача 1.1) имеет вид

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega RC}.$$

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора, ограничиваясь первой степенью разложения:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \varphi(\omega_0) + \frac{\omega - \omega_0}{1!} \varphi'(\omega_0); \\ \varphi(\omega) &= \arctg \frac{1}{\omega_0 RC} - \frac{\omega - \omega_0}{1} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\omega_0 RC}\right)^2} \cdot \frac{RC}{(\omega_0 RC)^2}. \end{aligned}$$

Так как по условию задачи $\omega_0 RC = \frac{\omega_0}{\omega_0} = 1$, то

$$\varphi(\omega) = \arctg 1 - (\omega - \omega_0) \frac{1}{1 + 1} RC = \arctg 1 - (\omega - \omega_0) \frac{1}{2\omega_0}.$$

Итак, окончательно уравнение «линеаризованной» фазовой характеристики запишется в виде

$$\varphi(\omega) = \arctg 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_0} \approx 1,285 - 0,5 \frac{\omega}{\omega_0}.$$

На рис. Р.1.4 даны для сопоставления графики реальной и линеаризованной характеристик.

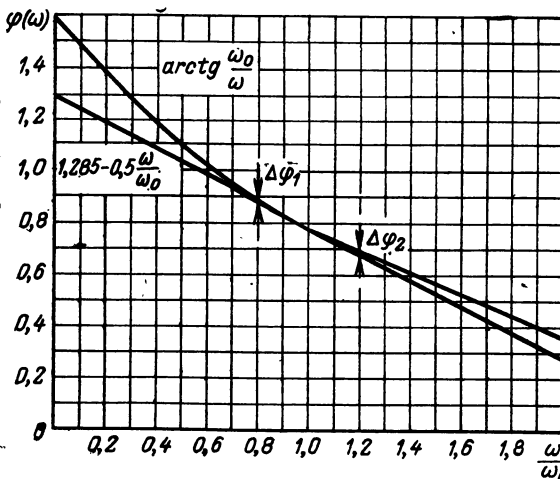


Рис. Р. 1.4

Вернемся к условиям задачи. Нам нужно найти отклонения реальной фазовой характеристики от линейной в двух точках: $\omega_1 = 0,8\omega_0$ и $\omega_2 = 1,2\omega_0$. Найдем значения фазовой характеристики по реальной кривой:

$$\varphi_p(\omega_1) = \arctg \frac{1}{\omega_1 RC} = \arctg \frac{1}{0,8} \approx 0,897,$$

$$\varphi_p(\omega_2) = \arctg \frac{1}{\omega_2 RC} = \arctg \frac{1}{1,2} \approx 0,696.$$

Теперь найдем значения фазовой характеристики на линеаризованной кривой:

$$\varphi_{л}(\omega_1) = 1,285 - 0,5 \cdot 0,8 = 0,885; \quad \varphi_{л}(\omega_2) = 1,285 - 0,5 \cdot 1,2 = 0,685.$$

Итак, абсолютные отклонения фазовой характеристики от линейной составляют:

$$\Delta \varphi_1 = 0,012; \quad \Delta \varphi_2 = 0,011,$$

а относительные :

$$\frac{\Delta \varphi_1}{\varphi_p(\omega_1)} = \frac{0,012}{0,897} = 0,0134, \text{ или } 1,34\%;$$

$$\frac{\Delta \varphi_2}{\varphi_p(\omega_2)} = \frac{0,011}{0,696} = 0,0157, \text{ или } 1,57\%.$$

● 1.14. Составляем очевидные уравнения:

$$\dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_3 R + \dot{I}_1 Z_1 = \dot{U}_1; \quad (1)$$

$$\dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_2 = \dot{U}_1; \quad (2)$$

$$\dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \dot{I}_1. \quad (3)$$

Находя из (3) \dot{I}_2 и подставляя в (2), получим

$$\dot{I}_1 Z_1 + (\dot{I}_1 - \dot{I}_3) Z_2 = \dot{U}_1. \quad (4)$$

Из (4) находим \dot{I}_1 :

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 + \dot{I}_3 Z_2}{Z_1 + Z_2};$$

вводя \dot{I}_1 в (1) после простых преобразований, имеем

$$\dot{I}_3 R \left(Z_1 + Z_2 + \frac{2Z_1 Z_2}{R} \right) = \dot{U}_1 (Z_2 - Z_1).$$

Но $\dot{I}_3 R = \dot{U}_2$, таким образом,

$$K(i\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2 + 2 \frac{Z_1 Z_2}{R}}.$$

По условию $|Z_1 Z_2| = R^2$ или $|Z_2| = \frac{R^2}{|Z_1|}$.

Подставляя последнее равенство и проделывая несложные преобразования, находим

$$K(i\omega) = \frac{R - Z_1}{R + Z_1}.$$

Так как $Z_1 = iX_1$, то

$$K(i\omega) = \frac{R - iX_1}{R + iX_1}.$$

Коэффициент передачи оказывается равным

$$K(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R^2 + X_1^2}{R^2 + X_1^2} = 1,$$

т. е. постоянен для всех частот ($0 < \omega < \infty$).

Фазо-частотная характеристика имеет вид

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = -\frac{2RX_1}{R^2 - X_1^2}.$$

● 1.16. В общем выражении для комплексного коэффициента передачи (1.3)

$$N(i\omega) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i(i\omega)^i}{\sum_{i=0}^n b_i(i\omega)^i}$$

после избавления от мнимости знаменателя, последний будет представлять собой вещественную четную функцию. В числителе, после умножения на сопряженное знаменателю выражение, появится вещественная и мнимая части, причем вещественная будет содержать частоту ω в четных степенях, а мнимая — в нечетных. Отсюда и следует требуемое доказательство.

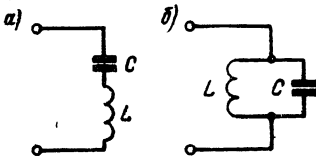


Рис. P.1.5

● 1.17. Любая цепь, содержащая конечное число индуктивностей и емкостей, представляет собой сочетание цепей, изображенных на рис. P.1.5, с еще более простыми цепями в виде отдельных индуктивностей и емкостей.

Реактивные сопротивления этих цепей определяются выражениями:

$$X_1 = \omega L; X_2 = -\frac{1}{\omega C}; X_3 = \omega L - \frac{1}{\omega C}; X_4 = \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}.$$

Находя производные $\frac{dX}{d\omega}$, убеждаемся, что для всех указанных цепей (свободных от активных потерь) имеет место неравенство

$$\frac{dX}{d\omega} > 0.$$

Продолжая эти рассуждения, приходим к выводу, что сформулированное условие справедливо для любой сложной цепи.

● 1.19. Выражение для комплексного коэффициента передачи по условию имеет вид

$$K(i\omega) = K_0 \cdot e^{i\varphi(\omega)};$$

перепишем его в другой форме:

$$\ln K(i\omega) = \ln K_0 + i\varphi(\omega).$$

Воспользуемся приведенными в условии соотношениями:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{\ln K_0}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega = -\frac{2\omega \ln K_0}{\pi} \frac{1}{\omega} \operatorname{Arth} \frac{\omega}{\Omega} \Big|_0^{\omega_0} = \\ &= -\frac{2}{\pi} \ln K_0 \operatorname{Arth} \frac{\omega}{\omega_0}. \end{aligned}$$

● 1.20. Найдем фазовые сдвиги цепей:

$$\varphi_1(\omega) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega(T_1 - T_2)}{1 + \omega^2 T_1 T_2}; \quad \varphi_2(\omega) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega(T_1 + T_2)}{1 - \omega^2 T_1 T_2}.$$

Положим $T_2 = T$, $T_1 = aT$, тогда

$$\varphi_1(\omega) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega T(a-1)}{1 + a\omega^2 T^2}; \quad \varphi_2(\omega) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega T(a+1)}{1 - a\omega^2 T^2}.$$

Легко убедиться, что при любом конечном a выполняется сформулированное в условии неравенство.

● 1.26. По условию

$$1) \ln \frac{U_1}{U_2} = 1; \quad 2) \ln \frac{U_1}{U_2} = -1.$$

Потенцируя, находим:

$$1) \frac{U_1}{U_2} = e^1 = 2,718; \quad 2) \frac{U_1}{U_2} = e^{-1} = 0,368.$$

Итак, плюс 1 *нп* соответствует числу e , а минус 1 *нп* соответствует числу 0,368.

● 1.31. Коэффициент передачи напряжения для схемы рис. 1.3г имеет вид

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}},$$

где $T = \frac{L}{R}$.

Составляя отношение $\frac{K(\omega_2)}{K(\omega_1)}$, где $\omega_2 = 2\omega_1$, получаем

$$\frac{K(\omega_2)}{K(\omega_1)} = \sqrt{\frac{1 + \omega_1^2 T^2}{1 + 4\omega_1^2 T^2}}.$$

Легко убедиться, что

$$\left[\frac{K(\omega_2)}{K(\omega_1)} \right]_{\max} < \frac{1}{2},$$

т. е. коэффициент передачи изменяется не более чем в 2 раза на октаву, или так как $20 \lg 2 \approx 2$, — не более чем на 6 *дб/окт*, или 0,7 *нп/окт*.

Если $\omega_2 = 10\omega_1$, то

$$\left[\frac{K(\omega_2)}{K(\omega_1)} \right]_{\max} < \frac{1}{10},$$

т. е. изменение коэффициента передачи напряжения меньше чем 20 *дб/дек*, или 2,3 *нп/дек*.

Расчеты для схем рис. 1.3а, 1.3б и 1.3в дают тот же результат.

● 1.32. Комплексный коэффициент передачи напряжения определяется выражением

$$K(i\omega) = \frac{1}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}};$$

находим модуль

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + d^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}},$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $d = \frac{R}{\rho}$; $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Очевидно,

$$\ln K(\omega) = -\ln \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + d^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}.$$

При

$$\omega \ll \omega_0 \quad \ln K(\omega) \approx 0;$$

$$\omega \approx \omega_0 \quad \ln K(\omega) \approx -\ln \left(d \frac{\omega}{\omega_0}\right);$$

$$\omega \gg \omega_0 \quad \ln K(\omega) \approx -\ln \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = -2 \ln \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Из сопоставления этих выражений видно, что наибольшие изменения K будут на высоких частотах, т. е. при $\omega \gg \omega_0$.

Продельвая несложные расчеты, аналогичные расчетам в предыдущей задаче, убеждаемся в том, что изменение коэффициента передачи напряжения не будет превосходить

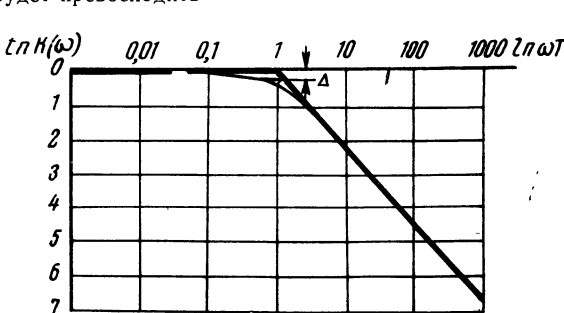


Рис. Р.1.6

$$12 \frac{\text{дб}}{\text{окт}} \approx 1,4 \frac{\text{неп}}{\text{окт}}$$

$$\text{и } 40 \frac{\text{дб}}{\text{дек}} \approx 4,6 \frac{\text{неп}}{\text{дек}}.$$

● 1.34. Для данной схемы

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}},$$

где $T = \frac{L}{K}$.

Найдем ЛАХ:

$$\ln K(\omega) = -\ln \sqrt{1 + \omega^2 T^2}.$$

График, построенный по последнему выражению, дан на рис. Р.1.6 (для оси частот также принят логарифмический масштаб) тонкой линией, в крайних своих частях сливающейся с жирной.

Найдем аппроксимирующие прямые, являющиеся асимптотами функции $\ln K(\omega)$:

при $\omega T \ll 1 \quad \ln K(\omega) = 0;$

при $\omega T \gg 1 \quad \ln K(\omega) = -\ln \omega T.$

Прямые пересекаются при $\omega T=1$, т. е. $\omega = \frac{1}{T}$.

Уравнения аппроксимирующих прямых, следовательно, будут иметь вид:

$$1) \ln K(\omega) = 0 \quad \left(0 < \omega \leq \frac{1}{T}\right); \quad 2) \ln K(\omega) = -\ln \omega T \quad \left(\frac{1}{T} \leq \omega < \infty\right).$$

На рис. Р.1.6 аппроксимирующие отрезки изображены жирными линиями.

Наибольшее расхождение Δ имеет место при $\omega T=1$. Так как $\ln \sqrt{2} = 0,342$, наибольшее расхождение Δ_{\max} равно:

$$|\Delta_{\max}| = 0,342 \text{ неп} \approx 3 \text{ дб}.$$

● 1.35. Находим $\ln K(\omega)$:

$$\ln K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \cdot \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}} = -\ln \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} - \ln \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}.$$

Каждый член ЛАХ аппроксимируем так же, как это было сделано в задаче 1.34. Общий результат показан на рис. Р.1.7 жирной линией, а каждого из членов — тонкими линиями.

● 1.37. Выражение комплексного коэффициента передачи

$$K(i\omega) = \frac{i\omega L}{R + i\omega L} = \frac{i\omega T}{1 + i\omega T} \quad \left(T = \frac{L}{R}\right)$$

представим в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$\begin{aligned} K(i\omega) &= K_1(\omega) + i K_2(\omega) = \\ &= \frac{\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2} + i \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}. \end{aligned}$$

Для нахождения зависимости $K_2 = f(K_1)$ выразим при помощи уравнения

$$K_1 = \frac{\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}$$

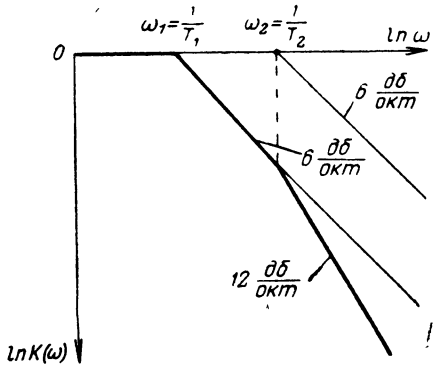


Рис. Р.1.7

ωT через K_1 и подставим в выражение для K_2 .

Решив уравнение, найдем

$$\omega T = \pm \sqrt{\frac{K_1}{1 - K_1}};$$

так как $\omega > A$ и $T > 0$, сохраняем знак «плюс». Отметим также, что при всех частотах должно соблюдаться неравенство $0 < K_1 < 1$.

Подставив значение

$$\omega T = \sqrt{\frac{K_1}{1 - K_1}}$$

в выражение для K_2 , получим

$$K_2 = \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \sqrt{K_1(1 - K_1)}.$$

На рис. Р.1.8 выполнено построение кривой годографа $K_2 = f(K_1)$; там же для сравнения показаны графики характеристик $K(\omega)$ и $\varphi(\omega)$.

● 1.39. В данном случае

$$Z(i\omega) = R + i\omega L$$

или

$$N(i\omega) = \frac{Z(i\omega)}{R} = 1 + i\omega T \quad \left(T = \frac{L}{R}\right).$$

Годограф представляется вертикальной линией, проходящей через точку 1, 0 (см. рис. P.1.9).

● 1.40. Раскрыв скобки, получим

$$N(i\omega) = 1 - \omega^2 T_1^2 + i\omega T_1 \left(1 + \frac{T_2}{T_1}\right).$$

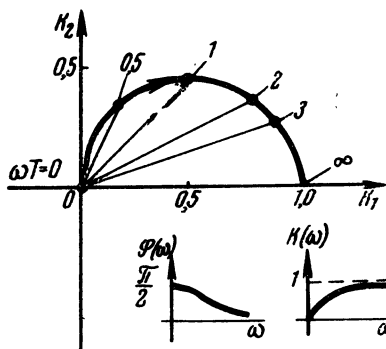


Рис. P.1.8

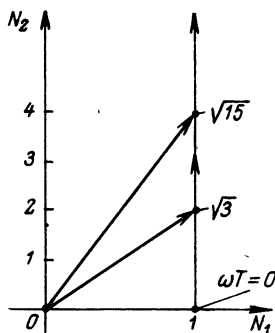


Рис. P.1.9

Для $T_2 = T_1$ уравнение годографа будет иметь вид

$$N_2 = 2\sqrt{1 - N_1} \quad (N_1 \leq 1).$$

Для $T_2 = 3T_1$

$$N_2 = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - N_1} \quad (N_1 \leq 1).$$

Кривые годографов изображены на рис. P.1.10.

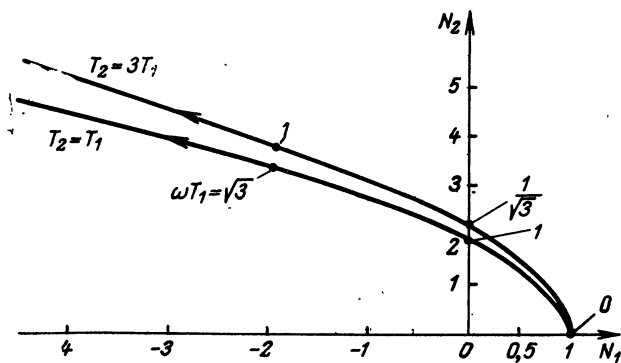


Рис. P.1.10

При $T_1 = T_2 = 0$ годограф изображается точкой 1, 0.

● 1.41 В выражении комплексного коэффициента передачи

$$N(i\omega) = \frac{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}}{\frac{1}{i\omega C}}$$

отделим вещественную и мнимую части:

$$\begin{aligned} N(i\omega) &= 1 - \omega^2 LC + i\omega CR = 1 - \omega^2 \frac{L}{R} RC + i\omega CR = \\ &= 1 - \omega^2 T_2 T_1 + i\omega T_1 = 1 - \omega^2 T_1^2 \frac{T_2}{T_1} + i\omega T_1. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{L}{R \cdot RC} = \frac{\left(\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2}{R^2} = \frac{\rho^2}{R^2}.$$

По условию $\frac{\rho}{R} = 1$ и $\frac{\rho}{R} = 4$.

Для первого случая

$$N_1 = 1 - \omega^2 T_1^2; \quad \omega T_1 = \sqrt{1 - N_1}$$

и уравнение годографа

$$N_2 = \sqrt{1 - N_1} \quad (N_1 \leq 1).$$

Для второго случая

$$N_1 = 1 - 16\omega^2 T_1^2; \quad \omega T_1 = \frac{1}{4} \sqrt{1 - N_1}$$

и уравнение годографа

$$N_2 = \frac{1}{4} \sqrt{1 - N_1} \quad (N_1 \leq 1).$$

Графики годографов даны на рис. P.1.11.

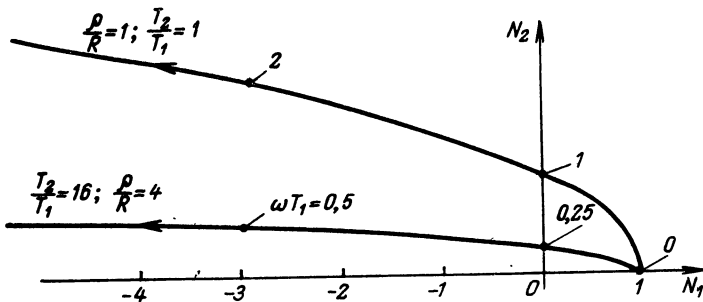


Рис. P.1.11

1.43. Раскрывая скобки, получаем

$$N(i\omega) = 1 - \omega^2 (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) + i[\omega(T_1 + T_2 + T_3) - \omega^3 T_1 T_2 T_3],$$

$$N_1 = 1 - \omega^2 T_1^2 \left(\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_3}{T_1} \right);$$

$$N_2 = \omega T_1 \left[\left(1 + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_1} \right) - \omega^2 T_1^2 \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_3}{T_1} \right].$$

Из первого уравнения следует

$$\omega T_1 = \sqrt{\frac{1 - N_1}{\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_3}{T_1}}} \quad (N_1 \leq 1).$$

Вводя найденное значение ωT_1 , получаем уравнение годографа

$$N_2 = \sqrt{\frac{1 - N_1}{\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_3}{T_1}}} \left[\left(1 + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_1} \right) - \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_3}{T_1} \frac{1 - N_1}{\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_3}{T_1}} \right].$$

Для условия $T_1 = T_2 = T_3 = T$ получаем

$$N_2 = \sqrt{\frac{1 - N_1}{3}} \left(3 - \frac{1 - N_1}{3} \right).$$

График, построенный по последнему уравнению, дан на рис. Р.1.12

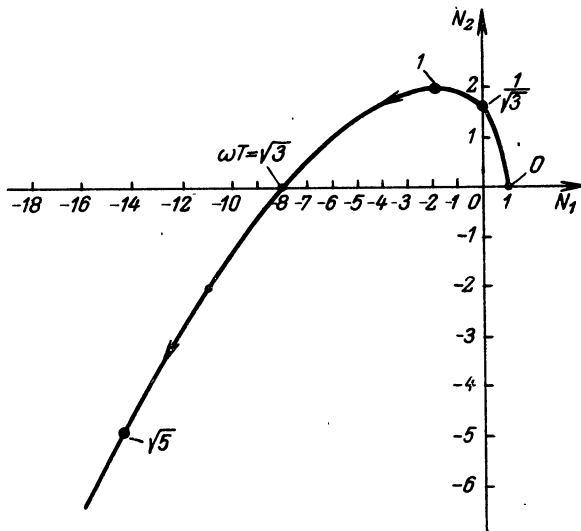


Рис. Р.1.12

2.

● 2.1. Составляем схемы «опытов» холостого хода и короткого замыкания (рис. P.2.1 а, б).

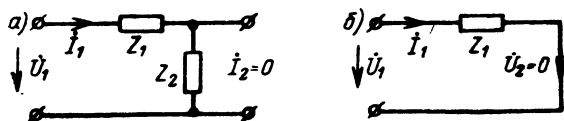


Рис. P. 2.1

Непосредственно по схемам составляем очевидные равенства:
 холостой ход: короткое замыкание:

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \dot{i}_1 Z_2; & \dot{U}_1 &= \dot{i}_2 Z_1; \\ \dot{U}_1 &= \dot{i}_1 (Z_1 + Z_2) = \frac{\dot{U}_2}{Z_2} (Z_1 + Z_2); & \dot{i}_1 &= \dot{i}_2. \end{aligned}$$

Сопоставляя эти равенства с равенствами (2.5) и (2.6), сразу получаем:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}; \\ A_{12} &= Z_1; \\ A_{21} &= \frac{1}{Z_2}; \\ A_{22} &= 1. \end{aligned}$$

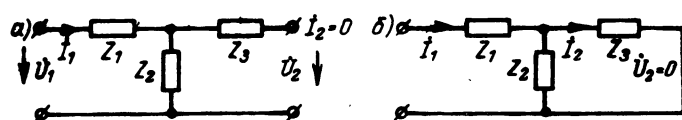


Рис. P.2.2

● 2.2. Составляем схемы «опытов» холостого хода и короткого замыкания (рис. P.2.2а, б).

Непосредственно по схемам составляем очевидные равенства:
 холостой ход: короткое замыкание:

$$\dot{U}_2 = \dot{i}_1 Z_2; \quad (1) \quad \dot{U}_1 = \dot{i}_1 \left(Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \right); \quad (3)$$

$$\dot{U}_1 = \dot{i}_1 (Z_1 + Z_2) = \frac{\dot{U}_2}{Z_2} (Z_1 + Z_2); \quad (2) \quad \dot{i}_2 Z_3 = \dot{U}_1 - \dot{i}_1 Z_1. \quad (4)$$

Равенства (1) и (2) при сопоставлении с равенствами (2.5) дают возможность сразу определить коэффициенты A_{11} и A_{21} :

$$A_{11} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}; \quad A_{21} = \frac{1}{Z_2}.$$

Для определения коэффициентов A_{12} и A_{22} нужно равенства (3) и (4) привести к виду, соответствующему равенствам (2.6). Это легко сделать, определив \dot{U}_1 из (4) и подставив его в (3), а затем \dot{i}_1 из (3) и подставив его в (4). Тогда получим равенства:

$$\dot{i}_2 Z_3 + \dot{i}_1 Z_1 = \dot{i}_1 \left(Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \right); \quad \dot{i}_2 Z_3 = \dot{U}_1 - Z_1 \frac{\dot{U}_1}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}},$$

которые легко приводятся к виду, соответствующему (2.6):

$$i_2 = i_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}; \quad (5)$$

$$i_2 = \dot{U}_1 \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}. \quad (6)$$

Сопоставляя последние равенства с равенствами (2.6), получаем:

$$A_{12} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2}; \quad A_{22} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2}.$$

● 2.4. По формулам табл. 2.1 получаем:

$$Z_{11} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \frac{Z_2}{1} = Z_1 + Z_2;$$

$$Z_{12} = -\frac{1}{A_{21}} = -Z_2;$$

$$Z_{21} = \frac{1}{A_{21}} = Z_2;$$

$$Z_{22} = -\frac{A_{22}}{A_{21}} = -Z_2;$$

$$Y_{11} = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{1}{Z_1};$$

$$Y_{12} = -\frac{1}{A_{12}} = -\frac{1}{Z_1};$$

$$Y_{21} = \frac{1}{A_{12}} = \frac{1}{Z_1};$$

$$Y_{22} = -\frac{A_{11}}{A_{12}} = -\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2};$$

$$H_{11} = \frac{A_{12}}{A_{22}} = Z_1;$$

$$H_{12} = \frac{1}{A_{22}} = 1;$$

$$H_{21} = \frac{1}{A_{22}} = 1;$$

$$H_{22} = -\frac{A_{21}}{A_{22}} = -Z_2;$$

$$F_{11} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{1}{Z_1 + Z_2};$$

$$F_{12} = \frac{1}{A_{11}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2};$$

$$F_{21} = \frac{1}{A_{11}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2};$$

$$F_{22} = -\frac{A_{12}}{A_{11}} = -\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2};$$

$$B_{11} = A_{22} = 1;$$

$$B_{12} = -A_{12} = -Z_1;$$

$$B_{21} = -A_{21} = -\frac{1}{Z_2};$$

$$B_{22} = A_{11} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}.$$

● 2.6. Из табл. 2.3 для данной схемы (поз. 10) находим:

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}; \quad A_{12} = Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2}; \quad A_{21} = \frac{1}{Z_2}; \quad A_{22} = 1 + \frac{Z_3}{Z_2}.$$

В данном случае

$$Z_1 = i 1000 \text{ ом}; \quad Z_2 = (100 + i 500) \text{ ом}; \quad Z_3 = 1000 \text{ ом}.$$

Подставляя в формулы для коэффициентов эти значения сопротивлений, получаем:

$$A_{11} = 1 + \frac{i 1000}{100 + i 500} = 1 + \frac{i 10 (1 - i 5)}{1 + 5^2} = 2,92 + i 0,385;$$

$$A_{12} = i 1000 + 1000 + \frac{i 1000 \cdot 1000}{100 + i 500} = 2920 + i 1385;$$

$$A_{21} = \frac{1}{100 + i 500} = \frac{1}{2600} - i \frac{5}{2600};$$

$$A_{22} = 1 + \frac{1000}{100 + i 500} = 1,385 - i 1,92.$$

Проверим соотношение $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$:

$$(2,92 + i 0,385)(1,385 - i 1,92) - (2920 + i 1385) \left(\frac{1}{2600} - i \frac{5}{2600} \right) \approx 1.$$

Равенство удовлетворяется.

- 2.8. По табл. 2.3 (поз. 3) находим:

$$A_{11} = \pm \frac{Z_1}{Z_M}; \quad A_{12} = \pm \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_M};$$

$$A_{21} = \pm \frac{1}{Z_M}; \quad A_{22} = \pm \frac{Z_2}{Z_M}.$$

Подготовим необходимые для расчета данные:

$$X_1 = \omega L_1 = 2\pi f L_1 = 2\pi \cdot 159 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 100 \text{ ом};$$

$$X_2 = \omega L_2 = 2\pi f L_2 = 2\pi \cdot 159 \cdot 10^3 \cdot 400 \cdot 10^{-6} = 400 \text{ ом};$$

$$M = K \sqrt{L_1 L_2} = 0,1 \sqrt{100 \cdot 400} = 0,1 \cdot 2 \cdot 10^2 = 20 \text{ мкГн, } ^1)$$

$$X_M = \omega M = 2\pi \cdot 159 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = 20 \text{ ом};$$

$$Z_1 = (10 + i 100) \text{ ом}; \quad Z_2 = (40 + i 400) \text{ ом}; \quad Z_M = i 20 \text{ ом}.$$

Рассчитаем коэффициенты:

$$A_{11} = \frac{10 + i 100}{i 20} = 5 - i 0,5;$$

$$A_{12} = \frac{(10 + i 100)(40 + i 400) - (i 20)^2}{i 20} = 400 - i 1960;$$

$$A_{21} = \frac{1}{i 20} = -i 0,05;$$

$$A_{22} = \frac{40 + i 400}{i 20} = 20 - i 2.$$

- 2.10. В данном случае

$$Z_1 = i \omega L = i 2\pi f L = i 2\pi \cdot 500 \cdot 100 \cdot 10^{-3} = i 314 \text{ ом}; \quad Z_2 = R = 100 \text{ ом}.$$

Находим коэффициенты A по формулам (поз. 7, табл. 2.3):

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 + \frac{i 314}{100} = 1 + i 3,14;$$

$$A_{12} = Z_1 = i 314; \quad A_{21} = \frac{1}{Z_2} = 0,01; \quad A_{22} = 1.$$

Коэффициенты Z и Y находим по ф-лам табл. 2.1:

$$Z_{11} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{1 + i 3,14}{0,01} = 100(1 + i 3,14);$$

$$Z_{12} = -\frac{1}{A_{21}} = -100;$$

¹⁾ Выбираем для M знак «плюс».

$$\begin{aligned}
 Z_{21} &= \frac{1}{A_{21}} = 100; \quad Z_{22} = -\frac{A_{22}}{A_{21}} = -\frac{1}{0,01} = -100; \\
 Y_{11} &= \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{1}{i314} = -i\frac{1}{314}; \\
 Y_{12} &= -\frac{1}{A_{12}} = -\frac{1}{i314} = i\frac{1}{314}; \\
 Y_{21} &= \frac{1}{A_{12}} = \frac{1}{i314} = -i\frac{1}{314}; \\
 Y_{22} &= -\frac{A_{11}}{A_{12}} = -\frac{1 + i3,14}{i314} = -\frac{1}{100} + i\frac{1}{314}.
 \end{aligned}$$

● 2.12. Для симметричного четырехполюсника $A_{11} = A_{22}$, следовательно, определению подлежат три коэффициента: A_{11} , A_{12} и A_{21} . Для определения трех неизвестных нужно располагать тремя уравнениями.

Эти уравнения можно составить из выражений (2.12) для входных сопротивлений:

$$Z_{xx} = \frac{A_{11}}{A_{21}}; \quad (1)$$

$$Z_{кз} = \frac{A_{12}}{A_{11}} \quad (2)$$

и из соотношения (2.10) между коэффициентами

$$A_{11}^2 - A_{12}A_{21} = 1. \quad (3)$$

Решим системы (1), (2) и (3) относительно A_{11} , A_{12} и A_{21} . Разделив (1) на (2), находим

$$\frac{Z_{xx}}{Z_{кз}} = \frac{A_{11}^2}{A_{21}A_{12}},$$

откуда получаем вспомогательное равенство

$$A_{21}A_{12} - \frac{Z_{кз}}{Z_{xx}} A_{11}^2 = 0. \quad (4)$$

Подставляя последнее равенство в (3) и решая его относительно A_{11} , получаем

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{xx}}{Z_{xx} - Z_{кз}}}. \quad (5)$$

Подставляя значение A_{11} в (1), получаем выражение для A_{21} :

$$A_{21} = \frac{1}{\sqrt{Z_{xx}(Z_{xx} - Z_{кз})}}. \quad (6)$$

Подставляя значение A_{11} в (2), находим выражение для A_{12} :

$$A_{12} = Z_{кз} \sqrt{\frac{Z_{xx}}{Z_{xx} - Z_{кз}}}. \quad (7)$$

Формулы (5), (6) и (7) представляют собой решение поставленной задачи.

● 2.13. Находим входное сопротивление для режимов холостого хода и короткого замыкания (рис. P.2.3а и б):

$$Z_{xx} = Z_1 + Z_2;$$

$$Z_{кз} = Z_1 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Подставляя значения Z_{xx} и $Z_{кз}$ в ф-лы (5), (6) и (7) предыдущей задачи, получаем:

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 + Z_2 - Z_1 - \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}}} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2};$$

$$A_{12} = A_{11} Z_{кз} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \left(Z_1 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) = \frac{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2}{Z_2};$$

$$A_{21} = \frac{A_{11}}{Z_{xx}} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \frac{1}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{Z_2}.$$

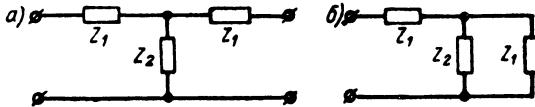


Рис. P.2.3

● 2.14. Новые уравнения в силу изменения направлений токов (рис. 2.16б) примут вид:

$$\dot{U}_1 = A_{11} \dot{U}_2 - A_{12} \dot{I}_2, \quad (1)$$

$$-\dot{I}_1 = A_{21} \dot{U}_2 - A_{22} \dot{I}_2. \quad (2)$$

Решим полученные уравнения относительно \dot{U}_2 и \dot{I}_2 с тем, чтобы найти

$$Z_{вых} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_2}:$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1 + A_{12} \dot{I}_2}{A_{11}}. \quad (3)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{A_{21} \dot{U}_2 + \dot{I}_1}{A_{22}}. \quad (4)$$

Подставив в ур-ние (3) значение \dot{I}_2 , найдем

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{A_{11}} + \frac{A_{12}}{A_{11}} \cdot \frac{A_{21}}{A_{22}} \dot{U}_2 + \frac{A_{12}}{A_{11}} \cdot \frac{1}{A_{22}} \dot{I}_1,$$

или

$$\dot{U}_2 \left(1 - \frac{A_{12} A_{21}}{A_{11} A_{22}} \right) = \frac{1}{A_{11}} \dot{U}_1 + \frac{A_{12}}{A_{11} A_{22}} \dot{I}_1.$$

Решим последнее уравнение относительно \dot{U}_2 , приняв во внимание, что $A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 1$:

$$\dot{U}_2 = A_{22} \dot{U}_1 + A_{12} \dot{I}_1. \quad (5)$$

Теперь подставим (5) в (4):

$$\dot{i}_2 = \frac{A_{21}}{A_{22}}(A_{22}\dot{U}_1 + A_{12}\dot{i}_1) + \frac{\dot{I}_1}{A_{22}}$$

или

$$\dot{i}_2 = A_{21}\dot{U}_1 + \left(\frac{A_{21}A_{12}}{A_{22}} + \frac{1}{A_{22}}\right)\dot{I}_1.$$

Так как $A_{21}A_{12} + 1 = A_{11}A_{22}$, можно окончательно записать

$$\dot{i}_2 = A_{21}\dot{U}_1 + A_{11}\dot{I}_1. \quad (6)$$

Сравнив ур-ния (5) и (6) с основными уравнениями четырехполюсника, заметим, что при замене входных зажимов выходными коэффициентами A_{11} и A_{22} меняются местами. Для симметричного четырехполюсника, у которого $A_{11} = A_{22}$, перемена зажимов не изменяет основных уравнений.

Выходное сопротивление схемы будет равно

$$Z_{\text{вых}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{i}_2} = \frac{A_{22}\dot{U}_1 + A_{12}\dot{i}_1}{A_{21}\dot{U}_1 + A_{11}\dot{i}_1} = Z_1 \frac{A_{22} + \frac{A_{12}}{Z_1}}{A_{21}Z_1 + A_{11}}.$$

При коротком замыкании $Z_1 = 0$

$$Z_{\text{вых.кз}} = \frac{A_{12}}{A_{11}}. \quad (7)$$

При холостом ходе $Z_1 = \infty$

$$Z_{\text{вых.хх}} = \frac{A_{22}}{A_{21}}.$$

● 2.15. Для нахождения четырех неизвестных нужно иметь четыре уравнения. Три из них использовались в аналогичной задаче 2.12:

$$Z_{\text{хх}} = \frac{A_{11}}{A_{12}}; \quad A_{\text{кз}} = \frac{A_{12}}{A_{22}}; \quad A_{11}A_{22} = A_{12}A_{21} = 1.$$

Четвертое уравнение возьмем из задачи 2.14 [ур-ние (7)]:

$$Z_{\text{вых.кз}} = \frac{A_{12}}{A_{11}}.$$

Решив систему уравнений (по аналогии с задачей 2.2), получим:

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{\text{хх}}Z_{\text{кз}}}{Z_{\text{вых.кз}}(Z_{\text{хх}} - Z_{\text{кз}})}}; \quad A_{21} = \sqrt{\frac{Z_{\text{кз}}}{Z_{\text{вых.кз}}Z_{\text{хх}}(Z_{\text{хх}} - Z_{\text{кз}})}};$$

$$A_{12} = \sqrt{\frac{Z_{\text{вых.кз}}Z_{\text{хх}}Z_{\text{кз}}}{Z_{\text{хх}} - Z_{\text{кз}}}}; \quad A_{22} = \sqrt{\frac{Z_{\text{вых.кз}}Z_{\text{хх}}}{Z_{\text{кз}}(Z_{\text{хх}} - Z_{\text{кз}})}}.$$

● 2.18. Расчет входного сопротивления ведем по ф-ле (2.23) табл. 2.2:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{A_{11}Z_2 + A_{12}}{A_{21}Z_2 + A_{22}}.$$

Воспользовавшись значениями коэффициентов A , найденными в задаче 2.10,

$$A_{11} = 1 + i3,14; \quad A_{12} = i314; \quad A_{21} = 0,01; \quad A_{22} = 1,$$

и подставив их в формулу для $Z_{\text{вх}}$ с учетом того, что $Z_2 = 100 \text{ ом}$, получим

$$Z_{\text{вх}} = \frac{(1 + i3,14)100 + i314}{0,01 \cdot 100 + 1} = (50 + i314) \text{ ом}.$$

- 2.20. Из табл. 2.2 находим интересующую нас ф-лу (2.19) при $Z_2 = \infty$:

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{A_{11}}.$$

Так как для данной схемы $A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}$, то

$$\frac{1}{A_{11}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{5 + i5}{i10 + 5 + i5} = \frac{2 - i}{5};$$

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\sqrt{2^2 + 1}}{5} = 0,447.$$

Напряжение U_2 равно

$$U_2 = 0,447 \cdot 1 = 0,447 \text{ в.}$$

Сдвиг фаз между \dot{U}_2 и \dot{U}_1 :

$$\operatorname{tg} \varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1} = -\frac{1}{2}; \quad \varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1} \approx -26,5^\circ.$$

- 2.22. Нужное ур-ние (2.19) имеет вид

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{A_{11}}.$$

Коэффициент A_{11} находим из табл. 2.3 (поз. 14):

$$A_{11} = \frac{(Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_5) + Z_2 Z_3}{Z_3 Z_5} = \frac{(80 + 20)(100 + 100) + 80 \cdot 20}{20 \cdot 100} = 10,8.$$

Следовательно,

$$U_2 = 10 \cdot \frac{1}{10,8} = 0,925 \text{ в.}$$

- 2.23. Из табл. 2.2 выбираем нужное ур-ние (2.18), которое совпадает с ур-нием (2.21) той же таблицы (так как внутреннее сопротивление генератора равно нулю):

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_1 \frac{1}{A_{11} Z_H + A_{12}}.$$

Рассчитаем сопротивления:

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 0,1} = \frac{10^2}{2\pi} \text{ ом};$$

$$\omega L = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \frac{10}{10^3} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ ом};$$

$$Z_1 = Z_3 = -i \frac{10^2}{2\pi} \text{ ом};$$

$$Z_2 = i 2\pi \cdot 10^3 \text{ ом}.$$

Коэффициенты A_{11} и A_{12} :

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 - \frac{i \frac{10^2}{2\pi}}{i 2\pi \cdot 10^3} \approx 1;$$

$$A_{12} = 2Z_1 + \frac{Z_1^2}{Z_2} = Z_1 \left(2 + \frac{Z_1}{Z_2} \right) = -i \frac{10^2}{2\pi} \left(2 - \frac{1}{4\pi^2 10} \right) \approx -i \frac{10^2}{\pi}$$

Находим ток \dot{I}_2 :

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_1 \frac{1}{A_{11}Z_H + A_{12}} = 10 \frac{1}{1 \cdot 2,72 - i 31,8}$$

Модуль тока I_2 :

$$I_2 = \frac{10}{\sqrt{2,72^2 + 31,8^2}} = 0,314 \text{ а.}$$

● 2.25. Из табл. 2.2 подбираем соответствующие выражения (2.16, 2.18 и 2.17), имея в виду, что при $Z_{вн} = 0$ $\mathcal{E} = \dot{U}_1$. Эти выражения имеют вид:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \frac{A_{21}Z_2 + A_{22}}{H_a}; \quad \dot{I}_2 = \dot{U}_1 \frac{1}{H_a}; \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_1 \frac{Z_2}{H_a}; \quad H_a = A_{11}Z_2 + A_{12}$$

Найдем коэффициенты A :

$$A_{11} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{100 + 200}{200} = 1,5;$$

$$A_{12} = \frac{R_1^2 + 2R_1R_2}{R_2} = \frac{100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 200}{200} = 250;$$

$$A_{21} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{200} = 0,005; \quad A_{22} = A_{11} = 1,5.$$

Найдем сопротивление передачи H_a :

$$H_a = A_{11}Z_2 + A_{12} = 1,5 \cdot 200 + 250 = 550 \text{ ом.}$$

Подставив найденные значения в расчетные формулы для I_1 , I_2 и U_2 , получим:

$$I_1 = U_1 \frac{A_{21}Z_2 + A_{22}}{H_a} = 50 \frac{\frac{1}{200} 200 + 1,5}{550} = 0,227 \text{ а} = 227 \text{ ма};$$

$$I_2 = U_1 \frac{1}{H_a} = 50 \frac{1}{550} = 0,091 \text{ а} = 91 \text{ ма};$$

$$U_2 = U_1 \frac{Z_2}{H_a} = 50 \frac{200}{550} \approx 18,28 \text{ в.}$$

● 2.23. Рассмотрим схему рис. 2.29а. Результирующая матрица A будет равна произведению матрицы A , (поз. 2, табл. 2.3) и матрицы A , поз. 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\pm Z_M} \begin{bmatrix} Z_1 & Z_1 Z_2 - Z_M^2 \\ 1 & Z_2 \end{bmatrix}.$$

После перемножения (приняв для определенности перед Z_M знак «плюс») получим результирующую матрицу:

$$\begin{bmatrix} \frac{Z_1}{Z_M} & \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_M} \\ \frac{Y Z_1 + 1}{Z_M} & \frac{Y}{Z_M} (Z_1 Z_2 - Z_M^2) + \frac{Z_2}{Z_M} \end{bmatrix}.$$

Матрица A для Т-образной схемы (поз. 10, табл. 2.3) с учетом обозначений рис. 2.29а имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_b}{Z_c} & \frac{Z_a Z_b + Z_a Z_c + Z_b Z_c}{Z_a} \\ \frac{1}{Z_a} & \frac{Z_a + Z_c}{Z_a} \end{bmatrix}$$

Приравняв соответствующие коэффициенты обеих матриц, получаем систему, из которой можно выразить искомые параметры через известные.

Окончательные формулы имеют вид:

$$Z_a = \frac{Z_M}{1 + Y Z_1}; \quad Z_c = \frac{Z_2 - Z_M + Y (Z_1 Z_2 - Z_M^2)}{1 + Y Z_1};$$

$$Z_b = \left(\frac{Z_1' - Z_M}{Z_M} \right) \frac{Z_2 - Z_M + Y (Z_1 Z_2 - Z_M^2)}{1 + Y Z_1}.$$

Аналогично для схемы рис. 2.29б получаем:

$$Z_a = \frac{Z_1 Z_2 + Z Z_2 - Z_M^2}{Z_M}; \quad Z_c = \frac{Z_1 Z_2 + Z Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z - Z_M}; \quad Z_b = \frac{Z_1 Z_2 + Z Z_2 - Z_M^2}{Z_2 - Z_M}.$$

● 2.35. Рассматриваем заданный четырехполюсник как каскадное соединение двух элементарных четырехполюсников (рис. Р.2.4), матрицы которых известны.

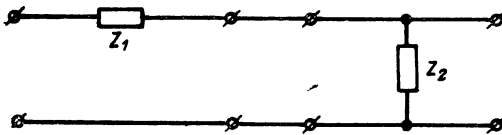


Рис. Р. 2.4

Пользуясь правилом (2.31) и таблицей матриц (табл. 2.3), находим:

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + Z_1 \cdot \frac{1}{Z_2} & 1 \cdot 0 + Z_1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{Z_2} & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что полученная матрица соответствует матрице схемы поз. 7 табл. 2.3.

● 2.36. Рассматриваем фильтр нижних частот как каскадное соединение (рис. Р.2.5) трех четырехполюсников, матрицы A которых известны. Искомая матрица будет определяться произведением трех матриц:

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} 1 & i \omega L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i \omega C & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & i \omega L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 + i \omega L \cdot i \omega C & 1 \cdot 0 + i \omega L \\ 0 + i \omega C & 0 + 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & i \omega L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} (1 - \omega^2 LC) \cdot 1 + i \omega L \cdot 0 & (1 - \omega^2 LC) i \omega L + i \omega L \\ i \omega C + 1 \cdot 0 & -\omega^2 LC + 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 LC & 2i \omega L - i \omega^3 L^2 C \\ i \omega C & 1 - \omega^2 LC \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

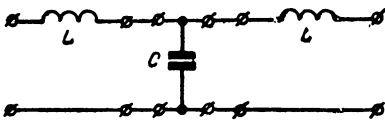


Рис. Р.2.5

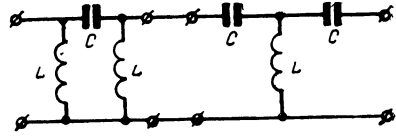


Рис. Р.2.6

● 2.37. Из табл. 2.3 находим матрицы A_1 для П-образного фильтра (рис. Р.2.6) и A_2 для Т-образного фильтра:

$$[A_1] = \begin{bmatrix} \frac{i \omega L + \frac{1}{i \omega C}}{i \omega L} & \frac{1}{i \omega C} \\ \frac{\frac{1}{i \omega C} + 2i \omega L}{(i \omega L)^2} & \frac{i \omega L + \frac{1}{i \omega C}}{i \omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} & \frac{1}{i \omega C} \\ \frac{2\omega^2 LC - 1}{i \omega^3 L^2 C} & \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \end{bmatrix},$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{i \omega C} + i \omega L}{i \omega L} & \frac{2 \frac{1}{i \omega C} i \omega L + \frac{1}{(i \omega C)^2}}{i \omega L} \\ \frac{1}{i \omega L} & \frac{\frac{1}{i \omega C} + i \omega L}{i \omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} & \frac{2\omega^2 LC - 1}{i \omega^3 C^2 L} \\ \frac{1}{i \omega L} & \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \end{bmatrix}$$

Общая матрица A равна матричному произведению двух матриц A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned}
 [A] &= [A_1] \cdot [A_2] = \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} & \frac{1}{i \omega C} \\ \frac{2\omega^2 LC - 1}{i \omega^3 L^2 C} & \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} & \frac{2\omega^2 LC - 1}{i \omega^3 C^2 L} \\ \frac{1}{i \omega L} & \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \cdot \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} + \frac{1}{i \omega C} \cdot \frac{1}{i \omega L} & \dots \\ \frac{2\omega^2 LC - 1}{i \omega^3 L^2 C} \cdot \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} + \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \cdot \frac{1}{i \omega L} & \dots \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \cdot \frac{2\omega^2 LC - 1}{i \omega^3 C^2 L} + \frac{1}{i \omega C} \cdot \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \\
 & \frac{2\omega^2 LC - 1}{i \omega^3 C^2 L} \cdot \frac{2\omega^2 LC - 1}{i \omega^3 C^2 L} + \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC} \cdot \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC}
 \end{aligned} \right] = \\
 & = \left[\begin{aligned}
 & \frac{(\omega^2 LC - 1)^2 - \omega^2 LC}{(\omega^2 LC)^2} \\
 & \frac{(2\omega^2 LC - 1)(\omega^2 LC - 1) + (\omega^2 LC - 1)\omega^2 LC}{i \omega^3 L^2 C \cdot \omega^2 LC} \\
 & \frac{(\omega^2 LC - 1)(2\omega^2 LC - 1) + (\omega^2 LC - 1)\omega^2 LC}{i \omega^3 C^2 L \cdot \omega^2 LC}
 \end{aligned} \right] = \\
 & \frac{(2\omega^2 LC - 1)^2 - (\omega^2 LC - 1)^2 \omega^2 LC}{i \omega^3 L^2 C \cdot i \omega^3 LC^2} \\
 & = \frac{1}{(\omega^2 LC)^2} \left[\begin{array}{cc}
 (\omega^2 LC - 1)^2 - \omega^2 LC & \frac{(\omega^2 LC - 1)(3\omega^2 LC - 1)}{i \omega C} \\
 \frac{(\omega^2 LC - 1)(3\omega^2 LC - 1)}{i \omega L} & \frac{(\omega^2 LC - 1)^2 \omega^2 LC - (2\omega^2 LC - 1)^2}{\omega^2 LC}
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

● 2.38. В данном случае удобно искать матрицу Y , так как, разбив общую схему на два четырехполюсника (рис. P.2.7), получаем согласно правилу 2.32

$$[Y] = [Y_1] + [Y_2].$$

Из табл. 2.3 находим:

$$[Y_1] = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2} & -\frac{Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2} \\ \frac{Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2} & -\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2} \end{bmatrix};$$

$$[Y_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} \\ \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} \end{bmatrix};$$

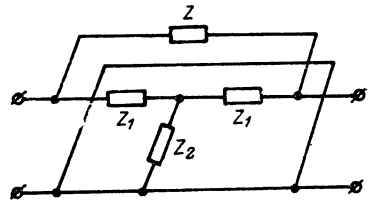


Рис. P.2.7

$$[Y] = [Y_1] + [Y_2] = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2} + \frac{1}{Z} & -\frac{Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2} - \frac{1}{Z} \\ \frac{Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2} + \frac{1}{Z} & -\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2} - \frac{1}{Z} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{ZZ_1(Z_1 + 2Z_2)} \begin{bmatrix} Z(Z_1 + Z_2) + Z_1(Z_1 + 2Z_2) & -ZZ_2 - Z_1(Z_1 + 2Z_2) \\ ZZ_2 + Z_1(Z_1 + 2Z_2) & -Z(Z_1 + Z_2) - Z_1(Z_1 + 2Z_2) \end{bmatrix}.$$

● 2.39. Будем рассматривать заданный четырехполюсник как каскадное соединение трех элементарных четырехполюсников; тогда легко будет определить общую матрицу A :

$$[A] = [A_1] \cdot [A_2] \cdot [A_3]$$

и по значениям коэффициентов матрицы A (по ф-лам табл. 2.1) найти коэффициенты Z .

В таблице матриц (табл. 2.3) находим:

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 & R_1 + \frac{1}{i\omega C_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[A_2] = \pm \frac{1}{i\omega M} \begin{bmatrix} i\omega L_1 & i\omega L_1 \cdot i\omega L_2 - (i\omega M)^2 \\ 1 & i\omega L_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \pm \begin{bmatrix} \frac{L_1}{M} & i\omega \left(\frac{L_1 L_2}{M} - M \right) \\ \frac{1}{i\omega M} & \frac{L_2}{M} \end{bmatrix};$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} 1 & R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Совершаем последовательное перемножение матриц, выбрав для матрицы A_2 знак «плюс»:

$$[A_1] \cdot [A_2] = \begin{bmatrix} 1 & R_1 + \frac{1}{i\omega C_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L_1}{M} & i\omega \left(\frac{L_1 L_2}{M} - M \right) \\ \frac{1}{i\omega M} & \frac{L_2}{M} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{L_1}{M} + \left(\frac{R_1}{i\omega L} - \frac{1}{\omega^2 M C_1} \right) & i\omega \left(\frac{L_1 L_2}{M} - M \right) + \frac{R_1 L_2}{M} + \frac{1}{i\omega C_1} \cdot \frac{L_2}{M} \\ 0 + \frac{1}{i\omega M} & \frac{L_2}{M} \end{bmatrix}.$$

Умножим теперь полученную матрицу на матрицу A_3 :

$$\begin{bmatrix} \frac{L_1}{M} + \frac{R_1}{i\omega M} - \frac{1}{\omega^2 M C_1} & i\omega \left(\frac{L_1 L_2}{M} - M \right) + \frac{R_1 L_2}{M} + \frac{1}{i\omega C_1} \cdot \frac{L_2}{M} \\ \frac{1}{i\omega M} & \frac{L_2}{M} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{M} + \frac{R_1}{i\omega M} - \frac{1}{\omega^2 M C_1} + 0 & \\ \frac{1}{i\omega M} + 0 & \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{L_1}{M} + \frac{R_1}{i\omega M} - \frac{1}{\omega^2 MC_1} \right) \left(R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \right) + i\omega \left(\frac{L_1 L_2}{M} - M \right) + \frac{R_1 L_2}{M} + \frac{L_2}{i\omega MC_1} \Bigg] =$$

$$\frac{R_2}{i\omega M} - \frac{1}{\omega^2 MC_2} + \frac{L_2}{M}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{i\omega M} \left(R_1 + i\omega L_1 + \frac{1}{i\omega C_1} \right) \\ \frac{1}{i\omega M} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{i\omega M} \left[\left(R_1 + i\omega L_1 + \frac{1}{i\omega C_1} \right) \left(R_2 + i\omega L_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \right) - \omega^2 M^2 \right]$$

$$\frac{1}{i\omega M} \left(R_2 + i\omega L_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \right)$$

Введя обозначения:

$$R_1 + i\omega L_1 + \frac{1}{i\omega C_1} = Z_1, \quad R_2 + i\omega L_2 + \frac{1}{i\omega C_2} = Z_2, \quad i\omega M = Z_M,$$

запишем общую матрицу в виде

$$[A] = \frac{1}{Z_M} \begin{bmatrix} Z_1 & Z_1 Z_2 - Z_M^2 \\ 1 & Z_2 \end{bmatrix}.$$

По формулам табл. 2.1 находим:

$$Z_{11} = \frac{A_{11}}{A_{21}}; \quad Z_{12} = -\frac{1}{A_{21}}; \quad Z_{21} = \frac{1}{A_{21}}; \quad Z_{22} = -\frac{A_{22}}{A_{21}}.$$

Подставляя значения коэффициентов A , окончательно получаем.

$$Z_{11} = Z_1; \quad Z_{12} = -Z_M; \quad Z_{21} = Z_M; \quad Z_{22} = -Z_2.$$

Полученный результат соответствует матрице поз. 3, табл. 2.3.

● 2.40. Общую матрицу A найдем как матричное произведение матриц A_1 и A_2 двух четырехполюсников (рис. 2.36), соединенных между собой каскадно; матрицы A_1 и A_2 найдем из табл. 2.3 (поз. 6 и 2):

$$[A_1] = \begin{bmatrix} -D & -\frac{1}{S} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix}.$$

Общая матрица A будет равна

$$[A] = [A_1] \cdot [A_2] = \begin{bmatrix} -D & -\frac{1}{S} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -D - \frac{1}{SZ} & 0 - \frac{1}{S} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{S} \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_i} - \frac{1}{Z} & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выражение для коэффициента усиления (рис. 2.36)

$$K = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$$

легко находится через коэффициент A_{11} [ф-ла (2.19), табл. 2.2]:

$$K = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{A_{11}}, \quad A_{11} = -\frac{1}{S} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{Z} \right) = -\frac{1}{S} \frac{R_i + Z}{R_i Z}.$$

Принимая во внимание, что $SR_i = \mu$, получаем

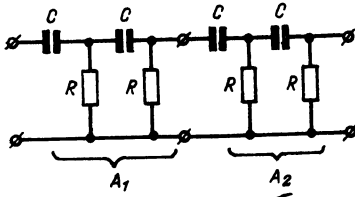


Рис. P.2.8

$$K = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = -\mu \frac{Z}{R_i + Z}.$$

Знак «минус» указывает на то, что напряжение \dot{U}_2 сдвинуто по отношению к \dot{U}_1 на 180° .

● 2.42. Представляем схему в виде каскадного соединения двух четырехполюсников (рис. P.2.8), матрицы A для которых известны (табл. 2.3, поз. 12):

$$[A_1] = [A_2] = \begin{bmatrix} \frac{R \left(R + \frac{1}{i\omega C} \right) + \frac{1}{i\omega C} \left(2R + \frac{1}{i\omega C} \right)}{2R} & \frac{2 \frac{R}{i\omega C} + \left(\frac{1}{i\omega C} \right)^2}{R} \\ \frac{2R + \frac{1}{i\omega C}}{R^2} & \frac{R + \frac{1}{i\omega C}}{R} \end{bmatrix}.$$

Согласно ф-ле (2.27) коэффициент A_{11} равен:

$$A_{11} = \left[\frac{R \left(R + \frac{1}{i\omega C} \right) + \frac{1}{i\omega C} \left(2R + \frac{1}{i\omega C} \right)}{R^2} \right]^2 + \frac{2 \frac{R}{i\omega C} + \left(\frac{1}{i\omega C} \right)^2}{R} \frac{2R + \frac{1}{i\omega C}}{R^2}.$$

Раскрывая скобки и совершая элементарные преобразования, получаем

$$A_{11} = \frac{\omega^4 C^4 R^4 - 15\omega^2 C^2 R^2 + 1 + i(7\omega CR - 10\omega^3 C^3 R^3)}{\omega^4 C^4 R^4}.$$

● 2.45. Исходная система:

$$\left. \begin{aligned} U_3 &= r_{11}I_3 + r_{12}I_K \\ U_K &= r_{21}I_3 + r_{22}I_K \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

По схеме рис. 2.41в имеем:

$$\left. \begin{aligned} U_3 &= I_3(r_3 + r_6) + I_K r_6 \\ U_K &= I_3(r_m + r_6) + I_K(r_K + r_6) \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Сопоставляя (1) и (2), получаем:

$$r_{11} = r_3 + r_6; \quad r_{12} = r_6; \quad r_{21} = r_m + r_6; \quad r_{22} = r_K + r_6.$$

- 2.46. Исходная система (2.3а):

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \\ I_2 &= Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{aligned} \right\}.$$

Удовлетворяющая этой системе эквивалентная схема изображена на рис. P.2.9.

- 2.47. Исходные системы:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 &= H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= F_{11}\dot{U}_1 + F_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= F_{21}\dot{U}_1 + F_{22}\dot{I}_2 \end{aligned} \right\}.$$

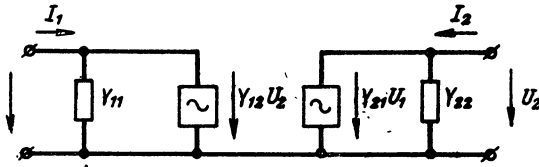


Рис. P.2.9

Эквивалентные схемы, соответствующие этим уравнениям, изображены на рис. P.2.10 (а и б).

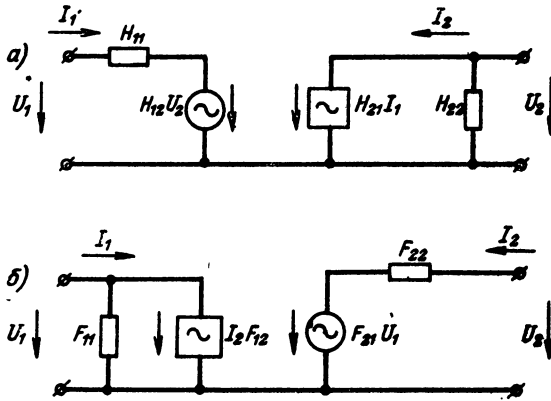


Рис. P.2.10

- 2.48. Из рис. P.2.11 на основании ф-л (2.29) непосредственно следует, что

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A''_{11} & A''_{12} \\ A''_{21} & A''_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

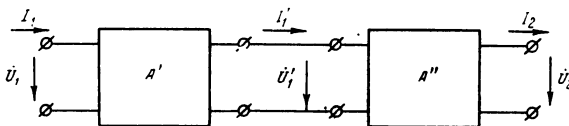


Рис. P.2.11

Задача состоит в установлении связи между матрицей-столбцом $\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix}$ и матрицей-столбцом $\begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$.

Подставляя из (2) в (1) значение матрицы-столбца, получаем

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A''_{11} & A''_{12} \\ A''_{21} & A''_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix},$$

чем и доказывается, что общая матрица A равна произведению частных матриц A_i при каскадном соединении четырехполюсников.

● 2.49. Воспользуемся уравнениями четырехполюсника (2.30) в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Задача состоит в определении коэффициентов Y для общей схемы рис. P.2.12.

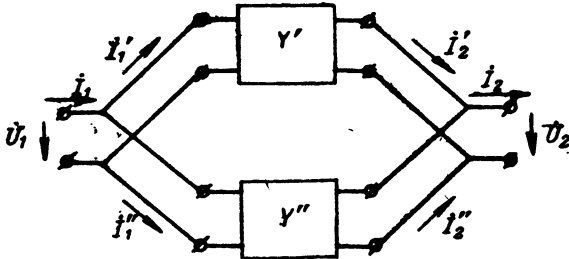


Рис. P.2.12

Из рис. P.2.12 видно, что

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1 \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Токи \dot{I}'_1 , \dot{I}''_1 , \dot{I}'_2 и \dot{I}''_2 можно выразить через параметры отдельных четырехполюсников при помощи выражений:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y''_{11} & Y''_{12} \\ Y''_{21} & Y''_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Сложим левые и правые части равенств (3) и (4):

$$\begin{bmatrix} \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1 \\ \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'_{11} + Y''_{11} & Y'_{12} + Y''_{12} \\ Y'_{21} + Y''_{21} & Y'_{22} + Y''_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Принимая во внимание равенство (2), получим

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y''_{11} & Y''_{12} \\ Y''_{21} & Y''_{22} \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Таким образом, доказано, что общая матрица Y параллельно соединенных четырехполюсников равна сумме матриц Y_i каждого четырехполюсника в отдельности.

● 2.50. Расчетные формулы берем из табл. 2.2. Во все эти формулы входят коэффициенты A общей схемы, в то время как мы располагаем только матрицами левого и правого четырехполюсников.

Подсчитаем коэффициенты A для каждого четырехполюсника в отдельности, а затем, пользуясь правилом каскадного соединения четырехполюсников, найдем общую матрицу.

Для левого четырехполюсника воспользуемся матрицей поз. 13, табл. 2.3:

$$[A_1] = \begin{bmatrix} \frac{Z_1(Z_1 + Z_2) + Z_2(2Z_1 + Z_2)}{Z_1^2 + Z_2(2Z_1 + Z_2)} & \frac{Z_2(2Z_1Z_2 + Z_1^2)}{Z_1^2 + Z_2(2Z_1 + Z_2)} \\ \frac{2Z_1 + Z_2}{Z_1^2 + Z_2(2Z_1 + Z_2)} & \frac{Z_1(Z_1 + Z_2) + Z_2(2Z_1 + Z_2)}{Z_1^2 + Z_2(2Z_1 + Z_2)} \end{bmatrix}.$$

Подставляя условия задачи, находим:

$$[A_1] = \frac{1}{500^2 + 1000(2 \cdot 500 + 100)} \begin{bmatrix} 500(500 + 1000) + 1000(2 \cdot 500 + 1000) & \\ & 2 \cdot 500 + 1000 \\ 1000(2 \cdot 500 \cdot 1000 + 25 \cdot 10^4) & \\ 500(500 + 1000) + 1000(2 \cdot 500 + 1000) & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,22 & 0,556 \cdot 10^3 \\ 0,889 \cdot 10^{-3} & 1,22 \end{bmatrix}.$$

Для правого четырехполюсника воспользуемся матрицей поз. 11 той же таблицы:

$$[A_2] = \frac{1}{Z_2 - Z_1} \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & 2Z_1Z_2 \\ 2 & Z_1 + Z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1000 - 500} \begin{bmatrix} 1000 + 500 & \\ 2 \cdot 1000 \cdot 500 & \\ 1000 + 500 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \cdot 10^3 \\ 4 \cdot 10^{-3} & 3 \end{bmatrix}.$$

Общая матрица A равна произведению матриц

$$\begin{aligned} [A] &= [A_1] \cdot [A_2] = \begin{bmatrix} 1,22 & 0,556 \cdot 10^3 \\ 0,889 \cdot 10^{-3} & 1,22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \cdot 10^3 \\ 4 \cdot 10^{-3} & 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3,66 + 0,556 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} & 1,22 \cdot 2 \cdot 10^3 + 0,556 \cdot 10^3 \cdot 3 \\ 0,889 \cdot 10^{-3} \cdot 3 + 1,22 \cdot 4 \cdot 10^{-3} & 0,889 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 + 1,22 \cdot 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 5,88 & 4,11 \cdot 10^3 \\ 7,55 \cdot 10^{-3} & 5,44 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для расчета по формулам табл. 2.2 целесообразно рассчитать вначале сопротивление передачи H_a , так как оно встречается почти во всех формулах:

$$H_a = A_{11}Z_2 + A_{12} = 5,88 \cdot 10^3 + 4,11 \cdot 10^3 = 9,99 \cdot 10^3 \text{ ом.}$$

Теперь последовательно найдем все необходимые величины:

1) входной ток [ф-ла (2.16)]

$$I_1 = U_1 \frac{A_2 Z_H + A_{22}}{H_a} = 100 \frac{7,55 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 + 5,44}{9,99 \cdot 10^3} = 0,13 \text{ а;}$$

2) выходной ток [ф-ла (2.18)]

$$I_2 = \frac{U_1}{H_a} = \frac{100}{9,99 \cdot 10^3} \approx 0,01 \text{ а;}$$

3) выходное напряжение [ф-ла (2.17)]

$$U_2 = U_1 \frac{Z_H}{H_a} = 100 \frac{1000}{9,99 \cdot 10^3} \approx 10 \text{ в;}$$

4) для нахождения U_a и I_a сначала определим входное сопротивление правого четырехполюсника с нагрузкой [ф-ла (2.23)]:

$$Z_{вх} = \frac{A_{11}Z_H + A_{12}}{A_{21}Z_H + A_{22}} = \frac{3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 + 3} = 715 \text{ ом.}$$

Ток и напряжение в точках $a-a$ найдутся по ф-лам (2.18) и (2.17):

$$I_a = \frac{U_1}{H_a} = \frac{U_1}{A_{11}Z_{вх} + A_{12}}.$$

Здесь коэффициенты A_{11} и A_{12} относятся только к левому четырехполюснику:

$$I_a = \frac{100}{1,22 \cdot 715 + 0,556 \cdot 10^3} = 0,07 \text{ а, } U_a = U_1 \frac{Z_{вх}}{H_a} = 100 \frac{715}{1,428 \cdot 10^3} = 50 \text{ в.}$$

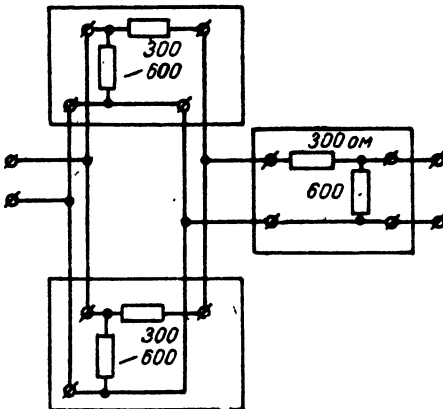


Рис. P.2.13

● 2.51. Отношение напряжений входа и выхода при холостом ходе рассчитывается по ф-ле (2.19)

$$\frac{U_1}{U_2} = A_{11}.$$

Так как матрицы для заданной схемы нет в таблицах, разобьем весь четырехполюсник на три четырехполюсника (рис. P.2.13).

Первые два четырехполюсника соединены между собой параллельно; для них, следовательно, справедливо соотношение (2.32):

$$[Y] = [Y_1] + [Y_2].$$

Пользуясь табл. 2.3, находим

$$\begin{aligned}
 [Y_1] = [Y_2] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{R_2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_2}{R_1} & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{300} \begin{bmatrix} 1,5 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Сумма матриц равна

$$[Y] = [Y_1] + [Y_2] = \frac{1}{300} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу $[A]$ для этих двух параллельно соединенных четырехполюсников; с этой целью воспользуемся ф-лами (2.8), из которых легко находятся коэффициенты A_{11} , A_{12} и A_{22} . Коэффициент A_{21} можно найти из соотношения $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$:

$$A_{11} = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} = -\frac{-2}{2} = 1; \quad A_{22} = \frac{Y_{11}}{Y_{21}} = \frac{3}{2} = 1,5;$$

$$A_{12} = \frac{1}{Y_{21}} = \frac{300}{2} = 150; \quad A_{21} = \frac{A_{11}A_{22} - 1}{A_{12}} = \frac{1}{300}.$$

Таким образом, матрица запишется в виде

$$[A_{II}] = \begin{bmatrix} 1 & 150 \\ \frac{1}{300} & 1,5 \end{bmatrix}.$$

Матрицу A_{III} третьего четырехполюсника находим из табл. 2.3:

$$[A_{III}] = \begin{bmatrix} 1 + 0,5 & 300 \\ \frac{1}{600} & 1 \end{bmatrix}.$$

Общая матрица A всего четырехполюсника равна произведению двух последних матриц:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 150 \\ \frac{1}{300} & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,5 & 300 \\ \frac{1}{600} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 + \frac{150}{600} & 300 + 150 \\ \frac{1,5}{300} + \frac{1,5}{600} & \frac{300}{300} + 1,5 \end{bmatrix}.$$

Коэффициент $A_{11} = 1,75$.

Таким образом,

$$\frac{U_1}{U_2} = 1,75.$$

Затухание в децибелах равно

$$B = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg 1,75 = 20 \cdot 0,243 = 4,86 \text{ дБ}.$$

3.

● 3.1. Прежде всего найдем обобщенную расстройку ξ , соответствующую заданной расстройке Δf :

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{2\pi\Delta f}{R} 2L = \frac{2\pi\Delta f}{R} \frac{2}{4\pi^2 f_0^2 C} = \\ &= \frac{2\pi \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 2}{20 \cdot 4\pi^2 (3 \cdot 10^6) 60 \cdot 10^{-12}} = 0,177.\end{aligned}$$

Полное сопротивление контура

$$Z(\omega) = R \sqrt{1 + \xi^2} = 20 \sqrt{1 + 0,177^2} = 20,4 \text{ ом.}$$

Амплитуда тока в контуре

$$I = \frac{U_1}{Z(\omega)} = \frac{1}{20,4} = 0,049 \text{ а} = 49 \text{ ма.}$$

Реактивное сопротивление

$$X = \xi R = 20 \cdot 0,177 = 3,54 \text{ ом.}$$

Характер реактивного сопротивления соответствует индуктивности.

Амплитуда выходного напряжения:

$$U_2 = U_1 \frac{Q}{\sqrt{1 + \xi^2}} = U_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \frac{\omega_0 RC}{\omega_0 RC} = 1 \frac{44,2}{\sqrt{1 + 0,177^2}} = 43 \text{ в,}$$

$$Q = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{10^{12}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 60} \approx 44,2.$$

Фазовые углы:

$$\varphi_{\dot{U}_1 \rightarrow i} = \arctg \xi = \arctg 0,177 = 10^\circ 0,2';$$

$$\varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1} = -\frac{\pi}{2} - \arctg \xi = -90^\circ - 10^\circ 0,2' = -100^\circ 0,2'.$$

Проверим с помощью векторной диаграммы правильность порядка и знаков полученных значений фазовых углов.

Векторная диаграмма изображена на рис. Р.3.1.

При положительной расстройке ($\Delta f > 0$) ток отстает от напряжения, следовательно, угол $\varphi_{\dot{U}_1 \rightarrow i}$ положителен и находится в пределах $0 < \varphi_{\dot{U}_1 \rightarrow i} < 90^\circ$. Так как расстройка невелика, то и угол $\varphi_{\dot{U}_1 \rightarrow i}$ невелик.

Напряжение на конденсаторе \dot{U}_2 отстает от тока на 90° ; из диаграммы видно, что $\varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1}$ меньше (-90°).

Теперь найдем относительную ошибку:

$$|\delta| = \frac{\Delta f}{2f_0} = \frac{6}{2 \cdot 3 \cdot 10^6} = 1 \cdot 10^{-3} = 0,1 \text{ \%}.$$

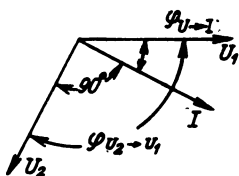


Рис. Р.3.1

● 3.3. Указание к решению. Из выражения

$$K(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Q}{\sqrt{1 + \xi^2}} = m$$

находим ξ :

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{Q^2}{m^2} - 1}.$$

Так как

$$\xi = \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{\omega_0}{2Q},$$

то

$$f = f_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \right) \sqrt{\left(\frac{Q}{m} \right)^2 - 1}.$$

Последняя формула является расчетной.

● 3.6. Из ф-лы (3.18) находим, что

$$\Delta C^* = C_{\max} - C_0 = C_0 - C_{\min} = \frac{C_0}{Q} = \frac{300}{79,2} = 3,79 \approx 3,8 \text{ пф.}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} C_{\max} &= C_0 + \Delta C^* = 300 + 3,8 = 303,8 \text{ пф;} \\ C_{\min} &= C_0 - \Delta C^* = 300 - 3,8 = 296,2 \text{ пф.} \end{aligned}$$

● 3.8. Сопоставляя выражения

$$\frac{1}{\omega C} = 220 \text{ и } \omega L = 178,$$

находим, что $\frac{L}{C} = 220 \cdot 178$.

Добротность контура, следовательно, равна

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\sqrt{220 \cdot 178}}{4} = 49,5.$$

● 3.9. Из двух равенств:

$$f_{\min}^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 LC_{\max}}, \quad f_{\max}^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 LC_{\min}}$$

получаем

$$\frac{C_{\max}}{C_{\min}} = \left(\frac{f_{\max}}{f_{\min}} \right)^2 \quad \text{или} \quad C_{\max} = C_{\min} \left(\frac{f_{\max}}{f_{\min}} \right)^2.$$

● 3.10. В данном случае

$$\frac{C_{\max}}{C_{\min}} = \frac{500}{50} = 10$$

и, следовательно, одним конденсатором при постоянной индуктивности можно получить «перекрытие частоты»:

$$\frac{f_{\max}}{f_{\min}} = \sqrt{\frac{C_{\max}}{C_{\min}}} = \sqrt{10} \approx 3,15.$$

Так как по условию

$$\frac{f_{\text{макс}}}{f_{\text{мин}}} = \frac{800}{100} = 8,$$

катушку нужно разбить на две секции, т. е. на два поддиапазона.

В первом диапазоне границы: 100 кГц ÷ 300 кГц, во втором — 300 кГц ÷ 900 кГц.

Теперь расчет индуктивностей для каждого из поддиапазонов не представляет труда:

$$L_1 = \frac{1}{4\pi^2 f_{1\text{макс}}^2 C_{\text{мин}}} = \frac{1}{4\pi^2 f_{1\text{мин}}^2 C_{\text{макс}}} = \frac{10^{12}}{4\pi^2 (10^5)^2 \cdot 500} = 5 \text{ мГн};$$

$$L_2 = \frac{1}{4\pi^2 f_{2\text{макс}}^2 C_{\text{мин}}} = \frac{1}{4\pi^2 f_{2\text{мин}}^2 C_{\text{макс}}} = \frac{10^{12}}{4\pi^2 300^2 \cdot 10^6 \cdot 500} \approx 0,56 \text{ мГн}.$$

Катушка должна иметь общую индуктивность 5 мГн и один отвод, соответствующий индуктивности 0,56 мГн.

● 3.12. Искомая частота f найдется из уравнения

$$X_f \approx 2\Delta\omega L = 2(\omega - \omega_0)L,$$

решив которое относительно f , получим

$$f = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} + \frac{X_f}{2L} \right).$$

Подставив условия задачи, найдем

$$f = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}}} + \frac{30}{2 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} \right) \approx 1,6 \cdot 10^6 \text{ гц}.$$

● 3.16. Мощность в контуре при резонансе

$$P_{\text{к}} = \frac{I^2 R}{2} = \frac{U^2}{(R_i + R)^2} \frac{R}{2}.$$

Взяв производную по R и приравняв ее нулю, найдем искомое условие:

$$\frac{dP_{\text{к}}}{dR} = \frac{U^2}{2} \frac{(R_i + R)^2 - R^2 (R_i + R)}{(R_i + R)^4} = 0,$$

$$R_i + R - 2R = 0;$$

$$R_i = R.$$

3.17. Указание к решению:

магнитная энергия при резонансе $\frac{LI_0^2}{2}$,

энергия потерь за период $\frac{I_0^2 R}{2} T = \frac{U^2}{2R} T$,

электрическая энергия при резонансе $\frac{C(UQ)^2}{2}$.

● 3.21. Так как

$$\frac{dX}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = L + \frac{L}{\omega^2 LC},$$

то при $\omega = \omega_0$

$$\left(\frac{dX}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} = 2L.$$

Подставляя в исходное равенство, имеем

$$Q = \frac{\omega_0}{2R} 2L = \frac{\omega_0 L}{R}.$$

- 3.22. Разложим $X(\omega)$ в ряд по степеням $\Delta\omega$ относительно частоты ω_0 :

$$X(\omega) = X(\omega_0 + \Delta\omega) = X(\omega_0) + \Delta\omega \left(\frac{dX}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} + \frac{\Delta\omega^2}{2} \left(\frac{d^2X}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} + \dots$$

Но $X(\omega_0) = 0$, а $\left(\frac{dX}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} = 2L$; следовательно,

$$X(\omega) = 2\Delta\omega L + \text{малые более высоких порядков.}$$

- 3.24. Непосредственно по схеме составляем исходное выражение

$$K(i\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{R_2 \frac{1}{i\omega C}}{R_2 + \frac{1}{i\omega C}}}{R_1 + i\omega L + \frac{R_2 \frac{1}{i\omega C}}{R_2 + \frac{1}{i\omega C}}}.$$

Упростим это выражение:

$$\begin{aligned} K(i\omega) &= \frac{\frac{R_2}{1 + i\omega CR_2}}{R_1 + i\omega L + \frac{R_2}{1 + i\omega CR_2}} = \frac{R_2}{R_1 + i\omega L + i\omega CR_1 R_2 - \omega^2 LCR_2 + R_2} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} - \omega^2 LC + i\omega CR_1 + i\frac{\omega L}{R_2}}. \end{aligned}$$

Вычислим модуль последнего выражения:

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega CR_1 + \frac{\omega L}{R_2}\right)^2}}.$$

Резонансная частота находится из условия $X_{вх} = 0$. Так как

$$Z_{вх} = R_1 + i\omega L + \frac{R_2 \frac{1}{i\omega C}}{\frac{1}{i\omega C} + R_2},$$

то

$$X_{вх} = \omega L - \frac{\omega CR_2^2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}.$$

Приравнявая $X_{вх}$ нулю и решая уравнение относительно ω_0 , получаем

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_2^2}},$$

где

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Подставляя значение резонансной частоты ω_0 в выражение для коэффициента передачи

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} - \omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega CR_1 + \frac{\omega L}{R_2}\right)^2}}$$

и совершая простые преобразования, находим

$$K(\omega_0) = \frac{Q}{1 + Q^2 \frac{R_1}{R_2}},$$

где

$$Q = \frac{\rho}{R_1}.$$

При $R_2 = \infty$

$$K(\omega_0) = Q.$$

● 3.25. В данном случае (задача 3.24)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{Q}{1 + Q^2 \frac{R_1}{R_2}} = \frac{100}{1 + 10^4 \frac{10}{10^5}} = 50.$$

Если $U_1 = 1$ в, то $U_2 = 50$ в.

Полезно отметить, что резонансная частота при этих условиях остается практически прежней:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 + \frac{10}{10^5}} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

● 3.26. В данном случае расстройки велики и приближенными формулами пользоваться нельзя. Ток в контуре определяется выражением

$$I = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}}.$$

При частоте $n\omega_0$ получаем

$$I_{n\omega_0} = \frac{U_1}{R \sqrt{1 + \frac{n^2 \omega_0^2 L^2}{R^2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{n^2 \omega_0^2}\right)^2}}; \quad I_{\omega_0} = \frac{U_1}{R}.$$

Так как $\frac{\omega_0 L}{R} = Q$, то

$$I_{n\omega_0} = \frac{U_1}{R \sqrt{1 + n^2 Q^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2}},$$

Полагая, что $Q \gg 1$, приближенно получаем

$$I_{n\omega_0} \approx \frac{U_1 n}{RQ (n^2 - 1)}.$$

Сопоставляя выражения для $I_{n\omega_0}$ и I_{ω_0} , будем иметь

$$I_{n\omega_0} = \frac{I_{\omega_0} n}{Q (n^2 - 1)}.$$

Например, при $n=2$ получаем

$$I_2 = \frac{2I_1}{3Q}.$$

● 3.27. Найдем выражения для тока I_R ; по табл. 2.2 имеем

$$\dot{I}_R = \dot{U}_1 \frac{1}{A_{11}R + A_{12}},$$

где A_{11} и A_{12} — коэффициенты четырехполюсника

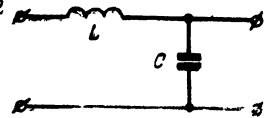


Рис. P.3.2

По табл. 2.3 (поз. 7) находим:

$$A_{11} = 1 + \frac{i\omega L}{1} = 1 - \omega^2 LC; \quad A_{12} = i\omega C.$$

Следовательно,

$$\dot{I}_R = \dot{U}_1 \frac{1}{R(1 - \omega^2 LC) + i\omega L}.$$

Подберем L и C так, чтобы на данной частоте $\omega^2 LC = 1$; тогда амплитуда I_R будет равна:

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_1}{i\omega L}; \quad I_R = \frac{U_1}{\omega L}$$

и не будет зависеть от величины сопротивления R .

В этой задаче не были учтены активное сопротивление катушки и внутреннее сопротивление генератора, которые ухудшают стабилизацию тока I_R .

● 3.28. Совершая обычные выкладки, найдем выражения фазо-частотных характеристик для обеих схем:

$$1) \quad K(i\omega) = \frac{\omega L}{R} \frac{i}{1 + i \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)}; \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R};$$

$$2) K(i\omega) = \frac{1}{\omega CR} \frac{-i}{1 + i \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)}; \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

На рис. P.3.3 даны графики характеристик $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$.

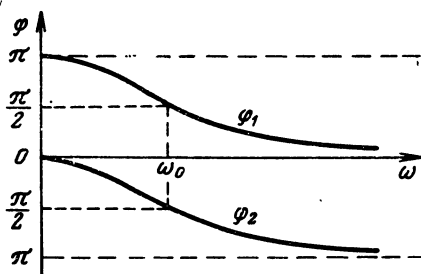


Рис. P.3.3

4.

- 4.1. По ф-ле (4.2) находим

$$R_{\alpha} = \frac{L}{CR} = \frac{100 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 100 \cdot 10^{-12}} = 10^5 \text{ ом.}$$

- 4.4. Рассчитаем резонансную частоту:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{240 \cdot 10^{-6} \cdot 120 \cdot 10^{-12}}} = 940 \cdot 10^3 \text{ гц.}$$

Определим абсолютную расстройку:

$$\Delta f = f - f_0 = 935 - 940 = -5 \text{ кГц.}$$

Найдем обобщенную расстройку:

$$\xi = \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{2\pi\Delta f}{R} = \frac{-2\pi 5 \cdot 10^3}{\frac{20}{2 \cdot 240 \cdot 10^{-6}}} = -0,775.$$

Определим эквивалентное сопротивление при резонансе

$$R_{\alpha} = \frac{L}{CR} = \frac{240 \cdot 10^{-6}}{120 \cdot 10^{-12} \cdot 20} = 10^5 \text{ ом.}$$

Активная составляющая [ф-ла (4.3)] будет равна

$$R_{\Sigma} = \frac{R_{\alpha}}{1 + \xi^2} = \frac{10^5}{1 + (-0,775)^2} = 63,8 \cdot 10^3 \text{ ом.}$$

Реактивная составляющая [Ф-ла (4.4)]

$$X_3 = -\xi R_3 = -(-0,755) 63,8 \cdot 10^3 = 48,2 \cdot 10^3 \text{ ом}.$$

Характер сопротивления — индуктивный.

Полное сопротивление

$$Z(\omega) = \frac{R_\alpha}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{10^5}{\sqrt{1 + 0,755^2}} \approx 80 \cdot 10^3 \text{ ом}.$$

● 4.6. В данном случае сопротивление контура существенно меньше внутреннего сопротивления генератора, и поэтому ток в неразветвленной цепи будет в основном определяться внутренним сопротивлением генератора; минимум резонансной кривой по току будет «размыт». Настройку целесообразно вести по вольтметру, включенному параллельно контуру; максимум резонансной кривой по напряжению заметно «острее». Для иллюстрации сказанного на рис. Р.4.1 даны графики резонансных кривых по току и напряжению [Ф-лы (4.6) и (4.8)].

Шкала вольтметра должна соответствовать максимальному напряжению на контуре

$$U_K = I_a R_\alpha = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^3 = 200 \text{ в}.$$

● 4.7. Рассуждениями, совершенно аналогичными рассуждениям в задаче 4.6, устанавливаем, что при данных условиях целесообразно вести настройку по амперметру. Амперметр должен быть включен в неразветвленную цепь.

В этом случае шкала определится значением тока в неразветвленной цепи при максимальной расстройке, т. е. при $\xi \approx 1$

$$I_a = \frac{\dot{U}}{R_i + Z(i\omega)} = \frac{\dot{U}}{R_i + R_3 + iX_3} = \frac{\dot{U}}{R_i + \frac{R_\alpha}{1 + \xi^2} - i \frac{R_\alpha \xi}{1 + \xi^2}}$$

Вычислив модуль тока I_a , получим

$$I_a = \frac{U}{\sqrt{\left(R_i + \frac{1}{2} R_\alpha\right)^2 + \left(\frac{1}{2} R_\alpha\right)^2}} = \frac{200}{\sqrt{(10^4 + 2,5 \cdot 10^4)^2 + 2,5 \cdot 10^8}} = 4,65 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 4,65 \text{ ма}.$$

● 4.11. Мощность в контуре определяется ф-лой (4.11)

$$P = \frac{I_a^2}{2} R_\alpha.$$

Для расчета I_a воспользуемся ф-лой (4.10)

$$I_a = \frac{I_K}{Q} = \frac{0,6}{30} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ а} = 20 \text{ ма}.$$

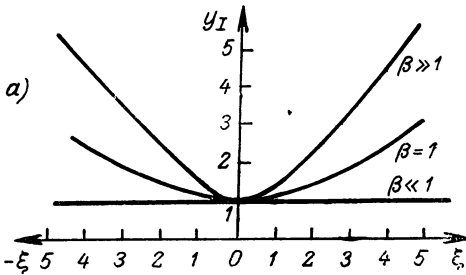
Теперь найдем мощность

$$P = \frac{(20 \cdot 10^{-3})^2}{2} 40 \cdot 10^3 = 8 \text{ вт}.$$

● 4.18. Выражение для входного сопротивления простого параллельного контура (рис. 4.1) имеет вид

$$Z(i\omega) = \frac{(R + i\omega L) \frac{1}{i\omega C}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Резонансная частота находится из условия $X=0$. Избавляясь от мнимости в знаменателе и приравнивая мнимую часть числителя нулю, получаем



$$\frac{R^2}{\omega_0 C} + \frac{L}{C} \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} \right) = 0,$$

откуда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2}{\frac{L}{C}}}.$$

Так как $\frac{L}{C} = \rho^2$, окончательно имеем

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{\rho}\right)^2}.$$

Тот же ответ получим, если воспользуемся общим условием (4.14):

$$X_1 (R_2^2 + X_2^2) + X_2 (R_1^2 + X_1^2) = 0.$$

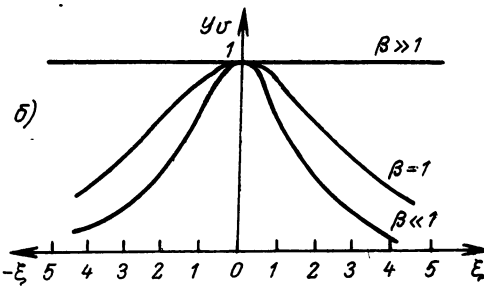


Рис. Р.4.1

В данном случае для простого контура:

$$X_1 = \omega L, \quad R_1 = R_2, \quad X_2 = -\frac{1}{\omega C}, \quad R_2 = 0.$$

Подставляя эти значения, получаем уравнение

$$-\frac{L}{C} + R^2 + \omega_0^2 L^2 = 0,$$

из которого легко находим ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{\rho}\right)^2}.$$

● 4.19. Выражение для входного сопротивления имеет вид

$$Z(i\omega) = \frac{(R_1 + i\omega L) \left(R_2 + \frac{1}{i\omega C} \right)}{R_1 + R_2 + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}.$$

Избавляясь от мнимости в знаменателе и приравнивая мнимую часть числителя нулю, получаем уравнение

$$\omega_0 L R_2^2 - \frac{\omega_0 L^2}{C} + \frac{L}{\omega_0 C_2} - \frac{R_1^2}{\omega_0 C} = 0,$$

откуда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{R_1}{\rho}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_2}{\rho}\right)^2}},$$

При $R_1 \ll \rho$ и $R_2 \ll \rho$

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Рекомендуем читателю получить тот же результат, исходя из общего условия (4.14).

● 4.21. Составляем общее выражение для входного сопротивления

$$Z(i\omega) = \frac{(R_1 + iX_1) \frac{R_2 iX_2}{R_2 + iX_2}}{(R_1 + iX_1) + \frac{R_2 iX_2}{R_2 + iX_2}}.$$

Здесь $X_1 = \omega L$; $X_2 = -\frac{1}{\omega C}$.

Продельвая элементарные преобразования, получаем

$$Z(i\omega) = \frac{X_1 X_2 R_2 - i R_1 R_2 X_2}{X_1 X_2 - R_1 R_2 - i(X_1 R_2 + X_2 R_1 + R_2 X_2)}.$$

Резонансная частота определяется из условия равенства нулю мнимой части $Z(i\omega)$:

$$R_1(X_1 X_2 - R_1 R_2) - X_1(X_1 R_2 + X_2 R_1 + R_2 X_2) = 0$$

или

$$\omega_0^2 L^2 - \frac{L}{C} + R_1^2 = 0,$$

откуда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{R_1}{\rho}\right)^2}.$$

● 4.23. Определим резонансное сопротивление R_α простого параллельного контура, т. е. при $R_2 \rightarrow \infty$, и затем уже резонансное сопротивление $Z(\omega_0)$ сложного контура (рис. 4.9) как сопротивление R_α , параллельно соединению с R_2 .

Подставляя условия задачи, находим:

$$R_\alpha = \frac{L}{CR} = \frac{9 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-12} \cdot 3} = 30 \cdot 10^3 \text{ ом}.$$

$$Z(\omega_0) = \frac{R_\alpha R_2}{R_\alpha + R_2} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^3 + 30 \cdot 10^3} = 15 \cdot 10^3 \text{ ом}.$$

● 4.24. Из формулы

$$R_{\alpha} = \frac{\rho^2}{R_1 + \frac{\rho^2}{R_2}}$$

определяем R_2 :

$$R_2 = \frac{\rho^2}{\left(\frac{\rho^2}{R_{\alpha}} - R_1\right)} = \frac{\rho^2}{\left(\frac{\rho^2}{R_L} - R_1\right)}.$$

Очевидно, подобным способом можно изменять R_{α} , если выполняется неравенство

$$\frac{\rho^2}{R_L} > R_1, \text{ т. е. } \frac{L}{C} > R_L R_1.$$

● 4.29. В данной задаче расстройки велики и пользование формулами, содержащими приближенное равенство $\omega L - \frac{1}{\omega C} \approx 2\Delta\omega L$, привело бы к большой ошибке. Поэтому будем исходить из формулы

$$Z(i\omega) = \frac{\frac{L}{C}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

При частоте $\omega = \omega_0$ получаем

$$Z(\omega_0) = \frac{L}{RC}.$$

При частоте $\omega = n\omega_0$ будем иметь

$$\begin{aligned} Z(in\omega_0) &= \frac{\frac{L}{C}}{R + i\left(n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 C}\right)} = \frac{\frac{L}{CR}}{1 + i\frac{\omega_0 L}{R}\left(n - \frac{1}{n\omega_0^2 LC}\right)} = \\ &= \frac{R_{\alpha}}{1 + iQ\left(n - \frac{1}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Вычисляя модуль последнего выражения, получим

$$Z(n\omega_0) = \frac{R_{\alpha}}{\sqrt{1 + Q^2\left(n - \frac{1}{n}\right)^2}}.$$

Сравним теперь $Z(\omega_0)$ с $Z(n\omega_0)$:

$$\frac{Z(\omega_0)}{Z(n\omega_0)} = \sqrt{1 + Q^2\left(n - \frac{1}{n}\right)^2}.$$

Так как $Q \gg 1$, можно считать, что

$$Z(\omega_0) \approx Q\left(n - \frac{1}{n}\right) Z(n\omega_0) = Q\left(\frac{n^2 - 1}{n}\right) Z(n\omega_0).$$

- 4.30. Расчет ведем по результату задачи 4.29:

$$Z(\omega_0) = \frac{L}{CR} = \frac{250 \cdot 10^{-6}}{1000 \cdot 10^{-12} \cdot 5} = 50 \cdot 10^3 \text{ ом};$$

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\sqrt{\frac{250 \cdot 10^{-6}}{1000 \cdot 10^{-12}}}}{5} = 100;$$

$$Z(n\omega_0) = \frac{Z(\omega_0)}{Q \left(n - \frac{1}{n} \right)} = \frac{50 \cdot 10^3}{100 \left(2 - \frac{1}{2} \right)} \approx 333 \text{ ом}.$$

- 4.31. Из ф-лы (4.19)

$$R_{\alpha} = \left(\frac{L_1}{L_1 + L_2} \right)^2 \frac{\omega_0^2 (L_1 + L_2)^2}{R} = p^2 \frac{\omega_0^2 L_0^2}{R},$$

получаем

$$p = \frac{\sqrt{RR_{\alpha}}}{\omega_0 L_0}.$$

Так как

$$p = \frac{I_1}{L_1 + L_2} = \frac{\frac{L_1}{L_2} I_2}{1 + \frac{L_1}{L_2}},$$

то по найденному выше значению p легко рассчитать отношение

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{p}{1-p}.$$

- 4.32. Резонансная частота контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{150 \cdot 10^{-6} \cdot 600 \cdot 10^{-12}}} \approx 3,33 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

Находим параметр p :

$$p = \frac{\sqrt{RR_{\alpha}}}{\omega_0 L_0} = \frac{\sqrt{10 \cdot 10^4}}{\sqrt{3,33 \cdot 10^6 \cdot 150 \cdot 10^{-6}}} \approx 0,63.$$

Рассчитаем отношение индуктивностей

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{p}{1-p} = \frac{0,63}{1-0,63} \approx 1,7.$$

Так как $L_1 + L_2 = L_0 = 150 \text{ мкГн}$, то:

$$L_1 = 0,63L_0 = 0,63 \cdot 150 = 94,5 \text{ мкГн}; \quad L_2 = 0,37L_0 = 0,37 \cdot 150 = 55,5 \text{ мкГн}.$$

Для других условий, сформулированных в задаче, аналогично находим:

$$L_1 = 130 \text{ мкГн}; \quad L_2 = 30 \text{ мкГн}.$$

- 4.33. Из формулы $R_{\alpha} = p^2 \frac{L}{C_0 R}$ находим p :

$$p = \sqrt{\frac{C_0}{L}} \sqrt{RR_{\alpha}}.$$

Подставляя условия задачи, получаем

$$\rho = \sqrt{\frac{500 \cdot 10^{-12}}{150 \cdot 10^{-6}}} \sqrt{10 \cdot 10^4} \approx 0,58.$$

Так как

$$\rho = \frac{C_0}{C_2},$$

то

$$C_2 = \frac{C_0}{\rho} = \frac{500}{0,58} = 861 \text{ нф.}$$

Емкость C_1 определяем из формулы

$$C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

откуда

$$C_1 = \frac{C_0}{1 - \rho} = \frac{500}{1 - 0,58} = 1190 \text{ нф.}$$

Для других условий, сформулированных в задаче, аналогично находим:

$$C_2 = 1800 \text{ нф}; \quad C_1 = 600 \text{ нф.}$$

● 4.37. Из формулы

$$R_{\alpha} = \rho^2 \frac{\omega_0^2 L_0^2}{R}.$$

находим L_0 :

$$L_0 = \frac{\sqrt{RR_{\alpha}}}{\rho \omega_0}. \quad (1)$$

Далее, из формулы

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}$$

находим C :

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L_0}. \quad (2)$$

Наконец, сопоставляя выражения:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}, \quad (3)$$

$$2\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}, \quad (4)$$

получаем, что

$$\frac{L_2}{L_0} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$L_2 = \frac{1}{4} L_0, \quad L_1 = \frac{3}{4} L_0, \quad \rho = \frac{L_1}{L_0} = \frac{3}{4}. \quad (5)$$

Формулы (1), (2) и (5) дают возможность рассчитать контур по поставленным выше условиям.

Заметим в заключение, что схема рис. 4.15 позволяет подавлять только высшие гармоники, что следует из выражений (3) и (4), так как $L_0 > L_2$.

● 4.38. Пользуемся формулами, полученными в предыдущей задаче:

$$L_0 = \frac{\sqrt{RR_\alpha}}{\rho \omega_0} = \frac{\sqrt{5 \cdot 10^4}}{\frac{3}{4} \cdot 3,77 \cdot 10^6} = 79,1 \cdot 10^{-6} \text{ гн} = 79,1 \text{ мкгн.}$$

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L_0} = \frac{1}{(3,77 \cdot 10^6)^2 \cdot 79,1 \cdot 10^{-6}} = 891 \cdot 10^{-12} \text{ ф} = 891 \text{ пф.}$$

$$L_1 = \frac{3}{4} L_0 = 0,75 \cdot 79,1 = 59,3 \text{ мкгн.}$$

$$L_2 = \frac{1}{4} L_0 = 0,25 \cdot 79,1 = 19,8 \text{ мкгн.}$$

● 4.39. Из формулы $R_\alpha = \frac{1}{\omega_0^2 C_2^2 R}$ определяем C_2 :

$$C_2 = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{RR_\alpha}}. \quad (1)$$

Сопоставляя выражения:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}, \quad (1a)$$

$$\frac{1}{2} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}, \quad (16)$$

находим

$$C_1 = 4C_0. \quad (2)$$

Имея в виду, что (см. задачу № 4.33)

$$C_1 = \frac{C_0}{1 - \rho},$$

находим

$$\rho = 1 - \frac{C_0}{C_1} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \quad (3)$$

Преобразуя ф-лу (2) к виду

$$C_1 = 4C_0 = 4 \frac{C_0}{C_2} \quad C_2 = 4\rho C_2,$$

получаем формулы для расчета:

$$C_1 = 4 \frac{3}{4} C_2 = 3C_2; \quad (4)$$

$$C_0 = \frac{C_1}{4} = \frac{3}{4} C_2. \quad (5)$$

Индуктивность L найдется из выражения (1a):

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C_0}. \quad (6)$$

Формулы (1), (4), (5) и (6) решают поставленную задачу.

● 4.40. Пользуясь формулами, полученными в предыдущей задаче, можно определить:

$$C_2 = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{RR_{\alpha}}} = \frac{1}{\pi \cdot 10^7 \sqrt{10 \cdot 10^4}} \approx 100 \cdot 10^{-12} \text{ ф} = 100 \text{ пф};$$

$$C_1 = 3C_2 \approx 300 \text{ пф};$$

$$C_0 = \frac{3}{4} C_1 = 75 \text{ пф};$$

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C_0} = \frac{1}{\pi^2 (10^7)^2 \cdot 75 \cdot 10^{-12}} \approx 13,5 \cdot 10^{-6} \text{ гн} = 13,5 \text{ мкгн}.$$

● 4.41. Так как сопротивление простого параллельного контура без потерь равно бесконечности, то из условия равенства сопротивлений получаем, что

$$R' = R_{\alpha} = \frac{L}{CR}.$$

● 4.43. 1) Реактивная составляющая входного сопротивления

$$X_{\text{вх}} = \frac{X_1 X_2}{X_1 + X_2} = \frac{-\frac{L_1}{C_2}}{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_2}} = \frac{-\frac{L_1}{C_2}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega}\right) \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}} = -\frac{\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}}{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}.$$

График этой зависимости дан на рис. Р. 4.2а.

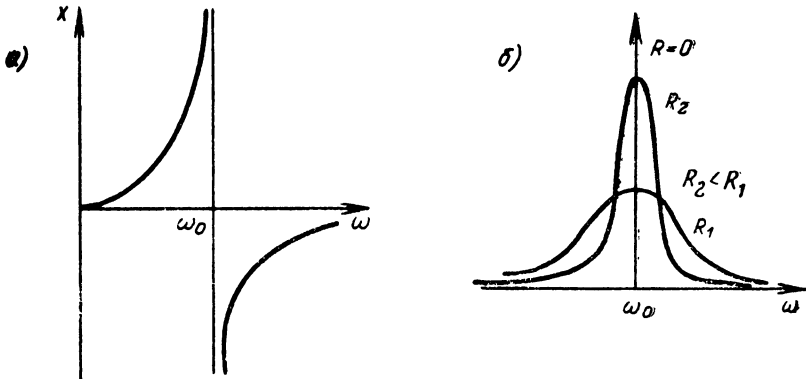


Рис. Р.4.2

2) Активная составляющая входного сопротивления

$$R_{\text{вх}} = \frac{R_{\alpha}}{1 + \xi^2} = \frac{L}{C} \frac{R}{R^2 + X^2}$$

при $R \rightarrow 0$ и $X = 0$ вырождается в бесконечно узкую линию бесконечной высоты — δ -функцию (рис. Р. 4.2б).

5.

● 5.1. В соответствии с ф-лой (5.1) имеем:

$$\frac{1}{i\omega C_a} = \frac{\frac{1}{i\omega C_3} \frac{1}{i\omega C_1}}{\frac{1}{i\omega C_1} + \frac{1}{i\omega C_2} + \frac{1}{i\omega C_3}}; \quad \frac{1}{i\omega C_b} = \frac{\frac{1}{i\omega C_3} \frac{1}{i\omega C_2}}{\frac{1}{i\omega C_1} + \frac{1}{i\omega C_2} + \frac{1}{i\omega C_3}};$$

$$\frac{1}{i\omega C_c} = \frac{\frac{1}{i\omega C_2} \frac{1}{i\omega C_1}}{\frac{1}{i\omega C_1} + \frac{1}{i\omega C_2} + \frac{1}{i\omega C_3}}.$$

Сокращая на $i\omega$, получаем:

$$\frac{1}{C_a} = \frac{\frac{1}{C_3 C_1}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{C_3}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2};$$

$$\frac{1}{C_b} = \frac{C_1}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2}; \quad \frac{1}{C_c} = \frac{C_2}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2}.$$

Находим C_a, C_b, C_c :

$$C_a = \frac{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}{C_2} = \frac{B}{C_2}; \quad C_b = \frac{B}{C_1}; \quad C_c = \frac{B}{C_3}.$$

Вычислим по условиям задачи величину B :

$$B = C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3 = 50 \cdot 50 + 50 \cdot 10 + 50 \cdot 10 = 3500 \text{ нФ}^2;$$

тогда

$$C_a = \frac{B}{C_2} = \frac{3500}{50} = 70 \text{ нФ}; \quad C_b = \frac{B}{C_1} = \frac{3500}{50} = 70 \text{ нФ};$$

$$C_c = \frac{B}{C_3} = \frac{3500}{10} = 350 \text{ нФ}.$$

● 5.5. Исследуя выражение для коэффициента связи на минимум, получаем:

$$\frac{d}{d\omega} |X_{св}| = M - \frac{1}{C_{св} \omega_m^2} = 0;$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{M C_{св}}};$$

$$X_m = \omega_m M + \frac{1}{\omega_m C_{св}} = 2 \sqrt{\frac{M}{C_{св}}}.$$

Далее составляем по условию задачи очевидные уравнения:

$$\omega_1 M + \frac{1}{\omega_1 C_{св}} = \rho X_m; \tag{1}$$

$$\omega_2 M + \frac{1}{\omega_2 C_{св}} = pX_m. \quad (2)$$

Вычитая из (1) уравнение (2), получим

$$(\omega_1 - \omega_2) M + \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1 \omega_2 C_{св}} = 0,$$

откуда

$$\omega_1 \omega_2 = \frac{1}{MC_{св}} = \omega_m^2. \quad (3)$$

Складывая уравнения (1) и (2), находим

$$(\omega_1 + \omega_2) M + \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1 \omega_2 C_{св}} = 2pX_m$$

или

$$(\omega_1 + \omega_2) \left[M + \frac{1}{\omega_m^2 C_{св}} \right] = 2pX_m,$$

откуда

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{2pX_m}{M + \frac{1}{\omega_m^2 C_{св}}} = \omega_m 2p. \quad (4)$$

Из системы уравнений (3) и (4) можно определить частоты ω_1 и ω_2 . Решая эту систему, получаем

$$\omega_{1,2} = \omega_m (p \pm \sqrt{p^2 - 1}).$$

Последняя формула и является расчетной.

● 5.6. Из предыдущей задачи

$$\omega_{1,2} = \omega_m (p \pm \sqrt{p^2 - 1}),$$

причем по условию задачи $p=1,1$.

Рассчитаем частоту ω_m :

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{MC_{св}}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot 10^{-12}}} = 44,7 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

Теперь рассчитаем частоты ω_1 и ω_2 :

$$\omega_{1,2} = 44,7 \cdot 10^6 \left(1,1 \pm \sqrt{1,1^2 - 1} \right) = 44,7 (1,1 \pm 0,46) \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

Соответственно:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{44,7 \cdot 1,56}{6,28} 10^6 = 11,1 \cdot 10^6 \text{ гц};$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{44,7 \cdot 0,64}{6,28} 10^6 = 4,56 \cdot 10^6 \text{ гц};$$

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{44,7}{6,28} 10^6 = 7,12 \cdot 10^6 \text{ гц}.$$

Следовательно, искомый диапазон будет равен

$$\Delta f = f_1 - f_2 = 11,1 \cdot 10^6 - 4,56 \cdot 10^6 = 6,54 \cdot 10^6 \text{ гц}.$$

● 5.9. Расчет входного сопротивления будем проводить по ф-лам (5.7):

$$R_3 = R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right);$$

$$X_3 = X_1 \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} \right).$$

Вычислим необходимые величины:

$$\omega = 2\pi f = 6,28 \cdot 159 \cdot 10^3 = 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$$

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 10^6 \cdot 510 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{10^6 \cdot 2000 \cdot 10^{-12}} = 10 \text{ ом}^1);$$

$$X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 10^6 \cdot 208 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{10^6 \cdot 5000 \cdot 10^{-12}} = 8 \text{ ом};$$

$$\xi_1 = \frac{X_1}{R_1} = \frac{10}{5} = 2;$$

$$\xi_2 = \frac{X_2}{R_2} = \frac{8}{6} = 1,33;$$

$$A = \frac{X}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{10^6 \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2 \cdot 6}} = 2,02.$$

Располагая полученными данными, легко вычислить активное и реактивное сопротивления:

$$R_3 = R_1 + R_1 \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} = 2 + 2 \frac{2,02^2}{1 + 1,33^2} = 4,94 \text{ ом};$$

$$X_3 = X_1 - X_1 \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} = 10 - 10 \frac{2,02^2}{1 + 1,33^2} \frac{1,33}{5} = 6,08 \text{ ом},$$

Вносимые сопротивления равны:

$$R_{\text{вн}} = R_3 - R_1 = 2,94 \text{ ом}, \quad X_{\text{вн}} = X_3 - X_1 = -3,92 \text{ ом}.$$

● 5.11. Подсчитаем, прежде всего, сопротивление, вносимое из второго контура в первый:

$$|Z_2|^2 = R_2^2 + X_2^2 = R_2^2 = 100 \text{ ом}^2;$$

$$X_{\text{вн}}^2 = \frac{X_{\text{св}}^2}{|Z_2|^2} X_2^2 = \frac{20^2}{100} \cdot 0 = 0;$$

$$R_{\text{вн}}^2 = \frac{X_{\text{св}}^2}{|Z_2|^2} R_2^2 = \frac{20^2}{100} 10 = 40 \text{ ом}.$$

¹⁾ Для расчета реактивных сопротивлений X_1 и X_2 можно пользоваться приближенной формулой $X \approx 2\Delta\omega L$; в данной задаче, однако, условия составлены так, что пользование точной формулой не усложняет расчета.

Затем рассчитаем сопротивление в точках AB как сопротивление настроенного в резонанс параллельного контура, у которого общее сопротивление

$$R = 10 \text{ ом} + 10 \text{ ом} + R_{\text{вн}} = 10 + 10 + 40 = 60 \text{ ом};$$

тогда получим

$$R_{AB} = \frac{L}{RC} = \frac{\omega L}{\omega CR} = \frac{600 \cdot 600}{60} = 6000 \text{ ом}.$$

● 5.13. Резонансная частота находится из условия равенства нулю эквивалентного реактивного сопротивления

$$X_3 = 0.$$

В данном случае, имея в виду (5.9), получаем

$$X_3 = \xi_1 R_1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \xi_2 R_1 = 0.$$

Так как во втором контуре имеет место неравенство $\xi_2 \gg 1$, можно написать:

$$X_1 - \frac{A^2}{X_2} R_1 R_2 = 0 \text{ или } X_1 X_2 - X_{\text{св}}^2 = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}; \quad X_2 = \omega L_2; \quad X_{\text{св}} = \omega M,$$

получаем уравнение для определения резонансной частоты ω_p :

$$\left(\omega_p L_1 - \frac{1}{\omega_p C} \right) \omega_p L_2 - \omega_p^2 M^2 = 0.$$

Решение этого уравнения относительно ω_p дает

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \kappa^2}}.$$

Полученная формула показывает возможность настройки колебательного контура путем внесения дополнительного реактивного сопротивления за счет связи с апериодическим контуром.

Практически в передатчиках такой апериодический контур выполняется в виде короткозамкнутого витка, вращаемого внутри основной катушки передатчика.

● 5.14. Из формулы, полученной в предыдущей задаче, находим:

$$f_{p \text{ макс}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M_{\text{макс}}^2}{L_1 L_2}}};$$

$$f_{p \text{ мин}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M_{\text{мин}}^2}{L_1 L_2}}}.$$

Подставляя условия задачи, находим:

$$f_{p \text{ мин}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{40 \cdot 10^{-6} \cdot 250 \cdot 10^{-12}}} = 1,595 \cdot 10^6 \text{ гц};$$

$$f_{p \text{ макс}} = f_{p \text{ мин}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M_{\text{макс}}^2}{L_1 L_2}}} = 1,595 \cdot 10^6 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4^2}{40 \cdot 5}}} = 1,66 \cdot 10^6 \text{ гц};$$

$$\Delta f = f_{p \text{ макс}} - f_{p \text{ мин}} = (1,660 - 1,595) \cdot 10^6 = 65 \cdot 10^3 \text{ гц}.$$

● 5.15. Из (5.9) получаем

$$R_3 = R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right).$$

Так как в данном случае

$$\xi_2 = \frac{X_2}{R_2} \gg 1,$$

то

$$R_3 = R_1 \left(1 + \frac{A^2}{X_2^2} R_2^2 \right) = R_1 + \frac{X_{\text{св}}^2}{X_2^2} R_2.$$

Имея в виду, что

$$X_{\text{св}} = \omega M; \quad X_2 = \omega L_2,$$

получаем

$$R_3 = R_1 + \frac{M^2}{L_2^2} R_2.$$

Полученная формула показывает возможность согласования внутреннего сопротивления генератора с сопротивлением нагрузки введением промежуточного контура и изменением связи M . Подобное согласование широко используется на практике.

● 5.16. Из выражения, полученного в предыдущей задаче,

$$R_3 = R_1 + \frac{M^2}{L_2^2} R_2$$

легко рассчитать необходимую взаимоиндуктивность M :

$$M = \sqrt{\frac{R_3 - R_1}{R_2}} L_2.$$

Подставляя условия задачи и имея в виду, что для согласования необходимо выполнить условие $R_3 = R_i$, находим

$$M = \sqrt{\frac{200 - 20}{2000}} \cdot 800 = 240 \text{ мкГн}.$$

● 5.17. Из (5.9) имеем:

$$R_3 = R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right); \quad X_3 = X_1 \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} \right).$$

Для того чтобы входное сопротивление имело чисто активный характер, нужно выполнить условие $X_3 = 0$; тогда

$$\frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} = 1.$$

Решая уравнение относительно ξ_2 , имеем

$$\xi_2 = \frac{A^2}{2\xi_1} \pm \sqrt{\frac{A^4}{4\xi_1^2} - 1}.$$

Раскрывая ξ_2 по формуле

$$\xi_2 = \frac{\Delta\omega_2}{\alpha_2} = \frac{\omega - \omega_{02}}{\alpha_2},$$

где ω — частота генератора, а ω_{02} — частота, на которую должен быть настроен второй контур, составляем выражение для ω_{02} :

$$\omega_{02} = \omega - \alpha_2 \xi_2 = \omega - \alpha_2 \left[\frac{A^2}{2\xi_1} \pm \sqrt{\frac{A^4}{4\xi_1^2} - 1} \right].$$

● 5.18. Для того чтобы решение было вещественным, нужно, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\frac{A^4}{4\xi_1^2} - 1 > 0,$$

из которого можно определить минимальное значение связи:

Очевидно,

$$A_{\text{мин}}^2 = 2\xi_1 \quad \text{или} \quad A_{\text{мин}} = \sqrt{2\xi_1}.$$

В данном случае для схемы с индуктивной связью будет

$$M_{\text{мин}} = \frac{1}{\omega} \sqrt{R_1 R_2} \sqrt{2\xi_1}.$$

Расстройку второго контуса ξ_2 (задача 5.17) при $M = M_{\text{мин}}$ можно найти из упрощенного выражения

$$\xi_2 = \frac{A_{\text{мин}}^2}{2\xi_1}, \quad \text{так как} \quad \sqrt{\frac{A^4}{4\xi_1^2} - 1} = 0.$$

Имея в виду, что $\frac{A_{\text{мин}}^2}{2\xi_1} = 1$, получаем

$$\xi_2 = 1.$$

● 5.19. Для решения задачи воспользуемся формулами, полученными в двух предыдущих задачах.

Рассчитаем частоту, на которую должен быть настроен второй контур, чтобы входное сопротивление было чисто активным, имея в виду, что при минимальной связи $\xi_2 = 1$:

$$\omega_{02} = \omega - \alpha_2 \xi_2 = \omega - \frac{R_2}{2L_2} = 2\pi \cdot 750 \cdot 10^3 - \frac{12}{2 \cdot 240 \cdot 10^{-6}} = 4,675 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$$

$$f_{02} = \frac{\omega_{02}}{2\pi} = \frac{4,675 \cdot 10^6}{6,28} \approx 746 \cdot 10^3 \text{ гц}.$$

Найдем ξ_1 :

$$\xi_1 = \frac{X_1}{R_1} = \frac{\omega L_1}{R_1} = \frac{2\pi \cdot 750 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}}{100} = 118.$$

Рассчитаем необходимую величину фактора связи:

$$A_{\text{мин}} = \sqrt{2\xi_1} = \sqrt{2 \cdot 118} \approx 15,4.$$

Минимальная взаимная индуктивность равна

$$M_{\text{мин}} = \frac{1}{\omega} A_{\text{мин}} \sqrt{R_1 R_2} = \frac{15,4}{2\pi \cdot 750 \cdot 10^3} \sqrt{100 \cdot 12} = 113 \cdot 10^{-6} \text{ гн};$$

$$M_{\text{мин}} = 113 \text{ мкгн}.$$

● 5.20. Непосредственно из выражения

$$Z(i\omega) = R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \right) + i \xi_1 R_1 \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} \right),$$

принимая во внимание, что $\xi_2 \gg 1$, находим:

$$\begin{aligned} Z(i\omega) &= R_1 + A^2 R_1 \frac{R_2^2}{X_2^2} + i \left(X_1 - \frac{A^2}{X_2} R_1 R_2 \right) = \\ &= R_1 + \frac{X_{\text{св}}^2}{X_2^2} R_2 + i \left(X_1 - \frac{X_{\text{св}}^2}{X_2^2} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$X_{\text{св}} = \omega M; \quad X_1 = \omega L_1; \quad X_2 = \omega L_2,$$

получим

$$\begin{aligned} Z(i\omega) &= R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\omega^2 L_2^2} R_2 + i \left(\omega L_1 - \frac{\omega^2 M^2}{\omega L_2} \right) = \\ &= R_1 + \left(\frac{M}{L_2} \right)^2 R_2 + i \omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2^2} L_2 \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$R_3 = R_1 + \left(\frac{M}{L_2} \right)^2 R_2; \quad X_3 = \omega L_3 = \omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2^2} L_2 \right).$$

Для того чтобы реактивная составляющая была равна нулю, взаимоиנדуктивность M должна быть равна

$$M = \sqrt{L_1 L_2}.$$

● 5.21. Для расчета частот связи воспользуемся ф-лой (5.12); с этой целью вычислим фактор связи A и добротность Q :

$$A = \frac{X_{\text{св}}}{R} = \frac{16}{10} = 1,6; \quad A^2 = 2,56,$$

$$Q = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-12} \cdot 10} = 79,6.$$

Теперь вычислим ω_1 и ω_2 :

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \alpha \sqrt{A^2 - 1} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{\alpha}{\omega_0} \sqrt{A^2 - 1} \right) = \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \sqrt{A^2 - 1} \right).$$

Частоты связи:

$$\begin{aligned} f_{1,2} &= f_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \sqrt{A^2 - 1} \right) = f_0 \left(1 \pm \frac{1}{2 \cdot 79,6} \sqrt{1,6^2 - 1} \right); \\ f_1 &= 2015,7 \text{ кГц}; \quad f_2 = 1984,3 \text{ кГц}. \end{aligned}$$

● 5.23. Построение будем вести по ф-лам (5.12).

Для удобства перепишем эти формулы следующим образом:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1 + \frac{\alpha}{\omega_0} \sqrt{A^2 - 1}; \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} = 1 - \frac{\alpha}{\omega_0} \sqrt{A^2 - 1}.$$

Воспользовавшись известным соотношением (разд. 2)

$$\frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{2Q},$$

получим:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1 + \frac{1}{2Q} \sqrt{A^2 - 1}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} = 1 - \frac{1}{2Q} \sqrt{A^2 - 1}.$$

Построение выполним для значения $Q=10$ (рис. P.5.1).

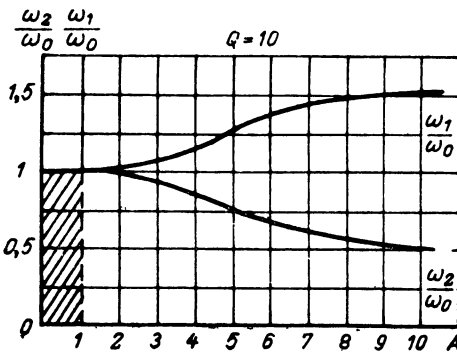


Рис. P.5.1

По подобным графикам, выполненным в нужном масштабе, легко и быстро можно находить частоты связи.

● 5.24. Из ф-лы (5.11) легко получим

$$A^2 = \xi_{1,2}^2 + 1 = \left(\frac{\omega_{1,2} - \omega_0}{\alpha} \right)^2 + 1.$$

Определив коэффициент α из формулы $\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}$, получим

$$A^2 = \left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} 2Q \right)^2 + 1 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - 1 \right)^2 4Q^2 + 1 =$$

$$= \left(\frac{2\pi \cdot 1,64 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 1,6 \cdot 10^6} - 1 \right)^2 4 \cdot 20^2 + 1 = 2.$$

● 5.25. Исходным выражением будет служить выражение (5.9), которое нужно приравнять нулю:

$$X_3 = \xi_1 R_1 \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) = 0$$

и затем решить относительно ω .

Вводя замену

$$\xi_1 = \frac{\omega - \omega_{01}}{\alpha_1}, \quad \xi_2 = \frac{\omega - \omega_{02}}{\alpha_2},$$

где ω — частота генератора, а ω_{01} и ω_{02} — собственные частоты 1 и 2-го контуров, получим

$$\frac{\omega - \omega_{01}}{\alpha_1} - \frac{A^2}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_{02}}{\alpha_2} \right)^2} \left(\frac{\omega - \omega_{02}}{\alpha_2} \right) = 0.$$

Из этого уравнения найдем частоту ω .

С этой целью введем переменную $\omega - \omega_{02} = x$ и перепишем уравнение в виде

$$\frac{x + (\omega_{02} - \omega_{01})}{\alpha_1} - \frac{A^2}{1 + \frac{x^2}{\alpha_2^2}} \frac{x}{\alpha_2} = 0.$$

После элементарных преобразований приходим к кубическому уравнению

$$x^3 + \Delta\omega x^2 + (\alpha_2^2 - A^2 \alpha_1 \alpha_2) x + \Delta\omega \alpha_2^2 = 0,$$

где $\Delta\omega = \omega_{02} - \omega_{01}$.

В случае, если $\omega_{01} = \omega_{02}$ и $\alpha_1 = \alpha_2$, получаем решение в виде ф-л (5.12).

В общем случае данное уравнение нужно решать по правилам решения кубических уравнений.

В полученных формулах допустимо считать, что при небольших расстройках фактор связи A не зависит от частоты (например, при индуктивной связи

$$A = \frac{X_{св}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\omega}{\omega_{01}} \frac{\omega_{01} M}{\sqrt{R_1 R_2}} \approx \frac{\omega_{01} M}{\sqrt{R_1 R_2}}).$$

Для решения уравнения временно введем новую переменную

$$x = \Delta\omega z,$$

тогда получим

$$\Delta\omega^3 z^3 + \Delta\omega^3 z^2 + \Delta\omega z (\alpha_2^2 - A^2 \alpha_1 \alpha_2) + \alpha_2^2 \Delta\omega = 0$$

или

$$z^3 + z^2 + \frac{\alpha_2^2 - A^2 \alpha_1 \alpha_2}{\Delta\omega^2} z + \frac{\alpha_2^2}{\Delta\omega^2} = 0.$$

Последнее уравнение относительно z легко решается графически: корни уравнения будут соответствовать точкам пересечения кривой $y = z^3 + z^2$ с прямой

$$y = -\frac{\alpha_2^2 - A^2 \alpha_1 \alpha_2}{\Delta\omega^2} z - \frac{\alpha_2^2}{\Delta\omega^2}.$$

5.26. Расчет частот связи будем проводить методом, изложенным в решении предыдущей задачи.

Рассчитаем необходимые величины:

$$A = \frac{X_{св}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{60}{\sqrt{10 \cdot 10}} = 6;$$

$$\alpha_1 = \frac{R_1}{2L_1} = \frac{10}{2 \cdot 260 \cdot 10^{-6}} = 1,92 \cdot 10^4 \frac{1}{сек};$$

$$\alpha_2 = \frac{R_2}{2L_2} = \frac{10}{2 \cdot 280 \cdot 10^{-6}} = 1,785 \cdot 10^4 \frac{1}{сек};$$

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{260 \cdot 10^{-6} \cdot 900 \cdot 10^{-12}}} = 2,06 \cdot 10^6 \frac{рад}{сек};$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{280 \cdot 10^{-6} \cdot 920 \cdot 10^{-12}}} = 1,97 \cdot 10^6 \frac{рад}{сек};$$

$$\Delta\omega = \omega_{02} - \omega_{01} = (1,97 - 2,06) \cdot 10^6 = -0,09 \cdot 10^6 \frac{рад}{сек}.$$

Теперь приступим к решению кубического уравнения (см. задачу 5.25).

Заметим перед построением графика $y = z^3 + z^2$, что масштаб по отношению к переменной z выбрать легко: величина z будет меняться в пределах, сопоставимых с единицей, так как $z = \frac{x}{\Delta\omega} = \frac{\omega - \omega_{02}}{\omega_{02} - \omega_{01}}$.

Решение уравнения выполнено на рис. Р.5.2; по этому графику находим точки пересечения кривой $y = z^3 + z^2$ с прямой $y = -0,0396 + 1,49z$:

$$z_1 = 0,8; \quad z_2 \approx -1,83; \quad z_3 = 0,04.$$

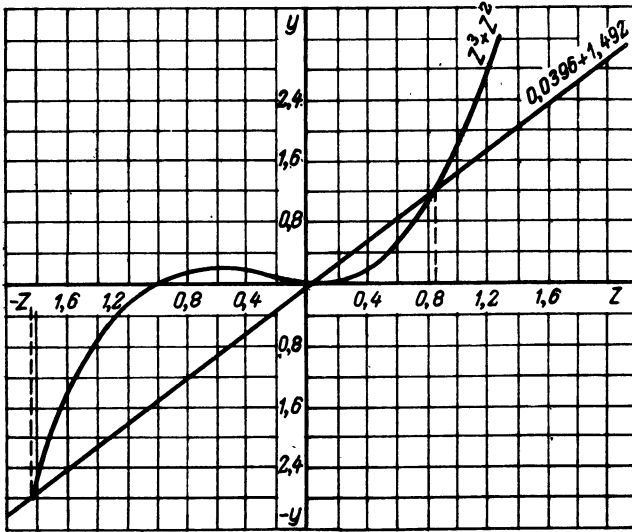


Рис. Р.5.2

Следовательно,

$$x_1 = z_1 \Delta\omega = -0,8 \cdot 0,09 \cdot 10^6 = -72 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$x_2 = z_2 \Delta\omega = 1,83 \cdot 0,09 \cdot 10^6 = 165 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$x_3 = z_3 \Delta\omega = -0,04 \cdot 0,09 \cdot 10^6 = -3,6 \cdot 10^4 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

Круговые частоты резонанса будут равны:

$$\omega_1 = x_1 + \omega_{02} = -72 \cdot 10^3 + 1,97 \cdot 10^6 = 1,898 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$$

$$\omega_2 = x_2 + \omega_{02} = 165 \cdot 10^3 + 1,97 \cdot 10^6 = 2,135 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$$

$$\omega_3 = x_3 + \omega_{02} = -3,6 \cdot 10^3 + 1,97 \cdot 10^6 = 1,966 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

и, наконец,

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1,898 \cdot 10^6}{6,28} = 0,302 \cdot 10^6 \text{ гц}; \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{2,135 \cdot 10^6}{6,28} = 0,340 \cdot 10^6 \text{ гц};$$

$$f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{1,966 \cdot 10^6}{6,28} = 0,314 \cdot 10^6 \text{ гц};$$

В заключение задачи следует отметить, что система, состоящая из двух неодинаковых связанных контуров, не всегда будет иметь три резонансные частоты, даже при условии $A > 1$, так как прямая (рис. Р. 5.2) может пересечь кривую $z^3 + z^2$ только в одной точке. Физически это означает, что расстройка контуров друг по отношению к другу велика, и для того, чтобы влияние одного контура на другой было существенным (т. е. таким, при котором возникает двугорбость в общей резонансной кривой), необходимо иметь достаточно большую связь.

● 5.28. Расчет проводим по ф-ле (5.14):

$$K(\omega) = \frac{QA}{\sqrt{(A^2 + 1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}$$

В качестве независимой переменной возьмем текущую частоту ω , определяемую из формулы

$$\xi = \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha},$$

т. е.

$$\omega = \omega_0 + \alpha\xi.$$

Коэффициент α найдем из выражения

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{2\pi f_0}{2Q} = \frac{2\pi \cdot 810 \cdot 10^3}{2 \cdot 30} = 8,5 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Фактор связи A по условиям задачи будет равен

$$A = \frac{X_{св}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{20}{10} = 2.$$

Исходная формула примет вид

$$K(\omega) = \frac{60}{\sqrt{(5 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}.$$

Теперь, последовательно задаваясь значениями ξ (т. е. значениями частоты ω), определяем значения $K(\omega)$.

Максимальные значения $K(\omega)$ примет в точках, определяемых ф-лами (5.11):

$$\xi_{1,2} = \pm \sqrt{A^2 - 1} = \pm \sqrt{2^2 - 1} = \pm 1,73.$$

При этих значениях

$$K(\omega) = \frac{Q}{2} = \frac{30}{2} = 15,$$

$$U_2 = K(\omega) U_1 = 15 \cdot 0,1 = 1,5 \text{ в.}$$

График $K(\omega) = f(\omega)$ и $U_2 = f(\omega)$ в заданном диапазоне частот изображен на рис. Р. 5.3.

● 5.32. Находим индуктивность

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 6 \cdot 10^5)^2 \cdot 250 \cdot 10^{-12}} = 282 \cdot 10^{-6} \text{ гн} = 282 \text{ мкгн.}$$

Фактор связи [ф-ла (5.20)]

$$A = \frac{1}{y_0} + \sqrt{\left(\frac{1}{y_0}\right)^2 - 1} = \frac{1}{0,707} + \sqrt{\frac{1}{0,707^2} - 1} = 2,41.$$

Активное сопротивление контура рассчитываем по ф-ле (5.24):

$$R = \frac{L2\Delta\omega^*}{\sqrt{2}\sqrt{A^2-1}} = \frac{282 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 2}{1,41\sqrt{2,41^2-1}} = 4,6 \text{ ом.}$$

Сопротивление связи

$$X_{св} = AR = 2,41 \cdot 4,6 \approx 11,1 \text{ ом.}$$

Коэффициент взаимной индукции

$$M = \frac{X_{св}}{\omega} = \frac{11,1}{6,28 \cdot 600 \cdot 10^3} = 2,24 \cdot 10^{-6} \text{ гн} = 2,94 \text{ мкгн.}$$

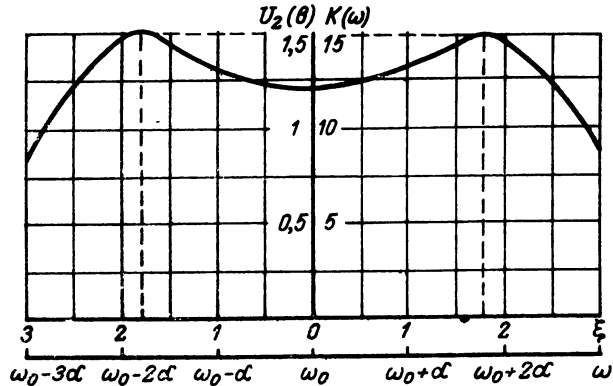


Рис. Р.5.3

5.34. Резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^{-12}}} = 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

Фактор связи

$$A = \frac{X_{св}}{R} = \frac{\omega_0 M}{R} = \frac{10^6 \cdot 340 \cdot 10^{-6}}{240} = 1,415.$$

Частоты связи [ф-ла (5.12)]

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \omega_0 \pm \alpha \sqrt{A^2 - 1} = \omega_0 \pm \frac{R}{2L} \sqrt{A^2 - 1} = \\ &= 10^6 \pm \frac{240}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} \sqrt{1,415^2 - 1} = (10^6 \pm 12 \cdot 10^3) \frac{\text{рад}}{\text{сек}}. \end{aligned}$$

Величина y_0 [ф-ла (5.17)]:

$$y_0 = \frac{2A}{A^2 + 1} = \frac{2 \cdot 1,415}{1,415^2 + 1} = 0,945.$$

Полоса пропускания [ф-ла (5.18)]

$$\begin{aligned} 2\Delta\omega^* &= \alpha 2\sqrt{2}\sqrt{A^2 - 1} = 12 \cdot 10^3 \cdot 2,82 \cdot 1 = 33,8 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}; \\ 2\Delta f^* &= \frac{2\Delta\omega^*}{2\pi} = \frac{33,8 \cdot 10^3}{6,28} = 5,38 \cdot 10^3 \text{ гц.} \end{aligned}$$

- 5.36. Воспользуемся формулой, полученной в предыдущей задаче,

$$\Delta\omega^* = \pm 1,41\alpha$$

и перепишем ее в следующем виде:

$$\Delta\omega^* = \pm 1,41 \frac{\alpha}{\omega_0} = \pm 1,41 \frac{1}{2Q} \omega_0.$$

Решая последнее уравнение относительно Q , имеем

$$Q = \pm \frac{1,41}{2} \frac{\omega_0}{\Delta\omega_0}.$$

В данном случае знак «минус» можно опустить:

$$Q = 1,41 \frac{f_0}{2\Delta f^*} = 1,41 \frac{600}{12} = 70,5.$$

- 5.40. Из основных уравнений связанной системы:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 + i \dot{I}_2 X_{св}; \quad 0 = \dot{I}_2 Z_2 + i \dot{I}_1 X_{св}$$

находим связь между токами \dot{I}_2 и \dot{I}_1 :

$$\dot{I}_2 = -i \dot{I}_1 \frac{X_{св}}{Z_2}.$$

Модуль тока во втором контуре (с учетом того, что контур настроен в резонанс) равен

$$I_2 = I_1 \frac{X_{св}}{R_2}.$$

Модуль напряжения на конденсаторе

$$U_2 = I_2 \frac{1}{\omega C} = I_1 \frac{\omega M}{R_2} \frac{1}{\omega C}.$$

Подставляя условия задачи, находим

$$U_2 = 0,17 \cdot 10^{-6} \frac{20 \cdot 10^{-6}}{8} \frac{1}{300 \cdot 10^{-12}} = 1,42 \cdot 10^{-3} \text{ в.}$$

- 5.44. Из условия первого частного резонанса

$$X_1 = -X_{вн} = \frac{X_{св}^2}{|Z_2|^2} X_2$$

можно рассчитать сопротивление X_1 :

$$X_1 = \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + X_2^2} X_2,$$

а затем по известному X_1 определить C_1 .

Найдем X_2 :

$$X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 2\pi \cdot 700 \cdot 10^3 \cdot 250 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{2\pi \cdot 700 \cdot 10^3 \cdot 900 \cdot 10^{-12}} = 847 \text{ ом.}$$

Теперь найдем X_1 :

$$X_1 = \frac{(2\pi \cdot 700 \cdot 10^3)^2 (40 \cdot 10^{-6})^2}{100^2 + 847^2} 847 = 36 \text{ ом.}$$

Из выражения

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = X_1$$

определим емкость C_1 :

$$C_1 = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\omega L_1 - X_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 0,7 \cdot 10^6} \frac{1}{2\pi \cdot 0,7 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 10^{-6} - 36} = 270 \cdot 10^{-12} \text{ ф} = 270 \text{ нф}.$$

● 5.47. Искомая частота определится из выражения (5.25)

$$\xi_{20} = A^2 \frac{\xi_1}{1 + \xi_1^2},$$

откуда

$$\omega_{02} = \omega - \alpha_2 \xi_{20}.$$

Найдем α_1 , ξ_1 , A , α_2 и ξ_{20} :

$$\alpha_2 = \frac{\omega_{01}}{2Q_1} = \frac{2\pi f_{01}}{2Q_1} = \frac{2\pi \cdot 610 \cdot 10^3}{2 \cdot 60} = 31,9 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{сек}};$$

$$\xi_1 = \frac{\Delta\omega_1}{\alpha_1} = \frac{2\pi\Delta f_1}{\alpha_1} = \frac{2\pi(f - f_{01})}{\alpha_1} = \frac{2\pi(600 - 610)}{31,9 \cdot 10^3} = -1,97;$$

$$A = \frac{X_{\text{св}}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{2\pi fM}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{2\pi \cdot 600 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{12 \cdot 6}} = 5,44;$$

$$\alpha_2 = \frac{R_2}{2L_2} = \frac{16}{2 \cdot 360 \cdot 10^{-6}} = 22,2 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{сек}};$$

$$\xi_{20} = A^2 \frac{\xi_1}{1 + \xi_1^2} = 5,44^2 \frac{-1,97}{1 + (1,97)^2} = -11,9.$$

Теперь найдем частоту f_{02} :

$$f_{02} = \frac{1}{2\pi} (\omega - \alpha_2 \xi_{20}) = \frac{1}{2\pi} (2\pi \cdot 600 \cdot 10^3 + 22,2 \cdot 10^3 \cdot 11,9) = 642 \cdot 10^3 \text{ гц}.$$

● 5.57. Расчет ведем по ф-лам (5.27)–(5.32). Вычислим вспомогательные величины:

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 2\pi \cdot 4,6 \cdot 10^5 \cdot 400 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{2\pi \cdot 4,6 \cdot 10^5 \cdot 310 \cdot 10^{-12}} = 40 \text{ ом};$$

$$X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 2\pi \cdot 4,6 \cdot 10^5 \cdot 410 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{2\pi \cdot 4,6 \cdot 10^5 \cdot 290 \cdot 10^{-12}} = -12 \text{ ом};$$

$$\xi_1 = \frac{X_1}{R_1} = \frac{40}{16} = 2,5;$$

$$\xi_2 = \frac{X_2}{R_2} = \frac{-12}{14} = -0,858 \approx -0,86;$$

$$A = \frac{X_{\text{св}}}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{2,89 \cdot 10^6 \cdot 36 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{16 \cdot 14}} = 6,95;$$

$$R_3 = R_1 \left(1 + \frac{A_2}{1 + \xi_2^2} \right) = 16 \left(1 + \frac{6,95^2}{1 + 0,86^2} \right) = 460 \text{ ом};$$

$$X_3 = X_1 \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \frac{\xi_2}{\xi_1} \right) = 40 \left(1 - \frac{6,95^2}{1 + 0,86^2} \frac{(-0,86)}{2,5} \right) = 422 \text{ ом}.$$

Мощность, расходуемая в первом контуре:

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{R_3^2 + X_3^2} R_1 = \frac{1}{2} \frac{100^2}{460^2 + 422^2} 16 = 0,205 \text{ вт}.$$

Мощность, расходуемая во втором контуре:

$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{U_1^2}{R_3^2 + X_3^2} R_1 \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} = P_1 \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} = 0,205 \cdot 27,7 = 5,68 \text{ вт}.$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{A^2}{A^2 + 1 + \xi_2^2} = \frac{48,3}{48,3 + 1 + 0,74} = 0,966.$$

Теперь рассчитаем оптимальную связь из условия $A=1$:

$$M_{\text{опт}} = \frac{1}{\omega} \sqrt{R_1 R_2} = \frac{1}{2,89 \cdot 10^6} \sqrt{16 \cdot 14} = 5,18 \text{ мкгн}.$$

Если оба контура настроить в резонанс с частотой ω , то мощность, расходуемая во втором контуре, будет максимально возможной и будет равна

$$P_{\text{макс макс}} = \frac{U_1^2}{8R_1} = \frac{100^2}{8 \cdot 16} \approx 78 \text{ вт}.$$

- 5.61. По ф-ле (5.64) имеем:

$$\text{tg } \varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1} = - \frac{2\xi}{A^2 + 1 - \xi^2} = - \frac{2 \cdot 0,8}{1,6^2 + 1 - 0,8^2} = -0,548;$$

$$\varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1} = -28^\circ 45'.$$

- 5.62. В данном случае воспользуемся ф-лой (5.33):

$$\text{tg } \varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1} = - \frac{\xi_1 + \xi_2}{A^2 + 1 - \xi_1 \xi_2} = - \frac{2,5 - 0,86}{6,95^2 + 1 + 2,5 \cdot 0,86} = -0,032;$$

$$\varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1} = -1^\circ 50'.$$

6.

- 6.2. Решим исходное уравнение (см. задачу 6.1)

$$K(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} \right)^2}}$$

относительно L :

$$L = \frac{R}{\omega} \sqrt{\frac{1}{K^2(\omega)} - 1} \approx \frac{R}{\omega K(\omega)}.$$

Подставляя условия задачи, находим

$$L = \frac{0,03}{2\pi \cdot 350 \cdot 0,1} \approx 1,36 \cdot 10^{-4} \text{ гн} = 136 \text{ мкгн}.$$

● 6.4. Построив графики для трех характерных значений отношения $R_{\text{вн}}$ к R (рис. Р.6.1), можем сделать следующие выводы:

1. $R_{\text{вн}} \ll R$. Подобные условия встречаются при питании цепей накала мощных ламп от генераторов постоянного тока с неизбежными пульсациями. В этих

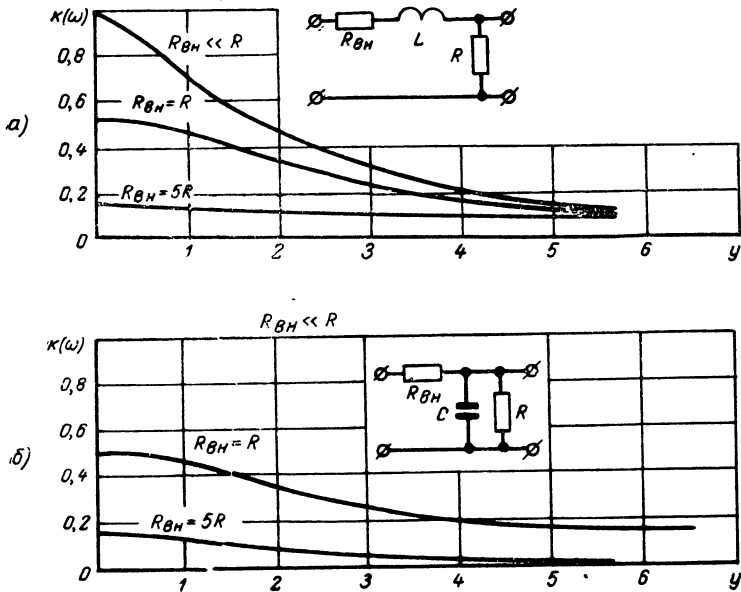


Рис. Р.6.1

схемах, как это видно из графиков, следует применять дроссельный фильтр (конденсаторный фильтр фильтрации не дает).

2. $R_{\text{вн}} \gg R$. При этих условиях дроссельный фильтр имеет малое фильтрующее действие; лучше применять конденсаторный фильтр.

3. $R_{\text{вн}}$ сопоставимо с нагрузочным сопротивлением. При этих условиях фильтры имеют одинаковые характеристики, и выбирать ту или иную схему нужно, исходя из дополнительных соображений (которые нужно принимать во внимание при любых условиях):

$$R \ll \omega L, \quad R \gg \frac{1}{\omega C},$$

где ω — частота напряжения, которое фильтр должен уменьшить.

● 6.5. Решая уравнение амплитудно-частотной характеристики (см. задачу 6.1) относительно C , получаем

$$C = \frac{1}{\omega R_{\text{вн}}} \sqrt{\frac{1}{K^2(\omega)} - \left(1 + \frac{R_{\text{вн}}}{R}\right)^2}.$$

Если ослабление велико, т. е. $K(\omega) \ll 1$, а $R_{вн}$ меньше или сопоставимо с R , вторым членом подкоренного выражения можно пренебречь и формула упростится:

$$C \approx \frac{1}{\omega R_{вн} K(\omega)}.$$

● 6.6. В данном случае можно пользоваться приближенной формулой (см. задачу 6.5):

$$C = \frac{1}{\omega R_{вн} K(\omega)} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 60 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{30}} \approx 1,59 \cdot 10^{-6} \phi = 1,59 \text{ мкф}.$$

● 6.10. Перепишем выражение амплитудно-частотной характеристики

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega L}{R} \omega CR\right)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$$

с учетом ранее введенных обозначений $\frac{\omega L}{R} = y$; $\omega CR = x$

в виде

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - xy)^2 + y^2}}.$$

Между переменными x и y легко установить связь:

$$\frac{x}{y} = \frac{\omega RC}{\omega L} R = \frac{R^2 C}{L} = \frac{R^2}{\frac{L}{C}} = \left(\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2.$$

Обозначив $\frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = D$, получим:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{D^2}; \quad x = \frac{1}{D^2} y; \quad y = D^2 x.$$

Вводя последнее обозначение в выражение $K(\omega)$, окончательно напишем.

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - D^2 x^2) + D^4 x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{D^2}\right) + y^2}}.$$

По последним выражениям легко построить семейство амплитудно-частотных характеристик для различных значений D .

Дифференцируя последнее выражение по x и приравнявая производную нулю, получаем уравнение, из которого можно определить значения x , соответствующие экстремальным значениям $K(\omega)$:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \sqrt{\frac{2 - D^2}{2D^2}}.$$

Второй экстремум имеет место только при условии $D < 1,41$.

Подставляя значения корней x_1 и x_2 в выражение $K(\omega)$, получаем два экстремальных значения $K(\omega_1)$ и $K(\omega_2)$:

$$K(\omega_1) = 1, \quad K(\omega_2) = \frac{1}{D \sqrt{1 - 0,25D^2}}.$$

Графики, построенные для трех значений D : 1) $D=1$; 2) $D=2$; 3) $D=0,5$, изображены на рис. Р.6.2.

● 6.11. Расчетной формулой будет служить выражение, полученное в задаче 6.8:

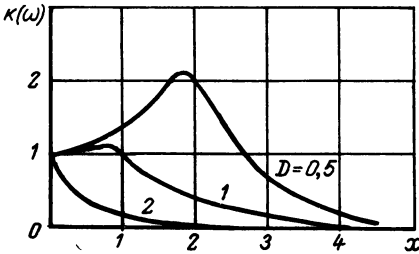


Рис. Р.6.2

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}.$$

Легко установить, что вторым членом в подкоренном выражении при данных условиях можно пренебречь. Тогда, подставляя условия задачи и избавляясь от радикала, получим

$$\pm (1 - \omega^2 LC) = \frac{1}{K(\omega)} = 80.$$

Совершенно очевидно, что перед скобками нужно сохранить знак «минус», так как для того, чтобы данное равенство удовлетворялось, величина $\omega^2 LC$ должна быть равна 81.

Решая последнее уравнение относительно L , находим

$$L = \frac{81}{4\pi^2 \cdot 50^2 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = 27,4 \text{ мк.}$$

● 6.12. Как и в предыдущей задаче, вторым членом подкоренного выражения можно пренебречь, тогда:

$$\pm (1 - \omega^2 LC) = \frac{1}{K(\omega)} = 350; \quad \omega^2 LC = 351;$$

$$C = \frac{351}{\omega^2 L} = \frac{351}{4\pi^2 \cdot 50^2 \cdot 20} \approx 178 \cdot 10^{-6} \text{ ф} = 178 \text{ мкф.}$$

● 6.14. 1. Конденсатор C_p предотвращает проникновение постоянного тока в контур. Падение напряжения на конденсаторе должно быть много меньше, чем на контуре, т. е.

$$\frac{1}{\omega_0 C_p} \ll R_{\alpha},$$

откуда

$$C_p \gg \frac{1}{\omega_0 R_{\alpha}}.$$

Примем, что

$$C_p \approx \frac{20}{\omega_0 R_{\alpha}}.$$

2. Индуктивность L_p должна представлять значительное сопротивление для тока частоты ω_0 , т. е.

$$\omega_0 L_p \gg R_{\alpha},$$

откуда

$$L_p \gg \frac{R_{\alpha}}{\omega_0}.$$

Примем, что

$$L_p \approx \frac{20R_x}{\omega_0}.$$

3. Сопротивление конденсатора C_6 должно быть очень мало для тока частоты ω_0 (значительно меньше внутреннего сопротивления R_6 источника питания), т. е.

$$\frac{1}{\omega_0 C_6} \ll R_6,$$

откуда

$$C_6 \gg \frac{1}{\omega_0 R_6}.$$

Примем, что

$$C_6 \approx \frac{20}{\omega_0 R_6}.$$

● 6.15. По формулам, полученным в предыдущей задаче, находим:

$$C_p \approx \frac{20}{\omega_0 R_x} = \frac{20}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 10^4} \approx 100 \cdot 10^{-12} \text{ ф} = 100 \text{ пф};$$

$$L_p = \frac{20 R_x}{\omega_0} = \frac{20 \cdot 10^4}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^6} \approx 0,01 \text{ гн} = 10 \text{ мкн}.$$

● 6.17. Исходными являются выражения (6.7) и (6.8). При обозначениях, соответствующих табл. 6.1, коэффициент $A = A_1 + iA_2$ для Т- и П-образной схем одинаков. По табл. 2.3 коэффициентов четырехполюсников, принимая во внимание схемы звеньев фильтров нижних и верхних частот (табл. 6.1), легко находим:

$$A = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2};$$

$$\text{ФНЧ} \quad A = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 LC;$$

$$\text{ФВЧ} \quad A = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2 LC}.$$

Пользуясь ф-лой (6.9), находим граничные частоты полосы прозрачности:

$$\text{ФНЧ} \quad \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}};$$

$$\text{ФВЧ} \quad \omega_0 = \frac{1}{2 \sqrt{LC}}.$$

Вводя обозначение $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$, перепишем выражение для коэффициента A .

$$\text{ФНЧ} \quad A = 1 - 2\eta^2;$$

$$\text{ФВЧ} \quad A = 1 - \frac{2}{\eta^2}.$$

Теперь непосредственно по ф-лам (6.7) и (6.8) получаем искомые характеристики.

| В полосе прозрачности | Вне полосы прозрачности |
|--|--|
| $a = 0$ $\Phi_{НЧ}$ $\cos b = 1 - 2\gamma_1^2$ ¹⁾ | $\operatorname{ch} a = 2\gamma_1^2 - 1$ $\Phi_{НЧ}$ $b = \pm \pi$ |
| $a = 0$ $\Phi_{ВЧ}$ $\cos b = 1 - \frac{2}{\gamma_1^2}$ | $\operatorname{ch} a = \frac{2}{\gamma_1^2} - 1$ $\Phi_{ВЧ}$ $b = \pm \pi$ |

Знак фазовой характеристики выбирается условно (ввиду четности функции \cos непосредственно из формулы знак не вытекает). При желании знак фазовой характеристики можно определить из дополнительных соображений, например, из ф-лы (2.19):

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_2}.$$

Полагая, что фильтр нагружен на активное сопротивление, равное номинальному характеристическому ($Z_2 = R_0$), и находя из табл. 2.3 коэффициенты A_{11} и A_{12} для фильтра нижних частот, получаем

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} + i \frac{\omega L}{\rho}.$$

Отсюда видно, что в полосе прозрачности, т. е. когда $\frac{\omega^2 LC}{2} < 1$, напряжение \dot{U}_1 опережает \dot{U}_2 и сдвиг фаз положительный. Заметим, что достаточно определить фазовый сдвиг в одной точке.

Выражения для характеристического сопротивления находятся после подстановки значений B и C в ф-лу (6.6). Используя уже введенное обозначение $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$, получаем:

$$\begin{aligned} Z_{ст} &= \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \eta^2}; & Z_{ст} &= \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}}; \\ Z_{сп} &= \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}}; & Z_{сп} &= \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}}}. \end{aligned}$$

¹⁾ Это выражение можно представить в виде: $\sin \frac{b}{2} = \eta$. Аналогично может быть преобразовано выражение и для фильтра верхних частот.

Из графиков, соответствующих последним формулам (рис. Р.6.3), видно, что для части полосы прозрачности характеристическое сопротивление мало отличается от номинального ($\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$).

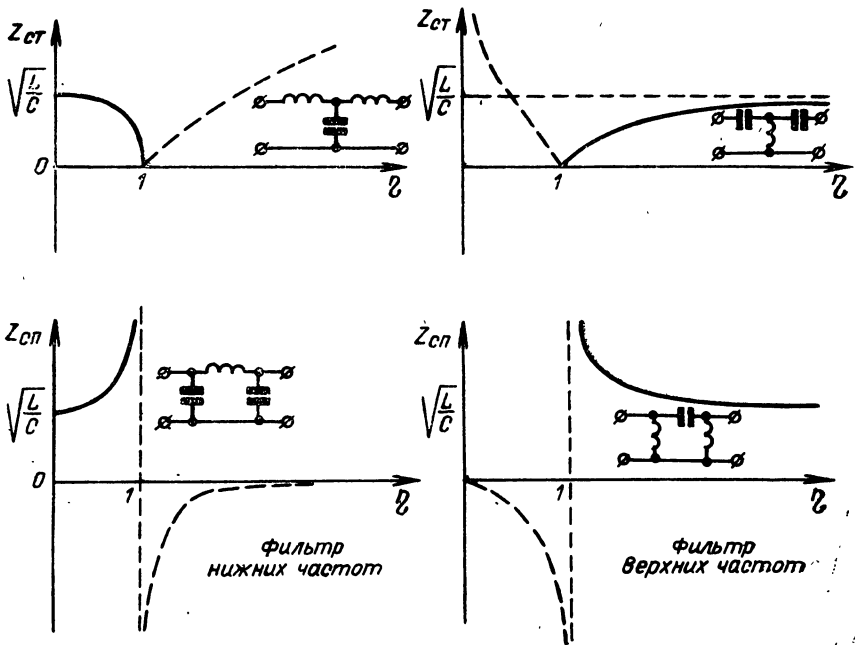


Рис. Р.6.3

- 6.19. По формулам табл. 6.1 находим:

$$L = 2 \frac{R_0}{\omega_0} = 2 \frac{600}{2\pi \cdot 10^4} = 0,0191 \text{ гн} = 19,1 \text{ мгн};$$

$$C = 2 \frac{1}{R_0 \omega_0} = \frac{2}{600 \cdot 2\pi \cdot 10^4} = 0,053 \cdot 10^{-6} \text{ ф} = 0,053 \text{ мкф.}$$

- 6.21. Расчет затухания ведем по формуле

$$\text{ch } a = 2\eta^2 - 1.$$

В данном случае

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} = \frac{20,000}{10,000} = 2$$

и, следовательно,

$$\text{ch } a = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7.$$

По таблицам гиперболических функций находим, что

$$a = 2,64 \text{ неп.}$$

Выражая затухание в децибелах, получим

$$a_{\text{дб}} = 8,7 \cdot a_{\text{неп}} = 8,7 \cdot 2,64 \approx 23 \text{ дб.}$$

Найдем в заключение отношение амплитуд входа и выхода.
Так как

$$a = \ln \frac{U_1}{U_2},$$

то

$$\frac{U_1}{U_2} = e^a = e^{2,64}, \text{ т. е. } \frac{U_1}{U_2} \approx 14.$$

● 6.23. Исходное выражение $\text{ch } a = 2\eta^2 - 1$

решим относительно $\eta \left(\eta = \frac{\omega}{\omega_0} \right)$:

$$\eta = \sqrt{\frac{\text{ch } a + 1}{2}}.$$

Следовательно,

$$f = f_0 \sqrt{\frac{\text{ch } a + 1}{2}} = 10\,000 \sqrt{\frac{\text{ch } 2,4 + 1}{2}} = 18\,100 \text{ гц}.$$

● 6.24. Исходная формула

$$\cos b = 1 - 2\eta^2.$$

В данном случае

$$\eta = \frac{f}{f_0} = \frac{5000}{10\,000} = \frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$\cos b = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,5; \quad b = 60^\circ.$$

● 6.27. Определим затухание a фильтра на заданной частоте, которое можно получить при включении одного звена:

$$\text{ch } a 2\eta^2 - 1 = 2 \cdot 1,25^2 - 1 = 2,12;$$

$$\eta = \frac{f}{f_0} = \frac{25}{20} = 1,25;$$

$$a = 1,38 \text{ nep} = 1,38 \cdot 8,69 = 12 \text{ db}.$$

Такое затухание удовлетворяет условию задачи.

Так как по условию нагрузочное сопротивление фильтра $R_1 = R_0 = 50 \text{ ком}$, сопротивление R_2 находим из уравнения

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 50,$$

откуда

$$R_2 = \frac{50 R_1}{R_1 - 50} = \frac{50 \cdot 200}{200 - 50} = 66 \text{ ком}.$$

По формулам табл. 6.1 рассчитаем:

$$L = 2 \frac{R_0}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3} \approx 0,8 \text{ гн};$$

$$C = \frac{2}{\omega_0 R_0} = \frac{2}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^3} = 320 \cdot 10^{-12} \text{ ф} = 320 \text{ пф}.$$

- 6.28. По формулам табл. 6.1 находим:

$$L = \frac{1}{2} \frac{R_0}{\omega_0} = \frac{2000}{2 \cdot 2\pi \cdot 12000} = 13,25 \cdot 10^{-3} \text{ гн} = 13,25 \text{ мгн};$$

$$C = \frac{1}{2} \frac{1}{R_0 \omega_0} = \frac{1}{2 \cdot 2000 \cdot 2\pi \cdot 12000} = 3320 \cdot 10^{-12} \text{ ф} = 3320 \text{ пф}.$$

- 6.34. В формулу

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{2R_0}{L_1}$$

подставим значение ω_1 из равенства $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$, в результате чего получим

$$\omega_2^2 - \frac{2R_0}{L_1} \omega_2 - \omega_0^2 = 0.$$

Решив квадратное уравнение, найдем

$$\omega_2 = \frac{R_0}{L_1} \pm \sqrt{\frac{R_0^2}{L_1^2} + \omega_0^2}.$$

Знак «минус» отбросим, так как частота не может быть отрицательной.

Подставим в выражение для ω_2 значения $R_0 = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$ и $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$:

$$\omega_2 = \omega_0 \left(\sqrt{\frac{L_2}{L_1} + 1} + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \right).$$

Аналогично для частоты ω_1 :

$$\omega_1 = \omega_0 \left(\sqrt{\frac{L_2}{L_1} + 1} - \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \right).$$

- 6.35. По условиям задачи:

$$L_1 = 160 \text{ мгн}; \quad C_1 = 0,5 \text{ мкф};$$

$$L_2 = 160 \text{ мгн}; \quad C_2 = 0,5 \text{ мкф}$$

(здесь учтены условности обозначений, принятых в табл. 6.1).

Подставляя условия задачи в расчетные формулы, находим:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{160 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}} = 3,54 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}};$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 564 \text{ гц};$$

$$f_1 = f_0 \left(\sqrt{\frac{L_2}{L_1} + 1} - \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \right) = 564 (\sqrt{1+1} - \sqrt{1}) \approx 230 \text{ гц};$$

$$f_2 = f_0 \left(\sqrt{\frac{L_2}{L_1} + 1} + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \right) = 564 (\sqrt{1+1} + \sqrt{1}) \approx 1360 \text{ гц};$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} = \sqrt{\frac{160 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-6}}} = 565 \text{ ом}.$$

● 6.41. Рассмотрим два согласованно включенных четырехполюсника (рис. Р.6.4). Характеристическая постоянная передачи всей цепи равна

$$g_c = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_3}$$

или

$$g_c = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} \frac{P_2}{P_3} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{P_2}{P_3},$$

т. е.

$$g_c = g_{c1} + g_{c2}.$$

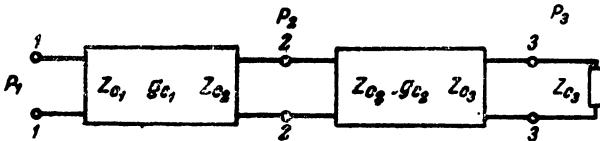


Рис. Р.6.4

Аналогично доказывается равенство для общего случая:

$$g_c = \sum_{i=1}^l g_{ci}.$$

Из этих формул следует, что при согласованном включении суммируются характеристические затухания и характеристические фазы четырехполюсников.

● 6.42. В данном случае имеет место согласованное включение и, следовательно,

$$g_c = g_{c1} + g_{c2} + g_{c3}; \quad a_c = a_{c1} + a_{c2} + a_{c3}; \quad b_c = b_{c1} + b_{c2} + b_{c3}.$$

Характеристические сопротивления со стороны зажимов 1—1' и 2—2' одинаковы и равны Z_{c1} .

● 6.44. Проводя опыты «холостого хода» и «короткого замыкания», находим:

$$Z_{xx1} = Z_2; \quad Z_{xx2} = Z_1 + Z_2; \quad Z_{кз1} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad Z_{кз2} = Z_1.$$

Характеристические параметры определяем по ф-лам (6.16), (6.17) и (6.18):

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{Z_{кз1} \cdot Z_{xx1}}{Z_{кз2} \cdot Z_{xx2}}} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot Z_2} = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{\sqrt{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}};$$

$$Z_{c2} = \sqrt{\frac{Z_{кз2} \cdot Z_{xx2}}{Z_{кз1} \cdot Z_{xx1}}} = \sqrt{Z_1 Z_2} \sqrt{1 + \frac{Z_1}{Z_2}};$$

$$g_c = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}}.$$

● 6.45. Из равенства (6.19) составим вспомогательные уравнения:

$$AB = Z_{c_1} \operatorname{ch} g_c \operatorname{sh} g_c; \quad DB = Z_{c_2} \operatorname{ch} g_c \operatorname{sh} g_c;$$

$$CD = \frac{1}{Z_{c_1}} \operatorname{ch} g_c \operatorname{sh} g_c; \quad CA = \frac{1}{Z_{c_2}} \operatorname{ch} g_c \operatorname{sh} g_c.$$

которые дают:

$$\frac{AB}{CD} = Z_{c_1}^2; \quad \frac{DB}{CA} = Z_{c_2}^2.$$

Отсюда находим:

$$Z_{c_1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}; \quad Z_{c_2} = \sqrt{\frac{DB}{AC}}.$$

Для определения g_c из равенств (6.19) найдем:

$$AD = \operatorname{ch}^2 g_c; \quad \operatorname{ch} g_c = \sqrt{AD};$$

$$BC = \operatorname{sh}^2 g_c; \quad \operatorname{ch} g_c = \sqrt{BC},$$

так как

$$e^{g_c} = \operatorname{ch} g_c + \operatorname{sh} g_c,$$

то

$$g_c = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}).$$

● 6.47. От заданной схемы (рис. 6.16) можно перейти к схеме рис. P.6.5, которая представляет собой согласованное включение двух Γ -образных четырехполюсников, рассмотренных в задаче 6.44.

Напомним, что для Γ -образного четырехполюсника:

$$Z_{c_1} = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{\sqrt{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}}; \quad g_{c_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}}.$$

Так как входные и выходные характеристические сопротивления Π -образного четырехполюсника одинаковы, то

$$Z_{c_{вх}} = Z_{c_{вых}} = Z_{c_1}.$$

Характеристическая постоянная передачи

$$g_c = g_{c_1}^{(1)} + g_{c_2}^{(2)} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}} = \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}}.$$

● 6.50. Разобьем фильтр (рис. P.6.6) на два согласованно включенных Г-образных фильтра, для каждого из которых характеристические параметры были определены в предыдущих задачах. С учетом рекомендованных обозначений получим для каждого полузвена:

$$Z_{c_1} = R_0 \sqrt{1 - \eta^2}; \quad Z_{c_2} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \eta^2}};$$

$$g_{c_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{\eta^2}{\eta^2 - 1}}}{1 - \sqrt{\frac{\eta^2}{\eta^2 - 1}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} - 1}.$$

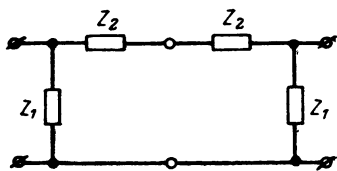


Рис. P.6.5

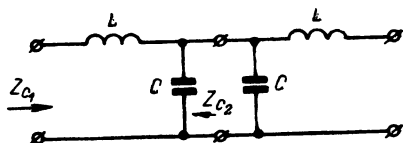


Рис. P.6.6

Характеристические параметры звена:

$$Z_c = Z_{c_1} = R_0 \sqrt{1 - \eta^2}, \quad a_c = \ln \left| \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} - 1} \right|,$$

$$g_c = \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} - 1},$$

$$b_c = \arg \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} - 1} \right).$$

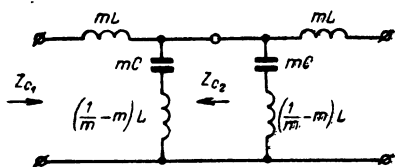


Рис. P.6.7

● 6.52. Представим схему звена фильтра в виде согласованного включения двух Г-образных фильтров (рис. P.6.7), для которых характеристические параметры в общем виде были найдены в предыдущих задачах.

Находим характеристическое сопротивление полузвена:

$$Z_{c_1} = \sqrt{i \omega mL \left[i \omega L \left(\frac{1}{m} - m \right) + \frac{1}{i \omega mC} \right]} \sqrt{1 + \frac{i \omega mL}{i \omega L \left(\frac{1}{m} - m \right) + \frac{1}{i \omega mC}}}.$$

После элементарных преобразований получаем

$$Z_{c_1} = R_0 \sqrt{1 - \eta^2}.$$

Характеристическая постоянная передачи полузвена

$$g_{c_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{i\omega mL}{i\omega\left(\frac{1}{m} - m\right)L + \frac{1}{i\omega mC} + i\omega mL}}} {1 - \sqrt{\frac{i\omega mL}{i\omega\left(\frac{1}{m} - m\right)L + \frac{1}{i\omega mC} + i\omega mL}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} + m}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} - m}.$$

Теперь найдем характеристические параметры звена:

$$Z_c = Z_{c_1} = R_0 \sqrt{1 - \gamma^2};$$

$$g_c = 2g_{c_1} = \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} + m}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} - m}.$$

● 6.54. График характеристического сопротивления строим по формуле

$$Z_c = R_0 \sqrt{1 - \eta^2};$$

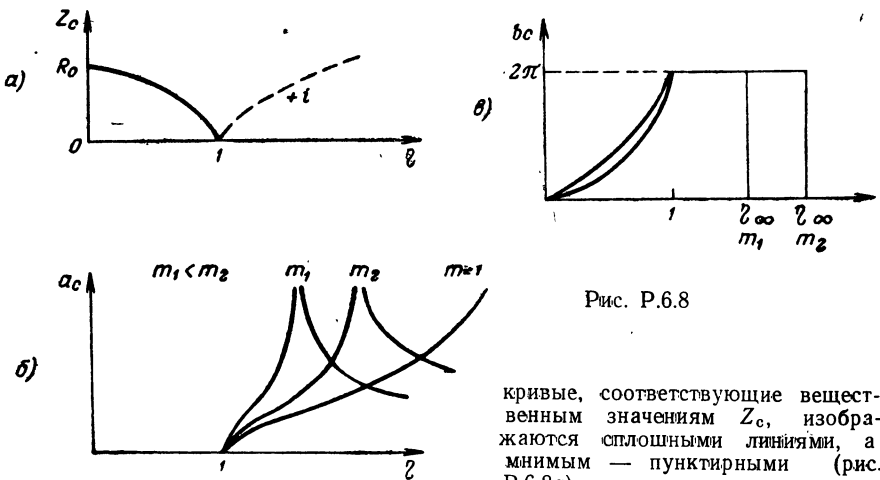


Рис. Р.6.8

кривые, соответствующие вещественным значениям Z_c , изображаются сплошными линиями, а мнимым — пунктирными (рис. Р.6.8а).

Характеристическое затухание определяется формулой

$$a_c = \ln \left| \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} + m}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} - m} \right|.$$

В пределах $0 < \eta < 1$, $a_c = 0$. При $\eta > 1$ затухание a_c начинает расти и при значении нормированной частоты

$$\eta_\infty = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}}$$

обращается в бесконечность. Затем затухание падает и с ростом η стремится к своему асимптотическому значению

$$\ln \frac{1 + m}{1 - m}.$$

В частном случае $m = 1$, и затухание при $\eta \rightarrow \infty$ также будет стремиться к бесконечности. Как следует из рис. 6.21 (задача 6.52), при этом схема фильтра упрощается, так как в вертикальном плече остается только емкость (фильтр типа К).

Семейство кривых $a_c(\eta)$ дано на рис. Р.6.8б.

Характеристическая фаза определяется формулой

$$b_c = \arg \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} + m}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} - m} \right),$$

которую для построения графика целесообразно переписать в виде

$$\begin{aligned} b_c &= \arg \left(\frac{\sqrt{\eta^2 - 1} + m \eta}{\sqrt{\eta^2 - 1} - m \eta} \right) = \arg \left(\frac{1 + \frac{m \eta}{i \sqrt{1 - \eta^2}}}{1 - \frac{m \eta}{i \sqrt{1 - \eta^2}}} \right) = \\ &= 2 \arg \left(1 + i \frac{m \eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right). \end{aligned}$$

В полосе частот $0 < \eta < 1$ характеристическая фаза монотонно возрастает от 0 до 2π радиан. При частотах $1 < \eta < \eta_\infty$ характеристическая фаза остается равной 2π . На частоте $\eta = \eta_\infty$ фаза меняется скачком до 0, после чего остается равной нулю на всех частотах $\eta > \eta_\infty$ (скачок фазы считается возможным только в фильтрах, свободных от потерь, т. е. практически нереализуемых).

Семейство кривых $b_c(\eta)$ дано на рис. Р.6.8в.

● 6.56. Формула для x может быть получена из ур-ния (6.28)

$$\Delta a = \ln \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{1 - x^2}} + \sqrt[4]{1 - x^2} \right)$$

при помощи вывода, принадлежащего А. Ф. Белецкому.

Обозначим

$$\sqrt[4]{1 - x^2} = z$$

и выполним простые преобразования:

$$\Delta a = \ln \frac{1}{2} + \ln \left(z + \frac{1}{z} \right); \quad 2e^{\Delta a} = z + \frac{1}{z};$$

$$\Delta a + \ln 2 = \ln \left(z + \frac{1}{z} \right); \quad z^2 - 2e^{\Delta a} z + 1 = 0.$$

Решение последнего уравнения имеет два корня:

$$z_{1,2} = e^{\Delta a} \pm \sqrt{e^{2\Delta a} - 1},$$

но смысл имеет только один, что становится ясным, если переписать выражение корней в виде

$$z_{1,2} = e^{\Delta a} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{e^{2\Delta a}}} \right)$$

и сравнить его с введенным выше обозначением.

Итак,

$$z = e^{\Delta a} - \sqrt{e^{2\Delta a} - 1}.$$

Используя тождество

$$e^{\Delta a} - \sqrt{e^{2\Delta a} - 1} = \frac{1}{e^{\Delta a} + \sqrt{e^{2\Delta a} - 1}}.$$

находим

$$z^2 = \sqrt{1 - x^2} = \frac{e^{\Delta a} - \sqrt{e^{2\Delta a} - 1}}{e^{\Delta a} + \sqrt{e^{2\Delta a} - 1}}.$$

Решим последнее уравнение относительно x :

$$x^2 = 1 - \frac{(e^{\Delta a} - \sqrt{e^{2\Delta a} - 1})^2}{(e^{\Delta a} + \sqrt{e^{2\Delta a} - 1})^2} = \frac{4e^{\Delta a} \sqrt{e^{2\Delta a} - 1}}{(e^{\Delta a} + \sqrt{e^{2\Delta a} - 1})^2};$$

$$x = \frac{2\sqrt[4]{1 - e^{-2\Delta a}}}{1 + \sqrt{1 - e^{-2\Delta a}}}.$$

Вернемся теперь к задаче.

Подставляя значение $\Delta a = 0,115$ в выражение для x , находим

$$x = 0,926.$$

Подставляя найденное значение x в ф-лу (6.31), получим

$$R_0 = \frac{R_a}{\sqrt[4]{1 - x^2}} = \frac{600}{\sqrt[4]{1 - (0,926)^2}} \approx 980 \text{ ом.}$$

● 6.60.

1. По формуле (см. задачу 6.56)

$$x = \frac{2\sqrt[4]{1 - e^{-2\Delta a}}}{1 + \sqrt{1 - e^{-2\Delta a}}}$$

находим значение $\kappa=0,915$ и определяем граничную частоту

$$f_0 = \frac{f_x}{\kappa} = \frac{2700}{0,915} = 2950 \text{ гц.}$$

2. Для того чтобы в фильтре было минимальное число индуктивностей, следует остановиться на П-образных звеньях, для которых [Ф-ла (6.32)]

$$R_0 = R_2 \sqrt[4]{1 - \kappa^2} = 600 \sqrt[4]{1 - 0,915^2} = 390 \text{ ом.}$$

3. На специальном графике (рис. Р.6.9) наносим «требования», предъявляемые к характеристике затухания фильтра в полосе задерживания (штрих-пунктирная линия), увеличив затухание на 0,7 неп.

По шкале абсцисс откладываем переменную

$$u = \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}},$$

а по шкале ординат — характеристическое затухание a_c .

Масштабы рекомендуется выбирать следующим образом. На ось абсцисс наносится основная шкала 25-сантиметровой логарифмической линейки (логарифмический масштаб), а на ось ординат — линейная (1 неп — 2 см).

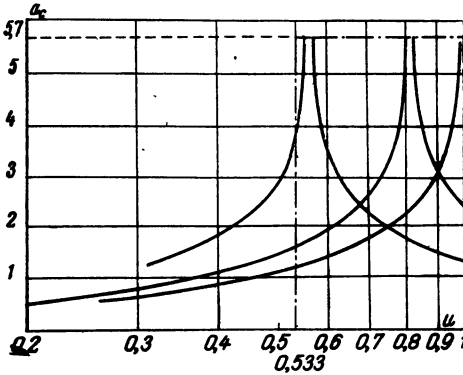


Рис. Р.6.9

По шкале u полоса задерживания занимает интервал $[0,533; 1]$, причем значению $u_k=0,533$ соответствует нормированная частота $\eta_k = \frac{f_k}{f_0} = \frac{3500}{2950}$, а $u=1$ — нормированная частота, равная ∞ .

4. При помощи шаблона (лекало) проводим ряд испытаний с целью определения числа звеньев, минимально необходимого для обеспечения заданных требований и их параметров m . Для изготовления лекала в описанной выше координатной системе строится график $a_c = f(u)$ при $m=1$ по Ф-ле (6.33). В результате получаем кривую, изображенную на рис. Р.6.10а. Лекало, изготовленное по этому рисунку и имеющее форму заштрихованной части, и будет являться шаблоном для построения характеристик звеньев.

Если требуется построить характеристику звена типа m , например, для случая $m=0,6$, то построение выполняется так, как показано на рис. Р.6.10б. В процессе испытаний вначале пытаемся применить одно звено. Убеждаемся, что при помощи одного звена предъявленные требования не могут быть выполнены. Добавляем еще одно звено и, меняя расположение всплесков затухания, вновь пытаемся подобрать характеристику, удовлетворяющую указанным требованиям. Один из вариантов испытания показан на рис. Р.6.10в. Здесь требования по затуханию выполняются в интервалах, помеченных скобками.

В результате испытаний устанавливаем, что при помощи трех звеньев со всплесками затухания при $u_1=0,56$, $u_2=0,815$, $u_3=1$ требования удовлетворяются. Значения u , соответствующие всплескам затухания, и есть значения m звеньев фильтра¹⁾. Таким образом фильтр составляется из трех звеньев с параметрами:

$$m_1 = 0,56; \quad m_2 = 0,815; \quad m_3 = 1.$$

¹⁾ Для того чтобы убедиться в этом, достаточно сопоставить формулу

$$u = \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} \text{ с формулой } m = \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}}, \text{ приведенной, например,}$$

в табл. 6.2.

5. Рассчитываем параметры фильтров по формулам табл. 6.2:

$$C = \frac{1}{2\pi f_0 R_0} = \frac{1}{6,28 \cdot 2950 \cdot 390} = 0,138 \cdot 10^{-6} \text{ ф;}$$

$$L = \frac{R_0}{2\pi f_0} = \frac{390}{6,28 \cdot 2950} = 21 \cdot 10^{-3} \text{ гн.}$$

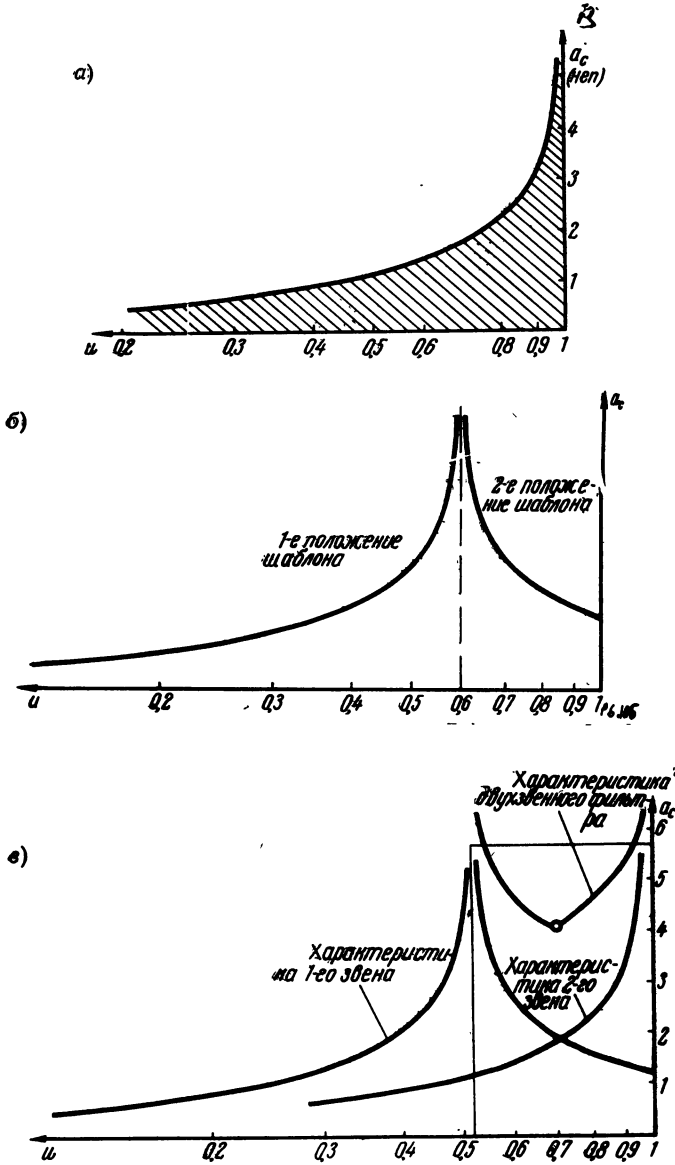


Рис. Р.6.10

Значения параметров элементов звеньев фильтра:
1-е звено ($m=0,56$):

$$mC = 0,077 \cdot 10^{-6} \text{ ф}, \quad 2mL = 23,5 \cdot 10^{-3} \text{ гн},$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - m \right) C = 0,084 \cdot 10^{-6} \text{ ф};$$

2-е звено ($m=0,815$):

$$mC = 0,112 \cdot 10^{-6} \text{ ф}, \quad 2mL = 34,2 \cdot 10^{-3} \text{ гн},$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - m \right) C = 0,0276 \cdot 10^{-6} \text{ ф};$$

3-е звено ($m=1$):

$$mC = 0,318 \cdot 10^{-6} \text{ ф}, \quad 2mL = 42 \cdot 10^{-3} \text{ гн}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - m \right) C = 0.$$

При соединении звеньев часть элементов можно объединить. Окончательная схема фильтра и значения элементов показаны на рис. Р.6.11.

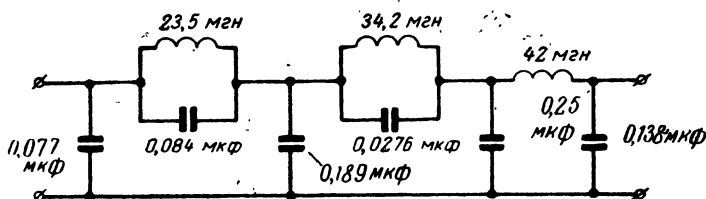


Рис. Р.6.11

● 6.62. 1. Для перехода к эквивалентному фильтру нижних частот найдем параметр f_0 из равенства

$$f_0 = f_x \cdot x,$$

в котором x определяется, как и прежде, формулой

$$x = \frac{2 \sqrt[4]{1 - e^{-2\Delta\alpha}}}{1 + \sqrt[4]{1 - e^{-2\Delta\alpha}}} = 0,926.$$

Теперь

$$f_0 = 5000 \cdot 0,926 = 4630 \text{ гц}.$$

Найдем параметр κ :

$$\kappa = \frac{f_0}{f_{\kappa}} = \frac{4,63}{4,28} = 1,08.$$

Таким образом, по шкале нормированных частот требования к эквивалентному фильтру нижних частот будут следующие:

- в полосе частот $0 < \eta < 0,926$ затухание не должно превышать $\Delta\alpha = 0,115 \text{ нел}$,
- в полосе частот $1,08 < \eta$ затухание должно быть не меньше $3,4 \text{ нел}$;
- сопротивления $R_1 = R_2 = 1000 \text{ ом}$.

2. Выбираем T-образные звенья.

Параметр R_0 определяется по формуле

$$R_0 = \frac{R_2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1000}{\sqrt{1 - 0,296^2}} = 1630 \text{ ом}.$$

3. При помощи шаблона проводим ряд испытаний, подбираем необходимое число звеньев и устанавливаем значения параметров m совершенно так же, как в задаче 6.60 (следует еще раз подчеркнуть, что требования к затуханию в полосе задерживания должны быть увеличены на $0,7 \text{ nep}$ и составят, таким образом, $4,1 \text{ nep}$):

$$m_1 = 0,4; \quad m_2 = 0,626; \quad m_3 = 1.$$

4. По формулам табл. 6.3 рассчитываем значения элементов звеньев, предварительно вычислив L и C :

$$L = \frac{R_0}{\omega_0} = \frac{1630}{2\pi \cdot 4630} = 0,056 \text{ гн};$$

$$C = \frac{1}{\omega_0 R_0} = \frac{1}{2\pi \cdot 4630 \cdot 1630} = 0,0212 \cdot 10^{-6} \text{ ф};$$

1-е звено ($m=0,4$):

$$\frac{C}{m} = \frac{0,0212 \cdot 10^{-6}}{0,4} = 0,053 \cdot 10^{-6} \text{ ф}, \quad \frac{L}{2m} = \frac{0,056}{0,8} = 0,070 \text{ гн},$$

$$2 \frac{m}{1-m^2} C = \frac{0,8}{0,84} \cdot 0,0212 \cdot 10^{-6} = 0,0202 \cdot 10^{-6} \text{ ф};$$

2-е звено ($m=0,626$):

$$\frac{C}{m} = \frac{0,0212 \cdot 10^{-6}}{0,626} = 0,034 \cdot 10^{-6} \text{ ф}, \quad \frac{L}{2m} = \frac{0,056}{1,25} = 0,045 \text{ гн},$$

$$2 \frac{m}{1-m^2} C = \frac{1,25}{0,61} \cdot 0,0212 \cdot 10^{-6} = 0,0435 \cdot 10^{-6} \text{ ф};$$

3-е звено ($m=1$):

$$mC = 0,0212 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{L}{2m} = 0,028 \text{ гн}, \quad 2 \frac{m}{1-m^2} C = \infty.$$

Схема фильтра, соответствующая результатам расчета, дана на рис. P.6.12.

● 6.64. 1. Совершим переход к эквивалентному фильтру нижних частот. По заданному Δa найдем x :

$$x = \frac{2 \sqrt[4]{1 - e^{-2\Delta a}}}{1 + \sqrt{1 - e^{-2\Delta a}}} = 0,849.$$

Значение k определим по формуле

$$k = x \frac{f_k - f_{-k}}{f_x - f_{-x}} = 0,849 \frac{40}{20} = 1,698.$$

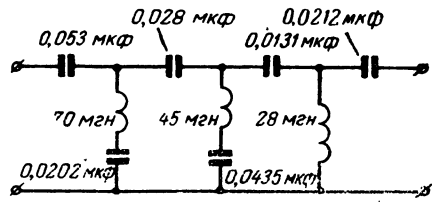


Рис. P.6.12

Таким образом, необходимо рассчитать фильтр нижних частот, у которого по нормированной шкале частот заданы следующие требования:

- рабочая полоса пропускания: $0 < \eta < 0,849$;
- $\Delta a \leq 0,05$;
- рабочая полоса задерживания: $\eta > 1,698$;
- затухание в полосе задерживания не должно быть менее $4,3 \text{ nep}$.

2. Выберем T-образные звенья, тогда

$$R_0 = \frac{1000}{\sqrt[4]{1 - x^2}} = \frac{10000}{0,728} = 13700 \text{ ом}.$$

3. Проведя ряд испытаний с помощью шаблона, установим, что для выполнения требований по затуханию необходимо применить два звена с параметрами $m_1=0,82$; $m_2=1$.

4. По формулам табл. 6.4 рассчитаем элементы звеньев фильтра. Эти расчеты совпадают с аналогичными, приведенными в предыдущих задачах, поэтому здесь они опускаются.

Ниже приводятся только значения основных расчетных параметров:

$$f_0 = \sqrt{f_x f_{-x}} = 460 \text{ кГц},$$

$$\omega_1 - \omega_{-1} = 2\pi \frac{f_x - f_{-x}}{x} = 6,28 \frac{20}{0,85} = 147,8 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}.$$

● 6.66. 1. В рабочей полосе пропускания при наличии потерь в элементах фильтра неравномерность затухания будет определяться двумя факторами:

$$\Delta a_0 = \Delta a + \Delta a_n,$$

где Δa — неравномерность за счет несогласованности включения, а Δa_n — за счет потерь.

Основная трудность при расчете фильтров сосредоточенной селекции состоит в том, чтобы разбить заданную величину Δa_0 на сумму двух слагаемых. Ориентировочно можно считать, что неравномерность затухания за счет потерь составляет 60%—90% общей неравномерности.

Выбираем

$$\Delta a = 0,0274 \text{ неп},$$

тогда

$$\Delta a_n = \Delta a_0 - \Delta a = 0,173 - 0,0274 = 0,148 \text{ неп}.$$

2. По выбранной величине $\Delta a = 0,0274 \text{ неп}$ находим x :

$$x = \frac{2 \sqrt[4]{1 - e^{-2\Delta a}}}{1 + \sqrt{1 - e^{-2\Delta a}}} = 0,77.$$

3. Определяем полосу $(f_1 - f_{-1})$ по формуле

$$f_1 - f_{-1} = \frac{f_x - f_{-x}}{x} = \frac{17}{0,77} = 22,1 \text{ кГц}.$$

Находим частоты f_{-1} и f_1 :

$$f_{-1} = f_0 - \frac{f_1 - f_{-1}}{2} = 400 - 11,05 = 388,95 \text{ кГц};$$

$$f_1 = f_0 + \frac{f_1 - f_{-1}}{2} = 400 + 11,05 = 411,05 \text{ кГц}.$$

Полученные формулы справедливы для относительно узкополосных фильтров.

4. Определяем необходимое число звеньев N . С этой целью по формуле (табл. 6.6)

$$a_c = \ln \left| \frac{1 + \frac{f_{-1}}{f_1} \sqrt{\frac{f_1^2 - f^2}{f_{-1}^2 - f^2}}}{1 - \frac{f_{-1}}{f_1} \sqrt{\frac{f_1^2 - f^2}{f_{-1}^2 - f^2}}} \right|$$

строим график $a_c(f)$ (рис Р.6.13).

По графику установим, что одно звено вне полосы шириной 52 кГц может обеспечить затухание $a_{зв} \geq 1,47$ неп. Необходимое число звеньев

$$N = \frac{a_0 + 0,7}{a_{зв}} = \frac{6,45}{1,47} = 4,4.$$

Выбираем $N=5$ звеньям.

5. Вычисляем затухание, обусловленное потерями на частотах f_0 и f_x :

$$a_{nf_0} = \frac{f_0 N}{Q_L (f_1 - f_{-1})} =$$

$$= \frac{400 \cdot 5}{400 \cdot 22,1} = 0,227 \text{ неп.}$$

$$a_{nf_x} = \frac{f_0 N}{Q_L (f_1 - f_{-1}) \sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \frac{400 \cdot 5}{400 \cdot 2,21 \sqrt{1 - 0,77^2}} = 0,357 \text{ неп.}$$

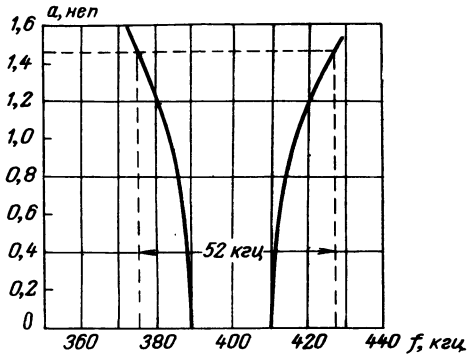


Рис. Р.6.13

По найденным значениям a_{nf_0} и a_{nf_x} определяем неравномерность характеристики, обусловленную потерями:

$$\Delta a_n = a_{nf_x} - a_{nf_0} = 0,357 - 0,227 = 0,130 \text{ неп.}$$

Следовательно, Δa_n не превосходит допустимого значения.

Если бы разбиение величины Δa_0 было проведено неудачно, величина Δa_n оказалась бы больше допустимой. В этом случае пришлось бы заново разбить Δa_0 на сумму двух слагаемых (увеличив значение Δa_n) и повторить все расчеты.

6. Расчет элементов звена проводится по формулам табл. 6.6.

В условиях расчета обусловлена величина C_1 .

Выберем ее равной 495 пф, а с учетом паразитной емкости $C_1=510$ пф.

По формулам табл. 6.6 находим:

$$R_0 = \frac{f_{-1}}{f_1} \frac{1}{2\pi (f_1 - f_{-1}) C_1} = \frac{388,95}{411,05} \frac{1}{6,28 \cdot 22,1 \cdot 10^3 \cdot 510 \cdot 10^{-12}} = 13,4 \cdot 10^3 \text{ ом.}$$

$$L_1 = \frac{(f_1 - f_{-1}) R_0}{2\pi f_1 f_{-1}} = \frac{22,1 \cdot 10^3 \cdot 13,4 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 388,95 \cdot 411,05 \cdot 10^3} = 0,296 \cdot 10^{-3} \text{ гн.}$$

$$\frac{C_2}{2} = \frac{f_1 + f_{-1}}{2 \cdot 2\pi f_1 f_{-1} R_0} = 28,6 \cdot 10^{-6} \text{ ф.}$$

7. Определяем сопротивление нагрузок $R_r=R_2$:

$$R_r = \frac{R_0}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{13,4}{\sqrt{1 - 0,77^2}} = 16,8 \text{ ком.}$$

7.

● 7.1. По формулам табл. 7.1 находим:

$$L_1 = 0,4 \ln \frac{d}{r} = 0,4 \ln \frac{200}{3} = 1,68 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}; \quad C_1 = \frac{27,8}{\ln \frac{d}{r}} = \frac{27,8}{\ln \frac{200}{3}} = 6,64 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}$$

$$R_1 = \frac{8,32}{r_{\text{см}}} \sqrt{f} = \frac{8,32}{0,3} \sqrt{10^5} = 8760 \frac{\text{МКОМ}}{\text{м}} = 8,76 \cdot 10^{-3} \frac{\text{ОМ}}{\text{м}} = 8,76 \frac{\text{ОМ}}{\text{км}};$$

$$G_1 = \omega C_1 \operatorname{tg} \delta = \omega C_1 \cdot 0 = 0.$$

● 7.3. По формулам табл. 7.1 имеем:

$$L_1 = 0,2 \ln \frac{r_2}{r_1} = 0,2 \ln \frac{24}{6} = 0,277 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}};$$

$$C_1 = \frac{55,5 \epsilon_r}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{55,5 \cdot 2,5}{\ln \frac{24}{6}} = 100 \frac{\text{пФ}}{\text{м}};$$

$$R_1 = 4,16 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \sqrt{f} = 4,16 \left(\frac{1}{0,6} + \frac{1}{2,4} \right) \sqrt{10^7} =$$

$$= 27,4 \cdot 10^3 \frac{\text{МКОМ}}{\text{м}} = 27,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{ОМ}}{\text{м}} = 27,4 \frac{\text{ОМ}}{\text{км}};$$

$$G_1 = \omega C \operatorname{tg} \delta \approx 6,28 \cdot 10^7 \cdot 100 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 1,25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{СИМ}}{\text{м}}.$$

Значения ϵ_r и $\operatorname{tg} \delta$ определяются из табл. 7.2.

● 7.6. Из формулы

$$C_1 = \frac{55,5}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

находим

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{55,5}{C_1}.$$

откуда

$$\frac{r_2}{r_1} = e^{\frac{55,5}{C_1}}.$$

Подставляя условие задачи, находим:

$$\frac{r_2}{r_1} = e^{\frac{55,5}{20}} = e^{2,78} \approx 16.$$

● 7.7. Волновое сопротивление определяется ф-лой (7.3):

$$Z_c \approx \rho \left(1 - i \frac{\alpha}{\beta} \right) = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \left(1 - i \frac{\alpha}{\beta} \right)$$

Для двухпроводной воздушной линии [Ф-ла (7.7)]

$$\rho = 120 \ln \frac{d}{r} = 120 \ln \frac{200}{1,5} = 588 \text{ ом.}$$

Рассчитаем α и β :

$$\alpha \approx \frac{R_1}{2\rho} = \frac{56 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 588} = 0,048 \cdot 10^{-3} \frac{\text{неп}}{\text{м}} = 0,048 \frac{\text{неп}}{\text{км}};$$

$$R_1 = \frac{8,32}{r_{\text{см}}} \sqrt{f} \cdot 10^{-6} = \frac{8,32}{0,15} \sqrt{10^6} \cdot 10^{-6} = 56 \cdot 10^{-3} \frac{\text{ом}}{\text{м}};$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{C} f = \frac{2\pi}{3 \cdot 10^8} 10^6 = 0,021 \frac{\text{рад}}{\text{м}} \approx 1,2 \frac{\text{град}}{\text{м}}.$$

Так как

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{0,048 \cdot 10^{-3}}{0,021} = 0,0023 \ll 1,$$

то

$$Z_c \approx \rho.$$

● 7.12. Подставим в формулу

$$\beta = \frac{R_1}{2\rho}$$

значения R_1 и ρ

$$R_1 = \frac{1,44}{r_{\text{мм}} \sqrt{\lambda_{\text{м}}}}, \frac{\text{ом}}{\text{м}}; \quad \rho = 120 \ln \frac{d}{r}, \text{ ом.}$$

В результате получаем

$$\alpha = \frac{R_1}{2\rho} = \frac{1,44}{r_{\text{мм}} \sqrt{\lambda_{\text{м}}} \cdot 2 \cdot 120 \ln \frac{d}{r}} = 0,006 \frac{1}{r_{\text{мм}} \sqrt{\lambda_{\text{м}}} \ln \frac{d}{r}}, \frac{\text{неп}}{\text{м}}.$$

● 7.13. По формуле коэффициента затухания

$$\alpha = \frac{R_1}{2\rho} + \frac{1}{2} G_1 \rho$$

найдем производную $\frac{d\alpha}{d\rho}$:

$$\frac{d\alpha}{d\rho} = -\frac{1}{2} \frac{R_1}{\rho^2} + \frac{1}{2} G_1.$$

Исследуя полученное выражение на минимум, находим, что минимальное значение коэффициента α будет иметь место при $\rho^2 = \frac{R_1}{G_1}$ или (так как $\rho =$

$$= \sqrt{\frac{L_1}{C_1}})$$

$$L_1 G_1 = R_1 C_1.$$

Полученное равенство представляет собой условие минимального затухания. Так как обычно $R_1 C_1 \gg L_1 G_1$, то в протяженных линиях принимают специальные меры для увеличения погонной индуктивности L_1 (крупноплетенная и пупинизация линий). Равенство $R_1 C_1 = L_1 G_1$ является, кроме того, условием отсутствия реактивной составляющей в волновом сопротивлении.

Подставив условие минимального затухания в формулу для коэффициента α , получим

$$\alpha_{\text{мин}} = \sqrt{R_1 G_1}.$$

● 7.14. Подставив в выражение для $\alpha \approx \frac{1}{2} \frac{R_1}{\rho}$ значения R_1 и ρ по формулам:

$$R_1 = 4,16 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \sqrt{f} \cdot 10^{-6}, \frac{\text{ом}}{\text{м}},$$

$$\rho = 60 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

получим

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{4,16 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \sqrt{f} \cdot 10^6}{60 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Преобразуем последнее равенство так, чтобы независимой переменной было отношение $\frac{r_2}{r_1}$:

$$\alpha = \frac{4,16 \cdot \sqrt{f} \cdot 10^{-6} \sqrt{\epsilon_r}}{2 \cdot 60} \frac{1}{r_2} \frac{\left(\frac{r_2}{r_1} + 1 \right)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

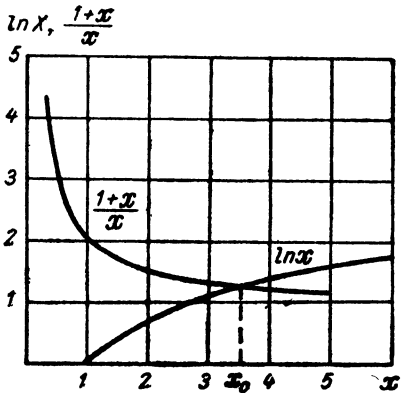


Рис. Р.7.1

Введя очевидные обозначения, перепишем выражение для α в следующем виде:

$$\alpha = A \frac{1+x}{\ln x}.$$

Вычислим производную $\frac{d\alpha}{dx}$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{d\alpha}{dx} = A \frac{\ln x - (1+x) \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = 0.$$

Полученное трансцендентное уравнение

$$\ln x = \frac{1+x}{x}$$

решим графическим методом (рис. Р.7.1) относительно x :

$$x = \left| \frac{r_2}{r_1} \right|_{\text{опт}} = 3,6.$$

● 7.15. В предыдущей задаче было установлено, что коэффициент затухания $\left(\alpha = A \frac{1+x}{\ln x}, \text{ где } x = \frac{r_2}{r_1} \right)$ имеет минимальное значение при $x=3,6$, т. е.

$$\alpha_{\text{мин}} = A \frac{1+3,6}{\ln 3,6} = 3,6A.$$

Согласно условию нужно найти такие границы $x(x_{m1}$ и $x_{m2})$, в которых $\alpha = 1,1 \alpha_{\text{мин}}$.

Составляем очевидное уравнение

$$1,1 \alpha_{\text{мин}} = A \frac{1 + x_m}{\ln x_m},$$

или

$$1,1 \cdot 3,6 = \frac{1 + x_m}{\ln x_m}; \quad \ln x_m = \frac{1 + x_m}{3,96} = 0,252 + 0,252 x_m.$$

Последнее уравнение легко решается графически (рис. P.7.2).

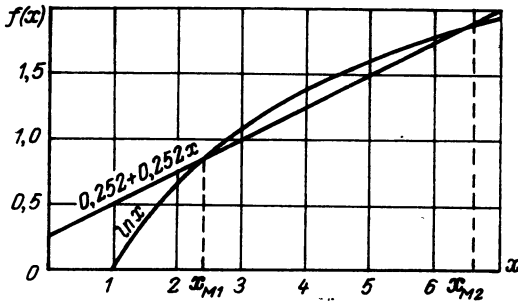


Рис. P.7.2

Из этого рисунка находим: $x_{m1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)_1 = 2,4$; $x_{m2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)_2 = 6,6$.

Решение настоящей задачи показывает, что отступления от оптимального соотношения $\frac{r_2}{r_1} = 3,6$ в пределах от 2,4 до 6,6 практически могут считаться допустимыми.

● 7.16. Подставив в выражение для α ($\alpha = \frac{1}{2} \frac{R_1}{\rho}$) значения R_1 и ρ по формулам:

$$R_1 = \frac{8,32}{r} \sqrt{\bar{f}} \cdot 10^{-6} \frac{\text{ом}}{\text{м}}, \quad \rho = 120 \ln \frac{d}{r} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}},$$

получим

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{8,32 \sqrt{\bar{f}} \cdot 10^{-6} \sqrt{\epsilon_r}}{r \cdot 120 \ln \frac{d}{r}} = \frac{8,32 \sqrt{\bar{f}} \cdot 10^{-6} \sqrt{\epsilon_r}}{2 \cdot 120} \frac{1}{r \ln \frac{d}{r}}.$$

Преобразуем последнее выражение:

$$\alpha = \frac{8,32 \sqrt{\bar{f}} \cdot 10^{-6} \sqrt{\epsilon_r}}{2 \cdot 120 d} \frac{\frac{d}{r}}{\ln \frac{d}{r}}.$$

Введя очевидные обозначения, напишем

$$\alpha = A \frac{x}{\ln x}.$$

Исследуем последнее выражение на минимум:

$$\frac{d\alpha}{dx} = 1 - \frac{\ln x - x \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = 0;$$

$$\ln x = 1;$$

$$x = e \approx 2,7.$$

Следовательно, затухание в линии будет минимальным при

$$\left| \frac{d}{r} \right|_{\text{опт}} = 2,7.$$

Однако по конструктивным соображениям, а также по соображениям, относящимся к электрическим явлениям, которые здесь не рассматриваются, расстояние между проводами в двухпроводных линиях на практике выбирают гораздо большим.

● 7.19. В соответствии с ф-лой (7.6) скорость распространения радиоволн вдоль линии равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

Подставляя условия задачи, находим:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 10^{-6} \cdot 16 \cdot 10^{-12}}} = \frac{10^9}{4} = 2,5 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Длина волны в линии равна

$$\lambda_{\text{л}} = vT = \frac{v}{f} = \frac{2,5 \cdot 10^8}{25 \cdot 10^6} = 10 \text{ м}.$$

Отметим, что длина волны в воздухе при той же частоте равна

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{c}{f},$$

где c — скорость распространения радиоволн в воздухе, равная, $3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$,

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{3 \cdot 10^8}{25 \cdot 10^6} = 12 \text{ м}.$$

● 7.20. Длина волны в линии равна

$$\lambda_{\text{л}} = \frac{v}{f},$$

где

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

Произведение $L_1 C_1$ в соответствии с формулами табл. 7.1 равно: для двухпроводной линии

$$L_1 C_1 = 0,4 \cdot 10^{-6} \ln \frac{d}{r} \frac{27,8 \epsilon_r}{\ln \frac{d}{r}} \cdot 10^{-12} = 11,1 \cdot 10^{-18} \epsilon_r;$$

для концентрической линии

$$L_1 C_1 = 0,2 \cdot 10^{-6} \ln \frac{r_2}{r_1} \frac{55,5 \varepsilon_r}{\ln \frac{r_2}{r_1}} 10^{-12} = 11,1 \cdot 10^{-18} \varepsilon_r.$$

Следовательно, скорость распространения в двухпроводных и концентрических линиях одинакова и зависит только от относительной диэлектрической постоянной ε_r :

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{11,1 \cdot 10^{-18} \varepsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}},$$

где c — скорость распространения электромагнитных волн в воздухе (см. задачу 7.19).

Таким образом, длина волны в линии равна

$$\lambda_{\text{л}} = \frac{v}{f} = \frac{c}{f} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \lambda_{\text{в}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

● 7.23. Для данной схемы:

$$Z_1 = R_1 + i \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1'} \right); \quad Y = G_1 + i \omega C_1;$$

$$\gamma = \sqrt{\left[R_1 + i \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1'} \right) \right] (G_1 + i \omega C_1)}.$$

Для линии без потерь

$$\gamma = \sqrt{i \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1'} \right) i \omega C_1} = i \sqrt{\omega^2 L_1 C_1 - \frac{C_1}{C_1'}}.$$

Очевидно, распространение возможно при условии

$$\omega^2 L_1 C_1 > \frac{C_1}{C_1'} \quad \text{или} \quad \omega > \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1'}}.$$

● 7.25. 1. На основе уравнения с отсчетом от конца линии [Ф-ла (7.14)] из формулы

$$U = U_2 \cos \beta y$$

находим U_2 :

$$U_2 = \frac{U}{\cos \beta y} = \frac{U_1}{\cos \beta l}.$$

Подставляя условия задачи, получаем

$$U_2 = \frac{U_1}{\cos \frac{\omega}{c} l} = \frac{20}{\cos \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} \cdot 20} = 65 \text{ в.}$$

2. На основе уравнений с отсчетом от начала линии [Ф-лы (7.1)] имеем

$$\dot{U} = U_1 \operatorname{ch} \gamma x - I_1 Z_c \operatorname{sh} \gamma x.$$

Принимая во внимание, что $\gamma = i\beta$, $\frac{U_1}{I_1} = Z_{\text{вх}} = -iZ_c \operatorname{ctg} \beta x$, получаем

$$\dot{U} = U_1 (\cos \beta x + \operatorname{tg} \beta x \sin \beta x).$$

Вычислив $\beta x = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{\omega}{c} l = 72^\circ$ и подставив значение $U_1 = 20$ в выражение для \dot{U} , находим U_2 :

$$U_2 = 20(0,31 + 3,08 \cdot 0,95) = 20 \cdot 3,25 \approx 65 \text{ в.}$$

Этот пример показывает, что удобнее пользоваться уравнениями с отсчетом от конца линии.

● 7.28. Распределение напряжения вдоль разомкнутой линии без потерь определяется формулой

$$U = U_2 \cos \beta y.$$

Следовательно, в данном случае

$$U = U_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} y = 600 \cos \frac{2\pi}{300} \cdot 40 = 401 \text{ в.}$$

Распределение тока вдоль разомкнутой линии определяется выражением

$$I = \frac{U_2}{\rho} \sin \beta y.$$

Таким образом, в данном случае

$$I = \frac{U_2}{\rho} \sin \frac{2\pi}{\lambda} y = \frac{600}{300} \sin \frac{2\pi}{300} 40 = 1,49 \text{ а.}$$

● 7.33. Исходя из общих телеграфных уравнений длинной линии без потерь (7.12):

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \left(\cos \beta y + i \frac{\rho}{Z_2} \sin \beta y \right); \quad i = \frac{\dot{U}_2}{\rho} \left(\frac{\rho}{Z_2} \cos \beta y + i \sin \beta y \right),$$

напишем:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \left[\cos \beta y + i \frac{\rho(R_2 - iX_2)}{R_2^2 + X_2^2} \sin \beta y \right];$$

$$i = \frac{\dot{U}_2}{\rho} \left[\frac{\rho(R_2 - iX_2)}{R_2^2 + X_2^2} \cos \beta y + i \sin \beta y \right].$$

Займемся выражением для напряжения. Разделив вещественную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 \left[\cos \beta y + \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin \beta y + i \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin \beta y \right] = \\ &= \dot{U}_2 \left[\cos \beta y + \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin \beta y - \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos \beta y + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos \beta y + i \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin \beta y \right] = \\ &= \dot{U}_2 \left[\frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} e^{i\beta y} + \left(1 - \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) \cos \beta y + \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin \beta y \right]. \end{aligned}$$

Переходя к мгновенным значениям и опуская начальную фазу U_2 , запишем

$$u = U_2 \left\{ \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin(\omega t + \beta y) + \left[\cos \beta y \left(1 - \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) + \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin \beta y \right] \sin \omega t \right\}.$$

Легко видеть, что если нагрузка чисто активная ($X_2=0$), последнее выражение соответствует (7.16); если нагрузка чисто реактивная ($R_2=0$) — (7.17). Проведем аналогичные преобразования в выражении для тока:

$$\begin{aligned} i &= \frac{\dot{U}_2}{\rho} \left[\frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos \beta y - i \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos \beta y + i \sin \beta y \right] = \\ &= \frac{\dot{U}_2}{\rho} \left[\frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos \beta y + i \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} - i \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin \beta y - \right. \\ &\quad \left. - i \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos \beta y + i \sin \beta y \right] = \\ &= \frac{\dot{U}_2}{\rho} \left\{ \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} e^{i\beta y} + i \left[\left(1 - \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) \sin \beta y - \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos \beta y \right] \right\}. \end{aligned}$$

Переходя к мгновенным значениям, запишем

$$i = \frac{U_2}{\rho} \left\{ \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \sin(\omega t + \beta y) + \left[\left(1 - \frac{\rho R_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) \sin \beta y - \frac{\rho X_2}{R_2^2 + X_2^2} \cos \beta y \right] \cos \omega t \right\}.$$

Легко видеть, что при $X_2=0$ и $R_2=0$, последнее выражение переходит в выражения (7.16) и (7.17).

Обозначив $R_2^2 + X_2^2 = Z_2^2$, окончательно запишем:

$$\begin{aligned} u &= U_2 \left\{ \frac{\rho R_2}{Z_2^2} \sin(\omega t + \beta y) + \left[\left(1 - \frac{\rho R_2}{Z_2^2} \right) \cos \beta y + \frac{\rho X_2}{Z_2^2} \sin \beta y \right] \sin \omega t \right\}, \\ i &= \frac{U_2}{\rho} \left\{ \frac{\rho R_2}{Z_2^2} \sin(\omega t + \beta y) + \left[\left(1 - \frac{\rho R_2}{Z_2^2} \right) \sin \beta y - \frac{\rho X_2}{Z_2^2} \cos \beta y \right] \cos \omega t \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, при комплексной нагрузке в линии возникают стоячие и бегущие волны. Первый член в фигурных скобках представляет собой бегущую, а второй (заклученный в квадратные скобки) — стоячую волну.

- 7.34. Исходным выражением будет ф-ла (7.14)

$$I = \frac{U_2}{\rho} \sin \beta y,$$

из которой легко определить

$$\rho = \frac{U_2}{I} \sin \beta y.$$

Подставляя условия задачи, находим

$$\rho = \frac{200}{0,5} \sin \frac{2\pi}{20} \cdot 2 = 235 \text{ ом},$$

- 7.36. Входное сопротивление определяем по ф-ле (7.22):

$$Z_{\text{вх}} = i \rho \operatorname{tg} \beta y; \quad X_{\text{вх}} = \rho \operatorname{tg} \beta y.$$

Волновое сопротивление

$$\rho = 60 \ln \frac{r_2}{r_1} = 60 \ln \frac{200}{60} = 72 \text{ ом}.$$

Входное сопротивление, следовательно, равно

$$X_{\text{вх}} = \rho \operatorname{tg} \beta y = 72 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{62} \cdot 24 \approx -62,5 \text{ ом}.$$

Входное сопротивление имеет емкостный характер. Емкость, соответствующую данному входному сопротивлению, найдем из соотношения

$$\frac{1}{\omega C_9} = X_{\text{вх}},$$

т. е.

$$C_9 = \frac{1}{\omega X_9} = \frac{1}{\frac{2\pi c}{\lambda} X_{\text{вх}}} = \frac{62}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 62,5} = 525 \cdot 10^{-12} \text{ ф};$$

$$C_9 = 525 \text{ пф}.$$

- 7.39. Из выражения

$$X_{\text{вх}} = \rho \operatorname{tg} \beta y$$

определим длину y линии.

Подставляя условия задачи, находим, что

$$\operatorname{tg} \beta y = \frac{X_{\text{вх}}}{\rho} = \frac{-120}{100} = -1,2.$$

Из таблицы тригонометрических функций находим аргумент βy :

$$\beta y = 2,26 \quad (\beta y \approx 129^\circ),$$

откуда

$$y = \frac{2,26}{\beta} = \frac{2,26}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{2,26}{2\pi} \cdot 10 = 3,6 \text{ м}.$$

- 7.41. Расчет проводим по ф-ле (7.23):

$$X_{\text{вх}} = -\rho \operatorname{ctg} \beta y.$$

Подставляя условия задачи, получаем

$$X_{\text{вх}} = -200 \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{36} 9,7 = -200 \operatorname{ctg} 1,69 \approx 25,4 \text{ ом}.$$

Входное сопротивление имеет индуктивный характер. Эквивалентная индуктивность, соответствующая данному сопротивлению, найдется из соотношения

$$\omega L_9 = X_{вх},$$

т. е.

$$L_9 = \frac{X_{вх}}{\omega} = \frac{X_{вх}}{2\pi c} \lambda = \frac{24,5 \cdot 36}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 0,47 \text{ мкГн.}$$

● 7.44. Из выражений:

$$Z_{вх кз} = \rho \operatorname{th} \gamma l, \quad Z_{вх хх} = \rho \operatorname{cth} \gamma l,$$

получим

$$\rho^2 = Z_{вх кз} \cdot Z_{вх хх},$$

откуда

$$\rho = \sqrt{Z_{вх кз} \cdot Z_{вх хх}}.$$

Для линии без потерь

$$\rho = \sqrt{X_{кз} X_{хх}}.$$

По условиям задачи находим

$$\rho = \sqrt{60 \cdot 44} \approx 51,4 \text{ ом.}$$

● 7.45. Будем пользоваться ф-лой (7.20):

$$Z_{вх} = Z_2 \frac{1 + i \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{tg} \beta y}{1 + i \frac{Z_2}{\rho} \operatorname{tg} \beta y}.$$

В данном случае $Z_2 = iX_2 = i50 \text{ ом.}$

Подставляя условия задачи, находим

$$\begin{aligned} Z_{вх} &= i50 \frac{1 + i \frac{100}{i50} \operatorname{tg} \frac{\omega}{c} y}{1 + i \frac{i50}{100} \operatorname{tg} \frac{\omega}{c} y} = i50 \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} \cdot 5}{1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} \cdot 5} = \\ &= i50 \frac{1,65}{0,84} = i98,2 \text{ ом.} \end{aligned}$$

Таким образом, входное сопротивление также имеет индуктивный характер и численно равно 98,2 ом.

● 7.47. По условию задачи и в соответствии с ф-лой (7.20)

$$Z_{вх} = Z_2 \frac{1 + i \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{tg} \beta y}{1 + i \frac{Z_2}{\rho} \operatorname{tg} \beta y} = 0,$$

т. е.

$$1 + i \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{tg} \beta y = 0.$$

Отсюда

$$Z_2 = -i \rho \operatorname{tg} \beta y.$$

Подставляя условия задачи, находим

$$\begin{aligned} \rho \operatorname{tg} \beta y &= \rho \operatorname{tg} \frac{\omega}{c} y = \rho \operatorname{tg} \frac{2\pi f}{c} y = 100 \operatorname{tg} \frac{2\pi \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} 60 = \\ &= 100 \operatorname{tg} \frac{4\pi}{10} = 100 \cdot 3,08 = 308 \text{ ом.} \end{aligned}$$

Следовательно, нагрузочное сопротивление имеет емкостный характер и равно $X_c = 308 \text{ ом}$.

● 7.48. При условии $y = \frac{\lambda}{4}$

$$\operatorname{tg} \beta y = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \infty;$$

Ф-ла (7.20) упрощается и принимает вид

$$Z_{\text{вх}} = Z_2 \frac{1 + i \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{tg} \beta y}{1 + i \frac{Z_2}{\rho} \operatorname{tg} \beta y} = Z_2 \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \beta y} + i \frac{\rho}{Z_2}}{\frac{1}{\operatorname{tg} \beta y} + i \frac{Z_2}{\rho}} = Z_2 \frac{\rho^2}{Z_2^2} = \frac{\rho^2}{Z_2}.$$

Следовательно, при расчете входного сопротивления четвертьволновой линии можно пользоваться формулой

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\rho^2}{Z_2}.$$

Для случая полуволновой линии $y = \frac{\lambda}{2}$

$$\operatorname{tg} \beta y = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = \operatorname{tg} \pi = 0 \text{ и } Z_{\text{вх}} = Z_2.$$

● 7.51. Подставив в формулу

$$Z_{\text{вх}} = Z_2 \frac{1 + i \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{tg} \beta y}{1 + i \frac{Z_2}{\rho} \operatorname{tg} \beta y}$$

значение $y = \frac{\lambda}{8}$, получим

$$Z_{\text{вх}} = \rho \frac{Z_2 + i \rho}{\rho + i Z_2}; \quad |Z_{\text{вх}}| = \rho.$$

● 7.52. По условию $l \ll \lambda$ и $\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l \ll 1$.

Для входного сопротивления короткозамкнутой линии

$$Z_{\text{вх}} = i \rho \operatorname{tg} \beta l \approx i \rho \beta l.$$

Так как $\rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ и $\beta = \omega \sqrt{L_1 C_1}$, то

$$Z_{\text{вх}} \approx i \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \omega \sqrt{L_1 C_1} l = i \omega L_1 l = i \omega L.$$

Для входного сопротивления разомкнутой линии аналогично получим

$$Z_{вх} \approx \frac{1}{i \omega C_1 l} = \frac{1}{i \omega C}.$$

● 7.53. Активную составляющую входного сопротивления короткозамкнутой линии с потерями можно определить по ф-ле (7.25):

$$R_{вх} = \frac{1}{2} \rho \frac{\operatorname{sh} 2\alpha y}{\operatorname{sh}^2 \alpha y + \cos^2 \beta y}.$$

В линии с очень малыми потерями $\alpha y \ll 1$ и

$$R_{вх} \approx \rho \frac{\alpha y}{(\alpha y)^2 + \cos^2 \beta y}.$$

Если $\alpha \rightarrow 0$, то $R_{вх}$ также стремится к нулю во всех точках, где $\cos^2 \beta y \neq 0$. В точках же $\beta y = (2k+1) \frac{\pi}{2}$, $\cos^2 \beta y = 0$ и $R_{вх}$ стремится к бесконечности.

График активной составляющей входного сопротивления короткозамкнутой линии без потерь, следовательно, будет иметь вид рис. Р.7.3а. В точках $y = \frac{(2k+1)\pi}{\beta}$ характер изменения активной составляющей будет соответствовать δ -функции.

Аналогичными рассуждениями, исходя из ф-лы (7.26), можно построить график изменения активной составляющей входного сопротивления разомкнутой линии (рис. Р.7.3б).

● 7.54. Так как для четвертьволнового отрезка линии $Z_{вх} = \frac{\rho_1^2}{R}$ и по условию $Z_{вх} = \rho$, то

$$\rho_1 = \sqrt{\rho R}.$$

Теперь остается показать, что

$$|R - \rho_1| < |R - \rho|$$

при любом соотношении между R и ρ . Составим отношение

$$y = \frac{|R - \rho_1|}{|R - \rho|} = \frac{|R - \sqrt{\rho R}|}{|R - \rho|} = \frac{\left| 1 - \sqrt{\frac{\rho}{R}} \right|}{\left| 1 - \frac{\rho}{R} \right|}.$$

Легко убедиться в том, что $y < 1$ как при $\rho > R$, так и при $\rho < R$. При $\rho = R$ $y = 0,5$ (для получения этого результата нужно раскрыть неопределенность).

● 7.55. Преобразуем выражение для входного сопротивления

$$Z_{вх} = R \frac{1 + i \frac{\rho}{R} \operatorname{tg} \beta y}{1 + i \frac{R}{\rho} \operatorname{tg} \beta y}$$

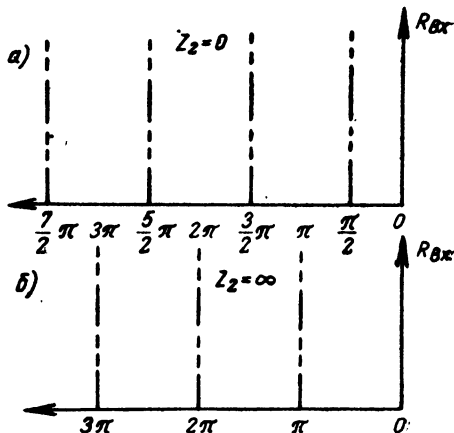


Рис. Р.7.3

к виду

$$Z_{\text{вх}} = \rho \frac{R + i \rho \operatorname{tg} \beta y}{\rho + i R \operatorname{tg} \beta y}.$$

Так как шлейф включается параллельно, удобнее иметь дело с проводимостями

$$Y_{\text{вх}} = \frac{1}{Z_{\text{вх}}} = \frac{1}{\rho} \frac{\rho + i R \operatorname{tg} \beta y}{R + i \rho \operatorname{tg} \beta y}.$$

Избавившись от мнимости в знаменателе, отделим вещественную часть от мнимой:

$$Y_{\text{вх}} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho R + \rho R \operatorname{tg}^2 \beta y}{R^2 + \rho^2 \operatorname{tg}^2 \beta y} + i \frac{R^2 \operatorname{tg} \beta y - \rho^2 \operatorname{tg} \beta y}{R^2 + \rho^2 \operatorname{tg}^2 \beta y} \right).$$

В точках *aa* входное сопротивление должно быть чисто активным и равным ρ , таким образом, для определения l получим уравнение

$$\frac{1}{\rho} \frac{\rho R + \rho R \operatorname{tg}^2 \beta l}{R^2 + \rho^2 \operatorname{tg}^2 \beta l} = \frac{1}{\rho}.$$

Решив это уравнение, найдем минимальную длину участка линии:

$$\operatorname{tg} \beta l = \sqrt{\frac{R}{\rho}}; \quad l = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{R}{\rho}}.$$

Теперь остается определить длину шлейфа $l_{\text{ш}}$, при которой будет скомпенсирована реактивная составляющая входного сопротивления.

Реактивная составляющая проводимости участка l равна

$$i \operatorname{Im}(Y_{\text{вх}}) = i \frac{1}{\rho} \frac{R^2 \operatorname{tg} \beta l - \rho^2 \operatorname{tg} \beta l}{R^2 + \rho^2 \operatorname{tg}^2 \beta l}$$

или, принимая во внимание, что $\operatorname{tg} \beta l = \sqrt{\frac{R}{\rho}}$,

$$i \operatorname{Im}(Y_{\text{вх}}) = i \frac{1}{\rho} \frac{R - \rho}{\sqrt{\rho R}}.$$

Проводимость короткозамкнутого шлейфа

$$\frac{1}{Z_{\text{кз}}} = \frac{1}{i \rho \operatorname{tg} \beta l_{\text{ш}}}.$$

Приравняв эти проводимости с обратными знаками, получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{R - \rho}{\sqrt{\rho R}} = \frac{1}{\rho \operatorname{tg} \beta l_{\text{ш}}},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \beta l_{\text{ш}} = \frac{\sqrt{\rho R}}{R - \rho}; \quad l_{\text{ш}} = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\rho R}}{R - \rho}.$$

● 7.58. В основное уравнение для добротности

$$Q = \frac{\pi}{\alpha \lambda}$$

подставим выражения $R_1 \alpha$ и ρ [ф-ла (7.5), ф-ла (3) в табл. 7.1 и ф-ла (7.8)]:

$$\alpha = \frac{R_1}{2\rho} = \frac{3,32}{2r_2 77 \sqrt{\lambda}} = \frac{0,0215}{r_2 \sqrt{\lambda}};$$

$$R_1 = \frac{,72}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{0,72}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{r_2} \left(1 + \frac{r_2}{r_1} \right) = 3,32 \frac{1}{r_2 \sqrt{\lambda}}$$

(в этой формуле R_1 в $\frac{\text{ом}}{\text{м}}$, r_2 в мм и λ в м);

$$\rho = 60 \ln \frac{r_2}{r_1} = 60 \ln 3,6 = 77 \text{ ом};$$

в результате получим

$$Q = \frac{\pi r_2 \sqrt{\lambda}}{0,0215 \lambda} \approx 146 \frac{r_2}{\sqrt{\lambda}}.$$

Если выразить r_2 и λ в см , то

$$Q \approx 14600 \frac{r_2}{\sqrt{\lambda}}.$$

● 7.66. Решение подобных задач следует начинать с нахождения аргумента βl .

В данном случае:

$$\beta l_1 = \frac{2\pi}{\lambda} l_1 = \frac{2\pi}{40} 45 = \frac{9}{4} \pi = 2\pi + \frac{\pi}{4}; \quad \operatorname{g} \beta l_1 = 1;$$

$$\beta l_2 = \frac{2\pi}{\lambda} l_2 = \frac{2\pi}{40} 70 = \frac{7\pi}{2}; \quad \operatorname{tg} \beta l_2 = \infty.$$

Найдем сначала входное сопротивление второго участка. Как было показано (задача 7.48), для случая $\operatorname{tg} \beta l = \infty$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\rho^2}{Z_2}.$$

Подставив условия задачи, получим

$$Z_{\text{вх}} = \frac{60^2}{60} = 60 \text{ ом}.$$

Таким образом, первый участок нагружен на чисто активное сопротивление, равное 60 ом.

Для случая $\operatorname{tg} \beta l = 1$ из ф-лы (7.20), избавляясь обычным путем от мнимости в знаменателе, получим (имея в виду, что $Z_2 = R_2$) следующее выражение:

$$Z_{\text{вх}} = \rho \frac{2 \frac{r_2}{\rho} + i \left(1 - \frac{Z_2^2}{\rho^2} \right)}{1 + \left| \frac{Z_2}{\rho} \right|^2}.$$

В данном случае:

$$\rho = \rho_1 = 480 \text{ ом}, \quad Z_2 = R_2 = 60 \text{ ом}, \quad \frac{Z_2}{\rho} = \frac{60}{480} = \frac{1}{8}.$$

Следовательно,

$$Z_{\text{вх}} = 480 \frac{\frac{1}{4} + i \left(1 - \frac{1}{64}\right)}{1 + \frac{1}{64}} = (118 + i 446) \text{ ом.}$$

- 7.68. Волновое сопротивление участка CD должно быть равно 240 ом.

Участок BC нагружен на два параллельно соединенных сопротивления по 240 ом, т. е. на 120 ом и, следовательно, его волновое сопротивление тоже должно быть равно 120 ом.

Участок AB нагружен на сопротивление 240 ом, параллельно которому подключено сопротивление 120 ом, т. е.

$$R_{AB} = \frac{240 \cdot 120}{240 + 120} = 80 \text{ ом.}$$

Таким образом, волновое сопротивление участка AB должно быть равно 80 ом.

- 7.69. Для режима бегущей волны $R_2 = \rho_2 = 40$ ом.

Так как $\rho_1 = 60$ ом и, кроме того, для согласования необходимо, чтобы

$$\rho_1 = R_1 + R_{\text{вх}} = R_1 + \rho_2,$$

то

$$R_1 = \rho_1 - \rho_2 = 60 - 40 = 20 \text{ ом.}$$

Ток в линии будет равен

$$I = \frac{E}{R_i + \rho_1} = \frac{150}{15 + 60} = 2 \text{ а.}$$

Каждый из амперметров покажет 2 а.

- 7.71. Составляем очевидное уравнение

$$-i \rho_2 \operatorname{ctg} \beta l_2 = -i \rho_1' \operatorname{ctg} \beta' l_{\text{эКВ}}.$$

Решая уравнение относительно $l_{\text{эКВ}}$, получим

$$l_{\text{эКВ}} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{tg} \beta l_2 \right).$$

- 7.73. Для двухпроводной линии известно, что

$$\rho = 120 \ln \frac{d}{r}.$$

В данном случае величины d и ρ являются функциями координаты x ; обозначим их d_x и ρ_x .

Известно далее, что $\rho_x = \rho_0 e^{-\delta x}$. Следовательно,

$$\rho_0 e^{-\delta x} = 120 \ln \frac{d_x}{r}.$$

Решив полученное уравнение относительно d_x , найдем

$$d_x = r e^{\frac{\rho_0}{120} e^{-\delta x}}.$$

Эта формула справедлива при условии $d \gg r$.

- 7.74. Подставив в формулу (задача 7.73)

$$d_x = r e^{\frac{\rho_0}{120} e^{-\delta x}}$$

два значения длины x , т. е. $x=0$ и $x=l=10$ м, получим:

$$d_0 = r e^{\frac{\rho}{120}} = 0,2 e^{\frac{800}{120}} = 1,57 \text{ см}; \quad d_l = 0,2 e^{\frac{800}{120} e^{-0,069 \cdot 10}} = 5,6 \text{ см.}$$

- 7.75. По ф-ле (7.20)

$$Z_{\text{вх}} = Z_2 \frac{1 + i \frac{\rho}{Z_2} \operatorname{tg} \beta y}{1 + i \frac{Z_2}{\rho} \operatorname{tg} \beta y}.$$

В данном случае

$$Z_{\text{вх}} = \rho \frac{1 + i \frac{\rho_1}{\rho} \operatorname{tg} \beta l}{1 + i \frac{\rho}{\rho_1} \operatorname{tg} \beta l} = \rho_1 \frac{\rho + i \rho_1 \operatorname{tg} \beta l}{\rho_1 + i \rho \operatorname{tg} \beta l}.$$

Так как по условию $\beta l \ll 1$, то $\operatorname{tg} \beta l \approx \beta l$,

$$Z_{\text{вх}} = \rho_1 \frac{\rho + i \rho_1 \beta l}{\rho_1 + i \rho \beta l}.$$

Избавимся от мнимости в знаменателе:

$$Z_{\text{вх}} = \rho_1 \frac{\rho_1 (1 + \beta^2 l^2) + i \beta l (\rho_1^2 - \rho^2)}{\rho_1^2 + \rho^2 \beta^2 l^2}.$$

Пренебрегая $\beta^2 l^2$ по сравнению с единицей в числителе и $\beta^2 l^2 \rho^2$ по сравнению с ρ_1^2 в знаменателе, получим

$$Z_{\text{вх}} = \rho + i \frac{(\rho_1^2 - \rho^2)}{\rho_1} \beta l.$$

Очевидно, что если $\rho_1 > \rho$, входное сопротивление будет иметь индуктивный характер; если $\rho_1 < \rho$, входное сопротивление будет иметь емкостный характер.

- 7.81. В режиме бегущей волны

$$P = UI = U_1 e^{-\alpha x} I_1 e^{-\alpha x} = U_1 I_1 e^{-2\alpha x}.$$

Убыль мощности на единицу длины фидера составит

$$-\frac{dP}{dx} = -2\alpha P,$$

отсюда

$$\alpha = \frac{dP}{2P dx}.$$

Потери мощности на единицу длины вызываются погонным сопротивлением и погонной проводимостью

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{2} I^2 R_1 + \frac{1}{2} U^2 G_1 = \frac{1}{2} IU \left(\frac{R_1}{\rho} + G_1 \rho \right) = P \left(\frac{R_1}{\rho} + G_1 \rho \right).$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{dP}{2P} = \frac{R_1}{2\rho} + \frac{G_1 \rho}{2}.$$

8.

● 8.1. Находим приведенное сопротивление нагрузки:

$$\hat{Z}_H = \frac{Z_H}{\rho} = \frac{120 + i 220}{200} = 0,6 + i 1,1.$$

Определяем по номограмме точку \hat{Z}_H , лежащую на пересечении окружностей $\hat{R}=0,6$ и $\hat{X}=1,1$ (рис. P.8.1). Эта точка лежит на пунктирной окружности, радиус которой равен модулю коэффициента отражения $|\rho|$. Данная пунктирная окружность отмечена значением $\kappa_0=0,25$.

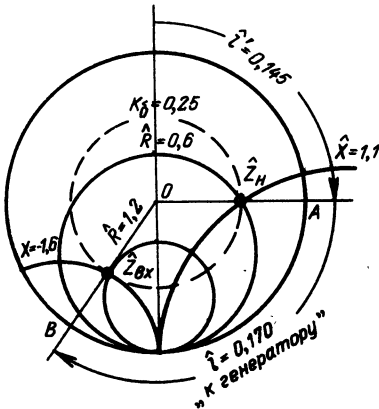


Рис. P.8.1

Общая длина эквивалентной линии

$$\hat{l}_{\text{экв}} = 0,145 + 0,170 = 0,315.$$

Эту длину и нужно отложить по круговой номограмме, двигаясь «от нагрузки к генератору» (точка B). Соединяя точку B с центром O, находим точку \hat{Z}_{Bx} , лежащую на той же пунктирной окружности ($\kappa_0=0,25$). Точка \hat{Z}_{Bx} лежит на пересечении окружностей равных сопротивлений $\hat{R}=1,2$ и $\hat{X}=-1,6$, следовательно,

$$\hat{Z}_{Bx} = 1,2 - i 1,6$$

Проведя линию, соединяющую центр номограммы O с точкой \hat{Z}_H , находим длину \hat{l}' , т. е. точку A на внешней окружности, от которой нужно вести отсчет длины заданной линии. Напомним, что длина \hat{l}' соответствует углу ψ_n , а для получения значения входного сопротивления нужно повернуть радиус-вектор от нуля на угол $\psi = \psi_n - 2\pi \cdot 2y$, т. е. на длину эквивалентной линии, равной $\hat{l}_{\text{экв}} = \hat{l}' + \hat{l}$. По номограмме определяем, что $\hat{l}' = 0,145$.

Находим \hat{l} :

$$\hat{l} = \frac{l}{\lambda} = \frac{3,4}{20} = 0,170.$$

и

$$Z_{\text{вх}} = \hat{Z}_{\text{вх}} \rho = 240 - i 320 \text{ ом.}$$

● 8.2. В данном случае

$$\hat{Z}_{\text{н}} = 1 + i 1.$$

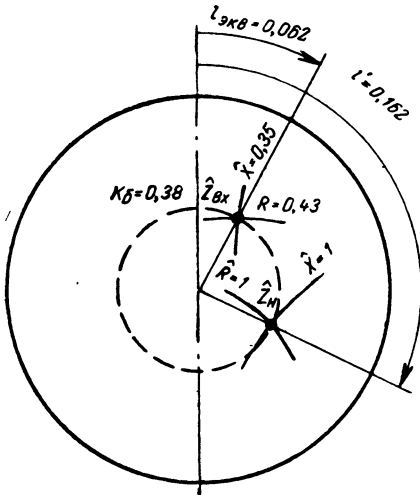


Рис. Р.8.2

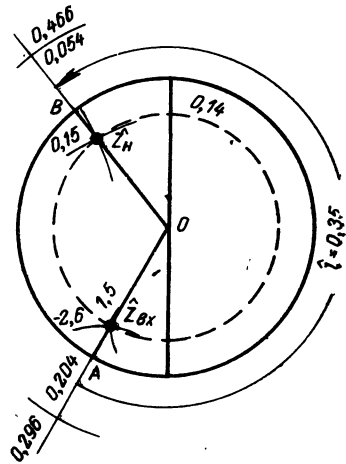


Рис. Р.8.3

Как и в предыдущей задаче, по номограмме найдем (рис. Р.8.2), что

$$\hat{l}' = 0,162$$

и точка $\hat{Z}_{\text{н}}$ лежит на пунктирной окружности, у которой $\kappa_6 = 0,38$.

Определим приведенную длину линии:

$$\hat{l} = \frac{l}{\lambda} = \frac{24}{10} = 2,4.$$

Длина эквивалентной линии

$$\hat{l}_{\text{экв}} = \hat{l}' + \hat{l} = 0,162 + 2,4 = 2,562.$$

Отбросим целое число «приведенных полуволновых отрезков линий», т. е. будем считать, что

$$\hat{l}_{\text{экв}} = 0,062.$$

Найдем по номограмме входное сопротивление линии. Для этого нужно повернуть радиус-вектор окружности $\kappa_6 = 0,38$ на угол, соответствующий $\hat{l}_{\text{экв}}$:

$$\hat{Z}_{\text{вх}} = 0,43 + i 0,35$$

или

$$Z_{\text{вх}} = 43 + i 35 \text{ ом.}$$

● 8.5. Приведенные величины:

$$\hat{Z}_{\text{вх}} = 1,5 - i 2,6, \quad \hat{l} = 0,85.$$

Находим по номограмме точку $\hat{Z}_{\text{вх}}$ и соответствующую ей пунктирную окружность (рис. Р.8.3).

От точки A (найденной на линии, соединяющей центр номограммы и $\hat{Z}_{вх}$) нужно отложить приведенную длину линии по направлению «от генератора к нагрузке». Отбрасывая целое число полуволновых отрезков линии, откладываем угол, соответствующий $\hat{l}=0,35$.

От найденной таким образом точки B проводим линию к центру номограммы и отмечаем точку \hat{Z}_H на пересечении с той же пунктирной окружностью:

$$\hat{Z}_H = 0,15 - i 0,34$$

или

$$Z_H = 15 - i 34 \text{ ом.}$$

Обратим внимание на то, что при движении «от генератора к нагрузке» удобнее отсчитывать длину линии по внутренней шкале (конечно, никакой разницы в этих отсчетах нет, если принимать во внимание знаки). На рис. P.8.3 показаны отсчеты как по внутренней, так и по наружной шкалам.

Проверим решение задачи: считая заданным сопротивление Z_H , находим точку B , т. е. длину $\hat{l}'=0,446$. Прибавляя к этой величине длину линии $\hat{l}=0,35$, получаем, что $\hat{l}_{экв}=0,796$. Отбрасывая целое число полуволн, находим точку A , соответствующую $\hat{l}_{экв}=0,296$.

- 8.7. Минимальное напряжение имеет место в тех сечениях линии, где входное сопротивление имеет чисто активный характер и минимальную величину, т. е. при $Z_{вх}=R_{мин}$. Соответствующая точка ($Z_{вх}$) круговой номограммы (рис. P.8.4) находится на линии активных сопротивлений (верхняя половина вертикальной оси). Так как по условию $k_6=0,4$, то эта точка лежит на пересечении вертикальной линии с пунктирной окружностью $k_6=0,4$.

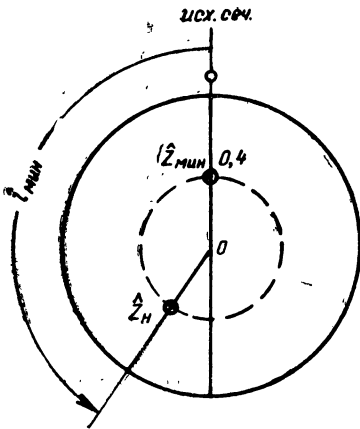


Рис. P.8.4

Таким образом найдена окружность, радиус которой равен модулю коэффициента отражения $|p|$. Для того чтобы получить искомое значение нагрузочного сопротивления, нужно повернуть радиус-вектор «к нагрузке» на угол, соответствующий расстоянию $l_{мин}$ от сечения, где $U=U_{мин}$, до сечения, в котором определяется сопротивление. Откладывая это расстояние

$$\hat{l}_{мин} = \frac{l_{мин}}{\lambda} = \frac{2,5}{12} = 0,208$$

от точки минимума по направлению «к нагрузке», находим на окружности $k_6=0,4$ точку, в которой

$$\hat{Z}_H = 1,8 - i 0,95$$

или

$$Z_H = 900 - i 475 \text{ ом.}$$

- 8.9. Решение задачи с такими условиями сводится к ранее рассмотренным решениям.

Из рис. P.8.5 следует, что расстояние Δl между комплексной нагрузкой Z_H и ближайшим к ней максимумом напряжения равно величине, на которую сме-

шается любой из промежуточных максимумов (или минимумов) нагруженной линии при размыкании нагрузки (холостой ход).

Обычно в расчетах за начало отсчета принимают положение максимума (или минимума) нагруженной линии, а направление смещения максимума при размыкании нагрузки выбирают по наименьшему смещению.

(Аналогично строятся рассуждения при коротком замыкании нагрузки — см. задачу 8.10.)

По условию задачи при включении нагрузки пучность передвигается по направлению «к нагрузке», т. е. при отключении нагрузки пучность передвигается к генератору, причем $\Delta l = 0,18\lambda$ (рис. P.8.6).

Наносим на номограмму (рис. P.8.7) точку $\hat{Z}_{\text{вх макс}} = \hat{R}_{\text{макс}}$; эта точка находится как пересечение линии $R_{\text{макс}}$ с окружностью $k_c = 1,4$. Перемещаем эту точку по направлению «к генератору» на величину смещения $\Delta l = 0,18\lambda$. Пересечение новой линии радиус-вектора с окружностью $k_c = 1,4$ даст значение

$$\hat{Z}_H = 0,75 - i0,22$$

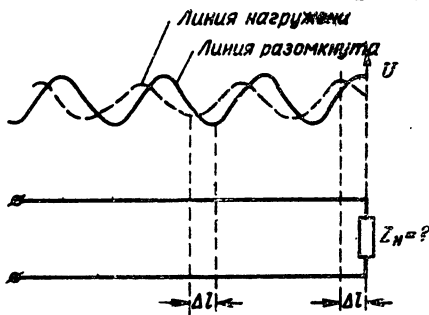


Рис. P.8.5



Рис. P.8.6

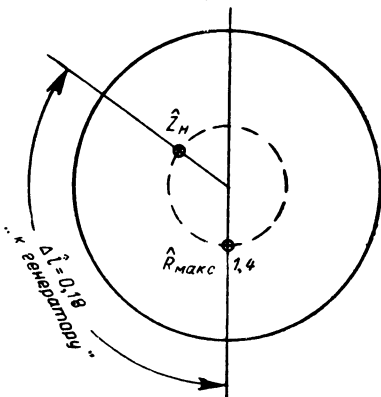


Рис. P.8.7

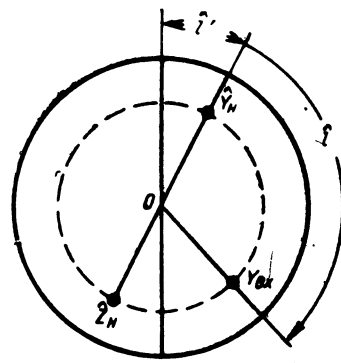


Рис. P.8.8

и величину нагрузки

$$Z_H = (0,75 - i0,22) \cdot 394 = 295 - i81,5 \text{ ом.}$$

● 8.11. Отметим на номограмме точку, соответствующую \hat{Z}_H , и найдем диаметрально противоположную ей точку, представляющую собой приведенную проводимость нагрузки (рис. P.8.8):

$$\hat{Y}_H = 0,20 - i0,27.$$

По номограмме находим, что $\hat{l}' = 0,043$. Добавив к этому расстоянию длину $\hat{l} = 0,143$, получим длину эквивалентной линии

$$\hat{l}_{\text{экв}} = 0,043 + 0,143 = 0,186,$$

которой соответствует приведенная проводимость

$$\hat{Y}_{\text{вх}} = 1 - i1,9.$$

Воспользовавшись ф-лой (8.20)

$$Y_{\text{вх}} = \hat{Y}_{\text{вх}} \sigma = \frac{\hat{Y}_{\text{вх}}}{\rho},$$

найдем

$$Y_{\text{вх}} = \frac{1 - i1,9}{100} = 0,01 - i0,019 \frac{1}{\text{ом}}.$$

● 8.12. Находим приведенную входную проводимость:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{\text{вх}} &= Y_{\text{вх}} \rho = (0,007 - i0,014) 400 = \\ &= 2,8 - i15,6. \end{aligned}$$

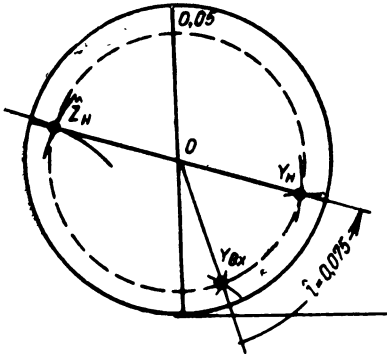


Рис. Р.8.9

Нанесем точку $\hat{Y}_{\text{вх}}$ на номограмму (рис. Р.8.9).

«Пройдя» по пунктирной окружности «к нагрузке» расстояние $0,075\lambda$, получим точку $\hat{Y}_n = 0,21 - i1,39$.

Сопrotивление нагрузки \hat{Z}_n определяется по номограмме как диаметрально противоположная точка:

$$\hat{Z}_n = 0,11 - i0,7, \quad Z_n = 44 - i280 \text{ ом}.$$

9.

● 9.1. В соответствии с ф-лой (2.23) имеем

$$Z(i\omega) = \frac{A_{11}R_3 + A_{12}}{A_{21}R_3 + A_{22}},$$

где коэффициенты A должны быть определены по схеме, изображенной на рис. Р.9.1.

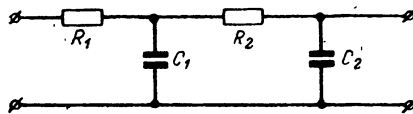


Рис. Р.9.1

По поз. 12 табл. 2.3 находим:

$$A_{11} = \frac{\frac{1}{i\omega C_1} \left(R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \right) + R_1 \left(\frac{1}{i\omega C_1} + R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \right)}{\frac{1}{i\omega C_1} \frac{1}{i\omega C_2}};$$

$$A_{12} = \frac{R_1 \frac{1}{i\omega C_1} + R_1 R_2 + R_2 \frac{1}{i\omega C_1}}{\frac{1}{i\omega C_1}};$$

$$A_{21} = \frac{\frac{1}{i\omega C_1} + R_2 + \frac{1}{i\omega C_2}}{\frac{1}{i\omega C_1} \frac{1}{i\omega C_2}}; \quad A_{22} = \frac{R_2 + \frac{1}{i\omega C_1}}{\frac{1}{i\omega C_1}}.$$

После несложных преобразований и замены $i\omega = p$ перепишем эти коэффициенты в следующем виде:

$$A_{11} = p^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + p(C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_2) + 1; \quad A_{21} = p^2 R_2 C_1 C_2 + p(C_1 + C_2);$$

$$A_{12} = p R_1 R_2 C_1 + R_1 + R_2; \quad A_{22} = p R_2 C_1 + 1.$$

Подставив эти выражения в формулу для входного сопротивления, получим

$$Z(p) = \frac{p^2 R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 + p(C_1 R_1 R_3 + C_2 R_1 R_3 + C_2 R_2 R_3 + C_1 R_1 R_2) + R_1 + R_2 + R_3}{p^2 R_2 R_3 C_1 C_2 + p(C_1 R_3 + C_2 R_3 + C_1 R_2) + 1}.$$

Введя условия задачи, найдем

$$Z(p) = \frac{p^2 + 6p + 8}{0,01p^2 + 0,04p + 0,03}.$$

Теперь приступим к операции синтеза.

Образует непрерывную дробь путем последовательного выделения целых частей:

$$\frac{p^2 + 6p + 8}{p^2 + 4p + 3} \left| \frac{0,01p^2 + 0,04p + 0,03}{100} \right.$$

$$\frac{2p + 5}{2p + 5}$$

Итак,

$$Z(p) = 100 + \frac{2p + 5}{0,01p^2 + 0,04p + 0,03}.$$

Из последнего выражения следует, что синтезируемая схема представляет собой активное сопротивление (100 Ом), соединенное со схемой, соответствующей дробно-рациональной функции (рис. Р.9.2а):

$$\frac{2p + 5}{0,01p^2 + 0,04p + 0,03}.$$

2. Для того чтобы выяснить структуру схемы, соответствующей последней дробно-рациональной функции, образуем неправильную дробь

$$\frac{2p + 5}{0,01p^2 + 0,04p + 0,03} = \frac{1}{\frac{0,01p^2 + 0,04p + 0,03}{2p + 5}}$$

и выделим целую часть

$$\begin{array}{r} 0,01p^2 + 0,04p + 0,03 \quad | \quad 2p + 5 \\ - 0,01p^2 + 0,025p \\ \hline 0,015p + 0,03 \end{array}$$

Теперь выражение для входного сопротивления запишется в виде

$$Z(p) = 100 + \frac{1}{0,005p + \frac{0,015p + 0,03}{2p + 5}}$$

т. е. последовательно с активным сопротивлением должен быть включен конденсатор, имеющий емкость 0,005 ф, а параллельно конденсатору — схема, соответствующая дробно-рациональной функции (рис. P.9.26):

$$\frac{0,015p + 0,03}{2p + 5}$$

3. Так как схема, соответствующая последней функции, должна быть включена параллельно с конденсатором, дробно-рациональную функцию нужно преобразовать так, чтобы выделяемая целая часть имела вид проводимости

$$\frac{0,015p + 0,03}{2p + 5} = \frac{1}{\frac{2p + 5}{0,015p + 0,03}} = \frac{1}{\frac{400}{3} + \frac{1}{0,015p + \frac{1}{100}}}$$

Теперь выражение для входного сопротивления примет вид

$$Z(p) = 100 + \frac{1}{0,005p + \frac{1}{\frac{400}{3} + \frac{1}{0,015p + \frac{1}{100}}}}$$

Таким образом, параллельно конденсатору должна быть включена схема, состоящая из активного сопротивления $R_2 = \frac{400}{3}$ ом, последовательно с которым нужно включить параллельно соединенные конденсатор $C_2 = 0,015$ ф и активное сопротивление $R_3 = \frac{100}{3}$ ом (рис. P.9.28).

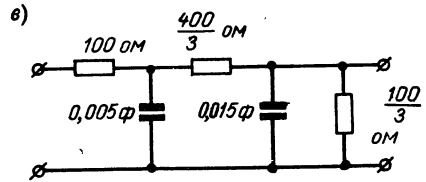
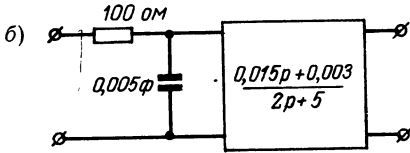
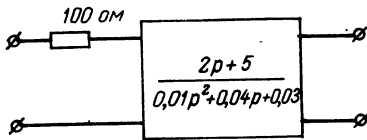


Рис. P.9.2

● 9.2. 1. Выделяем целую часть:

$$\frac{p^2 10^{-4} + p 2 \cdot 10^{-1} + 1, 1 \cdot 10^3}{p^2 10^{-4} + p 10^{-1} + 10^3} \left| \frac{p^2 10^{-7} + p \cdot 10^{-4} + 1}{10^3} \right|$$

$$\frac{p 10^{-1} + 10^2}{p 10^{-1} + 10^2}$$

$$Z(p) = 10^3 + \frac{p 10^{-1} + 10^2}{p^2 10^{-7} + p 10^{-4} + 1} = 10^3 + \frac{1}{\frac{p^2 10^{-7} + p 10^{-4} + 1}{p 10^{-1} + 10^2}}$$

$$\frac{2 \cdot p^2 10^{-7} + p 10^{-4} + 1}{p^2 10^{-7} + p 10^{-4}} \left| \frac{p 10^{-1} + 10^2}{1 \cdot 10^{-6}} \right|$$

$$Z(p) = 10^3 + \frac{1}{p 10^{-6} + \frac{1}{\frac{p 10^{-1} + 10^2}{1 \cdot 10^{-6}}}}$$

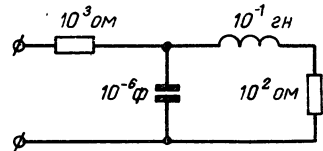


Рис. P.9.3

Схема, соответствующая найденному $Z(p)$, изображена на рис. P.9.3.

● 9.3. 1. Выделив целую часть:

$$\frac{p^2 2 \cdot 10^{-6} + p 1001 \cdot 10^{-3} + 10^3}{p^2 2 \cdot 10^{-6} + p 2} \left| \frac{p^2 10^{-9} + p 10^{-3} + 1}{2 \cdot 10^3} \right|$$

$$\frac{-p \cdot 0,999 - 10^3}{-10^3}$$

приходим к нереализуемой схеме, так как ее элементы имеют отрицательные значения. Попробуем осуществить операцию синтеза, начав деление с низших степеней полиномов:

$$\frac{10^3 + p 1001 \cdot 10^{-3} + p^2 2 \cdot 10^{-6}}{10^3 + p} \left| \frac{1 + p 10^{-3} + p^2 10^{-9}}{10^3} \right|$$

$$\frac{p 10^{-3} + p^2 10^{-6}}{p 10^{-3} + p^2 10^{-6}}$$

$$Z(p) = 10^3 + \frac{1}{\frac{1 + p10^{-3} + p^210^{-9}}{p10^{-3} + p^210^{-6}}};$$

$$2. \frac{1 + p10^{-3} + p^210^{-9}}{1 + p10^{-3}} \left| \frac{p10^{-3} + p^210^{-6}}{\frac{1}{p} 10^3} \right.;$$

$$Z(p) = 10^3 + \frac{1}{\frac{1}{p} 10^3 + \frac{1}{\frac{p10^{-3} + p^210^{-6}}{p^210^{-9}}}}.$$

$$3. p10^{-3} + p^210^{-6} \left| \frac{p^210^{-9}}{\frac{1}{p} 10^3 + \frac{1}{10^{-3}}}; \right.$$

$$Z(p) = 10^3 + \frac{1}{\frac{1}{p} 10^3 + \frac{1}{\frac{1}{p10^{-6}} + \frac{1}{10^{-3}}}}.$$

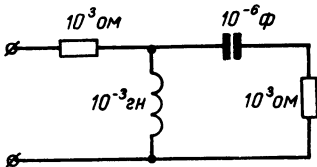


Рис. Р.9.4

Схема, соответствующая последнему выражению, изображена на рис. Р.9.4.

● 9.5. Указание к решению. Следует начать деление с низших степеней.

● 9.6. 1. Так как по условию задачи первым элементом схемы должен быть конденсатор, т. е. в выражении для входного сопротивления нужно выделить член вида $\frac{1}{p}$, следует начать деление с низших степеней:

$$- \frac{10^2 + p1001 \cdot 10^{-4} + p^2 \cdot 10^{-7} + p^3 10^{-13}}{10^2 + p1001 \cdot 10^{-4}} \left| \frac{p10^{-6} + p^2 1001 \cdot 10^{-12}}{\frac{10^8}{p}} \right.;$$

$$Z(p) = \frac{10^8}{p} + \frac{p^2 10^{-7} + p^3 10^{-13}}{p10^{-6} + p^2 1001 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^8}{p} + \frac{1}{\frac{p^2 10^{-7} + p^3 10^{-13}}{p10^{-6} + p^2 1001 \cdot 10^{-12}}};$$

$$2. \frac{p10^{-6} + p^2 1001 \cdot 10^{-12}}{p10^{-6} + p^2 10^{-12}} \left| \frac{p^2 10^{-7} + p^3 10^{-13}}{\frac{10}{p}} \right.;$$

$$Z(p) = \frac{10^8}{p} + \frac{1}{\frac{10}{p} + \frac{p^2 10^{-9}}{p^2 10^{-7} + p^3 10^{-13}}} = \frac{10^8}{p} + \frac{1}{\frac{10}{p} + \frac{1}{10^2 + p10^{-4}}}.$$

Схема, соответствующая последнему выражению, изображена на рис. P.9.5.

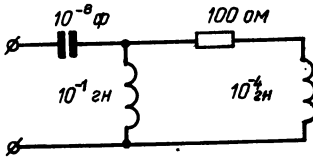


Рис. P.9.5

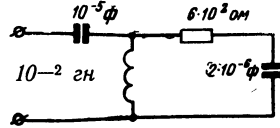


Рис. P.9.6

● 9.8. Деление с высших степеней приводит к схеме с отрицательными значениями элементов, будем поэтому начинать деление с низших степеней:

$$1. \frac{1 + p12 \cdot 10^{-4} + p^2 12 \cdot 10^{-8} + p^3 \cdot 12 \cdot 10^{-11}}{1 + p12 \cdot 10^{-4} + p^2 2 \cdot 10^{-8}} \left| \frac{p \cdot 10^{-5} + p^2 12 \cdot 10^{-9} + p^3 2 \cdot 10^{-13}}{10^5} \right. ;$$

$$Z(p) = \frac{10^5}{p} + \frac{1}{p10^{-5} + p^2 12 \cdot 10^{-9} + p^3 2 \cdot 10^{-13}} \cdot \frac{p^2 10^{-7} + p^3 12 \cdot 10^{-11}}{1}$$

$$2. \frac{p10^{-5} + p^2 12 \cdot 10^{-9} + p^3 2 \cdot 10^{-13}}{p^3 2 \cdot 10^{-13}} \left| \frac{p^2 10^{-7} + p^3 12 \cdot 10^{-11}}{10^2} \right. ;$$

$$Z(p) = \frac{10^5}{p} + \frac{1}{\frac{p}{p} + \frac{10^2}{p^3 2 \cdot 10^{-13}}} =$$

$$= \frac{10^5}{p} + \frac{1}{\frac{p}{p} + \frac{1}{6 \cdot 10^2 + \frac{1}{p \cdot 2 \cdot 10^{-6}}}}$$

Схема, соответствующая последнему выражению, изображена на рис. P.9.6.

● 9.9. 1. Выделим целую часть:

$$\frac{p^2 106 \cdot 10^{-7} + p32 \cdot 10^{-2} + 10^4}{p^2 106 \cdot 10^{-7} + p2 \cdot 10^{-2}} \left| \frac{p53 \cdot 10^{-5} + 1}{p2 \cdot 10^{-2}} \right. ;$$

$$Z(p) = p2 \cdot 10^{-2} + \frac{p3 \cdot 10^{-1} + 10^4}{p53 \cdot 10^{-5} + 1} = p2 \cdot 10^{-2} + \frac{1}{\frac{p53 \cdot 10^{-5} + 1}{p3 \cdot 10^{-1} + 10^4}}$$

2. Повторим операцию выделения целой части:

$$\frac{p53 \cdot 10^{-5} + 1}{p53 \cdot 10^{-5} + \frac{53}{3}} \left| \frac{p3 \cdot 10^{-11} + 10^4}{\frac{53}{3} 10^{-4}} \right.$$

$$\frac{50}{3}$$

При таком выделении целой части схему реализовать нельзя, так как параметры элементов отрицательны; будем начинать деление с низших степеней:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 + p53 \cdot 10^{-5}}{1 + p3 \cdot 10^{-5}} \bigg| \frac{10^4 + p3 \cdot 10^{-1}}{10^{-4}} ; \\
 & \frac{1}{p5 \cdot 10^{-4}} \\
 Z(p) = & p2 \cdot 10^{-2} + \frac{1}{10^{-4} + \frac{1}{\frac{10^4 + p3 \cdot 10^{-1}}{p5 \cdot 10^{-4}}}} = \\
 = & p2 \cdot 10^{-2} + \frac{1}{10^{-4} + \frac{1}{6 \cdot 10^2 + \frac{1}{5 \cdot 10^{-8} p}}} .
 \end{aligned}$$

Схема, соответствующая последнему выражению, изображена на рис. P.9.7.

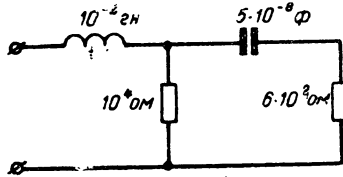


Рис. P.9.7

● 9.10. Совершаем последовательно операции выделения целых частей:

$$1. \frac{p^4 11 \cdot 10^{-15} + p^3 1011 \cdot 10^{-12} + p^2 13 \cdot 10^{-6} + p 1011 \cdot 10^{-3} + 10^3}{p^4 11 \cdot 10^{-15} + p^3 1011 \cdot 10^{-12} + p^2 2 \cdot 10^{-6} + p 10^{-3}} \bigg| \frac{p^3 11 \cdot 10^{-12} + p^2 1011 \cdot 10^{-9} + p 2 \cdot 10^{-3} + 1}{p 10^{-3}}$$

$$Z(p) = p 10^{-3} + \frac{1}{\frac{p^3 11 \cdot 10^{-12} + p^2 \cdot 1011 \cdot 10^{-9} + p 2 \cdot 10^{-3} + 1}{p^2 11 \cdot 10^{-6} + p 1010 \cdot 10^{-3} + 10^3}}$$

$$2. \frac{p^3 11 \cdot 10^{-12} + p^2 1011 \cdot 10^{-9} + p 2 \cdot 10^{-3} + 1}{p^3 11 \cdot 10^{-12} + p^2 1010 \cdot 10^{-9} + p 10^{-3}} \bigg| \frac{p^2 11 \cdot 10^{-6} + p 1010 \cdot 10^{-3} + 10^3}{p 10^{-6}}$$

$$Z(p) = p 10^{-3} + \frac{1}{p 10^{-6} + \frac{1}{\frac{p^2 11 \cdot 10^{-6} + p 1010 \cdot 10^{-3} + 10^3}{p^2 \cdot 10^{-9} + p \cdot 10^{-3} + 1}}}$$

$$3. \frac{p^2 11 \cdot 10^{-6} + p 1010 \cdot 10^{-3} + 10^3}{p^2 11 \cdot 10^{-6} + p 11 + 11 \cdot 10^3} \bigg| \frac{p^2 10^{-9} + p 10^{-3} + 1}{11 \cdot 10^3}$$

Здесь параметры отрицательны; будем делить, начиная с низших степеней:

$$\begin{aligned}
 & \frac{10^3 + p1010 \cdot 10^{-3} + p^2 11 \cdot 10^{-6}}{10^3 + p} \left| \frac{1 + p10^{-3} + p^2 10^{-9}}{10^3} \right. ; \\
 & \frac{p10^{-2} + p^2 10^{-5}}{p10^{-2} + p^2 10^{-5}} \left| \frac{1}{10^3} \right. ; \\
 Z(p) = p10^{-3} + & \frac{1}{p10^{-6} + \frac{1}{10^3 + \frac{1}{\frac{1 + p10^{-3} + p^2 10^{-9}}{p \cdot 10^{-2} + p^2 10^{-5}}}}} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & \frac{1 + p10^{-3} + p^2 10^{-9}}{1 + p10^{-3}} \left| \frac{p10^{-2} + p^2 10^{-5}}{10^2} \right. ; \\
 & \frac{p10^{-2} + p^2 10^{-5}}{p^2 10^{-9}} \left| \frac{10^2}{p} \right. ; \\
 Z(p) = p10^{-3} + & \frac{1}{p10^{-6} + \frac{1}{10^3 + \frac{10^2}{\frac{10^2}{p} + \frac{1}{p10^{-2} + p^2 10^{-5}}}}} .
 \end{aligned}$$

Теперь можно окончательно записать выражение для входного сопротивления в виде непрерывной дроби

$$Z(p) = p10^{-3} + \frac{1}{p10^{-6} + \frac{1}{10^3 + \frac{1}{\frac{10^2}{p} + \frac{1}{\frac{10^7}{p} + 10^4}}}}} .$$

Схема, соответствующая последнему выражению, изображена на рис. P.9.8.

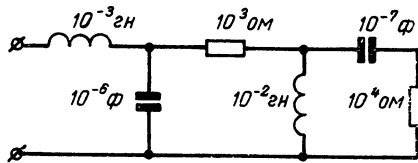


Рис. P.9.8

● 9.11. Будем последовательно выделять целые части:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{p^3 11 \cdot 10^{-10} + p^2 1121 \cdot 10^{-7} + p 121 \cdot 10^{-2} + 11 \cdot 10^2}{p^3 11 \cdot 10^{-10} + p^2 1011 \cdot 10^{-7} + p 2 \cdot 10^{-1} + 10^2} \left| \frac{p^3 \cdot 11 \cdot 10^{-12} p^2 1011 \cdot 10^{-9} + p 2 \cdot 10^{-3} + 1}{10^2} \right. ; \\
 & \frac{p^2 \cdot 11 \cdot 10^{-6} + p 101 \cdot 10^{-2} + 10^3}{p^2 \cdot 11 \cdot 10^{-6} + p 101 \cdot 10^{-2} + 10^3} \left| \frac{1}{10^2} \right. ; \\
 Z(p) = 10^2 + & \frac{1}{p^3 11 \cdot 10^{-12} + p^2 1011 \cdot 10^{-9} + p 2 \cdot 10^{-3} + 1} .
 \end{aligned}$$

$$2. \quad \frac{p^3 11 \cdot 10^{-12} + p^2 1011 \cdot 10^{-9} + p 2 \cdot 10^{-3} + 1}{p^3 11 \cdot 10^{-12} + p^2 101 \cdot 10^{-8} + p 10^{-3}} \bigg| \frac{p^2 11 \cdot 10^{-6} + p 101 \cdot 10^{-2} + 10^3}{p 10^{-6}}$$

$$Z(p) = 10^2 + \frac{1}{p 10^{-6} + \frac{1}{\frac{1}{10^3 + \frac{1}{p^2 11 \cdot 10^{-6} + p 101 \cdot 10^{-2} + 10^3}}}}$$

$$3. \quad \frac{p^2 11 \cdot 10^{-6} + p 101 \cdot 10^{-2} + 10^3}{p^2 11 \cdot 10^{-6} + p 11 + 11 \cdot 10^3} \bigg| \frac{p^2 10^{-9} + p 10^{-3} + 1}{11 \cdot 10^3}$$

При таком делении появляются отрицательные параметры.
Будем делить, начиная с младших степеней:

$$\frac{10^3 + p 101 \cdot 10^{-2} + p^2 11 \cdot 10^{-6}}{10^3 + p} \bigg| \frac{1 + p 10^{-3} + p^2 10^{-9}}{10^3};$$

$$Z(p) = 10^2 + \frac{1}{p 10^{-6} + \frac{1}{10^3 + \frac{p 10^{-2} + p^2 10^{-5}}{1 + p 10^{-3} + p^2 10^{-9}}}}$$

$$4. \quad \frac{1 + p 10^{-3} + p^2 10^{-9}}{1 + p 10^{-3}} \bigg| \frac{p 10^{-2} + p^2 10^{-5}}{\frac{10^2}{p}};$$

$$Z(p) = 10^2 + \frac{1}{p 10^{-6} + \frac{1}{10^3 + \frac{1}{\frac{10^2}{p} + \frac{p^2 10^{-9}}{p 10^{-2} + p^2 10^{-5}}}}}}$$

Выражение для входного сопротивления теперь можно записать в окончательном виде.

$$Z(p) = 10^2 + \frac{1}{p 10^{-6} + \frac{1}{10^3 + \frac{1}{\frac{10^2}{p} + \frac{1}{\frac{10^2}{p} + 10^4}}}}}}$$

Схема, соответствующая данной непрерывной дроби, изображена на рис. Р.9.9.

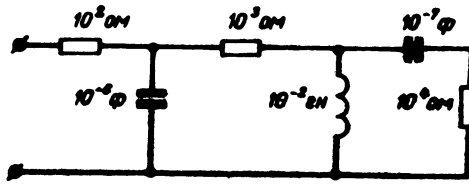


Рис. Р.9.9

● 9.13. Выделим, прежде всего, целую часть:

$$Z(p) = 10^8 + \frac{p110 \cdot 10^3 + 101 \cdot 10^2}{p^2 10^{-9} + p1001 \cdot 10^{-6} + 1}$$

Разложим правильную дробь на элементарные.
Решая уравнение, находим корни знаменателя:

$$p^2 10^{-9} + p1001 \cdot 10^{-6} + 1 = 0, \quad p_1 = -10^6, \quad p_2 = -10^3.$$

Разделим числитель и знаменатель на 10^{-9} :

$$\frac{p110 \cdot 10^6 + 101 \cdot 10^{11}}{p^2 + p1001 \cdot 10^3 + 10^9} = \frac{A_1}{p + 10^6} + \frac{A_2}{p + 10^3}$$

Рассчитаем A_1 и A_2 методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} p110 \cdot 10^6 + 101 \cdot 10^{11} &= A_1(p + 10^3) + A_2(p + 10^6); \\ A_1 + A_2 &= 110 \cdot 10^6; \quad A_1 10^3 + A_2 10^6 = 101 \cdot 10^{11}. \end{aligned}$$

Решая систему, находим:

$$A_1 = 10^8; \quad A_2 = 10^7.$$

Следовательно,

$$\frac{p110 \cdot 10^6 + 101 \cdot 10^{11}}{p^2 + p1001 \cdot 10^3 + 10^9} = \frac{10^8}{p + 10^6} + \frac{10^7}{p + 10^3}$$

Выражение для входного сопротивления запишется в виде

$$Z(p) = 10^8 + \frac{10^8}{p + 10^6} + \frac{10^7}{p + 10^3}$$

Первый член этого выражения соответствует поз. 1, а второй и третий — поз. 4, табл. 9.1. Составив общую схему, получаем рис. Р.9.10.

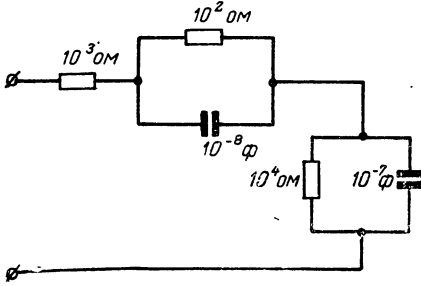


Рис. Р.9.10

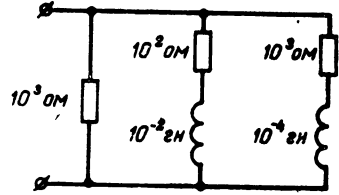


Рис. Р.9.11

● 9.14. Выделим целую часть:

$$- \frac{p^2 10^{-9} + p 2011 \cdot 10^{-5} + 12 \cdot 10^2}{p^2 10^{-9} + p 1001 \cdot 10^{-5} + 10^2} \left| \frac{p^2 10^{-6} + p 1001 \cdot 10^{-2} + 10^5}{10^{-3}} \right.$$

$$\frac{p 1010 \cdot 10^{-5} + 11 \cdot 10^2}{p^2 10^{-6} + p 1001 \cdot 10^{-2} + 10^5}$$

Входную проводимость теперь можно записать в виде

$$Y(p) = 10^{-3} + \frac{p 1010 \cdot 10^{-5} + 11 \cdot 10^2}{p^2 10^{-6} + p 1001 \cdot 10^{-2} + 10^5}$$

или

$$Y(p) = 10^{-3} + \frac{p 101 \cdot 10^2 + 11 \cdot 10^8}{p^2 + p 1001 \cdot 10^4 + 10^{11}}$$

Решив квадратное уравнение

$$p^2 + 1001 \cdot 10^4 p + 10^{11} = 0,$$

найдем

$$p_1 = -10^4; p_2 = -10^7.$$

Теперь можно выполнить разложение

$$\frac{101 \cdot 10^2 p + 11 \cdot 10^8}{p^2 + 1001 \cdot 10^4 p + 10^{11}} = \frac{A_1}{p + 10^4} + \frac{A_2}{p + 10^7}.$$

Определив коэффициенты A_1 и A_2 , запишем окончательно

$$Y(p) = 10^{-3} + \frac{10^2}{p + 10^4} + \frac{10^4}{p + 10^7}.$$

Первый член соответствует поз. 1, а второй и третий — поз. 5 табл. 9.1; составленная схема изображена на рис. Р.9.11.

● 9.15. Для разложения $Z(p)$ на элементарные дроби необходимо найти корни биквадратного уравнения:

$$8 \cdot 10^{-19} p^4 + 81 \cdot 10^{-10} p^2 + 1 = 0; p_{1,2}^2 = -\frac{10^9}{8}; p_{3,4}^2 = -10^{10}.$$

В данном случае все корни мнимые (схема состоит из чисто реактивных элементов).

Таким образом,

$$\frac{p^3 \frac{402}{8} 10^6 + p \frac{7}{8} 10^{16}}{p^4 + \frac{81}{8} 10^9 + \frac{1}{8} 10^{19}} = \frac{A_1 p}{p^2 + 10^{10}} + \frac{A_2 p}{p^2 + \frac{1}{8} 10^9}$$

Находим коэффициенты:

$$A_1 = 5 \cdot 10^7; \quad A_2 = \frac{1}{4} 10^6.$$

Теперь входное сопротивление запишется в виде

$$Z(p) = \frac{5 \cdot 10^7 p}{p^2 + 10^{10}} + \frac{\frac{1}{4} 10^6 p}{p^2 + \frac{1}{8} 10^9}$$

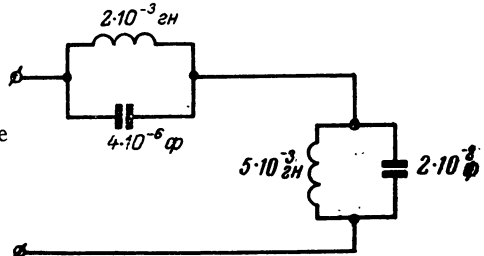


Рис. P.9.12

Воспользовавшись поз. 6 табл. 9.1, составим схему, соответствующую полученному выражению (рис. P.9.12).

● 9.16. Прежде всего выделим целую часть:

$$\frac{p^4 10^{-21} + p^2 (101 \cdot 10^{-13} + 10^{-8}) + 1}{p^4 10^{-21} + p^2 \cdot 10^{-8}} \Bigg| \frac{10^{-16} p^3 + 10^{-3} p}{p 10^{-5}}$$

Следовательно,

$$Y(p) = p 10^{-5} + \frac{p^2 101 \cdot 10^{-13} + 1}{p^3 10^{-16} + p 10^{-3}}$$

Дробно-рациональную функцию разложим на элементарные дроби

$$\frac{p^2 101 \cdot 10^{-13} + 1}{p^3 \cdot 10^{-16} + p 10^{-3}} = \frac{p^2 101 \cdot 10^3 + 10^{16}}{p^3 + p 10^{13}} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2 p}{p^2 + 10^{13}}$$

Коэффициенты оказываются равными: $A_1 = 10^3$; $A_2 = 10^5$. Таким образом,

$$Y(p) = p 10^{-5} + \frac{10^3}{p} + \frac{10^5 p}{p^2 + 10^{13}}$$

Члены разложения соответствуют поз. 3, 2 и 6 табл. 9.1; соответствующая схема изображена на рис. P.9.13.

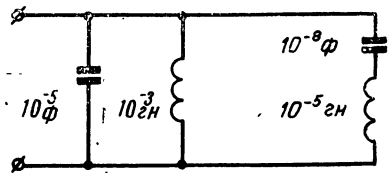


Рис. P.9.13

● 9.17. Выделив из выражения для входного сопротивления целые части, получим

$$p) = 10^3 + p 10^{-4} + \frac{p 10^6 + 10^{10}}{p^2 + p 10^4 + 10^9}$$

Члены разложения соответствуют поз. 1, 2 и 8 табл. 9.1; соответствующая схема изображена на рис. Р.9.14.

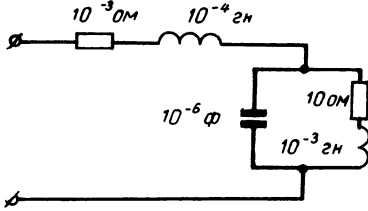


Рис. Р.9.14

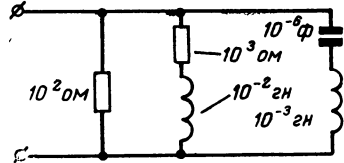


Рис. Р.9.15

● 9.18. Выделив целую часть, получим

$$Y(p) = 10^{-2} + \frac{p^2 11 \cdot 10^{-9} + p 10^{-3} + 1}{p^3 10^{-11} + p^2 10^{-6} + p 10^{-2} + 10^3}$$

Представим знаменатель дробно-рациональной функции в виде произведения двух сомножителей:

$$p^3 10^{-11} + p^2 10^{-6} + p 10^{-2} + 10^3 = (p^2 10^{-9} + 1)(p 10^{-2} + 10^3)$$

по которым можно произвести разложение на элементарные дроби.

Находим корни:

$$p_1 = -10^5; p_2^2 = -10^9.$$

Освободившись в знаменателе дробно-рациональной функции от коэффициента при p^3 , получим

$$\frac{p^2 11 \cdot 10^2 + p 10^8 + 10^{11}}{p^3 + p^2 10^5 + p 10^9 + 10^{14}} = \frac{A_1}{p + 10^5} + \frac{A_2 p}{p^2 + 10^9}$$

Находим $A_1 = 10^2$; $A_2 = 10^3$.

Теперь

$$Y(p) = 10^{-2} + \frac{10^2}{p + 10^5} + \frac{10^3 p}{p^2 + 10^9}$$

Члены разложения соответствуют поз. 1, 4 и 7 табл. 9.1; составленная схема изображена на рис. Р.9.15.

● 9.20. Знаменатель выражения $Y(p)$ можно представить в виде произведения двух сомножителей

$$\begin{aligned} 10^{-5} p^4 + 10^{-4} p^3 + (10^4 + 10^{-5}) p^2 + 10^{-4} p + 10^4 &= \\ = 10^{-5} p^2 (p^2 + 1) + 10^{-4} p (p^2 + 1) + 10^4 (p^2 + 1) &= \\ = (p^2 + 1) (10^{-5} p^2 + 10^{-4} p + 10^4). \end{aligned}$$

Освободившись от коэффициента при p^4 , получим

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{(10^4 + 10^{-2}) p^3 + (10^5 + 10^{-1}) p^2 + 1001 \cdot 10^4 p + 10^5}{p^4 + 10 p^3 + (10^9 + 1) p^2 + 10^9 p + 10^9} = \\ &= \frac{A_1 p}{p^2 + 1} + \frac{A_2 p + A_3}{p^2 + 10 p + 10^9}. \end{aligned}$$

Коэффициенты оказываются равными:

$$A_1 = 10^{-2}; A_2 = 10^4; A_3 = 10^5.$$

Окончательно

$$Y(p) = \frac{10^{-2} p}{p^2 + 1} + \frac{10^4 p + 10^5}{p^2 + 10 p + 10^9}$$

Члены разложения соответствуют поз. 7 и 9 табл. 9.1; составленная схема изображена на рис. Р.9.16.

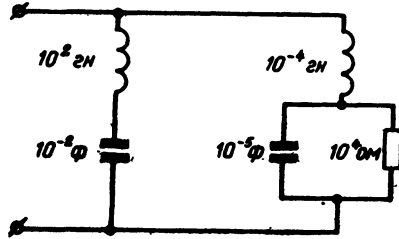


Рис. Р.9.16

10.

● 10.1. Числитель N_Z представляет собой четный полином, и поэтому для определения Z -параметров воспользуемся ф-лами (10.7):

$$Z_{21} = \frac{1 - 6 \cdot 10^{-10} p^2}{12 \cdot 10^{-6} p}; \quad Z_{22} = -\frac{1 + 6 \cdot 10^{-10} p^2}{12 \cdot 10^{-6} p}.$$

По ф-лам (10.12) находим Z_1 и Z_2 :

$$Z_1 = 10^{-4} p; \quad Z_2 = \frac{1}{6 \cdot 10^{-6} p}.$$

Так как нагрузкой цепи является активное сопротивление 600 Ом, Z_1 и Z_2 следует умножить на 600, таким образом:

$$Z_1 = 6 \cdot 10^{-2} p; \quad Z_2 = \frac{1}{10^{-8} p}.$$

Схема четырехполюсника представлена на рис. Р.10.1.

● 10.3. Для реализации Z_1 и Z_2 следует воспользоваться табл. 9.1. Соответ-

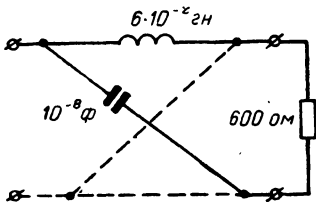


Рис. Р.10.1

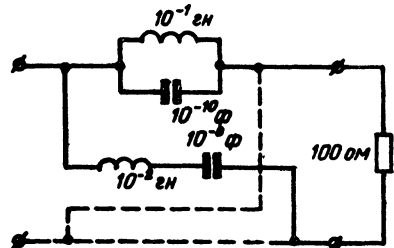


Рис. Р.10.2

ствующая схема изображена на рис. Р.10.2.

● 10.4.

Полином $L_1(p)$ неприемлем, так как является четным.

Полиномы $L_2(p)$ и $L_5(p)$ неприемлемы, так как в них нет чередования нулей с нулями знаменателя N_U .

Полином $L_4(p)$ неприемлем, так как его степень отличается от степени знаменателя N_U больше, чем на единицу.

Таким образом, приемлемыми для знаменателей Z- и Y-параметров оказались только полиномы $L_3(p)$ и $L_6(p)$.

10.5. 1. Для первого варианта примем $L(p) = p$.

По ф-лам (10.10) и (10.11) находим:

$$Z_{21} = \frac{Q(p)}{L(p)} = \frac{10^{-7} p^2 - 0,9 \cdot 10^6}{p};$$

$$Z_{11} = \frac{P(p)}{Z(p)} = \frac{2 \cdot 10^{-7} p^2 + 2,2 \cdot 10^6}{p}.$$

Из ф-лы (10.12) получаем:

$$Z_1 = Z_{11} + Z_{12} = Z_{11} - Z_{21} = \frac{10^{-7} p^2 + 3,1 \cdot 10^6}{p},$$

$$Z_2 = Z_{11} - Z_{12} = Z_{11} + Z_{21} = \frac{3 \cdot 10^{-7} p^2 + 1,3 \cdot 10^6}{p}.$$

Таким образом,

$$Z_1 = 10^{-7} p + \frac{3,1 \cdot 10^6}{p};$$

$$Z_2 = 3 \cdot 10^{-7} p + \frac{1,3 \cdot 10^6}{p}$$

Схема, соответствующая этому варианту, изображена на рис. P.10.3а.

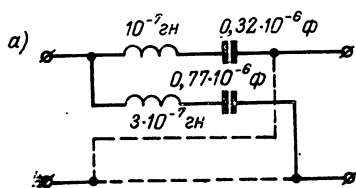
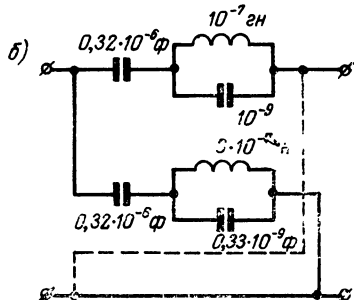


Рис. P.10.3



2. Во втором варианте примем

$$L(p) = 10^{-16} p(p^2 + 10^{16}).$$

Расчеты, аналогичные предыдущим, приводят к следующим значениям Z_1 и Z_2 :

$$Z_1 = \frac{10^{-7} p^2 + 3,1 \cdot 10^6}{10^{-16} p(p^2 + 10^{16})}; \quad Z_2 = \frac{3 \cdot 10^{-7} p^2 + 1,3 \cdot 10^6}{10^{-16} p(p^2 + 10^{16})}.$$

Схема, соответствующая этому варианту, дана на рис. P.10.3б.

Как видно из рисунков, реализация по первому варианту приводит к более простой схеме.

● 10.6. Выбрав $L(p) = 2 \cdot 10^{-16} p(p^2 + 10^{16})$, получим значения Z_{11} и Z_{21} , совпадающие со значениями Z_1 и Z_2 в задаче 10.3.

● 10.7. Для получения наиболее простой схемы степень $L(p)$ должна быть меньше степени знаменателя N_U на единицу, т. е. $L(p) = kp$. Тогда:

$$\begin{aligned} Z_{21} &= \frac{p}{k} + \frac{a}{kp}; \quad Z_{11} = \frac{p}{k} + \frac{b}{kp}; \\ Z_1 &= \frac{b-a}{kp} = \frac{1}{pC_1}; \quad Z_2 = \frac{2p}{k} + \frac{a+b}{kp} = pL + \frac{1}{pC_2}; \\ C_1 &= \frac{k}{b-a}; \quad C_2 = \frac{k}{b+a}; \quad L = \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Характер изменения значений параметров элементов в зависимости от k показан на рис. P.10.4.

Таким образом, меняя k , можно получить значения элементов, удобные для физической реализации схемы.

● 10.8. Полином 1 неприемлем, так как нули P_1 не чередуются с нулями знаменателя N_Z .

Полином 2 неприемлем, так как степень P_1 больше степени знаменателя N_Z .

Полином 3 неприемлем, так как при условии (10.15) не выполняется неравенство (10.16).

Полином 4 приемлем.

Полином 5 неприемлем, так как при условии (10.17) не выполняется неравенство (10.18).

Полиномы 6 и 7 приемлемы.

● 10.9. Пример решения.

а) По первому способу

$$\begin{aligned} P_1 &= k'(p+8)(p+20)(p+40); \\ k' \cdot 8 \cdot 20 \cdot 40 &< 7 \cdot 10 \cdot 25; \\ k' &< \frac{1750}{6400}. \end{aligned}$$

Выбираем $k' = 0,25$.

По ф-ле (10.19)

$$\begin{aligned} P_2 &= (p+7)(p+10)(p+25) - 0,25(p+8)(p+20)(p+40) = \\ &= 0,75p^3 + 25p^2 + 175p + 150. \end{aligned}$$

Параметры Y_{21} и Y_{22} определяем по формулам, аналогичным (10.14):

$$Y_{21} = \frac{(p+3)(p+8)(p+22)}{0,75p^3 + 25p^2 + 175p + 150}; \quad Y_{22} = -\frac{0,25(p+8)(p+20)(p+40)}{0,75p^3 + 25p^2 + 175p + 150}$$

б) По второму способу

Принимаем $k=1$; $P_1 = (p+6)(p+8)(p+20)$:

$$P_2 = (p+7)(p+10)(p+25) - (p+6)(p+8)(p+20) = 8p^2 + 167p + 790;$$

$$Y_{21} = \frac{(p+3)(p+8)(p+20)}{8p^2 + 167p + 790}; \quad Y_{22} = -\frac{(p+6)(p+8)(p+20)}{8p^2 + 167p + 790}$$

● 10.12. Пример решения.

а) По первому способу

Примем

$$P_1 = k'(p + 1,5 \cdot 10^{10}).$$

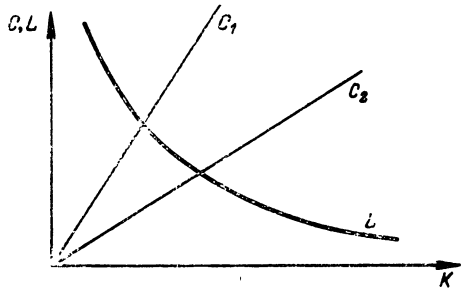


Рис. P.10.4

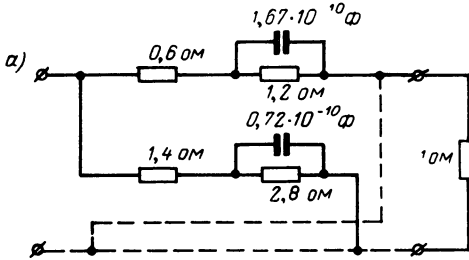
По неравенству (10.16)

$$k' \cdot 1,5 < 1,$$

выбираем $k'=0,5$. Тогда:

$$P_1 = 0,5p + 0,75 \cdot 10^{10}; \quad P_2 = 0,5p + 0,25 \cdot 10^{10}.$$

Теперь определим Z_{11} , Z_{21} , а затем Z_1 и Z_2 :



$$Z_{11} = \frac{p + 1,5 \cdot 10^{10}}{p + 0,5 \cdot 10^{10}};$$

$$Z_{21} = \frac{0,4p + 0,6 \cdot 10^{10}}{p + 0,5 \cdot 10^{10}};$$

$$Z_1 = \frac{0,6p + 0,9 \cdot 10^{10}}{p + 0,5 \cdot 10^{10}};$$

$$Z_2 = \frac{1,4p + 2,1 \cdot 10^{10}}{p + 0,5 \cdot 10^{10}}.$$

Схема, соответствующая найденным данным, изображена на рис. P.10.5а.

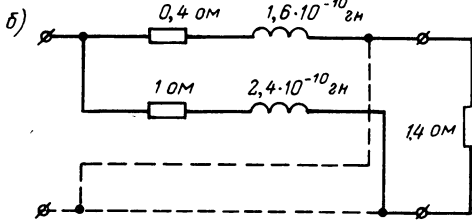


Рис. P.10.5

б) По второму способу

Примем

$$P_1 = p + 0,5 \cdot 10^{10}; \quad k = 1.$$

Найдем P_2 по ф-ле (10.19):

$$P_2 = 0,5 \cdot 10^{10}.$$

Определим Z_{11} , Z_{21} и Z_1 , Z_2 :

$$Z_{11} = \frac{p + 0,5 \cdot 10^{10}}{0,5 \cdot 10^{10}};$$

$$Z_{21} = \frac{0,2p + 0,3 \cdot 10^{10}}{0,5 \cdot 10^{10}};$$

$$Z_1 = \frac{0,8p + 0,2 \cdot 10^{10}}{0,5 \cdot 10^{10}} = 1,6 \cdot 10^{-10} p + 0,4;$$

$$Z_2 = \frac{1,2p + 0,8 \cdot 10^{10}}{0,5 \cdot 10^{10}} = 2,4 \cdot 10^{-10} p + 1,6.$$

Соответствующая схема дана на рис. P.10.5б.

Из сравнения рисунков следует, что схема, построенная по второму способу, оказалась более простой.

● 10.13. Для получения более простой схемы находим Z -параметры по второму способу при $k=1$.

Примем, что:

$$P_1 = p + c - x;$$

$$P_2 = p + c - p - c + x = x;$$

$$Z_{11} = \frac{p + c - x}{x}; \quad Z_{21} = \frac{ap + b}{x};$$

$$Z_1 = \frac{(1-a)p + c - b - x}{x} = \frac{(1-a)p}{x} + \frac{c - b - x}{x} = L_1 p + R_1;$$

$$Z_2 = \frac{(1+a)p + c + b - x}{x} = \frac{(1+a)p}{x} + \frac{c + b - x}{x} = L_2 p + R_2.$$

Теперь определим параметры элементов цепи, состоящей из последовательно соединенных R и L :

$$L_1 = \frac{1-a}{x}; \quad L_2 = \frac{1+a}{x}; \quad R_1 = \frac{c-b}{x} - 1; \quad R_2 = \frac{c+b}{x} - 1.$$

На рис. Р.10.6 показан характер изменения параметров элементов в зависимости от значений величины x . Как видно из рисунка, изменяя x , можно получить различные сочетания R и L . При больших x получаются отрицательные значения R , т. е. в этом случае приходится уменьшать постоянную усиления.

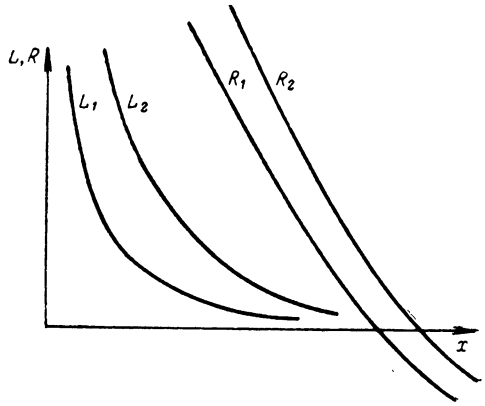


Рис. Р.10.6

● 10.14. $L_1(p)$; $L_2(p)$; $L_3(p)$ приемлемы:

$L_4(p)$ — неприемлем, так как в нем нет чередования нулей с нулями знаменателя N_U ;

$L_5(p)$ — неприемлем, так как степень $L_5(p)$, не равна степени знаменателя N_U .

● 10.15. Пример решения.

1. $L(p) = p + 10 \cdot 10^{10}$;

$$Z_{21} = \frac{0,5p + 3 \cdot 10^{10}}{p + 10 \cdot 10^{10}}; \quad Z_{11} = \frac{p + 5 \cdot 10^{10}}{p + 10 \cdot 10^{10}};$$

$$Z_1 = \frac{0,5p + 2 \cdot 10^{10}}{p + 10 \cdot 10^{10}}; \quad Z_2 = \frac{1,5p + 8 \cdot 10^{10}}{p + 10 \cdot 10^{10}}.$$

Соответствующая схема приведена на рис. Р.10.7а.

2. $L(p) = p + 2 \cdot 10^{10}$;

$$Z_{21} = \frac{0,5p + 3 \cdot 10^{10}}{p + 2 \cdot 10^{10}}; \quad Z_{11} = \frac{p + 5 \cdot 10^{10}}{p + 2 \cdot 10^{10}};$$

$$Z_1 = \frac{0,5p + 2 \cdot 10^{10}}{p + 2 \cdot 10^{10}}; \quad Z_2 = \frac{1,5p + 8 \cdot 10^{10}}{p + 2 \cdot 10^{10}}.$$

Соответствующая схема приведена на рис. Р.10.7б.

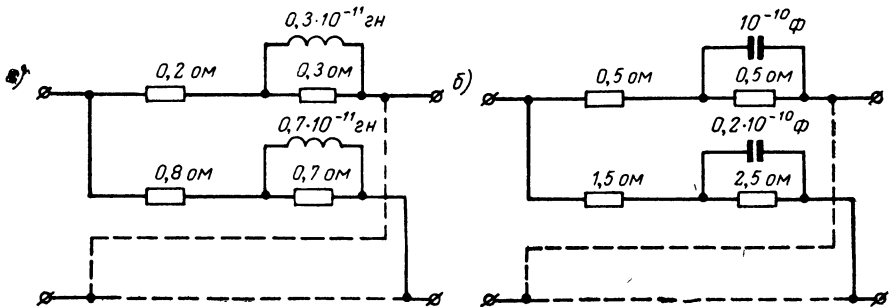


Рис. Р.10.7

Таким образом, цепи RL и RC , изображенные на рисунках, имеют одинаковые передаточные функции N_U .

● 10.16. В соответствии с результатом задачи 10.15 необходимо, чтобы корни $L(p)$ были меньше соответствующих корней знаменателя N_U .

Реализованная схема имеет вид рис. О.10.2, не считая, конечно, активной нагрузки.

● 10.17. Согласно табл. 2.2

$$Z_{\text{вх}} = \frac{A_{11}R + A_{12}}{A_{21}R + A_{22}}$$

Подставив значения A -параметров для симметричной мостовой схемы (табл. 2.3) и учитывая, что $Z_1 Z_2 = R^2$, получим

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\frac{(Z_1 + Z_2)R}{Z_2 - Z_1} + \frac{2R^2}{Z_2 - Z_1}}{\frac{2R}{Z_2 - Z_1} + \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1}} = \frac{R(Z_1 + Z_2 + 2R)}{Z_1 + Z_2 + 2R} = R.$$

● 10.18. Согласно табл. 2.2

$$N_Z = \frac{1}{A_{21} + \frac{A_{22}}{R}}$$

Подставив значения A -параметров для симметричной мостовой схемы (табл. 2.3) и учитывая, что $R=1$, получим

$$N_Z = \frac{1}{\frac{2}{Z_2 - Z_1} + \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1}} = \frac{Z_2 - Z_1}{2 + Z_1 + Z_2}$$

Так как $Z_2 = \frac{1}{Z_1}$ [по ф-ле (10.23)], то

$$N_Z = \frac{\frac{1}{Z_1} - Z_1}{2 + Z_1 + \frac{1}{Z_1}} = \frac{1 - Z_1^2}{2Z_1 + Z_1^2 + 1} = \frac{1 - Z_1}{1 + Z_1}$$

● 10.19. По ф-ле (10.22) находим

$$Z_1 = \frac{1 - \frac{10^{-2} p^2 - 999}{10^{-9} p^2 + 2 \cdot 10^{-3} p + 1001}}{1 + \frac{10^{-2} p^2 - 999}{10^{-9} p^2 + 2 \cdot 10^{-9} p + 1001}} = \frac{10^{-3} p + 10^3}{10^{-9} p^2 + 10^{-3} p + 1}$$

По ф-ле (10.23) определим Z_2 :

$$Z_2 = \frac{1}{Z_1} = \frac{10^{-9} p^2 + 10^{-3} p + 1}{10^{-3} p + 10^3}$$

Для реализации Z_1 можно воспользоваться табл. 9.1; Z_2 реализуем методом разложения на непрерывные дроби:

$$Z_2 = 10^{-9} p^2 + 10^{-3} p + 1 \Big| \frac{10^{-3} p + 10^3}{-10^{-9} p^2 + 10^{-3} p} \Big| \frac{1}{p 10^{-6} + \frac{1}{p 10^{-3} + 10^3}}$$

Учитывая, что нагрузкой является активное сопротивление $100\ \text{ом}$, умножим все сопротивления и индуктивности на 100, а емкости — разделим на 100. Соответствующая схема представлена на рис. P.10.8.

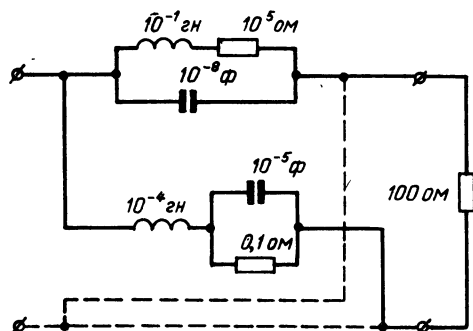


Рис. P.10.8

11.

● 11.1. В данном случае $n=2$ и $m=2$. Выражая из первого уравнения x_1 , а из второго x_2 , получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3} - \frac{8}{3} x_2 \\ x_2 &= \frac{3}{11} - \frac{7}{11} x_1 \end{aligned} \right\}$$

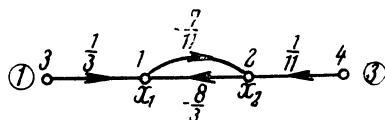


Рис. P.11.1

Граф, соответствующий этой системе, изображен на рис. P.11.1.

Матрица $[A_n]$ имеет вид

$$[A_n] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{7}{11} & 0 & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Обратная задача решается по ф-ле (11.2).

● 11.2. Определяем число узлов графа N : $N=n+m=4+1=5$.

Наносим узлы на поле графа (рис. P.11.2, 0) и нумеруем их. Далее последовательно выражаем переменные из уравнений системы, причем возможно много вариантов, которые приведут к соответствующему числу равносильных графов. Выберем один из возможных вариантов¹⁾.

¹⁾ Ниже приведены задачи, в которых рассматриваются равносильные графы.

Из первого уравнения (рис. P.11.2, I): $x_1 = a$.

Из второго уравнения: $x_2 = bx_1 + fx_3 + ex_4$. Часть графа, соответствующая последнему равенству, показана на рис. P.11.2, II.

Аналогично находим из третьего уравнения: $x_4 = gx_1 + dx_3$ (рис. P.11.2, III) и из четвертого уравнения: $x_3 = cx_2$ (рис. P.11.2, IV).

Объединяя все части графа, получаем граф (рис. P.11.2, Σ), соответствующий заданной системе уравнений. Как следует из рисунка, узел a является источником, а остальные узлы — смешанными; стока нет.

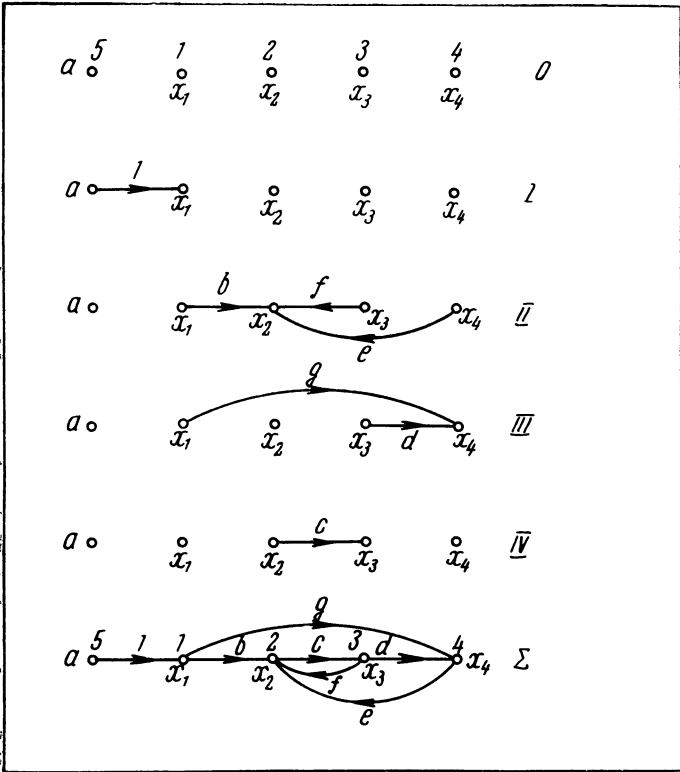


Рис. P.11.2

Матрица $[A_H]$ записывается следующим образом:

$$[A_H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & f & e & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

По найденному графу легко решить и обратную задачу.

● 11.3. Ввиду того, что по условию задачи требуется в качестве источника выбрать x_0 , выражаем из уравнения системы x_1, x_2 и x_3 :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{a_0}{a_1} x_0 - \frac{a_2}{a_1} x_2 - \frac{a_3}{a_1} x_3 \\ x_2 &= -\frac{b_0}{b_2} x_0 - \frac{b_1}{b_2} x_1 - \frac{b_3}{b_2} x_3 \\ x_3 &= -\frac{c_0}{c_3} x_0 - \frac{c_1}{c_3} x_1 - \frac{c_2}{c_3} x_2 \end{aligned} \right\}.$$

Выписываем матрицу $[A_H]$:

$$[A_H] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_2}{a_1} & -\frac{a_3}{a_1} & -\frac{a_0}{a_1} \\ -\frac{b_1}{b_2} & 0 & -\frac{b_3}{b_2} & -\frac{b_0}{b_2} \\ -\frac{c_1}{c_3} & -\frac{c_2}{c_3} & 0 & -\frac{c_0}{c_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Граф, соответствующий этой матрице, изображен на рис. Р.11.3.

● 11.4. Граф составляется непосредственно по системе уравнений (рис. Р.11.4). Наглядной формой следует признать ту, в которой узлы-источники расположены слева, а узлы-стоки — справа. Исходя из этого, граф рис. Р.11.4в предпочтительнее графа рис. Р. 11.4б.

Матрица $[A_H]$ имеет следующий вид:

$$[A_H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

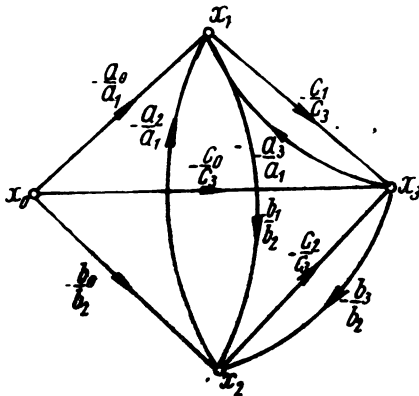


Рис. Р.11.3

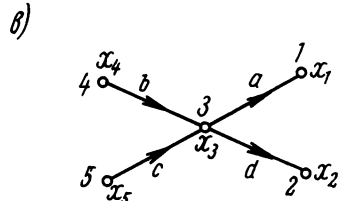
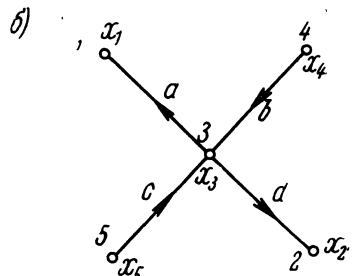
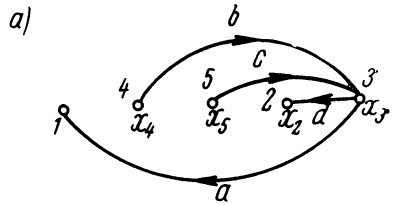


Рис. Р.11.4

составим матрицу [B]

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}.$$

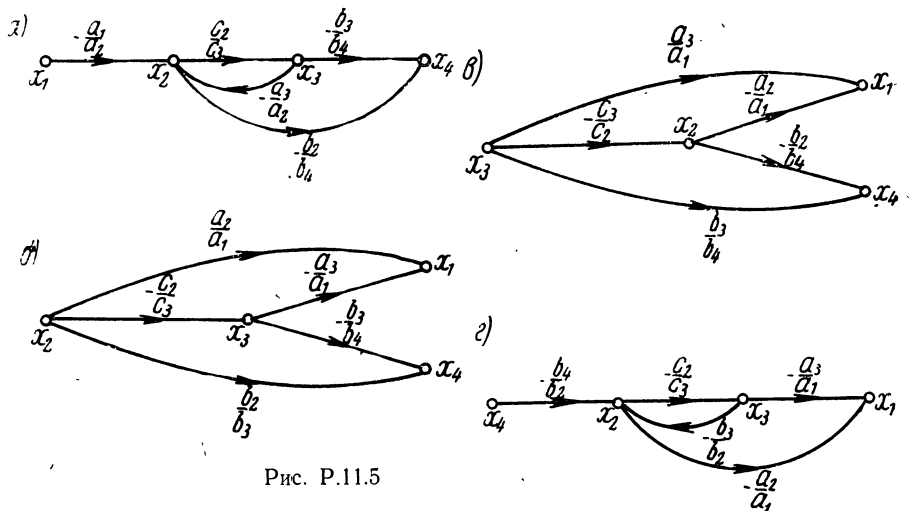


Рис. P.11.5

Решим каждое уравнение относительно x_i

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{b_{12}}{b_{11}} x_2 - \frac{b_{13}}{b_{11}} x_3 \\ x_2 &= -\frac{b_{21}}{b_{22}} x_1 - \frac{b_{23}}{b_{22}} x_3 \\ x_3 &= -\frac{b_{31}}{b_{33}} x_1 - \frac{b_{32}}{b_{33}} x_2 \end{aligned} \right\}.$$

Теперь запишем матрицу $[A_n]$:

$$[A_n] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & -\frac{b_{13}}{b_{11}} \\ -\frac{b_{21}}{b_{22}} & 0 & -\frac{b_{23}}{b_{22}} \\ -\frac{b_{31}}{b_{33}} & -\frac{b_{32}}{b_{33}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица $[A_n]$, соответствующая однородной системе, обладает следующими свойствами:

1. Все элементы главной диагонали равны нулю.
2. Знаменатели всех элементов каждой строки одинаковы и равны соответственно коэффициенту при неизвестной, относительно которой решалось уравнение.

3. Числители элементов (кроме диагональных) матрицы равны элементам матрицы $[A_n]$ с противоположными знаками.

Используя эти свойства, найдем выражение для $[A_n]$ через $[B]$. На основании свойств 2 и 3 следует все элементы каждой строки матрицы $[B]$ разделить на соответствующий элемент главной диагонали и поменять при этом знак. Это эквивалентно следующему умножению матриц:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{b_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & -\frac{b_{13}}{b_{11}} \\ -\frac{b_{21}}{b_{22}} & -1 & -\frac{b_{23}}{b_{22}} \\ -\frac{b_{31}}{b_{33}} & -\frac{b_{32}}{b_{33}} & -1 \end{bmatrix}.$$

Теперь для получения $[A_n]$ необходимо к результату прибавить единичную матрицу (по свойству 1):

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & -\frac{b_{13}}{b_{11}} \\ -\frac{b_{21}}{b_{22}} & -1 & -\frac{b_{23}}{b_{22}} \\ -\frac{b_{31}}{b_{33}} & -\frac{b_{32}}{b_{33}} & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & -\frac{b_{13}}{b_{11}} \\ -\frac{b_{21}}{b_{22}} & 0 & -\frac{b_{23}}{b_{22}} \\ -\frac{b_{31}}{b_{33}} & -\frac{b_{32}}{b_{33}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Объединяя указанные операции и записывая результат в свернутом виде, получаем

$$[A_n] = [D][B] + [1],$$

где $[D]$ — диагональная матрица, составленная из обратных и противоположных по знаку элементов диагонали матрицы.

Очевидно, что эта формула справедлива для систем с любым числом уравнений.

● 11.7. Матрицу $[A_n]$ можно найти, воспользовавшись свойствами, перечисленными в предыдущей задаче:

$$[A_n] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & -\frac{b_{13}}{b_{11}} & -\frac{b_{14}}{b_{11}} \\ -\frac{b_{21}}{b_{22}} & 0 & -\frac{b_{23}}{b_{22}} & -\frac{b_{24}}{b_{22}} \\ -\frac{b_{31}}{b_{33}} & -\frac{b_{32}}{b_{33}} & 0 & -\frac{b_{34}}{b_{33}} \\ -\frac{b_{41}}{b_{44}} & -\frac{b_{42}}{b_{44}} & -\frac{b_{43}}{b_{44}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что пользование указанными тремя свойствами приводит к ответу быстрее, чем пользование ф-лой (11.6).

● 11.9. Для решения задачи воспользуемся ф-лой (11.10). Выпишем сначала матрицу $[B]$:

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & -1 & f & e \\ g & 0 & d & -1 \\ 0 & c & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как $m=1$, а $n=4$

$$[1]_m = [1]; [1]_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

По ф-ле (11.10)

$$[A] = \left[([B] + [1]_n) \begin{pmatrix} -[1]_m \\ [0]_{(n-m), m} \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ b & 0 & f & e & 0 \\ g & 0 & d+1 & -1 & 0 \\ 0 & c & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы сделать матрицу квадратной, добавим одну нулевую строку (нулевые строки соответствующие узлам-источникам, нужно добавлять снизу). Тогда

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ b & 0 & f & e & 0 \\ g & 0 & d+1 & -1 & 0 \\ 0 & c & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Соединяя узлы графа соответственно матрице $[A]$, получаем граф, изображенный на рис. P.11.6. Составляя по графу систему уравнений, получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -a + 2x_1 \\ x_2 &= bx_1 + fx_3 + ex_4 \\ x_3 &= gx_1 + (d+1)x_3 - x_4 \\ x_4 &= cx_3 - x_3 + x_4 \end{aligned} \right\}.$$

После приведения подобных членов, приходим к исходной системе уравнений.

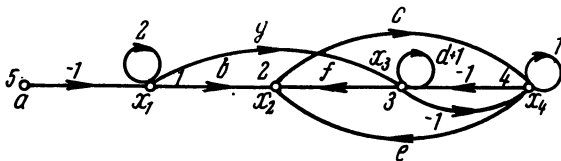


Рис. P.11.6

● 11.11. Прежде всего заданную систему нужно переписать так, чтобы уравнения, содержащие не равные нулю правые части, были верхними:

$$\left. \begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= f_1 \\ c_1x_1 + c_2x_2 &= f_3 \\ b_2x_2 + b_3x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Принимая во внимание, что $n=3$, а $m=2$, запишем матрицу $[A]$ по ф-ле (11.10):

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 + 1 & a_2 & a_3 & -1 & 0 \\ c_1 & c_2 + 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & b_2 & b_3 + 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Граф изображен на рис. P.11.7

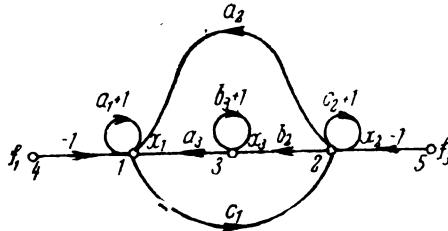


Рис. P.11.7

Графу соответствует следующая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -f_1 + (a_1 + 1)x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ x_2 &= -f_3 + c_1x_1 + (c_2 + 1)x_2 \\ x_3 &= b_2x_2 + (b_3 + 1)x_3 \end{aligned} \right\}.$$

● 11.13. В данной системе три уравнения и три переменных, т. е. $N=3$ и $n=3$, следовательно, система является однородной.

Перепишем систему так, чтобы все правые части равнялись нулю:

$$\left. \begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_3 &= 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 &= 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 - c_3x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

По ф-ле (11.11) определяем матрицу $[A]$:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & -a_3 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & -c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + 1 & a_2 & -a_3 \\ b_1 & b_2 + 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & -c_3 + 1 \end{bmatrix}.$$

Граф, соответствующий этой матрице, изображен на рис. P.11.8.

● 11.14. В качестве независимого узла (источника) по условию должна быть выбрана переменная x_1 . Система, соответствующая нормализованному графу, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= bx_1 + cx_3 \\ x_3 &= ax_1 + dx_2 + gx_4 \\ x_4 &= ex_2 + fx_3 \end{aligned} \right\}$$

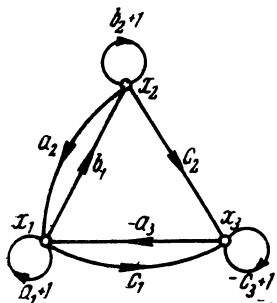


Рис. P.11.8

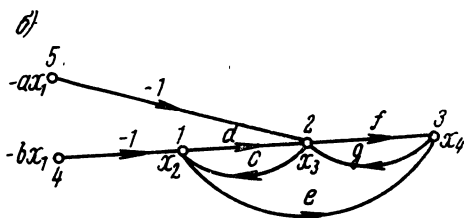
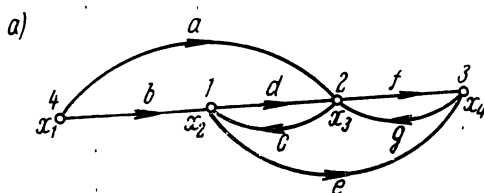


Рис. P.11.9

Построенный граф изображен на рис. P.11.9а. Матрица $[A_H]$ имеет вид

$$[A_H] = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 & b \\ d & 0 & g & a \\ e & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Для построения ненормализованного графа перепишем исходную систему так, чтобы переменная x_1 была в правой части уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -x_2 + cx_3 &= -bx_1 \\ dx_2 - x_3 + gx_4 &= -ax_1 \\ ex_2 + fx_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Составим матрицу $[B]$ коэффициентов:

$$[B] = \begin{bmatrix} -1 & c & 0 \\ d & -1 & g \\ e & f & -1 \end{bmatrix}$$

В данном случае $m=2$. По ф-ле (11.10)

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 & -1 & 0 \\ d & 0 & g & 0 & -1 \\ e & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Граф, соответствующий матрице $[A]$, изображен на рис. P.11.9б. Очевидно, что узлы 4 и 5 можно объединить, соответственно изменив от них передачи.

В результате получим граф, изображенный на рис. Р.11.9а. Заметим, что в данном случае нормализованный и ненормализованный графы совпадают. Это объясняется тем, что исходная система уравнений нормализована (все элементы главной диагонали матрицы $[B]$ равны -1).

● 11.16. Для составления нормализованного графа выразим переменные из уравнений системы:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{a_2}{a_1} x_2 - \frac{a_3}{a_1} x_3 \\ x_2 &= -\frac{b_1}{b_2} x_1 - \frac{b_3}{b_2} x_3 \\ x_3 &= -\frac{c_1}{c_3} x_1 - \frac{c_2}{c_3} x_2 \end{aligned} \right\}.$$

Матрица $[A_n]$ в этом случае имеет следующий вид:

$$[A_n] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_2}{a_1} & -\frac{a_3}{a_1} \\ -\frac{b_1}{b_2} & 0 & -\frac{b_3}{b_2} \\ -\frac{c_1}{c_3} & -\frac{c_2}{c_3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Граф изображен на рис. Р.11.10а.

Перейдем к построению ненормализованного графа по ф-ле (11.11):

$$[A] = [B] + [1] = \begin{bmatrix} a_1 + 1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 + 1 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 + 1 \end{bmatrix}.$$

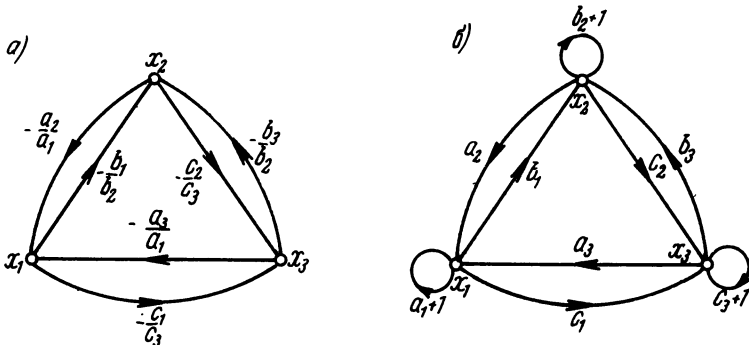


Рис. Р.11.10

Граф, соответствующий этой матрице, изображен на рис. Р.11.10б. Составим системы уравнений по графам.

Для рис. P.11.10а:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{a_2}{a_1} x_2 - \frac{a_3}{a_1} x_3 \\ x_2 &= -\frac{b_1}{b_2} x_1 - \frac{b_3}{b_2} x_3 \\ x_3 &= -\frac{c_1}{c_3} x_1 - \frac{c_2}{c_3} x_2 \end{aligned} \right\}$$

Для рис. P.11.10б:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (a_1 + 1)x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ x_2 &= b_1x_1 + (b_2 + 1)x_2 + b_3x_3 \\ x_3 &= c_1x_1 + c_2x_2 + (c_3 + 1)x_3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Очевидно, что системы (1) и (2) равносильны, а следовательно, равносильны и графы.

● 11.17. Сначала найдем матрицу $[B]$ коэффициентов:

$$[B] = [A] - [1] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

По известной матрице $[B]$, воспользовавшись ф-лой (11.6), найдем $[A_n]$:

$$[A_n] = [D][B] + [1] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ненормализованный и нормализованный графы изображены соответственно на рис. P.11.11а и б.

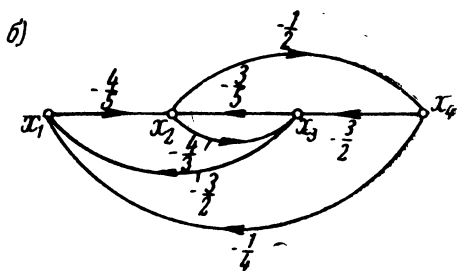
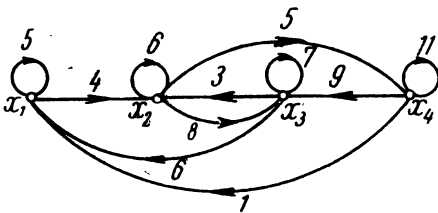


Рис. P.11.11

Для того чтобы убедиться в равносильности графов, необходимо составить по ним системы уравнений:

Для ненормализованного графа Для нормализованного графа

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 5x_2 + 6x_3 + x_4 \\ x_2 &= 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \\ x_3 &= 8x_2 + 7x_3 + 9x_4 \\ x_4 &= 5x_2 + 11x_4 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 &= -\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_3 \\ x_3 &= -\frac{4}{3}x_2 - \frac{3}{2}x_4 \\ x_4 &= -\frac{1}{2}x_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Легко видеть, что системы (1) и (2) равносильны.

● 11.20. Умножение диагональной матрицы $[C]$ на $[B]$ равносильно умножению элементов каждой строки матрицы на соответствующий элемент диагонали матрицы $[G]$. Таким образом, система уравнений, соответствующая матрице $[G][B]$, равносильна системе уравнений, соответствующих матрице $[B]$ (при одних и тех же неизвестных). Отсюда в сочетании с ф-лой (11.11) сразу следует доказываемое равенство.

Легко видеть, что, полагая $[C]=[D]$, где $[D]$ — диагональная матрица, определенная на стр. 158, приходим к ф-ле (11.6) для нормализованного графа.

● 11.21. По заданному графу находим матрицу $[A]$:

$$[A] = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \\ 0 & 6 & 11 \end{bmatrix}.$$

По ф-ле (11.11) находим

$$[B] = [A] - [1] = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Передачи петель при вершинах равны соответствующим элементам главной диагонали матрицы $[A]$; чтобы они равнялись трем, элементы диагонали матрицы $[B]$ должны равняться двум.

Используя результат предыдущей задачи, составляем необходимую в этом случае матрицу $[C]$:

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

По ф-ле (11.11) находим

$$\begin{aligned}
 [A] = [C][B] + [1] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{4} & 3 & 1 \\ 0 & \frac{6}{5} & 3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Граф, соответствующий этой матрице, изображен на рис. P.11.12. Системы уравнений, составленные по графам, имеют следующий вид:

Для рис. 11.6

$$\left. \begin{aligned}
 x_1 &= 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
 x_2 &= 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 \\
 x_3 &= 6x_2 + 11x_3
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для рис. P.11.12

$$\left. \begin{aligned}
 x_1 &= 3x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 \\
 x_2 &= \frac{5}{4}x_1 + 3x_2 + x_3 \\
 x_3 &= \frac{6}{5}x_2 + 3x_3
 \end{aligned} \right\}$$

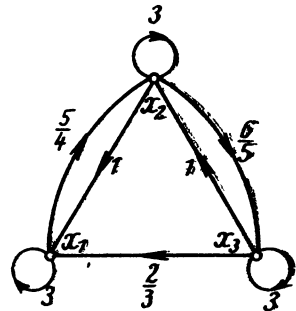


Рис. P.11.12

Нетрудно убедиться, что системы (1) и (2) равносильны.

12.

● 12.1. Преобразованные графы показаны на рис. P.12.1.

Преобразование можно выполнить непосредственно по системам уравнений так, как показано на рис. P.12.1, или на основе правил исключения узлов.

● 12.2. Последовательность преобразования графа иллюстрируется рис. P.12.2.

● 12.4. Составляем исходное равенство

$$x_2 = x_1 + ax_1 + a^2x_1 + \dots,$$

суммируя которое по правилам прогрессии ($|a| < 1$), получаем:

$$x_2 = \frac{1}{1-a} x_1.$$

● 12.5. Используя элементарные правила упрощения графов, преобразуем каждый исходный граф в конечный с передачей $\frac{ab}{1-c}$. Составим системы уравнений:

Для графа
рис. 12.15а:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \frac{a}{1-c} x_1 \\ x_3 &= bx_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для графа
рис. 12.15б:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= ax_1 \\ x_2 &= \frac{b}{1-c} x_3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

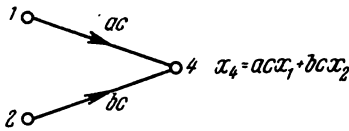
Для графа
рис. 12.15в:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= ax_1 + cx_3 \\ x_2 &= bx_3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

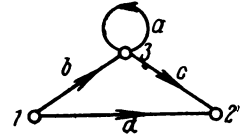
Легко видеть, что системы (1) и (3) равносильны, чего нельзя сказать о системе (2). Этот пример подтверждает правило об учете петли во входящей ветви.

а)

$$\begin{aligned} x_3 &= ax_1 + bx_3 \\ x_4 &= cx_3 \end{aligned}$$

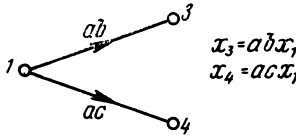


а)

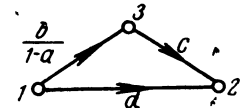


б)

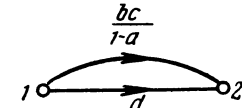
$$\begin{aligned} x_2 &= ax_1 \\ x_3 &= bx_2 \\ x_4 &= cx_3 \end{aligned}$$



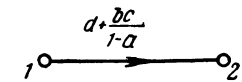
б)



в)



г)



в

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_5 \\ x_2 &= dx_5 \\ x_3 &= bx_2 + cx_3 \end{aligned}$$

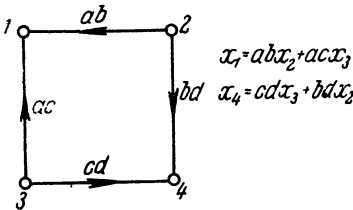


Рис. Р.12.1

$$\begin{aligned} x_1 &= abx_2 + acx_3 \\ x_4 &= cdx_3 + bdx_2 \end{aligned}$$

Рис. Р.12.2.

12.7. Применяя правила устранения петли, получаем для передач нормализованного графа:

$$\begin{aligned} a_{13} &= \frac{6}{1-5} = -\frac{3}{2}; & a_{23} &= \frac{3}{1-6} = -\frac{3}{5}; \\ a_{14} &= \frac{1}{1-5} = -\frac{1}{4}; & a_{32} &= \frac{8}{1-7} = -\frac{4}{3}; \\ a_{21} &= \frac{4}{1-6} = -\frac{4}{5}; & a_{34} &= \frac{9}{1-7} = -\frac{3}{2}; \\ a_{42} &= \frac{5}{1-11} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученные передачи с передачами рис. P.11.11б, убеждаемся, что результат нормализации по правилу устранения петли совпадает с результатом нормализации при помощи операций над матрицей [A].

● 12.8. Устранение петель графа эквивалентно построению нормализованного графа по ненормализованному. Таким образом, решение задачи сводится к нахождению матрицы [A_н] по заданной матрице [A].

Для графов, не имеющих источников, можно воспользоваться ф-лами (11.6) и (11.11):

$$[A_n] = [D][B] + [1]; \quad [A] = [B] + [1].$$

Выразив из второго уравнения матрицу [B] и подставив ее в первое, получим

$$[A_n] = [D]([A] - [1]) + [1].$$

Здесь элементы матрицы [D] определяются элементами матрицы, получающейся в результате вычитания в круглой скобке, так как эта разность является матрицей [B].

● 12.9. Исходный граф изображен на рис. P.12.3а. На рис. P.12.3б изображен граф, у которого расщеплены все смешанные узлы, кроме узла 2. С этого узла

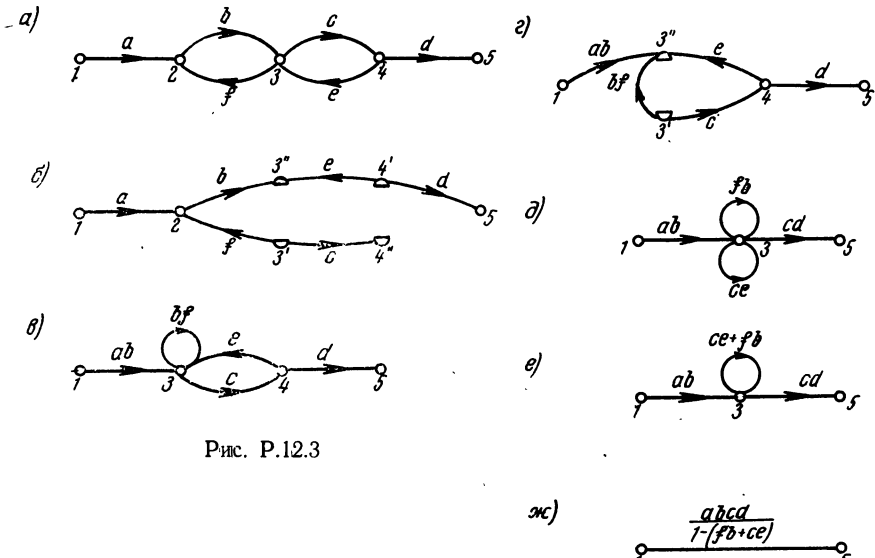


Рис. P.12.3

и начнем исключение. Из рисунка видно, что передача от узла-источника 1 до узла-стока 3'' равна ab , а от узла-источника 3' до узла-стока 3'' — bf . На остальные передачи узел 2 не влияет, и они остаются без изменения. После объединения расщепленных узлов с учетом новых передач получаем граф, показанный на рис. P.12.3в. Здесь узел 2 отсутствует.

Теперь устроим узел 4. На рис. P.12.3г изображен граф с расщепленными смешанными узлами, кроме узла 4. Как видно из рисунка, передача от узла 3' к узлу 5 равна cd ; от 3' к 3'' — bf и ce ; остальные передачи остаются прежними. Граф с устраненным узлом 4 изображен на рис. P.12.3д. Дальнейшие элементарные преобразования показаны на рис. P.12.3е и ж.

● 12.10. Примем последовательность устранения узлов такой же, как и в предыдущей задаче. Устроим узел 2; при этом должны сохраниться значения всех составляющих в оставшихся узлах графа. Через узел 2 «проходят» следующие

составляющие: от узла 1 к узлу 3 — abx_1 ; от узла 3 к узлу 3 — fbx_3 . Остальные составляющие от узла 2 прямо не зависят. Учитывая эти составляющие путем построения ветвей с соответствующими передачами и исключая узел 2, получаем граф рис. Р.12.3б.

Теперь устраним узел 4. Через этот узел проходят следующие составляющие: от узла 3 к узлу 4 — cdx_3 ; от узла 3 к узлу 3 — ecx_3 . Граф с устранимым узлом 4, построенный с учетом этих составляющих, изображен на рис. Р.12.3г.

Дальнейшее упрощение проводится так же, как и в предыдущей задаче.

● 12.11. В данном случае устраним одновременно два узла (узлы 3 и 4 на рис. Р.12.4а). Граф с расщепленными узлами показан на рис. Р.12.4б.

Граф рис. Р.12.4в получается в результате учета передач от источников к стокам в расщепленном графе и последующего объединения узлов. Этот же

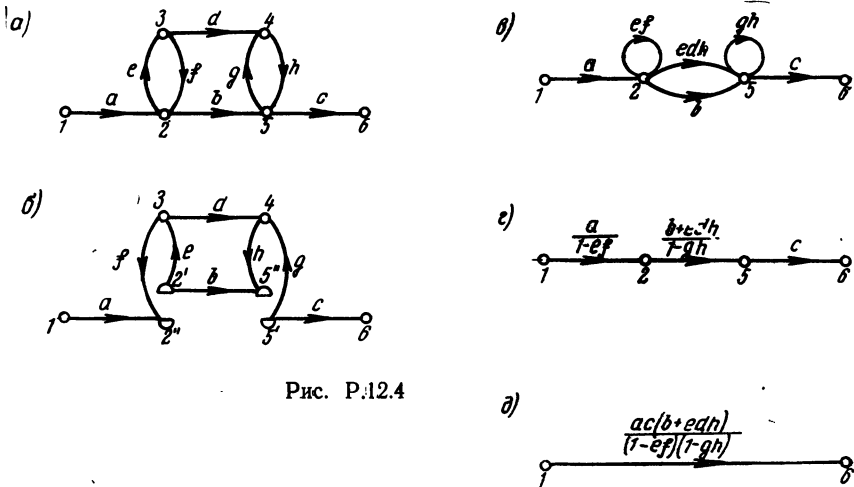


Рис. Р.12.4

граф можно непосредственно получить из исходного (рис. 12.18), заметив, что через устранимые узлы 3 и 4 «проходят» следующие составляющие: от узла 2 к узлу 2 — efx_2 ; от узла 2 к узлу 5 — $edhx_2$; от узла 5 к узлу 5 — ghx_5 .

Упрощения, показанные на рис. Р.12.4г и д, в пояснениях не нуждаются.

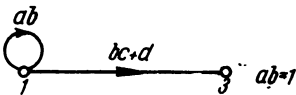


Рис. Р.12.5

● 12.13. Преобразование графа рис. 12.20 показано на рис. Р.12.5. Преобразованный граф содержит петлю, которую нельзя устранить по правилу исключения петли, так как в узел 1 не входит ни одна ветвь (не считая петли)¹⁾. Это значит, что должно выполняться соотношение

$$ab = 1.$$

Преобразование графа рис. 12.21 показано на рис. Р.12.6. Конечный граф здесь представляет собой замкнутый контур. В этом случае необходимо выполнение следующего соотношения между передачами ветвей:

$$\frac{bc+d}{1-ce} \frac{ea}{1-ab} = 1.$$

¹⁾ Неустраняемые петли с передачей, равной единице, рассматривались в разделе «Объединение разнонаправленных ветвей при помощи петли».

● 12.14. Граф, изображенный на рис. 12.22, соответствует системе уравнений с нулевыми решениями, так как узел-источник 3 имеет петлю с передачей 4 (см. предыдущую задачу).

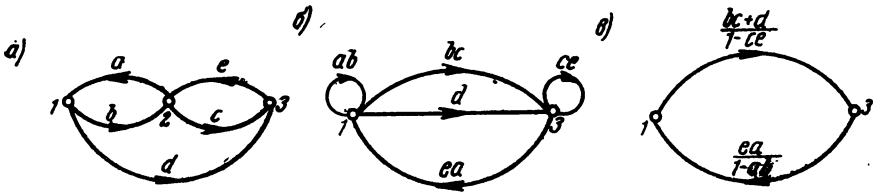


Рис. P.12.6

Граф, изображенный на рис. 12.23, имеет два узла-источника с петлями, передачи которых равны $2h$ и $4h$. Для того чтобы система уравнений имела ненулевые решения, необходимо выполнение следующих условий:

$$2h = 1 \text{ и } 4h = 1.$$

Эти условия несовместимы, и, следовательно, система уравнений, представляемая графом, всегда имеет нулевые решения.

Граф, изображенный на рис. 12.24, приводится к конечному в виде замкнутого контура (рис. P.12.7). Условие равенства единице передачи неустраняемой петли выражается как

$$\frac{a}{1-d} \frac{b}{1-c} = 1.$$

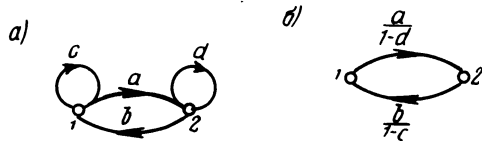


Рис. P.12.7

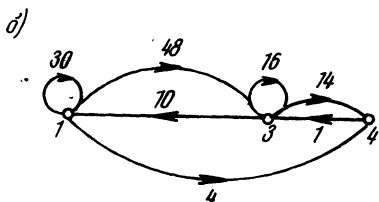
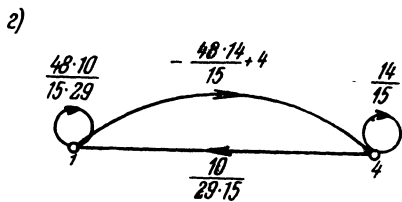
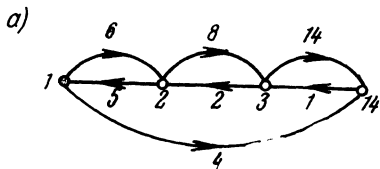
Только при выполнении этого условия система, соответствующая данному графу, имеет ненулевые решения.

Граф, изображенный на рис. 12.25, можно упростить и привести к конечному. Операции упрощения показаны на рис. P.12.8. Переход от исходного графа к графу рис. P.12.8a сделан для исключения узла 2, от рис. P.12.8б к P.12.8в — для исключения петель в узлах 1 и 3, от рис. P.12.8в к P.12.8г — для исключения узла 3 и, наконец, от рис. P.12.8г к P.12.8д — для исключения петель в узлах 1 и 4. Конечный граф представляет собой замкнутый контур с передачей, не равной единице, т. е. система, соответствующая графу, имеет только нулевые решения.

● 12.17. На рис. P.12.9 показаны преобразования, соответствующие инвертированию ветви, начинающейся у источника. Рядом выписаны уравнения, доказывающие равносильность преобразованных графов.

● 12.18. Преобразования, соответствующие инвертированию ветви b , показаны на рис. P.12.10б, рядом выписаны уравнения, свидетельствующие о равносильности графов. Здесь необходимо инвертировать вместе с ветвью b и ветвь a (или c), так как ветвь начинается не в источнике. Если попытаться инвертировать только одну ветвь b , граф превратится в изображенный на рис. P.12.10в. Сопоставляя уравнения, легко увидеть, что графы неравносильны.

Кроме того, в результате такой инверсии получился лишний источник.



d)

$$\frac{-48 \cdot 14 + 60}{15} - \frac{-48 \cdot 14 + 60}{29} = \frac{672}{29}$$

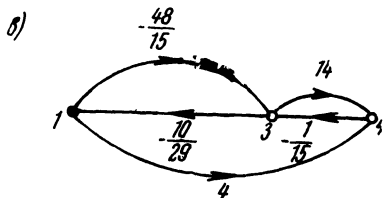
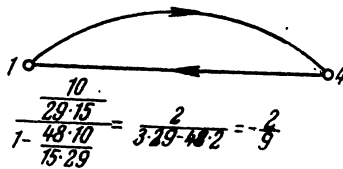


Рис. P.12.8

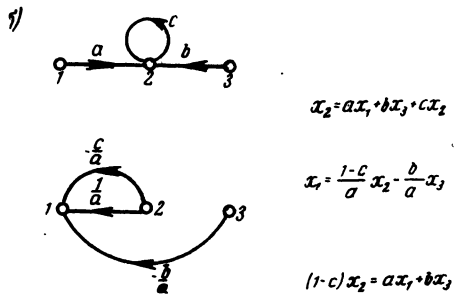
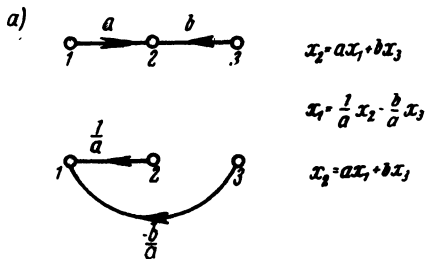
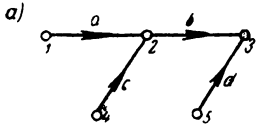


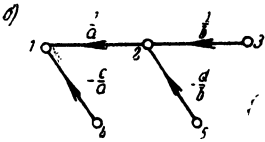
Рис. P.12.9

● 12.19. Графы с инвертированными ветвями с изображены на рис. Р.12.11. В каждом случае необходимо инвертировать все ветви пути до источника.

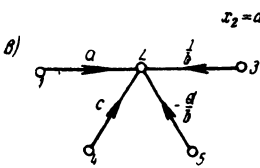
● 12.20. Граф, изображенный на рис. 12.33, не имеет источников, поэтому для инвертирования ветви b необходимо инвертировать замкнутый контур, в который она входит. Граф с инвертированным контуром изображен на рис. Р.12.12.



$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{b} x_3 - \frac{1}{b} x_5 \\ x_1 &= \frac{1}{a} x_2 - \frac{c}{a} x_4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x_2 &= ax_1 + cx_4 \\ x_3 &= bx_2 + dx_5 \end{aligned}$$



$$x_2 = ax_1 + cx_4 + \frac{1}{b} x_3 - \frac{d}{b} x_5$$

Рис. Р.12.10

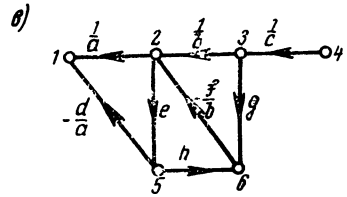
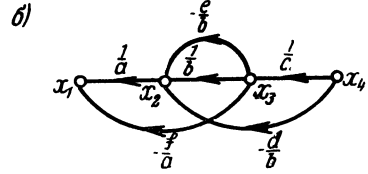
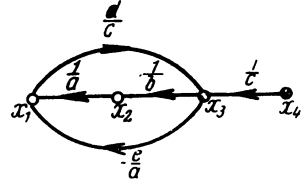


Рис. Р.12.11

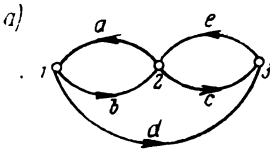
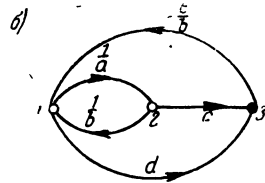


Рис. Р.12.12



13.

● 13.1. Для составления графа перепишем систему уравнений в виде, разрешенном относительно x_1 и x_2 :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3} - \frac{8}{3} x_2 \\ x_2 &= \frac{3}{11} - \frac{7}{11} x_1 \end{aligned} \right\}$$

Граф, построенный по этой системе, показан на рис. Р.13.1а.

Для решения графа относительно x_1 и x_2 исключим последовательно узлы x_2 и x_1 , т. е. преобразуем граф так, чтобы в нем остался один узел, соответс-

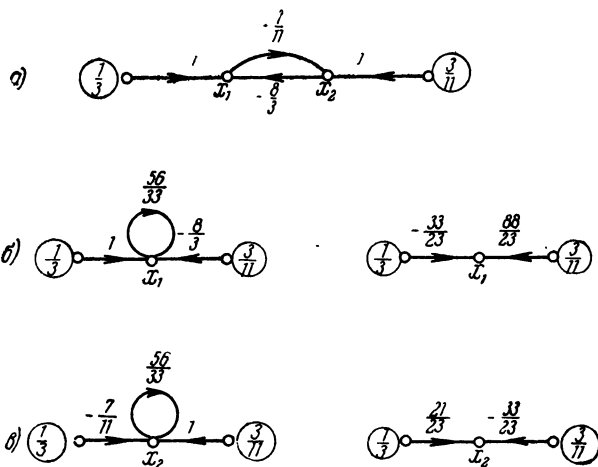


Рис. Р.13.1

вующий определяемой переменной. Граф с узлом x_1 представлен на рис. Р.13.1б, а с узлом x_2 — на рис. Р.13.1в. По каждому из этих графов находим:

$$x_1 = -\frac{33}{23} \frac{1}{3} + \frac{88}{23} \frac{3}{11} = \frac{13}{23};$$

$$x_2 = \frac{21}{23} \frac{1}{3} - \frac{33}{23} \frac{3}{11} = -\frac{2}{23}.$$

● 13.2. На рис. 13.2 показано приведение заданного графа к конечному. По конечному графу (рис. Р.13.2) можно найти x_4 .

$$x_4 = \frac{ae + adc}{1 - bd} x_1.$$

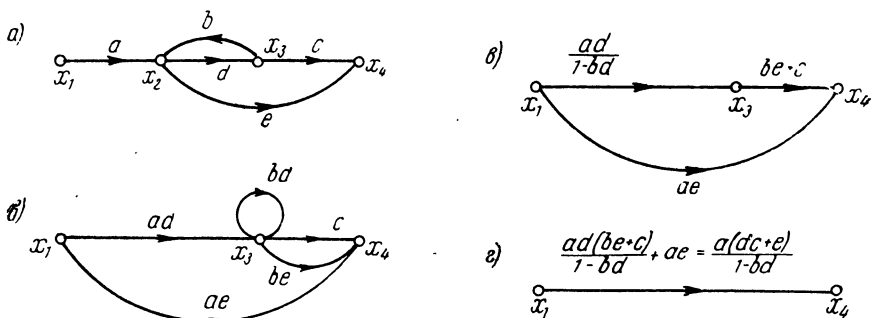


Рис. Р.13.2

● 13.3. Пути, начинающиеся с узла 1:

$$P_{12} = b; P_{123} = bd; P_{1234} = bdf; P_{124} = be;$$

$$P_{1243} = beg; P_{13} = a; P_{132} = ac; P_{1324} = ace; P_{134} = af.$$

Пути, начинающиеся с узла 2:

$$P_{24} = e; P_{243} = eg; P_{23} = d; P_{234} = df.$$

Пути, начинающиеся с узла 3:

$$P_{34} = f; P_{32} = c; P_{324} = ce.$$

Пути, начинающиеся с узла 4:

$$P_{43} = g; P_{432} = gc.$$

Выпишем теперь все контуры:

$$L_{232} = dc; L_{343} = gf; L_{2432} = egc.$$

● 13.9. Преобразования, упрощающие граф, показаны на рис. P.12.2 (см. задачу 12.2). В конечной графе остались только узлы x_1 и x_2 . Очевидно, что

$$N_{21} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{d(1-a) + bc}{1-a}.$$

Теперь решим граф при помощи формулы Мэсона. В графе два пути и один контур: $P_1 = d$; $P_2 = bc$; $L = a$, причем $P_1 \uparrow L$, а $P_2 \rightarrow L$. По ф-ле (13.4) находим определитель

$$\Delta = 1 - a,$$

а по ф-ле (13.6) — передачу N_{21} :

$$N_{21} = \frac{[(P_1 \uparrow P_2) \Delta]^*}{\Delta} = \frac{d(1-a) + bc}{1-a}.$$

Очевидно, что если $a=1$, граф решений не имеет, так как при этом $\Delta=0$.

● 13.10. Выпишем пути и контуры, а также их свойства:

$$P_1 = d; P_2 = ae; P_3 = abc; L_1 = f; L_2 = g;$$

$$L_1 \uparrow L_2; P_1 \uparrow L_1; P_1 \uparrow L_2; P_2 \uparrow L_2;$$

$$P_2 \rightarrow L_1; P_3 \rightarrow L_1; P_3 \rightarrow L_2.$$

Передача N_{nk} определяется формулой Мэсона:

$$N_{nk} = \frac{\left(\sum_{i=1}^3 P_i \Delta \right)^*}{\Delta} = \frac{(P_1 \Delta + P_2 \Delta + P_3 \Delta)^*}{\Delta}.$$

Определитель Δ равен:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) + L_1 L_2 = 1 - (f + g) + fg.$$

Находим произведения $(P_i \Delta)^*$:

$$(P_1 \Delta)^* = \{P_1 [1 - (L_1 + L_2) + L_1 L_2]\}^* = P_1 - P_1 L_1 - P_1 L_2 + P_1 L_1 L_2;$$

$$(P_2 \Delta)^* = \{P_2 [1 - (L_1 + L_2) + L_1 L_2]\}^* = P_2 - P_2 L_2;$$

$$(P_3 \Delta)^* = \{P_3 [1 - (L_1 + L_2) + L_1 L_2]\}^* = P_3.$$

Теперь находим $N_{нк}$:

$$N_{нк} = \frac{(P_1 \Delta)^* + (P_2 \Delta)^* + (P_3 \Delta)^*}{\Delta} =$$

$$= \frac{P_1 - P_1 L_1 - P_1 L_2 + P_1 L_1 L_2 + P_2 - P_2 L_2 + P_3}{1 - (f + g) + fg} =$$

$$= \frac{d(1-f)(1-g) + ae(1-g) + abc}{(1-f)(1-g)} = d + a \frac{e(1-g) + bc}{(1-f)(1-g)}$$

- 13.14. Для нахождения передачи T_{43} воспользуемся ф-лой (13.9):

$$T_{pq} = \frac{\left(\sum_l P_{lp, l\Delta} \right)^*}{\left(\sum_l P_{lq, l\Delta} \right)^*};$$

$$T_{43} = \frac{\left(\sum_l P_{l4, l\Delta} \right)^*}{\left(\sum_l P_{l3, l\Delta} \right)^*} = \frac{abc + ag}{ab(1-e)} = \frac{bc + g}{b(1-e)}$$

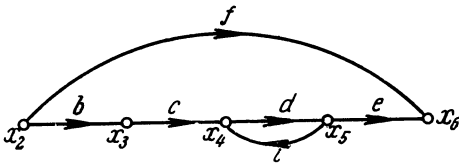


Рис. Р.13.3

- 13.15. Граф, изображенный на рис. 13.19, имеет один источник с одной ветвью, входящей в узел 2. Следовательно, для нахождения передачи T его можно упростить. Для этого отбрасываем узел-источник 1, опускаем входящие в узел 2 ветви g и h и получаем граф рис. Р.13.3

Для нахождения передачи T_{62} теперь воспользуемся формулой Мезона:

$$T_{62} = \frac{bcde + f(1-di)}{1-di} = f + \frac{bcde}{1-di}$$

- 13.16. Упрощенный граф показан на рис. Р.13.4. Для нахождения передачи T_{54} упрощенного графа применим ф-лу (13.9):

$$T_{54} = \frac{\left(\sum_l P_{25, l\Delta} \right)^*}{\left(\sum_l P_{24, l\Delta} \right)^*} = \frac{bcd + ed + bj}{bc + e} = d + \frac{bj}{bc + e}$$

- 13.17. По ф-ле (13.9):

$$T_{62} = \frac{\left(\sum_l P_{l5, l\Delta} \right)^*}{\left(\sum_l P_{l2, l\Delta} \right)^*} = \frac{acde + ab(1-dg)}{a(1-dg-eh)} = \frac{cde + b(1-dg)}{1-dg-eh};$$

$$T_{53} = \frac{\left(\sum_l P_{15, l} \Delta \right)^*}{\left(\sum_l P_{13, l} \Delta \right)^*} = \frac{acde + ab(1 - dg)}{ac(1 - eh) + abhg} = \frac{cde + b(1 - dg)}{c(1 - eh) + bhg}$$

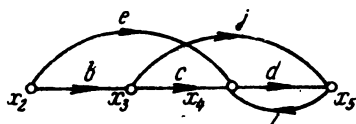


Рис. P.13.4

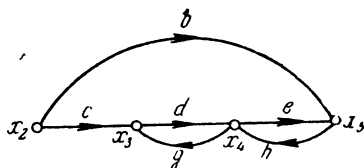


Рис. P.13.5

Теперь исключим источник; упрощенный граф показан на рис. P.13.5. Передачу T_{52} находим по формуле Мэсона:

$$T_{52} = \frac{cde + b(1 - dg)}{1 - dg - eh}$$

Передачу T_{53} находим по ф-ле (13.11) для упрощенного графа:

$$T_{53} = \frac{\left(\sum_l P_{25, l} \Delta \right)^*}{\left(\sum_l P_{23, l} \Delta \right)^*} = \frac{b(1 - dg) + cde}{c(1 - eh) - bhg}$$

● 13.18. Сначала определим условия, при которых имеет смысл говорить о передачах T . Ввиду того что граф не имеет источников, его определитель Δ должен быть равен нулю (поз. 2, табл. 13.1); в противном случае все решения будут нулевыми.

По ф-ле (13.4) определяем Δ :

$$\Delta = 1 - ab - cd - ef - acf - bed.$$

Условия, при которых существует передача T :

$$\Delta = 1 - ab - cd - ef - acf - bed = 0.$$

Для нахождения передач T_{21} и T_{31} упрощаем граф, опуская ветви b и f , входящие в узел l . Упрощенный граф показан на рис. P.13.6.

По формуле Мэсона определяем соответствующие передачи:

$$T_{21} = \frac{a + ed}{1 - cd}, \quad T_{31} = \frac{e + ac}{1 - cd}.$$

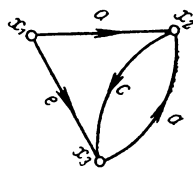
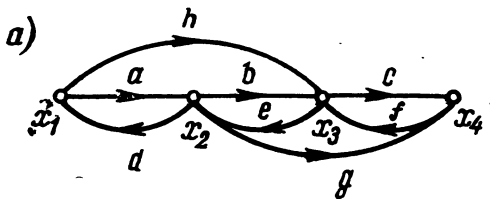


Рис. P.13.6

Очевидно, должно быть выполнено условие $cd \neq 1$.

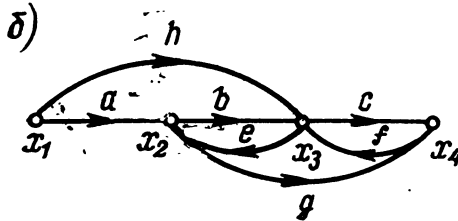
● 13.19. Преобразуем граф относительно узла l (рис. P.13.7). Передачу T_{21} находим по ф-ле (13.1):

$$T_{21} = \frac{a(1 - cf) + he}{1 - be - cf - gef} \quad (be + cf + gef \neq 1). \quad (1)$$



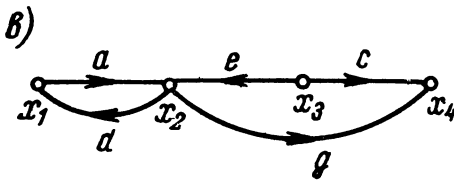
Передачу T_{43} находим по ф-ле (13.9):

$$T_{43} = \frac{abc + ag + hc + heg}{ab + h + agf} \times (ab + h + agf \neq 0). \quad (2)$$



Теперь найдем эти же передачи, преобразовав граф относительно узла 3 (рис. Р.13.7). Здесь передачу T_{43} находим по ф-ле (13.1), а T_{21} — по ф-ле (13.9):

$$T_{43} = \frac{c(1 - ad) + eg}{1 - ad} = c + \frac{eg}{1 - ad} \quad (ad \neq 1), \quad (3)$$



$$T_{21} = \frac{e}{ed} = \frac{1}{d}. \quad (4)$$

Рис. Р.13.7

На первый взгляд кажется, что выражения для T_{43} и T_{21} , найденные разными способами, не имеют ничего общего. С целью доказательства их тождественности запишем условия, при которых эти выражения вообще имеют смысл:

$$\Delta_1 = 1 - ad - be - cf - feg - hed + adcf = 0. \quad (5)$$

Из выражения (5) найдем d :

$$d = \frac{1 - be - cf - feg}{a + he - acf}. \quad (6)$$

Подставив в выражение (3) вместо d его значение, получим

$$\begin{aligned} T_{43} &= c + \frac{eg}{1 - ad} = c + \frac{eg}{1 - \frac{a(1 - be - cf - feg)}{a + he - acf}} = \\ &= c + \frac{eg(a + he - acf)}{a + he - acf - a + be + acf + afeg} = \\ &= \frac{che + cbe + cafeg + aeg + e^2hg - egacf}{he + be + afeg} = \frac{ch + cab + ag + ehg}{h + ab + afg}. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (3) тождественно равно выражению (2), т. е. передачи T_{43} , найденные по первому и по второму способам, совпадают.

Аналогично

$$T_{21} = \frac{1}{d} = \frac{a + he - acf}{1 - be - cf - feg},$$

т. е. выражение (4) тождественно равно выражению (1), и передачи T_{21} , найденные двумя способами, совпадают.

● 13.20. Для графа 13.24 преобразованный граф показан на рис. P.13.8. По формуле Мэзона

$$T_{41} = \frac{abc + ag}{1 - be - cf - gfe} \quad (be + cf + gfe \neq 1).$$

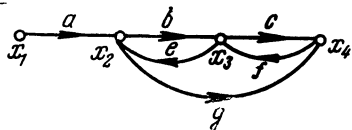


Рис. P.13.8

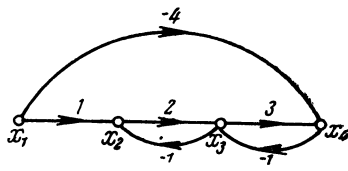


Рис. P.13.9

Находим определитель Δ для графа рис. 13.25.

$$\begin{aligned} \Delta &= -L_{121} - L_{232} - L_{343} - L_{131} - L_{12341} - L_{1231} - L_{1341} - L_{1321} + L_{121}L_{343} = \\ &= 1 - 14 - 24 - 12 - 5 - 64 - 40 - 8 - 42 + 168 = -40. \end{aligned}$$

Таким образом, определитель графа рис. 13.25 не равен нулю, и передачи T этого графа не существуют, так как граф не имеет источников (см. табл. 13.1).

Находим определитель Δ для графа рис. 13.26:

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - L_{121} - L_{232} - L_{343} - L_{141} - L_{1231} - L_{14321} - L_{12341} - L_{1431} + \\ &+ L_{121}L_{343} + L_{141}L_{232} = 1 - 1 + 2 + 3 - 12 + 4 + 16 + 18 + 8 - 12 - 24 = 0. \end{aligned}$$

Определитель графа равен нулю. Передачу T_{41} можно найти, преобразовав граф относительно узла 1 (рис. P.13.9). По формуле Мэзона

$$T_{41} = \frac{6 - 4(1 + 2)}{1 + 2 + 3} = -1.$$

● 13.21. Граф, изображенный на рис. 13.27, имеет два источника, поэтому формулу Мэзона следует применить по отношению к каждому из них. Сначала находим составляющую в узле x_4 от источника x_1 (обозначим ее x_4^1). По формуле Мэзона

$$x_4^1 = \frac{abc + ag}{1 - h - ce - ged + hce} x_1.$$

Теперь найдем составляющую от источника x_5 (обозначим ее x_4^5):

$$x_4^5 = \frac{fd + fc(1 - h)}{1 - h - bd - ce - ged + hce} x_5.$$

Суммируя составляющие, находим x_4 :

$$x_4 = x_4^1 + x_4^5 = \frac{(abc + ag)x_1 + (fdg + fc - fch)x_5}{1 - h - bd - ce - ged + hce}.$$

● 13.22. Для графа рис. 13.28a:

$$x_3^1 = \frac{ge + gab}{1 - ac - bd - edc} f_1,$$

$$x_3^2 = \frac{hb + hce}{1 - ac - bd - edc} f_2.$$

$$x_3^3 = \frac{i(1-ac)}{1-ac-bd-edc} f_3,$$

$$x_3 = x_3^1 + x_3^2 + x_3^3 = \frac{(ge + gab) f_1 + (hb + hce) f_2 + (i - iac) f_3}{1 - ac - bd - edc}.$$

Для графа рис. 13.28б:

$$x_3^1 = \frac{20}{1-10-12-28} \cdot 2 = -\frac{40}{49};$$

$$x_3^5 = \frac{1(1-12-10)}{1-10-12-28} \cdot 6 = \frac{126}{49};$$

$$x_3 = x_3^1 + x_3^5 = -\frac{40}{49} + \frac{126}{49} = \frac{86}{49}.$$

● 13.23. Для нахождения передачи N_{41} удобно свести граф с двумя источниками (рис. 13.29) к графу с одним источником (рис. Р.13.10). После этого передача N_{41} находится по формуле Мэсона. В результате получаем

$$N_{41} = \frac{abc + ag + dc \frac{x_5}{x_1} + deg \frac{x_5}{x_1}}{1 - be - cf - gh - bch - gfe}.$$

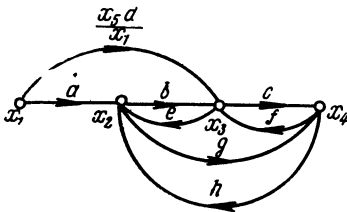


Рис. Р.13.10

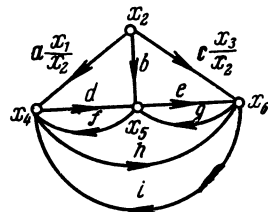


Рис. Р.13.11

● 13.24. По определению $N_{41} = \frac{x_4}{x_1}$. Находим x_4 :

$$x_4^1 = \frac{abc + ag}{1 - bc - cf - gh - bch - gfe} x_1;$$

$$x_4^5 = \frac{deg + dc}{1 - be - cf - gh - bch - gfe} x_5;$$

$$x_4 = x_4^1 + x_4^5 = \frac{(abc + ag) x_1 + (deg + dc) x_5}{1 - be - cf - gh - bch - gfe};$$

$$N_{41} = \frac{x_4}{x_1} = \frac{abc + ag + (deg + dc) \frac{x_5}{x_1}}{1 - be - cf - gh - bch - gfe}.$$

Полученный результат совпадает с результатом предыдущей задачи.

● 13.25. Граф рис. 13.30 сведем к графу с одним источником (рис. Р.13.11):

$$N_{62} = \frac{b(1-hi) + ad \frac{x_1}{x_2} + ahg \frac{x_1}{x_2} + cg \frac{x_3}{x_2} + cid \frac{x_3}{x_2}}{1 - df - eg - hi - hgf - ide}.$$

Граф рис. 13.31 сведем к графу с одним источником (рис. Р.13.12):

$$N_{41} = \frac{15 + 21 + 8 + 112 + 32 + 60}{1 - 10 - 12 - 64} = -\frac{248}{85}$$

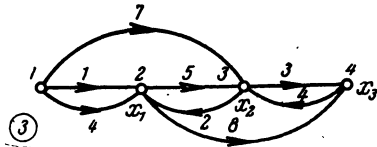


Рис. Р.13.12

Граф рис. 13.32 сведем к графу с одним источником (рис. Р.13.13б):

$$N_{31} = \frac{15(1-4) + 20 + 48}{1-4-12} = -\frac{23}{15}$$

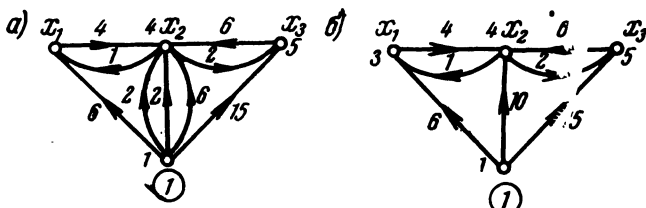


Рис. Р.13.13

14.

● 14.1. В соответствии с рекомендациями, изложенными на стр. 189, нумеруем узлы цепи (рис. Р.14.1а) и составляем матрицы, соответствующие канонической

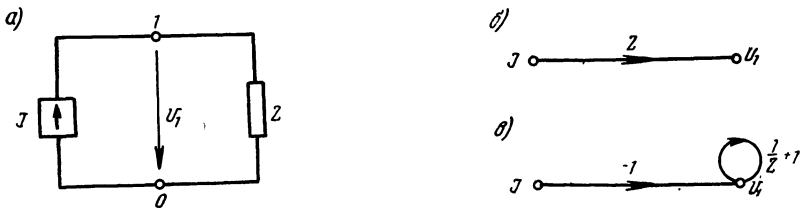


Рис. Р.14.1

форме [Ф-ла (14.1)]. В данном случае каждая матрица имеет по одному элементу, и поэтому вместо матриц можно писать их элементы:

$$[Y] = \frac{1}{Z}; \quad [U] = U_1; \quad [J] = J.$$

Уравнение цепи: $\frac{1}{Z} U_1 = J.$

Решая это уравнение относительно U_1 : $U_1 = ZJ$, получаем возможность построить нормализованный граф (ток J — причина, напряжение U_1 — следствие), изображенный на рис. Р.14.1б.

Для построения ненормализованного графа приведем исходное уравнение к безразмерному виду и построим матрицу передач $[A]$ по ф-ле (11.10). В данном случае

$$[A] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{Z} + 1 & -1 \end{array} \right],$$

где первый элемент соответствует передаче петли в узле-следствии U_1 , а второй — передаче ветви от узла-причины J к узлу-следствию U_1 .

Граф, построенный по найденной матрице $[A]$, изображен на рис. Р.14.1в. Исключив петлю, легко убедиться в равносильности обоих графов.

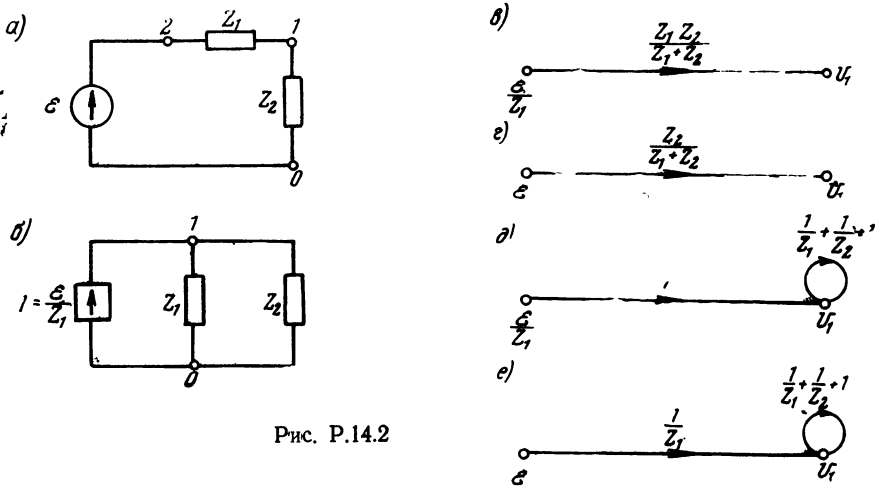


Рис. Р.14.2

● 14.2. Преобразуем схему для приведения ее к виду, соответствующему канонической форме уравнений (рис. Р.14.2б). Уравнение для такой цепи

$$\left[\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right] [U_1] = \left[\frac{\mathcal{E}}{Z_1} \right].$$

Решив это уравнение относительно U_1 :

$$U_1 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{\mathcal{E}}{Z_1},$$

легко построить нормализованный граф (рис. Р.14.2в). Если в качестве источника принять узел с напряжением \mathcal{E} , придем к графу рис. Р.14.2г.

Для построения ненормализованного графа приведем мысленно полученное уравнение к безразмерному виду и составим матрицу передач $[A]$:

$$[A] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + 1 & -1 \end{array} \right],$$

в которой первый элемент представляет собой передачу петли в узле U_1 , а второй — передачу от причины $\frac{\mathcal{E}}{Z_1}$ к следствию U_1 (рис. Р.14.2д). Если в последнем графе перейти от источника $\frac{\mathcal{E}}{Z_1}$ к источнику \mathcal{E} , придем к графу рис. Р.14.2е.

Теперь решим эту же задачу, не приводя схему к виду, соответствующему канонической форме. Нумеруем узлы так, как показано на рис. Р.14.2а. Составляем матрицы:

$$[Y] = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} & & -\frac{1}{Z_1} \\ \hline 0 & & 0 \\ \hline \end{array} \right]; \quad [U] = \begin{bmatrix} U_1 \\ \mathcal{E} \end{bmatrix}; \quad [J] = [0].$$

Перемножая матрицы в соответствии с уравнением (14.1), получаем

$$\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) U_1 - \frac{1}{Z_1} \mathcal{E} = 0.$$

Легко убедиться, что этот результат совпадает с найденным выше. Напряжение U_1 и представляет собой напряжение на сопротивлении Z_2 .

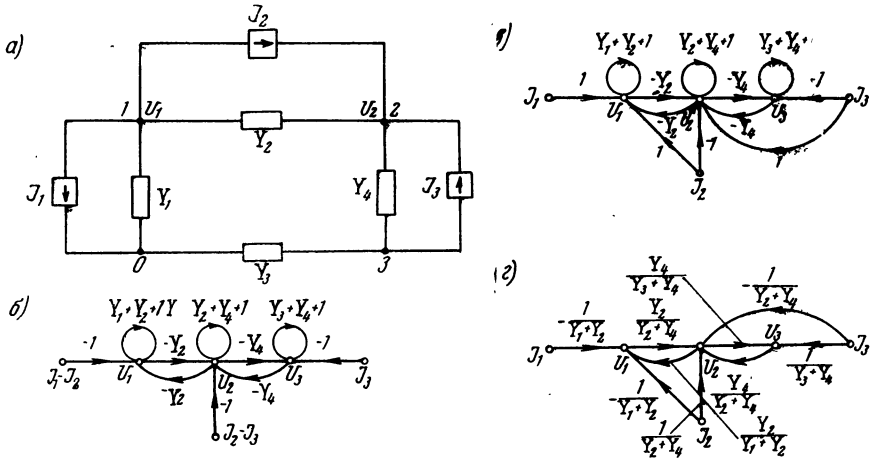


Рис. Р.14.3

● 14.3. Пронумеруем узлы в схеме заданной электрической цепи (рис. Р.14.3а). В соответствии со схемой и выбранной нумерацией записываем матрицы, входящие в выражение (14.1) ¹⁾:

$$[U] = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}; \quad [J] = \begin{bmatrix} -J_1 - J_2 \\ J_2 - J_3 \\ J_3 \end{bmatrix};$$

$$[Y] = \left[\begin{array}{c|c|c} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 \\ \hline -Y_2 & Y_2 + Y_4 & -Y_4 \\ \hline 0 & -Y_4 & Y_3 + Y_4 \end{array} \right].$$

¹⁾ Напомним, что задающие токи берутся со знаком «плюс», если они втекают в соответствующий узел, и со знаком «минус» — если они вытекают из узла.

Уравнение схемы имеет вид:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 \\ \hline -Y_2 & Y_2 + Y_4 & -Y_4 \\ \hline 0 & -Y_4 & Y_3 + Y_4 \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_1 - J_2 \\ J_2 - J_3 \\ J_3 \end{bmatrix}.$$

Для построения ненормализованного U -графа необходимо предварительно найти матрицу $[A]$. По ф-ле (11.10)

$$[A] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} Y_1 + Y_2 + 1 & -Y_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -Y_2 & Y_2 + Y_4 + 1 & -Y_4 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -Y_4 & Y_3 + Y_4 + 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right].$$

Эта матрица соответствует графу с шестью узлами: три узла U_1 , U_2 и U_3 являются следствиями (им соответствуют левые элементы матрицы $[A]$), а три независимых узла $(J_1 - J_2)$, $(J_2 - J_3)$ и J_3 (им соответствуют правые элементы матрицы) — причинами. Граф, построенный по этой матрице, изображен на рис. Р.14.36.

Полученный граф целесообразно преобразовать так, чтобы независимые узлы соответствовали источникам в схеме. При помощи простых преобразований приходим к графу, изображенному на рис. Р.14.3в. Поясним переход на примере преобразования левого узла $(-J_1 - J_2)$ в узел J_1 . В зависимый узел U_1 попадает сигнал $(-J_2)$ с передачей (-1) , т. е. сигнал J_2 . Следовательно, в преобразованном графе нужно добавить ветвь от узла J_2 к узлу U_1 с передачей 1. Аналогично преобразуются пути сигналов от других источников.

Теперь построим нормализованный граф. С этой целью перемножим матрицы в исходном уравнении графа:

$$\begin{aligned} (Y_1 + Y_2)U_1 - Y_2U_2 &= -J_1 - J_2; \\ -Y_2U_1 + (Y_2 + Y_4)U_2 - Y_4U_3 &= J_2 - J_3; \\ -Y_4U_2 + (Y_3 + Y_4)U_3 &= J_3, \end{aligned}$$

а затем решим полученную систему уравнений относительно искомым переменных:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} U_2 - \frac{1}{Y_1 + Y_2} J_1 - \frac{1}{Y_1 + Y_2} J_2; \\ U_2 &= \frac{Y_2}{Y_2 + Y_4} U_1 + \frac{Y_4}{Y_2 + Y_4} U_3 + \frac{1}{Y_2 + Y_4} J_2 - \frac{1}{Y_2 + Y_4} J_3; \\ U_3 &= \frac{Y_4}{Y_3 + Y_4} U_2 + \frac{1}{Y_3 + Y_4} J_3. \end{aligned}$$

По последней системе легко построить граф (рис. Р.14.3г). Конечно, к последнему графу легко перейти и путем исключения петель графа рис. Р.14.3в.

● 14.4. Схема рис. 14.10 содержит три источника напряжения, причем они не имеют общих полюсов, и, следовательно, для составления системы уравнений узловых напряжений необходимо предварительно заменить эти источники эквивалентными источниками тока.

Преобразованная схема показана на рис. Р.14.4а.

Система уравнений узловых напряжений этой схемы и соответствующая матрица $[A]$ имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} Y_1+Y_2+Y_3+Y_4 & -Y_2-Y_3 & 0 \\ -Y_2-Y_3 & Y_2+Y_3+Y_5+Y_7 & -Y_5-Y_7 \\ 0 & -Y_5-Y_7 & Y_5+Y_6+Y_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1+J_2 \\ -J_2+J_3 \\ -J_3 \end{bmatrix};$$

$$[A] = \begin{bmatrix} Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+1 & -Y_2-Y_3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -Y_2-Y_3 & Y_2+Y_3+Y_5+Y_7+1 & -Y_5-Y_7 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -Y_5-Y_7 & Y_5+Y_6+Y_7+1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

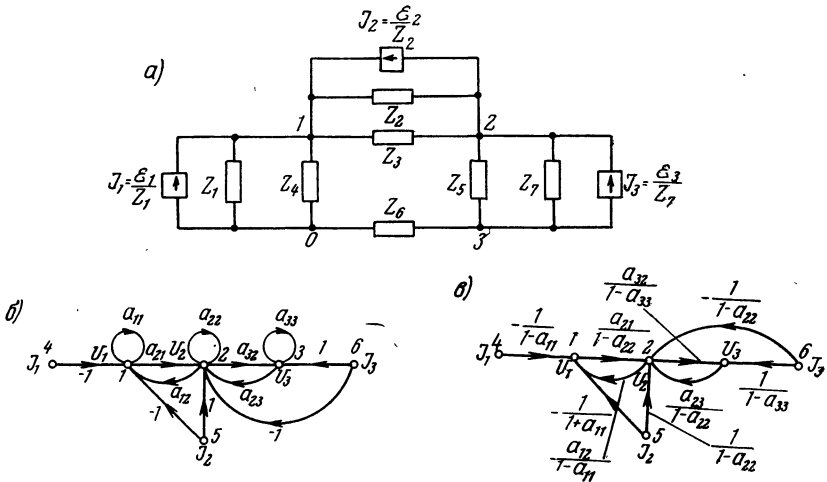


Рис. P.14.4

Ненормализованный граф изображен на рис. P.14.4б для случая, когда узлы-источники соответствуют источникам схемы J_1 , J_2 и J_3 (см. задачу 14.3).

Нормализованный граф (рис. P.14.4в) строится обычным способом.

● 14.5. Заданная схема имеет один контур. Очевидно, что в этом простейшем случае каждая матрица $[L]$, $[\mathcal{E}]$ и $[Z]$ состоит из одного элемента, и система уравнения контурных токов имеет вид

$$[Z] [I] = [\mathcal{E}],$$

где

$$[Z] = Z; \quad [I] = I \text{ и } [\mathcal{E}] = \mathcal{E}.$$

Для построения ненормализованного графа по ф-ле (11.10) найдем матрицу $[A]$:

$$[A] = [Z+1; -1].$$

Граф, соответствующий этой матрице, изображен на рис. P.14.5а. Устранив петлю, получаем конечный граф рис. P.14.5б, из которого следует очевидный результат:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{Z}.$$

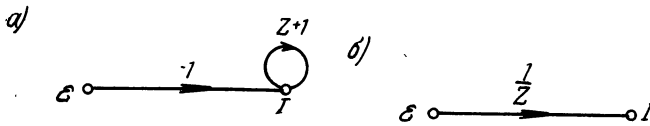


Рис. P.14.5

● 14.6. Для составления системы уравнений контурных токов приведем схему к виду, соответствующему канонической форме системы уравнений. Схема с эквивалентным источником напряжения показана на рис. P.14.6а. Система уравнений контурных токов для этой схемы имеет вид

$$[Z] [I] = [J Z_1].$$

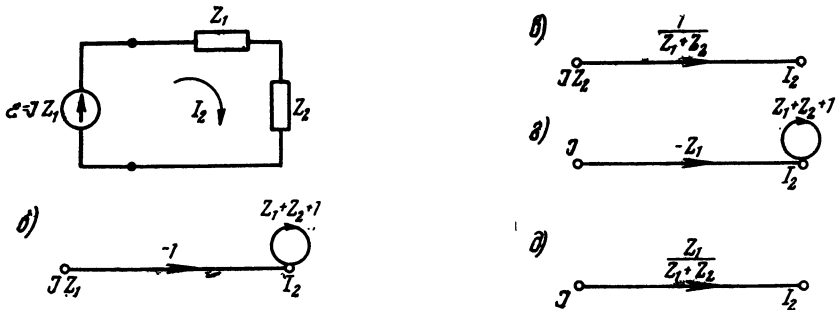


Рис. P.14.6

Ненормализованный граф, соответствующий этой системе, изображен на рис. P.14.6б, а конечный граф — на рис. P.14.6в. Из конечного графа легко получить выражение для тока I_2 :

$$I_2 = J \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

В данном случае источник тока входит только в один контур, и систему уравнений можно составить путем преобразования уравнений, т. е. не прибегая к эквивалентным преобразованиям источника. Согласно изложенным выше правилам получаем

$$[Z_1 + Z_2 - Z_1] \begin{bmatrix} I_2 \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ненормализованный граф, соответствующий этой системе, изображен на рис. P.14.6б, а нормализованный — на рис. P.14.6д. Из уравнения, соответствующего нормализованному графу, получаем значение тока I_2 , совпадающее с результатом решения по первому варианту:

$$I_2 = J \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

● 14.7. Прежде всего составляем систему уравнений контурных токов [ф-ла (14.2)]. Схема рис. 14.13 имеет три независимых контура. Направления

контурных токов показаны на рис. Р.14.7а. Матрица-столбец $[I]$ содержит эти контурные токи:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}.$$

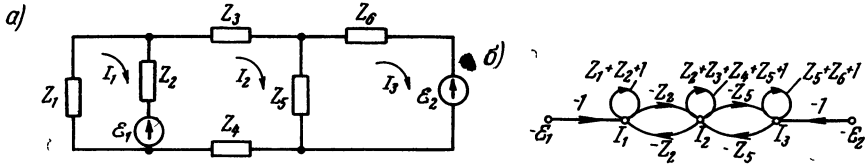


Рис. Р.14.7

Направление задающего напряжения \mathcal{E}_1 источника в первом контуре противоположно направлению контурного тока, во втором — совпадает с ним и в третьем — ему противоположно. Матрица $[\mathcal{E}]$ имеет вид:

$$[\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} -\mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_1 \\ -\mathcal{E}_2 \end{bmatrix}.$$

Составляем матрицу $[Z]$:

$$[Z] = \left[\begin{array}{c|c|c} Z_1 + Z_2 & -Z_2 & 0 \\ \hline -Z_2 & Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 & -Z_5 \\ \hline 0 & -Z_5 & Z_5 + Z_6 \end{array} \right].$$

Система уравнений равновесия контурных токов записывается в следующей форме:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} Z_1 + Z_2 & -Z_2 & 0 \\ \hline -Z_2 & Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 & -Z_5 \\ \hline 0 & -Z_5 & Z_5 + Z_6 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_1 \\ -\mathcal{E}_2 \end{bmatrix}.$$

По полученной системе уравнений легко составить матрицу передач ветвей. В соответствии с ф-лой (11.10)

$$[A] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} Z_1 + Z_2 + 1 & -Z_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -Z_2 & Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + 1 & -Z_5 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -Z_5 & Z_5 + Z_6 + 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right].$$

Теперь можно составить I -граф. Этот граф должен иметь шесть узлов, три из которых представляют собой источники, а три — зависимые узлы. Наносим на поле графа необходимые узлы и соединяем их в соответствии с матрицей $[A]$ передач ветвей (рис. Р.14.7б).

● 14.10. Система уравнений для I -графа имеет вид

$$\left[\begin{array}{c|c|c} Z_1 + Z_4 & -Z_4 & 0 \\ \hline -Z_4 & Z_2 + Z_4 + Z_5 & -Z_5 \\ \hline 0 & -Z_5 & Z_3 + Z_5 + Z_6 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

По этой системе можно записать матрицу $[A]$:

$$[A] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} Z_1 + Z_4 + 1 & -Z_4 & 0 & -1 \\ \hline -Z_4 & Z_2 + Z_4 + Z_5 + 1 & -Z_5 & 0 \\ \hline 0 & -Z_5 & Z_3 + Z_5 + Z_6 + 1 & 0 \end{array} \right].$$

I -граф изображен на рис. Р.14.8а.

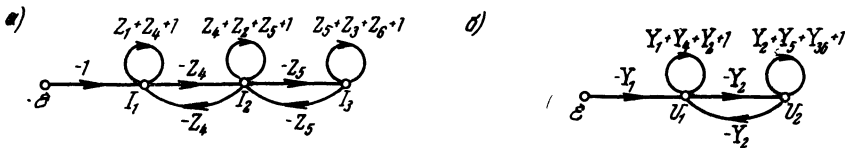


Рис. Р.14.8

Теперь составим систему уравнений узловых напряжений. Схема рис. 14.16 содержит один источник напряжения. Если в качестве базисного выбрать узел 0, являющийся одним из полюсов источника напряжения, можно сразу записать систему уравнений узловых напряжений:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} Y_1 + Y_2 + Y_4 & -Y_2 & -Y_1 \\ \hline -Y_2 & Y_2 + Y_5 + Y_6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \mathcal{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где

$$Y_i = \frac{1}{Z_i}; \quad Y_{ik} = \frac{1}{Z_i + Z_k}.$$

Матрица $[A]$, соответствующая полученной системе уравнений, имеет вид:

$$[A] = \left[\begin{array}{c|c|c} Y_1 + Y_2 + Y_4 + 1 & -Y_2 & -Y_1 \\ \hline -Y_2 & Y_2 + Y_5 + Y_6 + 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

U -граф, построенный по этой матрице, изображен на рис. Р.14.8б.

● 14.11. Составим систему уравнений равновесия узловых напряжений:

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 & 0 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 + Y_5 & -Y_5 & 0 & -Y_3 \\ 0 & -Y_5 & Y_5 + Y_7 + Y_8 & -Y_7 - Y_8 & 0 \\ 0 & 0 & -Y_7 - Y_8 & Y_6 + Y_7 + Y_8 & -Y_6 \\ 0 & -Y_3 & 0 & -Y_6 & Y_3 + Y_4 + Y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Матрица $[A]$, соответствующая этой системе, имеет вид:

$$[A] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 + 1 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 + Y_5 + 1 & -Y_5 \\ 0 & -Y_5 & Y_5 + Y_7 + Y_8 + 1 \\ 0 & 0 & -Y_7 - Y_8 \\ 0 & -Y_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -Y_3 & 0 \\ -Y_7 - Y_8 & 0 & 0 \\ Y_6 + Y_7 + Y_8 + 1 & -Y_6 & 0 \\ -Y_6 & Y_3 + Y_4 + Y_6 + 1 & 0 \end{bmatrix}$$

На рис. Р.14.9а изображен U -граф данной цепи. Значения передач ветвей легко прочесть по матрице $[A]$.

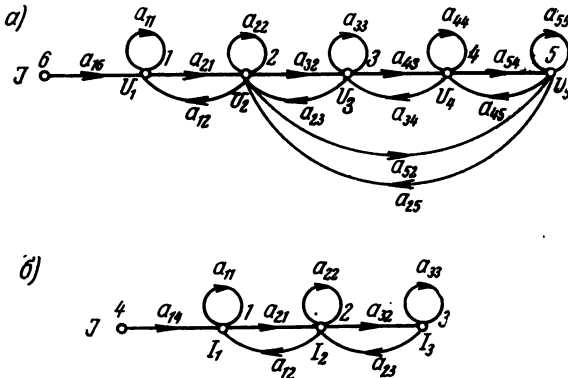


Рис. Р.14.9

При составлении системы уравнений контурных токов заметим, что в схеме имеется один источник тока, включенный таким образом, что он входит лишь в один контур (при выбранных контурах). Следовательно, один из контурных то-

ков становится известным и количество уравнений системы уменьшается на единицу:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 & -Z_3 & 0 & -Z_1 & I_1 \\ \hline -Z_3 & Z_3 + Z_5 + Z_6 + Z_7 & -Z_7 & 0 & I_2 \\ \hline 0 & -Z_7 & Z_7 + Z_8 & 0 & I_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & J \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Матрица $[A]$, соответствующая этой системе, имеет вид

$$[A] = \left[\begin{array}{ccc|c|c} Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + 1 & -Z_3 & 0 & -Z_1 & \\ \hline -Z_3 & Z_3 + Z_5 + Z_6 + Z_7 + 1 & -Z_7 & 0 & \\ \hline 0 & -Z_7 & Z_7 + Z_8 + 1 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Соответствующий этой матрице I -граф изображен на рис. Р.14.96.

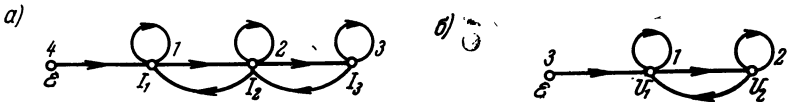


Рис. Р.14.10

● 14.12. Записываем необходимые системы уравнений и матрицы передач ветвей, пользуясь символическим методом и полагая $i\omega = p$. Для I -графа (рис. Р.14.10а):

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} pL_1 + \frac{1}{pC_1} & -\frac{1}{pC_1} & 0 & I_1 & \mathcal{E} \\ \hline -\frac{1}{pC_1} & R + pL_2 + \frac{1}{pC_1} & -pL_2 & I_2 & 0 \\ \hline 0 & -pL_2 & pL_2 + \frac{1}{pC_2} & I_3 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$[A] = \left[\begin{array}{ccc|c|c} pL_1 + \frac{1}{pC_1} + 1 & -\frac{1}{pC_1} & 0 & -1 & \\ \hline -\frac{1}{pC_1} & R + pL_2 + \frac{1}{pC_1} + 1 & -pL_2 & 0 & \\ \hline 0 & -pL_2 & pL_2 + \frac{1}{pC_2} + 1 & 0 & \end{array} \right]$$

Для U -графа (рис. 14.10б):

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} \frac{1}{pL_1} + pC_1 + \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} & -\frac{1}{pL_1} & U_1 & 0 \\ \hline -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} + \frac{1}{pL_2} + pC_2 & 0 & U_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathcal{E} & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \mathcal{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$[A] = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{\rho L_1} + \rho C_1 + \frac{1}{R} + 1 & -\frac{1}{R} & -\frac{1}{\rho L_1} \\ \hline -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho L_2} + \rho C_2 + 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

● 14.14. Для схемы рис. 14.20 система уравнений равновесия контурных токов имеет вид

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \rho L_1 + \frac{1}{\rho C_1} & -\frac{1}{\rho C_1} & 0 \\ \hline -\frac{1}{\rho C_1} & \frac{1}{\rho C_1} + \rho L_2 + \frac{1}{\rho C_2} & -\frac{1}{\rho C_2} \\ \hline 0 & -\frac{1}{\rho C_2} & \frac{1}{\rho C} + \rho L_3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Нормализованная матрица $[A_H]$ находится по ф-ле (11.6):

$$[A_H] = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \frac{1}{\rho^2 L_1 C_1 + 1} & 0 \\ \hline \frac{C_2}{\rho^2 L_2 C_1 C_2 + C_1 + C_2} & 0 & \frac{C_1}{\rho^2 L_2 C_1 C_2 + C_1 + C_2} \\ \hline 0 & \frac{1}{\rho^2 L_3 C_2 + 1} & 0 \end{array} \right].$$

Соответствующий этой матрице I -граф изображен на рис. P.14.11а.

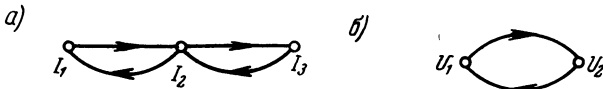


Рис. P.14.11

Система уравнений узловых напряжений и соответствующая матрица $[A_H]$ имеют вид:

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{\rho L_1} + \rho C_1 + \frac{1}{\rho L_2} & -\frac{1}{\rho L_2} \\ \hline -\frac{1}{\rho L_2} & \frac{1}{\rho L_2} + \rho C_2 + \frac{1}{\rho L_3} \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$[A_H] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \frac{L_1}{\rho^2 C_1 L_1 L_2 + L_1 + L_2} \\ \hline \frac{L_3}{\rho^2 C_2 L_2 L_3 + L_3 + L_2} & 0 \end{array} \right].$$

На рис. P.14.11б изображен U -граф.

● 14.15. Схема, изображенная на рис. 14.21, не имеет источников энергии. Строим U -граф этой схемы согласно правилам, изложенным на стр. 196. Для

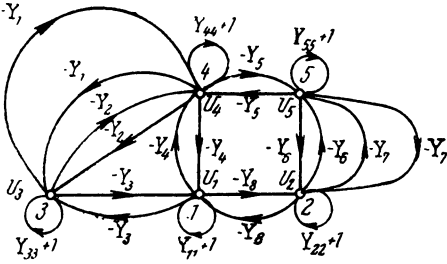


Рис. P.14.12

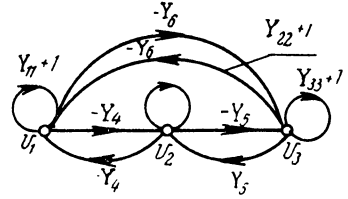


Рис. P.14.13

большей наглядности узлы графа разместим так же, как и узлы схемы (рис. P.14.12). На рисунке приняты следующие обозначения¹⁾:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_3 + Y_4 + Y_8 + Y_9; & Y_{33} &= Y_1 + Y_2 + Y_3; \\ Y_{22} &= Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_{10} + Y_{11}; & Y_{44} &= Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5; \\ Y_{55} &= Y_5 + Y_6 + Y_7. \end{aligned}$$

● 14.16. Граф пассивной цепи изображен на рис. P.14.13, где обозначено:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_1 + Y_4 + Y_6; \\ Y_{22} &= Y_2 + Y_4 + Y_5; \\ Y_{33} &= Y_3 + Y_5 + Y_6. \end{aligned}$$

Система уравнений, соответствующая графу, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= (Y_{11} + 1)U_1 - Y_4U_2 - Y_6U_3 \\ U_2 &= -Y_4U_1 + (Y_{22} + 1)U_2 - Y_5U_3 \\ U_3 &= -Y_6U_1 - Y_5U_2 + (Y_{33} + 1)U_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Записываем систему уравнений равновесия узловых напряжений по схеме рис. 14.22:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} Y_{11} & -Y_4 & -Y_6 \\ \hline -Y_4 & Y_{22} & -Y_5 \\ \hline -Y_6 & -Y_5 & Y_{33} \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Легко видеть, что системы (1) и (2) равносильны.

● 14.19. Сначала строим ненормализованный U -граф в предположении отсутствия источников энергии (рис. P.14.14a). К этому графу присоединяем соответствующие источники тока с передачами -1 и получаем U -граф данной электрической цепи (рис. P.14.14б). В передачах ветвей приняты обозначения:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_1 + Y_4; & Y_{33} &= Y_3 + Y_5 + Y_6; \\ Y_{22} &= Y_2 + Y_4 + Y_5; & Y_{44} &= Y_6. \end{aligned}$$

¹⁾ Во всех последующих задачах Y_{ii} обозначает сумму всех проводимостей, примыкающих к i -му узлу.

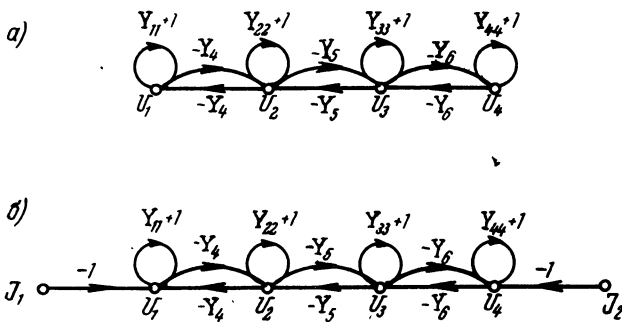


Рис. P.14.14

● 14.20. Схема рис. 14.26 содержит три источника напряжения, которые имеют один общий полюс. Следовательно, если выбрать его в качестве базисного узла, можно построить U -граф, не прибегая к эквивалентным преобразованиям схемы.

На рис. P.14.15а показан граф, построенный в предположении отсутствия источников энергии.

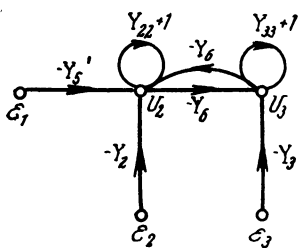
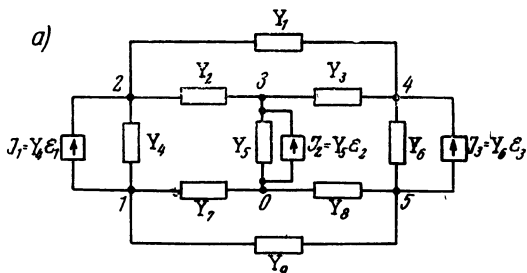
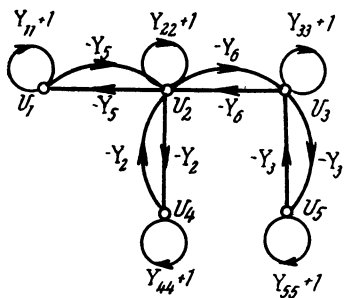


Рис. P.14.15

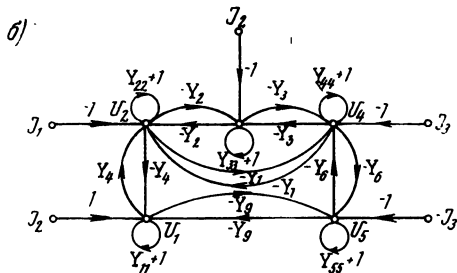


Рис. P.14.16

Опустив все ветви, входящие в узлы, которые являются полюсами источников напряжения, и придав переменным в этих узлах значения задающих напряжений, получаем искомый U -граф (рис. P.14.15б). На рисунке приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 Y_{11} &= Y_1 + Y_5; & Y_{33} &= Y_3 + Y_4 + Y_6; \\
 Y_{22} &= Y_2 + Y_5 + Y_6; & Y_{44} &= Y_2; \\
 Y_{55} &= Y_3.
 \end{aligned}$$

● 14.21. В этом случае необходимо заменить источники напряжения эквивалентными источниками тока (рис. Р.14.16а). Соответствующий преобразованной схеме U -граф изображен на рис. Р.14.16б. Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y + Y_7 + Y_9; & Y_{22} &= Y_2 + Y_1 + Y_4; \\ Y_{33} &= Y_2 + Y_3 + Y_5; & Y_{44} &= Y_1 + Y_3 + Y_6; \\ Y_{55} &= Y_6 + Y_8 + Y_9. \end{aligned}$$

15.

● 15.1. Для построения ненормализованного I -графа составляем систему уравнений контурных токов. Нумерация контурных токов показана на рис. Р.15.1а. Составляем матрицу $[Z]$ части цепи без взаимных индуктивностей¹⁾

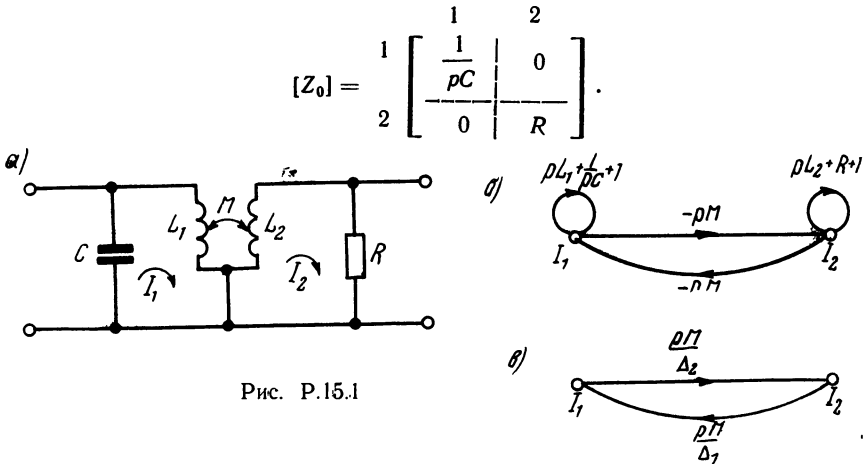


Рис. Р.15.1

Матрица $[Z]$, трансформатора согласно поз. 4 табл. 15.1 имеет вид:

$$[Z_1] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left[\begin{array}{c|c|c} \rho L_1 & -\rho L_1 + \rho M & -\rho M \\ \hline -\rho L_1 + \rho M & \rho L_1 + \rho L_2 - 2\rho M & -\rho L_2 + \rho M \\ \hline -\rho M & -\rho L_2 + \rho M & \rho L_2 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Сравнивая нумерацию контурных токов рис. Р.15.1а и поз. 4 табл. 15.1 замечаем, что контурный ток I_2 трансформатора отсутствует в схеме рис. Р.15.1а, а ток I_3 трансформатора совпадает с контурным током I_2 схемы рис. Р.15.1а. Учитывая это, можно переписать матрицу $[Z_1]$ в виде, соответствующем отсутствию тока I_2 трансформатора, т. е. отсутствию второго столбца и второй строки:

$$[Z_1] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \left[\begin{array}{c|c} \rho L_1 & -\rho M \\ \hline -\rho M & \rho L_2 \end{array} \right] \end{matrix}$$

¹⁾ Цифры перед знаком матриц соответствуют нумерации узлов и контуров схемы; нуль указывает на то, что данный узел или контур в схеме отсутствует.

Найдем матрицу $[Z]$ всей цепи:

$$[Z] = [Z_0] + [Z_1] = \left[\begin{array}{c|c} \rho L_1 + \frac{1}{\rho C} & -\rho M \\ \hline -\rho M & \rho L_2 + R \end{array} \right].$$

Теперь легко найти матрицу $[A]$ графа:

$$[A] = [Z] + [1] = \left[\begin{array}{c|c} \rho L_1 + \frac{1}{\rho C} + 1 & -\rho M \\ \hline -\rho M & \rho L_2 + R + 1 \end{array} \right].$$

Граф, соответствующий этой матрице, изображен на рис. P.15.16.

Нормализованный граф (рис. P.15.18) легко получить из ненормализованного путем устранения петель. На рисунке приняты следующие обозначения:

$$\Delta_1 = \rho L_1 + \frac{1}{\rho C}; \quad \Delta_2 = \rho L_2 + R.$$

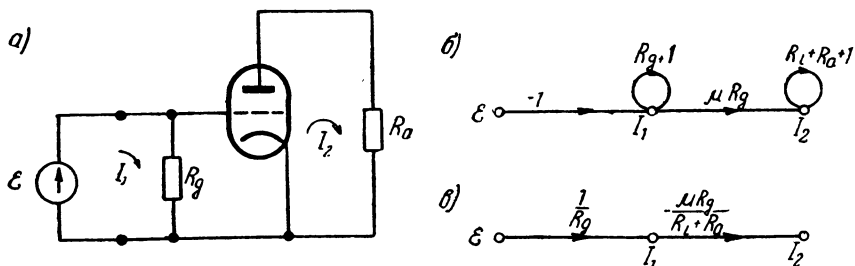


Рис. P.15.2

● 15.2. На рис. P.15.2a показана нумерация контурных токов усилителя. Как и в предыдущей задаче, выпишем матрицы обратимой и необратимой частей цепи:

$$[Z_0] = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline - & R_a \end{array} \right];$$

$$[Z_1] = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline R_g & -R_g & 0 \\ \hline -(1 + \mu) R_g & (1 + \mu) R_g + R_i & -R_i \\ \hline \mu R_g & -(\mu R_g + R_i) & R_i \end{array} \right].$$

В заданной схеме контур 2 триода (табл. 15.1, поз. 2) отсутствует, а контур 3 триода совпадает с контуром 2 усилителя. Учитывая это обстоятельство, переписываем матрицу $[Z_1]$ в виде

$$[Z_1] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline R_g & 0 \\ \mu R_g & R_i \end{array} \right].$$

Теперь найдем матрицу $[A]$ I -графа усилителя:

$$[A] = [Z_0] + [Z_1] + [1] = \left[\begin{array}{c|c} R_g + 1 & 0 \\ \hline \mu R_g & R_i + R_a + 1 \end{array} \right].$$

Ненормализованный I -граф усилителя изображен на рис. Р.15.26. На рис. Р.15.26 изображен нормализованный I -граф.

● 15.3. Выписываем матрицы $[Z]$ частей схемы.

Для обратимой части

$$[Z_0] = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & R_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Для первого триода

$$[Z_1] = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 2 \\ \hline R_1 & -R_1 & 0 \\ \hline -(1 + \mu_1) R_1 & (1 + \mu_1) R_1 + R_{i1} & -R_{i1} \\ \hline \mu_1 R_1 & -(\mu_1 R_1 + R_{i1}) & R_{i1} \end{array} \right].$$

Для второго триода

$$[Z_2] = \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 3 & 4 \\ \hline R_2 & -R_2 & 0 \\ \hline -(1 + \mu_2) R_2 & (1 + \mu_2) R_2 + R_{i2} & -R_{i2} \\ \hline \mu_2 R_2 & -(\mu_2 R_2 + R_{i2}) & R_{i2} \end{array} \right].$$

Складываем матрицы частей схемы и находим матрицу $[Z]$. По матрице $[Z]$ находим матрицу $[A]$:

$$[A] = [Z] + [1] = [Z_0] + [Z_1] + [Z_2] + [1] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} R_1 + 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mu_1 R_1 & R_{i1} + R_2 + 1 & -R_2 & 0 \\ \hline 0 & -(1 + \mu_2) R_2 & R_3 + (1 + \mu_2) R_2 + R_{i2} + 1 & -R_{i2} \\ \hline 0 & \mu_2 R_2 & -(\mu_2 R_2 + R_{i2}) & R_{i2} + 1 \end{array} \right].$$

Ненормализованный I -граф, соответствующий этой матрице, изображен на рис. Р.15.3а. Нормализованный граф изображен на рис. Р.15.3б, на котором приняты следующие обозначения:

$$\Delta_2 = R_{i1} + R_2; \quad \Delta_3 = R_3 + (1 + \mu_2) R_2 + R_{i2};$$

$$\Delta_4 = R_{i2}.$$

● 15.4. Строим сначала U -граф обратной части цепи (рис. P.15.4a). Сложив этот граф с U -графом триода (рис. P.15.4б), получаем U -граф усилителя (рис. P.15.4в).

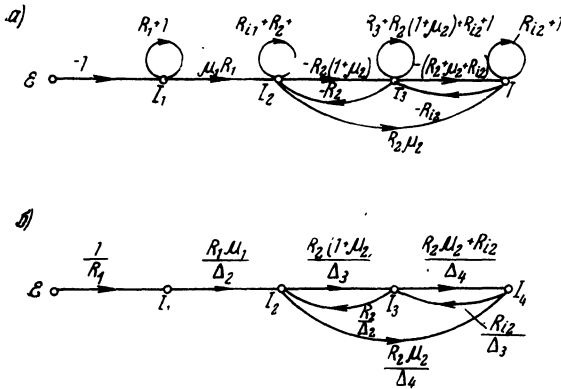


Рис. P.15.3

Нормализованный граф изображен на рис. P.15.4г. На рисунке приняты следующие обозначения:

$$\Delta_2 = G_a + G_i; \quad \Delta_3 = G_k + G_i + S.$$

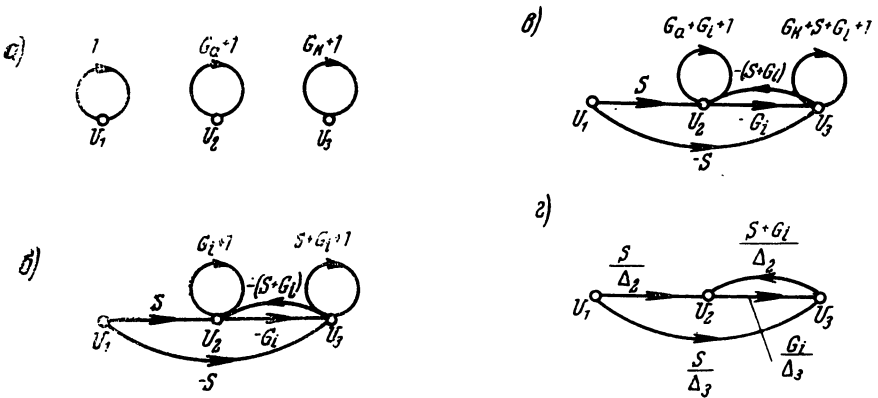


Рис. P.15.4

● 15.5. Сначала составляем U -граф емкостей (обратимая часть). Этот граф изображен на рис. P.15.5a. Складывая с U -графом емкостей U -граф триода (рис. P.15.5б), получаем общий U -граф (рис. P.15.5в).

Нормализованный U -граф изображен на рис. P.15.5г. Здесь приняты следующие обозначения:

$$\Delta_1 = p(C_{ga} + C_g); \quad \Delta_2 = p(C_{ga} + C_a) + G_i; \quad \Delta_3 = p(C_g + C_a) + S + G_i.$$

● 15.10. Искомый U -граф обратимой части усилителя показан на рис. Р.15.6а. U -граф всего усилителя показан на рис. Р.15.6б.

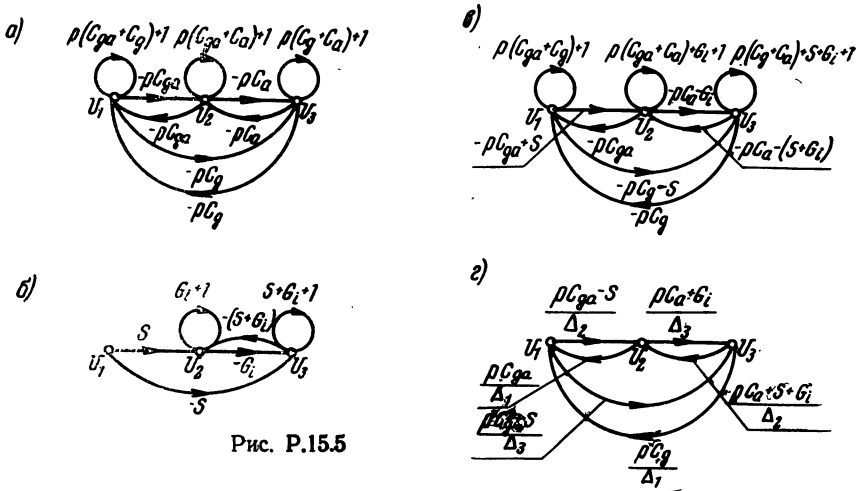


Рис. Р.15.5

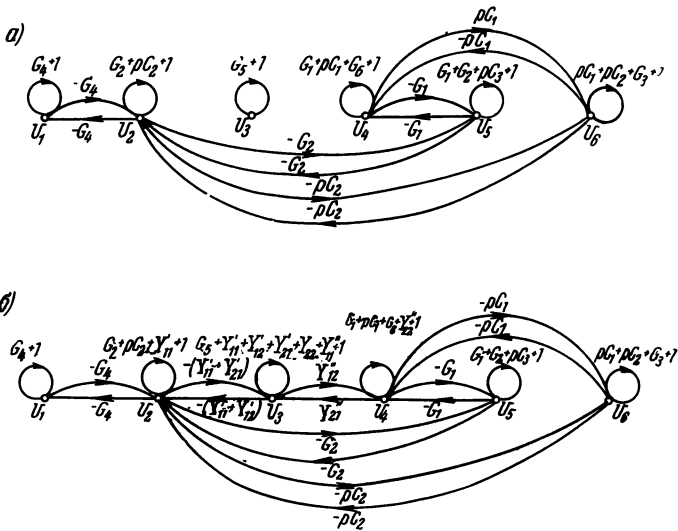


Рис. Р.15.6

● 15.15. Искомый U -граф обратимой части генератора показан на рис. Р.15.7а. Суммарный ненормализованный U -граф генератора показан на рис. Р.15.7б. Как и следовало ожидать, граф генератора не содержит узлов-источников. Нормализованный U -граф генератора изображен на рис. Р.15.7в, где приняты следующие обозначения:

$$\Delta_1 = G + pC; \quad \Delta_2 = pC + G_a + G_i; \quad \Delta_3 = \Delta_4 = 2pC + G.$$

● 15.16. Искомый U -граф цепи (за исключением трансформатора) изображен на рис. Р.15.8а. На рис. Р.15.8б изображен суммарный ненормализованный граф цепи,

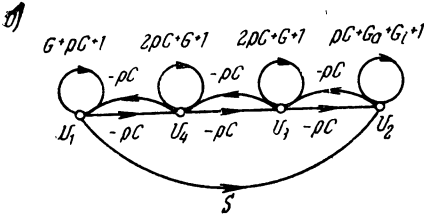
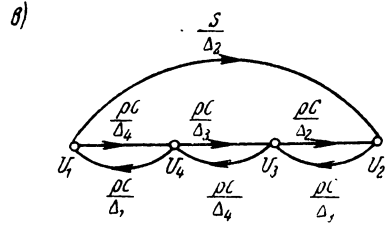
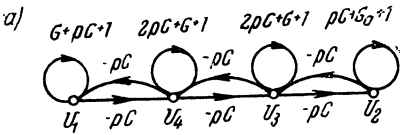


Рис. P.15.7

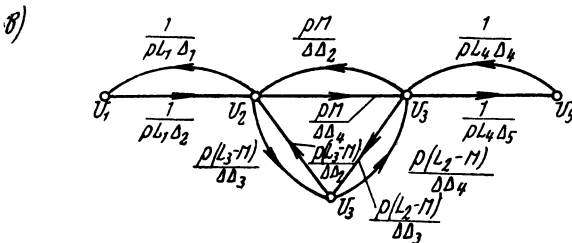
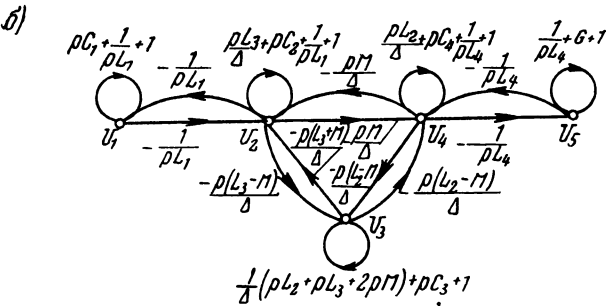
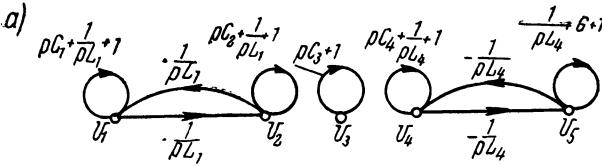


Рис. P.15.8

Нормализованный граф цепи изображен на рис. P.15.8в, где приняты следующие обозначения:

$$\Delta = \rho^2(L_3L_2 - M^2); \quad \Delta_1 = \rho C_1 + \frac{1}{\rho L_1}; \quad \Delta_2 = \frac{\rho L_3}{\Delta} + \rho C_2 + \frac{1}{\rho L_1};$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{\Delta}(\rho L_2 + \rho L_3 - 2\rho M) + \rho C_3; \quad \Delta_4 = \frac{\rho L_2}{\Delta} + \rho C_4 + \frac{1}{\rho L_4};$$

$$\Delta_5 = \frac{1}{\rho L_4} + G.$$

16.

- 16.1. Искомый U -граф схемы рис. 16.5 изображен на рис. Р.16.1. Воспользовавшись формулой Мэсона, получим

$$U_2 = \frac{-\frac{\mathcal{E}}{Z_1}}{1 - \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + 1\right)} = \frac{\mathcal{E} Z_2 Z_3}{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2}.$$

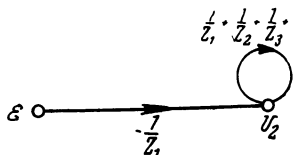


Рис. Р.16.1

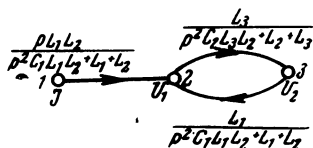


Рис. Р.16.2

Теперь решим задачу, не прибегая к графам. Применяя хорошо известные формулы последовательного и параллельного соединения сопротивлений, получаем

$$U_2 = \frac{\mathcal{E}}{\frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} + Z_1} \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{\mathcal{E} Z_2 Z_3}{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2}.$$

Ответы, конечно, совпадают.

- 16.3. Для электрической цепи рис. 14.20 построены I -граф и U -граф (рис. Р.14.11). Как видно из сравнения рисунков, в данном случае U -граф оказывается проще, следовательно, входную проводимость целесообразно определять по схеме рис. 16.1в. Для этого к узлу I графа необходимо присоединить источник тока с передачей $\frac{1}{Y_{11}}$, где Y_{11} — элемент матрицы узловых проводимостей. Наличие этой передачи объясняется тем, что на рис. Р.14.11б изображен нормализованный граф.

Граф с присоединенным источником изображен на рис. Р.16.2. По ф-ле (16.4)

$$Z_{\text{вх}} = N_{ki}, \quad Y_{\text{вх}} = \frac{1}{Z_{\text{вх}}} = \frac{1}{N_{ki}}.$$

Здесь $\kappa=2$, а $i=1$.

По формуле Мэсона

$$\begin{aligned} Y_{\text{вх}} &= \frac{1}{N_{ki}} = \frac{1 - \frac{L_1 L_3}{(\rho^2 C_1 L_1 L_2 + L_1 + L_2)(\rho^2 C_2 L_2 L_3 + L_2 + L_3)}}{\frac{\rho L_1 L_2}{\rho^2 C_1 L_1 L_2 + L_1 + L_2}} = \\ &= \frac{(\rho^2 C_1 L_1 L_2 + L_1 + L_2)(\rho^2 C_2 L_2 L_3 + L_2 + L_3) - L_1 L_3}{\rho L_1 L_2 (\rho^2 C_2 L_2 L_3 + L_2 + L_3)} = \\ &= \frac{\rho^4 C_1 L_1 L_2^2 C_2 L_3 + \rho^2 [C_1 L_1 L_2 (L_2 + L_3) + C_2 L_2 L_3 (L_1 + L_2)] + L_1 L_2 + L_2^2 + L_2 L_3}{\rho L_1 L_2 (\rho^2 C_2 L_2 L_3 + L_2 + L_3)}. \end{aligned}$$

● 16.4. Учитывая, что в схему включен источник напряжения, удобнее воспользоваться I -графом. Этот граф изображен на рис. P.14.10а. По ф-ле (16.3)

$$Y_{\text{вх}} = N_{ki}.$$

В нашем случае $k=1$ и $i=4$.

Передачу N_{ki} -графа будем искать по формуле Мэсона. Для упрощения выкладок сначала нормализуем графом ненормализованный I -граф. С точки зрения начертания это равносильно устранению петель в узлах.

В соответствии с ф-лой (11.6) записываем матрицу $[A_H]$ нормализованного графа:

$$[A_H] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{p^2 L_1 C_1 + 1}{p^2 L_2 C_1 + p R C_1 + 1} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{p^2 L_2 C_1}{p^2 L_2 C_1 + p R C_1 + 1} \\ 0 & \frac{p^2 L_2 C_2}{p^2 L_2 C_2 + 1} & 0 \end{bmatrix}$$

Теперь запишем передачу графа и, следовательно, $Y_{\text{вх}}$ в общем виде:

$$Y_{\text{вх}} = N_{14} = \frac{a_{14} (1 - a_{23} a_{34})}{1 - a_{12} a_{21} - a_{23} a_{32}},$$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{1}{Y_{\text{вх}}} = \frac{1 - a_{12} a_{21} - a_{23} a_{32}}{a_{14} (1 - a_{23} a_{34})}.$$

Здесь передачи ветвей a_{ik} являются элементами нормализованной матрицы $[A_H]$. Подставляя в последнее выражение значения передач ветвей, получаем окончательное выражение для $Z_{\text{вх}}$:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{1 - \frac{p^4 L_2^2 C_1 C_2}{(p^2 L_2 C_1 + p R C_1 + 1)(p^2 L_1 C_1 + 1)(p^2 L_2 C_1 + p R C_1 + 1)(p^2 L_2 C_2 + 1)}}{\frac{p C_1}{p^2 L_1 C_1 + 1} \left[1 - \frac{p^4 L_2^2 C_1 C_2}{(p^2 L_2 C_1 + p R C_1 + 1)(p^2 L_2 C_2 + 1)} \right]}$$

$$= \frac{(p^2 L_2 C_1 + p R C_1 + 1)(p^2 L_1 C_1 + 1)(p^2 L_2 C_2 + 1) - (p^2 L_2 C_2 + 1) - p^4 L_2 C_1 C_2 (p^2 L_1 C_1 + 1)}{p C_1 (p^2 L_2 C_1 + p R C_1 + 1)(p^2 L_2 C_2 + 1) - p^5 C_1^2 L_2^2 C_2}$$

$$= \frac{p^4 R C_1^2 C_2 L_1 L_2 + p^3 (L_1 L_2 C_1^2 + L_1 L_2 C_1 C_2) + p^2 (R C_1^2 L_1 + R C_1 C_2 L_2) + p^3 C_1^2 R L_2 C_2 + p^2 (C_1^2 L_2 + C_1 C_2 L_2) + p (L_2 C_1 - L_1 C_1) + R C_1}{+ p R C_1^2 + C_1} \rightarrow$$

Из схемы рис. 14.18 видно, что при $p \rightarrow \infty$ $Z_{\text{вх}} \rightarrow \infty$ и при $p=0$ $Z_{\text{вх}} = R$. Эти же результаты дает и найденное выражение для $Z_{\text{вх}}$.

● 16.5. Электронному двухполоснику соответствует U -граф (рис. O.15.7). Для определения входного сопротивления двухполосника следует пользоваться схемой рис. 16.1в. Для этого к имеющемуся графу необходимо присоединить источник тока с передачей -1 (рис. P.16.3). По ф-ле (16.4):

$$Z_{\text{вх}} = N_{ki},$$

$$Z_{\text{вх}} = N_{31} = \frac{-[1 - (G + G_{i2} + 1)]}{1 - (G_{i1} + 1) - (G + G_{i2} + 1) - S_2 S_1 + (G_{i1} + 1)(G + G_{i2} + 1)}$$

$$= \frac{G + G_{i2}}{G_{i1} G + G_{i1} G_{i2} - S_1 S_2}.$$

Очевидно, если $S_1 S_2 > G_{i1}(G + G_{i2})$, то $Z_{вх} < 0$.

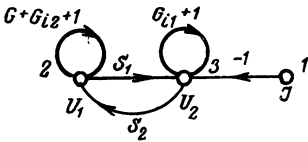


Рис. P.16.3

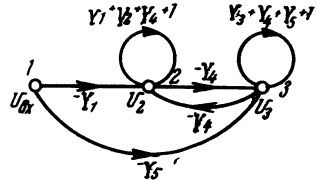


Рис. P.16.4

● 16.6. Так как четырехполосник рис. 16.6 имеет неуровненную структуру, для определения N_U удобно воспользоваться U -графом, выбрав в качестве базисного общий узел входа и выхода. При построении U -графа на вход четырехполосника следует включить источник напряжения $U_{вх}$ (рис. P.16.4). По ф-ле (16.7)

$$N_U = N_{\kappa i}$$

Передачу $N_{\kappa i}$ найдем, как обычно, по формуле Мэсона. В данном случае $\kappa=3$ и $i=1$:

$$N_U = N_{31} = \frac{Y_1 Y_4 - Y_5 (1 - Y_1 - Y_2 - Y_4 - 1)}{1 - (Y_1 + Y_2 + Y_4 + 1) - (Y_3 + Y_4 + Y_5 + 1) - Y_4^2 + (Y_1 + Y_2 + Y_4 + 1)(Y_3 + Y_4 + Y_5 + 1)} \rightarrow$$

$$= \frac{Y_1 Y_4 + Y_1 Y_5 + Y_2 Y_5 + Y_4 Y_5}{Y_1 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_1 Y_5 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_2 Y_5 + Y_4 Y_3 + Y_4 Y_5}$$

● 16.8. В данном случае четырехполосник имеет уравненную схему, поэтому наиболее целесообразно для нахождения N_U и N_X использовать I -граф. Перед построением I -графа следует мысленно подключить ко входу четырехполосника источник напряжения $U_{вх}$, а к выходу — нагрузку Z_H (рис. P.16.5a) и строить I -граф для этой схемы. Матрица $[A]$ этого графа имеет вид

$$[A] = \begin{bmatrix} Z_1 + 1 & -Z_1 & 0 & 0 & 1 \\ -Z_1 & Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_6 + 1 & -Z_2 & 0 & 0 \\ 0 & -Z_2 & Z_2 + Z_3 + Z_5 + Z_7 + 1 & -Z_3 & 0 \\ 0 & 0 & -Z_3 & Z_3 + Z_H + 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Соответствующий этой матрице I -граф изображен на рис. P.16.5б.

Для удобства вычислений нормализуем указанный граф. Нормализованная матрица передач имеет вид

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{Z_1} \\ \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_6} & 0 & \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_5 + Z_7} & 0 & \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3 + Z_5 + Z_7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Z_3}{Z_2 + Z_H} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

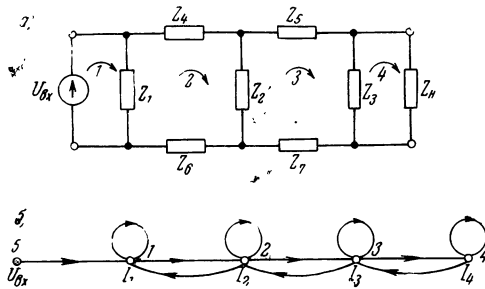


Рис. P.16.5

При вычислении передач графа не следует принимать теперь в расчет петли при вершинах. Определим сначала по ф-ле (16.9) передаточную проводимость N_Y :

$$N_Y = N_{\kappa i}$$

Здесь $\kappa=4$, а $i=5$.

В общем виде

$$N_Y = N_{45} = \frac{a_{15}a_{21}a_{32}a_{43}}{1 - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - a_{34}a_{43} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}}$$

Подставив в это выражение значения передач ветвей, получим

$$\begin{aligned}
 N_Y &= \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{Z_1(Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_6)(Z_2 + Z_3 + Z_5 + Z_7)(Z_3 + Z_H)} \rightarrow \\
 &= \frac{1 - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_6} - \frac{Z_2^2}{(Z_2 + Z_3 + Z_5 + Z_7)(Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_6)}}{\frac{Z_3^2}{(Z_2 + Z_3 + Z_5 + Z_7)(Z_3 + Z_H)} + \frac{Z_1 Z_3^2}{(Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_6)(Z_2 + Z_3 + Z_5 + Z_7)(Z_3 + Z_H)}} = \\
 &= \frac{Z_2 Z_3}{(Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_6)(Z_2 + Z_3 + Z_5 + Z_7)(Z_3 + Z_H) - Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_5 + Z_7)(Z_3 + Z_H) -} \rightarrow \\
 &\quad \rightarrow - Z_2^2(Z_3 + Z_H) - Z_3^2(Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_6) + Z_1 Z_3^2 = \\
 &= \frac{Z_2 Z_3}{Z_4 Z_2 Z_3 + Z_4 Z_2 Z_H + Z_4 Z_5 Z_3 + Z_4 Z_5 Z_H + Z_4 Z_6 Z_3 + Z_4 Z_6 Z_H + Z_4 Z_7 Z_3 + Z_4 Z_7 Z_H + Z_2 Z_5 Z_3 +} \rightarrow \\
 &\quad \rightarrow + Z_2 Z_5 Z_H + Z_2 Z_6 Z_3 + Z_2 Z_6 Z_H + Z_2 Z_7 Z_3 + Z_2 Z_7 Z_H + Z_6 Z_2 Z_3 + Z_6 Z_2 Z_H + Z_6 Z_5 Z_3 + Z_6 Z_5 Z_H +} \rightarrow \\
 &\quad \rightarrow + Z_6 Z_6 Z_3 + Z_6 Z_6 Z_H
 \end{aligned}$$

Коэффициент передачи напряжения N_U легко определяется по ф-ле (16.5):

$$\begin{aligned}
 N_U &= Z_H N_Y / Z_H \rightarrow \infty = \\
 &= \frac{Z_2 Z_3}{Z_4 Z_5 + Z_4 Z_3 + Z_4 Z_7 + Z_2 Z_5 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_7 + Z_6 Z_2 + Z_6 Z_5 + Z_6 Z_3 + Z_6 Z_7 + Z_4 Z_3}
 \end{aligned}$$

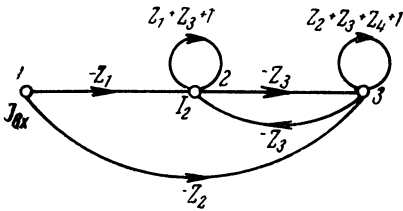


Рис. P.16.6

● 16.10. В данном случае необходимо определить N_I , следовательно, имеет смысл построить I -граф. При этом согласно схеме табл. 10.1 закорачиваем выходные зажимы, а во входной контур включаем источник тока; I -граф такой схемы изображен на рис. P.16.6. Передачу N_I находим по ф-ле (16.9):

$$N_I = N_{\kappa i}.$$

В данном случае $\kappa=2$ и $i=1$:

$$N_I = N_{21} = \frac{-Z_1[1-(Z_2+Z_3+Z_4+1)]+Z_2Z_3}{1-(Z_1+Z_3+1)-(Z_2+Z_3+Z_4+1)-Z_3^2+(Z_1+Z_3+1)(Z_2+Z_3+Z_4+1)} = \frac{Z_1(Z_2+Z_3+Z_4)+Z_2Z_3}{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_1Z_4+Z_3Z_2+Z_3Z_4}.$$

● 16.12. Передачи N_Z и N_I можно найти как при помощи U -графа, так и при помощи I -графа. Выбор типа графа определяется его простотой. Очевидно, что в

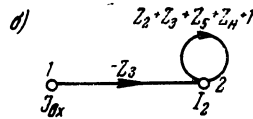
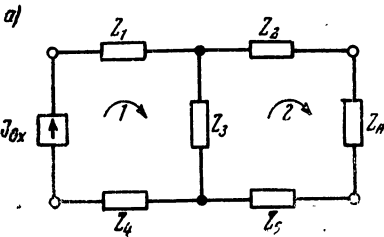


Рис. P.16.7

данном случае проще I -граф, так как схема после подключения к ее входу источника тока, а к выходу — нагрузки (рис. P.16.7a) будет иметь лишь два контура против пяти узлов; I -граф четырехполюсника изображен на рис. P.16.7б. По ф-ле (16.11)

$$N_Z = Z_{\Pi} N_{\kappa i}.$$

Здесь $\kappa=2$ и $i=1$:

$$N_Z = \frac{Z_{\Pi} Z_3}{Z_2 + Z_3 + Z_5 + Z_{\Pi}}.$$

Для определения N_I необходимо N_Z разделить на Z_{Π} , а затем положить $Z_{\Pi}=0$ [ф-ла (16.6)]:

$$N_I = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3 + Z_5}$$

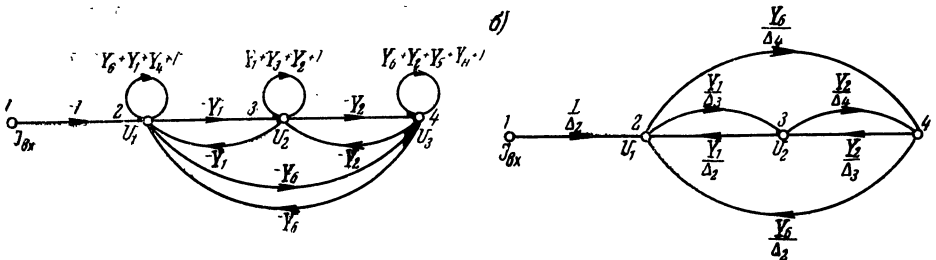


Рис. P.16.8

● 16.13. В данном случае U -граф проще I -графа, так как схема содержит (после включения источника тока и нагрузки) пять контуров и три узла.

Ненормализованный U -граф четырехполюсника изображен на рис. Р.16.8а. Нормализованный для удобства вычислений граф изображен на рис. Р.16.8б. Здесь приняты следующие обозначения:

$$\Delta_2 = Y_1 + Y_4 + Y_6; \quad \Delta_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3; \quad \Delta_4 = Y_2 + Y_5 + Y_6 + Y_H.$$

По ф-ле (16.12)

$$N_Z = N_{кл}.$$

Здесь $\kappa=4$ и $i=1$.

В общем виде:

$$\begin{aligned} N_Z = N_{41} &= \frac{\frac{Y_1 Y_2}{\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4} + \frac{Y_6}{\Delta_2 \Delta_4}}{1 - \frac{Y_1^2}{\Delta_2 \Delta_3} - \frac{Y_2^2}{\Delta_3 \Delta_4} - \frac{Y_6^2}{\Delta_2 \Delta_4} - \frac{Y_1 Y_2 Y_6}{\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4} - \frac{Y_1 Y_2 Y_6}{\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4}} = \\ &= \frac{Y_1 Y_2 + Y_6 \Delta_3}{\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 - Y_1^2 \Delta_4 - Y_2^2 \Delta_2 - Y_6^2 \Delta_3 - 2Y_1 Y_2 Y_6}. \end{aligned}$$

Подставив в это выражение значения Δ , получим окончательный ответ:

$$\begin{aligned} N_Z &= \frac{Y_1 Y_2 + Y_6 (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{Y_1 Y_4 Y_6 + Y_1 Y_3 Y_6 + Y_3 Y_4 Y_6 + Y_2 Y_4 Y_6 + Y_1 Y_2 Y_4 + Y_2 Y_3 Y_6 + Y_1 Y_3 Y_2 + \rightarrow \\ &\rightarrow + Y_2 Y_3 Y_4 + Y_1 Y_5 Y_6 + Y_1 Y_4 Y_5 + Y_3 Y_5 Y_6 + Y_1 Y_3 Y_5 + Y_3 Y_4 Y_5 + Y_2 Y_5 Y_6 + \rightarrow \\ &\rightarrow + Y_1 Y_2 Y_5 + Y_2 Y_4 Y_5 + Y_H (Y_1 Y_6 + Y_1 Y_4 + Y_3 Y_6 + Y_1 Y_3 + Y_3 Y_4 + Y_2 Y_6 + Y_1 Y_2 + Y_2 Y_4)}. \end{aligned}$$

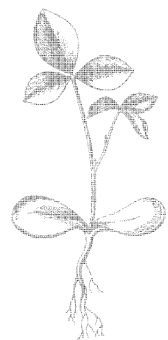
Передача N_I находится по ф-ле (16.6):

$$N_I = \frac{Y_1 Y_2 + Y_6 (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{Y_1 Y_6 + Y_1 Y_4 + Y_3 Y_6 + Y_1 Y_3 + Y_3 Y_4 + Y_2 Y_6 + Y_1 Y_2 + Y_2 Y_4}.$$

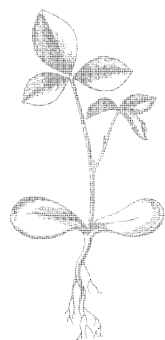
● 16.14. Схема усилителя (рис. 15.6) представляет собой неуравновешенный четырехполюсник. Коэффициент усиления напряжения совпадает по определению с N_U . Для определения неуравновешенных цепей удобно пользоваться U -графом (рис. Р.15.4). Узел I является узлом-источником, следовательно, $N_U = N_{21}$:

$$\begin{aligned} N_U = N_{21} &= \frac{S [1 - (G_\kappa + G_I + S + 1)] + S (S + G_I)}{1 - (G_a + G_i + 1) - (G_\kappa + G_I + S + 1) - G_i (S + G_i) + (G_a + G_I + 1)(G_\kappa + G_I + S + 1)} = \\ &= \frac{-S G_\kappa}{G_a G_\kappa + G_I G_\kappa + G_a G_I + G_a S}. \end{aligned}$$

Ответ представляет собой хорошо известную формулу.



ОТВЕТЫ



1.

1.3. а) $K(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega RC}$, $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$, $\operatorname{tg} \varphi = -\omega RC$;

б) $K(i\omega) = \frac{1}{1-i\frac{R}{\omega L}}$, $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}}$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\omega L}$;

в) $K(i\omega) = \frac{1}{1+i\frac{\omega L}{R}}$, $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$, $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega L}{R}$;

1.8. а) $Z(i\omega) = R + \frac{1}{i\omega C}$, $Z(\omega) = R \sqrt{1+\left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega CR}$;

б) $Z(i\omega) = R + i\omega L$, $Z(\omega) = R \sqrt{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$,

в) $Z(i\omega) = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$, $Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$,

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}$,

г) положив $C_1 + C_2 = C$, приводим схему к схеме рис. 1.7в;

д) $Z(i\omega) = \frac{R}{1+i\omega CR}$, $Z(\omega) = \frac{R}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}}$, $\operatorname{tg} \varphi = -\omega CR$;

е) $Z(i\omega) = \frac{i\omega L}{1+i\frac{\omega L}{R}}$, $Z(\omega) = \frac{\omega L}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\omega L}$;

ж) $Z(i\omega) = \frac{i\omega L}{1-\omega^2 LC + i\frac{\omega L}{R}}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1-\omega^2 LC}{\frac{\omega L}{R}}$,

$Z(\omega) = \frac{\omega L}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$.

1.11. 1) $\dot{U}_2 \rightarrow U_1 = 0$ при $\omega L < \frac{1}{\omega C}$;

$\Phi_{\dot{U}_2 \rightarrow U_1} = \pm \pi^1$ при $\omega L > \frac{1}{\omega C}$;

2) $\Phi_{U_1 \rightarrow I} = -\frac{\pi}{2}$ при $\omega L < \frac{1}{\omega C}$;

$\Phi_{U_1 \rightarrow I} = \frac{\pi}{2}$ при $\omega L > \frac{1}{\omega C}$.

Фазовые характеристики изображены на рис. О.1.1.

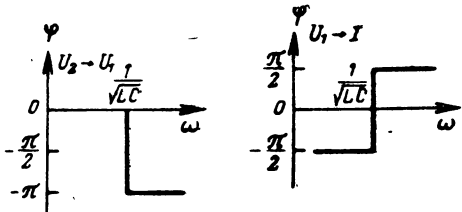


Рис. О.1.1

¹⁾ Выбор знака является условным, так как в установившемся режиме этот знак значения не имеет.

1.12. В выражение для коэффициента передачи

$$K(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC}$$

емкость C_1 не входит. Физически ясно, что напряжение на зажимах генератора равно напряжению на конденсаторе.

$$1.13. K(i\omega) = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

$$1.15. f_0 = \frac{1}{2\pi(R_1 R_2 C_1 C_2)};$$

$$K(f_0) = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{f=f_0} = \frac{R_2 C_1}{R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2}.$$

$$1.18. A(\omega) = \ln \frac{x_2}{x_1};$$

$$\psi(\omega) = \varphi_{x_2 \rightarrow x_1}(\omega).$$

1.21. Дифференцирование фазо-частотной характеристики, представленной в виде степенного ряда, приводит к указанному утверждению.

$$1.22. \tau = \frac{R_1 C \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + (\omega C R_1)^2}.$$

$$1.23. \tau = \frac{2}{\omega_c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}.$$

$$1.24. \tau = 4 \frac{L}{R} \frac{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4 \frac{L}{R^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

| | | | | | | | | | | |
|-------------------------------|---|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| $\frac{U_1}{U_2}$ в числах | 1 | 10 | 10 ² | 10 ³ | 10 ⁴ | 10 ⁵ | 10 ⁶ | 10 ⁻¹ | 10 ⁻² | 10 ⁻³ |
| $\ln \frac{U_1}{U_2}$, неп | 0 | 2,3 | 4,6 | 6,9 | 9,2 | 11,5 | 13,8 | -2,3 | -4,6 | -6,9 |
| $20 \lg \frac{U_1}{U_2}$, дб | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | -20 | -40 | -60 |

$$1.27. 1) \frac{U_1}{U_2} = 1,162 \text{ (плюс 1 дб);}$$

$$2) \frac{U_1}{U_2} = 0,892 \text{ (минус 1 дб).}$$

1.28. 1) 0,068 неп; 2) 0,59 дб.

1.29. 10,5%.

1.30. -3 дб; -0,346 неп.

1.33. $6 \frac{\partial \delta}{\partial \omega}$; $20 \frac{\partial \delta}{\partial \omega}$.

1.36. 1) $\ln K_0 - \ln \omega T_0 - \ln \sqrt{1 + (\omega T_1)^2}$;

2) $-\ln \omega T_0 - \ln \sqrt{1 + (\omega T_1)^2} + \ln \sqrt{1 + (\omega T_2)^2}$;

3) $\ln K_0 - \ln \omega T_0 - \ln \sqrt{1 + (\omega T_1)^2} + \ln \sqrt{1 + (\omega T_2)^2}$.

Характеристики, аппроксимированные ломаными, даны на рис. О.1.2 жирными линиями.

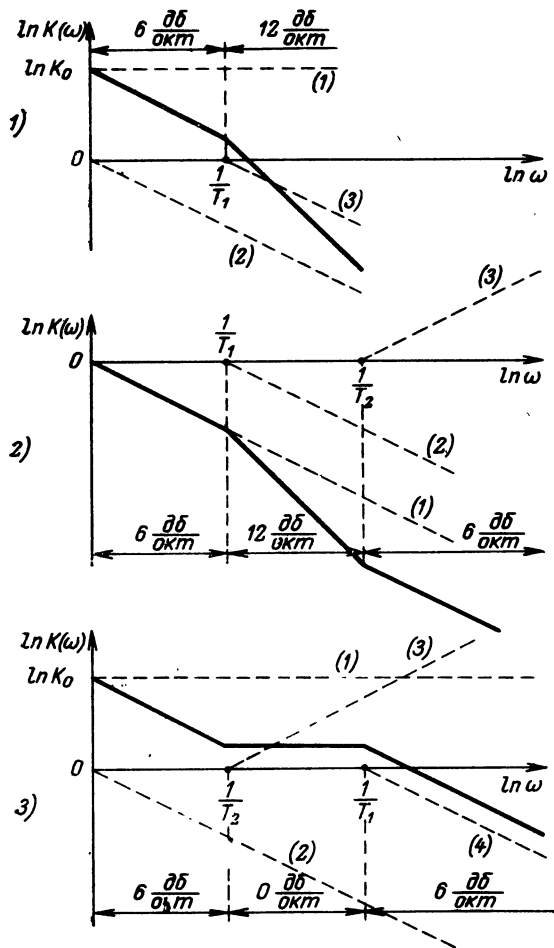


Рис. О.1.2

1.38.

- 1) $K_2 = -\sqrt{K_1(1-K_1)}$; годограф изображен на рис. О.1.3;
- 2) Годограф соответствует рис. Р.1.8, но $T=RC$;
- 3) Годограф соответствует рис. О.1.3.

1.42. Годограф изображен на рис. О.1.4.

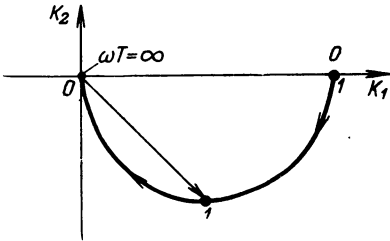


Рис. О.1.3

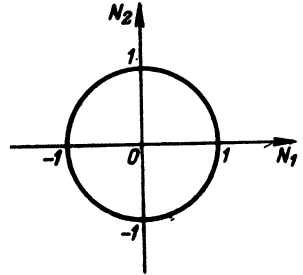


Рис. О.1.4

1.44. Уравнение годографа:

$$N_2 = 4 \sqrt{3 \left(1 \pm \sqrt{\frac{N_1 + 2}{3}} \right) \left[1 - 3 \left(1 \pm \sqrt{\frac{N_1 + 2}{3}} \right) \right]};$$

$$N_1(\omega) = 1 - 6\omega^2 T^2 + \omega^4 T^4; \quad N_2(\omega) = 4\omega T(1 - \omega^2 T^2).$$

График годографа изображен на рис. О.1.5.

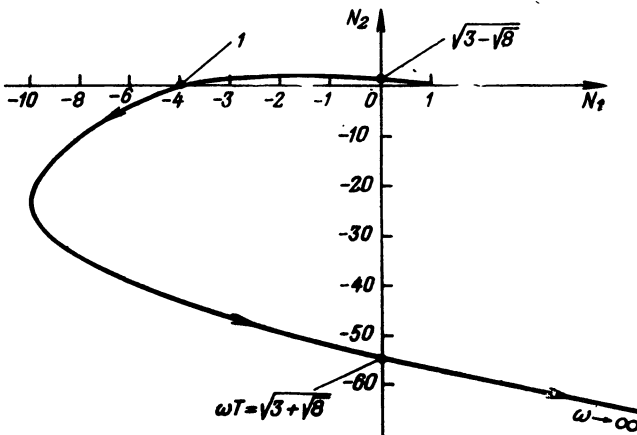


Рис. О.1.5

2.

2.3. Ответ см. в табл. 2.3.

$$2.5. Z_{11} = Z_1 + Z_2; Z_{12} = -Z_2; Z_{21} = Z_2; Z_{22} = -(Z_2 + Z_3);$$

$$Y_{11} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}; \quad Y_{12} = -\frac{Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3};$$

$$Y_{21} = \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}; \quad Y_{22} = -\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3};$$

$$H_{11} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}; \quad H_{12} = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}; \quad H_{21} = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3};$$

$$H_{22} = -\frac{1}{Z_2 + Z_3};$$

$$F_{11} = \frac{1}{Z_1 + Z_2}; \quad F_{12} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad F_{21} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2};$$

$$F_{22} = -\frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2};$$

$$B_{11} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2}; \quad B_{12} = -\frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2}; \quad B_{21} = -\frac{1}{Z_2};$$

$$B_{22} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}.$$

2.7. 1) $A_{11} = 0,875 + i0,0628$; 2) $A_{11} = -1,11 - i0,604$; 3) $A_{11} = 3,91 + i0,926$;
 $A_{12} = 17,5 + i38,1$; $A_{12} = -4830 + i900$; $A_{12} = 391 + i193$;
 $A_{21} = i0,00628$; $A_{21} = 10^{-4}(0,756 - i2,64)$; $A_{21} = 0,0092 - i0,029$;
 $A_{22} = 0,875 + i0,0628$. $A_{22} = -1,11 - i0,604$. $A_{22} = 1,92 - i2,9$.

2.9.

| Параметры | Коэффициенты | | | |
|-----------|---------------|-------------|--------------------------|---------------|
| | A_{11} | A_{12} | A_{21} | A_{22} |
| а | 1 | $10 + i20$ | $\frac{1}{50}(1 - i2)$ | 2 |
| б | 0,75 | $7,5 + i10$ | $i\frac{1}{40}$ | $1 + i0,25$ |
| в | $0,5 + i0,25$ | $10 + i20$ | $\frac{1}{160}(-1 + i6)$ | $0,5 + i0,25$ |
| г | $1 - i$ | $80 - i10$ | $-0,1i$ | $4(1 - i)$ |

$$2.11. Z_{11} = (10 - i 140) \text{ } \Omega\text{M}; \quad Y_{11} = (10 - i 18,3) 10^{-3} \frac{1}{\Omega\text{M}};$$

$$Z_{12} = i 160 \text{ } \Omega\text{M}; \quad Y_{12} = (-10 + i 21,7) 10^{-3} \frac{1}{\Omega\text{M}};$$

$$Z_{21} = -i 160 \text{ } \Omega\text{M}; \quad Y_{21} = (10 - i 21,7) 10^{-3} \frac{1}{\Omega\text{M}};$$

$$Z_{22} = (-10 + i 140) \text{ } \Omega\text{M}; \quad Y_{22} = (-10 + i 18,3) 10^{-3} \frac{1}{\Omega\text{M}}.$$

$$2.16. \text{ch } g = A_{11}; \quad \text{ch}(b + i a) = \text{Re } A_{11} + i \text{Im } A_{11};$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ch } b \cdot \cos a &= \text{Re } A_{11} \\ \text{sh } b \sin a &= \text{Im } A_{11} \end{aligned} \right\}.$$

$$2.17. 1) \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch } g & Z_c \text{ sh } g \\ \frac{1}{Z_c} \text{ sh } g & \text{ch } g \end{bmatrix};$$

$$2) \begin{bmatrix} \text{ch } g & Z_c \text{ sh } g \\ \frac{1}{Z_c} \text{ sh } g & \text{ch } g \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \text{ch } mg & Z_c \text{ sh } mg \\ \frac{1}{Z_c} \text{ sh } mg & \text{ch } mg \end{bmatrix}.$$

$$2.19. 1) Z_{\text{BX}} = (23 + i 41,8) \text{ } \Omega\text{M};$$

$$2) Z_{\text{BX}} = (3020 - i 2460) \text{ } \Omega\text{M}.$$

$$1) 12,8 \text{ } \varepsilon; \quad 2) 0,126 \text{ } \varepsilon; \quad 3) 0,32 \text{ } \varepsilon; \quad 4) 0,812 \text{ } \varepsilon.$$

$$2.24. 1) 63 \text{ mA}; \quad 2) 32 \text{ mA}; \quad 3) 310 \text{ mA}.$$

$$2.26. 1) I_1 = 133,5 \text{ mA}; \quad I_2 = 33,3 \text{ mA}; \quad U_2 = 16,7 \text{ } \varepsilon;$$

$$2) I_1 = 45,6 \text{ mA}; \quad I_2 = 5,88 \text{ mA}; \quad U_2 = 29,4 \text{ } \varepsilon;$$

$$3) I_1 = 60 \text{ mA}; \quad I_2 = 20 \text{ mA}; \quad U_2 = 20 \text{ } \varepsilon;$$

$$4) I_1 = 346 \text{ mA}; \quad I_2 = 38,5 \text{ mA}; \quad U_2 = 23,1 \text{ } \varepsilon.$$

$$2.27. U \approx 13,7 \text{ } \varepsilon.$$

$$2.28. U_2 \approx 3,5 \text{ } \varepsilon.$$

$$2.29. 1) K(\omega) = \frac{1}{1 - 3\omega^2 LC + \omega^4 L^2 C^2}; \quad 2) K(\omega) = \frac{\omega^4 L^2 C^2}{1 - 3\omega^2 LC + \omega^4 L^2 C^2}.$$

$$2.30. K(\omega) = \frac{1 - \omega^2 LC_1}{1 - \omega^2 L(C_1 + C_2)}.$$

$$2.31. K(i\omega) = \frac{R - Z_1}{R + Z_1}.$$

$$3.32. K(i\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 LC}.$$

$$2.34. Z_{\text{ЭKB}} = Z_2; \quad L_{\text{ЭKB}} = L.$$

$$2.41. A_{11} = \frac{\omega^3 C^3 R^3 - 5\omega CR - i(6\omega^2 C^2 R^2 - 1)}{\omega^3 C^3 R^3};$$

$$A_{12} = -\frac{4\omega CR + i(3\omega^2 C^2 R^2 - 1)}{\omega^3 C^3 R^2};$$

$$A_{21} = \frac{(3\omega^2 C^2 R^2 - 1) - i 4\omega CR}{\omega^2 C^2 R^3}; \quad A_{22} = \frac{\omega^2 C^2 R^2 - 1 - i 3\omega CR}{\omega^2 C^2 R^2}.$$

$$2.43. \quad K(i\omega) = \frac{1}{1 - 3\omega^2 LC + \omega^4 L^2 C^2 + i \frac{2\omega C - \omega^3 LC^2}{r}}.$$

$$2.44. \quad K(\omega) = \frac{1}{4}; \quad \varphi(\omega) = 2 \operatorname{arctg} \frac{R(1 - \omega^2 LC)}{2\omega L}.$$

3.

3.2.

| № примера | I | X | U_2 | $\varphi_{\dot{U}_2 \rightarrow \dot{U}_1}$ | $\varphi_{\dot{U} \rightarrow I}$ | $ \delta $ |
|-----------|------|-------|-------|---|-----------------------------------|------------|
| | ма | ом | в | град | град | % |
| 1 | 49 | 3,98 | 48,7 | -101°20' | 11°20' | 0,1 |
| 2 | 78,8 | 3,77 | 158 | -98°35' | 8°35' | 0,047 |
| 3 | 16,0 | -34,5 | 17 | -24°50' | -65°10' | 0,8 |
| 4 | 80 | 0,83 | 13,2 | -109°20' | 19°20' | 0,125 |
| 5 | 2,32 | 34 | 2,46 | -142° | 52° | 0,8 |

3.3. 1) $f = (0,75 \cdot 10^6 \pm 1,79 \cdot 10^4)$ гц;

2) $f = (3 \cdot 10^6 \pm 4,7 \cdot 10^4)$ гц;

3) $f = (0,6 \cdot 10^6 \pm 1,73 \cdot 10^4)$ гц;

4) $f = (5 \cdot 10^6 \pm 8,5 \cdot 10^4)$ гц;

5) $f = (3,75 \cdot 10^6 \pm 4,37 \cdot 10^4)$ гц.

3.4. $L = 7,29$ мкгн.

3.5. $Q = 79,2$.

3.7.

| Параметры | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------|------|-----|------|------|------|
| R , ом | 26,6 | — | — | 17,6 | 0,71 |
| L , мкгн | 446 | 212 | 319 | — | 14,1 |
| C , пф | — | 187 | 31,2 | 37,7 | — |

3.11.

| № примера | Значение емкости, пф | Способ включения |
|-----------|----------------------|------------------|
| 1 | 710 | параллельно |
| 2 | 213 | последовательно |
| 3 | 800 | параллельно |
| 4 | 278 | последовательно |
| 5 | 11230 | последовательно |

3.13. $\Delta f = 6,93 \text{ кгц}$; $|\delta| = 7 \cdot 10^{-3} = 0,7\%$; $\varphi_{\dot{U} \rightarrow \dot{I}} = 60^\circ$.

3.14. $X_L = 932 \text{ ом}$; $R = 12,3 \text{ ом}$.

3.15. $f_0 = 460 \text{ кгц}$; $\rho = 1156 \text{ ом}$; $r_L = 14,45 \text{ ом}$;
 $r_c = 1,156 \text{ ом}$; $R = 15,61 \text{ ом}$; $Q = 74$; $U_c = 111 \text{ в}$.

3.17. Искомое отношение равно $\frac{1}{2\pi} Q$.

3.18. $L_{\text{мкГн}} = \frac{25 \ 300}{f_{\text{МГц}}^2 C_{\text{пф}}}$; $C_{\text{пф}} = \frac{25 \ 360}{f_{\text{МГц}}^2 L_{\text{мкГн}}}$.

3.19. $\xi = -Q \frac{\Delta C}{C_0}$.

3.20. $\tau = \frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2}$; $\tau_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{\alpha}$.

3.23. $y_I = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$;

$$y_U = \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$
;

$$\omega_M = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$
.

3.29. $C_0 = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}$; $U_{C_0} = U \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{R} = U \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}$.

3.30. $U_2 = U_1 \frac{\frac{\omega_0}{\omega} Q(1-x)}{\sqrt{1 + Q^2 \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}(1-x)\right]^2}}$.

В окрестности резонанса, т. е. при $\frac{\omega_0}{\omega} \approx 1$,

$$U_2 = U_1 \frac{Q(1-x)}{\sqrt{1 + Q^2 x^2}} = U_1 \frac{1-x}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + x^2}}$$
.

$$3.31. \xi_{\text{пер}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \omega_{\text{пер}} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2\sqrt{2}Q} \right).$$

$$3.32. 2\Delta\omega_0 = 3 \cdot 2\Delta\omega^* = 6\alpha.$$

4.

4.2. 1) 116,5 ком; 2) 35,3 ком; 3) 56,3 ком; 4) 40 ком; 5) 70,4 ком.

4.3. В $Q^* = 4000$ раз.

4.5

| Спротивление контура | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------|-------|------|-------|-------|-------|
| R_{Σ} , ком | 33,1 | 24,9 | 81 | 15,3 | 30,0 |
| X_{Σ} , ком | -62,2 | 8,7 | -40,5 | 11,55 | -19,2 |
| $Z(\omega)$, ком | 70,3 | 26,3 | 90,5 | 19,15 | 35,8 |

4.8. 1. Если $R_i \gg R_{\Sigma}$, изменение емкости C не влияет на полосу пропускания

$$2\Delta\omega^* \cong \frac{R}{L}.$$

2. Если $R_i = R_{\Sigma}$, то $\frac{\Delta\omega_1^*}{\Delta\omega^*} = \frac{3}{2}$.

4.9

| Параметры контура | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------------|-----|------|-----|-----|------|
| L , мкГн | — | 258 | 706 | 141 | — |
| C , пФ | 403 | — | — | — | 27,4 |
| R , ом | 100 | 10,7 | 6,3 | 2,8 | 4,9 |

4.10. $C = 1594$ пФ; $L = 143,5$ мкГн.

4.12. 1) $6,1 \cdot 10^{-2}$ Вт; 2) 2,45 Вт; 3) $6,1 \cdot 10^{-2}$ Вт; 4) 8,46 Вт; 5) 7,26 Вт.

$$4.13. \frac{P_1}{P_2} = \frac{10}{9}.$$

4.14. $C = 750$ пФ; $L = 135$ мкГн;

4.15. $L = 313$ мкГн; $Q = 29,5$; $U_K = 3480$ В; $P_K = 348$ Вт.

4.16. 1) $I = 20,2$ мА; $I_K = 960$ мА; 2) $U_2 = 178,5$ В; 3) $I = 11,1$ мА; 4) $I = 2,66$ мА; 5) $I = 2$ мА; $U_2 = 23$ В; 6) $R_{\Sigma} = 40$ ком; 7) $I_K = 300$ мА.

4.17. $Z_{\text{ВХ}} = 40\,010$ ом.

$$4.20. \quad \omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}}; \quad R_{\alpha} = \frac{L_1}{\left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right)CR}$$

$$4.22. \quad 1) |\delta| = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{2Q^2}; \quad 2) |\delta| = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$4.25. \quad R_0 = \frac{L}{CR_2}$$

$$4.26. \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_2}} \sqrt{1 + \frac{C_2}{C_1}}; \quad R_{\alpha} = \frac{L}{RC_2 \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)}$$

$$4.27. \quad f_{01} = 750 \text{ кГц}; \quad f_{02} = 531 \text{ кГц}$$

$$4.28. \quad f_0 = 17,5 \text{ МГц}; \quad R_{\alpha} = 3,65 \text{ ком}$$

$$4.34. \quad U_{2\text{макс}} = U_1 \frac{Q}{\sqrt{\frac{C_2}{C_1} \left(1 + \frac{C_2}{C_1} - \frac{1}{4Q^2} \frac{C_2}{C_1}\right)}}$$

$$4.35. \quad Z(i\omega) = \frac{(\rho + i\omega L) \left(\rho + \frac{1}{i\omega C}\right)}{2\rho + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\left(\rho^2 + \frac{L}{C}\right) + i\rho\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{2\rho + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \rho$$

$$4.36. \quad f_0 = 5,03 \text{ МГц}; \quad R_{\alpha} = 1,6 \text{ ком}; \quad Q = 20$$

$$4.42. \quad C_A = \frac{C_2^2}{C_1 + C_2}; \quad C_B = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}; \quad L_A = L_1 \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)^2$$

5.

5.2. 1) $M=12 \text{ мкГн}$; 2) $K=31,6\%$, $A=1$; 3) $A=2$; 4) $f=1,99 \text{ МГц}$.

5.3. $K=30\%$; $A=2,5$.

5.4. $A=2,08$.

5.7. $C_{\pi}=20\,000 \text{ пф}$.

5.8. Ответом является рис. О.5.1.

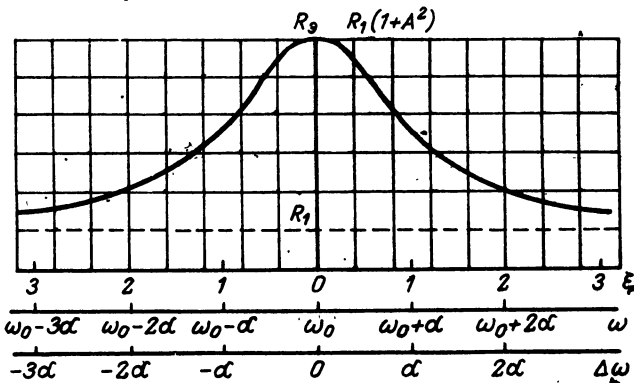


Рис. О.5.1

5.10.

| | | | | | | | |
|-----------------------|-------|-------|----|------|-------|-----|------|
| Входное сопротивление | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $R_3, \text{ ом}$ | 5,82 | 31,1 | 15 | 16 | -16,1 | 78 | 6 |
| $X_3, \text{ ом}$ | -21,7 | -60,9 | 6 | -2,0 | -35,8 | 495 | -757 |

5.12. $R_{AB} = 10,4 \text{ ком.}$

5.22. 1) $f_1 = 500 \text{ кГц}; f_2 = 560 \text{ кГц};$ 2) $f_1 = 1,83 \text{ МГц}; f_2 = 2,2 \text{ МГц.}$

5.27. $M_1 = \frac{R}{\omega_0}; M_2 = \frac{R}{\omega_0} \sqrt{1 + 0,01Q^2}.$

5.29. Ответом являются графики рис. 0.5.2. Характерные точки приводятся в таблице.

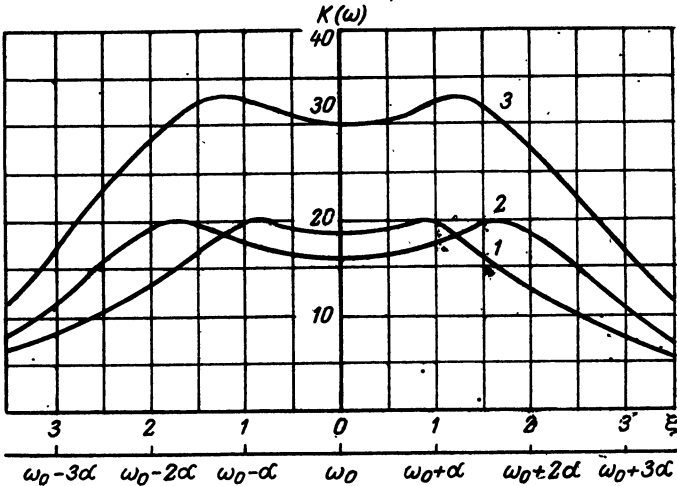


Рис. 0.5.2

| № примера | $K_{\text{макс}}(\omega)$ | $K(\omega_0)$ | $\xi_{1,2}$ |
|-----------|---------------------------|---------------|-------------|
| 1 | 20 | 19,2 | $\pm 0,885$ |
| 2 | 20 | 16 | $\pm 1,73$ |
| 3 | 33,6 | 30 | $\pm 1,28$ |

5.30. $I_1 = 0,85 \text{ а}; I_2 = 2,87 \text{ а}; U_2 = 1720 \text{ в.}$

5.31. $I_x = 8 \text{ а.}$

5.33.

| Параметры контуров | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------------------|------|-------|------|------|------|
| L , мкГн | 141 | 13,3 | 338 | 676 | 169 |
| C , пФ | 125 | 11,7 | 300 | 600 | 150 |
| R , Ом | 3,44 | 1,62 | 10,6 | 11,0 | 10,6 |
| $X_{св}$, Ом | 7,5 | 3,9 | 16,6 | 26,5 | 13,6 |
| M , мкГн | 1 | 0,048 | 5,3 | 16,9 | 2,16 |

5.35. $\Delta\omega^* = \pm 1,41 \alpha$.

5.37. $\Delta\omega^* = \pm 3,1 \alpha$.

5.38. $\Delta\omega^* = \pm \alpha \sqrt{A^2 + 2A - 1}$.

5.39. 1) $2\Delta f = 1,8$ кГц; 2) $2\Delta f = 14,1$ кГц; 3) $2\Delta f = 31$ кГц.

5.41. 1) $U_2 = 4,73$ мВ; 2) $U_2 = 2,12$ мВ.

5.42. 1) $I_2 = 0,325$ А; 2) $Q = 110$.

5.43. 1) $\xi_1 = \frac{A^2}{1 + \xi_2^2} \xi_2$; $X_1 = \frac{X_{св}^2}{Z_2^2} X_2$; 2) $\xi_2 = \frac{A^2}{1 + \xi_1^2} \xi_1$; $X_2 = \frac{X_{св}^2}{Z_2^2} X_1$.

5.45.

| | | |
|---|--------------|------|
| 1 | L_1 , мкГн | 242 |
| | L_2 , мкГн | 218 |
| 2 | C_1 , пФ | 81 |
| | C_2 , пФ | 66,3 |
| 3 | C_1 , пФ | 351 |
| | C_2 , пФ | 177 |

5.46.

| | | |
|---|------------|------|
| 1 | C_1 , пФ | 148 |
| | C_2 , пФ | 126 |
| 2 | C_1 , пФ | 89 |
| | C_2 , пФ | 78,5 |
| 3 | C_1 , пФ | 404 |
| | C_2 , пФ | 252 |

5.48. 1) $C_2 = 1600$ пФ; 2) $X_2 = 4,8$ Ом.

5.49. 1) $A_{опт} = \sqrt{1 + \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2}$; 2) $A_{опт} = \sqrt{1 + \xi^2}$.

5.50. $M_{опт} = 3,55$ мкГн.

5.51. $M_{опт} = 6,9$ мкГн.

5.52. 1) $A_{опт} = \sqrt{1 + \xi_2^2}$; $X_{св. опт} = Z_2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$; $M_{опт} = \frac{Z_2}{\omega} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$;

$$2) A_{\text{опт}} = \sqrt{1 + \xi_1^2}; X_{\text{св. опт}} = Z_1 \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}; M_{\text{опт}} = \frac{Z_1}{\omega} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}.$$

5.53. 1) $X_{\text{св. опт}} = 158 \text{ ом}; C_1 = 2000 \text{ нф}.$

2) $X_{\text{св. опт}} = 47,5 \text{ ом}; X_1 = 34,2 \text{ ом}.$

5.54. $A_{\text{опт}} = 1.$

5.55. $I_{2\text{макс макс}} = 1 \text{ а}.$

5.56. 1) $C_1 = 1600 \text{ нф}; C_2 = 400 \text{ нф}; M_{\text{опт}} = 3,92 \text{ мксн}.$

5.57

| № примера | $P, \text{ вт}$ | $P_2, \text{ вт}$ | $\eta, \%$ | $P_{\text{макс макс}} \text{ вт}$ | $M_{\text{опт}}, \text{ мксн}$ |
|-----------|-----------------|-------------------|------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| 1 | 0,3 | 15,1 | 98 | 500 | 2,64 |
| 2 | 35,8 | 10,7 | 23,1 | 208 | 0,784 |

5.59. $I_1 = 10,25 \text{ а} \quad I_2 = 44,7 \text{ а}.$

5.60. $I_1 = 0,282 \text{ а}.$

5.63. $\tau = \frac{1}{\alpha} \frac{2}{A^2 + 1}.$

6.

1. а) $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}};$

б) $K(\omega) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}};$

в) $K(\omega) = \frac{x}{\sqrt{1 + \left(1 + \frac{R_{\text{ВН}}}{R}\right)^2 x^2}};$

г) $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_{\text{ВН}}}{R}\right)^2 + y^2}};$

д) $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_{\text{ВН}}}{R}\right)^2 + \left(\frac{R_{\text{ВН}}}{R}\right)^2 x^2}}.$

6.3.

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------|-----------|----------|-----------|
| 1,59 мксн | 3,18 мксн | 195 мксн | 14,3 мксн |

6.7.

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|---------|----------|----------|
| 16 мкф | 6,4 мкф | 12,8 мкф | 63,6 мкф |

6.8. 1) $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$;

2) $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left[\left(1 + \frac{R_l}{R}\right) - \omega^2 LC\right]^2 + \left[\omega RC \frac{R_l}{R} + \frac{\omega L}{R}\right]^2}}$

6.9. $K \approx 0,0038$; $K \approx 0,38\%$.

6.13

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| $L = 64 \text{ гн}$ | $C = 50 \text{ мкф}$ | $L = 102 \text{ гн}$ | $C = 203 \text{ мкф}$ |

6.16

| Параметры | 1 | 2 | 3 |
|--------------------|-----|------|-----|
| $L_p, \text{ мГн}$ | 180 | 320 | 300 |
| $C_p, \text{ пф}$ | 25 | 1400 | 210 |

6.18. Ответ дает табл. 6.1.

6.20.

| Параметры | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|------|-------|------|------|-------|
| $L, \text{ гн}$ | 1,06 | 0,105 | 0,64 | 0,04 | 0,016 |
| $C, \text{ мкф}$ | 1,06 | 0,24 | 0,16 | 0,04 | 0,064 |

6.22.

| Результаты вычислений | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------------------------|------|------|------|------|
| $\ln \frac{U_1}{U_2}, \text{ неп}$ | 4,96 | 4,13 | 1,94 | 4,15 |
| $20 \lg \frac{U_1}{U_2}, \text{ дБ}$ | 43,2 | 36 | 16,9 | 36,2 |
| $\frac{U_1}{U_2}$ | 135 | 63 | 6,96 | 65 |

6.25.

| № примера | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------------|----------------|----------------|----------------|------------|
| b_c° | $34^\circ 50'$ | $60^\circ 20'$ | $40^\circ 50'$ | 47° |

6.26. $f = 3420$ гц.

6.29.

| Параметры звена | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------|--------|------|-------|-------|--------|
| L , мгн | 796 | 79,5 | 7,95 | 16 | 39,8 |
| C , мкф | 0,0318 | 0,08 | 0,002 | 0,016 | 0,0016 |

6.30.

| Результаты вычислений | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------------|------|--------|------|------|------------------|
| Затухание, неп | 4,15 | 2,63 | 1,39 | 5,55 | 3,4 ⁸ |
| Затухание, дб | 36 | 22,9 | 12,1 | 48,3 | 29,6 |
| Фазовый угол | 60° | 83°40' | 60° | 39° | 56° |

6.31.

| Результаты вычислений | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| f_a , гц | 9 750 | 4 630 | 12 500 | 6 670 | 1 500 |
| f_b , гц | 26 200 | 19 300 | 28 200 | 12 450 | 15 300 |

6.32.

| Сопротивление | 1 | 2 | 3 |
|---------------|----------|----------|----------|
| Z_c , ом | $i 1730$ | $-i 423$ | $-i 290$ |

6.33. $L_1 = 320$ мгн; $L_2 = 160$ мгн; $C_1 = 0,25$ мкф; $C_2 = 0,5$ мкф.

6.36.

| № примера | f_1 , гц | f_2 , гц | R_0 , ом |
|-----------|------------|------------|------------|
| 1 | 163 | 960 | 400 |
| 2 | 690 | 2570 | 170 |

6.37.

- 1) $C_1 = 14 470$ пф; $C_2 = 0,374$ мкф; $L_1 = 2,335$ гн; $L_2 = 0,0905$ гн;
 2) $C_1 = 0,02$ мкф; $C_2 = 0,25$ мкф; $L_1 = 1$ гн; $L_2 = 0,08$ гн.

$$6.38. \quad Z_c = \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\kappa}}; \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\kappa}}.$$

$$6.39. \quad 1) \text{ Для Г-образной схемы: } \omega_T = 0,63\omega_0; \quad \alpha = 0,78.$$

$$2) \text{ Для П-образной схемы: } \omega_{\Pi} = 0,77\omega_0; \quad \alpha = 1,57.$$

6.40.

$$\tau = \frac{2}{\omega_0}.$$

6.43. Характеристические сопротивления со стороны зажимов 1—1 и 2—2 соответственно равны $Z_{c1}^{(1)}$ и $Z_{c1}^{(4)}$, характеристическая постоянная передачи равна

$$g_c = g_{c1} + g_{c2} + g_{c3}.$$

6.46.

$$Z_{c1} = \frac{\sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}}}{\sqrt{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}}; \quad Z_{c2} = \sqrt{Z_1 Z_2} \sqrt{1 + \frac{Z_1}{Z_2}};$$

$$g_c = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}}.$$

6.48. Заданный четырехполюсник нужно представить в виде согласованного включения двух Г-образных четырехполюсников (рис. О.6.1)

$$Z_{c \text{ вх}} = Z_{c \text{ вых}} = Z_{c1} = Z_{c2} = \sqrt{Z_1 Z_2} \sqrt{1 + \frac{Z_1}{Z_2}};$$

$$g_c = \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}}.$$

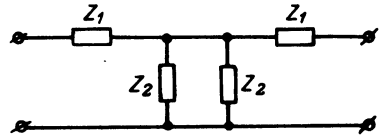


Рис. О.6.1

6.49.

$$Z_c = \sqrt{Z_a Z_b}; \quad g_c = \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_a}{Z_b}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_a}{Z_b}}}.$$

6.51.

$$Z_c = \frac{R_0}{\sqrt{1-\eta^2}}; \quad g_c = \ln \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}} - 1}.$$

6.53.

$$Z_c = \frac{R_0}{\sqrt{1-\eta^2}}; \quad g_c = \ln \frac{\sqrt{1-\frac{1}{\eta^2} + m}}{\sqrt{1-\frac{1}{\eta^2} - m}}$$

6.55. Ответ дан в таблице 6.2.

- 6.57. 1. $\kappa = 0,924$; $R_2 = 974 \text{ ом.}$
 2. $\kappa = 0,916$; $R_2 = 382 \text{ ом.}$
 3. $\kappa = 0,670$; $\Delta a \approx 0,012 \text{ неп.}$
 4. $\kappa = 0,86$ $\Delta a = 0,907 \text{ неп.}$
 5. $\kappa = 0,96$; $R_0 = 415 \text{ ом.}$

6.58. График изображен на рис. 0.6.2.

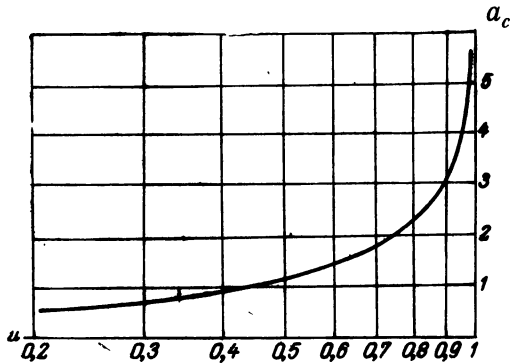


Рис. 0.6.2

6.59.

| № приме- ра | Т-образное звено | | | П-образное звено | | | f_0 гц | R_0 ом | m |
|----------------|----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-------------------|-------------|-----|
| | L_1 , гн | L_2 , гн | C_2 , ф | L_1 , гн | C_1 , ф | C_2 , ф | | | |
| 1 | $19,1 \cdot 10^{-3}$ | 0 | $1,106 \cdot 10^{-6}$ | $38,2 \cdot 10^{-3}$ | 0 | $0,053 \cdot 10^{-6}$ | — | — | — |
| 2 | $24 \cdot 10^{-3}$ | $21,2 \cdot 10^{-3}$ | $0,133 \cdot 10^{-6}$ | — | — | — | — | — | — |
| 3 | — | — | — | $376 \cdot 10^{-6}$ | $3,93 \cdot 10^{-9}$ | $19,4 \cdot 10^{-9}$ | $70,6 \cdot 10^3$ | — | — |
| 4 | — | — | — | — | — | — | 2560 | 1050 | 1 |

6.61. $\kappa = 0,849$; $R_0 = 98 \text{ ом}$; $f_0 = 7,06 \text{ кгц}$; $m_1 = 0,842$; $m_2 = 1$.

6.63. $m_1 = 0,605$; $m_2 = 1$; $L = 23,7 \text{ мгн}$; $C = 0,156 \text{ мкф}$.

6.65. $m_1 = 0,608$; $m_2 = 0,8$; $m_3 = 1$.

6.67. $R_0 = 24,6 \text{ ком}$; $R = 39 \text{ ком}$; $C_1 = 510 \text{ пф}$; $\frac{C_2}{2} = 30,2 \text{ пф}$; $L_1 = 1,02 \text{ мгн}$; $N = 5$.

7.

7.2.

| Параметры | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------------------------------------|------|------|------|------|
| $L_1, \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}$ | 1,95 | 1,84 | 1,32 | 1,86 |
| $C_1, \frac{\text{пФ}}{\text{м}}$ | 5,7 | 6,05 | 8,4 | 5,96 |
| $R_1, \frac{\text{Ом}}{\text{км}}$ | 8,76 | 19,5 | 233 | 304 |

7.4.

$$L_1 = 0,415 \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}; \quad C_1 = 26,7 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}; \quad R_1 = 4,68 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}; \quad G_1 = 0$$

7.5.

| Параметры | 1 | 2 | 3 |
|---|----------------------|-----------------------|-------------------|
| $L_1, \frac{\text{мкГн}}{\text{м}}$ | 0,277 | 0,3 | 0,358 |
| $C_1, \frac{\text{пФ}}{\text{м}}$ | 100 | 92,3 | 31 |
| $R_1, \frac{\text{мКОм}}{\text{м}}$ | $109 \cdot 10^3$ | $25,4 \cdot 10^3$ | $18,8 \cdot 10^3$ |
| $G_1, \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$ | $1,26 \cdot 10^{-6}$ | $0,116 \cdot 10^{-6}$ | 0 |

7.8.

| Результаты вычислений | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|------|-----|------|-----|
| ρ , ом | 503 | 490 | 114 | 217 |
| $\alpha \cdot 10^{-3}$, $\frac{\text{неп}}{\text{км}}$ | 21,7 | 82 | 38,5 | 78 |
| β , $\frac{\text{град}}{\text{м}}$ | 0,72 | 4,5 | 1,44 | 12 |

7.9. $\rho = 49,5$ ом.

7.10 $\alpha = 1,15 \frac{\text{неп}}{\text{км}} = 10 \frac{\partial \delta}{\text{км}}$.

7.11.

1) $|Z_c| = \sqrt{\frac{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}{G_1^2 + \omega^2 C_1^2}}$; $\varphi = \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega(L_1 G_1 - C_1 R_1)}{R_1 G_1 + \omega^2 L_1 C_1}$.

2) $|Z_c| \approx \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \rho$.

3) Условие, при котором $\varphi = 0$; $L_1 G_1 = C_1 R_1$.

4) $\varphi \approx -\frac{1}{2} \frac{\frac{R_1}{\rho} - G_1 \rho}{\beta} \approx -\frac{1}{2} \frac{\frac{R_1}{\rho}}{\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}$.

7.17. $\ln \frac{D}{d} = l + \frac{d}{D} \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}$.

7.18. $\alpha = \frac{1}{2\rho} \cdot 4,16 \left(\frac{1}{r_{1\text{см}}} + \frac{1}{r_{2\text{см}}} \right) \cdot 10^{-6} \sqrt{f} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot 2\pi C_1 \text{tg } \delta f$.

7.21. $\lambda_\lambda = 200$ м.

7.22. $\tau_1 = \sqrt{L_1 C_1} \frac{\text{сек}}{\text{м}}$.

7.24. Для линии с потерями $\gamma = \sqrt{(R_1 + i\omega L_1) \left[G_1 + i \left(\omega C_1 - \frac{1}{\omega L_1} \right) \right]}$.

Для линии без потерь $\gamma = i \sqrt{\omega^2 L_1 C_1 - \frac{1}{L_1}}$.

Распространение возможно при выполнении условия

$$L_1' > \frac{1}{\omega^2 C_1}.$$

7.26.

| № примера | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------|-----|-----|----|-----|
| $U_2, \text{ в}$ | 129 | 388 | 96 | 130 |

7.27. $U_1 = 29,3 \text{ в}$; $I_1 \approx 28 \text{ ма}$.

7.29.

| Результаты вычислений | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------------|------|------|-------|-------|-------|
| $U_1, \text{ в}$ | 5000 | 618 | 177 | 37,1 | 67 |
| $I, \text{ а}$ | 43,5 | 7,32 | 0,353 | 0,475 | 0,297 |

7.30. 1. В точке $y = 0,5 \text{ м}$; $I = 0,173 \text{ а}$. 2. В пучности $I = 0,2 \text{ а}$

7.31. $U = 57 \text{ в}$; $I = 0,336 \text{ а}$.

7.32. $U_1 = 176 \text{ в}$.

$$7.35. \quad U = U_1 \frac{\text{ch } \gamma y + \frac{\rho}{Z_2} \text{sh } \gamma y}{\text{ch } \gamma l + \frac{\rho}{Z_2} \text{sh } \gamma l}; \quad I = \frac{U_1}{Z_2} \frac{\text{ch } \gamma y + \frac{Z_2}{\rho} \text{sh } \gamma y}{\text{ch } \gamma l + \frac{\rho}{Z_2} \text{sh } \gamma l}$$

7.37.

| Результаты вычислений | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------------------------|--------|------|------|------|
| $X_{\text{вх}}, \text{ ом}$ | 21,6 | 586 | -244 | 4530 |
| $C_3, \text{ пф}$ | — | — | 43,5 | — |
| $L_3, \text{ мкгн}$ | 0,0465 | 21,7 | — | 9,02 |

7.38. 1) — 66,6 ом; 2) — 86,6 ом; 3) 1730 ом.

7.40.

| № примера | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------------|------|------|-------|----|
| $y, \text{ м}$ | 26,3 | 0,22 | 0,374 | 10 |

7.42.

| № примера | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------|-------|-------|-----|------|
| $X_{вх}, ом$ | -14,7 | -33,1 | -65 | -116 |

7.43. 1) $l_{кз} = \frac{1}{20} м$; $l_{кз} = \frac{1}{8} λ$; 2) $l_{хх} = \frac{3}{20} м$; $l_{хх} = \frac{3}{8} λ$.

7.46.

| № примера | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------|----------|----------|----------|----------|
| $Z_{вх}, ом$ | $-i 138$ | $i 2165$ | $-i 230$ | $-i 423$ |

7.49. 1) Емкостный; 2) емкостный.

7.56. $l = 1,4 м$; $l_{ш} = 11 м$.

7.57. $Q = 3590$.

7.59. $Q = 3770$.

7.60. $r_2 = 1,1 см$.

7.61. $Q \approx 0,3 \sqrt{f} \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\left(\frac{1}{r_{1см}} + \frac{1}{r_{2см}} \right)}$.

7.62. $Q \approx 3800$.

7.63. $Z(\omega_0) = \frac{2\rho^2}{R}$.

7.64. $Z(\omega_0) \approx 14\,000 ом$.

7.65. 1) $L_k = \frac{4}{\pi} \frac{\rho}{\omega_0}$; 2) $C_k = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\rho \omega_0}$; 3) $R_k = \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 R_1 \frac{l}{2}$.

7.67.

| № примера | 1 | 2 | 3 |
|--------------|---------------|--------------|---------------|
| $Z_{вх}, ом$ | $500 + i 110$ | $420 + i 90$ | $898 + i 180$ |

7.70. $R_1 = 150 ом$; $R_2 = 100 ом$.

7.72. $\delta = 0,069$.

7.76. $n \cong 80\%$.

7.77. $U_1 = 20 в$; $P_2 = 2 вт$.

7.78. $P_2 = 362 вт$; $U_2 = 602 в$; $I_2 = 1,2 а$; $\eta = 0,905$; $U_1 = 633 в$.

7.79. $\eta = 0,75$.

7.80. 1) $P_1 = 7,95 \text{ вт}$;

3) $I_2 = 0,266 \text{ а}$;

4) $U_2 = 520 \text{ в}$;

$\eta = 0,905$.

2) $P_1 = 1,44 \text{ мквт}$; $\eta = 0,96$;

$P_2 = 5,48 \text{ вт}$; $\eta = 0,677$;

$I_2 = 1,73 \text{ а}$. $P_2 = 452 \text{ вт}$.

8.

8.3.

| № примера | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----------------------------|------------|----|---------------|--------------|----------|---------|
| $Z_{\text{вх}}, \text{ ом}$ | $30 - i 6$ | 42 | $352 - i 176$ | $90 + i 120$ | ∞ | $-i 99$ |

8.4.

| № примера | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------------------|-------------|------|---------------|------|-------|
| $Z_{\text{вх}}, \text{ ом}$ | $59 - i 90$ | 2100 | $220 + i 176$ | 49,5 | i 500 |

8.6.

| № примера | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------------|---------------|------------|--------------|--------------|-----|
| $Z_{\text{н}}, \text{ ом}$ | $312 - i 360$ | $70 + i 8$ | $182 - i 52$ | $180 + i 24$ | 350 |

8.8.

| № примера | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------------|-------------|----------------|------------------|-----|-----|
| $Z_{\text{н}}, \text{ ом}$ | $30 - i 82$ | $180 - i 52,5$ | $76,5 - i 103,5$ | 130 | 560 |

8.10.

| № примера | 1 | 2 | 4 | 5 |
|----------------------------|---------------|------------------|---------------|-----------------|
| $Z_{\text{н}}, \text{ ом}$ | $384 + i 264$ | $116,4 + i 26,4$ | $280 - i 920$ | $49,5 - i 52,5$ |

9.

9.4. Искомая схема изображена на рис. 0.9.1.

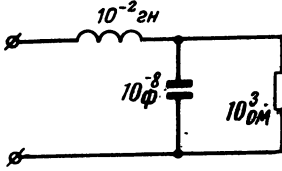


Рис. 0.9.1

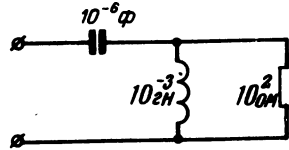


Рис. 0.9.2

9.5. Искомая схема изображена на рис. 0.9.2.

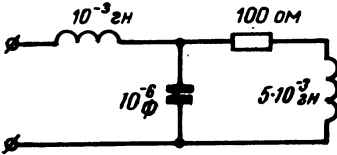


Рис. 0.9.3

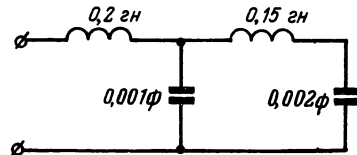


Рис. 0.9.4

9.7. Искомая схема изображена на рис. 0.9.3.

9.12. Искомая схема изображена на рис. 0.9.4.

$$9.19. Y(p) = 10^{-3} + \frac{p \cdot 10^6 + 10^{10}}{p^2 + p \cdot 10^4 + 10^{16}}$$

Составленная схема изображена на рис. 0.9.5.

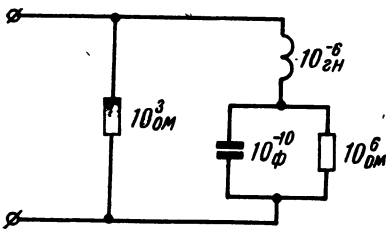


Рис. 0.9.5

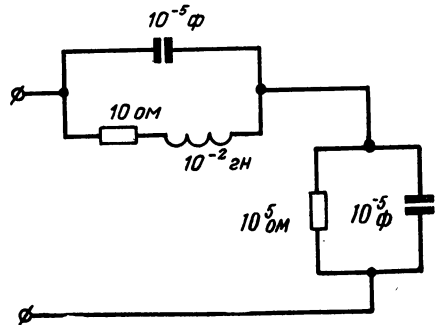


Рис. 0.9.6

$$9.21. Z(p) = \frac{10^5}{p+1} + \frac{p \cdot 10^5 + 10^8}{p^2 + p \cdot 10^3 + 10^7}$$

Составленная схема изображена на рис. 0.9.6.

10.

10.2. Значения Z_1 и Z_2 :

$$Z_1 = \frac{402 \cdot 10^{-13} p^3 + 7 \cdot 10^{-3} p}{8 \cdot 10^{-19} p^4 + 81 \cdot 10^{-10} p^2 + 1}; \quad Z_2 = 10^{-3} p.$$

Очевидно, что Z_2 — индуктивность; для реализации Z_1 можно воспользоваться результатом задачи 9.15.

Окончательная схема представлена на рис. О.10.1.

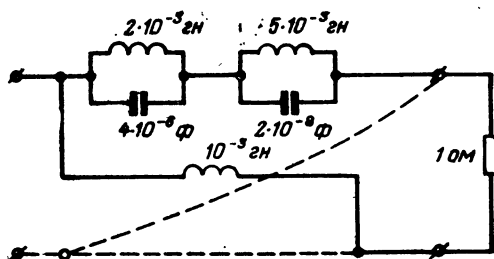


Рис. О.10.1

10.10. Как и в предыдущей задаче, ответ зависит от выбора корней $L(p)$.

10.11. Схема представлена на рис. О.10.2. Значения параметров элементов зависят от корней $L(p)$.

10.20. Искомая схема представлена на рис. О.10.3.

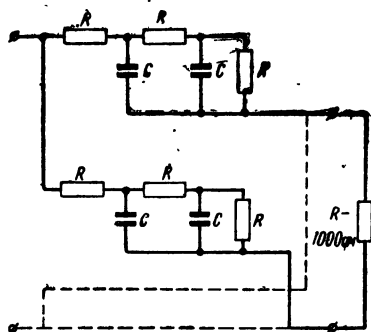


Рис. О.10.2

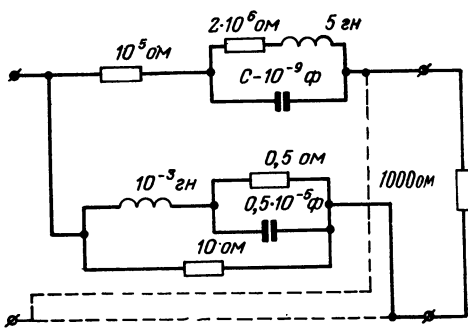


Рис. О.10.3

11.

● 11.8. Матрица $[A_n]$ имеет вид

$$[A_n] = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -1 \\ -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Граф, соответствующий этой матрице, изображен на рис. О.11.1.

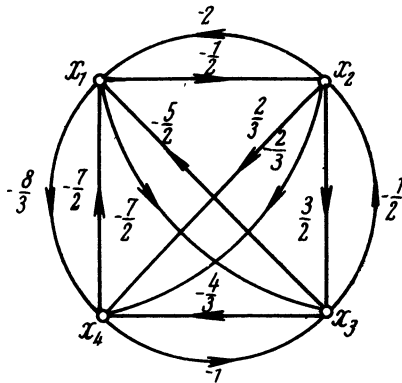


Рис. О.11.1

Система уравнений, отвечающая данному графу, имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_4 \\ x_2 &= -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ x_3 &= -\frac{7}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - x_4 \\ x_4 &= -\frac{8}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3 \end{aligned} \right\}$$

● 11.10. Для заданной системы $n=2$; $m=2$.

$$[A] = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Граф изображен на рис. О.11.2. Система уравнений, записанная по графу, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -7 + 6x_1 + 6x_2 \\ x_2 &= -10 + 2x_1 + 2x_2 \end{aligned} \right\}$$

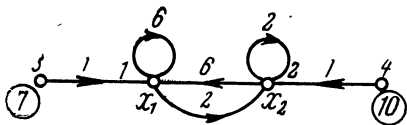


Рис. О.11.2

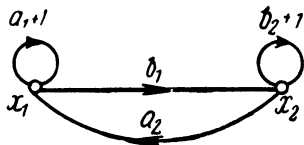


Рис. О.11.3

● 11.12. Матрица $[A]$ имеет вид:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + 1 & a_2 \\ b_1 & b_2 + 1 \end{bmatrix}$$

Граф, соответствующий этой матрице, изображен на рис. О.11.3. Система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (a_1 + 1)x_1 + a_2x_2 \\ x_2 &= b_1x_1 + (b_2 + 1)x_2 \end{aligned} \right\}$$

11.15. Нормализованный и ненормализованный графы изображены на рис. О.11.4а и в соответственно.

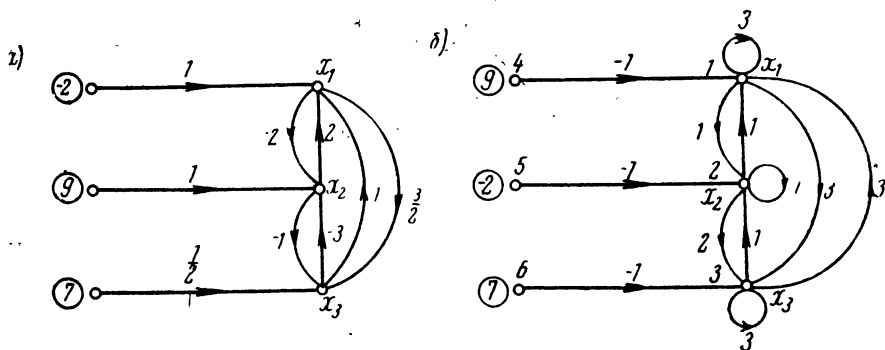


Рис. О.11.4

● 11.18. 1) Три источника; 2) один сток — x_1 ;

3) если источниками являются f_1, x_2 и x_3 , то стоками являются x_1, f_2 и f_3 .

● 11.19. Число уравнений системы $n=3$; число правых частей, отличных от нуля, $m=2$.

12.

● 12.3. Граф, являющийся преобразованием графа рис. 12.13а, изображен на рис. О.12.1а. Результат упрощения графа рис. 12.13б показан на рис. О.12.1б, причем этот результат можно получить, создавая петлю как в узле 2, так и в

узле 3. Граф рис. 12.13в можно преобразовать с сохранением либо узла 3, либо узла 2; соответствующие упрощенные графы показаны на рис. 0.12.1в и г.

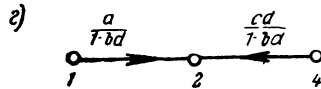
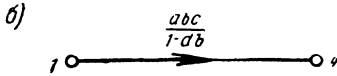
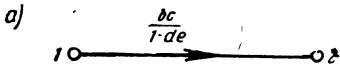


Рис. 0.12.1

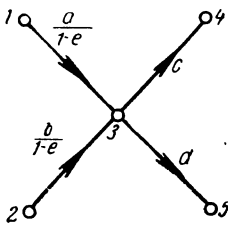


Рис. 0.12.2

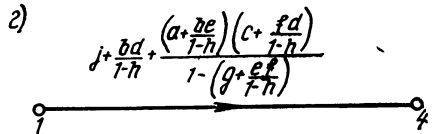
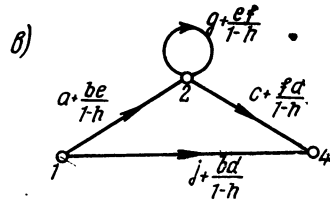
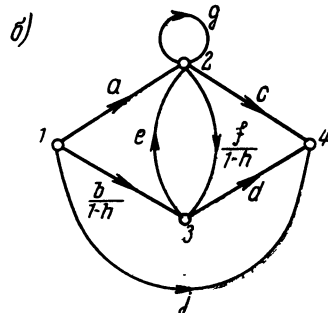
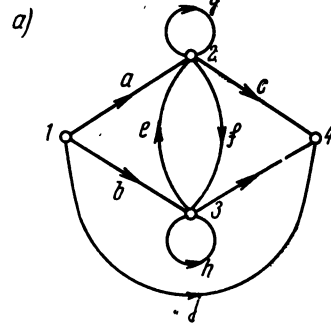


Рис. 0.12.3

- 12.6. Граф, преобразованный по условию задачи, показан на рис. 0.12.2.
- 12.12. Этапы преобразования исходного графа изображены на рис. 0.12.3.
- 12.15. Упрощенный граф, равносильный графу рис. 12.26, показан на рис. 0.12.4, а графу рис. 12.27 — на рис. 0.12.5.

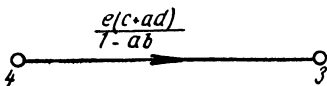


Рис. 0.12.4

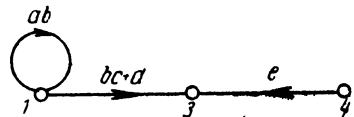


Рис. 0.12.5

● 12.16. Конечный граф, соответствующий исходному графу рис. 12.28, изображен на рис. О.12.6, а графу рис. 12.29 — на рис. О.12.7.

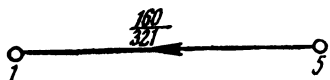


Рис. О.12.6

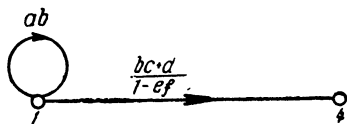


Рис. О.12.7

13.

● 13.4. Пути от узла 1 до узла 8.

$$\begin{aligned}
 P_{125678} &= acdln; & P_{1256478} &= acdmkn; \\
 P_{125478} &= acgkn; & P_{12543678} &= acghln; & P_{123678} &= abfln; \\
 P_{1236478} &= abfmkn; & P_{12365478} &= abfegkn.
 \end{aligned}$$

● 13.5. Путь один: $P = abcdekl$.

Контуры: $L_1 = bi$; $L_2 = ch$; $L_3 = dg$; $L_4 = ef$.

Касающиеся контуры: $L_1 \rightarrow L_2$; $L_2 \rightarrow L_3$; $L_3 \rightarrow L_4$.

Некасающиеся контуры $L_1 \uparrow L_3$; $L_2 \uparrow L_4$; $L_1 \uparrow L_4$.

Пусть P касается всех контуров.

● 13.6. Контуры:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= bg; & L_2 &= jc; & L_3 &= hd; & L_4 &= ae; & L_5 &= abk; & L_6 &= abcd; \\
 L_7 &= bcj; & L_8 &= cdi; & L_9 &= dat; & L_{10} &= gehf; & L_{11} &= jl; \\
 L_{12} &= ik; & L_{13} &= ehj; & L_{14} &= hfk; & L_{15} &= fgt; & L_{16} &= gei; \\
 L_{17} &= bkhj & L_{18} &= alfk; & L_{19} &= eicj; & L_{20} &= gldi.
 \end{aligned}$$

Несоприкасающиеся пары контуров:

$$L_1 \uparrow L_3; L_2 \uparrow L_4; L_{11} \uparrow L_{12}.$$

Несоприкасающихся троек контуров нет.

● 13.7. Для графа рис. 13.11а:

$$\begin{aligned}
 P &= aj; & L_1 &= bi; & L_2 &= ch; & L_3 &= dg; & L_4 &= ef; \\
 P &\rightarrow L_1; & P &\uparrow L_2; & P &\uparrow L_3; & P &\uparrow L_4; & L_1 &\uparrow L_3; & L_1 &\uparrow L_4; \\
 & & L_2 &\uparrow L_4; & L_1 &\rightarrow L_2; & L_2 &\rightarrow L_3; & L_3 &\rightarrow L_4.
 \end{aligned}$$

Для графа рис. 13.11б:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= h; & P_2 &= af; & P_3 &= adg; & L_1 &= b; & L_2 &= dc; \\
 L_3 &= e; & P_1 &\uparrow P_2; & P_1 &\uparrow P_3; & P_2 &\rightarrow P_3; & L_1 &\rightarrow L_2; \\
 & & L_2 &\rightarrow L_3; & L_1 &\uparrow L_3; & P_1 &\uparrow L_1; & P_1 &\uparrow L_2; & P_1 &\uparrow L_3; \\
 P_2 &\rightarrow L_1; & P_2 &\rightarrow L_2; & P_2 &\uparrow L_3; & P_3 &\rightarrow L_1; & P_3 &\rightarrow L_2; & P_3 &\rightarrow L_3
 \end{aligned}$$

● 13.8. Контуры:

$$L_1 = bgf; L_2 = bchf; L_3 = dc; L_4 = e.$$

Пути:

$$\begin{aligned}
 P_{13} &= b; P_{134} = bg; P_{132} = bc; P_{1324} = bch; \\
 P_{24} &= h; P_{241} = hf; P_{2413} = hfb; P_{23} = d; P_{234} = dg; \\
 P_{2341} &= dgf; P_{32} = c; P_{34} = g; P_{324} = ch; P_{341} = gf; \\
 P_{3241} &= chf; P_{41} = f; P_{413} = fb; P_{4132} = fbc.
 \end{aligned}$$

● 13.11. Пути и контуры:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= abcd; P_2 = ag; L_1 = fc; \\
 L_2 &= ecd; P_1 \rightarrow L_1; P_1 \rightarrow L_2; \\
 P_2 \uparrow L_1; P_2 \rightarrow L_2; L_1 \rightarrow L_2.
 \end{aligned}$$

Передача графа:

$$N_{40} = \frac{abcd + ag(1 - fc)}{1 - (fc + ecd)}.$$

● 13.12.

$$\begin{aligned}
 N_{ka} &= \frac{abcdek}{1 - bi - ch - dg - ef + i bgd + i bfe + hcfe} \\
 N_{ja} &= \frac{aj - ajch - ajdg - ajef + ajchfe}{1 - bi - ch - dg - ef + ibgd + ibfe + hcfe} = \\
 &= \frac{aj(1 - ch - dg - ef + chfe)}{1 - bi - ch - dg - ef + ibgd + ibfe + hcfe} \\
 N_{b1} &= \frac{g(1 - i)(b + ad) + ah(e + df) + bh(f + ce)}{(1 - i)(1 - dc)}.
 \end{aligned}$$

● 13.13. Для графа рис. 13.17а:

$$N_{21} = \frac{abcd}{(1 - l)(1 - m)(1 - n) - bce}.$$

Для графа рис. 13.17б:

$$N_{21} = \frac{ab + afd + ceb + cd(1 - h)}{1 - h - ef}.$$

14.

● 14.8. Схема, преобразованная к виду, соответствующему канонической форме уравнений, изображена на рис. О.14.1а.

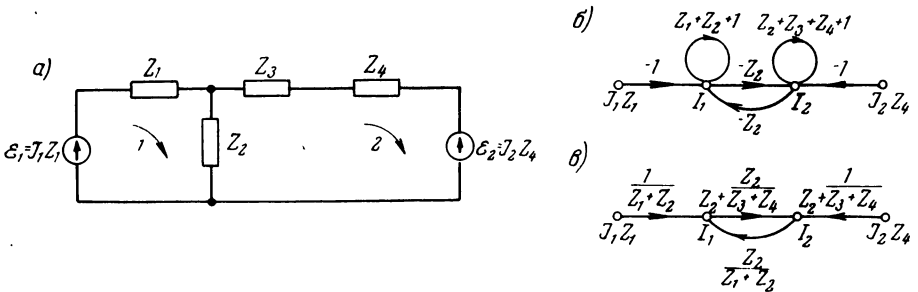


Рис. О.14.1

Система уравнений контурных токов

$$\left[\begin{array}{c|c} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ \hline -Z_2 & Z_3 + Z_3 + Z_4 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_2 \\ -\mathcal{E}_2 \end{bmatrix}$$

Матрица $[A]$ ненормализованного графа

$$[A] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} Z_1 + Z_2 + 1 & -Z_2 & -1 & 0 \\ \hline -Z_2 & Z_2 + Z_3 + Z_4 + 1 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Ненормализованный граф изображен на рис. O.14.16, а нормализованный — на рис. O.14.16.

● 14.9. Система уравнений контурных токов

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} Z_1 + Z_2 + Z_3 & -Z_3 & 0 & 0 & -Z_2 \\ \hline -Z_3 & Z_3 + Z_4 + Z_5 & -Z_5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -Z_5 & Z_5 + Z_7 + Z_9 & -Z_7 & -Z_9 \\ \hline 0 & 0 & -Z_7 & Z_6 + Z_7 + Z_8 & 0 \\ \hline -Z_2 & 0 & -Z_9 & 0 & Z_2 + Z_9 + Z_{10} \end{array} \right] \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Матрица нормализованного графа

$$[A_N] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & \frac{Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} & 0 & 0 & \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \\ \hline \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4 + Z_5} & 0 & \frac{Z_5}{Z_3 + Z_4 + Z_5} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{Z_5}{Z_5 + Z_7 + Z_9} & 0 & \frac{Z_7}{Z_5 + Z_7 + Z_9} & \frac{Z_9}{Z_5 + Z_7 + Z_9} \\ \hline 0 & 0 & \frac{Z_7}{Z_6 + Z_7 + Z_8} & 0 & 0 \\ \hline \frac{Z_2}{Z_2 + Z_9 + Z_{10}} & 0 & \frac{Z_9}{Z_2 + Z_9 + Z_{10}} & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Соответствующий этой матрице I -граф изображен на рис. О.14.2.

- 14.13. Для I -графа (рис. О.14.3а):

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_1 & -Z_3 \\ -Z_1 & Z_1 + Z_2 + Z_5 & -Z_5 \\ -Z_3 & -Z_5 & Z_3 + Z_4 + Z_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$[A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} Z_1 + Z_3 + 1 & -Z_1 & -Z_3 & -Z_3 & -1 \\ -Z_1 & Z_1 + Z_2 + Z_5 + 1 & -Z_5 & -Z_5 & 0 \\ -Z_3 & -Z_5 & Z_3 + Z_4 + Z_5 + 1 & Z_3 + Z_4 + Z_5 + 1 & 0 \end{array} \right].$$

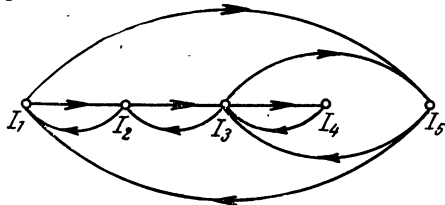


Рис. О.14.2

Для U -графа (рис. О.14.3б):

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 + Y_5 & -Y_5 & -Y_1 \\ -Y_5 & Y_2 + Y_4 + Y_5 & -Y_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \mathcal{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$[A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} Y_1 + Y_3 + Y_5 + 1 & -Y_5 & -Y_1 & -Y_1 & -1 \\ -Y_5 & Y_2 + Y_4 + Y_5 + 1 & -Y_2 & -Y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

- 14.17. Ненормализованный U -граф изображен на рис. О.14.4, где обозначено:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_1 + Y_3 + Y_4; \\ Y_{22} &= Y_1 + Y_2 + Y_5 + Y_{12}; \\ Y_{33} &= Y_3 + Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_{10}; \\ Y_{44} &= Y_8 + Y_{10} + Y_{11} + Y_{12}; \\ Y_{55} &= Y_7 + Y_9 + Y_{11}. \end{aligned}$$

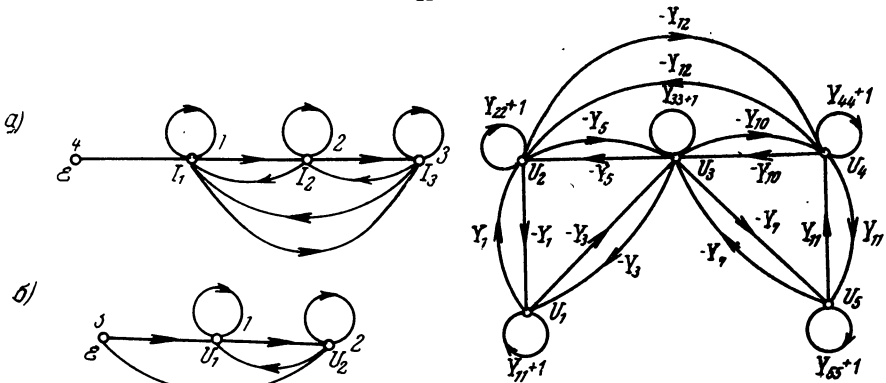


Рис. О.14.3

Рис. О.14.4

● 14.18. Ненормализованный U -граф схемы рис. 14.24а изображен на рис. О.14.5а, где обозначено:

$$\begin{aligned}
 Y_{11} &= \frac{1}{R_1} + \rho C_1 + \rho C_2; \\
 Y_{22} &= \frac{1}{R_1} + \rho C_1 + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\rho L_1}; \\
 Y_{33} &= \frac{1}{R_3} + \frac{1}{\rho L_1} + \rho C_3; \\
 Y_{44} &= \rho C_3 + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\rho L_2} + \rho C_4; \\
 Y_{55} &= \frac{1}{R_4} + \frac{1}{\rho L_2} + \rho C_4.
 \end{aligned}$$

Ненормализованный U -граф схемы рис. 14.24б изображен на рис. О.14.5б.

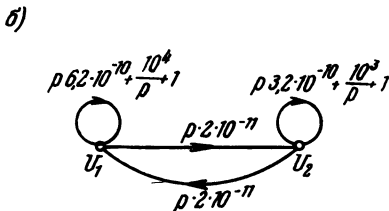
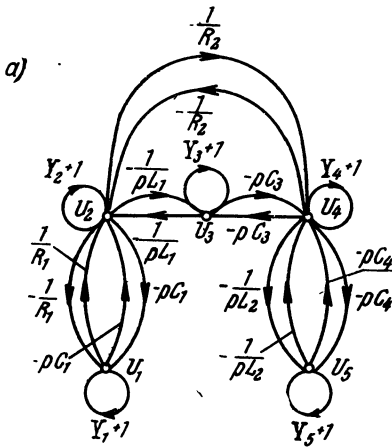


Рис. О.14.5

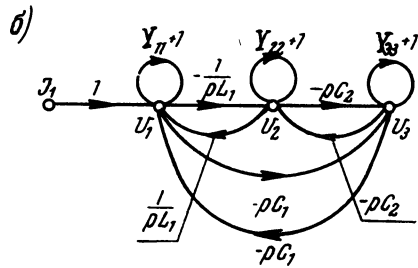
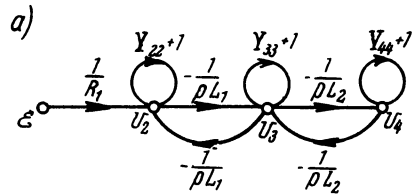


Рис. О.14.6

● 14.22. Граф, соответствующий схеме рис. 14.28а, изображен на рис. О.14.6а. Здесь обозначено:

$$\begin{aligned}
 Y_{22} &= \frac{1}{R_1} + \rho C_1 + \frac{1}{\rho L_1}; \\
 Y_{33} &= \frac{1}{\rho L_1} + \frac{1}{\rho L_2} + \rho C_2; \\
 Y_{44} &= \frac{1}{\rho L_2} + \rho C_3 + \frac{1}{R_2}.
 \end{aligned}$$

Граф, соответствующий схеме рис. 14.28б, изображен на рис. О.14.6б, где обозначено:

$$Y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{\rho L_1} + \rho C_1;$$

$$Y_{22} = \frac{1}{\rho L_1} + \frac{1}{\rho L_2} + \rho C_2;$$

$$Y_{33} = \rho C_2 + \rho C_1 + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\rho L_3}.$$

15.

● 15.6. Искомые графы изображены на рис. О.15.1а и б. На рис. О.15.1б приняты следующие обозначения:

$$\Delta_1 = \rho C + G_g; \quad \Delta_2 = \rho C + G_a + G_i.$$

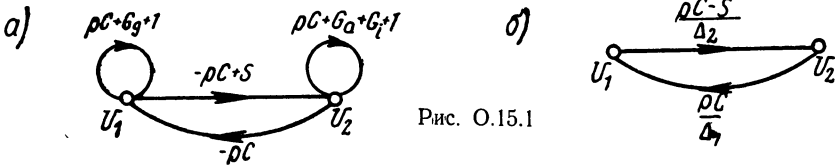


Рис. О.15.1

● 15.7. Искомые графы изображены на рис. О.15.2а и б. На рис. О.15.2б приняты следующие обозначения:

$$\Delta_1 = g_i; \quad \Delta_2 = g_i + G_{ca} + G_c; \quad \Delta_3 = G_a + G_{ca} + G_i;$$

$$\Delta_4 = G_{\kappa 1} + S + G_i; \quad \Delta_5 = G_c + G_{\kappa 1} + G_{\kappa 2}.$$

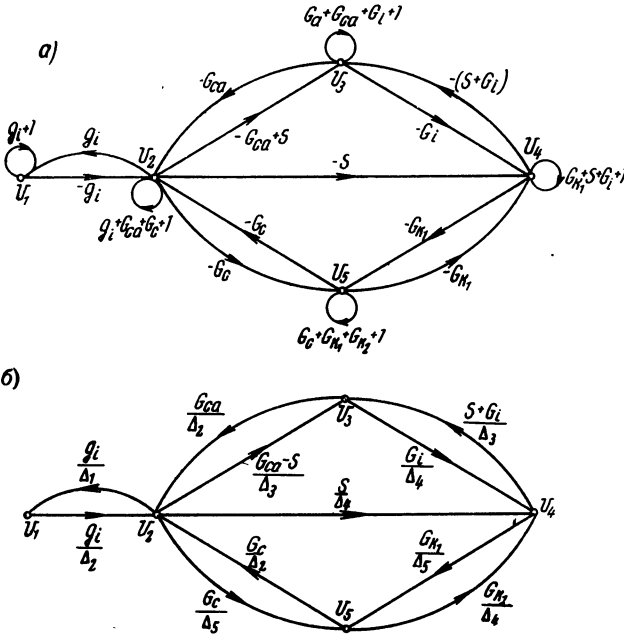


Рис. О.15.2

● 15.8. Искомые U -графы изображены на рис. О.15.3а и б. На рис. О.15.3б приняты следующие обозначения:

$$\Delta_2 = G_{a1} + G_{i1}; \quad \Delta_3 = G_{\kappa 1} + G + S_1 + G_{i1};$$

$$\Delta_4 = G_{a2} + G + G_{i2}; \quad \Delta_5 = G_{\kappa 2} + S + G_{i2}.$$

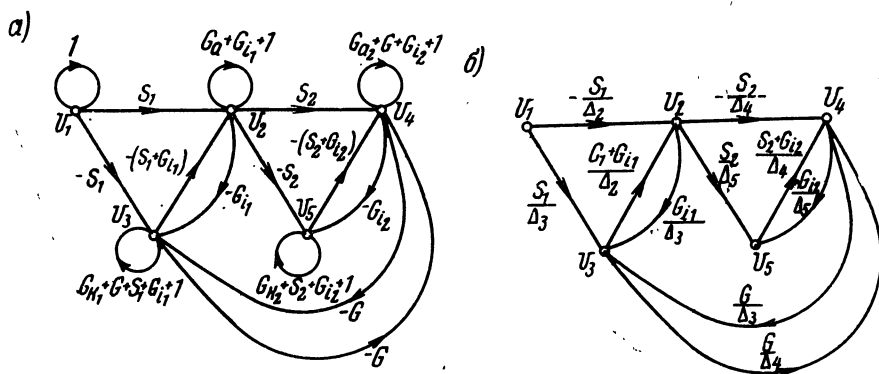


Рис. О.15.3

● 15.9. Искомые U -графы изображены на рис. О.15.4а и б. На рис. О.15.4б приняты следующие обозначения:

$$\Delta_1 = Y'_{11} + Y_2; \quad \Delta_2 = Y_1 + Y''_{11} + Y'_{22}; \quad \Delta_3 = Y_2 + Y''_{21} + Y'_{22} + Y''_{11} + Y'_{12}.$$

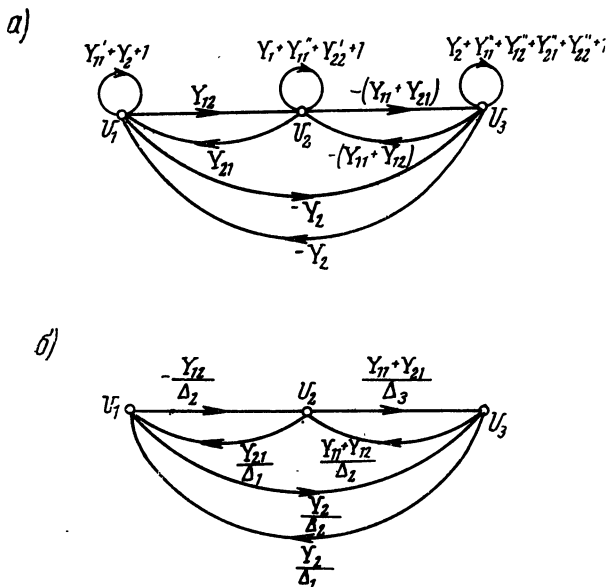


Рис. О.15.4

● 15.11. Искомые U -графы изображены на рис. О.15.5а и б. На рис. О.15.5б приняты следующие обозначения:

$$\Delta_2 = G_l + G_a; \Delta_3 = S + G_l + G_k.$$

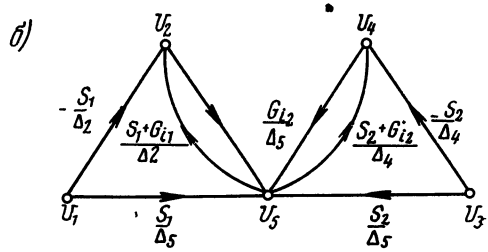
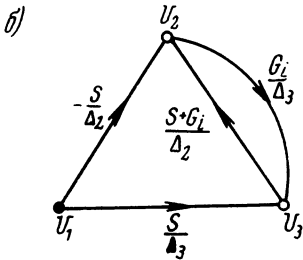
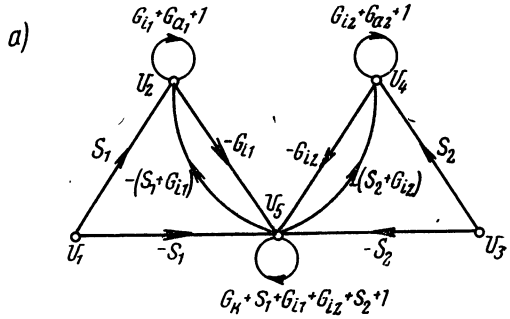
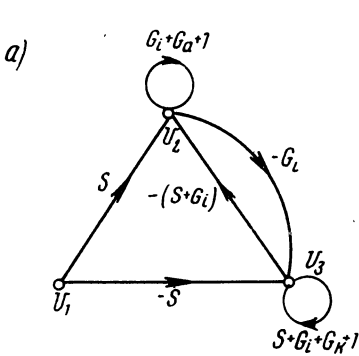


Рис. О.15.5

Рис. О.15.6

● 15.12. Искомые U -графы изображены на рис. О.15.6а и б. На рис. О.15.6б приняты следующие обозначения:

$$\Delta_2 = G_{l1} + G_{a1}; \Delta_4 = G_{l2} + G_{a2}; \Delta_5 = S_1 + G_{l1} + G_{l2} + S_2 + G_k.$$

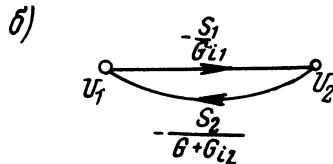
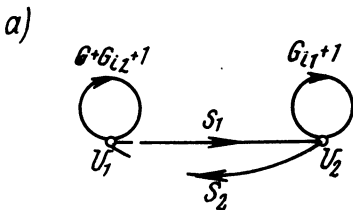


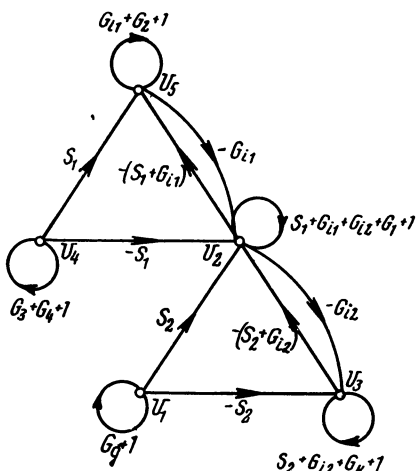
Рис. О.15.7

● 15.13. Искомые U -графы изображены на рис. О.15.7а и б.

● 15.14. Искомые U -графы изображены на рис. 0.15.8а и б. На рис. 0.15.8б приняты следующие обозначения:

$$\Delta_2 = S_1 + G_{i1} + G_{i2} + G_1; \Delta_3 = S_2 + G_{i2} + G_k; \Delta_5 = G_{i1} + G_2.$$

а)



б)

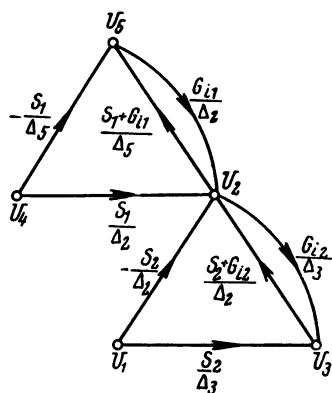
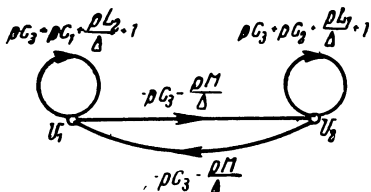


Рис. 0.15.8

● 15.17. Искомые U -графы изображены на рис. 0.15.9а и б. На рис. 0.15.9б приняты следующие обозначения:

$$\Delta = \rho^2 (L_1 L_2 - M^2); \Delta_1 = \rho C_3 + \rho C_1 + \frac{\rho L_2}{\Delta}; \Delta_2 = \rho C_3 + \rho C_2 + \frac{\rho L_1}{\Delta}.$$

а)



б)

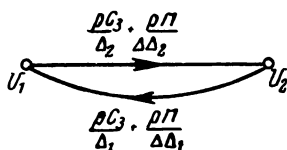


Рис. 0.15.9

● 15.18. Искомые U -графы изображены на рис. 0.15.10а и б. На рис. 0.15.10б приняты следующие обозначения:

$$\Delta = \rho^2 (L_3 L_2 - M^2); \Delta_1 = \frac{1}{\rho L_1} + \rho C_1 + \frac{\rho L_3}{\Delta};$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{R_2} + \frac{\rho L_2}{\Delta}; \Delta_3 = \frac{1}{R_2} + \rho C_3; \Delta_4 = \frac{1}{\rho L_4} + \rho C_2 + \rho C_5;$$

$$\Delta_5 = \frac{1}{R_1} + \rho C_1 + \rho C_2; \Delta_6 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{\rho L_1}.$$

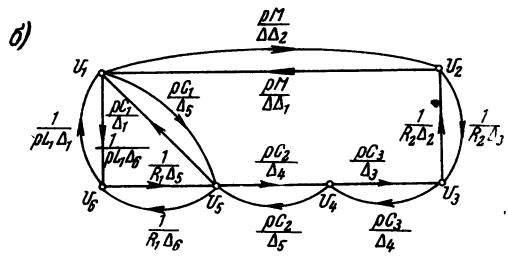
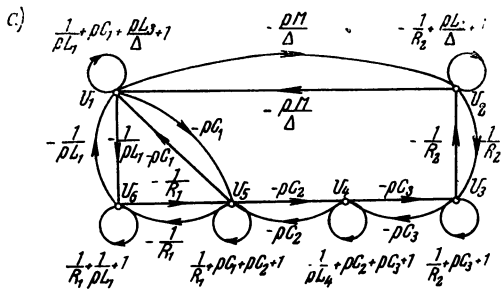


Рис. О.15.10

● 15.19. Искомый U -граф изображен на рис. О.15.11, на котором приняты следующие обозначения:

$$\Delta_1 = \rho^2 (L_1 L_2 - M_1^2); \quad \Delta_2 = \rho^2 (L_4 L_5 - M_2^2).$$

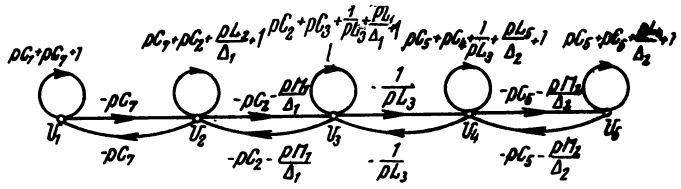


Рис. О.15.11

● 15.20. Искомые U -графы изображены на рис. О.15.12а и б. На рис. О.15.12б приняты следующие обозначения:

$$\Delta_2 = G_{i1} + G_2 + G_3; \quad \Delta_3 = G_{i2} + G_3.$$

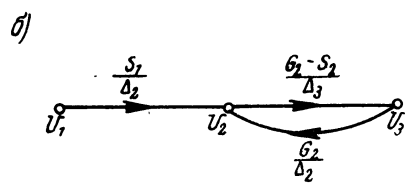
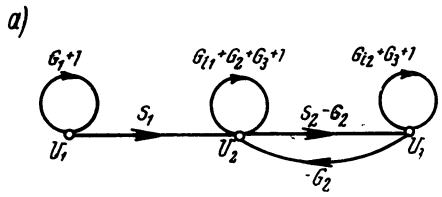


Рис. О.15.12

● 15.21. Искомые U -графы изображены на рис. О.15.13а и б. На рис. О.15.13б приняты следующие обозначения:

$$\Delta = p^2(L_1L_2 - M^2); \quad \Delta_2 = G_{i1} + G_2 + pC_1;$$

$$\Delta_3 = S_1 + G_{i1} + G_1 + G_3; \quad \Delta_4 = G_{i2} + pC_2 + \frac{pL_2}{\Delta};$$

$$\Delta_5 = G_3 + \frac{pL_1}{\Delta}.$$

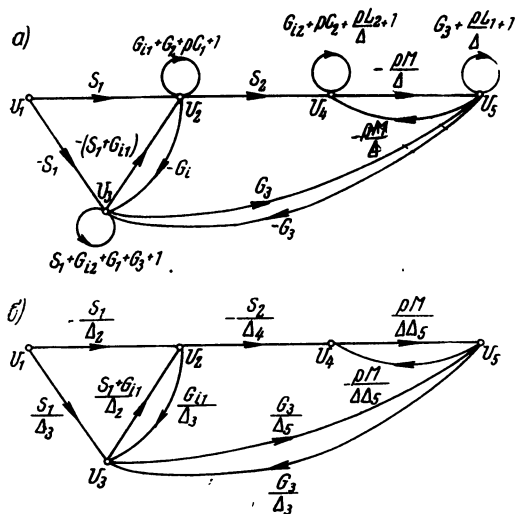


Рис. О.15.13

● 15.22. Искомые U -графы изображены на рис. О.15.14а и б. На рис. О.15.14б приняты следующие обозначения:

$$\Delta = p^2(L_1L_2 - M^2); \quad \Delta_2 = G_i + pC_1 + \frac{pL_2}{\Delta}; \quad \Delta_3 = pC_2 + \frac{pL_1}{\Delta}.$$

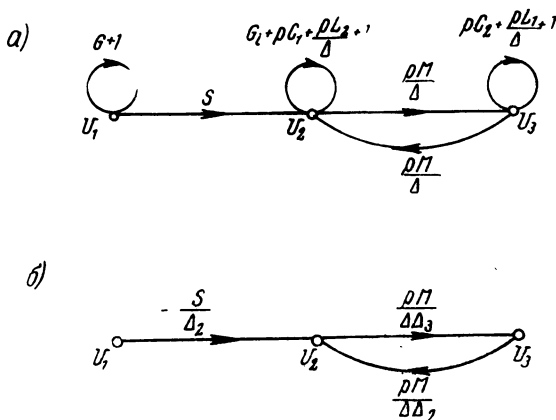


Рис. О.15.14

16.

● 16.2. На рис. О.14.8б изображен U -граф цепи. По формуле Мэзона:

$$U_1 = \frac{-\mathcal{E} Y_1 [1 - (Y_2 + Y_5 + Y_{36} + 1)]}{1 - (Y_1 + Y_2 + Y_4 + 1) - (Y_2 + Y_5 + Y_{36} + 1) - Y_2^2 + (Y_1 + Y_2 + Y_4 + 1)(Y_2 + \rightarrow}$$

$$\rightarrow + Y_5 + Y_{36} + 1) = \frac{\mathcal{E} Y_1 (Y_2 + Y_5 + Y_{36})}{Y_1 Y_2 + Y_2 Y_4 + Y_1 Y_5 + Y_4 Y_5 + Y_2 Y_5 + Y_1 Y_{36} + Y_4 Y_{36} + Y_2 Y_{36}}$$

$$U_2 = \frac{\mathcal{E} Y_1 Y_2}{Y_1 Y_2 + Y_2 Y_4 + Y_1 Y_5 + Y_4 Y_5 + Y_2 Y_5 + Y_1 Y_{36} + Y_4 Y_{36} + Y_2 Y_{36}}$$

● 16.7. Как и в предыдущей задаче, строим U -граф (рис. О.16.1). Передачу N_U находим по ф-ле (16.7):

$$N_U = \frac{Y_1 Y_2}{1 - (Y_1 + Y_2 + Y_3 + 1) - (Y_2 + Y_4 + 1) - Y_2^2 + (Y_1 + Y_2 + Y_3 + 1)(Y_2 + Y_4 + 1)} =$$

$$= \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 Y_2 + Y_1 Y_4 + Y_2 Y_4 + Y_2 Y_3 + Y_3 Y_4}$$

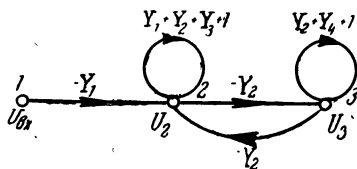


Рис. О.16.1

● 16.9. Аналогично предыдущим задачам находим N_U по U -графу, изображенному на рис. О.16.2:

$$N_U = N_{21} = \frac{-\rho C_3 - \frac{\rho M}{\Delta}}{-\rho C_2 - \frac{\rho L_1}{\Delta}} = \frac{\rho^2 (C_3 L_1 L_2 - C_3 M^2) + M}{\rho^2 (C_1 + C_2) (L_1 L_2 - M^2) + L_1}$$

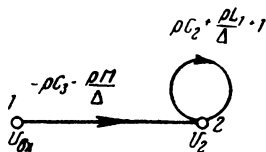


Рис. О.16.2

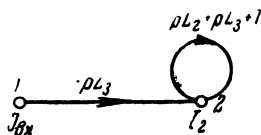


Рис. О.16.3

Значение Δ нужно взять из задачи 15.17.

● 16.11. Как и в предыдущей задаче, строим I -граф (рис. О.16.3) и определяем N_I :

$$N_I = N_{21} = \frac{\rho L_3}{\rho L_2 + \rho L_3} = \frac{L_3}{L_2 + L_3}$$

● 16.15. Аналогично предыдущей задаче определяем коэффициент усиления N_U как передачу графа. Нормализованный U -граф усилителя изображен на рис. О.15.2б:

$$N_U = N_{31} = \frac{a_{21}a_{32}(1 - a_{45}a_{54}) + a_{21}a_{42}a_{34} + a_{21}a_{52}a_{45}a_{54}}{1 - a_{32}a_{23} - a_{34}a_{43} - a_{45}a_{54} - a_{25}a_{52} - a_{23}a_{34}a_{45}a_{52} - a_{32}a_{43}a_{54}a_{25} - a_{42}a_{54}a_{25} \rightarrow} \\ \rightarrow - a_{42}a_{34}a_{23} + a_{23}a_{32}a_{54}a_{45} + a_{34}a_{43}a_{25}a_{52}}$$

Подставив значения передач, можно получить коэффициент усиления, выраженный через параметры схемы в явном виде.

● 16.16. Аналогично задаче 16.15 находим коэффициент усиления как передачу графа.

Используя нормализованный U -граф (рис. О.15.3б), находим

$$N_U = N_{41} = \frac{\frac{S_1 S_2}{\Delta_2 \Delta_4} + \frac{S_1 S_2 (S_2 + G_{i2})}{\Delta_2 \Delta_4 \Delta_5} + \frac{S_1 G_{i1} G}{\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4} + \frac{S_1 S_2 (S_1 + G_{i1})}{\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4} + \frac{S_1}{\Delta_3 \Delta_4} \rightarrow} \\ 1 - \frac{G_{i1} (S_1 + G_{i1})}{\Delta_2 \Delta_3} - \frac{G_{i2} (S_2 + G_{i2})}{\Delta_4 \Delta_5} - \frac{G^2}{\Delta_3 \Delta_4} - \frac{S_2 G (S_1 + G_{i1})}{\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4} \rightarrow} \\ + \rightarrow \frac{S_1 S_2 (S_1 + G_{i1}) (S_2 + G_{i2})}{\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 \Delta_5} = \\ \rightarrow \frac{S_2 G (S_1 + G_{i1}) (S_2 + G_{i2})}{\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 \Delta_5} + \frac{G_{i1} G_{i2} (S_1 + G_{i1}) (S_2 + G_{i2})}{\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 \Delta_5} = \\ = \frac{\Delta_3 \Delta_5 S_1 S_2 + \Delta_3 S_1 S_2 (S_2 + G_{i2}) + \Delta_5 S_1 G_{i1} G + \Delta_5 S_1 S_2 (S_1 + G_{i1}) + \Delta_2 \Delta_5 S_1 G \rightarrow} \\ \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 \Delta_5 - \Delta_4 \Delta_5 G_{i1} (S_1 + G_{i1}) - \Delta_2 \Delta_3 G_{i2} (S_2 + G_{i2}) - \Delta_2 \Delta_5 G^2 \rightarrow} \\ + \rightarrow S_1 S_2 (S_1 + G_{i1}) (S_2 + G_{i2}) \\ \rightarrow - \Delta_5 S_2 G (S_1 + G_{i1}) - (S_1 + G_{i1}) (S_2 + G_{i2}) S_2 G + G_{i1} G_{i2} (S_1 + G_{i1}) (S_2 + G_{i2})}$$

● 16.17. Как и в предыдущих задачах, находим коэффициент передачи напряжения по имеющемуся нормализованному графу (рис. О.15.8б). В общем виде

$$N_U = N_{51} = \frac{\frac{a_{21}a_{52}}{\Delta_2 \Delta_5} + \frac{a_{31}a_{23}a_{52}}{\Delta_2 \Delta_3 \Delta_5}}{1 - \frac{a_{32}a_{23}}{\Delta_2 \Delta_3} - \frac{a_{25}a_{52}}{\Delta_2 \Delta_5}} = \frac{\Delta_3 a_{21}a_{52} + a_{31}a_{23}a_{52}}{\Delta_2 \Delta_3 \Delta_5 - \Delta_5 a_{32}a_{23} - \Delta_3 a_{25}a_{52}}$$

Подставив в это выражение значения величин, получим окончательный ответ:

$$N_{51} = \frac{-G_K S_2 (S_1 + G_{i1})}{G_{i1} S_2 G_1 + G_{i1} G_{i2} G_1 + G_{i1} G_K G_{i2} + G_{i1} G_K G_1 + G_2 S_2 S_1 + G_2 S_2 G_{i1} + G_2 S_2 G_1 \rightarrow} \\ \rightarrow + G_2 G_{i2} S_1 + G_2 G_{i2} G_{i1} + G_2 G_{i2} G_1 + G_2 G_K S_1 + G_2 G_K G_{i1} + G_2 G_K G_{i2} + G_2 G_K G_1 + G_2 G_{i2} S_1}$$

● 16.18. Аналогично предыдущим задачам находим коэффициент усиления U , пользуясь графом рис. О.15.12б:

$$N_U = N_{31} = \\ = \frac{S_1 (S_2 - G_2)}{1 - (G_{i1} + G_2 + G_3 + 1) - (G_{i2} + G_3 + 1) + G_2 (S_2 - G_2) + (G_{i1} + G_2 + G_3 + 1)(G_{i2} + G_3 + 1)} = \\ = \frac{S_1 (S_2 - G_2)}{G_2 (S_2 - G_2) + (G_{i1} + G_2 + G_3) (G_{i2} + G_3)}$$

- 16.19. Решаем задачу хорошо известным методом. Воспользовавшись нормализованным графом (рис. О.15.136), находим

$$N_U = N_{51} = \frac{a_{21}a_{42}a_{54} + a_{21}a_{32}a_{53} + a_{31}a_{53} + a_{31}a_{23}a_{42}a_{54}}{1 - a_{23}a_{32} - a_{45}a_{54} - a_{35}a_{53} - a_{42}a_{54}a_{35}a_{23} + a_{23}a_{32}a_{45}a_{54}}.$$

Подставив значения передач, можно получить окончательный ответ.

- 16.20. Аналогично предыдущим задачам находим коэффициент усиления N_U , пользуясь графом рис. О.15.146:

$$N_U = N_{31} = \frac{-S \frac{pM}{\Delta}}{1 - \left(G_i + pC_1 + \frac{pL_2}{\Delta} + 1\right) - \left(pC_2 + \frac{pL_1}{\Delta} + 1\right) - \left(\frac{pM}{\Delta}\right)^2 + \rightarrow} \\ \rightarrow + \left(G_i + pC_1 + \frac{pL_2}{\Delta} + 1\right) \left(pC_2 + \frac{pL_1}{\Delta} + 1\right)}.$$

Подставив значение $\Delta = p^2(L_1L_2 - M^2)$, получим

$$N_U = \frac{-pSM(L_1L_2 - M^2)}{p^4C_1C_2(L_1L_2 - M^2)^2 + p^3C_2G_i(L_1L_2 - M^2)^2 + p^2(L_1L_2 - M^2) \times \rightarrow} \\ \times \rightarrow (L_1C_1 + L_2C_2) + pL_1G_i(L_1L_2 - M^2) - M^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксельрод С. М. и др. Задачник по радиотехнике и радиолокации. Госэнергоиздат, 1962.
2. Асеев Б. П. Основы радиотехники. Связьиздат, 1947.
3. Атабеков Г. И. Теория линейных электрических цепей. Изд. «Советское радио», 1960.
4. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. Изд-во «Сов. радио», 1962.
5. Заездный А. М. Сборник задач и упражнений по курсу «Теоретическая радиотехника». Связьиздат, 1957.
6. Зелях Э. В. Основы общей теории линейных электрических схем. Изд. АН СССР, 1951.
7. Крылов Н. Н. Теоретические основы радиотехники. Изд. «Морской транспорт», 1961.
8. Харкевич А. А. Основы радиотехники. Связьиздат, 1963.
9. Белецкий А. Ф. Теоретические основы электропроводной связи. Ч. III. Синтез реактивных четырехполюсников и электрических фильтров. Связьиздат, 1959.
10. Билевич В. А., Заездный А. М. Круговая номограмма длинных линий. Ленингр. электротехн. ин-т связи, 1962.
11. Балабанян Н. Синтез электрических цепей. Госэнергоиздат, 1961.
12. Тафт В. А. Основы методики расчета линейных электрических цепей по заданным их частотным характеристикам. Изд. АН СССР, 1954.
13. Мэзон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы. Изд. иностр. лит-ры, 1963.
14. Sinureich H. Diaqramme de semnal. «Telecomunicatii», 1964, N 6.
15. Траксел Д. Синтез систем автоматического регулирования. Машгиз, 1959.
16. Henson C. S. Colution of pproblems in telecommunication. London, 1956, Pitman.
17. Venson F. A. Problems in electronics with colutions. London, 1958.
18. Робишо Л., Буавер М., Робер Ж. Направленные графы и их приложение к электрическим цепям и машинам. Изд. «Энергия», 1954.
19. Сигорский В. П. Анализ электронных схем. ГИТЛ УССР, 1964.

СОДЕРЖАНИЕ

| | Задачи | Решения | Ответы |
|---|--------|---------|--------|
| Предисловие ко второму изданию | 3 | | |
| Из предисловия к первому изданию | 4 | | |
| Некоторые условные обозначения | 5 | | |
| 1. Частотные характеристики линейных систем | 6 | 221 | 397 |
| 2. Основы теории четырехполюсников | 16 | 235 | 401 |
| 3. Последовательный колебательный контур | 41 | 254 | 403 |
| 4. Параллельный колебательный контур | 48 | 260 | 405 |
| 5. Связанные контуры | 58 | 269 | 406 |
| 6. Электрические фильтры | 76 | 283 | 409 |
| 7. Цепи с распределенными постоянными | 104 | 304 | 414 |
| 8. Круговая номограмма длинных линий | 129 | 320 | 418 |
| 9. Элементы синтеза двухполюсников | 135 | 324 | 419 |
| 10. Элементы синтеза четырехполюсников | 143 | 337 | 420 |
| 11. Основные положения теории сигнальных графов | 152 | 343 | 421 |
| 12. Преобразования графов | 165 | 355 | 422 |
| 13. Решение графов | 174 | 361 | 424 |
| 14. Построение графов обратимых цепей | 188 | 369 | 425 |
| 15. Построение графов необратимых цепей | 203 | 382 | 429 |
| 16. Расчеты электрических цепей при помощи графов | 211 | 388 | 435 |
| Литература | 438 | | |

ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
Александр Михайлович Заездный, Иосиф Вульфович Гуревич

Техн. редактор *З. И. Резник* Редактор *Н. К. Логинова* Корректор *Р. М. Шишкова*

Сдано в набор 2/X 1967 г. Подписано в печ. 21/II 1968 г.
Форм. бум. 60×90/16 29,25 печ. л. 29,25 усл.-п. л. 27,47 уч.-изд. л.
Т-02004 Тираж 22 000 экз. Зак. изд. 13361 Цена 1 руб. 83 коп.
Издательство «Связь», Москва-центр, Чистопрудный бульвар. 2.

Типография издательства «Связь» Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Москва-центр, ул. Кирова, 40. Зак. изд. 431

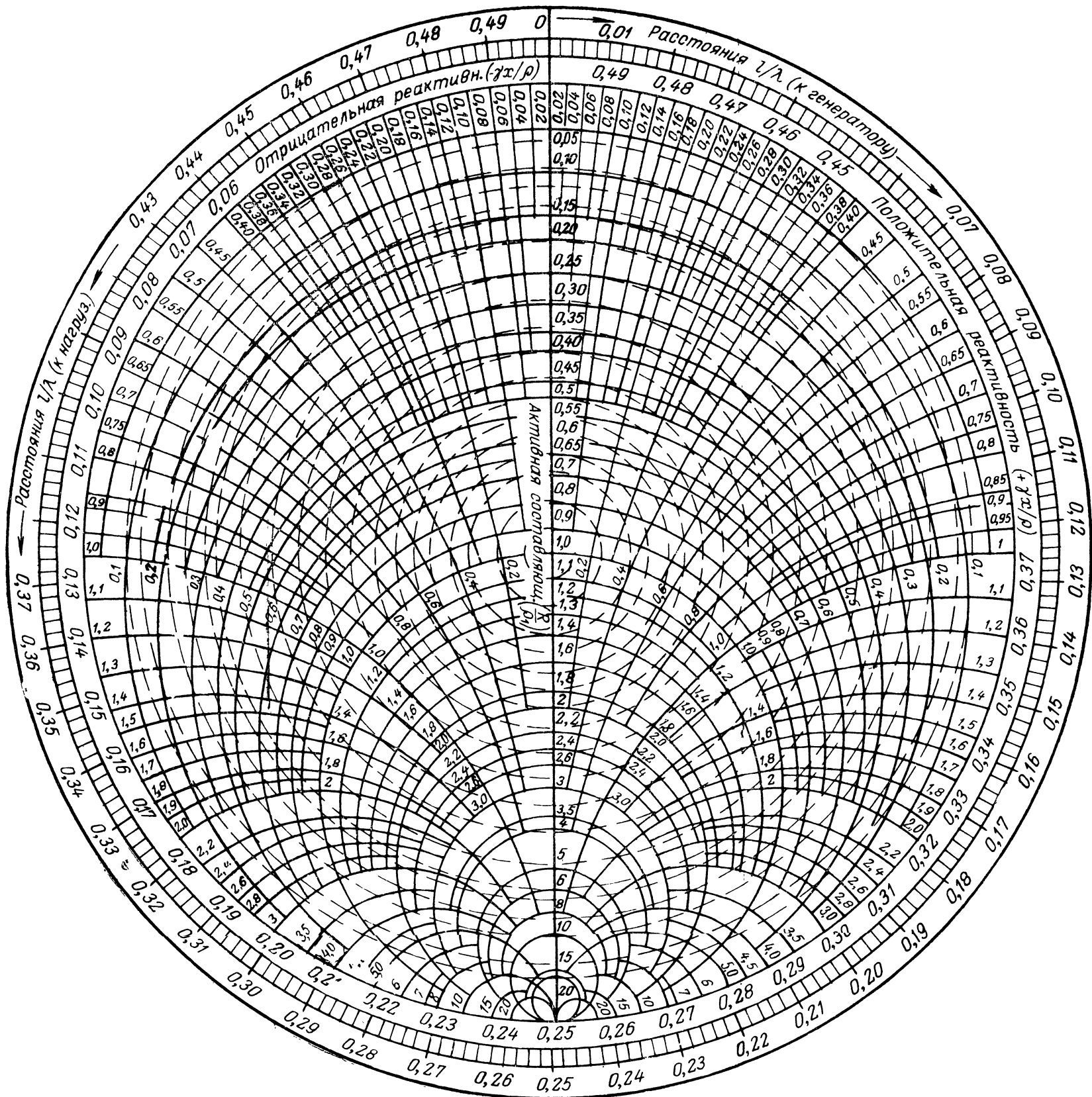
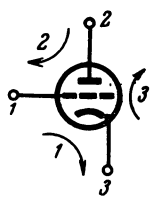
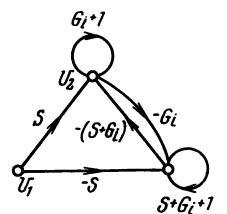
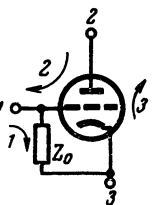
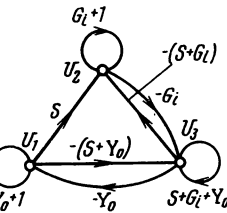
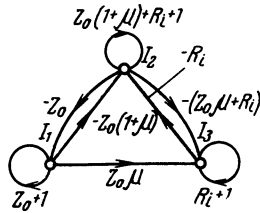
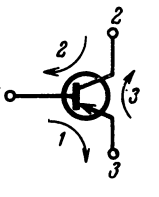
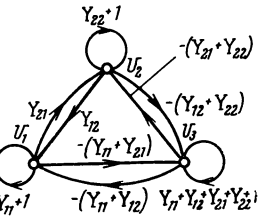
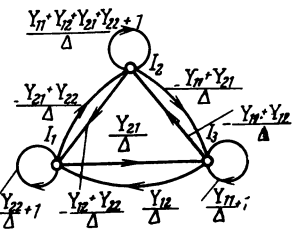
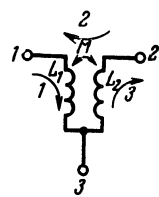
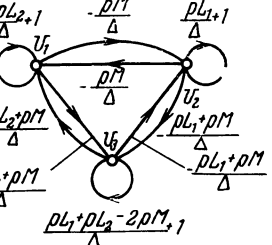
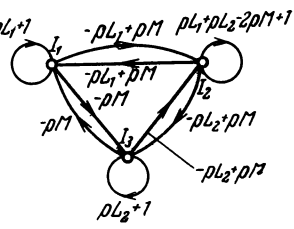


Рис. 8.5

МАТРИЦЫ НАИБОЛЕЕ УПОТРЕБИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Таблица 15.1

| № пп. | Схема | Матрица Y | U-граф | Матрица-Z | I-граф |
|-------|---|---|--|---|---|
| 1 |  | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S & G_i & -(S+G_i) \\ -S & -G_i & S+G_i \end{bmatrix}$ |  | | <p style="text-align: center;">—</p> |
| 2 |  | $\begin{bmatrix} Y_0 & 0 & -Y_0 \\ S & G_i & -(S+G_i) \\ -(S+Y_0) & -G_i & S+G_i+Y_0 \end{bmatrix}$ $Y_0 = \frac{1}{Z_0}$ |  | $\begin{bmatrix} Z_0 & -Z_0 & 0 \\ -Z_0(1+\mu) & Z_0(1+\mu)+R_i & -R_i \\ Z_0\mu & -(Z_0\mu+R_i) & R_i \end{bmatrix}$ |  |
| 3 |  | $\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & -(Y_{11}+Y_{12}) \\ Y_{21} & Y_{22} & -(Y_{21}+Y_{22}) \\ -(Y_{11}+Y_{21}) & -(Y_{12}+Y_{22}) & Y_{11}+Y_{12}+Y_{21}+Y_{22} \end{bmatrix}$ |  | $\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Y_{22} & -(Y_{12}+Y_{22}) & Y_{12} \\ -(Y_{21}+Y_{22}) & Y_{11}+Y_{12}+Y_{21}+Y_{22} & -(Y_{11}+Y_{12}) \\ Y_{21} & -(Y_{11}+Y_{21}) & Y_{11} \end{bmatrix}$ $\Delta = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$ |  |
| 1 |  | $\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} pL_2 & -pM & -pL_2+pM \\ -pM & pL_1 & -pL_1+pM \\ -pL_2+pM & -pL_1+pM & pL_1+pL_2-2pM \end{bmatrix}$ $\Delta = p^2(L_1L_2 - M^2)$ |  | $\begin{bmatrix} pL_1 & -pL_1+pM & -pM \\ -pL_1+pM & pL_1+pL_2-2pM & -pL_2+pM \\ -pM & -pL_2+pM & pL_2 \end{bmatrix}$ |  |

ОПЕЧАТКИ, ЗАМЕЧЕННЫЕ В КНИГЕ
 А. М. Заездного и И. В. Гуревича

«Основы расчетов радиотехнических цепей»

| Стр. | Строка | Напечатано | Должно быть |
|------|---------------|--|--|
| 317 | 3-я св. | $R_1 = \frac{,72}{\sqrt{\lambda}} \dots$ | $R_1 = \frac{0,72}{\sqrt{\lambda}} \dots$ |
| 335 | 1-я сн. | $\rho = 10^8 + \dots$ | $Z(\rho) = 10^8 + \dots$ |
| 338 | 2-я сн. | $L(\rho) = 2 \cdot 10^{-9} \rho \dots$ | $L(\rho) = 2 \cdot 10^{-17} \rho \dots$ |
| 342 | 6-я сн. | $Z_1 = \frac{\dots}{1 + \frac{10^{-2} \rho^2 - 999}{\dots}} \dots$ | $Z_1 = \frac{\dots}{1 + \frac{10^{-9} \rho^2 - 999}{\dots}} \dots$ |
| 366 | 10-я св. | $\Delta_3 = \dots$ | $T_{\Delta_3} = \dots$ |
| | 12-я св. | $T_{\Delta_3} = \frac{e}{ed} = \frac{1}{d}$ | $T_{\Delta_3} = \frac{e}{ed} = \frac{1}{d}$ |
| 367 | 8-я сн. | $x_4^1 = \frac{\dots}{1 - h - ce} \dots$ | $x_4^1 = \frac{\dots}{1 - h - bd - ce} \dots$ |
| 433 | рис. О.15.126 | $\frac{S_1}{\Delta_2}$ | $-\frac{S_1}{\Delta_2}$ |

