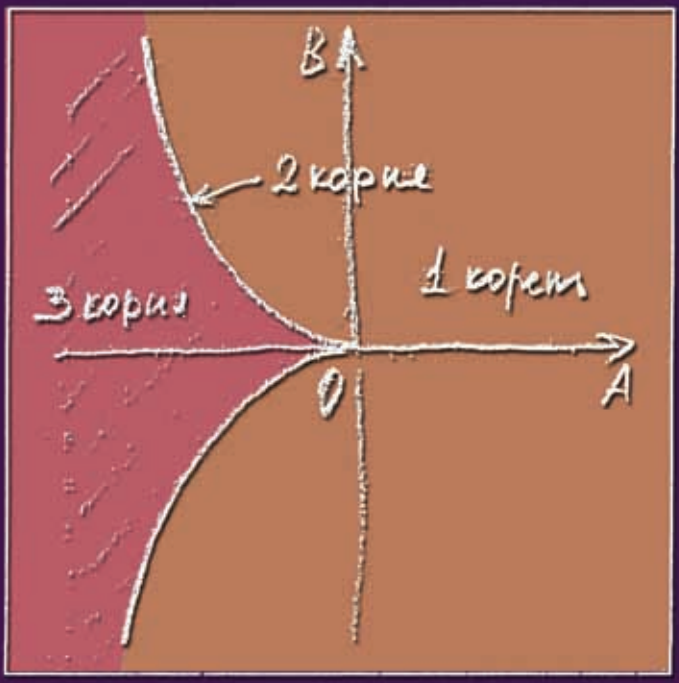
А. Н. Земляков

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС

АЛГЕБРА+: РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Учебное пособие



БИНОМ

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС

МАТЕМАТИКА

А. Н. Земляков

АЛГЕБРА+: РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Учебное пособие

2-е издание (электронное)

Издание подготовлено при содействии
НФПК – Национального фонда подготовки кадров

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2012

УДК 512
ББК 22.14я721
З-53

Земляков А. Н.

З-53 Алгебра+: рациональные и иррациональные алгебраические задачи. Элективный курс [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. Н. Земляков. — 2-е изд. (эл.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. — 320 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-0960-3

В пособии, построенном как самоучитель, рассмотрены все типы задач по элементарной алгебре, входящие в школьную программу и программу вступительных экзаменов в вузы. Излагаются не рецепты, а методы решения алгебраических задач: уравнений, неравенств, систем, задач с параметрами и с логическими условиями. При этом основной акцент делается на логике решения задач — на методах равносильных преобразований, позволяющих максимально упростить задачу; на привлечении графических, координатных и прочих наглядных приемов, помогающих, насколько это возможно, избежать ошибок.

Курс призван помочь старшеклассникам систематизировать знания и умения в элементарной алгебре; повысить свою логическую культуру, достичь уверенных навыков в решении стандартных конкурсных задач по алгебре.

УДК 512
ББК 22.14я721

По вопросам приобретения обращаться:
«БИНОМ. Лаборатория знаний»
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

ISBN 978-5-9963-0960-3

© БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007

Интерактивное оглавление

От издательства 7
Предисловие 8

Глава 1. Логика алгебраических задач 13
§ 1.1. Основные понятия: алгебраические задачи, решения, равносильность 13
1.1.1. Алгебраические задачи как предложения с переменными 13
1.1.2. Равносильность и следование задач 14
1.1.3. Равносильность уравнений и систем с одной переменной 15
1.1.4. Совокупности и системы алгебраических задач 19
1.1.5. Следование уравнений с одной переменной . . . 22
1.1.6. Неравенства с переменной и числовые неравенства 24
§ 1.2. Задачи с параметрами и логические алгебраические задачи 26
1.2.1. Что такое задача с параметром 26
1.2.2. Логические задачи с параметрами 29
1.2.3. Логические и кванторные формулировки задач с параметрами 32
1.2.4. Функционально-графическая интерпретация задач с параметрами 36
1.2.5. Координатная интерпретация задач с параметрами 38
Упражнения 41

Глава 2. Многочлены и полиномиальные алгебраические уравнения 43
§ 2.1. Корни многочленов. Теорема Безу 43
2.1.1. Числовые кольца и поля. Кольца многочленов 43
2.1.2. Корни многочленов и полиномиальных уравнений 45

2.1.3. Деление многочленов на двучлен. Теорема Безу . . . 49
2.1.4. Алгоритмы деления на двучлен. Метод Руффини—Горнера . . . 52
2.1.5. Делимость многочлена на двучлен. Число корней многочлена . . . 57
2.1.6. Формулы сокращенного умножения . . . 59
2.1.7. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов . . . 61
2.1.8. Задание многочлена его значениями. Многочлены Лагранжа . . . 64
§ 2.2. Разложение многочленов. Теорема Виета и комбинаторика . . . 69
2.2.1. Полностью разложимые многочлены.Первые теоремы Виета . . . 69
2.2.2. Решение систем Виета. Пример . . . 73
2.2.3. Комбинаторное отступление 1: перестановки . . . 76
2.2.4. Перестановки с повторениями и системы Виета 79
2.2.5. Комбинаторное отступление 2: сочетания . . . 83
2.2.6. Комбинаторное отступление 3: размещения. Число перестановок с повторениями . . . 86
2.2.7. Общие система и теорема Виета . . . 89
2.2.8. Формула Ньютона для степени бинома . . . 92
§ 2.3. Уравнения низших степеней . . . 95
2.3.1. Линейная замена переменной в квадратном трехчлене . . . 95
2.3.2. Линейная замена переменной в многочленах . . . 98
2.3.3. Метод Руффини—Горнера и треугольник Паскаля . . . 101
2.3.4. Решение кубических уравнений . . . 107
2.3.5. Графическое исследование кубического уравнения . . . 112
2.3.6. Уравнения степени 4: схема Феррари . . . 115
§ 2.4. Уравнения разных степеней. Методы упрощения . . . 118
2.4.1. Простейшие полиномиальные уравнения . . . 118
2.4.2. Линейные замены, основанные на симметрии . . . 121
2.4.3. Метод разложения. Поиск рациональных корней . . . 125

2.4.4. Применение теоремы о рациональных корнях к решению уравнений . . . 128
2.4.5. Применение теоремы о корнях к числовым задачам . . . 134
2.4.6. Разложение методом неопределенных коэффициентов . . . 139
Упражнения . . . 143
Задачи по комбинаторике . . . 149

Глава 3. Рациональные алгебраические уравнения и неравенства . . . 156
§ 3.1. Рациональные алгебраические уравнения . . . 156
3.1.1. Рациональные алгебраические выражения и задачи . . . 156
3.1.2. Метод замены . . . 158
3.1.3. Симметрические и кососимметрические уравнения . . . 161
§ 3.2. Рациональные алгебраические неравенства . . . 164
3.2.1. Зачем бывает нужно решать неравенства? . . . 164
3.2.2. Простейшие рациональные неравенства . . . 165
3.2.3. Методы решения рациональных алгебраических неравенств . . . 167
3.2.4. Сведение к системам неравенств . . . 171
3.2.5. Метод интервалов . . . 172
3.2.6. Метод замены . . . 175
3.2.7. Неравенства с двумя переменными . . . 176
3.2.8. Метод областей . . . 180
Упражнения . . . 182

Глава 4. Рациональные алгебраические системы . . . 184
§ 4.1. Уравнения с несколькими переменными . . . 184
4.1.1. Решение уравнений с двумя переменными . . . 184
4.1.2. Рациональные уравнения с двумя переменными . . . 188
4.1.3. Однородные уравнения с двумя переменными . . . 190
4.1.4. О симметрических многочленах от двух переменных . . . 193
§ 4.2. Решение систем. Метод подстановки. Однородные системы . . . 194
4.2.1. Общий метод подстановки . . . 196

4.2.2. Линейные подстановки 199
4.2.3. Однородные системы 201
4.2.4. Исключение переменных. Равносильные линейные преобразования 207
§ 4.3. Решение систем: метод замены. Симметрические системы 210
4.3.1. Метод замены 211
4.3.2. Системы Виета 213
4.3.3. Общие симметрические системы 215
§ 4.4. Решение систем: метод разложения. Частные методы и приемы 221
4.4.1. Решение систем методом разложения 221
4.4.2. Примечательный пример 223
4.4.3. Поучительный пример 225
4.4.4. Метод оценок 226
4.4.5. Метод итераций 229
4.4.6. Сведение уравнений к системам 232
4.4.7. Оценка значений переменных 235
§ 4.5. Системы с тремя переменными 238
4.5.1. Метод подстановки 238
4.5.2. Метод замены 239
4.5.3. Использование однородности 240
4.5.4. Система Виета с тремя переменными 241
4.5.5. Симметрические системы 242
4.5.6. Метод разложения 245
Упражнения 248

Глава 5. Иррациональные алгебраические задачи 251
§ 5.1. Уравнения с радикалами 251
5.1.1. Иррациональные алгебраические выражения . . 251
5.1.2. Уравнения с квадратными радикалами. Замена переменной 251
5.1.3. Неэквивалентные преобразования с проверкой 252
5.1.4. Метод эквивалентных преобразований 254
5.1.5. Сведение уравнений к системам 260
5.1.6. Освобождение от кубических радикалов 263
5.1.7. Использование монотонности 265
5.1.8. Использование однородности 267

§ 5.2. Неравенства с радикалами 269
5.2.1. Почему неравенства с радикалами сложнее уравнений 269
5.2.2. Эквивалентные преобразования неравенств . . . 271
5.2.3. Дробно-иррациональные неравенства 278
5.2.4. Метод интервалов при решении иррациональных неравенств 279
5.2.5. Замена при решении иррациональных неравенств 283
5.2.6. Использование монотонности при решении неравенств 284
5.2.7. Смешанные системы с двумя переменными . . . 286
§ 5.3. Уравнения и неравенства с модулями 289
5.3.1. Уравнения с модулями 289
5.3.2. Неравенства с модулями 292
5.3.3. Комбинированные задачи с модулями 295
Упражнения 299

Ответы и указания к упражнениям 302
Глава 1 302
Глава 2 303
Задачи по комбинаторике 305
Глава 3 308
Глава 4 309
Глава 5 311

Предметный указатель 314

Оглавление

От издательства 7

Предисловие 8

Глава 1. **Логика алгебраических задач** 13

§ 1.1. Основные понятия: алгебраические задачи, решения, равносильность 13

1.1.1. Алгебраические задачи как предложения с переменными 13

1.1.2. Равносильность и следование задач 14

1.1.3. Равносильность уравнений и систем с одной переменной 15

1.1.4. Совокупности и системы алгебраических задач 19

1.1.5. Следование уравнений с одной переменной 22

1.1.6. Неравенства с переменной и числовые неравенства 24

§ 1.2. Задачи с параметрами и логические алгебраические задачи 26

1.2.1. Что такое задача с параметром 26

1.2.2. Логические задачи с параметрами 29

1.2.3. Логические и кванторные формулировки задач с параметрами 32

1.2.4. Функционально-графическая интерпретация задач с параметрами 36

1.2.5. Координатная интерпретация задач с параметрами 38

Упражнения 41

Глава 2. **Многочлены и полиномиальные алгебраические уравнения** 43

§ 2.1. Корни многочленов. Теорема Безу 43

2.1.1. Числовые кольца и поля. Кольца многочленов 43

2.1.2. Корни многочленов и полиномиальных уравнений 45

2.1.3. Деление многочленов на двучлен. Теорема Безу 49

2.1.4. Алгоритмы деления на двучлен. Метод Руффини—Горнера 52
2.1.5. Делимость многочлена на двучлен. Число корней многочлена 57
2.1.6. Формулы сокращенного умножения 59
2.1.7. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов 61
2.1.8. Задание многочлена его значениями. Многочлены Лагранжа 64
§ 2.2. Разложение многочленов. Теорема Виета и комбинаторика 69
2.2.1. Полностью разложимые многочлены. Первые теоремы Виета 69
2.2.2. Решение систем Виета. Пример 73
2.2.3. Комбинаторное отступление 1: перестановки . . . 76
2.2.4. Перестановки с повторениями и системы Виета 79
2.2.5. Комбинаторное отступление 2: сочетания 83
2.2.6. Комбинаторное отступление 3: размещения. Число перестановок с повторениями 86
2.2.7. Общие система и теорема Виета 89
2.2.8. Формула Ньютона для степени бинома 92
§ 2.3. Уравнения низших степеней 95
2.3.1. Линейная замена переменной в квадратном трехчлене 95
2.3.2. Линейная замена переменной в многочленах . . . 98
2.3.3. Метод Руффини—Горнера и треугольник Паскаля 101
2.3.4. Решение кубических уравнений 107
2.3.5. Графическое исследование кубического уравнения 112
2.3.6. Уравнения степени 4: схема Феррари 115
§ 2.4. Уравнения разных степеней. Методы упрощения 118
2.4.1. Простейшие полиномиальные уравнения 118
2.4.2. Линейные замены, основанные на симметрии . . 121
2.4.3. Метод разложения. Поиск рациональных корней 125
2.4.4. Применение теоремы о рациональных корнях к решению уравнений 128
2.4.5. Применение теоремы о корнях к числовым задачам 134
2.4.6. Разложение методом неопределенных коэффициентов 139
Упражнения 143
Задачи по комбинаторике 149

Глава 3. **Рациональные алгебраические уравнения и неравенства** 156
§ 3.1. Рациональные алгебраические уравнения 156
3.1.1. Рациональные алгебраические выражения и задачи 156
3.1.2. Метод замены 158
3.1.3. Симметрические и кососимметрические уравнения 161
§ 3.2. Рациональные алгебраические неравенства 164
3.2.1. Зачем бывает нужно решать неравенства? 164
3.2.2. Простейшие рациональные неравенства 165
3.2.3. Методы решения рациональных алгебраических неравенств 167
3.2.4. Сведение к системам неравенств 171
3.2.5. Метод интервалов 172
3.2.6. Метод замены 175
3.2.7. Неравенства с двумя переменными 176
3.2.8. Метод областей 180
Упражнения 182

Глава 4. **Рациональные алгебраические системы** 184
§ 4.1. Уравнения с несколькими переменными 184
4.1.1. Решение уравнений с двумя переменными 184
4.1.2. Рациональные уравнения с двумя переменными 188
4.1.3. Однородные уравнения с двумя переменными . . 190
4.1.4. О симметрических многочленах от двух переменных 193
§ 4.2. Решение систем. Метод подстановки. Однородные системы 194
4.2.1. Общий метод подстановки 196
4.2.2. Линейные подстановки 199
4.2.3. Однородные системы 201
4.2.4. Исключение переменных. Равносильные линейные преобразования 207
§ 4.3. Решение систем: метод замены. Симметрические системы 210
4.3.1. Метод замены 211
4.3.2. Системы Виета 213
4.3.3. Общие симметрические системы 215
§ 4.4. Решение систем: метод разложения. Частные методы и приемы 221
4.4.1. Решение систем методом разложения 221
4.4.2. Примечательный пример 223
4.4.3. Поучительный пример 225
4.4.4. Метод оценок 226
4.4.5. Метод итераций 229

4.4.6. Сведение уравнений к системам 232
4.4.7. Оценка значений переменных 235
§ 4.5. Системы с тремя переменными 238
4.5.1. Метод подстановки 238
4.5.2. Метод замены 239
4.5.3. Использование однородности 240
4.5.4. Система Виета с тремя переменными 241
4.5.5. Симметрические системы 242
4.5.6. Метод разложения 245
Упражнения 248

Глава 5. **Иррациональные алгебраические задачи** 251
§ 5.1. Уравнения с радикалами 251
5.1.1. Иррациональные алгебраические выражения . . . 251
5.1.2. Уравнения с квадратными радикалами. Замена переменной 251
5.1.3. Неэквивалентные преобразования с проверкой . 252
5.1.4. Метод эквивалентных преобразований 254
5.1.5. Сведение уравнений к системам 260
5.1.6. Освобождение от кубических радикалов 263
5.1.7. Использование монотонности 265
5.1.8. Использование однородности 267
§ 5.2. Неравенства с радикалами 269
5.2.1. Почему неравенства с радикалами сложнее уравнений 269
5.2.2. Эквивалентные преобразования неравенств 271
5.2.3. Дробно-иррациональные неравенства 278
5.2.4. Метод интервалов при решении иррациональных неравенств 279
5.2.5. Замена при решении иррациональных неравенств 283
5.2.6. Использование монотонности при решении неравенств 284
5.2.7. Смешанные системы с двумя переменными 286
§ 5.3. Уравнения и неравенства с модулями 289
5.3.1. Уравнения с модулями 289
5.3.2. Неравенства с модулями 292
5.3.3. Комбинированные задачи с модулями 295
Упражнения 299

Ответы и указания к упражнениям 302
Глава 1 302
Глава 2 303
Задачи по комбинаторике 305
Глава 3 308
Глава 4 309
Глава 5 311

От издательства

Представляемый читателю УМК «Алгебра+: рациональные и иррациональные алгебраические задачи. Элективный курс» (учебное и методическое пособия) — одна из последних работ, подготовленных замечательным педагогом и ученым Александром Николаевичем Земляковым (17.04.1950–01.01.2005).

Выпускник МГУ им. М. В. Ломоносова, Александр Николаевич всю свою жизнь посвятил преподаванию математики в школе, сначала в ФМШ при МГУ (ныне — СУНЦ), а затем в ЭСШ № 82 РАО в г. Черноголовка. Он выпустил более 25 классов, причем среди его учеников — победители математических и физических олимпиад, ставшие впоследствии крупными учеными и общественными деятелями.

Заслуги А. Н. Землякова в области школьного образования трудно переоценить: собственные курсы алгебры, анализа, геометрии для школы; многочисленные спецкурсы, собиравшие полные аудитории; разработка структуры математических дисциплин в одногодичном потоке; книга для учителя с методическими комментариями по использованию на уроках CD-диска «1С: Репетитор. Математика». Александр Николаевич опубликовал несколько десятков учебных и методических пособий, сотни научных, научно-популярных и методических статей, в том числе пособие к учебнику геометрии А. В. Погорелова, которое уже более 20 лет служит настольной книгой учителей математики.

При подготовке к изданию УМК «Алгебра+: рациональные и иррациональные алгебраические задачи. Элективный курс» большую помощь издательству оказал канд. хим. наук, ведущий научный сотрудник Центра экспериментальной психодидактики РАО Наиль Кутдусович Ханнанов, коллега А. Н. Землякова, прочитавший и отредактировавший текст, бережно сохраняя стиль автора.

Издательство выражает глубокую признательность Национальному фонду подготовки кадров, оказавшему финансовую поддержку при выпуске данного издания.

Мы надеемся, что книги А. Н. Землякова будут интересны и учителям, открывающим красоту математики своим ученикам, и учащимся, для которых эта красота только приоткрылась.

Предисловие

— Чему же вас учили? — спросила Алиса.
— Сначала чихать и плясать, конечно, — ответил Мок-Тартль, — затем четырем действиям арифметики: Служению, Почитанию, Угождению и Давлению.

Льюис Кэрролл

Старайся наблюдать различные приметы...

А. С. Пушкин

Чему же вас учили в школьной алгебре? Конечно, сначала числам, потом выражениям с числами и буквами — «переменными», «неизвестными», «коэффициентами», — затем действиям сложения, вычитания, умножения и деления, а потом и возведения в степень, извлечения корня и т. д. Словом, «всего не перечислишь»!

Действительно, одним словом не перечислишь... Но несколькими основными словами — можно попытаться. Вы учились, в первую очередь, *преобразованию* различных *выражений* (раскрытию скобок, приведению подобных членов) и составленных из них *отношений* (уравнений, неравенств между выражениями), а во вторую — как принято говорить, ***решению*** различных получающихся при этом ***алгебраических задач***: тех самых уравнений, неравенств; потом к ним присоединились системы и совокупности уравнений и неравенств, совокупности систем и системы совокупностей и т. д. Все такие математические задачи мы и условимся называть просто *алгебраическими задачами* — можно сказать, «в специальном смысле» (ведь другие задачи алгебры, например на *доказательство*, тоже можно отнести к «алгебраическим», но в другом, совсем широком смысле). Как видите, это довольно удобно, а многочисленные уравнения, неравенства, системы, в которые входят, например, *тригонометрические* функции, можно по аналогии назвать *тригонометрическими алгебраическими задачами* и т. п.

Итак, главная задача элементарной (школьной) алгебры состоит в ***решении алгебраических задач***. В действительности *алгебраические задачи* с переменными относятся к *математической логике*, и в ней они называются *предложениями*[1)] с переменными. Например, уравнение можно определить как *предложение*, *имеющее вид* ***равенства*** *между двумя выражениями* (содержащими переменные). В логике предложение может быть истинным или ложным в

[1)] Или *предика́тами* (*лат.*).

зависимости от конкретного значения переменной, подобно тому как уравнение может «выполняться» или «не выполняться».

Не бойтесь — мы не «засохнем» в чаще строго логических определений основных понятий элементарной алгебры: ограничимся только наведением порядка, необходимого для ясного понимания рассматриваемых в этой книге решений частных примеров и *общих методов* решения алгебраических задач. Все нужные нам понятия и определения даны в самом первом параграфе вводной главы, которая так и называется: «Логика алгебраических задач». Обратим внимание на ключевое в школьной алгебре понятие ***равносильности*** (или ***эквивалентности***; это синонимы) задач. Фактически оно присутствует в обычных школьных учебниках, но иногда — «молчаливо». А равносильность (эквивалентность) двух задач — условно, $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, — означает всего лишь, что *множества решений этих задач одинаковы*, совпадают. Это отношение между двумя задачами записывают с помощью знака равносильности (эквивалентности): $\mathcal{P}_1 \Longleftrightarrow \mathcal{P}_2$ («$\mathcal{P}_1$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется $\mathcal{P}_2$» — возможный вариант чтения записи), и переход от исходных задач к *более простым* эквивалентным задачам — одна из фундаментальнейших идей методологии решения алгебраических задач. Более подробно обо всем этом сказано в § 1.1 и, практически, на протяжении всего пособия. Постепенно овладев и этой общей идеей, и сопутствующими приемами логического оформления решений, вы весьма существенно продвинетесь в элементарной алгебре как «искусстве» решения алгебраических задач!

Мы не случайно употребили здесь слово «искусство»: именно так величали умение решать алгебраические задачи в эпоху Возрождения: **Ars magna...** (лат.) — **Великое искусство...** именовался главный трактат по алгебре великого *Джероламо Кардано* (1545), **Введением в аналитическое искусство** (лат. **In artem analyticen Isagoge**, 1591) назвал свой фундаментальный труд известнейший *Франсуа Виет...* Мы ограничились названием поскромнее «**Алгебра+**», но не удержимся от того, чтобы не перефразировать слова выдающегося русского советского педагога-математика *И. И. Александрова*: «*Искусство решать алгебраические задачи слагается, главным образом, из умения читать условие задачи, из находчивости в проведении вспомогательного преобразования и, наконец, равным образом, из знания и умения применять*

методы»[1]. «Сверхзадача» данной книги состоит в том, чтобы довести читателя-школьника, при известной его настойчивости, до понимания истинности сказанного, до овладения компонентами умения решать задачи и до умения самостоятельно их применять — будь то задача из контрольной, экзамена или какого-нибудь задачника.

Спустимся, однако, на землю. Очень многое из того, что содержится в книге, можно найти и на страницах обычных школьных учебников. Но разбросан нужный материал по разным учебникам и по разным их страницам. В данном пособии весь относящийся к элементарной алгебре (к решению алгебраических задач) материал упорядочен и систематизирован так, чтобы сжато, но полно было представлено все то, что нужно для решения основной задачи, которую мы ставим перед использующим эту книгу: *научиться самостоятельно решать алгебраические задачи*. Но «*никто не обнимет необъятного!*» (*Козьма Прутков*), и мы ограничились в данной книге только *рациональными* и *иррациональными* алгебраическими задачами, так что за ее пределами остались тригонометрические, логарифмические, показательные и «смешанные» алгебраические задачи.

Заметим, что за пределами этого курса остались и основные методы решения *алгебраических задач с параметрами*. Однако здесь мы также не бросаем читателя «на произвол судьбы»: во втором параграфе вводной главы «Логика алгебраических задач» объясняется, что это такое, и рассматриваются специфические задачи с параметрами «логического типа» — как, скажем, задача поиска *тех значений параметра*, при которых выполнено то или иное логическое условие. Здесь же даны и различные графические или координатные трактовки задач с параметрами. Все это следует рассматривать как небольшой задел, дополняющий обычную школьную алгебру, для того чтобы «не пугаться» иногда встречающихся на экзаменах задач с параметрами[2].

Полное представление о содержании пособия проще всего получить из его оглавления. И станет ясна еще одна особенность

---

[1] *Александров Иван Иванович* (1856–1919): «*Искусство решать задачи слагается главным образом из уменья читать чертежи, из находчивости в проведении вспомогательной линии и, наконец, равным образом, из знания и уменья применять методы*». — Сборник геометрических задач на построение, изд. 18-е, М: Учпедгиз, 1950, с. 5.

[2] Запомните афористичное правило: *задачи с параметрами решаются так же* (т. е., в большинстве случаев, теми же методами), *как и задачи без параметров*.

пособия: практически всякий раз, когда мы обращаемся к материалу, относящемуся к школьной программе, мы не останавливаемся на его простом повторении, а стараемся рассмотреть его под более общим ракурсом, с точки зрения, можно сказать, *высшей математики*,[1] дающей возможность более глубоко и общо рассмотреть связанные со школьной математикой вопросы. И такой ракурс рассмотрения школьной алгебры прежде всего работает на *повышение общей математической культуры* читателя, независимо от его ориентации на конкурсные экзамены.

Вторая глава посвящена общей теории уравнений, проистекающей из известных фактов о линейных и квадратных уравнениях. Их обобщения — кубические, уравнения степени 4 и, вообще, *полиномиальные уравнения* произвольных степеней, — составляют основной предмет изучения. От решения кубических уравнений *методом разложения* следует мостик к *теореме Безу* с ее многочисленными следствиями. Отметим, что еще 30 лет назад эта теорема входила в основное содержание курса математики, и здесь мы ее реабилитируем в полной мере. Одним из алгоритмов деления многочлена на двучлен с остатком является *метод Руффини—Горнера*[2]. Он впоследствии весьма красивым образом применяется для выполнения в уравнениях линейной замены и, заодно, получения *треугольника Паскаля*. Рассматривая «вершину» школьной алгебры — *теорему Виета*, мы не ограничиваемся случаями степеней 2 и 3, а разбираем ее и для различных полностью разложимых многочленов произвольной степени. С теоремой Виета и *общими системами Виета* связаны настоящие математические задачи по комбинаторике. Отметим, что и комбинаторика до 1970-х гг. входила в основную программу; в упражнениях же к гл. 2 отдается дань и многочисленным задачам «на житейско-игровые» темы. Естественно, с системами Виета для полностью разложенных многочленов вида $(x \pm a)^n$ связана обычная *формула Ньютона для степени бинома*. Мы обратили внимание на некоторые «изыски» гл. 2; остальной ее материал, как и тематика следующей гл. 3, достаточно традиционны: это *метод разложения* (вынесением линейного множителя и методом неопределенных коэффициентов) и *метод замены* (в том числе основанной на специфичности вида уравнений: «*Старайся наблюдать различные приметы*»).

---

[1] Не гнушаясь анализом, т. е. применением, где удобно, производной.

[2] Обычно он называется «схемой Горнера», но мы восстанавливаем здесь и имя его первооткрывателя *Паоло Руффини* (1765–1822).

Главу 4, посвященную методам решения систем рациональных алгебраических уравнений, можно считать центральной по разнообразию представленных в ней идей и методов: это и третий (после *замены* и *разложения*) «кит» методологии решения задач элементарной алгебры — метод *подстановки*, и использование идей *однородности, симметричности, монотонности и ограниченности*, сведение уравнений к системам и проч.

Глава 5, в которой основными становятся *схемы эквивалентных переходов* в иррациональных задачах, позволяющие освобождаться от входящих в задачи радикалов (или модулей) — это, с одной стороны, «*Конец — делу венец*»[1]. С другой же стороны, это — «азбука» выпускника и абитуриента, «альфа» и «омега» стандартного набора задач конкурсных экзаменов.

Материал рассчитан на сжатое, концентрированное изучение (вместе с задачным тренингом) в течение элективного курса, рассчитанного на 70 ч. (уроков). Однако в случае целесообразности, по выбору школьников или учителей, можно изучить материал пособия и по отдельным модулям. Из них выделяются два: «*Рациональные алгебраические задачи*» (уравнения, неравенства, системы; гл. 3–4, с привлечением материала гл. 1–2 по мере надобности) и «*Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства*» (гл. 3 и 5, с привлечением материала тех же гл. 1–2 — по мере надобности). Нам представляется, что любой (по выбору) из указанных модулей можно изучить за 35–40 ч. (с упражнениями), но при недостаточной подготовленности класса/группы можно предложить их изучение и за полные 70 ч.

[1] Хотя он и гораздо более серьезный, чем у Шекспира, тут мы тоже пытались следовать известному лозунгу французских студентов образца 1968 г.: «*Все серьезные вещи нужно делать предельно весело*», — так что и здесь есть «коварности»!

Глава 1

Логика алгебраических задач

§ 1.1. Основные понятия: алгебраические задачи, решения, равносильность

1.1.1. Алгебраические задачи как предложения с переменными

В элементарной алгебре изучаются *выражения* (с *переменными* или без них), *действия* (или *операции*) над выражениями и соответствующие *алгебраические преобразования*, а также *отношения* между выражениями: *равенства* — тождества и уравнения, *неравенства*, совместное выполнение нескольких алгебраических условий и т. д. Все возможные отношения между выражениями с переменными — *уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств, их совокупности* — будем называть ***алгебраическими задачами*** или, коротко, ***задачами***.

С точки зрения *логики* алгебраическая задача с переменной x есть *предложение*[1] *с переменной*; обозначим его через $\mathcal{P}(x)$. Те значения переменной, при которых это предложение верное, истинное[2], называются *решениями* алгебраической задачи. *Решить алгебраическую задачу* — значит *найти все ее решения* или, иначе, найти ***множество*** *всех решений задачи*, которое *формально* можно записать как

$$\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathcal{P}(x)\}$$

(читается: «*множество действительных чисел x таких, что предложение $\mathcal{P}(x)$ истинно*»).

---

[1] В смысле *математическом*, отнюдь ***не грамматическом***. Предложение — это *утверждение, высказывание*, которое должно иметь смысл (математический!) и может быть *верным* или *неверным* — *истинным* или *ложным*.

[2] Иногда говорят: предложение (уравнение, неравенство, ...) *выполняется* при данном значении переменной. Говорят также, что данное значение переменной *удовлетворяет* соответствующему предложению (уравнению, неравенству, ...).

1.1.2. Равносильность и следование задач

Обычная методология решения алгебраических задач состоит в переходе от исходной задачи путем алгебраических (и логических) преобразований к более простой (желательно, *стандартной*) задаче, но *эквивалентной* исходной. Цель такого перехода состоит в том, чтобы решить последнюю и получить «*ответ*», т. е. разумное описание множества решений исходной задачи. *Две задачи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ называются* ***эквивалентными*** *или* ***равносильными****, если множества их решений $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ совпадают, одинаковы*: $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$. В этом случае пишут

$$\mathcal{P}_1 \iff \mathcal{P}_2$$

(читается «$\mathcal{P}_1$ [выполняется] ***тогда и только тогда, когда*** $\mathcal{P}_2$ [выполняется]»). Можно сказать, что задачи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ равносильны в том и только том случае, когда любое решение первой задачи является решением второй, и обратно, любое решение второй задачи является решением первой.

Иногда такой подход не годится — тогда вместо равносильных переходов используются *переходы к следствиям*. *Задача $\mathcal{P}_2$ называется* ***следствием*** *задачи $\mathcal{P}_1$, если любое решение задачи $\mathcal{P}_1$ является решением задачи $\mathcal{P}_2$*, обратное может и не выполняться. Записывается следование с помощью односторонней стрелки — *знака следования*:

$$\mathcal{P}_1 \implies \mathcal{P}_2$$

(читается «из [справедливости] $\mathcal{P}_1$ *следует* (*вытекает*) [справедливость] $\mathcal{P}_2$»). В терминах множеств решений следование записывается как *включение*

$$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$$

(мы преднамеренно использовали знак *нестрогого включения* — чтобы подчеркнуть, что *эквивалентность является частным случаем следования*).

При решении той или иной алгебраической задачи последовательным упрощением путем перехода к следствиям мы рискуем приобрести лишние — или, как говорят, *посторонние* — решения, т. е. такие значения переменных, которые удовлетворяют итоговой задаче, но не удовлетворяют исходной. Чтобы выбрать только истинные решения, т. е. выбросить посторонние, нужно сделать *проверку*, которая осуществляется

подстановкой всех найденных решений в исходную задачу с целью выяснения истинности или ложности соответствующих предложений. Иногда эта проверка является довольно трудной, однако в случае неравносильных переходов к следствиям *необходимой* частью решения задачи.

1.1.3. Равносильность уравнений и систем с одной переменной

Мы изложили «общие идеи», лежащие в основе всех подходов к *решению алгебраических задач*, т. е. к *отысканию всех их решений*.

Заметьте — мы употребляем слово **«решение»** в двух разных смыслах: *решение* как процесс отыскания *решений* данной задачи — числовых значений переменных, удовлетворяющих задаче! В лингвистике в таких случаях говорят о словах-*омонимах*. В математике омонимы весьма часто употребляются в качестве терминов, но, как правило, к недоразумениям это не приводит.

При этом пока остался не разъясненным *точный смысл* самого понятия *решения алгебраической задачи*. Поясним смысл общих идей и понятий на конкретном примере — отдельном *классе алгебраических задач*: рассмотрим уравнения с одной переменной (неизвестной) x.

Начнем с начала[1].

Равенство между двумя выражениями, содержащими переменную x, называется уравнением относительно x. Иначе говоря, *уравнением с переменной x называется предложение, имеющее вид равенства между двумя выражениями, содержащими эту переменную*.

Символически любое уравнение относительно переменной x можно записать в виде

$$f(x) = g(x). \tag{1}$$

Переменная x в уравнении называется также *неизвестной*, поскольку, как правило, из уравнения нужно *найти* те зна-

[1] «*Начни с начала, — важно ответил Король* [Белому Кролику], — *и продолжай, пока не дойдешь до конца. Как дойдешь — кончай*». *Льюис Кэрролл*. **Алиса в стране чудес**. М.: Наука, 1991, с. 95. Напомним, что *Льюис Кэрролл* — литературный псевдоним английского математика, профессора Оксфордского университета *Чарлза Лютвиджа Доджсона* (1832–1898).

чения x, при которых оно выполняется. Напомним строгие определения связанных с уравнениями понятий.

Если при подстановке в уравнение (1) числового значения $x = x_0$ получается *верное числовое равенство* $f(x_0) = g(x_0)$, то число x_0 называется *решением* или *корнем* этого уравнения. Заметим, что *термин* «**корень**» *употребляется* (т. е. является *синонимом* слова «*решение*») *только для уравнений с одной переменной*.

В приведенном определении неявно предполагается, что при указанной подстановке значения $x = x_0$ в уравнение (1) *обе части уравнения определены*, т. е. оба выражения $f(x)$ и $g(x)$ при $x = x_0$ имеют смысл. Множество тех значений переменной, при которых обе части уравнения определены (имеют смысл), называется *областью допустимых значений уравнения* (часто пишут *ОДЗ уравнения*[1]). Можно рассматривать и *область допустимых значений выражения* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ *с переменной*, т. е. множество $\mathcal{E}(\mathcal{F})$ тех значений переменной x, при которых выражение $\mathcal{F}(x)$ *определено* (*имеет смысл*). Тогда ОДЗ уравнения (1) можно определить как пересечение ОДЗ левой и правой частей уравнения:

$$\mathcal{E}(1) = \mathcal{E}(f) \cap \mathcal{E}(g).$$

Таким образом, любой корень уравнения должен принадлежать ОДЗ этого уравнения.

Решить уравнение — значит, *найти все его корни*, или *найти множество всех решений* (корней) *уравнения*. Может оказаться, что уравнение вообще не имеет решений — таковыми являются, например, уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $\sin x = 2$. В этом случае множеством решений уравнения служит *пустое множество*, т. е. множество, у которого *нет элементов*. Пустое множество обозначается знаком $\varnothing$.

Вы привыкли к тому, что линейные уравнения записываются в виде $kx + b = 0$, квадратные — в виде $ax^2 + bx + c = 0$; в правой части этих записей стоит нуль. Так можно записать любое уравнение: достаточно в записи (1) перенести правую часть $g(x)$ в левую, с обратным знаком. Получающееся уравнение

$$f(x) - g(x) = 0 \tag{2}$$

[1] Иногда ОДЗ называют *областью определения* уравнения; мы же оставим этот термин для *области определения функции* или *выражения*.

имеет *в точности те же решения*, что и исходное уравнение (1), так как *числовое равенство* $f(x_0) = g(x_0)$ *верно тогда и только тогда, когда верно равенство* $f(x_0) - g(x_0) = 0$. Если два уравнения имеют *одни и те же решения*, т. е. *множества их решений совпадают*, то эти уравнения называются *равносильными* или *эквивалентными*. В таком случае между уравнениями ставят *знак* $\iff$ *равносильности* (*эквивалентности*) и пишут (1) $\iff$ (2) или

$$f(x) = g(x) \iff f(x) - g(x) = 0.$$

Сам переход от одного уравнения к другому называют *эквивалентным* (или *равносильным*) *переходом*, а соответствующее преобразование первого уравнения — *эквивалентным* (*равносильным*) *преобразованием*.

Поскольку при равносильных преобразованиях уравнений совокупность корней остается *неизменной*, напрашивается такой «общий метод» решения уравнений. Для решения «исходного» уравнения $\mathcal{Y}_0$ его стараются цепочкой равносильных преобразований

$$\mathcal{Y}_0 \iff \mathcal{Y}_1 \iff \mathcal{Y}_2 \iff \ldots \iff \mathcal{Y}_N$$

привести к более простому уравнению $\mathcal{Y}_N$ (желательно *стандартного* вида), корни которого можно было бы легко найти. При этом множество решений уравнения $\mathcal{Y}_1$ совпадает со множеством решений уравнения $\mathcal{Y}_N$, поэтому, решив уравнение $\mathcal{Y}_N$, мы тем самым решим и $\mathcal{Y}_1$.

Приведем простой пример:

$$2(x-3) = 3x + 2 \iff 2x - 6 = 3x + 2 \iff$$
$$\iff 2x - 3x = 2 + 6 \iff -x = 8 \iff x = -8$$

(знак равносильности переносится со строки на строку так же, как знак равенства). Исходное уравнение решено. В конце решения принято записывать *ответ*, т. е. совокупность всех корней уравнения либо их перечислением (в данном примере «*Ответ*: $x = -8$»), либо как множество (в данном примере «*Ответ*: $\{-8\}$»).

Равносильные преобразования уравнений сводятся к преобразованиям левой и правой частей, а также всего равенства (уравнения) в целом. При этом нужна особая осторожность —

даже «невинное» взаимное уничтожение слагаемых или сокращение множителей может оказаться отнюдь не равносильным преобразованием.

Пример 1.1.1. При взаимном уничтожении в уравнении $2x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ слагаемых $\frac{1}{x}$ получается уравнение $2x = 0$; но $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, т. е. при этом преобразовании «приобретается» *посторонний корень*, не являющийся корнем исходного уравнения (дробь $\frac{1}{0}$ не определена)[1]. □

Пример 1.1.2. При сокращении на общий множитель x в уравнении $\frac{2x^2}{x} = 0$ тоже получается *посторонний корень* $x = 0$. □

В обоих примерах уравнения не имеют решений — в таких случаях записывают: «*Ответ*: *нет решений*» или «*Ответ*: $\varnothing$».

Пример 1.1.3. После сокращения на общий множитель x в уравнении $2x^2 = x$ получится уравнение $2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, но в действительности исходному уравнению удовлетворяет и значение $x = 0$, так что в этом случае мы не приобрели, а *потеряли* корень, что «гораздо хуже». □

Из трех приведенных примеров можно сделать следующий вывод: *сокращать и взаимно уничтожать, т. е. формально приводить подобные члены в уравнениях н е л ь з я*! Точнее говоря, можно, но осторожно, «*с умом*» — так, чтобы не были потеряны и *не появлялись посторонние корни*. Мы не будем здесь приводить общие теоремы о равносильных преобразованиях уравнений — о том, что и когда можно делать с уравнениями. Равносильные преобразования уравнений (неравенств, систем и т. д.) мы рассмотрим постепенно на уравнениях (и задачах) с выражениями различных типов с учетом их специфики. Окажется, что во многих случаях для обеспечения равносильности того или иного преобразования уравнения достаточно к получающемуся новому уравнению добавить те или иные (соответствующие конкретному преобразованию) *ограничения* на неизвестную переменную x. Как правило, это

[1] Следующий далее символ □ будет обозначать завершение примера.

некоторые дополнительные условия, позволяющие от полученного уравнения перейти обратно к исходному уравнению. Чаще всего дополнительные ограничения имеют вид неравенств, и вместе с новым уравнением они записываются в *систему*. Так, в примерах 1.1.1–1.1.2 можно записать:

$$2x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \iff \begin{cases} 2x = 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \varnothing;$$

$$\frac{2x^2}{x} = 0 \iff \begin{cases} 2x = 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \varnothing.$$

Решениями системы, состоящей из уравнения с ограничениями называются такие корни уравнения, для которых выполняются все входящие в систему ограничения. Равносильность (эквивалентность) таких систем — их называют *смешанными* — определяется точно так же, как равносильность уравнений: через совпадение множеств решений. Если эквивалентными преобразованиями удается перейти к равносильной смешанной системе из более простого (чем исходное) уравнения с ограничениями, то сначала *решают уравнение*, а потом *проверяют ограничения* для всех найденных корней уравнения.

1.1.4. Совокупности и системы алгебраических задач

Снова обращаясь к примеру 1.1.3, сформулируем одно из главнейших правил элементарной алгебры:

при решении уравнений н е л ь з я сокращать на общие множители левой и правой частей[1)], *а следует перенести все члены уравнения в левую часть и вынести общий множитель за скобку, т. е. разложить уравнение*:

$$a(x)\,c(x) = b(x)\,c(x) \iff a(x)\,c(x) - b(x)\,c(x) = 0 \iff$$
$$\iff \Big(a(x) - b(x)\Big)\,c(x) = 0.$$

Скажем, в примере 1.1.3 записываем:

$$2x^2 = x \iff 2x^2 - x = 0 \iff$$
$$\iff x(2x-1) = 0 \iff x = 0 \vee 2x - 1 = 0,$$

[1)]Конечно, если в эти множители входят переменные. На числовые множители, отличные от нуля, можно и нужно сокращать.

и уравнение «разбивается» на два более простых. Иначе говоря, исходное уравнение $2x^2 = x$ справедливо тогда и только тогда, когда выполняется уравнение $x = 0$ *или* уравнение $2x - 1 = 0$. *Пара уравнений*, которой эквивалентно (в указанном выше смысле) исходное уравнение, называется *совокупностью уравнений* (в математической логике — *дизъюнкцией уравнений*). Можно рассматривать совокупности (дизъюнкции) любых алгебраических предложений (задач: уравнений, неравенств, систем, ...); совокупность задач записывается их перечислением через *знак дизъюнкции* «$\vee$», а также аналогично системам, только через квадратную скобку. Скажем, в приведенном примере можно записать:

$$x(2x-1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Обобщая все вышеизложенное, приходим к общему понятию *совокупности задач* $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, ..., $\mathcal{P}_m$ *с одними и теми же переменными*: это новая алгебраическая задача

$$\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \vee \ldots \vee \mathcal{P}_m,$$

решениями которой являются (*по определению*) те и только те наборы значений переменных, которые суть решения *хотя бы одной* из входящих в совокупность задач.

Аналогично вводится и общее понятие *системы задач* $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, ..., $\mathcal{P}_m$ *с одними и теми же переменными* как новой алгебраической задачи, записываемой с помощью фигурной скобки или в строку через *знак конъюнкции предложений*[1] «$\wedge$»:

$$\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}_m.$$

Решениями системы (*по определению*) являются те и только те наборы значений переменных, которые являются решениями *всех* входящих в систему задач. Вместо знака «$\wedge$» для конъюнкции употребляется и знак $\&$.

Вновь возвращаясь к идее разложения уравнений, заменяющей некорректное сокращение, можно интерпретировать использование разложения как переход от одного (разложенного) уравнения к совокупности более простых: если A, B, C —

[1] Для алгебраических задач термин «конъюнкция» является *синонимом* слова «система».

выражения с переменными, то

$$A \cdot B = 0 \iff \left[\begin{array}{l} A = 0, \\ B = 0; \end{array}\right.$$

$$A \cdot B \cdot C = 0 \iff A = 0 \vee B = 0 \vee C = 0.$$

Однако эти переходы в действительности *не всегда являются эквивалентными*.

Пример 1.1.4. Решая разложенное[1)] уравнение

$$(x-1)\sqrt{x-2} = 0,$$

нельзя[2)] записать, что

$$(x-1)\sqrt{x-2} = 0 \iff x - 1 = 0 \ \vee \ \sqrt{x-2} = 0.$$

Действительно, совокупность уравнений имеет два решения: $x = 1$, $x = 2$, но первое из них не удовлетворяет исходному уравнению, ибо квадратный корень $\sqrt{x-2}$ *не определен* при $x = 1$. Правильно было бы записать так:

$$(x-1)\sqrt{x-2} = 0 \iff \begin{cases} x - 1 = 0, \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \vee \ \sqrt{x-2} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 1, \\ x \geqslant 2 \end{cases} \vee x - 2 = 0 \iff \varnothing \ \vee \ x = 2 \iff x = 2.$$

Ответ: $x = 2$. □

Таким образом, выписанные выше переходы для разложенных уравнений вида $A \cdot B = 0$, $A \cdot B \cdot C = 0$ заведомо будут эквивалентными, если только выражения A, B, C *всюду определены*. Можно также *всегда* использовать (заведомо!) эквивалентные переходы *к совокупностям систем уравнений с ограничениями*, типа такого:

$$AB = 0 \iff \begin{cases} A = 0, \\ B \ \text{определено} \end{cases} \vee \begin{cases} B = 0, \\ A \ \text{определено}. \end{cases}$$

Переходы к совокупностям систем типичны и при решении неравенств (см. ниже п. 1.1.6). Например, для двух (не обязательно всюду определенных) выражений A и B справедливы

[1)] *Разложенным* мы называем такое уравнение или неравенство, в правой части которого стоит нуль.

[2)] Точнее, записать можно, но это будет неправильно: ведь можно написать **«КАРОВА»**, но это неправильно.

следующие схемы эквивалентных переходов:

$$AB > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} A > 0, \\ B > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A < 0, \\ B < 0; \end{cases}$$

$$\frac{A}{B} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} A \geqslant 0, \\ B > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A \leqslant 0, \\ B < 0. \end{cases}$$

1.1.5. Следование уравнений с одной переменной

Коротко остановимся на втором «общем методе» решения уравнений — путем перехода к *следствиям*. Напомним, что *из уравнения* $\mathcal{Y}_1$ *следует уравнение* $\mathcal{Y}_2$, или, иначе говоря, *уравнение* $\mathcal{Y}_2$ *является следствием уравнения* $\mathcal{Y}_1$, если каждый корень уравнения $\mathcal{Y}_1$ является корнем уравнения $\mathcal{Y}_2$. В этом случае пишут $\mathcal{Y}_1 \Longrightarrow \mathcal{Y}_2$. При переходе от уравнения к его следствию множество решений может увеличиться, расшириться — могут появиться «дополнительные», *посторонние* для исходного уравнения корни, но зато никакие корни не пропадут. Соответственно, второй общий метод решения состоит в следующем.

Чтобы решить «исходное» уравнение $\mathcal{Y}_0$, стараются максимально упростить его, переходя к следствиям и не беспокоясь о равносильности проводимых преобразований (т. е. о возможности обратного перехода):

$$\mathcal{Y}_0 \Longrightarrow \mathcal{Y}_1 \Longrightarrow \mathcal{Y}_2 \Longrightarrow \ \ldots \ \Longrightarrow \mathcal{Y}_N.$$

Далее находятся все корни итогового уравнения $\mathcal{Y}_N$ и, наконец, все эти корни *проверяются* подстановкой в исходное уравнение, с тем чтобы отбросить *посторонние корни*, появившиеся по ходу решения.

Типичное преобразование уравнений, при котором *могут* появиться посторонние корни[1], — *возведение обеих частей уравнения в квадрат*: всегда

$$A = B \ \Longrightarrow \ A^2 = B^2,$$

но обратное, вообще говоря, неверно. Например, $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$, но обратное неверно; с другой стороны,

[1] А могут и не появиться.

$|x| = 1 \Rightarrow |x|^2 = 1$, т. е. $x^2 = 1$, причем верно и обратное: $|x| = 1 \Leftrightarrow |x|^2 = 1$.

Пример 1.1.5. Решая уравнение

$$\sqrt{x} = x - 2, \qquad (*)$$

переходим к следствиям:

$$(*) \Longrightarrow x = (x-2)^2 \Longleftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x-4) = 0.$$

Далее проверкой убеждаемся, что значение $x = 4$ удовлетворяет исходному уравнению, а корень $x = 1$ является посторонним (несмотря на то, что он входит в ОДЗ уравнения[1]). □

Отметим, что причиной появления посторонних корней могут оказаться и тождественные преобразования выражений в левой и правой частях уравнения в том случае, когда используются не *абсолютные тождества*, а *тождества, расширяющие ОДЗ выражений*, типа равенства $\sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{AB}$. Тождествами и их классификацией мы займемся тогда, когда в них возникнет реальная необходимость.

Напоследок обратим внимание на логический нюанс, связанный со следованием предложений (в нашем случае — уравнений). Если обозначить множества решений уравнений $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$ через $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ соответственно, то следование уравнений $\mathcal{Y}_1 \Rightarrow \mathcal{Y}_2$ имеет место тогда, когда множество $\mathcal{M}_1$ *содержится* в множестве $\mathcal{M}_2$. Поскольку *пустое множество содержится в любом множестве, из уравнения, не имеющего корней, следует любое другое уравнение*. Это так согласно определению, хотя при этом нужно будет признать справедливость столь вопиющих, казалось бы, нелепостей, как следования

$$x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x = 17,$$
$$x^2 + x + 1 = 0 \Longrightarrow \sin x^\circ = 0,$$
$$\sin x^\circ + 10 = 0 \Longrightarrow x^2 = 13,$$

а также, более того, эквивалентность, например, таких уравнений:

$$x^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow \cos x^\circ = 17,$$
$$\sin x^\circ = 13 \Longleftrightarrow \cos x^\circ = 33,$$

и т. д. и т. п.

[1] К разбору этого уравнения мы еще вернемся в § 5.1.

Это, однако, все-таки «экзотика». В гл. 2–3 мы сосредоточимся на *методах решения уравнений*, имеющих решения, начав с уравнений простейшего, но важнейшего типа — с *рациональных* и, в частности, *полиномиальных алгебраических уравнений*.

1.1.6. Неравенства с переменной и числовые неравенства

Два выражения, содержащие переменную x и соединенные одним из четырех знаков неравенства: «$>$», «$<$», «$\geqslant$» или «$\leqslant$» (иногда к ним причисляют пятый знак «$\neq$»), — образуют ***неравенство с переменной*** x (или неравенство ***относительно*** x). Иначе можно сказать, что *неравенством с переменной* x *называется* ***предложение, имеющее вид неравенства между двумя выражениями, содержащими эту переменную***.

Символически любое неравенство относительно x можно записать в виде

$$f(x) > g(x), \text{ или } f(x) < g(x), \text{ или } f(x) \geqslant g(x), \text{ или } f(x) \leqslant g(x).$$

Переменную x в таких неравенствах называют также *неизвестной*. Число x_0 называется *решением неравенства*, если при подстановке в него значения $x = x_0$ получается *верное числовое неравенство*. (Отметим, что, в отличие от решений уравнений, решения неравенств никогда не называют «корнями».) *Решить* данное неравенство относительно x значит найти ***все*** его решения, т. е. совокупность, множество всех решений. Если два неравенства имеют одно и то же множество решений, то они называются *равносильными* (*эквивалентными*). В этом случае между неравенствами ставится знак равносильности «$\Longleftrightarrow$»: например,

$$f(x) \geqslant g(x) \iff f(x) - g(x) \geqslant 0.$$

Таким образом, в принципе любое неравенство можно записать как сравнение выражения от переменной x с нулем. Обоснование записанной равносильности неравенств с переменными и вообще эквивалентности тех или иных преобразований таких задач (неравенств) базируется на свойствах *числовых неравенств*. Напомним кратко основные сведения о неравенствах между числами.

Действительные числа подразделяются на *положительные* (пишут $x > 0$), *отрицательные* ($x < 0$) и *нуль*. Основными свойствами действий над числами по отношению к этой их классификации являются следующие два:

(а) *сумма двух чисел одного знака имеет тот же знак*;

(б) *произведение двух чисел одного знака положительно, а произведение двух чисел разного знака отрицательно* (это так называемое «*правило знаков*»).

Для двух неравных чисел $a \neq b$ число a *больше* числа b (пишут $a > b$), если разность $a - b$ является положительным числом; a *меньше* b, $a < b$, если разность $a - b$ есть число отрицательное. Из указанных свойств **(а)** и **(б)** положительных и отрицательных чисел вытекают следующие *свойства числовых неравенств* (т. е. отношений неравенства между числами), которые неоднократно будут использоваться в дальнейшем:

(0) $a > b \iff b < a$;

(1) $a > b, \quad b > c \implies a > c$

(напомним, что символ «$\implies$» означает «*следует*»; например, в данном случае записанное свойство читается так: «*Из того, что* $a > b$ *и* $b > c$, *следует, что* $a > c$»; другой распространенный вариант чтения этой записи: «*Если* $a > b$ *и* $b > c$, *то* $a > c$»);

(2) $a > b \implies a + c > b + c$ (*при любом* $c \in \mathbb{R}$);

(3) $a > b, \quad c > d \implies a + c > b + d$;

(4) $a > b \implies -a < -b$ (*или* $-b > -a$);

(5) $a > b, \quad c > 0 \implies ac > bc$;

(6) $a > b, \quad c < 0 \implies ac < bc$.

Кроме *строгих* неравенств (больше, меньше), рассматривают *нестрогие* неравенства:

$a \geqslant b \iff a > b$ *или* $a = b$ (*больше или равно*);

$a \leqslant b \iff a < b$ *или* $a = b$ (*меньше или равно*).

Так, например, $5 \geqslant 3$, $5 \geqslant 5$, $5 \leqslant 5$.

Наряду с неравенствами рассматривают *системы неравенств* с одной переменой: число x_0 называется *решением системы* неравенств, если оно является решением каждого из неравенств системы. В дальнейшем нам часто придется решать системы неравенств; при этом удобно отмечать множество решений каждого неравенства на отдельной («своей») оси, а множество решений системы «в целом» (т. е. пересечение множеств решений входящих в систему неравенств) — тоже на отдельной «итоговой» оси[1]. Поясним это на примере.

[1] Если множества решений всех неравенств отмечать на одной и той же оси, то может получиться нечто маловразумительное. Не жалейте осей!

Пример 1.1.6. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ 2x < 4. \end{cases} \qquad (*)$$

Перейдем от системы $(*)$ к равносильной системе:

$$(*) \iff \begin{cases} x \geqslant -1, & \text{(a)} \\ x < 2. & \text{(b)} \end{cases}$$

Отмечаем множества решений неравенств (a) и (b) на осях, расположенных одна под другой (при этом начало O одной оси располагаем в точности над началом другой, см. рис. 1.1), а затем отмечаем пересечение этих множеств на третьей оси, расположенной под двумя первыми (обратите внимание: мы по-разному помечаем концевые точки промежутков, входящие и не входящие в множества решений).

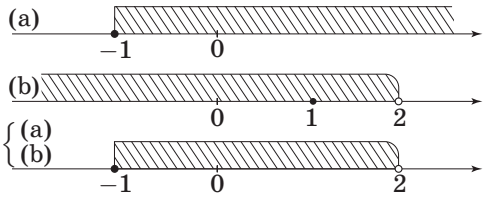


Рис. 1.1

Ответ при решении неравенств и систем неравенств с одной переменной записывают с помощью стандартных обозначений промежутков. В данном случае допустимы три формы записи ответа: $x \in [-1, 2)$, $[-1, 2)$ или $-1 \leqslant x < 2$. □

§ 1.2. Задачи с параметрами и логические алгебраические задачи

1.2.1. Что такое задача с параметром

Задача (уравнение, неравенство, система или совокупность таких задач) с двумя переменными x и a, где x — *неизвестная*, a — ***параметр***, называется ***задачей с параметром*** a. ***Решить задачу*** $\mathcal{P}(x,a)$ ***с параметром*** значит *при каждом допустимом значении параметра* a найти *все решения* x *этой задачи*.

Получается, что сразу нужно решить как бы *бесконечно много задач*. Как это делается, будет понятно из приводимых ниже примеров.

Параметров-переменных, как и переменных-неизвестных, может быть несколько. И ранее, исследуя квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, вы *в действительности* решали *уравнение с одной неизвестной x и тремя параметрами $a \neq 0$, b и c*! Далее мы ограничимся сейчас задачами с одним параметром и одной неизвестной.

Пример 1.2.1. Решая линейное относительно x неравенство с параметром: $ax \leqslant a$, конечно, обе части на a разделить нельзя не только по причине, указанной в пп. 1.1.2–3, но и потому, что при умножении/делении неравенства на знакопеременное выражение, каким в данном случае является a, знак неравенства может смениться на противоположный (п. 1.1.6, свойства числовых неравенств (5) и (6)). Значит, нужно отдельно рассмотреть три случая: $a = 0$, $a > 0$ и $a < 0$.

Рассмотрение случаев при решении задач с параметрами часто удобно оформлять как *равносильный переход к совокупности систем*. Для рассматриваемого неравенства можно записать:

$$ax \leqslant a \iff \begin{cases} a = 0, \\ 0 \cdot x \leqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0, \\ ax \leqslant a \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0, \\ ax \leqslant a \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a = 0, \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0, \\ x \leqslant 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$$

Остается выписать *ответ*. В задачах с параметрами принято записывать различные случаи в порядке возрастания параметра. В данном примере

Ответ:

$a < 0 \;\to\; x \in (-\infty, 1]$ (т. е. если $a < 0$, то $x \in (-\infty, 1]$);

$a = 0 \;\to\; x \in \mathbb{R}$ (или x *любое*);

$a > 0 \;\to\; x \in [1, +\infty)$. □

В большинстве уравнений, неравенств и систем с параметрами применяются те же приемы, что и при решении обычных задач такого рода с числовыми данными.

Пример 1.2.2. Решая еще одно линейное относительно x неравенство

$$ax > a + x, \qquad (*)$$

прежде всего приводим его к «стандартному» виду $kx > c$, чтобы потом разделить обе части на k (с учетом знака и отдельным рассмотрением случая $k = 0$). Имеем:

$$(*) \iff ax - x > a \iff (a-1)x > a \iff$$

$$\iff \begin{cases} a-1=0, \\ 0 \cdot x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a-1>0, \\ (a-1)x > a \end{cases} \vee \begin{cases} a-1<0, \\ (a-1)x > a \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a=1, \\ \text{нет решений} \end{cases} \vee \begin{cases} a>1, \\ x > \dfrac{a}{a-1} \end{cases} \vee \begin{cases} a<1, \\ x < \dfrac{a}{a-1} \end{cases}.$$

Ответ:

$$a < 1 \;\to\; x \in \left(-\infty, \frac{a}{a-1}\right);$$

$$a = 1 \;\to\; \varnothing^{1)} \;\; (\text{или } \textit{нет решений});$$

$$a > 1 \;\to\; x \in \left(\frac{a}{a-1}, +\infty\right). \qquad \square$$

Как видите, «бесконечное число» неравенств можно решить за конечное время. Обычно область значений параметра разбивается на несколько промежутков, в каждом из которых ответ записывается в единообразном виде. Точки, отделяющие один такой промежуток от другого (т. е. отделяющие *различные случаи*), называются ***критическими значениями*** *параметра*. В примерах 1.2.1–1.2.2 было по одному критическому значению: это $a = 0$ и $a = 1$ соответственно. Их может быть и больше, что иллюстрируется следующим примером.

Пример 1.2.3. Решим квадратное уравнение $x^2 + 2ax + 1 = 0$ с параметром a. Как обычно, вычисляем дискриминант D или его четверть $D_* = D/4 = a^2 - 1$. Значения a, при которых D_* обращается в нуль, т. е. $a = \pm 1$, и будут критическими. **Discriminantis** *лат.* как раз и означает *разделяющий, различающий* — в данном случае, различные возможности для квадратного уравнения: отсутствие корней или наличие одного/двух

[1)] Заметим, что писать $x \in \varnothing$ не принято; с другой стороны, вместо записи $x \in \mathbb{I}$, где $\mathbb{I}$ — какой-то промежуток, можно записывать просто этот промежуток (т. е. записывать *множество решений*), а можно указывать промежуток с помощью неравенств (например, записать $\alpha \leqslant x < \beta$).

корней. Если $D_* > 0$, т. е. $a^2 > 1 \Leftrightarrow |a| > 1$, то уравнение имеет два корня $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. При $a = \pm 1$ эти корни «сливаются» — уравнение имеет единственный корень $x = -a = \mp 1$, соответственно значениям a. Наконец, если $D_* < 0$, т. е. $|a| < 1$, то уравнение не имеет корней. Записываем *ответ*:

$$\begin{aligned} a < -1 \quad &\to \ x = x_{1,2}; \\ a = -1 \quad &\to \ x = 1; \\ -1 < a < 1 \ &\to \ \varnothing \ (\textit{нет решений}); \\ a = 1 \quad &\to \ x = -1; \\ a > 1 \quad &\to \ x = x_{1,2}, \end{aligned}$$

где $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. □

1.2.2. Логические задачи с параметрами

Задачи с параметрами часто приходится решать в прикладных исследованиях, причем типична такая постановка задач: требуется выяснить, *при каких значениях параметров для конкретной задачи* $\mathcal{P}(x,a)$ *выполнены те или иные условия.*

Пример 1.2.4. Пусть нужно найти все такие значения параметра a, при которых число $x = 2$ является решением неравенства

$$ax \geqslant a + x. \qquad (*)$$

Конечно, можно просто решить неравенство с параметром и посмотреть, для каких значений a точка $x = 2$ принадлежит множеству решений. В данном случае такой подход соблазнителен, ибо почти такое же неравенство было решено в примере 1.1.2. Однако не нужно торопиться. Здесь можно применить логические рассуждения, которые приведут к более короткому решению.

Немного подумав, приходим к такому подходу: нужно найти такие значения a, при которых подстановка числа $x = 2$ в неравенство $(*)$ дает верное числовое неравенство. Подставляем $x = 2$, и неравенство $(*)$ записывается в виде

$$2a \geqslant a + 2 \iff a \geqslant 2.$$

Ответ: $a \geqslant 2$. Задача решена! (Ответ в задачах такого типа можно записывать и коротко, как только что, и более

развернуто, например: «*условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда* $a \geqslant 2$».)

Попробуйте решить эту задачу «в лоб», найдя множество решений указанного неравенства в зависимости от значения параметра и выяснив, когда точка $x = 2$ ему принадлежит; сравните такое решение с приведенным. □

Пример 1.2.5. Требуется найти все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 - 2x + a < 0$ имеет хотя бы одно решение.

Заметим, что для решения задачи совсем не нужно решать выписанное неравенство, а стоит чуть-чуть порассуждать. Неравенство квадратичное, а квадратный трехчлен $p(x) = x^2 - 2x + a$ с положительным старшим коэффициентом (он равен 1) отрицателен на интервале между его корнями. Значит, данное неравенство имеет хотя бы одно решение в том и только том случае, когда трехчлен имеет два корня, т. е. в случае положительности его дискриминанта. Четверть дискриминанта равна $D_* = 1 - a$ и $D_* = 1 - a > 0 \Leftrightarrow a < 1$. Следовательно, *ответ*: $a < 1$. □

Пример 1.2.6. Найдем все значения параметра a, при которых неравенство $ax^2 + 2x + a < 0$ выполняется при всех значениях $x \in \mathbb{R}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы парабола — график $y = ax^2 + 2x + a$ левой части неравенства — целиком лежала ниже оси абсцисс. А для этого нужно, чтобы старший коэффициент квадратного трехчлена был отрицателен, $a < 0$ (ветви параболы должны быть направлены вниз), и корней у него не было, т. е. дискриминант трехчлена был отрицателен. Вычисляем четверть дискриминанта $D_* = 1 - a^2$ и записываем систему необходимых и достаточных условий на параметр:

$$\begin{cases} a < 0, \\ 1 - a^2 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a < 0, \\ a^2 > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a < 0, \\ |a| > 1 \end{cases} \iff a < -1.$$

Значит, *ответ*: $a < -1$. Правильно? Правильно, но не до конца. Чтобы понять почему, разберем еще один пример. □

Пример 1.2.7. Требуется найти число корней уравнения $ax^2 + 2x + a = 0$ в зависимости от значений параметра a.

В этом случае также напрашивается решение, основанное на исследовании знака дискриминанта, или четверти дискриминанта $D_* = 1 - a^2$. Как и выше, получаем, что уравнение не имеет корней (или *имеет* 0 *корней*) при $D_* < 0$, т. е. $|a| > 1$; имеет единственный корень при $D_* = 0$, т. е. $a = \pm 1$; имеет два корня[1)] при $D_* > 0$, т. е. $|a| < 1$ или $-1 < a < 1$. Теперь выписываем ответ — не так ли?

Не так! Рассматриваемое уравнение является квадратным только при $a \neq 0$. В случае же $a = 0$ оно *линейное*, имеет вид $0 + 2x + 0 = 0$ и единственный корень $x = 0$ (хотя знак *выражения* $D_*(a) = 1 - a^2$ положителен). Так что правильным (выписываемым также в порядке возрастания параметра от $-\infty$ до $+\infty$) будет

Ответ:

$$\begin{array}{rcl} a < -1 & \to & 0 \text{ корней;} \\ a = -1 & \to & 1 \text{ корень;} \\ -1 < a < 0 & \to & 2 \text{ корня;} \\ a = 0 & \to & 1 \text{ корень;} \\ 0 < a < 1 & \to & 2 \text{ корня;} \\ a = 1 & \to & 1 \text{ корень;} \\ a > 1 & \to & 0 \text{ корней.} \end{array}$$

□

Такой же «квадратный трехчлен» $p(x) = ax^2 + 2x + a$ фигурировал и в предыдущем примере, в котором случай $a = 0$ мы не заметили... Или проигнорировали... А вдруг в этом случае произошла ошибка?

При $a = 0$ неравенство из примера 1.2.6 имеет вид $2x < 0$ и не выполняется при $x > 0$, поэтому значение $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи (справедливости неравенства при любых значениях x). Так что ответ был выписан верный, однако решение не полное, а это в математике все равно, что неверное. Учтите это на будущее.

[1)] Заметьте: мы не говорим *«два различных корня»* — это само собой разумеется! Ведь говорить «два *одинаковых* корня» бессмысленно, хотя иногда и в учебниках так пишут. Точный смысл «одинаковости» корней, скажем, квадратного трехчлена или уравнения, придается через понятие *кратности* корней, которое будет рассмотрено в следующей главе.

1.2.3. Логические и кванторные формулировки задач с параметрами

Задачи из примеров 1.2.4–1.2.6, которые мы назвали «логическими», можно переформулировать в терминах сложных предложений $\mathcal{S}(a)$ с переменной — параметром a аналогично задаче отыскания решений x предложения $\mathcal{P}(x)$. Если в последнем случае решить задачу означало отыскать множество решений $\mathcal{M} = \{x \mid \mathcal{P}(x)\}$ (см. п. 1.1.1), то здесь ставится задача отыскания множества параметров, удовлетворяющих некоторому логическому условию $\mathcal{S}(a)$, т. е. отыскания множества $\mathcal{N} = \{a \mid \mathcal{S}(a)\}$. Выпишем это условие для задач из примеров 1.2.4–1.2.6.

4: $\mathcal{S}_4(a) = \{$из уравнения $x = 2$ следует неравенство $ax \geqslant a + x\}$.

5: $\mathcal{S}_5(a) = \{$существует $x \in \mathbb{R}$ такое, что $x^2 - 2x + a < 0\}$.

6: $\mathcal{S}_6(a) = \{$для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено $ax^2 + 2x + a < 0\}$.

Во всех этих предложениях можно обойтись без слов, т. е. записать их на невербальном[1)] языке логики. Предложение $\mathcal{S}_4(a)$ записывается совсем просто: $\mathcal{S}_4(a) = \{x = 2 \implies ax \geqslant a + x\}$. В двух других используются очень часто употребляющиеся в математике слова «***существует***» (какой-то объект, элемент какого-то множества; синонимический оборот: «*хотя бы для одного* — объекта, элемента) и «***для любого***» (объекта, элемента какого-то множества; часто употребляются и слова «*для всех*»: объектов, элементов). В математической логике для этих оборотов речи еще в конце XIX в. были введены специальные обозначения — так называемые ***кванторы*** (от лат. **quantum** — «сколько»).

Основных кванторов два:

1. *Квантор существования* $\exists$. Запись $\exists\, x \in M \mid \mathcal{P}(x)$ читается так: «*существует* (*элемент*) x, *принадлежащий* (*множеству*) M *такой, что справедливо* (*истинно, выполняется*) *предложение* (*высказывание*) $\mathcal{P}(x)$»;

2. *Квантор всеобщности* $\forall$. Запись $\forall\, x \in M \mid \mathcal{P}(x)$ читается так: «*для любого* (*для всех, для каждого*) (*элемента*) x, *принадлежащего* (*множеству*) M *справедливо* (*истинно, выполняется*) *предложение* (*высказывание*) $\mathcal{P}(x)$».

[1)] То есть «бессловесном».

Эти обозначения, сейчас общепринятые, произошли от практики итальянских математиков и логиков (во главе с *Джузеппе Пеано*, 1858–1932) использовать в качестве математических знаков перевернутые символы и буквы. Так, между прочим, появилось и обозначение возведения в степень с помощью символа $\wedge$: он был выбран как перевернутый знак радикала $\sqrt{\ }$ из тех соображений, что возведение в степень *обратно* извлечению корня (сравните записи: $\sqrt[m]{a}$ и $a^m = a\wedge m$).

Само слово «кванторы» ввел в 1885 г. американский математик и логик *Чарльз Сандерс Пирс* (1839–1914). Указанные выше обозначения кванторов происходят от перевернутых прописных начальных букв английских слов **Exist** (существовать) и **for All, for Any** (для всех, для любого/любых).

Приведенные выше логические условия (предложения с переменной-параметром a) $\mathcal{S}_5$ и $\mathcal{S}_6$ записываются через кванторы очевидным образом:

$$\mathcal{S}_5(a) = \{\exists\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + a < 0\};$$
$$\mathcal{S}_6(a) = \{\forall\, x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + 2x + a < 0\}.$$

Предложение $\mathcal{S}_4(a)$ можно записать и без кванторов как сложное предложение следования: $\mathcal{S}_4(a) = \{x = 2 \implies ax \geqslant a + x\}$. Однако правильнее писать так:

$$\mathcal{S}_4(a) = \{\forall\, x \in \mathbb{R}\ \ \{x = 2 \implies ax \geqslant a + x\}\},$$

или несколько короче, существеннее используя язык теории множеств:

$$\mathcal{S}_4(a) = \{\forall\, x \in \{2\} \mid ax \geqslant a + x\}.$$

В предложениях, аналогичных предложению $\mathcal{S}_4$, одноэлементное множество $\{2\}$ (в $\mathcal{S}_6$ это множество $\mathbb{R}$) можно заменить на произвольное числовое множество $M \subset \mathbb{R}$, а неравенство с параметром — на произвольную задачу с параметром, т. е. предложение $\mathcal{P}(x,a) = \mathcal{P}_a(x)$ от переменных x и a. Такие задачи имеют общий вид

$$\mathcal{S}(a) = \{\forall\, x \in M \mid \mathcal{P}(x,a)\}.$$

Множество M можно задавать и неявно как множество решений какой-то задачи, в которую вместе с переменной-неизвестной x может входить и переменная-параметр a. Тогда мы приходим к логической задаче вида

$$\mathcal{S}(a) = \{\forall\, x \in \mathbb{R}\ \ \{\mathcal{N}(x,a) \implies \mathcal{P}(x,a)\}\}.$$

Наконец, еще одно обобщение: в задаче вместо знака следования можно использовать любой другой логический знак, например эквивалентности (равносильности).

Пример 1.2.8. Пусть требуется выяснить, при каких значениях параметра a уравнения $x^4 - a^4 = 0$ и $(x+a)^2(x-1) = 0$ равносильны. Конечно, в данном случае можно решить оба уравнения с параметром, а затем выяснять, при каких значениях параметра a множества решений совпадают. Но мы поступим иначе (прежде чем читать дальше, попробуйте получить ответ с помощью решения уравнений и сравнения множеств решений).

Допустим, значение параметра a удовлетворяет решению задачи. Тогда любой корень второго уравнения, в частности очевидный корень $x = 1$, удовлетворяет первому уравнению, так что $x = 1$ — корень первого уравнения, откуда получаем:

$$1 - a^4 = 0 \iff a^4 = 1 \iff a = \pm 1.$$

Задача решена?

Нет. Пока мы нашли лишь ***необходимые условия*** на параметр a и можем сделать только такой вывод: если a удовлетворяет условию задачи, то $a = \pm 1$, т. е. $a = 1 \vee a = -1$. Теперь обязательно нужно проверить, являются ли эти условия ($a = 1$ или $a = -1$) ***достаточными***, т. е. следует ли из того, что $a = \pm 1$, эквивалентность рассматриваемых уравнений.

Для этого обычно делают *проверку на достаточность*: подставляют найденные *возможные* значения a в оба уравнения и решая их (это уже будут «обычные» уравнения, без параметров), выясняют, выполняется ли условие задачи. В данном примере проверяют, будут ли равносильными уравнения. Рассмотрим значения a по очереди.

1. При $a = 1$ первое уравнение

$$x^4 - 1 = 0 \iff x^4 = 1 \iff x = \pm 1$$

имеет корнями числа $x = \pm 1$. Второе уравнение при $a = 1$

$$(x+1)^2(x-1) = 0 \iff (x+1)(x-1) = 0$$

имеет те же корни $x = \pm 1$. Значит, при $a = 1$ уравнения равносильны, и это значение параметра a является решением задачи.

2. При $a = -1$ первое уравнение сохраняется и имеет те же самые корни $x = \pm 1$. Второе уравнение при $a = -1$ принимает вид

$$(x-1)^2(x-1) = 0 \iff (x-1)^3 = 0 \iff x - 1 = 0$$

и имеет единственный корень $x = 1$. Следовательно, второе значение параметра $a = -1$ не является решением задачи: уравнения не равносильны. Таким образом, получаем

Ответ: $a = 1$. □

Приведенный в примере способ рассуждений является достаточно общим подходом к решению логических, «кванторных» и «многокванторных» задач с параметрами: сначала допускается, что параметры удовлетворяют условию задачи, отыскиваются необходимые условия на параметры, а затем найденные условия проверяются на достаточность.

Зачем нужны кванторные формулировки задач? В первую очередь затем, чтобы компактно и вполне ясно представить «логику» задачи. Они позволяют рассматривать логическую задачу, скажем, с параметром a в практически таком же виде, что и обычную алгебраическую задачу: сводят логическую задачу $\mathcal{S}(a)$ к задаче отыскания *множества решений* $\mathcal{N} = \{a \mid \mathcal{S}(a)\}$. Благодаря этому для логических задач точно так же, как для алгебраических, вводятся понятия эквивалентности/равносильности и следования. Кванторы позволяют компактно записывать не только задачи, но и теоремы, в вербальных формулировках которых часто используются утверждения существования или всеобщности (иногда они только подразумеваются). Конечно, к кванторным формулировкам нужно какое-то время привыкать, но они помогают более четко манипулировать различными логическими предложениями или конструкциями: например, строго формулировать отрицание того или иного утверждения.

Конечно, кванторными формулировками не нужно злоупотреблять: все хорошо в меру. Далее мы будем прибегать к ним для сокращения записи утверждений или задач наравне с вербальными формулировками, а также тогда, когда они существенно облегчают понимание сути математических высказываний.

1.2.4. Функционально-графическая интерпретация задач с параметрами

Пример 1.2.9. Изменим «чуть-чуть» задачу из примера 1.2.5: найдем все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 2x + a = 0$ имеет хотя бы одно решение, принадлежащее отрезку $\mathbf{I} = [0, 3]$. Иначе говоря, найдем все a такие, что

$$\exists\, x \in \mathbf{I} = [0, 3] \mid x^2 - 2x + a = 0.$$

Конечно, можно записать оба корня уравнения $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$, а затем выяснить, когда хотя бы один из них лежит на отрезке $\mathbf{I}$. Для этого придется решить совокупность двух систем неравенств с радикалами:

$$\begin{cases} 1 + \sqrt{1-a} \geqslant 0, \\ 1 + \sqrt{1-a} \leqslant 3 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 - \sqrt{1-a} \geqslant 0, \\ 1 - \sqrt{1-a} \leqslant 3 \end{cases}$$

(двойные неравенства $0 \leqslant x_{1,2} \leqslant 3$ при их решении записываются как системы). Скорее всего, вы еще и не сталкивались с подобными неравенствами. В дальнейшем (в § 5.2) мы рассмотрим методы их решения. Сейчас же используем умение анализировать положение графика квадратичной функции.

Заметим, что левая часть рассматриваемого уравнения $L(x,a) = f_a(x) = x^2 - 2x + a$ есть квадратичная функция от x, зависящая от параметра a. Ее график есть парабола $y = f_a(x)$, получающаяся из параболы $y = f(x) = x^2 - 2x$ параллельным переносом на вектор $(0; a)$, т. е. на величину a вдоль оси ординат ($f_a(x) = f(x) + a$; см. графики на рис. 1.2). И решаемую задачу можно переформулировать на языке графиков: спрашивается, при каких значениях a график пересекается с отрезком $\mathbf{I} = [0, 3]$ оси абсцисс?

Рассматривая все *семейство графиков* $y = f_a(x) = x^2 - 2x + a$, мы непосредственно видим, что при изменении параметра a от $+\infty$ до $-\infty$ график сначала, при $a = 1$, касается оси абсцисс в точке $x = 1$, лежащей на отрезке $\mathbf{I}$. При дальнейшем уменьшении a график пересекает отрезок в двух точках x_1 и x_2, соответствующих корням уравнения, причем пока левый корень x_1 не сдвинется влево за точку $x = 0$, оба корня будут лежать на отрезке $\mathbf{I}$. После этого правый корень x_2 еще останется на отрезке, но только до критического значения

$a = -3$, после которого и корень x_2 выйдет за пределы отрезка **I**. Таким образом, *ответ*: $a \in [-3, 1]$. □

Если задача с одной переменной-неизвестной и с параметром относится к некоему исследованию выражения $L(x,a)$, которое, рассматриваемое как функция $f_a(x)$, зависящая от параметра, задает относительно простое семейство графиков $y = f_a(x)$, то имеет смысл, как и в предыдущем примере, провести исследование графически.

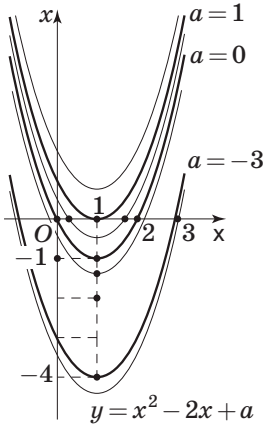


Рис. 1.2

Пример 1.2.10. Требуется найти число корней уравнения $x^2 - 2x + a = 0$, принадлежащих интервалу $\mathbf{J} = (0, 3)$, в зависимости от значений параметра a.

Здесь также помогает функционально-графическая трактовка задачи: используя тот же чертеж (рис. 1.2), сначала фиксируем критические значения параметра — это будут значения $a = 1, 0, -3$. А далее остается выписать

Ответ:

$$\begin{aligned} a \leqslant -3 \quad &\to \quad 0 \text{ корней;} \\ -3 < a \leqslant 0 \quad &\to \quad 1 \text{ корень;} \\ 0 < a < 1 \quad &\to \quad 2 \text{ корня;} \\ a = 1 \quad &\to \quad 1 \text{ корень;} \\ a > 1 \quad &\to \quad 0 \text{ корней.} \end{aligned}$$

□

Приведем еще одну задачу с тем же самым семейством графиков, в которой фигурирует на этот раз утверждение всеобщности.

Пример 1.2.11. Требуется найти все значения параметра a, при которых любое значение x, удовлетворяющее неравенству $|x| \leqslant 1$, является решением неравенства $x^2 - 2x + a \leqslant 0$. Иначе говоря, отыскиваются все такие a, что

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \{|x| \leqslant 1 \implies x^2 - 2x + a \leqslant 0\},$$

или, проще,

$$\forall\, x \in \mathbf{I} = [-1, 1] \quad x^2 - 2x + a \leqslant 0.$$

Можно записать корни $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a}$ рассматриваемого здесь квадратного трехчлена (от x) и выяснить, когда отрезок $[x_1,x_2]$ между корнями содержит отрезок **I**. Для этого достаточно решить систему двух неравенств с радикалами:

$$\begin{cases} -1 - \sqrt{1-a} \leqslant -1, \\ -1 + \sqrt{1-a} \geqslant 1. \end{cases}$$

Однако проще рассмотреть семейство графиков (парабол $y = x^2 - 2x + a$) и выяснить, когда отрезок $[-1, 1]$ оси абсцисс целиком лежит *внутри* параболы (рис. 1.2; концы отрезка могут лежать и на самой параболе). Видим, что критическое значение параметра одно: $a = -3$, и получаем *ответ*: $a \leqslant -3$. □

1.2.5. Координатная интерпретация задач с параметрами

Мы знаем, что любая алгебраическая задача с двумя переменными x и y, будь то уравнение, неравенство, система или совокупность таких задач, интерпретируется на координатной плоскости Oxy, т. е. задает некоторое множество на этой плоскости. Точно так же задачу $\mathcal{P}(x,a)$ с одной неизвестной x и одним параметром a можно проинтерпретировать на координатной плоскости двух переменных x и a, т. е. на плоскости Oxa. Иными словами, задача с параметром $\mathcal{P}(x,a)$ задает на плоскости Oxa множество точек

$$\mathbf{M}_{\mathcal{P}} = \{(x;a) \mid \mathcal{P}(x,a)\}.$$

Совокупность решений x задачи $\mathcal{P}(x,a)$ при данном значении параметра a интерпретируется как *пересечение* множества $\mathbf{M}_{\mathcal{P}}$ с горизонтальной прямой $a = \mathrm{const}$. В данном случае можно говорить о *совокупности абсцисс* x точек $(x;a)$ этого пересечения («*горизонтального сечения*»), или о *проекции* пересечения на ось абсцисс Ox.

Наиболее просто применение метода в случае, когда параметр в задаче можно «*уединить*», т. е. *разрешить задачу относительно параметра*. Если задача с параметром $\mathcal{P}(x,a)$ есть *уравнение*, то уединение параметра означает запись этого уравнения в виде $a = \varphi(x)$. В таком случае множество $\mathbf{M}_{\mathcal{P}}$ есть попросту график функции $a = \varphi(x)$, и использование метода

сечений сводится к исследованию функции $\varphi(x)$. Проиллюстрируем рассуждения на примере.

Пример 1.2.12. В уже встречавшемся в логических задачах уравнении $(*)$ $x^2 - 2x + a = 0$ уединение параметра тривиально:

$$(*) \iff a = 2x - x^2.$$

График квадратичной функции $a = \varphi(x) = 2x - x^2$ есть парабола на плоскости Oxa. Нули функции суть $x = 0$ и $x = 2$, вершина параболы лежит посредине между нулями, т. е. ее абсцисса $x_0 = 1$, ордината вычисляется по абсциссе, $a_0 = \varphi(x_0) = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$, ветви параболы направлены вниз, соответствующий график представлен на рис. 1.3.

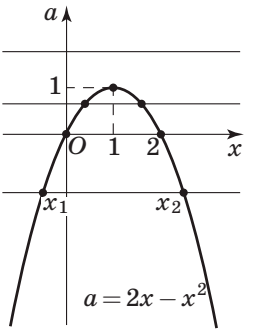


Рис. 1.3

Рассматривая пересечения параболы с горизонталями $a = \text{const}$, мы сразу видим, что критическое значение параметра единственно — это ордината вершины $a = a_0 = 1$. Получаем *ответ*: если $a < a_0$, то уравнение имеет два корня; при $a = a_0$ эти корни «сливаются» — единственный корень совпадает с абсциссой вершины параболы; при $a > a_0$ корней нет.

Остается выполнить чисто техническую работу — формально выписать корни исходного уравнения: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - a}$. Как и ранее, мы воспользовались сокращенной формулой для корней квадратного уравнения — с четным коэффициентом при x. Таким образом, запишем совокупность решений в явном виде:

Ответ:

$$a < 1 \;\to\; x = x_{1,2};$$
$$a = 1 \;\to\; x = 1;$$
$$a > 1 \;\to\; \textit{нет решений},$$

где $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - a}$. □

Заметим, что если уравнение с параметром может быть записано в виде $\varphi(x) = a$, то логическая задача «При каких значениях a это уравнение имеет хотя бы один корень, принадлежащий какому-то заданному числовому множеству $M \subset \mathbb{R}$?»

эквивалентна отысканию множества значений функции $\varphi(x)$, рассматриваемой только на множестве M.

Пример 1.2.13. Возвращаясь к примеру 1.2.9, в котором требовалось найти значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 2x + a = 0$ имеет хотя бы одно решение, принадлежащее отрезку $\mathbf{I} = [0, 3]$, перепишем уравнение в виде $a = \varphi(x) = 2x - x^2$. Из рис. 1.3 видно, что множество значений функции φ на промежутке $\mathbf{I}$ есть отрезок $[-3, 1]$, и задача решена! □

Использование картинки на координатной плоскости Oxa, если ее удается построить и проанализировать, помогает более четко увидеть, как меняется множество решений задачи с параметром при изменении параметра. Картинка помогает записать ответ к задаче. Кроме того, рассмотрение множества $\mathbf{M}_{\mathcal{P}}$ позволяет решать разнообразные *логические* задачи, которые могут быть поставлены для задачи $\mathcal{P}(x,a)$ с параметром типа разобранных выше, например, таких:

— *при каких значениях параметра a задача (уравнение, неравенство и т. д.) $\mathcal{P}(x,a)$ имеет хотя бы одно решение*?

— *при каких значениях параметра a данное значение x (либо то или иное множество значений x) является решением (либо входит в множество решений) задачи с параметром $\mathcal{P}(x,a)$*?

— *при каких значениях параметра a задача (уравнение, неравенство и т. д.) $\mathcal{P}(x,a)$ с параметром имеет единственное решение*? — и т. п.

Пример 1.2.14. Решим указанным способом задачу из примера 1.2.11, в которой требуется найти значения параметра a, при которых любое значение x, удовлетворяющее неравенству $|x| \leqslant 1$, удовлетворяет и неравенству $x^2 - 2x + a \leqslant 0$, т. е. при которых

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \{|x| \leqslant 1 \implies x^2 - 2x + a \leqslant 0\}$$

$$(\text{или } \forall\, x \in [-1, 1] \quad x^2 - 2x + a \leqslant 0).$$

Первое неравенство, $|x| \leqslant 1$, в которое параметр a не входит, задает на плоскости $(x; a)$ полосу между вертикальными прямыми $x = -1$ и $x = 1$ (рис. 1.4).

Второе неравенство может быть переписано в эквивалентном виде: $a \leqslant 2x - x^2$, откуда ясно, что оно задает на координатной плоскости множество точек $(x; a)$, лежащих *не выше* параболы $a = 2x - x^2$; оно называется *внутренней областью параболы*[1] (рис. 1.4). Если при каком-то значении $a = a_0$ из первого неравенства следует второе, то на картинке это означает, что пересечение горизонтали $a = a_0 = \text{const}$ с полосой содержится в ее пересечении с внутренностью параболы. И непосредственно из картинки видно, что это так при значениях a, меньших критического значения $a = -3$, отвечающего точке пересечения левой границы полосы, т. е. прямой $x = -1$, с параболой $a = 2x - x^2$. Конечно, мы получили тот же самый ответ, что и раньше. □

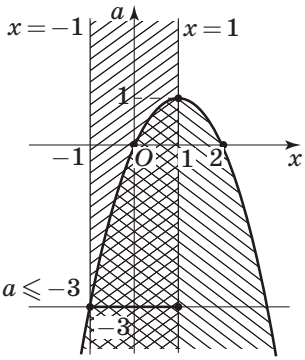


Рис. 1.4

Упражнения

Решите следующие уравнения двумя способами — сведением к эквивалентной смешанной системе и переходом к следствиям с проверкой.

1. $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{1-x} = 2.$ **2.** $\dfrac{2x-3}{x} = \dfrac{3-2x}{x(x+1)}.$ **3.** $\dfrac{4x+1}{4(2-x)} = x + 2.$

Решите следующие уравнения с помощью замены (т. е. введения новой переменной).

4. $x^4 - 15x^2 - 16 = 0.$ **5.** $\sqrt{2-x} + \dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2.$

6. $\dfrac{x}{x+1} - 2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} = 3.$ **7.** $2\sqrt{x+5} = x + 2.$

8. $(x+1)^2 + \dfrac{6}{x^2+2x} = 6.$ **9.** $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 6.$

Решите следующие уравнения, предварительно разложив их левые части на множители.

[1] Иногда говорят просто «внутренность параболы».

10. $x^3 + 2x^2 - 3 = 0.$ **11.** $x^3 - 2x - 1 = 0.$

12. $x^4 + x^3 + x^2 - x - 2 = 0.$

Решите следующие уравнения с помощью эквивалентного перехода к совокупности уравнений и смешанных систем.

13. $(x^2 - 4)\sqrt{x+1} = 0.$ **14.** $(9 - x^2)\sqrt{2-x} = 0.$

Решите уравнение

15. $$\frac{x+8}{x^3 - 2x + 16} + \frac{x^3 - 2x + 16}{x+8} = -2.$$

Решите следующие уравнения и неравенства, отыскивая критические значения параметров аналитически.

16. $ax^2 + 2x + 1 = 0.$ **17.** $x^2 - 3ax + 2a^2 \leqslant 0.$

Решите логические задачи, используя анализ положения графика квадратичной функции $y(x, a)$ на координатной плоскости (x, y) в зависимости от значений параметра a.

18. При каких значениях параметра a из неравенства $1 \leqslant x \leqslant 2$ следует неравенство $x^2 + ax + a^2 + 6a \leqslant 0$?

19. Найдите значения a, при которых все решения неравенства $x^2 - 2ax + a^2 - 1 < 0$ удовлетворяют неравенству $x^2 + 6x + 8 < 0$.

20. При каких a уравнение $(a+2)x^2 - 2ax + 3a = 0$ имеет два положительных корня?

Решите следующие уравнения, неравенства, системы неравенств и логические задачи, используя координатную интерпретацию задач с параметрами.

21. $x^2 + ax + 1 = 0.$ **22.** $x^3 - ax^2 + ax - a^2 = 0.$ **23.** $x^2 - 2x + a \leqslant 0.$

24. $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 + a < 0, \\ 2x + a + 6 \leqslant 0. \end{cases}$ **25.** $\dfrac{2x+a}{x-a} \leqslant 0.$

26. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x + a \leqslant 0, \\ x^2 - 2x - a \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Глава 2

Многочлены и полиномиальные алгебраические уравнения

§ 2.1. Корни многочленов. Теорема Безу

2.1.1. Числовые кольца и поля. Кольца многочленов

Все натуральные числа можно получить сложением единицы самой с собой. Из натуральных чисел с помощью простейших арифметических операций (действий) сложения/вычитания и умножения получаются все целые числа. Те же операции, примененные к всевозможным целым числам, ничего другого уже не дадут. Числовое множество $R \subset \mathbb{R}$, обладающее таким свойством *замкнутости по отношению к операциям сложения, вычитания и умножения*, называется *числовым* ***кольцом***. Кроме кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ можно указать много других числовых колец. Например, кольцо образуют четные целые числа (оно обозначается $2\mathbb{Z}$), числа, делящиеся на 3 ($3\mathbb{Z}$) или на любое другое натуральное число m ($m\mathbb{Z}$). Это всё *подкóльца* кольцá $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ всех целых чисел.

Вместе с множеством $\mathbb{Z}$ мы указали и основные операции, производимые над его элементами: сложение и умножение (вычитание есть операция, обратная сложению, поэтому не указана как основная). Кольцо — это не просто множество, но *множество с определенными на нем операциями*, которые удовлетворяют известным законам арифметических действий: сочетательному, переместительному и распределительному. В высшей алгебре эти законы называются соответственно, *ассоциативностью* (сложения и умножения), *коммутативностью* (сложения и умножения) и *дистрибутивностью* (умножения по отношению к сложению).

Числовое кольцо не обязано быть замкнутым по отношению к операции деления, обратной к операции умножения: частное двух целых чисел не обязательно целое, частное двух четных может быть целым, но нечетным. Однако целые числа составляют подкольцо более широких колец рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и всех действительных чисел $\mathbb{R}$, являющихся

замкнутыми и по отношению к делению[1]: частное двух рациональных чисел рационально, двух действительных — есть действительное число. Числовое множество, являющееся замкнутым по отношению ко всем четырем арифметическим операциям (сложению/вычитанию и умножению/делению), называется *числовым* ***полем***. Кроме полей $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, существует много других числовых полей. Например, все числа, представимые в виде $a + b\sqrt{2}$, где $a,b \in \mathbb{Q}$, образуют поле (докажите это самостоятельно; см. также «Упражнения»): *расширение* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, являющееся подполем поля всех действительных чисел $\mathbb{R}$.

Рассмотрим элементы некоторого числового поля или кольца R, переменную x и все выражения, получающиеся из переменной и чисел-констант применением простейших арифметических операций сложения/вычитания и умножения. С использованием только операции умножения из констант и переменной x получаются ***одночлены*** — они записываются с помощью показателей степени: $a \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x = ax^k$, где k называется ***степенью одночлена***. Сложением одночленов различных степеней получаются ***многочлены*** или ***полиномы***[2] *от переменной x над кольцом/полем R*. Их принято записывать *по убывающим* степеням одночленов-слагаемых в виде

$$p(x) = p_n(x) = \\ = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (1)$$

(в последней записи мы употребили математический **знак суммы** $\sum$. В записи суммы

$$S = \sum_{k=m}^{k=n} s_k$$

$s_k = a_k x^k$ — слагаемое с индексом k, а над знаком суммы и под ним указано, в каких пределах меняются индексы слагаемых; для слагаемого с индексом $k = 0$ имеем одночлен a_0x^0 — слагаемое a_0, т. е. константу). Одночлен наибольшей входящей в многочлен степени — в нашей записи $a_n x^n$ — называется

[1]Речь не идет о делении на нуль — оно, как обычно, исключается.
[2]От греч. *πολυ*... **[poly...]** — много и *νομη* **[nome]** — часть, раздел.

старшим одночленом, коэффициент $a_n \neq 0$ при нем — ***старшим коэффициентом***, его степень n — ***степенью многочлена***, обозначаемой $\deg p$ (от англ. **degree**). Если $\deg p = n$, то n иногда подписывают как индекс у многочлена: $p = p_n$. Коэффициент a_0 «без x» называется ***свободным членом*** многочлена, и он может равняться нулю (в отличие от старшего коэффициента).

Если складывать, вычитать и перемножать многочлены обычным образом, т. е. раскрывая скобки и приводя подобные члены, то опять получатся многочлены, причем для этих операций над многочленами выполнены обычные свойства, или законы действий (в том числе сочетательный, переместительный и распределительный). Таким образом, совокупность $R[x]$ всех многочленов (произвольных степеней) над кольцом/полем коэффициентов R с обычными операциями сложения/вычитания и умножения является *кольцом*: оно называется ***кольцом многочленов*** над R. Отметим, что многочлены суть выражения, и, по определению, два многочлена равны тогда и только тогда, когда после приведения их к стандартному виду (1) их степени и соответствующие коэффициенты[1)] равны.

Обычно в элементарной алгебре рассматриваются многочлены с целыми, рациональными или действительными коэффициентами. Так как мы будем рассматривать и различные действия, удобно говорить о *кольцах многочленов* соответственно над $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, т. е. о кольцах $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$.

Мы начали с кольца целых чисел $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, а закончили кольцом многочленов $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ с действительными коэффициентами не случайно: между этими кольцами есть далеко идущая аналогия, с которой мы еще не раз столкнемся в этой главе.

2.1.2. Корни многочленов и полиномиальных уравнений

Многочлен (полином) с числовыми коэффициентами — это *выражение от* x; соответствующие многочленам $p \in R[x]$ всюду определенные функции $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ x \mapsto p(x)$, — называются ***полиномиальными***[2)] ***функциями*** соответствующей степени.

[1)] То есть коэффициенты при одинаковых степенях переменной.

[2)] Не говорят: «*многочленными*»; здесь греческий взял верх над русским языком!

При $n = 1$ они носят название *линейных*, при $n = 2$ — *квадратичных*, при $n = 3$ — *кубических*; на этом «персональные» наименования заканчиваются[1]. Иначе полиномиальные функции называются ***целыми рациональными алгебраическими функциями***[2].

Аналогично называются и соответствующие уравнения: уравнение, приводимое к виду $p(x) = 0$, $p \in R[x]$, называется *полиномиальным*[3]; если $\deg p = n$, то — ***полиномиальным уравнением степени*** n. Различают линейные, квадратные, кубические уравнения (а также *двучленные, биквадратные, бикубические* — см. выше примечание [[1]]).

Корни (решения) уравнения $p(x) = 0$, $p \in R[x]$, они же нули полиномиальной функции $x \mapsto p(x)$, называются и ***корнями многочлена*** p (заметим: не «решениями» многочлена).

Что мы знаем о корнях многочленов над полем действительных чисел и соответствующих уравнений? Перечислим известные нам факты.

1) *Линейные двучлены* $p_1(x) = ax + b$, $a \neq 0$, всегда имеют единственный корень:

$$ax+b = 0 \iff x = x_0 = -\frac{b}{a}, \quad \text{причем} \quad p_1(x) = ax+b = a(x-x_0).$$

2) *Квадратные трехчлены* $p_2(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, могут и не иметь корней — в случае отрицательности дискриминанта $D = b^2 - 4ac$. Если $D = 0$, то существует единственный корень:

$$ax^2 + bx + c = 0, b^2 - 4ac = 0 \iff x = x_0 = -\frac{b}{2a},$$

причем $p_2(x) = a(x - x_0)^2$. Наконец, если дискриминант положителен, то корней два:

$$ax^2 + bx + c = 0, b^2 - 4ac > 0 \iff x = x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a},$$

причем $p_2(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Что касается кубических уравнений и многочленов, то общая информация о них пока отсутствует. Легко привести

[1] Правда, есть еще три: функции (и выражения) вида $p_n(x) = a_n x^n + a_0$ называют *двучленными*, вида $p_4(x) = ax^4 + bx^2 + c$ — *биквадратными*, а вида $p_6(x) = ax^6 + bx^3 + c$ — *бикубическими*.

[2] *Целые рациональные функции* получаются из x и констант подобно тому, как из единицы операциями сложения, вычитания и умножения получаются *целые числа*.

[3] Или *целым рациональным алгебраическим* уравнением.

примеры уравнений третьей степени, имеющих один, два или три корня: $x^3 - 1 = 0$ (один корень), $x^3 - x^2 = 0$ (два корня), или $x^3 - x = 0$ (три корня). **Вопрос:** *может ли кубическое уравнение иметь 4 корня или 5 корней*? С ответом пока подождем...

Еще один сразу возникающий **вопрос:** *может ли быть так, что кубическое уравнение вообще не имеет ни одного корня* — подобно квадратным уравнениям с отрицательным дискриминантом?

Ответ отрицательный. Оказывается, *любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один корень*. Доказывается это с помощью одной из важнейших теорем математического анализа: *теоремы о промежуточном значении*. Напомним ее формулировку (см. учебники «Алгебра и начала анализа»).

Теорема 1 (*о промежуточном значении — «ТПЗ»*). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она* ***принимает на этом отрезке любое значение c, заключенное между значениями $f(a)$ и $f(b)$.*** *То есть* ***для любого заключенного между указанными числами $f(a)$ и $f(b)$ числа c***[1] ***существует такое число $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) = c$*** (*иначе говоря, уравнение $f(x) = c$ имеет на отрезке $[a, b]$ хотя бы один корень*).

Следствие 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в его концах* ***принимает значения разных знаков,*** *то она* ***обращается в нуль*** *в некоторой точке этого отрезка. То есть* ***существует число $x_0 \in [a, b]$ такое, что $f(x_0) = 0$*** (*иначе говоря, уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ хотя бы один корень*).

Поскольку любая полиномиальная функция непрерывна, а при больши́х по модулю значениях аргумента ее знак определяется знаком старшего члена, многочлен нечетной степени на концах достаточно большого отрезка $[-R, R]$ принимает значения разных знаков, поэтому, согласно сформулированному (очевидному) следствию из ТПЗ, имеет на этом отрезке по крайней мере один корень. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 (*о существовании корней многочленов нечетной степени*). *Если натуральное число $n = 2k + 1$ нечетно, то*

[1] Такое число и называется ***«промежуточным»*** (между $f(a)$ и $f(b)$).

любой многочлен $p(x)$ степени n имеет хотя бы один корень: существует число $x_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $p(x_0) = 0$.

Формальное **доказательство** этой теоремы, т. е. установление справедливости условий следствия 1, проводится с помощью представления многочлена

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_k x^k + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

в виде

$$p_n(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots + \frac{c_k}{x^k} + \dots + \frac{c_n}{x^n}\right).$$

При возрастании $|x|$ каждое из n дробных слагаемых в скобках стремится к нулю, поэтому при достаточно большом $|x|$ знак скобки положителен. Следовательно, знак $p_n(x)$ совпадает со знаком сомножителя $a_n x^n$, т. е. старшего члена многочлена. Если n нечетно, то $a_n(-R)^n = -a_n R^n$, поэтому в концах достаточно большого отрезка $[-R, R]$ рассматриваемый многочлен принимает значения разных знаков[1]. ■

Итак, любое кубическое уравнение имеет хотя бы один корень. В случае линейных и квадратичных многочленов мы знаем, что при наличии у них корня $x = x_*$ в многочлене можно выделить линейный двучлен вида $(x - x_*)$. Точно так же обстоит дело и для приведенных выше примеров кубических двучленов $x^3 - 1$, $x^3 - x^2$, $x^3 - x$. Их корни *очевидны*, а многочлены (и, соответственно, уравнения) *разлагаются*. Так, $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$, $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$, причем линейные сомножители разложений: $x - 1$, x, $x + 1$, — в точности соответствуют корням. А как быть, если «очевидного корня» (или очевидного разложения) «*не видно*»? **Общий совет:** *попробуйте все-таки найти (угадать!) корень, а потом и разложить*! Рассмотрим конкретное кубическое уравнение.

Пример 2.1.1. Попытаемся решить уравнение

$$x^3 - x + 6 = 0. \qquad (*)$$

Поискав его корни среди целых чисел[2], получим, что $x_0 = -2$ удовлетворяет уравнению. Что делать дальше? — Попробуем

[1] Символом ■ мы будем обозначать завершение доказательства теоремы или иного утверждения (следствия, предложения, леммы).

[2] Причем среди чисел попроще (в смысле — поменьше по абсолютной величине)! Вообще мы рекомендуем всегда начинать поиск корней с чисел $x = \pm 1$ — очень часто они-то и являются корнями!

вынести за скобку отвечающий угаданному корню линейный множитель, т. е. двучлен (на латыни *бино́м*) с тем же самым корнем: $x - x_0 = x + 2$. Разложение — вынесение множителя $x + 2$ — удобнее всего провести *методом группировки*, прибавляя нужный для вынесения одночлен и сразу же, для «компенсации», вычитая его. Получается:

$$x^3 - x + 6 = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - x + 6 = x^2(x+2) - 2x^2 - 4x + 3x + 6 =$$
$$= x^2(x+2) - 2x(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(x^2 - 2x + 3).$$

Произведение двух или большего числа сомножителей равно нулю тогда и только тогда, когда равен нулю один (хотя бы один) из сомножителей[1]. Поэтому найденное разложение позволяет перейти от исходного уравнения $(*)$ к ***эквивалентной совокупности уравнений***, линейного и квадратного:

$$(*) \iff (x+2)(x^2-2x+3) = 0 \iff x+2 = 0 \ \textit{или} \ x^2-2x+3 = 0.$$

Линейное уравнение дает уже известный корень $x = -2$, квадратное же уравнение корней не имеет, ибо его дискриминант отрицателен: $D = 4 - 12 < 0$. Итак, исходное кубическое уравнение решено.

Ответ: $x = -2$. □

Нам удалось решить данное уравнение благодаря двум обстоятельствам: *во-первых*, «удаче» при нахождении («угадывании») корня, *во-вторых*, тому, что удалось вынести за скобку отвечающий этому корню двучлен $x + 2$. «Методы угадывания» корней мы обсудим в § 2.4, а сейчас обратимся к вопросу о выделении в многочлене линейных множителей, соответствующих его корням.

2.1.3. Деление многочленов на двучлен. Теорема Безу

Как мы уже отмечали, многочлены во многом похожи на целые числа: их можно складывать, вычитать, перемножать, но *нельзя делить*. Имеется в виду, что один многочлен может *делиться* на другой многочлен (например, $x^2 - 1$ делится на $x + 1$), а может и *не делиться* (например, $x^2 + 1$ не делится на $x + 1$, т. е. не представляется в виде произведения $(x + 1)p(x)$).

[1] А все остальные при этом имеют смысл!

Так что для многочленов, как и для целых чисел, вместо операции деления есть понятие (*отношение*) *делимости*. Для целых чисел есть и «суррогат» операции деления: *деление с остатком*. Деление с остатком возможно и для многочленов. Нас пока будет интересовать *деление многочлена на линейный двучлен — на бином вида* $x - \alpha$.

По сути, разбирая пример 2.1.1, мы показали, как делить одночлен (на греческом *моно́м*) на бином — прибавлением и вычитанием одночлена степени на 1 меньше: чтобы разделить моном ax^n на бином $x - \alpha$, мы вычитаем моном $\alpha a x^{n-1}$ и прибавляем его же, получая равенство

$$ax^n = ax^n - \alpha a x^{n-1} + \alpha a x^{n-1} = ax^{n-1}(x - \alpha) + \alpha a x^{n-1}.$$

Далее поступаем точно так же с мономом $c_1 x^{n-1} = \alpha a x^{n-1}$ и получаем уже равенство вида

$$ax^n = (ax^{n-1} + c_1 x^{n-2})(x - \alpha) + c_2 x^{n-2}.$$

Постепенно понижая степень «промежуточного остатка» $c_k x^{n-k}$, мы дойдем до линейного «остатка» $c_{n-1}x$, который снова делим на бином $x - \alpha$:

$$c_{n-1}x = c_{n-1}(x - \alpha) + c_n.$$

В итоге получим представление исходного монома в виде

$$ax^n = (ax^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \cdots + c_{n-1})(x - \alpha) + c_n = p_{n-1}(x)(x - \alpha) + c_n$$

(из константы c_n бином $x - \alpha$ уже никак не выделишь!).

Вопрос: *чему равен «последний остаток»* c_n *при вынесении бинома* $x - \alpha$ *из монома* ax^n?

Маленькая подсказка: число c_n может зависеть только от α и a!

Большая подсказка: примените одну из нижеследующих теорем!!

Применяя описанную процедуру к каждому из одночленов, составляющих произвольный многочлен $p_n(x)$ степени n, мы получим его представление в виде

$$p_n(x) = p_{n-1}(x)(x - \alpha) + r,$$

где r — число, называемое ***остатком от деления многочлена*** $p_n(x)$ ***на бином (двучлен)*** $x - \alpha$. Получающийся при ***делении с остатком*** многочлен p_{n-1} имеет степень на 1 меньше, чем ***«делимое»*** — многочлен $p_n(x)$, и называется ***неполным частным***.

Теорема 3 (***теорема Безу о делении многочлена на двучлен***). ***Любой многочлен*** $p_n \in R[x]$[1] *степени* $n \geqslant 1$ ***можно разделить на любой двучлен*** *вида* $x - \alpha$ ***с остатком***, *то есть представить в виде*

$$p_n(x) = p_{n-1}(x)(x - \alpha) + r, \tag{2}$$

где ***неполное частное*** $p_{n-1} \in R[x]$ (*многочлен степени* $n - 1$ *над* R) *и* ***остаток*** (*число*) $r \in R$ ***однозначно определяются*** *исходными многочленом и двучленом. В частности,* ***остаток*** r ***равен значению исходного многочлена*** $p_n(x)$ ***в точке*** $x = \alpha$:

$$r = p_n(\alpha). \tag{3}$$

Доказательство. Существование представления (2) было доказано выше. Подставив в обе части соотношения (2) $x = \alpha$, получим:

$$p_n(\alpha) = p_{n-1}(\alpha)(\alpha - \alpha) + r = p_{n-1}(\alpha) \cdot 0 + r = r,$$

так что $r = p_n(\alpha)$. Тем самым доказано *соотношение Безу* (3) и однозначная определенность остатка r. Далее, если есть два представления вида (2), то приравняв их с учетом равенства остатков в том и другом представлении, получим:

$$\begin{gathered} p_n(x) = p_{n-1}(x)(x-\alpha) + r = \widetilde{p_{n-1}}(x)(x-\alpha) + r \Longrightarrow \\ \Longrightarrow p_{n-1}(x)(x-\alpha) = \widetilde{p_{n-1}}(x)(x-\alpha) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \left(p_{n-1}(x) - \widetilde{p_{n-1}}(x)\right)(x-\alpha) = 0. \end{gathered}$$

Последнее равенство может иметь место лишь тогда, когда разность $d(x) = p_{n-1}(x) - \widetilde{p_{n-1}}(x)$ есть *нулевой многочлен*, т. е. когда неполные частные $p_{n-1}(x)$ и $\widetilde{p_{n-1}}(x)$ *совпадают*. В противном случае, т. е. если $d(x)$ — ненулевой многочлен, слева в равенстве $d(x)(x - \alpha) = 0$ записан многочлен степени не меньше 1, который не может быть равен записанному справа нулевому многочлену[2]. Тем самым однозначная определенность неполных частных тоже доказана. ■

---

[1] Здесь R — либо $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Q}$, либо $\mathbb{R}$.

[2] На всякий случай напомним: *многочлены* — это выражения, а *равные многочлены* — это совпадающие выражения (т. е. равенство многочленов — *покоэффициентное*).

2.1.4. Алгоритмы деления на двучлен. Метод Руффини—Горнера

Деление многочлена $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ на линейный бином $x - \alpha$ можно описать такой последовательностью действий. Сначала мы делим на бином старшее слагаемое, т. е. записываем:

$$a_n x^n = a_n x^{n-1}(x - \alpha) + \alpha a_n \cdot x^{n-1}.$$

Затем складываем первый промежуточный остаток $\alpha a_n \cdot x^{n-1}$ со вторым членом $a_{n-1}x^{n-1}$ многочлена, записывая сумму в виде $b_{n-1}x^{n-1}$, где

$$b_{n-1} = a_n \alpha + a_{n-1}, \qquad (4_{n-1})$$

и опять делим на бином:

$$b_{n-1}x^{n-1} = b_{n-1}x^{n-2}(x - \alpha) + \alpha b_{n-1}x^{n-2}.$$

Снова складываем промежуточный остаток $\alpha b_{n-1} \cdot x^{n-2}$ со следующим членом $a_{n-2}x^{n-2}$ многочлена, записываем сумму в виде $b_{n-2}x^{n-2}$, где

$$b_{n-2} = b_{n-1}\alpha + a_{n-2}, \qquad (4_{n-2})$$

и делим на бином:

$$b_{n-2}x^{n-2} = b_{n-2}x^{n-3}(x - \alpha) + \alpha b_{n-2}x^{n-3}.$$

Складываем новый остаток $\alpha b_{n-2} \cdot x^{n-3}$ с членом $a_{n-3}x^{n-3}$, записываем сумму в виде $b_{n-3}x^{n-3}$, где

$$b_{n-3} = b_{n-2}\alpha + a_{n-3}, \qquad (4_{n-3})$$

и делим на бином:

$$b_{n-3}x^{n-3} = b_{n-3}x^{n-4}(x - \alpha) + \alpha b_{n-4}x^{n-4},$$

и так далее. Дойдя до линейного промежуточного остатка $\alpha b_2 \cdot x$, складываем его с линейным членом $a_1 x$ исходного многочлена, записываем сумму в виде $b_1 x$, где

$$b_1 = b_2\alpha + a_1, \qquad (4_1)$$

делим на бином: $b_1 x = b_1(x - \alpha) + \alpha b_1$, после чего последний промежуточный остаток (число) складываем со свободным членом многочлена:

$$b_0 = b_1\alpha + a_0. \qquad (4_0)$$

Это и будет *остаток от деления исходного многочлена на двучлен* $x - \alpha$, а вычисляемые в соответствии с равенствами

(4_{n-1}), (4_{n-2}), ..., (4_1) числа b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_1 суть в точности *последовательные коэффициенты неполного частного* — получающегося при делении многочлена степени $n-1$.

В самом деле, последовательность произведенных действий деления одночленов $a_n x^n$, $b_{n-1}x^{n-1}$, $b_{n-2}x^{n-2}$, ..., $b_1 x$ на бином $x-\alpha$ можно записать как цепочку равенств

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\
&= a_n x^{n-1}(x-\alpha) + b_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\
&= a_n x^{n-1}(x-\alpha) + b_{n-1}x^{n-2}(x-\alpha) + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\
&= (a_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2})(x-\alpha) + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\
&= (a_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + b_{n-2}x^{n-3})(x-\alpha) + \\
&\quad + b_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_1 x + a_0 = \ldots \\
\ldots &= (a_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1)(x-\alpha) + b_0.
\end{aligned}$$

Вычисление всех коэффициентов b_k, включая остаток b_0 (и старший коэффициент неполного частного $b_n = a_n$), по формулам (4_{n-1}), ..., (4_0) удобно записываются с помощью специальной таблицы вида

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_{k+1} & a_k & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\
\hline
\alpha & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_{k+1} & b_k & \ldots & b_2 & b_1 & b_0
\end{array}.$$

В ее верхней строке выписываются все коэффициенты исходного многочлена по убывающим степеням x, включая нулевые коэффициенты. В начале второй строки записывается корень α двучлена $x-\alpha$, и затем строка заполняется *слева направо* таким образом. Под старшим коэффициентом a_n исходного многочлена записывается равный ему старший коэффициент $b_n = a_n$ неполного частного, а далее каждый коэффициент b_k получается как сумма предыдущего (записанного слева) коэффициента b_{k+1}, умноженного на α, и соответствующего (записанного сверху) коэффициента a_k, т. е. вычисляется по формуле

$$b_k = b_{k+1}\alpha + a_k. \qquad (4_k)$$

Последнее из получающихся во второй строке чисел (самое правое) является остатком от деления многочлена на двучлен, а остальные числа второй строки — коэффициентами неполного частного.

Описанный способ деления многочлена $p_n(x)$ на двучлен $x-\alpha$, т. е. метод поиска неполного частного $p_{n-1}(x)$

и остатка $r = b_0$ в представлении многочлена в виде $p_n(x) = p_{n-1}(x)(x - \alpha) + r$, называется *методом* или *алгоритмом Руффини—Горнера*.

В математике *алгоритм* — это некоторая *совокупность правил* — для тех или иных арифметических или алгебраических вычислений, геометрических построений и т. д.

Пример 2.1.2. Приме́ним алгоритм Руффини—Горнера для деления многочлена $p_5(x) = x^5 - x^4 - 3x^2 + 1$ на двучлен $x + 1$. Заполняем таблицу:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ \hline \alpha=-1 & 1 & ? & ? & ? & ? & ? \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccccc} & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ \hline \alpha=-1 & 1 & -2 & 2 & -5 & 5 & -4 \end{array}.$$

Значит, остаток равен -4, неполное частное

$$p_4(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 5x + 5$$

и, соответственно,

$$p_5(x) = (x + 1)(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 5x + 5) - 4$$

(проверьте!). □

Согласно теореме Безу, остаток от деления многочлена $p_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ на линейный двучлен $x - \alpha$ равен значению многочлена $p_n(x)$ в точке $x = \alpha$ и, следовательно, может быть вычислен по формуле

$$r = p_n(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0. \qquad (5)$$

Алгоритм Руффини—Горнера приводит к другой схеме вычислений: по формуле (4_0) остаток равен $r = b_0 = a_0 + \alpha b_1$; подставив сюда выражение для b_1 из формулы (4_1): $b_1 = a_1 + \alpha b_2$, — придем к формуле $r = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha b_2)$; подставим сюда выражение $b_2 = a_2 + \alpha b_3$ из формулы (4_2) — придем к формуле $r = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \alpha b_3))$, и *так далее*, вплоть до подстановки выражения $b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha a_n$ из формулы (4_{n-1}). В конечном счете мы получим *формулу Руффини—Горнера для вычисления значения многочлена* $p_n(x)$ *в точке* $x = \alpha$:

$$r = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + \alpha(a_3 + \cdots + \alpha(a_{n-1} + \alpha a_n)\ldots))). \qquad (6)$$

Конечно, формула (6) легко может быть выведена и из формулы (5) — достаточно записать в этой формуле слагаемые и сомножители в каждом слагаемом в обратном порядке: $r = p_n(\alpha) = a_0 + \alpha a_1 + \alpha^2 a_2 + \ldots + \alpha^{n-1} a_{n-1} + \alpha^n a_n$, — а затем последовательно вынести сомножители α. Например, вычисление значений многочлена четвертой степени по формуле Руффини—Горнера основано на его представлении в виде

$$p_4(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + a_4 x))).$$

Отметим, что при компьютерных вычислениях значений многочленов используется не «непосредственная» формула (5), а именно формула Руффини—Горнера (6), которая оказывается более эффективной по двум причинам. Во-первых, при вычислениях по формуле (6) потребуется произвести, вообще говоря, всего n умножений и столько же сложений, а при «лобовых» вычислениях по формуле (5) число сложений такое же, но число умножений равно[1] $n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$, т. е. значительно больше[2]. Во-вторых, вычисления по формуле Руффини—Горнера можно организовать *рекурсивно* — по цепочке *одинаковых* по виду формул $(4_{n-1}), \dots, (4_0)$[3]. Это весьма примечательно, если учесть, что метод Руффини—Горнера был придуман задолго до «компьютерной эпохи»!

Деление многочлена на двучлен по методу Руффини—Горнера можно оформить и точно так же, как деление чисел — с помощью «*алгоритма деления „уголком“*». В общем случае запись начальных шагов этого алгоритма выглядит так:

$$
\begin{array}{l|l}
a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \dots + a_0 & x-\alpha \\ \cline{2-2}
\underline{a_nx^n - \alpha a_nx^{n-1}} & a_nx^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \dots \\
\qquad b_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} & \\
\qquad \underline{b_{n-1}x^{n-1} - \alpha b_{n-1}x^{n-2}} & \\
\qquad\qquad b_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} & \\
\qquad\qquad \underline{\dots \qquad \dots} & \\
\qquad\qquad\qquad \dots &
\end{array}
$$

(под правым уголком последовательно выписываются одночлены, составляющие неполное частное — они подбираются так, чтобы уравнять, «уничтожить» старшие члены последовательно выписываемых «промежуточных остатков» уменьшающихся степеней; старший член $b_{n-1}x^{n-1}$ первого из этих остатков получается вычитанием из суммы $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}$ произведения первого слагаемого a_nx^{n-1} неполного частного на делитель $x - \alpha$, так что коэффициент $b_{n-1} = a_{n-1} + a_n\alpha$ — *тот же*, что и в формуле (4_{n-1}) для алгоритма Руффини—Горнера;

[1] Для вычисления значения одночлена a_kx^k, содержащего $k+1$ сомножитель, требуется произвести k умножений; общее же число умножений находится по формуле для суммы n членов арифметической прогрессии.

[2] Говорят, «*на порядок*» больше: число умножений по формуле (5) зависит от степени многочлена *квадратично*, а по формуле (6) — всего лишь *линейно*.

[3] А компьютерные алгоритмы для рекурсивных вычислений проще программируются, т. е. проще оформляются в виде компьютерной программы.

дальнейшие вычисления повторяют вычисления этого алгоритма, поэтому в итоге «под уголком» получится неполное частное, а последним остатком будет число b_0 — остаток от деления исходного многочлена на двучлен $x - \alpha$).

Пример 2.1.3. Разделим указанным способом (уголком) знакомый многочлен $p_5(x) = x^5 - x^4 - 3x^2 + 1$ на тот же двучлен $x + 1$. Вычисляем:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - x^4 + 0\cdot x^3 - 3x^2 + 0\cdot x + 1 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5 + x^4} & x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 5x + 5 \\
\quad -2x^4 + 0\cdot x^3 & \\
\quad \underline{-2x^4 - 2x^3} & \\
\qquad\qquad 2x^3 - 3x^2 & \\
\qquad\qquad \underline{2x^3 + 2x^2} & \\
\qquad\qquad\qquad -5x^2 + 0\cdot x & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-5x^2 - 5x} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 5x + 1 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{5x + 5} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -4. &
\end{array}
$$

Естественно, мы пришли к прежнему результату (см. пример 2.1.2). □

Аналогия между алгоритмами деления уголком для многочленов и для (натуральных или целых) чисел *не случайна*. Деление чисел уголком основано на их записи в *позиционной системе счисления* — как мы привыкли, с основанием $m = 10$. А позиционная запись $(n+1)$-значного числа, $N = d_n \cdot m^n + d_{n-1} \cdot m^{n-1} + \dots + d_1 \cdot m + d_0$, где d_i суть *цифры* записи N в m-ичной системе счисления, очевидно, *вполне аналогична* стандартной записи (1) многочлена степени n.

В дальнейшем нам еще встретится алгоритм деления уголком для многочленов — в более общей ситуации.

И метод Руффини—Горнера, и алгоритм деления уголком в действительности являются специальными способами описания процедуры деления многочлена на двучлен *методом группировки* — того са́мого, который применялся в примере 2.1.1 для разложения кубического многочлена. Покажем, как работает эта процедура в частном случае.

Пример 2.1.4. Применим метод группировки для деления многочлена $p_5(x) = x^5 - x^4 - 3x^2 + 1$ на двучлен $x + 1$. После-

довательно вычисляем:

$$\begin{aligned} p_5(x) &= x^5 - x^4 - 3x^2 + 1 = \\ &= (x^5 + x^4) - 2x^4 - 2x^3 + (2x^3 + 2x^2) - 5x^2 - 5x + (5x + 5) - 4 = \\ &= x^4(x+1) - 2x^3(x+1) + 2x^2(x+1) - 5x(x+1) + 5(x+1) - 4 = \\ &= (x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 5x + 5)(x+1) - 4. \end{aligned}$$

Деление выполнено. □

Как видно, метод группировки также вполне алгоритмичен. Выбор конкретного алгоритма: Руффини—Горнера, деления уголком или группировки, зависит от вкуса (или темперамента). Отметим, что метод Руффини—Горнера нам еще пригодится (и не раз!).

2.1.5. Делимость многочлена на двучлен. Число корней многочлена

Теперь пришла пора собирать плоды.

Следствие 2 (***теорема о делимости***). *Если* x_0 — ***корень многочлена*** $p_n \in R[x]$ *степени* $n \geqslant 1$, *то этот многочлен* ***делится*** *на двучлен* $x - x_0$, *т. е. представляется в виде*

$$p_n(x) = (x - x_0)p_{n-1}(x) \tag{7}$$

(*иначе говоря, разлагается в произведение линейного двучлена и многочлена степени на* 1 *меньшей, чем исходная*).

Доказательство. Разделим многочлен $p_n(x)$ на двучлен $x - x_0$ с остатком, т. е. представим его в виде (2):

$$p_n(x) = (x - x_0)p_{n-1}(x) + r.$$

Согласно соотношению Безу (3), остаток r равен нулю: $r = p_n(x_0) = 0$, ибо x_0 — корень многочлена $p_n(x)$. Следовательно, имеет место разложение (7). ■

Из теоремы о делимости следует, что многочлен $p_n(x)$ степени $n \geqslant 1$ не может иметь более, чем n *различных* корней: если различные числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ являются корнями многочлена $p_n(x)$, то он делится на каждый из двучленов $x - x_k$, а значит, и на их произведение:

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)q(x),$$

где $q(x)$ — многочлен некоторой степени $d \geqslant 0$. Так как степень левой части выписанного разложения равна n, то число m линейных множителей $x - x_k$ в правой части не превосходит n, что мы и хотели установить.

В приведенном рассуждении требует обоснования утверждение о делимости многочлена $p_n(x)$ на произведение $(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_m)$. Это обоснование легко получить *последовательным* делением многочлена на двучлены: $p_n(x) = (x - x_1)p_{n-1}(x)$; так как $p_n(x_2) = (x_2 - x_1)p_{n-1}(x_2) = 0$, а $x_2 - x_1 \neq 0$, то число x_2 является корнем сомножителя p_{n-1}; делим его на $x - x_2$, и так далее. Заметьте, что здесь существенно используется то, что все корни $x_1, x_2, \dots, x_m$ *различны*. В действительности же число корней многочлена не превосходит его степени, даже если каждый корень считать *с учетом его кратности*. Объясним это подробнее.

Корень x_0 многочлена $p_n(x)$ называется ***корнем кратности*** ν ($\nu \geqslant 1$), если $p_n(x)$ делится на $(x - x_0)^\nu$, но не делится на $(x - x_0)^{\nu+1}$ (иными словами, если многочлен представляется в виде $p_n(x) = (x - x_0)^\nu q(x)$, где $q(x_0) \neq 0$). В приводимом ниже доказательстве теоремы о числе корней не требуется «различия корней», т. е. корни учитываются со своей кратностью.

Теорема 4 (*о числе корней многочлена*). *Любой многочлен $p_n \in \mathbb{R}[x]$ степени $n \geqslant 1$ имеет не более чем n корней.*

Совсем точная формулировка этой теоремы такая. *Пусть числа $x_1, x_2, \dots, x_m$ суть различные корни многочлена степени n кратностей $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$. Тогда число корней этого многочлена с учетом кратностей, т. е. число $n_0 = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m$, не превосходит n.* Именно это и будет доказано, хотя Вы, скорее всего, и не заметите, *каким образом*...

Отметим: чтобы в доказательстве теоремы обойтись без слов «*и так далее*», мы воспользуемся *методом математической индукции*.

Доказательство. При $n = 1$ утверждение теоремы справедливо: каждый линейный двучлен имеет единственный корень, и неравенство $1 \leqslant n$ выполнено.

Предположим, что утверждение теоремы справедливо для многочленов степени $n - 1$, $n \geqslant 2$: число корней любого такого многочлена не превосходит $n - 1$. Выведем отсюда, что число корней любого многочлена $p_n(x)$ степени n не превосходит n.

Возможны два случая: либо многочлен p_n не имеет корней — тогда утверждение справедливо, ибо $0 \leqslant n$; либо p_n имеет какой-то корень x_0. В этом случае, согласно *теореме о делимости*, многочлен p_n представляется в виде $p_n(x) = (x - x_0)p_{n-1}(x)$, где p_{n-1} — некоторый многочлен степени $n - 1$. Так как произведение обращается в нуль тогда и только тогда, когда один из сомножителей равен нулю, множество всех корней многочлена p_n состоит из корня x_0 и совокупности всех корней многочлена p_{n-1}. Поскольку, *согласно сделанному предположению*, число корней p_{n-1} не больше чем $n - 1$, число корней многочлена p_n не больше, чем $1 + (n - 1) = n$, что мы и хотели установить.

Согласно ***принципу математической индукции***, утверждение теоремы справедливо при любом натуральном n. ■

Отметим, что утверждение теоремы справедливо и для многочленов степени нуль, т. е. для *ненулевых* констант: такие многочлены корней не имеют вовсе, и число их корней $0 \leqslant 0$.

2.1.6. Формулы сокращенного умножения

В курсе алгебры изучаются пять так называемых *формул сокращенного умножения*. Во-первых, это формулы раскрытия скобок в квадратах суммы и разности: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Во-вторых, — формулы для разложения *разности квадратов*, *разности кубов* и *суммы кубов*, которые мы запишем как формулы разложения полиномов от x:

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a),$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2), \qquad x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2).$$

В такой интерпретации они представляются как частные случаи разложения (7) из *теоремы о делимости* и допускают обобщения на случай двучленов вида $x^n \pm a^n$ более высоких степеней.

Сначала заметим, что при любом натуральном n и любом значении параметра $a \in \mathbb{R}$ двучлен $p_n(x) = x^n - a^n$ имеет корень $x_0 = a$. Следовательно, в соответствии с теоремой о делимости, этот двучлен делится на бином $x - a$, $p_n(x) = x^n - a^n = (x - a)p_{n-1}(x)$. Чтобы найти частное $p_{n-1}(x)$, воспользуемся

схемой Руффини—Горнера. Заполняем таблицу:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots\ 0 & -a^n \\ \hline a & 1 & ? & ? & ? & \dots\ ? & ? \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a^n \\ \hline a & 1 & a & a^2 & a^3 & \dots a^k \dots & a^{n-1} & 0 \end{array}.$$

В остатке, разумеется, получается нуль, а последовательно вычисляемые в соответствии с алгоритмом Руффини—Горнера коэффициенты частного суть 1, $a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}$. Таким образом, частное записывается в виде $p_{n-1}(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1}$, и *доказано* еще одно следствие теоремы о делимости (или следствие теоремы Безу), а именно:

Предложение 1 (*о разложении разности одинаковых степеней*). *При любом натуральном $n \geqslant 2$ выполняется соотношение* (***абсолютное тождество***[1])

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1}).$$

В основе формулы разложения *суммы* кубов лежит тот факт, что двучлен $x^3 + a^3$ имеет корень $x_0 = -a$. То же самое верно для любого двучлена $x^n + a^n$, степень которого *нечетна*: $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$. Такой двучлен делится на бином $x + a$; найдем по схеме Руффини—Горнера коэффициенты частного:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & \dots & 0 & a^n \\ \hline -a & 1 & ? & \dots & ? & ? \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^n \\ \hline -a & 1 & -a & a^2 & -a^3 & \dots(-1)^k a^k \dots & a^{n-1} & 0 \end{array}$$

(знаки во второй строке чередуются, причем перед последним коэффициентом — свободным членом частного — стоит знак «плюс» в силу *нечетности* степени $n = 2m + 1$). Теперь можно сформулировать утверждение, аналогичное предыдущему.

Предложение 2 (*о разложении суммы одинаковых нечетных степеней*). *При любом натуральном нечетном $n = 2m + 1 \geqslant 3$ выполняется соотношение* (***абсолютное тождество***)

$$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-1}).$$

(Заметим, что тождества из предложений 1–2 можно доказать *непосредственной проверкой*: если раскрыть скобки в их правых частях и привести многочисленные пары подобных членов, то как раз получатся двучлены, записанные в левых

[1] О тождествах и их классификации см. в § 5.1.

частях этих тождеств! Проделайте такую проверку самостоятельно.)

А как обстоит дело с разложением сумм $p_n(x) = x^n + a^n$ одинаковых *четных* степеней ($n = 2m, a \neq 0$)? — С суммой двух квадратов все ясно: квадратичный многочлен $p_2(x) = x^2 + a^2$ при $a \neq 0$ не имеет корней (всюду положителен) и не разлагается (можно сослаться и на отрицательность дискриминанта: $D = -4a^2 < 0$). Сумма двух *биквадратов*, т. е. четвертых степеней: $p_4(x) = x^4 + a^4$ при $a \neq 0$ тоже всюду положительна, поэтому никакой *линейный* сомножитель в $p_4(x)$ выделить нельзя. Возможно, основываясь на этом, *Лейбниц*, один из основателей математического анализа, полагал, что сумма биквадратов вообще не разлагается. Гениальный Лейбниц был не прав!

Задача. Разложите двучлен $x^4 + a^4$ на два квадратичных сомножителя.

Указание: представьте сумму биквадратов в виде **разности квадратов**.

Совет: начните с разложения двучлена $x^4 + 1$.

Решение задачи мы приведем в § 2.4.

Что же дальше? Сумма шестых степеней («*бикубов*») разлагается, ибо она представляется в виде суммы кубов: $x^6 + a^6 = (x^2)^3 + (a^2)^3$, а значит, делится на $x^2 + a^2$. Сумма восьмых степеней представляется как сумма четвертых степеней: $x^8 + a^8 = (x^2)^4 + (a^2)^4$, — и затем разлагается по формуле из сформулированной выше задачи (ее еще надо найти!). Сумма *десятых* степеней представляется как сумма пятых и, согласно *предложению* 2, делится на сумму квадратов $x^2 + a^2$. Пожалуй, остановимся на этом — далее мы рассмотрим *общий* вопрос о разложимости полиномов. А в упражнениях к настоящей главе можно найти интересные применения предложений 1–2 к *теории чисел*.

2.1.7*. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов

Из теоремы 4 (о числе корней многочлена) следует, что, хотя многочлены могут иметь *сколь угодно много* корней, но *никакой многочлен не может иметь бесконечно много корней*: их количество всегда не превосходит степени многочлена.

То же самое соображение (о множестве корней многочлена или нулей полиномиальной функции) позволяет разобраться и с вопросом о том, насколько существенна разница между многочленами как алгебраическими выражениями и многочленами как функциями.

Как объекты изучения в математике полиномы и полиномиальные функции суть *различные* математические понятия: полином (многочлен) $p(x) \in R[x]$[1] есть *выражение*, а полиномиальная функция $y = p(x)$ — задаваемое этим выражением *соответствие* $x \mapsto p(x)$ между числами.

Равенство функций, как и многих других математических объектов (например, множеств), понимается как «одинаковость», *совпадение*[2] соответствий. Две числовые функции f и g равны, если они имеют *одинаковые области определения*, $D_f = D_g = D$, и их значения в каждой точке $x \in D$ *совпадают*, $f(x) = g(x)$[3]. Равенство же двух многочленов $p, q \in R[x]$ означает совпадение их степеней и всех соответствующих коэффициентов. Очевидно, из равенства двух многочленов следует и равенство соответствующих полиномиальных функций (подумайте, почему). Спрашивается, верно ли обратное: следует ли из равенства соответствующих двум многочленам $p, q \in R[x]$ полиномиальных функций — как говорят, из *функционального* равенства многочленов, — их равенство как многочленов, т. е. *алгебраическое* (покоэффициентное) равенство?

Теорема 5 (*о равенстве многочленов*). *Если значения двух многочленов равны (совпадают) на бесконечном множестве точек, то и сами многочлены равны*[4].

Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Лемма 1 (*о равенстве многочленов*). *Если значения двух многочленов степени, не превосходящей n, в каждой из $n+1$*

---

[1] Как и ранее, R есть одно из числовых колец/полей $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

[2] В отличие, скажем, от равенства геометрических фигур: две фигуры называются равными не только тогда, когда они просто совпадают, но и тогда, когда они *совмещаются движением* — в плоскости или в пространстве.

[3] Поскольку в общем случае не оговаривается какая-то стандартная запись выражений, *разные* выражения могут задавать *равные* функции, т. е. *одну и ту же функцию* с точки зрения математического анализа. Например, выражения $|x|$ и $\sqrt{x^2}$ разные (не одинаковые), а функции $x \mapsto |x|$ и $x \mapsto \sqrt{x^2}$ равные (одинаковые как соответствия).

[4] В смысле *алгебраического равенства многочленов*, т. е. покоэффициентно.

различных точек равны (совпадают), то эти многочлены равны.

Доказательство. Пусть $p(x), q(x) \in R[x]$ — данные многочлены, их степени $\deg p, \deg q \leqslant n$, и пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные точки (их как раз $n+1$) такие, что при всех k от 0 до n выполнены равенства $p(x_k) = q(x_k)$. Докажем, что многочлены p и q покоэффициентно равны, т. е. равны их степени и соответствующие коэффициенты.

Допустим противное. Тогда *разность* $h = p - q$ данных многочленов есть *ненулевой* многочлен, причем его степень не превосходит n: $\deg h \leqslant \max\{\deg p, \deg q\} \leqslant n$. Следовательно, согласно теореме о числе корней, многочлен h имеет не более n различных корней.

С другой стороны, каждое из $n+1$ значений $x = x_k$, $k = 0, \ldots, n$, является корнем многочлена h, ибо $h(x_k) = p(x_k) - q(x_k) = 0$. Значит, многочлен h имеет по крайней мере $n+1$ различных корней. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы. ■

Доказательство теоремы 5. Пусть многочлены $p(x)$ и $q(x)$ — данные многочлены, совпадающие во всех точках некоторого бесконечного множества $M \subset R$. Обозначим наибольшую из степеней многочленов $p(x)$ и $q(x)$[1] через n, т. е. $n = \max\{\deg p, \deg q\}$. Поскольку множество точек M (в которых значения $p(x)$ и $q(x)$ совпадают) бесконечно, в нем можно выбрать совокупность из $n+1$ различных точек.

Тогда многочлены $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям леммы и, следовательно, равны. ■

Из теоремы 5, с учетом предваряющего ее замечания вытекает, что *два многочлена многочлена равны алгебраически* (т. е. как выражения, покоэффициентно) ***тогда и только тогда**, когда они равны функционально* (т. е. как функции, поточечно).

Это утверждение справедливо в силу бесконечности каждого из множеств всех целых, рациональных или действительных чисел. В высшей алгебре рассматриваются многочлены и над *конечными* алгебраическими полями, и тогда уже из функционального равенства многочленов алгебраическое их равенство не следует!

[1] Степени многочленов могут быть и одинаковыми.

Приведенная же выше лемма показывает, что для того, *чтобы установить равенство двух многочленов степени, не превосходящей n, достаточно проверить совпадение их при каких-нибудь $n+1$* ***различных*** *значениях переменной.*

2.1.8*. Задание многочлена его значениями. Многочлены Лагранжа

Стандартный способ *задания*, т. е. *однозначного определения* многочлена — указание его коэффициентов. Однако иной раз (например, при обработке результатов наблюдений) известны не коэффициенты многочлена, а его значения в каких-то точках. Спрашивается, *определяется ли* многочлен своими значениями, и если да, то насколько *однозначно*?

Частичный ответ на второй вопрос дает следующее утверждение, непосредственно вытекающее из леммы о равенстве многочленов.

Лемма 2 (*о единственности многочлена*). *Существует* ***не более одного*** *многочлена степени, не превосходящей n, который в заданных $n+1$ различных точках принимает заданные значения.*

Доказательство. Пусть даны различные точки $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ и $n+1$ соответствующих им значений $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ (которые не обязаны быть различными). Требуется доказать, что существует самое большее *один* многочлен $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени $\deg p \leqslant n$ такой, что при всех k от 0 до n выполнены соотношения $p(x_k) = y_k$.

Если еще для какого-то многочлена $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени $\deg q \leqslant n$ выполнены соотношения $q(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, то мы попадаем в условия леммы 1: при всех k от 0 до n имеем $q(x_k) = y_k = p(x_k)$. Значит, многочлены p и q совпадают, что и требовалось доказать. ■

В терминах графиков функций утверждение леммы означает, что *через $n+1$ заданных на координатной плоскости $(x; y)$ точек $(x_k; y_k)$ с различными абсциссами x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, можно провести* ***не более одного*** *графика полиномиальной функции степени, не превосходящей n.* Существенно ли при этом ограничение на степень полинома (полиномиальной функции)? — Конечно, существенно. Например, если через *две*

точки $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$ с различными абсциссами $x_0 \neq x_1$ можно провести не более одного графика полинома степени не выше 1 (здесь у нас $n = 1$, а упомянутый график — прямая $y = a_1x + a_0$), то уже графиков квадратичных полиномов, т. е. парабол, через эти две точки можно провести бесконечно много: например, если $y_0 = y_1 = 0$, то через точки $(x_0; 0)$ и $(x_1; 0)$ пройдут все параболы, записываемые уравнениями $y = a(x - x_0)(x - x_1)$ (число $a \neq 0$ — любое). Вместо числового коэффициента a в последней формуле можно взять произвольный полином $q(x)$ — все графики $y = q(x)(x - x_0)(x - x_1)$ пройдут через указанные две точки.

Заметим, что в лемме среди многочленов степени, не большей n, учитывается и *нулевой* многочлен. Если все $n + 1$ данных точек $(x_k; y_k)$ лежат на оси абсцисс, т. е. все значения y_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, равны нулю, то условию леммы удовлетворяет именно нулевой многочлен, причем, согласно утверждению леммы, *других* удовлетворяющих условию леммы многочленов степени, не большей n, *нет*. Многочленов же $p(x)$ степени, большей n, начиная со степени $n + 1$, для которых $p(x_k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$, *сколько угодно*: такими будут все многочлены вида $p(x) = q(x)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$, где $q(x)$ — любой ненулевой многочлен, включая (ненулевые) константы.

Рассмотрим теперь вопрос о *существовании* полиномиальных функций с заданными значениями в заданных точках. При произвольном n многочлен степени, не большей n, имеет вид $p(x) = a_nx^n + \ldots + a_ix^i + \ldots + a_0$, где на коэффициенты a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, не накладывается никаких ограничений (в частности, коэффициент a_n может быть равен нулю — важно лишь, что в многочлен не входят одночлены степени, большей n). Спрашивается, если даны различные точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и не обязательно различные значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$, то *существуют ли* коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ такие, что при всех k от 0 до n выполнены соотношения $p(x_k) = y_k$? Эти соотношения можно записать в виде *уравнений*, которым должны подчиняться коэффициенты a_i:

$$p(x_k) = a_nx_k^n + \ldots + a_ix_k^i + \ldots + a_0 = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \qquad (8)$$

и вопрос состоит в том, имеет ли *система уравнений* (8) *какое-нибудь* решение $(a_0; a_1; \ldots; a_n)$ (из леммы 2 мы уже знаем, что *если решение есть, то только одно*). Таким образом, чисто

алгебраический подход к поставленному вопросу приводит к задаче исследования *системы* $n+1$ *линейных уравнений с* $n+1$ *неизвестной*.

Если $n=1$, то получается система двух уравнений с двумя неизвестными, a_1 и a_0:

$$\begin{cases} a_1x_0 + a_0 = y_0, \\ a_1x_1 + a_0 = y_1. \end{cases}$$

Она совсем легко решается — сначала после вычитания уравнений находим a_1, а потом и a_0:

$$a_1(x_1 - x_0) = y_1 - y_0 \implies a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\ ;$$

$$a_0 = y_0 - a_1x_0 = y_0 - x_0\,\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\ ,$$

так что система всегда (при $x_0 \neq x_1$) имеет единственное решение (впрочем, это очевидно и из геометрических соображений: через любые две не лежащие на одной вертикали точки $(x_0;\, y_0)$, $(x_1;\, y_1)$ проходит единственная прямая — график $y = a_1x + a_0$). Однако уже при $n=2$ перспектива решения (исследования) получающейся системы трех уравнений с тремя неизвестными a_2, a_1 и a_0, имеющей вид

$$\begin{cases} a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = y_0, \\ a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = y_1, \\ a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 = y_2, \end{cases}$$

не слишком вдохновляет. Неясен и геометрический подход: как установить, что через три точки $(x_0;\, y_0)$, $(x_1;\, y_1)$ и $(x_2;\, y_2)$, никакие две из которых не лежат на одной вертикали $x = \mathrm{const}$, проходит единственный график функции вида $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ — прямая в случае $a_2 = 0$ и парабола при $a_2 \neq 0$?

Поэтому, следуя *Лагранжу*, пойдем в обход. Начнем с вопроса о том, как записать многочлен, если известны *все* его *различные* корни, в количестве n штук. Если это числа $x_1, \ldots, x_n$, то самый простой многочлен с такими (и только такими!) корнями есть произведение n отвечающих корням биномов: $p_{(0)}(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n)$. Кроме этого многочлена, имеющего степень n, существует еще бесконечно много многочленов степени n с теми же корнями, имеющих вид $ap_{(0)}(x)$, где a — ненулевая константа. Кроме того, существует бесконечно

много многочленов более высокой степени вида

$$p(x) = q(x)(x - x_1)^{\nu_1}(x - x_2)^{\nu_2} \dots (x - x_n)^{\nu_n},$$

где показатели ν_k степеней биномов $x - x_k$ — любые натуральные числа, а $q(x)$ — произвольный *не имеющий корней многочлен* (например, произведение каких-то квадратных трехчленов с отрицательными дискриминантами[1]).

Нас будут интересовать только многочлены степени n, имеющие ровно n данных различных корней $x_1, \dots, x_n$. Оказывается, все они записываются в виде $ap_{(0)}(x) = a(x - x_1) \dots (x - x_n)$, где a — ненулевая константа, которая однозначно определяется, если задано еще (ненулевое) значение многочлена в какой-нибудь точке x_0, не совпадающей ни с одним из корней $x_1, \dots, x_n$.

Лемма 3 (***вторая лемма о единственности многочлена***). *Для любых $n + 1$ различных точек $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ и любого числа $y_0 \neq 0$ существует* ***единственный*** *многочлен степени n, корни которого суть $x_1, \dots, x_n$, а значение в точке x_0 равно y_0.*

Доказательство. Для доказательства *существования* рассмотрим указанный выше многочлен $p(x) = ap_{(0)}(x) = a(x-x_1) \dots (x-x_n)$ с заданными корнями $x_1, \dots, x_n$ и подберем константу a так, чтобы выполнялось равенство $p(x_0) = y_0$. Подставив в выражение для $p(x)$ значение $x = x_0$, получим уравнение, из которого и находим нужное значение a:

$$p(x_0) = a(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n) = y_0 \iff a = \frac{y_0}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)}.$$

Таким образом, многочлен степени n (напомним, что $y_0 \neq 0$), записываемый формулой

$$\widehat{p_{(0)}}(x) = \frac{y_0}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)} \cdot (x - x_1) \dots (x - x_n) = \\ = y_0 \cdot \frac{(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)},$$

удовлетворяет всем условиям леммы 3.

Далее, указанный многочлен $\widehat{p_{(0)}}$ имеет степень n и в данных точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, в количестве $n + 1$, принимает заданные

[1] В действительности *любой не имеющий корней многочлен представляется в виде произведения некоторых квадратных трехчленов с отрицательными дискриминантами*! Мы обсудим это далее, в § 2.4.

значения: y_0 и $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$. А согласно лемме 2 такой многочлен может быть только один. Таким образом, доказана *единственность* указанного в условии леммы 3 многочлена. ■

Теперь мы можем решить вопрос о существовании многочлена степени, не превосходящей n, который в данных (различных) точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принимает произвольные заданные значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Мы просто *укажем* такой многочлен. Для этого при каждом k от 1 до n аналогично тому, как было показано в доказательстве леммы, построим многочлен $\widehat{p_{(k)}}(x)$, принимающий в точке x_k значение y_k, а в остальных n точках совокупности $x_0, x_1, \ldots, x_n$ равный нулю. Это будет многочлен

$$\widehat{p_{(k)}}(x) = y_k \cdot \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}, \qquad (9)$$

имеющий степень n, если заданное значение y_k отлично от нуля, и *нулевой*, если $y_k = 0$. Сложив все эти многочлены, мы получим многочлен

$$\widehat{p}(x) = \widehat{p_{(0)}}(x) + \widehat{p_{(1)}}(x) + \cdots + \widehat{p_{(n)}}(x) \qquad (10)$$

степени, *не превосходящей* n (напомним, что при сложении многочленов степень суммы может *уменьшиться* по сравнению со степенями слагаемых!), и в каждой из данных точек x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, принимающий соответствующее (заданное) значение y_k.

Подведем итог.

Теорема 6 (*теорема Лагранжа об интерполяции*). *Существует* ***единственный*** *многочлен степени, не превосходящей n, который в заданных $n+1$ различных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принимает заданные значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$ соответственно.*

Доказательство. *Существование*: нужный многочлен задается ***интерполяционной формулой Лагранжа*** — суммой (10), в которую подставлены *интерполяционные многочлены Лагранжа* из формул (9).

Единственность, как и при доказательстве леммы 3, следует из леммы 2 (*о единственности многочлена*). ■

§ 2.2. Разложение многочленов. Теорема Виета и комбинаторика

2.2.1. Полностью разложимые многочлены. Первые теоремы Виета

Вернемся к вопросам, связанным с корнями многочленов. Согласно *теореме о делимости* (п. 2.1.5, следствие 2), при наличии у многочлена $p_n \in \mathbb{R}[x]$ корня x_1 его можно разложить в произведение линейного двучлена $x - x_1$ и многочлена на единицу меньшей степени, т. е. представить в виде $p_n(x) = (x - x_1)p_{n-1}(x)$[1]. Если у многочлена $p_{n-1}(x)$ также есть корень x_2 (не обязательно отличный от x_1), то разложение можно продолжить: по теореме о делимости многочлен $p_{n-1}(x)$ можно представить в виде $p_{n-1}(x) = (x - x_2)p_{n-2}(x)$, а исходный многочлен — как произведение уже двух биномов и многочлена степени на 2 меньшей, т. е. в виде $p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)p_{n-2}(x)$. Если и у многочлена $p_{n-2}(x)$ есть корень x_3, то разложение можно опять продолжить, представив исходный многочлен в виде $p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)p_{n-3}(x)$. В случае, когда разложение все время можно продолжить, т. е. когда на каждом шаге промежуточное частное $p_{n-k}(x)$ имеет какой-то корень x_k и возможно выделение очередного линейного множителя $x - x_k$, в итоге мы получим представление исходного многочлена в виде произведения старшего коэффициента и линейных двучленов вида $x - x_k$, *не обязательно различных*[2]:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \\ = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n). \qquad (1)$$

Такие многочлены будем называть ***полностью разложимыми***. Примерами полностью разложимых многочленов служат *линейные двучлены*, а также *квадратные трехчлены с неотрицательными дискриминантами*. В качестве примеров многочленов, *не являющихся* полностью разложимыми, можно взять *квадратные трехчлены с отрицательными дискриминан-*

---

[1] Для разложения можно воспользоваться любым из описанных в п. 2.1.4 методов: *группировки*, *Руффини—Горнера* или *деления уголком*.

[2] Описанный случай осуществляется тогда, когда *число корней многочлена, с учетом кратностей,* ***равно*** *степени многочлена* — обдумайте!

тами, или *кубические многочлены*, которые представляются в виде $p_3(x) = (x - a)(x^2 + px + q)$, где $p^2 - 4q < 0$ (объясните!).

Для полностью разложимого многочлена, записываемого в виде (1), совокупность n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем называть ***полным набором корней*** этого многочлена. Условимся записывать полные наборы корней разложимых многочленов в угловых скобках: $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$.

В полном наборе корней каждый корень выписывается столько раз, какова его кратность, так что полный набор — это ***не множество***. Подобные совокупности элементов, в которых некоторые элементы могут *повторяться*, в *комбинаторике* (об этом разделе математики пойдет речь ниже, в п. 2.2.3 и далее) называются «***мультимножествами***» — их мы и будем записывать в угловых скобках. Когда же рассматривается конечное ***множество***, то каждый его элемент учитывается *единожды* — выписывается, перечисляется только один раз; элементы множества принято записывать в фигурных скобках.

Так, *множество* M корней полинома $p_3(x) = (x - 1)^2(x - 2)$ состоит из двух чисел: $M = \{1, 2\}$, — а *полный набор* его корней есть *мультимножество* $\widehat{M} =< 1, 1, 2 >$.

Отметим, что *порядок*, в котором записываются элементы множеств или мультимножеств, является *несущественным*, так что для указанного многочлена можно записать $M = \{1, 2\} = \{2, 1\}$, $\widehat{M} =< 1, 1, 2 >=< 2, 1, 1 >=< 1, 2, 1 >$.

Разделим все части соотношений (1) на старший коэффициент a_n и запишем разложение полученного ***приведенного***[1] *полностью разложимого многочлена*:

$$P_n(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n = \\ = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n), \qquad (2)$$

где $c_k = \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$. Приведенный многочлен в соотношениях (2) записан в двух видах: по убывающим степеням переменной и в виде произведения биномов. И, *самое главное*: при раскрытии скобок в произведении мы получим *систему уравнений, связывающих между собой корни многочлена и его коэффициенты* — так называемую ***систему Виета***, по сути, *эквивалентную приведенному полиномиальному уравнению*. Утверждение об этой эквивалентности называется ***теоремой Виета***; мы сформулируем и докажем ее сначала в случаях $n = 2$ и $n = 3$.

[1] То есть имеющего старшим коэффициентом *единицу*.

При $n = 2$ ***основная формула Виета*** (2) приобретает вид

$$x^2 + c_1x + c_2 = (x - x_1)(x - x_2).$$

Раскрывая скобки: $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$ и приравнивая получившиеся коэффициенты коэффициентам в левой части, получаем *систему Виета* для $n = 2$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -c_1, \\ x_1x_2 = c_2. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 7 (*теорема Виета для квадратных уравнений*). *Приведенный квадратный трехчлен $x^2 + c_1x + c_2$ имеет хотя бы один корень* ***тогда и только тогда, когда*** *соответствующая система Виета* (3) *имеет хотя бы одно решение, причем в этом случае числа $<x_1, x_2>$ образуют полный набор корней трехчлена $x^2 + c_1x + c_2$* ***тогда и только тогда, когда*** *пара чисел $(x_1; x_2)$ является решением системы Виета.*

Доказательство. Можно было бы сказать, что *доказательство очевидно*, однако ввиду запутанности доказательств, иногда содержащихся в учебниках алгебры для средних классов[1)], мы приведем здесь подробное доказательство.

В одну сторону: если приведенный квадратный трехчлен $x^2 + c_1x + c_2$ имеет корни (хотя бы один корень), то он полностью разложим, т. е. представляется в виде произведения $(x - x_1)(x - x_2)$. Раскрывая скобки в произведении и приравнивая коэффициенты, получаем, что пара чисел $(x_1; x_2)$ является решением системы Виета (3).

В обратную сторону: пусть пара чисел $(x_1; x_2)$ является решением системы Виета (3). Рассмотрим полностью разложимый квадратный трехчлен $p_2(x) = (x - x_1)(x - x_2)$. Так как имеет место система Виета (3), этот трехчлен совпадает с $x^2 + c_1x + c_2$; с другой стороны, по записи трехчлена $p_2(x)$ числа $<x_1, x_2>$ образуют полный набор его корней.

Тем самым теорема полностью доказана. ■

В случае $n = 3$ поступаем аналогично — раскрываем скобки в *основной формуле Виета* (2) и приравниваем коэффициенты:

$$x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - \sigma_1x^2 + \sigma_2x - \sigma_3,$$

[1)] Некоторые доказательства основываются на *формулах для корней*, хотя они здесь совсем ни к чему.

где $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, $\sigma_3 = x_1x_2x_3$; отсюда и получается *система Виета* при $n = 3$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= -c_1, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= c_2, \\ x_1x_2x_3 &= -c_3. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 8 (*теорема Виета для кубических уравнений*). *Кубический многочлен $x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3$ является полностью разложимым* ***тогда и только тогда****, когда соответствующая система Виета* (4) *с тремя переменными имеет решения, причем в этом случае числа $<x_1, x_2, x_3>$ образуют полный набор корней многочлена $x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3$* ***тогда и только тогда, когда*** *тройка чисел $(x_1; x_2; x_3)$ является решением системы Виета* (4).

Доказательство этой теоремы *точно такое же*, как для предыдущей, и поэтому мы его опускаем. ■

Теорема Виета в общем случае — для полностью разложимых приведенных многочленов произвольной степени n — формулируется так же, как и в двух рассмотренных ситуациях. Однако в общем случае определенную сложность представляет запись, соответствующей *общей* системы Виета. С этим мы разберемся далее в п 2.2.7. Здесь же приведем следствие из теоремы 7, которое помогает лучше понять ее *смысл* и способы применения.

Следствие 1. *Дискриминант D квадратного трехчлена $x^2 + c_1x + c_2$ отрицателен* ***тогда и только тогда****, когда соответствующая система Виета* (3) *решений не имеет; дискриминант $D = 0$* ***тогда и только тогда****, когда система Виета* (3) *имеет единственное решение*: $(x_1; x_2) = (a_0; a_0)$, *где a_0 — единственный корень трехчлена; дискриминант $D > 0$* ***тогда и только тогда****, когда система Виета* (3) *имеет два решения*: $(x_1; x_2) = (a_1; a_2), (a_2; a_1)$, *где $a_{1,2}$ — корни рассматриваемого квадратного трехчлена.*

Доказательство очевидно (сформулированное следствие есть не что иное, как «расшифрованная» теорема Виета 7). ■

Критерием (необходимым и достаточным условием) полной разложимости квадратного многочлена является неотрицательность его дискриминанта. Такого же простого критерия

полной разложимости кубических многочленов нет. Чтобы сформулировать и доказать условие полной разложимости многочленов степени 3, потребуется провести некоторые алгебраические «приготовления», применить средства математического анализа, исследовать возможное «поведение» кубических полиномиальных функций. Это мы сделаем в следующем параграфе.

2.2.2. Решение систем Виета. Пример

Кроме уравнений с одной переменной, в алгебре рассматривают и уравнения с *несколькими* переменными. Уравнением с n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется равенство вида

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (*)$$

между двумя ***выражениями***, включающими эти переменные. ***Решением*** уравнения $(*)$ называется ***упорядоченный набор*** n чисел $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ такой, что при подстановке в уравнение вместо переменных x_k соответствующих числовых значений a_k $(x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n)$ получается *верное* (*истинное*) *числовое равенство*. ***Упорядоченность*** набора чисел (или иных элементов) означает, что порядок их следования для нас существенен. *Упорядоченные* наборы чисел (элементов) принято записывать *в круглых скобках* (в случае чисел, *как правило*, через точку с запятой, но при подстановке в выражение — просто через запятую). Так, если для множеств можно записать $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, то для *упорядоченных наборов чисел* $(1; 2) \neq (2; 1)$.

Несколько уравнений с n переменными можно рассматривать как ***систему уравнений с*** n ***переменными*** — тогда упорядоченный набор n чисел $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ называется ***решением системы уравнений***, если этот набор является решением *каждого* из уравнений системы (иначе говоря, если для набора значений переменных $(x_1; x_2; \ldots; x_n) = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ *выполнены* — в смысле «*истинны*» — все входящие в систему уравнения).

Пример 2.2.1. Найдем все решения системы Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 11, \\ x_1x_2x_3 = 6. \end{cases} \qquad (*)$$

Согласно теореме Виета 8, решения системы уравнений $(*)$ отвечают полному набору корней соответствующего системе кубического многочлена $p_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ или уравнения $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Далее, система будет иметь решение (решения), если многочлен $p_3(x)$ полностью разложим. Чтобы выяснить, действительно ли это так, попытаемся найти корни многочлена или уравнения и *попробуем* его разложить.

В данном случае, *очевидно*, $p_3(1) = 0$, так что один корень у многочлена есть: это $x_0 = 1$. Выделяем (выносим за скобку!) в многочлене $p_3(x)$ соответствующий линейный множитель — бином $x - x_0 = x - 1$. Применим для этого схему Руффини—Горнера. Вычисляем:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline \alpha = 1 & 1 & ? & ? & ? \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline \alpha = 1 & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}.$$

Следовательно, $p_3(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$. Разложение квадратного трехчлена *очевидно*: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, — так что исходный кубический многочлен полностью разложим: $p_3(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Таким образом, согласно теореме Виета 8, решением системы Виета $(*)$ будет тройка чисел $(x_1; x_2; x_3) = (1;\ 2;\ 3)$.

Всё? Задача, т. е. система $(*)$ **решена?** *Конечно, нет.* Ведь в алгебре «*решить задачу*» (уравнение, неравенство, систему...) значит, *найти все решения*[1] этой задачи. А в данном случае наряду с (упорядоченной!) тройкой чисел $(x_1; x_2; x_3) = (1;\ 2;\ 3)$ системе $(*)$, *очевидно*, удовлетворяет и тройка $(x_1; x_2; x_3) = (2;\ 1;\ 3)$ (взгляните!). **Но:** не противоречит ли это теореме Виета? — Никоим образом. Вторая тройка отвечает ***тому же самому*** полному набору корней полинома $p_3(x)$: $< 2, 1, 3 >=< 1, 2, 3 >$[2], и *тому же самому* разложению полинома, только с другим порядком сомножителей:

$$p_3(x) = (x - 2)(x - 1)(x - 3) = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Таким образом, ларчик просто открывается: и в общем случае для полностью разложимого полинома $p_n(x)$ в разложении

$$p_n(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

[1] Найти совокупность, *множество* всех решений.
[2] См. предыдущий раздел.

линейные сомножители $x - x_k$ *могут быть записаны* ***в любом порядке***[1] — теорема Виета всё равно справедлива.

Итак, в силу теоремы Виета, чтобы найти *все* решения системы (∗), нужно рассмотреть всевозможные (различные!) порядки следования или, как принято говорить, *перестановки* сомножителей в разложении $p_3(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Они соответствуют всем возможным перестановкам корней 1, 2 и 3 полинома $p_3(x)$. Перестановки корней дадут все решения системы.

В принципе, все нужные перестановки можно попросту перебрать — попробуйте!

Кроме уже указанных перестановок $(1, 2, 3)$ и $(2, 1, 3)$, есть еще 4 перестановки: $(3, 2, 1)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 3, 1)$ и $(3, 1, 2)$ (условимся перестановки, т. е. *порядки следования элементов*, записывать в круглых скобках, перечисляя «переставляемые» элементы через запятую). Но почему это действительно ***все*** перестановки? Как обосновать, что мы ничего не пропустили, т. е. что перебор был, как говорят, *полный*? Да и как быть в более сложных случаях — например, если нужно найти все перестановки четырех элементов (чисел, сомножителей, . . .)?

Нужен какой-то ***метод*** *перебора*, *гарантирующий*, во-первых, *полноту* перебора (т. е. то, что перечислены *все* возможности — в данном случае, все перестановки), и во-вторых, его *однозначность*, т. е. тот факт, что при переборе этим методом *каждая возможность* (каждая перестановка) *учтена только один раз*.

В данном случае метод полного однозначного перебора совсем прост. Мы рассматриваем все возможные перестановки (a_1, a_2, a_3) трех различных элементов — чисел 1, 2, 3. На первом месте может стоять любое из этих трех чисел, т. е. для a_1 имеется 3 различные возможности. Если первый элемент, a_1, выбран, то на втором месте может стоять любое из двух остававшихся чисел, т. е. для второго элемента a_2 имеется 2 различные возможности. Таким образом, каждой из трех возможностей для a_1 отвечают две возможности для a_2, поэтому для первых двух элементов a_1 и a_2 упорядоченной тройки (перестановки) (a_1, a_2, a_3) число возможностей равно

[1] Можно сказать, «*сомножителям всё равно, в каком порядке они выписаны*»! («*Цифры никогда не знают, какое они составляют число*», — однажды написал знаменитый аргентинский писатель Хулио Корта́сар.)

произведению $3 \cdot 2 = 6$. Наконец, если первые два элемента a_1, a_2 тройки (перестановки) уже выбраны, то на третье место нужно поставить единственное оставшееся число — для третьего элемента a_3 имеется одна возможность. Значит, число возможностей для всех трех элементов упорядоченной тройки (a_1,a_2,a_3) равно произведению $6 \cdot 1 = 6$.

Следовательно, число возможных перестановок (a_1,a_2,a_3) из трех различных элементов равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, и для чисел 1, 2, 3 рассмотренный метод перебора дает следующие 6 решений системы Виета $(*)$:

$$(x_1; x_2; x_3) = (1;\ 2;\ 3),\ (1;\ 3;\ 2),\ (2;\ 1;\ 3),\ (2;\ 3;\ 1),\ (3;\ 1;\ 2),\ (3;\ 2;\ 1)$$

(сначала указаны решения с числом 1 на первом месте, потом — с числом 2 на первом месте и, наконец, с числом 3 на первом месте). □

Вопрос: *сколько существует перестановок* $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ *из* n *различных элементов* $a_1, a_2, \ldots, a_n$?

2.2.3. Комбинаторное отступление 1: перестановки

Еще раз обратим внимание на то, что в рассуждении *о количестве всех возможных перестановок трех различных элементов* их числовая природа была несущественным фактом. Точно так же речь может идти о расстановке трех различных предметов мебели на трех местах (первом, втором, третьем) в комнате, о возможном распределении трех призов (мест, медалей) между тремя спортсменами, о тасовании колоды из трех различных карт, и т. д. и т. п. (см. «Упражнения»).

Далее, рассмотренный в примере 2.2.1 метод перебора можно применить для подсчета числа всех перестановок *любого* количества различных элементов. Например, в случае перестановок (a_1,a_2,a_3,a_4) четырех различных элементов a, b, c, d (скажем, попарно различных чисел) рассуждаем так.

На первом месте может стоять любой из четырех элементов, т. е. для a_1 имеется 4 различные возможности. Если элемент a_1 выбран, то для второго элемента a_2 останется только 3 различные возможности. Каждой из четырех возможностей для a_1 отвечают три возможности для a_2, поэтому для первых двух элементов a_1 и a_2 перестановки (a_1,a_2,a_3,a_4) число возможностей равно произведению $4 \cdot 3$. Если первые два элемента

a_1, a_2 перестановки уже выбраны, то для третьего элемента a_3 остаются 2 возможности — каждой возможности для a_1, a_2 отвечают 2 возможности для a_3, поэтому число возможностей для выбора первых трех элементов перестановки (a_1,a_2,a_3,a_4) равно произведению $4 \cdot 3 \cdot 2$. Наконец, если первые три элемента a_1, a_2, a_3 перестановки выбраны, то для четвертого элемента a_4 остается 1 возможность. Значит, число возможностей для всех четырех элементов перестановки (a_1,a_2,a_3,a_4) равно произведению $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Пример 2.2.2. Найдем число решений системы Виета для полностью разложимого многочлена $p_4(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ (сама система Виета нам не нужна; впрочем, отыскание ее явного вида включено в «Упражнения»).

Как и в примере 2.2.1, решения системы Виета отвечают перестановкам корней 0, 1, 2, 3 данного полинома. Поскольку «все корни различны» — в том смысле, что в полном наборе корней *нет кратных*, — число перестановок равно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Значит, указанная система Виета имеет 24 решения (можно было бы все эти решения выписать, да как-то не хочется!). □

Число всех перестановок $(a_1,a_2, \ldots, a_n)$ из n различных элементов $c_1, c_2, \ldots, c_n$ обозначается через $\mathbf{P}_n$. Как мы уже видели, $\mathbf{P}_3 = 6$, $\mathbf{P}_4 = 24$; очевидно, $\mathbf{P}_2 = 2$: число перестановок двух элементов равно двум; число перестановок *единственного* элемента равно единице: $\mathbf{P}_1 = 1$.

Рассуждения, аналогичные проведенным выше для случаев $n = 3$ и $n = 4$ (применение метода полного перебора) показывают, что

$$\mathbf{P}_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 24 = 120, \quad \mathbf{P}_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 120 = 720,$$

а в общем случае

$$\mathbf{P}_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot \mathbf{P}_{n-1} = n!, \qquad (5)$$

где $n!$ (читается «n-факториал»[1]) — стандартное обозначение для произведения всех натуральных чисел от 1 до n. Естественно считать, что $1! = 1$; по определению полагают, что $0! = 1$, так что функция $n \mapsto n!$ определена при всех неотрицательных целых n. Если положить $\mathbf{P}_0 = 1$, и учесть, что

[1] От англ. **factor** — множитель, сомножитель.

$2! = 2 \cdot 1 = 2$, то получается, что соотношения (5) справедливы при всех натуральных n.

В равенствах (5) записаны две основные формулы для числа перестановок: «общая» $\mathbf{P}_n = n!$ и *рекурсивная* формула $\mathbf{P}_n = n \cdot \mathbf{P}_{n-1}$, используемая при непосредственных (например, компьютерных) вычислениях числа перестановок или, что то же самое, числа $n!$. Рекурсивную формулу легко доказать *независимо* от общей формулы, *не зная* ее. Приведем это красивое рассуждение.

Допустим, число перестановок $n-1$ элементов $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ равно $\mathbf{P}_{n-1}$. Добавим к этим элементам n-й элемент c_n и найдем число $\mathbf{P}_n$. Если из любой перестановки n элементов $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n$ выбросить элемент c_n, то получится перестановка первых $n-1$ элементов. Следовательно, любая перестановка n элементов получается «вставкой» в перестановку первых $n-1$ элементов n-го элемента c_n. Для каждой перестановки $n-1$ элементов имеется в точности n позиций, которые может занять вставляемый элемент c_n (см. рис. 2.1). Следовательно, для каждой из $\mathbf{P}_{n-1}$ перестановок $n-1$ элементов получается n перестановок элементов $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n$, так что $\mathbf{P}_n = n \cdot \mathbf{P}_{n-1}$ — рекурсивная формула доказана!

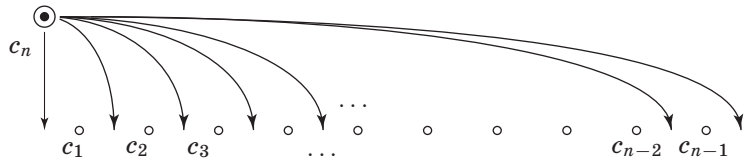


Рис. 2.1

Возвращаясь к системам Виета, приходим к следующему выводу: *если все линейные сомножители $x - c_k$ полностью разложимого многочлена $p_n(x) = (x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n)$* ***различны****, то соответствующая этому многочлену система Виета имеет в точности $n!$ различных решений.* Эти решения отвечают $n!$ перестановкам совокупности n корней $c_1, c_2, \ldots, c_n$ многочлена $p_n(x)$.

Вопрос: *существенно ли здесь требование* ***различия*** *линейных сомножителей полинома*?

Ответ: конечно, существенно! Например, если все n сомножителей $x - c_k$ одинаковы, т. е. $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = c$ и полином имеет вид *степени бинома*: $p_n(x) = (x - c)^n$, — то *согласно теореме Виета*, система Виета имеет *единственное* решение: $(x_1; x_2; \ldots; x_n) = (c; c; \ldots; c)$. Это и понятно: многочлен имеет

единственный корень *с кратности* n[1)], и перестановками полного набора корней $<c, c, \ldots, c>$ ничего, кроме самого этого набора, не получишь, сколько не переставляй! Интересно, сколько решений может иметь система Виета в «промежуточных» случаях — когда не все n сомножителей $x - c_k$ одинаковы, но и не все различны? На этот вопрос мы ответим в следующем пункте.

Перестановки n различных элементов $c_1, c_2, \ldots, c_n$ можно трактовать как *перестановки элементов конечного n-элементного множества* $C_{(n)} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Пусть c_k — корни некоторого полностью разложимого многочлена, выписанные с учетом своих кратностей, т. е. $C_{(n)}$ — полный набор корней многочлена. Если среди элементов этого набора есть одинаковые, то перестановки этих элементов называют «*перестановками с повторениями*»; иначе их можно трактовать как *перестановки элементов конечного n-элементного* ***мультимножества*** (см. п. 2.2.1).

Между прочим, мы до сих пор не дали *строгого определения* тому, *что такое перестановка*. Это интуитивно прозрачное понятие имеет много различных абсолютно строгих определений. Хотя интуитивных представлений (ряд элементов, выписанных в каком-то порядке) в общем-то, достаточно, укажем на строгое определение в терминах множеств.

Перестановка элементов конечного n-элементного множества $C_{(n)}$ есть *взаимно-однозначное соответствие* между множеством $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ первых n натуральных чисел и множеством $C_{(n)}$, т. е., в данном случае, *обратимая функция*

$$\alpha : N_n \to C_{(n)} : k \mapsto \alpha(k) = a_k.$$

В силу обратимости функции α разным значениям k от 1 до n отвечают разные элементы $a_k \in C_{(n)}$, а поскольку их n штук, это будут *те же* элементы $c_i \in C_{(n)}$, только, вообще говоря, «под другими номерами». Выписав их по порядку: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, — мы как раз получим перестановку элементов множества $C_{(n)}$ в привычном для нас виде.

2.2.4. Перестановки с повторениями и системы Виета

Рассмотрим сначала несколько конкретных примеров.

Пример 2.2.3. Найдем все решения системы Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0, \\ x_1x_2x_3 = 0. \end{cases}$$

[1)] Но не «n одинаковых корней»!

Как мы видели, решения системы даются перестановками полного набора корней соответствующего кубического многочлена $p_3(x) = x^3 - x^2$, который, конечно, полностью разложим: $p_3(x) = x^2(x-1) = x \cdot x \cdot (x-1)$. Полный набор корней состоит из чисел 0, 0 и 1. Различных перестановок этих чисел (нуль берется дважды!), очевидно, три: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$ (конечно, это *перебор*, причем *полный*: мы выбираем *позицию*, на которой стоит единственная единица, и таких позиций всего три). □

Пример 2.2.4. Усложним задачу: найдем число решений системы Виета для полностью разложимого многочлена $p_4(x) = x^2(x-1)^2$. Решения отвечают перестановкам полного набора корней 0, 0, 1, 1 выписанного многочлена. Конечно, можно «тупо» перебирать, но это непродуктивно: нам нужен какой-то *общий* метод, подход — такой, чтобы он пригодился и в других задачах. Покажем две идеи.

Первая. В случае четырех различных корней задача легко решается: число перестановок равно $4! = 24$. Так вот, для начала *пронумеруем*(!) наши нули и единицы, чтобы они были «как бы различными» — рассмотрим «пронумерованный полный набор корней»: 0_1, 0_2, 1_1, 1_2. Перестановок пронумерованных корней, конечно, 24, однако на самом-то деле и нули, и единицы *одинаковы*, так что при нашем способе пересчета одну и ту же перестановку с повторениями мы считаем *несколько раз*. Например, перестановки $(0_1, 0_2, 1_1, 1_2)$ и $(0_2, 0_1, 1_1, 1_2)$ мы учитываем как *разные*, а на самом деле они *одинаковые* — это *одна и та же* перестановка $(0,0,1,1)$. *Вопрос*: сколько раз мы учли эту перестановку?

Поскольку мы считали нули разными и единицы разными, то при любых перестановках нулей между собой и единиц между собой получается та же перестановка ненумерованных корней. При любой из двух перестановок нулей возможны две перестановки единиц, поэтому рассматриваемая перестановка ненумерованных корней была учтена $2 \cdot 2 = 4$ раза: кроме указанных двух «пронумерованных перестановок», ту же самую перестановку $(0,0,1,1)$ дают еще две — это $(0_1, 0_2, 1_2, 1_1)$ и $(0_2, 0_1, 1_2, 1_1)$. Точно так же и любая другая перестановка набора корней 0, 0, 1, 1 дает четыре «пронумерованных перестановки» (два нуля можно переставлять между собой, и две единицы —

тоже). Значит, каждая перестановка при подсчете перестановок пронумерованных корней учтена 4 раза, и истинное число X перестановок получается из числа $\mathbf{P}_4$ перестановок пронумерованных корней делением на 4: $X = 24 : 4 = 6$. Можно было бы и выписать 6 перестановок, отвечающих шести решениям системы Виета, что мы и сделаем чуть позже.

Вторая идея подсказывается предыдущим примером, в котором мы определяли позицию, место единственной единицы. В данном случае единиц две, так что в перестановке с повторениями (a_1, a_2, a_3, a_4) нужно определить две позиции, на которых будет стоять единица (а на двух оставшихся позициях — нули). Спрашивается, ско́лькими способами это можно сделать?

Как и выше, будем сначала считать единицы пронумерованными. Сначала выберем позицию для первой единицы — ею может быть любая из четырех позиций от a_1 до a_4. При любом из этих выборов для второй единицы остаются 3 возможности, т. е. вторая единица может занять любую из трех оставшихся свободными позиций. Следовательно, если единицы (и их позиции) считать пронумерованными, то число возможностей выбора равно произведению $4 \cdot 3 = 12$. А поскольку единицы-то одинаковы, их можно переставлять между собой. Значит, при данном способе подсчета числа перестановок с повторениями каждая перестановка была учтена дважды, и число различных перестановок равно $12 : 2 = 6$.

Конечно, мы пришли к тому же ответу. Укажем эти 6 перестановок: $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$. □

Обе изложенные в последнем примере идеи подсчета числа перестановок с повторениями весьма плодотворны, так что опять настало время собирать урожай.

Начнем с непосредственного обобщения примера 2.2.4. Если полином степени n имеет всего два корня: корень a кратности $m_1 = m$ и корень $b \neq a$ кратности $m_2 = n - m$, то он записывается в виде произведения степеней двух биномов: $p_n(x) = (x - a)^m (x - b)^{n-m}$. Число X решений соответствующей этому полиному системы Виета равно количеству различных перестановок полного набора корней M, состоящего из m

чисел[1)], равных a, и $m_2 = n - m$ чисел, равных b:

$$M = <\underbrace{a, \ldots, a}_{m}, \underbrace{b, \ldots, b}_{n-m}>.$$

Найдем это число X.

Сначала применим первый из подходов, показанных в примере 2.2.4. Если считать пронумерованными все m корней a: $a = a_1, \ldots, a_m$, — и все $n - m$ корней b: $b = b_1, \ldots, b_{n-m}$, — то число перестановок пронумерованных (всё равно, что *различных*!) корней равно $\mathbf{P}_n = n!$. Рассуждая так же, как в примере 2.2.4, мы получаем, что при этом способе подсчета каждая из перестановок с повторениями считается несколько раз, а именно, $K = \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{P}_{n-m} = m! \cdot (n - m)!$ раз. Следовательно,

$$X = \frac{\mathbf{P}_n}{K} = \frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{P}_m \cdot \mathbf{P}_{n-m}} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\ . \qquad (6)$$

Внимание! Мы получили и записали одну из *самых важных* формул математики... Правда, эта важность еще не вполне очевидна — мы должны будем подойти к формуле с другой стороны (даже со многих других сторон!).

Покажем, как формула (6) получается при рассматриваемом подходе — нумерации корней a и b — чуть-чуть по-другому, не так, как в примере 2.2.4.

Число перестановок пронумерованных корней равно $\mathbf{P}_n = n!$. Пусть число перестановок с повторениями равно X. Возьмем какую-нибудь из перестановок с повторениями и будем в ней нумеровать (еще не нумерованные!) корни a и b. Если рассмотреть номера m чисел a, скажем, слева направо (так, как числа a следуют в перестановке), то получится некоторая перестановка натуральных чисел от 1 до m. Значит, количество способов нумерации чисел a равно количеству перестановок натуральных чисел от 1 до m, т. е. равно $\mathbf{P}_m = m!$. Аналогично, количество способов нумерации $n - m$ чисел b натуральными числами от 1 до $n - m$ равно количеству перестановок этих натуральных чисел, т. е. равно $\mathbf{P}_{n-m} = (n - m)!$. Далее, при каждом из $\mathbf{P}_m$ способов нумерации чисел a числа b можно занумеровать $\mathbf{P}_{n-m}$ способами, поэтому общее число способов пронумеровать и a, и b в каждой из X перестановок с повторениями равно произведению $K = \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{P}_{n-m} = m!(n - m)!$. Следовательно, всего существует $X \cdot K$ перестановок с пронумерованными корнями a и b, поэтому $\mathbf{P}_n = X \cdot K$, откуда и следует формула[2)] (6).

Для удобства введем следующую терминологию и обозначения. Пусть полностью разложимый многочлен степени n

[1)] Так и хочется сказать: «экземпляров чисел»!

[2)] Точнее, все записанные в соотношениях (6) формулы.

представляется в виде

$$p_n(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \dots (x - a_s)^{m_s},$$

где все двучлены $x - a_i$ различны, показатели степени $m_i \geqslant 1$ и, конечно, $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$. Тогда полный набор корней этого многочлена состоит из s чисел $a_1, \dots, a_s$, причем корень a_i входит в него m_i раз. Перестановки с повторениями, получающиеся из этого набора, назовем *перестановками* ***типа*** $[m_1, \dots, m_s]$, а число этих перестановок обозначим через $\mathbf{P}_{[m_1, \dots, m_s]}$.

Только что рассмотренные перестановки с повторениями имеют тип $[m_1, m_2] = [m, n - m]$, а формулу (6) можно записать в виде

$$\mathbf{P}_{[m, n-m]} = \frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{P}_m \cdot \mathbf{P}_{n-m}} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\ .$$

В следующем пункте мы дадим формуле (6) еще одну интерпретацию — в терминах множеств и подмножеств.

Вопросы. *При выводе формулы* (6) *мы как будто предполагали, что* $m \geqslant 2$ *и* $n - m \geqslant 2$. *Существенно ли это на самом деле? Что даст и как будет интерпретироваться эта формула в случаях* $m = 1$ *или* $n - m = 1$? *В случаях* $m = 0$ *или* $n - m = 0$?

Ответы на эти вопросы будут ясны из следующего пункта.

2.2.5. Комбинаторное отступление 2: сочетания

Используем вторую идею из примера 2.2.4. Перестановки с повторениями m корней a и $n - m$ корней b можно получить еще и такими двумя способами.

Сначала в воображаемой перестановке $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ из множества всех n возможных позиций (мест) z_k выбираем подмножество m позиций, затем помещаем на эти позиции корни a, на остальные же $n - m$ позиций помещаем корни b. Получается, что число $X = \mathbf{P}_{[m, n-m]}$ рассматриваемых перестановок с повторениями равно *числу* m*-элементных подмножеств множества* $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ (это множество мест или возможных позиций) *из* n *элементов* или, что то же самое, *числу способов из* n *элементов* z_k *выбрать* m *элементов, без учета порядка*[1].

[1] Когда мы говорили о *подмножествах*, при этом подразумевалось, что *порядок элементов несущественен* — как всегда, когда речь идет о множествах.

Можно, наоборот, начать с корней b: выбрать из n возможных позиций $n-m$ для них, поместить на эти позиции корни b, а на остальные m позиций — корни a. Тогда получается, что число X рассматриваемых перестановок равно *числу* $(n-m)$*-элементных подмножеств множества позиций* $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ или *числу способов из* n *элементов* z_k *выбрать* $n-m$ *элементов*.

Далее в том и другом случае можно было бы, как и в примере 2.2.4, найти число способов выбрать нужные позиции и вывести формулу для $X = \mathbf{P}_{[m,n-m]}$ (конечно, результат получится такой же, как в предыдущем пункте). Мы этого делать не будем, а дадим определение одного из основных понятий[1] *комбинато́рики* — старинного и важного раздела математики, к которому относятся многие задачи этого параграфа (подробнее о комбинаторике см. в конце п. 2.2.8).

Определение 1. Пусть $m \leqslant n$ — неотрицательные целые числа. **Сочетаниями** *из* n *элементов по* m *элементов* называются произвольные m-элементные подмножества любого данного множества из n элементов.

Число сочетаний из n элементов по m (элементов; это слово, как правило, опускают) обозначается через $\mathbf{C}_n^m$ (читается «*це из эн по эм*»[2]; буква «**C**» — от английского эквивалента «**combinations**»: *сочетания*). Одна из первых задач комбинаторики — отыскание числа сочетаний; мы ее почти решили.

Вопросы. *Пусть дано некоторое* n*-элементное множество* $Z_n = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. *Что за подмножествами будут сочетания из его* n *элементов по* m, *если* $m = n$? $m = 0$? $m = 1$? $m = n-1$? *Чему равны соответствующие числа сочетаний*?

Ответы:

- n-элементное подмножество множества Z_n — это само множество Z_n; оно только одно, так что при любом n получаем $\mathbf{C}_n^n = 1$;
- подмножество из нуля элементов в множестве Z_n тоже единственное: это пустое множество $\varnothing$; опять-таки, при любом n верно равенство $\mathbf{C}_n^0 = 1$;

[1] У нас — второго после понятия *перестановки*.

[2] В некоторых книгах можно встретить более изысканное обозначение $\binom{n}{m}$ (n здесь помещается вверху), но мы им пользоваться не будем.

– подмножеств из одного элемента в множестве Z_n столько же, сколько элементов: каждый элемент z_k дает единственное подмножество $\{z_k\}$, состоящее только из этого элемента[1]; соответственно, при любом n имеем $\mathbf{C}_n^1 = n$;
– наконец, $(n-1)$-элементные подмножества Z_n получаются выкидыванием из Z_n одного элемента — любого; значит, таких подмножеств (сочетаний из n элементов по $n-1$) столько же, сколько элементов, так что опять при любом n справедливо равенство $\mathbf{C}_n^{n-1} = n$.

Отметим, что перечисленные частные случаи дают все числа сочетаний $\mathbf{C}_n^m$ при значениях n от 0 до 3: $\mathbf{C}_0^0 = 1$; $\mathbf{C}_1^0 = \mathbf{C}_1^1 = 1$; $\mathbf{C}_2^0 = \mathbf{C}_2^2 = 1$, $\mathbf{C}_2^1 = 2$; $\mathbf{C}_3^0 = \mathbf{C}_3^3 = 1$, $\mathbf{C}_3^1 = \mathbf{C}_3^2 = 3$.

Однако мы уже умеем находить числа любых сочетаний. В самом деле, в начале пункта было показано, что числа сочетаний $\mathbf{C}_n^m$ и $\mathbf{C}_n^{n-m}$ оба равны числу $X = \mathbf{P}_{[m,n-m]}$ перестановок типа $[m, n-m]$[2]. Поскольку само число X может быть вычислено по формуле (6), для чисел сочетаний верна формула

$$\mathbf{C}_n^m = \mathbf{C}_n^{n-m} = \frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{P}_m \cdot \mathbf{P}_{n-m}} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \ . \qquad (7)$$

В реальных вычислениях используется модификация формулы (7): если записать числитель правой части в виде $n! = n \cdot \ldots \cdot (n-m+1) \cdot (n-m)!$ и сократить дробь на $(n-m)!$, то получающаяся дробь преобразуется к рекурсивному виду

$$\mathbf{C}_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-m+1}{m} \ , \qquad (8)$$

особенно удобному при компьютерных вычислениях. Заметим, что при перемножении дробей в правой части формулы (8) последовательно будут получаться числа сочетаний $\mathbf{C}_n^1$, $\mathbf{C}_n^2$, $\mathbf{C}_n^3$ и так далее; можно начать и с $1 = \mathbf{C}_n^0$. Так, например, при $n = 4$ по цепочке получаем такие числа сочетаний:

$$1 \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \ \longrightarrow \ \ 1, \quad 4, \quad 6, \quad 4, \quad 1.$$

---

[1] Обратите внимание на запись: *множество*, состоящее из одного *элемента* e обозначается $\{e\}$ (элемент заключается в фигурные скобки!). Не ошибитесь: множество $\{\varnothing\}$ — это вовсе не пустое множество $\varnothing$, а множество, состоящее из *одного элемента* — пустого множества!

[2] Причем это верно и для «крайних» случаев $m = 0, 1, n-1, n$, которые соответствуют перестановкам наборов корней полиномов $(x-b)^n$, $(x-a)(x-b)^{n-1}$, $(x-a)^{n-1}(x-b)$ и $(x-a)^n$.

Из той же формулы (8) видно, что пока $n - m + 1 > m$, т. е. $m < \frac{1}{2}(n+1)$, чи́сла сочетаний при данном n становятся всё больше, а затем симметрично ($\mathbf{C}_n^{n-m} = \mathbf{C}_n^m$) убывают.

К числам сочетаний мы еще обратимся, а пока вернемся к системе Виета и сформулируем итог наших рассмотрений: *если полностью разложимый полином степени n имеет только два корня, один кратности m, а второй, соответственно, кратности $n - m$, то число решений отвечающей полиному системы Виета равно числу сочетаний из n элементов по m, т. е.* $\mathbf{C}_n^m$.

2.2.6. Комбинаторное отступление 3: размещения. Число перестановок с повторениями

Прежде чем вывести формулу для числа перестановок с повторениями в общем случае (т. е. для перестановок произвольного типа), рассмотрим еще один частный случай, который приведет нас к третьему основному понятию комбинаторики. Опять сформулируем вопрос в рамках теоремы Виета[1].

Рассмотрим полином вида

$$p_n(x) = (x - a_1)\dots(x - a_m)(x - b)^{n-m},$$

где все двучлены $x - a_i$, $i = 1, \dots, m$, и $x - b$ различны. Найдем число X перестановок полного набора

$$M = <a_1, \dots, a_m, \underbrace{b, \dots, b}_{n-m}>$$

корней полинома, или что то же самое, число решений соответствующей этому полиному системы Виета.

На этот мы раз не будем прибегать к фиктивной перенумерации корней b, а сразу посмотрим, как можно перечислить рассматриваемые перестановки. Напрашиваются два подхода.

Первый. В воображаемой перестановке $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ из множества всех n позиций z_k выбираем подмножество $n - m$ позиций для корней b. Число способов выбора равно числу сочетаний из n элементов по $n - m$, т. е. $\mathbf{C}_n^{n-m} = \mathbf{C}_n^m$. Разместив корни b, по остальным m позициям расставляем корни a_i. Поскольку все они различны, их распределения по m позициям —

[1] Как-никак, отец алгебры!

всё равно, что перестановки m различных элементов, число которых равно $\mathbf{P}_m = m!$.

Итак, для каждого из $\mathbf{C}_n^m$ возможных расположений корней b имеется $\mathbf{P}_m$ способов разместить на оставшиеся m позиций корни a_i, поэтому число X всех различных перестановок рассматриваемого набора корней равно произведению $\mathbf{C}_n^m \cdot \mathbf{P}_m$. Вычисляем:

$$X = \mathbf{C}_n^m \cdot \mathbf{P}_m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot m! = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\ldots(n-m+1)$$

(мы провели сокращение дроби — такое же, как при выводе формулы (8)).

Столь простой вид ответа, к тому же совпадающий с промежуточными результатами вычислений числа перестановок методом полного перебора (см. п. 2.2.3) наводит на мысль о том, что должен существовать более простой способ получения этого результата. Такой способ и дает *второй подход*: размещение «по своим местам» сначала корней a_i, а уже потом на позиции, оставшиеся свободными, корней, равных b. Рассуждаем.

Будем распределять позиции z_k между корнями a_i по порядку номеров корней. Позицией для a_1 может быть любая из данных n позиций z_k. При любом из n размещений корня a_1 позицией для a_2 может быть любая из $n-1$ оставшихся свободными позиций, так что число возможных размещений a_1 и a_2 равно произведению $n \cdot (n-1)$. Если a_1, a_2 уже размещены, то для a_3 остается $n-2$ свободные позиции, и число возможных размещений a_1, a_2 и a_3 равно произведению $n(n-1) \cdot (n-2)$, и т. д. Когда мы дойдем до a_m, свободными останутся $n-m+1$ позиций, поэтому число X возможных размещений всех m корней a_i равно произведению $n(n-1)\ldots(n-m+1)$.

Рассуждение, в принципе, простое — такие же рассуждения мы проводили в п. 2.2.3. Однако там мы «по очереди» выбирали корни, а на сей раз — позиции, места для корней. Уместно как бы перевернуть задачу[1]: не корни a_i расставлять по позициям z_k, а наоборот, позиции приписывать корням. Пусть $y_i = z(a_i)$ — та из позиций z_k, на которую помещен корень a_i. Тогда размещений корней a_i ровно столько же, сколько *упорядоченных* наборов $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ из m *различных* элементов

[1]Такой прием — «обращение» задачи, т. е. решение *обратной* задачи вместо *прямой* — нередко помогает в математике (как и в жизни!). В геометрических построениях «метод обратной задачи» применял, например, Ньютон.

(позиций) z_k. Такие наборы суть не что иное, как *упорядоченные подмножества множества всех позиций* $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Как и в начале п. 2.2.5, можно сказать, что число X рассматриваемых перестановок равно *числу m-элементных* ***упорядоченных*** *подмножеств множества позиций* $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ или *числу способов из n элементов z_k выбрать m элементов* ***с учетом порядка выбора***.

Определение 2. Пусть $m \leqslant n$ — натуральные числа. **Размещениями** *из n элементов по m элементов* называются произвольные *упорядоченные* m-элементные подмножества любого данного множества из n элементов.

Упорядоченность подмножества означает, что существенным является порядок, в котором выписываются элементы подмножества, а не только сама совокупность элементов.

Размещения по традиции относятся к основным понятиям комбинаторики. Число размещений из n элементов по m (элементов) обозначается через $\mathbf{A}_n^m$ (читается «*а из эн по эм*»; «**A**» — заглавная буква английского эквивалента «**arrangements**»: *размещения*; добавим здесь же: буква «**P**» в обозначении $\mathbf{P}_n$ для числа перестановок — заглавная первая буква английского слова «**permutation**» — *перестановка*).

Еще раз запишем выведенные выше формулы для числа размещений:

$$\mathbf{A}_n^m = \mathbf{C}_n^m \mathbf{P}_m = \frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{P}_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\ldots(n-m+1).$$

В отличие от чисел сочетаний, числа размещений дальше нам не понадобятся (см. «Упражнения»).

Теперь приведем и объясним общую формулу для числа перестановок с повторениями. Выписанную ранее (в конце п. 2.2.3) формулу для числа перестановок типа $[m_1, m_2] = [m, n-m]$ можно переписать в виде

$$\mathbf{P}_{[m_1,m_2]} = \mathbf{P}_{[m,n-m]} = \frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{P}_m \cdot \mathbf{P}_{n-m}} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{P}_{m_1} \cdot \mathbf{P}_{m_2}} = \frac{n!}{m_1! m_2!}.$$

Вот в таком-то виде она и обобщается на перестановки произвольного типа $[m_1, m_2, \ldots, m_s]$, т. е. на перестановки набора из n элементов (например, чисел), в который входят s разных элементов $a_1, a_2, \ldots, a_s$, причем a_i входит в набор m_i раз $(m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n)$. Число различных перестановок

элементов такого набора равно

$$\mathbf{P}_{[m_1,m_2,\ldots,m_s]} = \frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{P}_{m_1}\mathbf{P}_{m_2}\ldots\mathbf{P}_{m_s}} = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_s!}\ . \qquad (9)$$

Доказать ее можно так. Если дополнительно пронумеровать каждый из m_i одинаковых элементов a_i, то число перестановок будет равно $n!$. Поскольку внутри каждой группы в действительности одинаковых элементов их можно переставлять $m_i!$ способами, а перестановки внутри групп осуществляются независимо одна от другой, при предъявленном способе подсчета каждая подстановка учитывается $m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_s!$ раз. Следовательно, истинное число различных перестановок получается делением числа $n!$ на указанное произведение факториалов. (Другой способ доказательства формулы (9), основанный на последовательном применении формулы для чисел сочетаний, см. в «Упражнениях».)

Добавим в заключение, что формула (9) дает число решений системы Виета для полинома вида

$$p_n(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2}\ldots(x - a_s)^{m_s},$$

где все двучлены $x - a_i$ различны. А в следующем пункте мы, наконец, рассмотрим, как же «устроена» система Виета для многочленов произвольной степени.

2.2.7. Общие система и теорема Виета

Напомним (см. п. 2.2.1), что система Виета для приведенного[1)] многочлена $p_n(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$ записывается в предположении, что этот многочлен является *полностью разложимым*, т. е. представляется в виде произведения n линейных двучленов вида $x - x_k$. В этом случае можно записать *основную формулу Виета*:

$$p_n(x)=x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+c_n=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n). \qquad (10)$$

Раскроем скобки в правой части этой формулы и приведем подобные члены, т. е. слагаемые, содержащие переменную x в одинаковой степени. Получим приведенный многочлен степени n, коэффициенты которого зависят от x_k. Легко выписать два старших члена и свободный член этого многочлена, который

[1)] То есть имеющего старшим коэффициентом единицу.

мы обозначим через $\widehat{p_n}$:

$$\widehat{p_n}(x) = x^n - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)x^{n-1} + \dots + (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n.$$

При перемножении двучленов в правой части равенства (10) из каждой скобки выбирается либо переменная x, либо корень многочлена x_k. Если в каждой скобке мы выбираем корень, то получится свободный член многочлена $\widehat{p_n}$. Он равен произведению сомножителей $-x_k$; запишем его в виде $(-1)^n s_n$, где $s_n = s_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$ — многочлен степени n от $x_1, \dots, x_n$, если считать x_k переменными.

Напомним сведения из курса алгебры 6–9 классов. Степенью одночлена от нескольких переменных называется сумма степеней входящих в этот одночлен переменных (сомножителей). Степенью многочлена от нескольких переменных называется наибольшая из степеней составляющих этот многочлен одночленов (слагаемых).

Если мы в одной скобке выбираем корень, а в остальных $n-1$ скобках — переменную x, то получится слагаемое степени $n-1$ вида $-x_k x^{n-1}$; всего таких слагаемых будет, конечно, n штук, а в сумме они дадут второй член многочлена $\widehat{p_n}$, который мы запишем в виде $-s_1 x^{n-1}$, где $s_1 = s_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ — многочлен степени 1 от $x_1, \dots, x_n$.

Следующий член многочлена $\widehat{p_n}$, имеющий степень $n-2$, получается суммированием одночленов, которые получаются, когда в двух скобках выбирается корень, а в остальных $n-2$ — переменная x; эти одночлены имеют вид $x_k x_m x^{n-2}$ (со знаком плюс), а количество таких слагаемых, очевидно, *равно числу сочетаний из n скобок по две* (это те скобки, в которых выбирается корень), т. е. $\mathbf{C}_n^2$. Суммирование дает третий член многочлена; запишем его в виде $s_2 x^{n-2}$, где $s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \sum x_k x_m$ (суммирование проводится по всевозможным парам корней x_k, x_m) — многочлен степени 2 от $x_1, \dots, x_n$.

Видимо, уже ясно, как записываются последовательные коэффициенты многочлена $\widehat{p_n}$: знаки перед ними чередуются, и этот многочлен может быть записан в виде

$$\widehat{p_n}(x) = x^n - s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} - s_3 x^{n-3} + \dots + (-1)^m s_m x^{n-m} + \dots + (-1)^n s_n,$$

где $s_m = s_m(x_1, \dots, x_n)$ — многочлен степени m от $x_1, \dots, x_n$, являющийся суммой одночленов — всевозможных произведений

m различных корней x_k в количестве, *равном числу сочетаний из n скобок по m* (тех, в которых выбираются корни x_k), т. е. равном $\mathbf{C}_n^m$.

Общая система Виета для многочлена p_n получится, если мы приравняем коэффициенты многочленов p_n и $\widehat{p_n}$, *считая коэффициенты $\widehat{p_n}$ выражениями* (многочленами) *от переменных* $x_1, \ldots, x_n$:

$$c_1 = -s_1(x_1, \ldots, x_n), c_2 = s_2(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, c_n = (-1)^n s_n(x_1, \ldots, x_n),$$

или, как обычно принято записывать уравнения систем,

$$s_1(x_1, \ldots, x_n) = -c_1, \ s_2(x_1, \ldots, x_n) = c_2, \ \ldots, \ s_n(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^n c_n.$$

При $n = 2$ и $n = 3$ это как раз будут системы Виета для квадратных и кубических многочленов из п. 2.2.1. В общем же случае m-е уравнение системы Виета имеет вид

$$c_m = (-1)^m s_m(x_1, \ldots, x_n) \ \text{ или } \ s_m(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^m c_m, \qquad (11)$$

где s_m — указанная сумма одночленов степени m от $x_1, \ldots, x_n$.

Сформулируем общую теорему Виета.

Теорема 9 (*Виета*). *Многочлен p_n является полностью разложимым* ***тогда и только тогда, когда*** *соответствующая ему система уравнений Виета* (11) *имеет решения, причем в этом случае числа $<x_1, \ldots, x_n>$ образуют полный набор корней многочлена p_n* ***тогда и только тогда, когда*** $(x_1; \ldots; x_n)$ — *решение системы Виета.*

Доказательство теоремы опирается на основное уравнение Виета (10) и практически очевидно — по сути оно *не отличается* от доказательства теоремы Виета для квадратных уравнений, и мы его опускаем (проведите нужные рассуждения самостоятельно). ■

Мы выведем важное следствие из теоремы Виета, которое использует только одну ее часть: *для любого полностью разложимого полинома p_n его полный набор корней $<x_1, \ldots, x_n>$ дает решение $(x_1; \ldots; x_n)$ системы уравнений Виета* (11).

Рассмотрим полностью разложимый многочлен p_n, имеющий *единственный* корень $x_0 = a$ кратности n, т. е. записывающийся в виде ***степени бинома*** $p_n(x) = (x - a)^n$. С другой стороны, этот многочлен может быть записан в стандартном виде — по убывающим степеням переменной:

$p_n(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_{n-1}x + c_n$. *Найдем коэффициенты* c_m, т. е. выразим их через корень полинома (или бинома) a.

В соответствии с теоремой Виета (с упомянутой ее частью) набор чисел $(x_1; \dots; x_n) = (a; \dots; a)$ удовлетворяет всем уравнениям Виета (11): при любом значении m имеем $c_m = (-1)^m s_m(x_1, \dots, x_n) = (-1)^m s_m(a, \dots, a)$. Но в случае $x_1 = x_2 = \dots = x_n = a$ все $\mathbf{C}_n^m$ одночленов (произведений m различных корней x_k), в сумме дающих многочлен $s_m(x_1, \dots, x_n)$, *одинаковы* — они равны a^m. Следовательно, $s_m(a, \dots, a) = \mathbf{C}_n^m \cdot a^m$, а коэффициент c_m равен $(-1)^m \mathbf{C}_n^m a^m$.

В соответствии с этим мы можем записать:

$$p_n(x) = (x-a)^n = x^n + c_1x^{n-1} + \dots c_m x^{n-m} + \dots + c_{n-1}x + c_n =$$
$$= x^n - \mathbf{C}_n^1 a x^{n-1} + \mathbf{C}_n^2 a^2 x^{n-2} - \dots + (-1)^m \mathbf{C}_n^m a^m x^{n-m} + \dots + (-1)^n a^n \tag{12}$$

(в свободном члене c_n мы сразу заменили $\mathbf{C}_n^n$ на единицу).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Следствие 2 (*из общей теоремы Виета*). *При любом натуральном n и любом $a \in \mathbb{R}$ многочлен $p_n(x) = (x-a)^n$ (**степень бинома** $x - a$) можно записать в виде* (12).

Обычно формулу для степени бинома — в данном случае для *степени разности* — коротко и не совсем правильно называют «*формулой бинома Ньютона*».

2.2.8. Формула Ньютона для степени бинома

Коэффициенты $\mathbf{C}_n^m$ перед мономами (одночленами) $a^m x^{n-m}$ (их можно считать мономами степени n от двух переменных, a и x) в формуле (12) суть *универсальные константы* — числа сочетаний из n элементов. Поскольку эти числа присутствуют в формуле для *степени бинома*, их еще называют ***биномиальными коэффициентами***. Биномиальные коэффициенты могут быть вычислены по стандартной формуле (8) для чисел сочетаний; далее, в § 2.3, будет указан еще один классический способ их вычисления. Биномиальные коэффициенты *симметричны* в том смысле, что всегда $\mathbf{C}_n^{n-m} = \mathbf{C}_n^m$ (см. п. 2.2.5), и обычно выписывают несколько первых и последних коэффициентов:

$$\mathbf{C}_n^0 = 1, \quad \mathbf{C}_n^1 = n, \quad \mathbf{C}_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \dots, \quad n, \quad 1.$$

Из формулы для степени разности легко выводится формула для *степени суммы* — полагая в формуле (12) $a = -d$, получим:

$$(x+d)^n = x^n + ndx^{n-1} + \mathbf{C}_n^2 d^2 x^{n-2} + \ldots + \mathbf{C}_n^m d^m x^{n-m} + \cdots + d^n. \quad (13)$$

Хотя обе эти формулы и носят имя Ньютона, они были открыты задолго до него; заслуга Ньютона состоит в том, что он их обобщил на случай *дробных* показателей степени. Суть этого обобщения очень глубока — она относится к математическому анализу и выходит за рамки нашего курса.

Формулы (12)–(13) можно доказать непосредственно, не ссылаясь на общую теорему Виета. Приведем такое доказательство для формулы (13).

Запишем степень суммы как произведение биномов:

$$(x+a)^n = \underbrace{(x+a)(x+a)\ldots(x+a)}_{n \text{ скобок}}.$$

При раскрытии скобок в правой части получится много слагаемых, но каждое из них будет иметь вид $a^m x^{n-m}$, соответствующий тому, что при перемножении (при раскрытии скобок) в m скобках мы взяли a (m может быть и равным нулю), а в остальных $n-m$ скобках взяли x. Число таких слагаемых равно числу способов из n скобок выбрать те m скобок, в которых мы будем брать a, т. е. числу сочетаний из n элементов по m. Значит, после раскрытия скобок и *приведения подобных членов* получится сумма слагаемых вида $\mathbf{C}_n^m a^m x^{n-m}$. Тем самым формула (13) доказана!

Существует множество доказательств формул Ньютона: по индукции, с помощью производной и т. д. Приведенное доказательство относится к *комбинаторному*[1] *типу*. Если разобраться, то это как раз вывод уравнений Виета *в частном случае* — для многочлена вида $(x+a)^n$.

Для доказательства формул (12)–(13) при небольших показателях степени нет необходимости прибегать к использованию сочетаний — скобки действительно можно попросту раскрыть. Напомним, чему равны биномиальные коэффициенты, и выпишем соответствующие формулы для «низших»[2] степеней бинома. Коэффициенты $\mathbf{C}_n^m$ при n от 0 до 4 запишем в

[1] О *комбинаторике* см. ниже.

[2] «*Низшими*» в алгебре называются степени до 4-й включительно — по причинам, которые мы объясним в следующем параграфе.

последовательных строчках:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Посмотрите на эту треугольную таблицу внимательно. Не заметите ли вы чего-нибудь примечательного? К таблице биномиальных коэффициентов мы вернемся в § 2.3.

При $n = 0$ и $n = 1$ формулы Ньютона интереса, конечно, не представляют. При $n = 2$ получаются общеизвестные формулы квадратов суммы и разности. Формулы для кубов суммы и разности,

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3,$$
$$(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3,$$

можно переписать в другом красивом и полезном в приложениях виде:

$$(x + a)^3 = x^3 + a^3 + 3ax(x + a), \qquad (13+)$$
$$(x - a)^3 = x^3 - a^3 - 3ax(x - a). \qquad (13-)$$

Формулы для четвертых степеней биномов (суммы и разности),

$$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4,$$
$$(x - a)^4 = x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4,$$

в особых комментариях не нуждаются. Но стоит обратить внимание на то, что при сложении 4-х степеней биномов нечетные степени взаимно уничтожаются и получается *биквадратный* полином, т. е. полином от x, квадратный относительно квадрата переменной $x^2 = y$:

$$(x + a)^4 + (x - a)^4 = 2x^4 + 12a^2x^2 + 2a^4 = 2y^2 + 12a^2y + 2a^4.$$

На этом мы закончим теоретическую часть знакомства с комбинаторикой, которая вплоть до 1970-х гг. традиционно включалась в школьный курс алгебры, т. е. входила в «элементарную алгебру», и перейдем к «эксплуатации» формул для степеней биномов.

Отметим в заключение, что **комбинаторика**, к которой относилась бóльшая часть примеров и теоретического материала этого параграфа, — один из древнейших разделов математики, переживающий сейчас «второе рождение» как ветвь *дискретной* математики в связи с наступлением компьютеризации всего и вся[1].

[1] *Дискретная математика* (от лат. **discretus** — *отдельный, раздельный*, в смысле «состоящий из нескольких *отдельных* частей», в противоположность

Само название происходит от латинского **combino**, что означает связывать, сочетать, соединять — в общем, *комбинировать*[1] (понятно, что последнее слово как раз латинского происхождения). В комбинаторике изучаются различные комбинации и взаимосвязи объектов того или иного рода в конечном числе, т. е. *элементов конечных множеств*. Изучаются возможности различных комбинаций, способы их перечисления (например, *перебор*), ищется число возможных комбинаций. Иногда выделяют особый подраздел — *перечислительную комбинаторику*, которой мы, собственно, и занимались. Примерами комбинаций могут служить перестановки, сочетания и размещения.

Большой вклад в комбинаторику внесли многие крупные математики, такие как П. Ферма, Б. Паскаль, Г. В. Лейбниц, Л. Эйлер, Ж. Лагранж.

§ 2.3. Уравнения низших степеней

2.3.1. Линейная замена переменной в квадратном трехчлене

Пока что мы *рассуждали* о корнях полиномов (многочленов) и полиномиальных уравнений, теперь же попробуем научиться их находить. Фактически мы умеем решать только *двучленные* уравнения вида $ax^n + b = 0$, сводящиеся к степенным уравнениям $x^n = c$. *Линейные* уравнения $ax + b = 0$ относятся к двучленным. *Квадратные* уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удается решить потому, что они с помощью *линейной замены переменной*, т. е. после введения новой переменной вида $z = x + \lambda$ ($\lambda = \dfrac{b}{2a}$), сводятся к двучленным (относительно z: $az^2 + B = 0$). Объясним это подробнее.

Еще мы, так сказать, «умеем» решать кубические уравнения «методом угадывания корней» (вспомните пример 2.2.1), но сейчас нас интересуют «регулярные» методы решения уравнений — скажем, *по формулам*, как в случае квадратных уравнений.

Исследование квадратного трехчлена $p_2(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, — построение графика, нахождение корней — основывается на *выделении полного квадрата*, т. е. на представлении

непрерывному) — можно сказать, отрасль современной математики, в отличие от математического анализа, имеющая дело с анализом всего «прерывного». В эту отрасль входят многие разделы математики, в том числе и старинного происхождения (назовем, кроме комбинаторики, *теорию графов*).

[1] «Великий комбинатор» Остап Бендер именно сию науку считал своею!

рассматриваемого трехчлена в виде $p_2(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$. Если трехчлен записан в таком виде, то уравнение графика — параболы $y = ax^2 + bx + c$ — можно во *вспомогательных координатах* $\widehat{x} = x - x_0$, $\widehat{y} = y - y_0$, оси которых проходят через точку $\widehat{O}(x_0; y_0)$, записать в виде $\widehat{y} = a\widehat{x}^2$. Значит, график $y = p_2(x)$ получается из «стандартной параболы» $y = ax^2$ параллельным переносом на вектор с координатами $(x_0; y_0)$ (рис. 2.2).

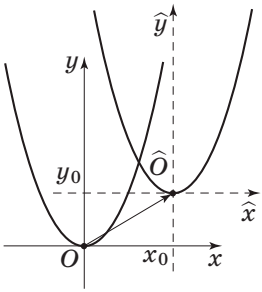


Рис. 2.2

Обычно выделение полного квадрата оформляется как последовательное преобразование трехчлена. Мы поступим иначе: допустим, что полный квадрат уже выделен, т. е. запишем представление

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0,$$

и раскроем скобки в правой части:

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2 + y_0.$$

Два квадратичных выражения *совпадают*, если *равны* все соответствующие коэффициенты при степенях переменной x: при x^2, при x и не содержащие переменной x свободные члены.

В данном случае коэффициенты при x^2 совпадают «сами собой». Равенство же коэффициентов при x позволяет найти значение x_0:

$$-2ax_0 = b \quad \Longrightarrow \quad x_0 = -\frac{b}{2a}. \tag{1}$$

Зная x_0, из равенства свободных членов находим вторую неизвестную величину y_0:

$$ax_0^2 + y_0 = c \quad \Longrightarrow \quad y_0 = c - ax_0^2 = c - \frac{b^2}{4a}. \tag{2}$$

Значит, если определить значения x_0 и y_0 из формул (1)–(2), то мы получим представление трехчлена $p_2(x)$ в искомом виде.

Воспользуемся этим представлением для того, чтобы вывести формулы для корней исходного квадратного трехчлена, т. е. квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{3}$$

Перейдем от уравнения (3) к *равносильным*, но более простым уравнениям: учитывая формулы (1)–(2), получаем,

что

$$(3) \iff a(x-x_0)^2 = -y_0 \iff a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c.$$

Умножая обе части последнего уравнения на $4a$, приходим к задаче об извлечении квадратного корня:

$$4a^2\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = b^2 - 4ac \iff \left(2a\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right)^2 = b^2 - 4ac. \quad (4)$$

Таким образом, уравнение (3) имеет корни тогда и только тогда, когда так называемый ***дискриминант*** этого уравнения $D = b^2 - 4ac$ неотрицателен, причем, в соответствии с уравнением (4), корни уравнения (3) находятся из формул

$$2a\left(x+\frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{b^2-4ac},$$

которые и дают известные формулы для корней квадратного уравнения.

Можно сказать иначе: если в квадратном уравнении (3) сделать замену $x - x_0 = z$, или же подставить в него $x = z + x_0$, где x_0 находится по формуле (1), то получится *двучленное квадратное уравнение* $az^2 + y_0 = 0$. Оно не содержит линейного члена и приводится к виду $z^2 = C$, $C = -\frac{y_0}{a}$, из которого (при $C \geqslant 0$) сразу получаем, что $z = \pm\sqrt{C}$ и, соответственно, $x = z + x_0 = x_0 \pm \sqrt{C}$.

Тот же результат получится, если не пытаться выделить полный квадрат, а задаться целью найти такую *линейную замену* $z = x + \lambda$, чтобы в получающемся квадратном трехчлене относительно z отсутствовал линейный член, т. е. чтобы коэффициент при первой степени z был равен нулю. Для этого выражаем x через z, $x = z - \lambda$, и записываем квадратный трехчлен относительно переменной z:

$$q_2(z) = p_2(z-\lambda) = a(z-\lambda)^2 + b(z-\lambda) + c =$$
$$= (az^2 - 2a\lambda z + a\lambda^2 + (bz - b\lambda) + c = az^2 + (b - 2a\lambda)z + (a\lambda^2 - b\lambda + c).$$

Приравнивая нулю коэффициент при z, находим нужное значение λ:

$$b - 2a\lambda = 0 \iff \lambda = \frac{b}{2a}$$

(как и следовало ожидать, $\lambda = -x_0$).

Выясним теперь, к каким упрощениям для уравнений более высокой степени может привести линейная замена

переменной. Поскольку обе части полиномиального уравнения всегда можно разделить на старший коэффициент многочлена, достаточно рассмотреть возможные последствия замены только для приведенных многочленов.

2.3.2. Линейная замена переменной в многочленах

Итак, возьмем произвольный приведенный многочлен от переменной x степени n:

$$p_n(x) = x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n.$$

Линейная замена переменной в этом многочлене означает переход от переменной x к новой переменной z, связанной со «старой» линейным соотношением вида $x - \alpha = z$ (поскольку мы ограничились случаем *приведенных* многочленов, нет необходимости рассматривать линейные замены более общего вида $\omega x - \alpha = z$). Наглядный смысл такой замены состоит в том, что мы выбираем для переменной *другое начало отсчета*, а именно, точку $x = \alpha$, т. е. *переносим начало координаты* x в точку α (и переобозначаем переменную; сравните с п. 2.3.1). Нам нужно выяснить, какой вид будет иметь выражение $p_n(x)$, будучи записанным через новую переменную z (а уже потом посмотреть, можно ли при этом добиться упрощения выражения).

Самый простой способ произвести линейную замену — выразить старую переменную x через новую переменную z и подставить это выражение в полином $p_n(x)$. Имеем: $x - \alpha = z$, поэтому $x = z + \alpha$ и

$$p_n(x)=p_n(z+\alpha)=(z+\alpha)^n+c_1(z+\alpha)^{n-1}+\cdots+c_{n-1}(z+\alpha)+c_n. \quad (5)$$

Очевидно, в результате получится некоторый приведенный полином относительно z той же степени n:

$$p_n(z + \alpha) = q_n(z) = z^n + d_1z^{n-1} + \cdots + d_{n-1}z + d_n.$$

Используя формулы для степеней биномов, можно все коэффициенты d_k многочлена $q_n(z)$ выразить через коэффициенты c_j исходного многочлена $p_n(x)$ и через *параметр замены* α (и, разумеется, всевозможные биномиальные коэффициенты $\mathbf{C}_m^i$, $m \leqslant n$). Найдем, например, коэффициент d_1 при z^{n-1}.

Из всех слагаемых правой части формулы (5) z^{n-1} включают только первое и второе (в следующие слагаемые z входит в

степенях, меньших $n-1$). Вычисляем:

$$(z+\alpha)^n = z^n + n\alpha z^{n-1} + \ldots, \quad c_1(z+\alpha)^{n-1} = c_1 z^{n-1} + \ldots$$

(тремя точками мы пометили слагаемые степеней, меньших, чем $n-1$). Сложив эти выражения, мы найдем коэффициент d_1, он будет равен

$$d_1 = n\alpha + c_1. \tag{6}$$

Уже хорошо! Из формулы (6) видно, что за счет выбора параметра замены α можно сделать так, что второй коэффициент у нового многочлена $q_n(z)$ «пропадет» — станет равным нулю:

$$d_1 = n\alpha + c_1 = 0 \iff \alpha = \alpha_0 = -\frac{c_1}{n},$$

и если (и только если!) выбрать $\alpha = \alpha_0$, то d_1 будет равен нулю, а уравнение $q_n(z) = 0$ — проще, чем исходное уравнение $p_n(x) = 0$. (Заметим, что для приведенного квадратного уравнения $x^2 + c_1 x + c_2 = 0$ такая замена — та же, которую мы применяли раньше: $\alpha_0 = -\frac{c_1}{2}$, $z = x - \alpha_0 = x + \frac{c_1}{2}$. И в этом случае сразу получается двучленное уравнение, ибо остаются только два ненулевых коэффициента.)

Вычисление следующего коэффициента d_2 в общем случае требует учета первых трех слагаемых в правой части формулы (5) — они и только они включают (могут включать) степень z^{n-2}. Опуская (помечая точками) члены бóльших и меньших степеней, записываем:

$$(z+\alpha)^n = \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\,\alpha^2 z^{n-2} + \ldots,$$

$$c_1(z+\alpha)^{n-1} = \ldots + nc_1\alpha z^{n-2} + \ldots, \quad c_2(z+\alpha)^{n-2} = c_2 z^{n-2} + \ldots.$$

Сложение дает формулу для d_2:

$$d_2 = \frac{n(n-1)}{2}\,\alpha^2 + nc_1\alpha + c_2.$$

Заметим, что d_2 зависит от параметра замены α уже квадратичным образом, поэтому не всегда коэффициент d_2 можно обратить в нуль за счет выбора параметра α (квадратное уравнение $d_2(\alpha) = 0$ может не иметь решений). Это понятно: скажем, в квадратичном многочлене $x^2 + 1$ никакой линейной заменой[1)] нельзя «убрать» (сделать нулевым) свободный член (объясните!).

[1)] И не только линейной — вообще *никакой* заменой!

Теперь и без вычислений ясно, что зависимость следующего коэффициента d_3 от параметра замены α — *кубическая*, т. е. d_3 выражается кубическим многочленом от α. Поскольку любое кубическое уравнение имеет хотя бы один корень (теорема 2), *существует* значение α, при котором d_3 обращается в нуль. Но чтобы его *найти*, придется решить кубическое уравнение $d_3(\alpha) = 0$, а делать это в общем случае мы (пока!) не умеем.

Для того, чтобы линейной заменой обнулить следующие коэффициенты, придется решать уравнения степеней 4, 5 и т. д., так что дальнейшие вычисления практически бессмысленны. Найдем только свободный член d_n многочлена $q_n(z)$. Для этого можно сложить свободные члены всех слагаемых в правой части формулы (5), включая c_n. Проще, однако, заметить, что *свободный член любого многочлена равен значению этого многочлена в нуле*, так что $d_n = q_n(0) = p_n(0 + \alpha) = p_n(\alpha)$! Поэтому, чтобы за счет выбора α обратить в нуль коэффициент d_n, придется решить то самое уравнение, с которого мы и начинали: $p_n(x) = 0$!

Подведем предварительные итоги. Для любого приведенного полинома $p_n(x)$ можно выбрать такое значение $\alpha = \alpha_0$, что после линейной замены $x - \alpha = z$ получится полином $q_n(z) = p_n(z + \alpha)$, у которого второй коэффициент (при z^{n-1}) равен нулю, так что уравнение $p_n(x) = 0$ линейной заменой можно привести к «укороченному виду»:

$$x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + c_{n-1}x + c_n = 0 \iff$$
$$\iff z^n + d_2z^{n-2} + \cdots + d_{n-1}z + d_n = 0; \quad z = x - \alpha_0, \alpha_0 = -\frac{c_1}{n}. \quad (7)$$

Остальные коэффициенты d_k, $k \geqslant 2$, при этом будут такими, какими получатся. Заметим, что за счет выбора значений коэффициентов c_k значения d_k можно сделать *любыми*, ибо коэффициент c_k входит в выражение для коэффициента d_k как *слагаемое* (см., например, формулу для d_2). Таким образом, в общем случае с помощью линейной замены «укоротить» уравнение еще больше, по сравнению с видом (7), нельзя.

Следующий шаг состоит в том, чтобы выяснить, дает ли укороченный вид уравнений (7) какие-либо возможности для дальнейшего упрощения в случаях, когда степень n равна 3, 4 и т. д. Прежде чем перейти к таким уравнениям, покажем еще один красивый и полезный способ осуществления линейной замены в многочленах.

2.3.3. Метод Руффини—Горнера и треугольник Паскаля

При исследовании квадратных уравнений линейная замена обычно замаскирована под *выделение полного квадрата* (см. п. 2.3.1). Для кубических уравнений *выделение полного куба* хотя и возможно, но довольно трудоемко (попробуйте!). Тем не менее, *выделение новой переменной* вида $z = x - \alpha$ вполне возможно в случае многочленов $p_n(x)$ любой степени. Именно, такое выделение осуществляется с помощью последовательного деления (с остатком) многочлена $p_n(x)$ и получающихся неполных частных на линейный двучлен $z = x - \alpha$. Опишем эту процедуру подробнее. Как и при использовании подстановки $x = z + \alpha$, ограничимся случаем приведенных многочленов (хотя то же самое можно проделать для любого многочлена).

Итак, пусть $p_n(x)$ — произвольный приведенный многочлен степени n. Разделим его на двучлен $x - \alpha$ с остатком и запишем

$$p_n(x) = (x - \alpha)p_{n-1}(x) + r_n. \qquad (8_n)$$

Неполное частное $p_{n-1}(x)$ будет многочленом степени $n - 1$, причем тоже приведенным (вообще при делении на двучлен вида $x - \alpha$ старший коэффициент неполного частного остается тем же, что и у делимого — это очевидно, или следует из любого алгоритма деления с остатком; см. п. 2.1.4). Разделим и его на двучлен $x - \alpha$ с остатком:

$$p_{n-1}(x) = (x - \alpha)p_{n-2}(x) + r_{n-1}. \qquad (8_{n-1})$$

Затем разделим следующее неполное частное $p_{n-2}(x)$ на двучлен $x - \alpha$ с остатком:

$$p_{n-2}(x) = (x - \alpha)p_{n-3}(x) + r_{n-2}. \qquad (8_{n-2})$$

И следующее неполное частное, и так далее, пока не дойдем «до конца»... На последнем шаге на двучлен $x - \alpha$ с остатком придется делить приведенный многочлен степени 1, т. е. двучлен такого же вида $p_1(x) = x + b$:

$$p_1(x) = (x - \alpha) \cdot 1 + r_1 \qquad (8_1)$$

(последним неполным частным будет просто единица). Для большей ясности запишем и предпоследний шаг:

$$p_2(x) = (x - \alpha)p_1(x) + r_2. \qquad (8_2)$$

Теперь вспомним, что $x - \alpha$ — это новая переменная z, и подставим z вместо $x - \alpha$ во все соотношения (8_1)–(8_n). Если после этого подставить выражение для p_1 из формулы (8_1) в формулу (8_2), затем выражение для p_2 через z из формулы (8_2) в формулу (8_3) и т. д., до подстановки уже полученного выражения для p_{n-1} через z из формулы (8_{n-1}) в формулу (8_n), то мы получим выражение исходного многочлена $p_n(x)$ через $z = x - \alpha$.

Проще, однако, увидеть, что же получается в конце концов, если делать последовательные подстановки $x - \alpha = z$ в том же порядке, в котором проводилось деление с остатком. Именно, запишем:

$$p_n(x) = zp_{n-1}(x) + r_n = z(zp_{n-2}(x) + r_{n-1}) + r_n = p_{n-2}(x)z^2 + r_{n-1}z + r_n.$$

Подставляя сюда выражение $p_{n-2}(x) = zp_{n-3}(x) + r_{n-2}$ и раскрывая скобки, получим, что

$$p_n(x) = p_{n-3}(x)z^3 + r_{n-2}z^2 + r_{n-1}z + r_n;$$

далее, после следующей подстановки,

$$p_n(x) = p_{n-4}(x)z^4 + r_{n-3}z^3 + r_{n-2}z^2 + r_{n-1}z + r_n,$$

и так далее, так что на предпоследнем шаге

$$p_n(x) = p_1(x)z^{n-1} + r_2z^{n-2} + \dots + r_{n-2}z^2 + r_{n-1}z + r_n,$$

а на последнем

$$p_n(x) = z^n + r_1z^{n-1} + r_2z^{n-2} + \dots + r_{n-2}z^2 + r_{n-1}z + r_n.$$

Правая часть последнего равенства есть приведенный полином $q_n(z)$ от новой переменной $z = x - \alpha$, так что $p_n(x) = q_n(x - \alpha)$ или, поскольку $x = z + \alpha$, $q_n(z) = p_n(z + \alpha)$, то, естественно, полином $q_n(z)$ — *тот же самый*, что и в предыдущем пункте: $q_n(z) = z^n + d_1z^{n-1} + \dots + d_{n-1}z + d_n$.

Таким образом, оказывается, что последовательные остатки $r_n, \dots, r_1$ от проведенных делений суть не что иное, как *коэффициенты* d_k нового многочлена $q_n(z) = p_n(z + \alpha)$ относительно $z = x - \alpha$, начиная со свободного члена d_n и заканчивая коэффициентом d_1 при z^{n-1}!

Из всех алгоритмов деления многочлена на двучлен с остатком[1)] самым удобным для последовательного деления

[1)] Имеются в виду описанные в п. 2.1.4 методы группировки, Руффини—Горнера и «деления уголком».

многочленов $p_n(x)$, $p_{n-1}(x)$ и т. д. на двучлен вида $x - \alpha$ с целью осуществления линейной замены $x - \alpha = z$ является метод Руффини—Горнера.

Пример 2.3.1. Приме́ним описанный метод для того, чтобы в многочлене $p_3(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ произвести замену $x + 1 = z$. В данном случае $\alpha = -1$; оформляем первое деление в таблицу:

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \alpha = -1 & 1 & ? & ? & \mathbf{?} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r|cccc} & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \alpha = -1 & 1 & 1 & 2 & \mathbf{-1} \end{array}.$$

Значит, первый остаток равен $r_3 = -1$ (остатки мы выделяем), неполное частное $p_2(x) = x^2 + x + 2$. Поскольку его коэффициенты уже записаны в соответствующую строку, имеет смысл продолжить уже полученную таблицу (вниз, конечно):

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \alpha = -1 & 1 & 1 & 2 & \mathbf{-1} \\ \alpha = -1 & 1 & ? & \mathbf{?} & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r|cccc} & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \alpha = -1 & 1 & 1 & 2 & \mathbf{-1} \\ \alpha = -1 & 1 & 0 & \mathbf{2} & \end{array}.$$

Второй остаток $r_2 = 2$, неполное частное $p_1(x) = x + 0 = x$, и его коэффициенты тоже записаны; продолжаем табличку еще на две строки, записывая в последней всего одну единицу — это старший коэффициент, который одновременно является и остатком, $r_0 = 1$:

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \alpha = -1 & 1 & 1 & 2 & \mathbf{-1} \\ \alpha = -1 & 1 & 0 & \mathbf{2} & \\ \alpha = -1 & 1 & \mathbf{?} & & \\ \alpha = -1 & \mathbf{?} & & & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r|cccc} & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \alpha = -1 & 1 & 1 & 2 & \mathbf{-1} \\ \alpha = -1 & 1 & 0 & \mathbf{2} & \\ \alpha = -1 & 1 & \mathbf{-1} & & \\ \alpha = -1 & \mathbf{1} & & & \end{array}.$$

Идущие вдоль выделенной «диагонали» остатки r_k: **1**, **-1**, **2**, **-1**, — суть коэффициенты многочлена $q_3(z) = z^3 - z^2 + 2z - 1$, получающегося из исходного многочлена $p_3(x)$ после линейной замены $x + 1 = z$. Можно это и проверить:

$$\begin{aligned} q_3(x+1) &= (x+1)^3 - (x+1)^2 + 2(x+1) - 1 = \\ &= x^3 + (3x^2 - x^2) + (3x - 2x + 2x) + (1 - 1 + 2 - 1) = \\ &= x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = p_3(x), \end{aligned}$$

как и следовало ожидать. Другой способ проверки[1)] — нахождение многочлена $q_3(z)$ *методом подстановки* из п. 2.3.2: $x = z - 1$ и, соответственно,

$$q_3(z) = p_3(z-1) = (z-1)^3 + 2(z-1)^2 + 3(z-1) + 1 =$$
$$= z^3 + (-3z^2 + z^2) + (3z - 4z + 3z) + (-1 + 2 - 3 + 1) = z^3 - z^2 + 2z - 1,$$

т. е. получается тот же результат, что и с помощью метода Руффини—Горнера. □

Итак, *метод последовательного выделения линейного двучлена*, который также называется *методом Руффини—Горнера*, позволяет по коэффициентам любого многочлена $p_n(x)$ алгоритмически вычислить коэффициенты многочлена $q_n(z) = p_n(z+\alpha)$, т. е. осуществить линейную замену переменной в многочлене: $x \to z = x - \alpha$, $x = z + \alpha$. Если эти вычисления проделать для простейшего из многочленов степени n — для монома $p_n(x) = x^n$, — то в результате мы получим коэффициенты многочлена $q_n(z) = (z+\alpha)^n$, т. е. *коэффициенты степени бинома*(!). Мы их умеем вычислять по формуле Ньютона (13) из § 2.2 — с помощью чисел сочетаний. А метод Руффини—Горнера дает альтернативный способ вычисления тех же биномиальных коэффициентов.

Пример 2.3.2. Сделаем замену $x \to z = x - 1$ в мономе $p_5(x) = x^5$. Как в предыдущем примере, вычисления методом Руффини—Горнера сразу оформляем в треугольную таблицу, которую заполняем строка за строкой, исходя из записанной над чертой строки 1, 0, 0, 0, 0, 0 коэффициентов монома. Значение α в данном случае равно 1, и эта единица записана слева от вертикальной черты. Числа 1 *справа* от вертикальной черты суть старшие коэффициенты последовательных неполных частных. Мы имеем:

	1	0	0	0	0	0
1	1	?	?	?	?	**?**
1	1	?	?	?	**?**	
1	1	?	?	**?**		
1	1	?	**?**			
1	1	**?**				
1	**1**					

→

	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	**1**
1	1	2	3	4	**5**	
1	1	3	?	**?**		
1	1	?	**?**			
1	1	**?**				
1	**1**					

→

	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	**1**
1	1	2	3	4	**5**	
1	1	3	6	**10**		
1	1	4	**10**			
1	1	**5**				
1	**1**					

.

[1)] Мы показываем, *как* можно сделать проверку *для себя* — если Вы не уверены в отсутствии ошибок. А так проверка в данном случае совсем не нужна: выше было *доказано*, что *метод дает верный результат*!

Посредине мы поместили таблицу с промежуточным результатом. В последней таблице на большой диагонали выделены последовательные остатки, которые будут коэффициентами нового многочлена, а именно $q_5(z) = p_5(z+1) = (z+1)^5$, т. е. биномиальными коэффициентами для 5-й степени бинома или числами сочетаний из 5 элементов: согласно формуле (13) из § 2.2, в которой нужно взять $a = 1$ и $n = 5$,

$$q_5(z) = (z+1)^5 = z^5 + \mathbf{C}_5^1 z^4 + \mathbf{C}_5^2 z^3 + \mathbf{C}_5^3 z^2 + \mathbf{C}_5^4 z + 1,$$

так что $\mathbf{C}_5^1 = \mathbf{C}_5^4 = 5$ (уж это-то ясно и так!), $\mathbf{C}_5^2 = \mathbf{C}_5^3 = 10$ (а это легко сосчитать по формуле (8) из § 2.2). *Но не в этом* ***главное***! □

Главное в сопоставлении двух свойств приведенной таблицы. *Первое*: не только на большой диагонали[1)], но и на параллельных ей меньших диагоналях *последовательно расположены биномиальные коэффициенты*: 1, 1—1, 1—2—1, 1—3—3—1, 1—4—6—4—1. Случайно ли это? — Конечно, нет. Для любого показателя степени n строка коэффициентов одночлена $p_n(x) = x^n$, с которой начинаются вычисления по схеме Руффини—Горнера, имеет вид 1, 0, 0, . . . , 0 (n нулей), поэтому одновременно с последовательными вычислениями для этой степени как бы «автоматически» производятся вычисления для всех меньших степеней. Таким образом, весь треугольник из чисел, расположенных ниже горизонтальной черты и правее вертикальной, заполнен биномиальными коэффициентами. Это тот же числовой треугольник, который был выписан в п. 2.2.8, только развернутый «верхним углом» и «вдвинутый» в квадрант между вертикальной и горизонтальной чертами, а также дополненный еще одной строкой — большой диагональю. Можно его развернуть обратно:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Не можете ли вы дописать еще одну строку — следующую, с числами сочетаний из 6 элементов?

[1)]Вы, наверное, догадались: *диагональ* здесь понимается в шахматно-шашечном смысле.

Второе свойство: согласно правилам вычислений по алгоритму Руффини—Горнера каждое число таблицы вычислений получается как сумма стоящего слева от него (и уже найденного) числа, умноженного на значение α, и числа, стоящего над ним (вспомните формулу $b_k = b_{k+1}\alpha + a_k$; см. п. 2.1.4). Поэтому не составляет никакого труда дописать числа на следующих диагоналях. Например, допишем еще две:

	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	**1**	**1**	**1**
1	1	2	3	4	**5**	**6**	**7**	
1	1	3	6	**10**	**15**	**21**		
1	1	4	**10**	**20**	**35**			
1	1	**5**	**15**	**35**				
1	**1**	**6**	**21**					
1	**1**	**7**						
1	**1**							

и две соответствующие строки в предыдущий «вертикальный» треугольник:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

В последнем треугольнике каждое число получается как *сумма двух чисел, расположенных* ***над*** *ним* — одно левее, другое — правее. Исключение составляют стоящие «по краям» единицы, но и для них можно считать, что одно из двух верхних соседних чисел — то, которого как раз и нет, — равно нулю. Тогда единственное число, которое придется ставить «своевольно» — это самая верхняя единица: коэффициент $\mathbf{C}_0^0$!

Чтобы понять, какому соотношению между биномиальными коэффициентами отвечает сформулированное *правило*, запишем в треугольник вместо самих коэффициентов (чисел)

обозначения для них:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \mathbf{C}_0^0 & & & & & \\
 & & & & \mathbf{C}_1^0 & & \mathbf{C}_1^1 & & & & \\
 & & & \mathbf{C}_2^0 & & \mathbf{C}_2^1 & & \mathbf{C}_2^2 & & & \\
 & & \mathbf{C}_3^0 & & \mathbf{C}_3^1 & & \mathbf{C}_3^2 & & \mathbf{C}_3^3 & & \\
 & \mathbf{C}_4^0 & & \mathbf{C}_4^1 & & \mathbf{C}_4^2 & & \mathbf{C}_4^3 & & \mathbf{C}_4^4 & \\
\mathbf{C}_5^0 & & \mathbf{C}_5^1 & & \mathbf{C}_5^2 & & \mathbf{C}_5^3 & & \mathbf{C}_5^4 & & \mathbf{C}_5^5
\end{array}
$$

Уже этого кусочка биномиального треугольника достаточно, чтобы понять: *над* биномиальным коэффициентом $\mathbf{C}_{n+1}^k$ записаны коэффициенты $\mathbf{C}_n^k$ и $\mathbf{C}_n^{k-1}$, так что справедливо *рекуррентное свойство биномиальных коэффициентов* (или *чисел сочетаний*): *при всех значениях k от 1 до n выполнено соотношение*

$$\mathbf{C}_{n+1}^k = \mathbf{C}_n^k + \mathbf{C}_n^{k-1}. \tag{9}$$

Вопрос: *нужно ли доказывать формулу* (9)? — *Ответ*: нет! Она уже доказана — вытекает из правил метода Руффини—Горнера. Тем не менее, в «Упражнениях» предлагается доказать эту формулу еще несколькими способами.

Можно представить себе бесконечную числовую таблицу из биномиальных коэффициентов, строящуюся в соответствии с формулой (9) или по правилам метода Руффини—Горнера. Такой числовой треугольник (или конечная его часть) называется ***треугольником Паскаля***, а правило его построения (9) — *основным свойством треугольника Паскаля*[1]. Если Вы забыли, чему равны коэффициенты в формуле для какой-то степени бинома, то самый короткий способ вспомнить их — построить нужный кусочек треугольника Паскаля по правилу (9).

2.3.4. Решение кубических уравнений

Вернемся к вопросу о решении (т. е. нахождении всех корней) полиномиальных уравнений степени выше второй. Начнем с кубических уравнений.

Как было показано в п. 2.3.2, общее (приведенное) кубическое уравнение $x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 = 0$ после подходящей

[1] Сам Паскаль использовал это свойство в сочинении 1654 г., называвшемся «*Трактат об арифметическом треугольнике*».

линейной замены переменной может быть записано как кубическое уравнение *без квадратичного члена*:

$$x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 = 0 \iff z^3 + d_2z + d_3 = 0, \quad z = x + \frac{c_1}{3}.$$

Удобно перенести свободный член в правую часть и ввести традиционные обозначения: $d_2 = B$, $-d_3 = A$. Тогда уравнение относительно z примет *стандартный вид*:

$$z^3 + Bz = A. \tag{10}$$

Мы попытаемся записать формулы, выражающие корни уравнения (10) через его коэффициенты. Напомним, что хотя бы один корень у этого уравнения существует (теорема 2), всего корней не больше трех (теорема 4, п. 2.1.5) и осуществляются все три возможности: один корень, два корня, три корня (вспомните примеры соответствующих уравнений).

Какие преимущества дает «укороченный» вид (10) кубического уравнения? Как подойти к отысканию корней? — Вот вопросы, над которыми вам стоило бы поломать голову прежде, чем читать дальше.

Может показаться заманчивой идея использовать для решения уравнения (10) теорему Виета. Система уравнений Виета в данном случае действительно выглядит проще:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 &= 0, \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 &= B, \\ z_1z_2z_3 &= A. \end{cases}$$

Несмотря на это, *напрямую* такой подход ничего не дает: *во-первых*, полином третьей степени далеко не всегда является полностью разложимым (если такой полином представляется как произведение линейного бинома и квадратного трехчлена с *отрицательным* дискриминантом, то он не является таковым); *во-вторых*, даже если полином полностью разложим (например, если он имеет три *различных* корня), все упрощения системы Виета рано или поздно приведут к *тому же самому* уравнению (10) или к эквивалентному уравнению. Надо искать другие пути...

Тем не менее, как выяснится позже, решить (отчасти) уравнение (10) поможет именно *теорема Виета*, но самая простая: для квадратного уравнения!

Попробуем найти *алгебраическое выражение*, удовлетворяющее уравнению вида (10). Подсказку дает формула (13+) для *куба суммы* (п. 2.2.8). Перепишем эту формулу в виде

$$(R_1 + R_2)^3 = R_1^3 + R_2^3 + 3R_1R_2(R_1 + R_2), \tag{11}$$

и заметим, что если сумму $R_1 + R_2$ обозначить через Z, то выражение Z будет удовлетворять уравнению

$$Z^3 = (R_1^3 + R_2^3) + 3R_1R_2 \cdot Z \iff Z^3 - 3R_1R_2Z = R_1^3 + R_2^3.$$

Теперь — **внимание!** — если переменные R_1 и R_2 таковы, что $R_1^3 + R_2^3 = A$ и $3R_1R_2 = -B$, то *последнее уравнение* ***совпадает с уравнением*** (10). А соотношения, которым для этого должны удовлетворять R_1 и R_2, образуют легко решаемую систему уравнений. В самом деле, если возвести второе соотношение в куб: записать в виде $27R_1^3R_2^3 = -B^3$, — то после введения переменных $t_1 = R_1^3$, $t_2 = R_2^3$ получится *система Виета с двумя переменными* t_1, t_2:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = A, \\ t_1t_2 \quad = -\dfrac{B^3}{27}. \end{cases}$$

По *теореме Виета для квадратных уравнений* ее решения суть пары корней соответствующего квадратного уравнения:

$$t^2 - At - \frac{B^3}{27} = 0 \iff t = t_{1,2} = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = \frac{A^2}{4} + \frac{B^3}{27}$$

(через Δ мы обозначили просто *четверть дискриминанта* получающегося квадратного уравнения). Для решения $(t_1; t_2)$ системы Виета находим значения переменных $R_{1,2}$: $R_1 = \sqrt[3]{t_1}$, $R_2 = \sqrt[3]{t_2}$, — а затем и соответствующее значение суммы $Z = R_1 + R_2$, которое *будет удовлетворять уравнению* (10). Поскольку корни $t_{1,2}$ вспомогательного квадратного уравнения входят в выражение $Z = R_1 + R_2 = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}$ *симметричным образом* (т. е. при перестановке этих корней выражение Z *не изменяется*), безразлично, который из корней t_1, t_2 отвечает знаку «плюс», который — знаку «минус» перед квадратным корнем $\sqrt{\Delta}$ при записи корней уравнения: в обоих возможных случаях мы получаем одну и ту же ***формулу Кардано для корней кубических уравнений*** вида (10):

$$z = \sqrt[3]{\frac{A}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{A}{2} - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^3}{27}}}. \tag{12}$$

Но, увы, это далеко не всё. Действительно, если подставить выражение в правой части формулы Кардано (12) в уравнение

(10), то формальные преобразования показывают, что уравнение выполняется. Такая проверка опирается на формулу (11) и общеизвестную формулу $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; проведите ее самостоятельно. Однако сразу возникают два вопроса. *Первый*: формула (12) дает только *один* корень, в то время как их может быть *три* (или *два*); как же в этом случае отыскать *все* корни[1)]? *Второй вопрос*: кубическое уравнение всегда имеет хотя бы один корень, в то время как в случае $\Delta<0$ формула Кардано вообще теряет смысл; а как же с существующим корнем?

Пример 2.3.3. Приме́ним формулу Кардано к уравнению $x^3+x=2\,(*)$. Оно имеет стандартный вид (10): $A=2$, $B=1$, поэтому

$$\Delta=\frac{A^2}{4}+\frac{B^3}{27}=1+\frac{1}{27}=\frac{28}{27},\quad x=\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{28}{27}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{28}{27}}}=\alpha.$$

Выражение для найденного корня α явно не упрощается; прикинем, чему равно значение α. Число под знаком первого кубического корня примерно равно двум (2 «с небольшим»), сам корень несколько больше единицы (значение $\sqrt[3]{2}\approx 1{,}26$: $1{,}26^3=2{,}000376$). Под знаком второго кубического корня записано маленькое по модулю отрицательное число, так что сам корень есть небольшое отрицательное число. В сумме получается значение где-то в окрестности единицы: $\alpha\approx 1$.

На самом деле в точности $\alpha=1$! Действительно, число $x_0=1$ удовлетворяет уравнению $(*)$, а так как левая часть этого уравнения представляет собой *строго возрастающую* функцию $f(x)=x^3+x$ (оба слагаемые суть строго возрастающие на всей числовой оси функции), *больше корней нет*! Это можно доказать и «чисто алгебраически»:

$$(*)\Leftrightarrow x^3+x-2=0\Leftrightarrow (x^3-1)+(x-1)=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2)=0,$$

а квадратное уравнение $x^2+x+2=0$ корней не имеет, ибо его дискриминант $D=1-8<0$. Так или иначе, уравнение $(*)$ имеет единственный корень $x_0=1$.

Единственность корня $x=1$ можно доказать еще следующим изысканным способом. Перепишем уравнение $(*)$ в виде $x^3=2-x$. Если $x>1$, то и $x^3=2-x>1$, т. е. $x<2-1=1$, $x<1$ — противоречие.

[1)] На самом деле, как мы сейчас увидим на конкретном примере, в случае трех корней дело обстоит еще хуже.

Аналогично, если $x < 1$, то $x^3 = 2 - x < 1$, т. е. $x > 2 - 1 = 1$ — опять противоречие. Следовательно, значение x может равняться только единице, что и требовалось установить.

Отсюда вытекает, что записанное как сумма двух кубических радикалов число α равно единице: имеет место равенство

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{28}{27}}} = 1.$$

Довольно неожиданное следствие формулы Кардано, не так ли? □

Итак, в разобранном случае формула Кардано (12) действительно дает корень кубического уравнения, но при этом он записывается в довольно странном виде. Но это еще не всё.

Пример 2.3.4. Попробуем применить формулу Кардано к уравнению $x^3 - x = 0$. Его корни очевидны: это числа 0, 1 и -1. С другой стороны, уравнение имеет имеет стандартный вид (10), где $A = 0$, $B = -1$. Но тогда

$$\Delta = \frac{A^2}{4} + \frac{B^3}{27} = 0 - \frac{1}{27} = -\frac{1}{27} < 0,$$

и формула Кардано лишена смысла! □

Вот теперь почти всё. Получается, что при наличии у кубического уравнения трех корней в формуле Кардано под знаком квадратного корня может появиться отрицательное число Δ и она вообще теряет смысл ... для нас. Еще в XVI в., когда была открыта формула (12)[1], математики прекрасно обходили эту сложность, преспокойно орудуя с корнями из отрицательных чисел, к большому неудовольствию Декарта! На самом деле достаточно ввести только один такой корень — из минус единицы, «*мнимую единицу*» $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$, а дальше... Пока дальнейшие рассмотрения в этом направлении выходят за рамки наших возможностей... Укажем только, что в действительности знак числа Δ (противоположный знаку так называемого *дискриминанта кубического уравнения* (10),

[1]Ее изобрел в 1515 г. итальянский математик *Сципион дель Ферро*, переоткрыл в 1535 г. его соотечественник *Николо Тарталья* и опубликовал в 1545 г. соперник Тартальи в математике *Джероламо Кардано*. Поэтому формулу (12) нередко именуют полностью — как *формулу Кардано—Тартальи—дель Ферро*.

вычисляющегося по формуле $\boldsymbol{D}_3 = -4B^3 - 27A^2 = -108\Delta$) определяет число корней кубического уравнения и определяется им[1]: если $\Delta < 0$, то корней три (и наоборот), а если $\Delta > 0$, то корень единственный, и тогда он вычисляется по формуле Кардано (12). Мы докажем это в следующем п. 2.3.5.

Специфичность формулы Кардано в том, что с ее помощью корень записывается *через коэффициенты уравнения только с помощью арифметических операций и операций извлечения корней*. Извлечение корней иногда называют «взятием радикалов» (напомним, что *радикалом*, в частности, называется *знак корня* $\sqrt[n]{}$), а сам факт наличия формулы Кардано обозначают в математической терминологии как ***разрешимость кубических уравнений в радикалах***. Старинная проблема: выяснить, *какие еще уравнения разрешимы в радикалах*.

Заметим, что к разрешимым в радикалах заведомо относятся *квадратные уравнения*: корни *выражаются в радикалах* через коэффициенты уравнения в соответствии со стандартной формулой для корней,

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

К таким же относятся и *двучленные уравнения* произвольной степени, в частности, *линейные*, для которых можно обойтись вообще без радикалов (это еще лучше). Разрешимо в радикалах и любое *биквадратное уравнение*, т. е. уравнение степени 4 без кубического и линейного членов — уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (объясните, как записать корни этого уравнения в радикалах). Но математиков на протяжении нескольких веков интересовал вопрос о разрешимости в радикалах *общих* (*любых*) уравнений произвольной степени, и к этому вопросу мы вернемся чуть позже, в п. 2.3.6.

2.3.5. Графическое исследование кубического уравнения

Рассмотрим уравнение (10) как задачу с параметром и поставим *логическую* задачу (см. § 1.2): найти *число корней*

[1] Вполне аналогично тому, что *знак дискриминанта квадратного уравнения определяет число его корней и определяется им* (числом корней). Напомним: термин «*дискриминант*» происходит от лат. **discriminantis** — *разделяющий, различающий*.

уравнения $x^3 + Ax = B$ *в зависимости от значений параметров* A, B. В этом нам поможет *функционально-графическая интерпретация* задач с параметрами, рассматривавшаяся в п. 1.2.4. Именно, зафиксируем значение A и *при данном* A *найдем число корней уравнения* (10) *в зависимости от значения параметра* B.

Если значение A неотрицательно, то, как и в примере 2.3.3, левая часть $L(x) = x^3 + Ax$ уравнения есть строго возрастающая на всей числовой оси функция, поэтому при любом значении B уравнение (10) имеет единственное решение (существование решения вытекает из теоремы 4 (п. 2.1.5), а единственность — из возрастания функции $L(x)$; формальное доказательство единственности проведите самостоятельно).

Если же $A < 0$, то производная левой части $L'(x) = 3x^2 + A$ может быть как положительной, так и отрицательной, так что уравнение (10) может иметь более одного корня. Исследуем функцию $y = L(x)$ и построим ее график (рис. 2.3) с помощью производной.

Для упрощения выкладок положим $A = -3c^2$, $c = \sqrt{-\frac{A}{3}} > 0$. Вычисляем:

$$L'(x) = 3x^2 - 3c^2 = 3(x-c)(x+c) > 0 \text{ при } |x| > c,$$
$$L'(x) < 0 \text{ при } |x| < c.$$

Значит, функция $L(x)$ имеет две точки экстремума: точку максимума $x = -c$, $L(x) = -c^3 + 3c^3 = 2c^3 = y_{max} = B_0$, и точку минимума $x = c$, $L(x) = c^3 - 3c^3 = -2c^3 = y_{min} = -B_0$. Поэтому параметр B в правой части уравнения $x^3 - 3c^2x = B$ имеет два критических значения, $B = \mp B_0 = \mp 2c^3$, и число корней этого уравнения зависит от B следующим образом (см. рис. 2.3):

если $A = -3c^2 < 0$, ***то***:

$$\begin{array}{rcl} B < -B_0 = -2c^3 & \to & 1 \text{ корень;} \\ B = -B_0 = -2c^3 & \to & 2 \text{ корня;} \\ -B_0 = -2c^3 < B < B_0 = 2c^3 & \to & 3 \text{ корня;} \\ B = B_0 = 2c^3 & \to & 2 \text{ корня;} \\ B > B_0 = 2c^2 & \to & 1 \text{ корень} \end{array}$$

(заметим, что для строгого обоснования выписанного ответа на вопрос о числе решений нужно использовать, как и в случае

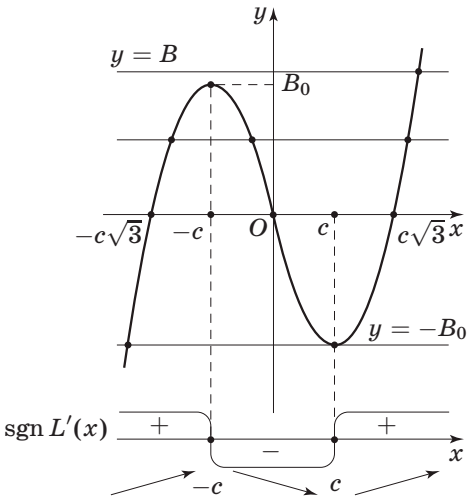


Рис. 2.3

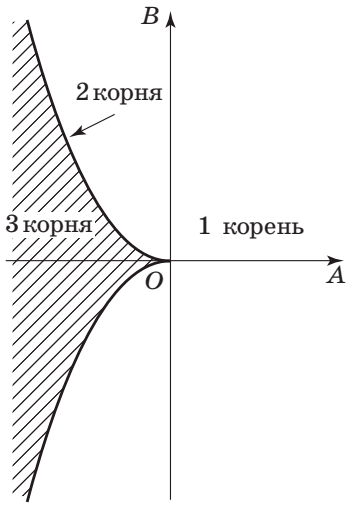


Рис. 2.4

$A \geqslant 0$, строгую монотонность функции $L(x)$ на промежутках $(-\infty, -c]$, $[-c, c]$, $[c, +\infty)$, теорему 2 о существовании корней и ТПЗ — теорему 1 о промежуточном значении).

Условие существования трех корней можно записать как одно неравенство $|B| < B_0 = 2c^3$ или же в эквивалентной форме $B^2 < B_0^2 = 4c^6$. Вернемся к фиксированному параметру $A = -3c^2$ и перепишем это условие:

$$c^2 = -\frac{A}{3}, \qquad c^6 = \left(-\frac{A}{3}\right)^3 = -\frac{A^3}{27},$$

поэтому

$$B^2 < 4c^6 \iff B^2 < -4\frac{A^3}{27} \iff B^2 + 4\frac{A^3}{27} = 4\left(\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}\right) = 4\Delta < 0,$$

где Δ — то же самое выражение под знаком квадратного радикала, что и в формуле Кардано (см. предыдущий пункт).

Поэтому случай, когда уравнение (10) имеет единственный корень, описывается неравенством

$$4\left(\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}\right) = 4\Delta > 0,$$

причем это условие «автоматически» выполняется и для случая, когда $A > 0$ или $A = 0$, $B \neq 0$.

Наконец, промежуточный вариант, когда $\Delta = 0$, разбивается на два подслучая: если $A = B = 0$, то уравнение (10) $x^3 = 0$ имеет единственный корень (кратности 3), если же A и B отличны от нуля, то уравнение (10) имеет два корня (один из которых имеет кратность 2; докажите это самостоятельно, для чего разложите левую часть уравнения $x^3 + Ax - B = 0$ на множители).

Можно все эти случаи представить картинкой на плоскости параметров $(A; B)$: неравенства $\Delta \gtrless 0$ задают на ней две области, граничащие по клювообразной «дискриминантной кривой» с уравнением $\Delta = 0$ (рис. 2.4).

2.3.6. Уравнения степени 4: схема Феррари

Рассмотрим вопрос о разрешимости в радикалах общего уравнения *четвертой степени*. Как и для произвольной степени, в любом (приведенном) уравнении степени 4 с помощью линейной замены можно убрать одночлен следующей степени, т. е. кубический: в соответствии с эквивалентным переходом (7)

$$x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 = 0 \Longleftrightarrow z^4 + d_2z^2 + d_3z + d_4 = 0, \quad z = x + \frac{c_1}{4}.$$

Перенесем квадратичную компоненту в правую часть уравнения и переобозначим коэффициенты — запишем уравнение 4-й степени в *стандартном виде*:

$$z^4 = az^2 + bz + c. \tag{13}$$

Теперь, следуя первооткрывателю метода решения уравнений четвертой степени *Луиджи Феррари*[1)], покажем, как уравнение (13) можно свести к *совокупности двух квадратных уравнений*, коэффициенты которых *выражаются в радикалах* через коэффициенты a, b, c. Поскольку *квадратные уравнения разрешимы в радикалах*, отсюда будет следовать разрешимость в радикалах и исходного уравнения (13).

Идея сведения уравнения степени 4 к двум квадратным проста: записав уравнение в виде $q_4(z) = 0$, *разложить левую часть уравнения в* ***произведение двух квадратичных сомножителей***. Идея разложения $q_4(z)$ тоже известна: *представить многочлен в виде* ***разности двух квадратов***. И идея такого представления знакома, хотя бы на примере разложения

[1)] Метод Феррари был опубликован в 1545 г. его учителем Кардано.

суммы четвертых степеней — *дополнение* z^4 *до другого* ***полного квадрата***:

$$z^4 + d^4 = (z^4 + 2d^2z^2 + d^4) - 2d^2z^2 = (z^2 + d^2)^2 - (\sqrt{2}dz)^2.$$

Остается применить все эти соображения для общего уравнения вида (13) — прежде чем читать дальше, полезно попытаться сделать это самостоятельно!

Оперируя с уравнением (13), попробуем к обеим его частям прибавить такое *квадратичное по переменной* z *слагаемое*, чтобы слева *остался* полный квадрат, а правая часть *стала* полным квадратом. Заметим, что при любом значении λ левую часть можно представить в виде $z^4 = (z^2 + \lambda)^2 - 2\lambda z^2 - \lambda^2$. Следовательно, при любом λ

$$(13) \iff (z^2 + \lambda)^2 = (az^2 + bz + c) + (2\lambda z^2 + \lambda^2). \qquad (14)$$

Теперь выясним, какое значение параметра λ следует взять для того, чтобы получающийся в правой части уравнения (14) квадратный трехчлен $R(z) = (a + 2\lambda)z^2 + bz + (c + \lambda^2)$ был полным квадратом, а точнее, записывался в виде $A(z - z_0)^2$ (хотя *такой вид* на самом деле будет полным квадратом лишь в случае $A > 0$, случай $A < 0$ тоже не должен нас смущать — раз уж мы смирились с извлечением корней из отрицательных чисел). Необходимое и достаточное условие того, чтобы квадратный трехчлен $R(z)$ имел *единственный кратный корень* z_0, состоит в равенстве дискриминанта $R(z)$ нулю. Вычисляем дискриминант:

$$D = b^2 - 4(a + 2\lambda)(c + \lambda^2) = -8\lambda^3 - 4a\lambda^2 - 8c\lambda + (b^2 - 4ac).$$

Следовательно,

$$D = 0 \iff 8\lambda^3 + 4a\lambda^2 + 8c\lambda + (4ac - b^2) = 0. \qquad (15)$$

Таким образом, если в качестве λ взять корень кубического относительно λ уравнения (15), то правую часть уравнения (14) можно представить в виде

$$R(z) = (a + 2\lambda)z^2 + bz + (c + \lambda^2) = A(z - z_0)^2, \ A = a + 2\lambda, \ z_0 = -\frac{b}{2A}, \qquad (16)$$

а потом разложить уравнение (14):

$$(z^2 + \lambda)^2 - A(z - z_0)^2 = 0 \iff (z^2 + \lambda - \sqrt{A}(z - z_0))(z^2 + \lambda + \sqrt{A}(z - z_0)) = 0$$

(вот мы и извлекли квадратный корень из числа неизвестно какого знака!).

Тем самым исходное уравнение степени 4 сведено к двум квадратным. Остается только проследить, как обстоит дело с выражением коэффициентов квадратичных сомножителей в радикалах. Во-первых, уравнение (15) — кубическое с коэффициентами, *рационально* (т. е. только с помощью арифметических операций) выражающимися через коэффициенты a, b, c исходного уравнения (13) (уравнение (15) называется *резольвентой*, т. е. «разрешающим уравнением»[1)] рассматриваемого уравнения (13)). Чтобы его разрешить в радикалах (по формуле Кардано), нужно только линейной заменой освободиться от члена, квадратичного по λ, но соответствующая замена не повлияет на возможность выражения корня в радикалах (объясните). Значит, искомый корень $\lambda = \lambda(a,b,c)$ записывается через коэффициенты a, b, c с помощью арифметических операций и с помощью радикалов. Далее, формулы (16) показывают, что величи́ны A и z_0 *рационально* выражаются через коэффициенты a, b, c и величину λ; следовательно, они выражаются через коэффициенты a, b, c в радикалах. Наконец, при разложении разности квадратов появляется один новый радикал: $\sqrt{A}$, — и еще радикалы появятся при записи корней квадратных уравнений.

Таким образом, мы показали, что *корни уравнения степени 4 выражаются через его коэффициенты в радикалах*. Следующие на очереди — уравнения степени 5. Математики более двух с половиной веков безрезультатно бились над задачей разрешения уравнений пятой степени в радикалах, пока в 1799 г. итальянский математик *Паоло Руффини* (тот самый Руффини) не доказал, что это невозможно. В 1826 г. знаменитый норвежский математик *Нильс Хенрик Абель* установил *неразрешимость в радикалах*[2)] *уравнений любой степени* $n \geqslant 5$. С тех пор уравнения степени пять и выше называют уравнениями *высших степеней*.

Конечно, речь идет только об отсутствии *общих формул*. Множество конкретных уравнений высших степеней решить (в смысле найти *конкретные* корни) можно. Более того, для

[1)]От лат. **resolventis** — *развязывающий, решающий*.

[2)]То есть невозможность *выражения в радикалах* корней через коэффициенты уравнения.

нас и уравнения степеней 3 и 4, несмотря на их «низость», относятся к неразрешимым: для уравнений 4-й степени за формулы мы и не брались, а формула Кардано для кубических уравнений для нас (в отличие от Кардано, Тартальи и дель Ферро!) малоприемлема. Так что все полиномиальные уравнения степеней $n \geqslant 3$ мы будем решать более или менее специальными методами, которые рассмотрим в следующем параграфе.

§ 2.4. Уравнения разных степеней. Методы упрощения

2.4.1. Простейшие полиномиальные уравнения

К *стандартным полиномиальным уравнениям* $p_n(x) = 0$, решаемым по стандартным схемам и формулам, относятся уравнения следующих типов.

1. *Линейные уравнения* (степень $n = 1$) всегда имеют единственный корень и решаются по схеме

$$ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = -\frac{b}{a}.$$

2. *Квадратные* (иногда говорят, *квадратичные*) *уравнения* ($n = 2$) приводятся к виду

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Их разрешимость (в смысле наличия корней) определяется знаком *дискриминанта* — числа $D = b^2 - 4ac$:

если $D < 0$, то корней нет (*Ответ*: $\varnothing$);

если $D = 0$, то корень единственный: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;

если $D > 0$, то корней два — они вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Приведем еще два варианта последней формулы, относящиеся к случаю положительного дискриминанта.

Для *приведенного* квадратного уравнения:

$$x^2 + px + q = 0 \iff x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Для квадратного уравнения с четным коэффициентом $b = 2m$:

$$ax^2 + 2mx + c = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}.$$

К стандартным (элементарным) полиномиальным уравнениям можно отнести еще один тип уравнений.

3. *Двучленные уравнения* произвольной степени $n \geqslant 2$: $ax^n + b = 0$. Они переписываются как *стандартные степенные уравнения* $x^n = c$, а дальнейшее зависит от четности n и от знака числа c, а именно:

если $n = 2k + 1$ *нечетно*, то при любом значении c уравнение имеет *единственное* решение: $x_0 = \sqrt[n]{c}$;
если $n = 2k$ четно, то:

при $c < 0$ *корней нет*;
при $c = 0$ корень *единственный*: $x_0 = 0$;
при $c > 0$ корней *два*: $x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{c}$.

Все остальные как полиномиальные, так и дробно-рациональные алгебраические уравнения (о них речь пойдет в § 3.1), *с которыми приходится встречаться в* ***элементарной алгебре****, сводятся к перечисленным стандартным*[1] типам.

К *простейшим*, «почти стандартным» полиномиальным уравнениям отнесем еще один тип уравнений, которые решаются не по формулам[2], а по *стандартной схеме*, т. е. часто встречающемуся приему решения.

4. *Биквадратные уравнения* суть уравнения степени 4, приводимые к виду

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Они решаются с помощью ***замены переменной***, а именно:

1) вводится *новая переменная* $x^2 = z$ и через нее переписывается исходное уравнение — получается квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$;

2) находятся корни этого уравнения относительно z; допустим, они существуют — некоторые корни $z = z_i$;

3) наконец, для каждого корня z_i решается ***уравнение замены*** $x^2 = z_i$, и затем выписывается ответ.

---

[1] Несколько утрируя, можно сказать, что *все остальные уравнения «придуманы» так, что сводятся к стандартным*!

[2] Их можно было бы выписать, но зачем? Проще запомнить *прием* решения.

Оформлять решение с помощью замены переменной можно по-разному, например, «по шагам», как выше. Мы же условимся оформлять замену в виде схемы для *эквивалентного перехода*

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \iff \begin{cases} x^2 = z, \\ az^2 + bz + c = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

подразумевая, что из системы находятся только *значения исходной переменной* x.

Очевидным обобщением биквадратных уравнений являются уравнения *бикубические*, приводимые к виду

$$ax^6 + bx^3 + c = 0,$$

и заменой $x^3 = z$ сводящиеся к квадратному уравнению, а затем к совокупности двучленных уравнений вида $x^3 = z_i$. Ну и, конечно, и квадратные, и биквадратные, и бикубические уравнения можно причислить к одному классу «*трехчленных*» уравнений

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

которые (в случае $n > 1$), аналогично биквадратным, решаются по схеме замены (1):

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \iff \begin{cases} x^n = z, \\ az^2 + bz + c = 0. \end{cases}$$

На перечисленных типах мы завершим список простейших (стандартных и почти стандартных) уравнений. Повторим: ***все остальные уравнения*** (которыми мы будем заниматься) ***сводятся к простейшим***.

Напомним (см. пред. параграф), как вообще обстоит дело с полиномиальными уравнениями разных степеней. Линейные и квадратные уравнения умели решать еще в глубокой древности — например, 4 тысячелетия тому назад в Вавилоне. Потом несколько веков (даже, можно сказать, тысячелетий) математики потратили на то, чтобы научиться решать полиномиальные уравнения степени 3 (т. е. *кубические*; между прочим, такое наименование ввел только в 1619 г. *Рене Декарт*, а название «квадратные уравнения» было введено и вовсе недавно: в 1710 г. его предложил учитель Ломоносова, немецкий математик *Христиан Вольф*) и степени 4. В результате в течение XVI–XVIII веков усилиями многих математиков удалось вывести приемлемые общие формулы, аналогичные формулам для корней квадратного уравнения. Полученную нами (в п. 2.3.4) знаменитую формулу *Кардано—Тартальи—дель Ферро* для корня кубического уравнения окончательно уточнил *Леонард Эйлер* (и

Эйлер, и Вольф были академиками Санкт-Петербургской Академии наук, спроектированной Петром I [при участии Лейбница!], а Эйлер жил и похоронен в Санкт-Петербурге). Он же придал относительно простой вид формулам для решения уравнений степени 4. Однако все эти формулы слишком сложны для применения (т. е. для конкретных вычислений), и в «*элементарной*» *алгебре* пользоваться упомянутыми формулами **мы не будем**.

После первооткрытия формул для решения уравнений степеней 3 и 4 (в 1515–1545 гг.) прошло более 250 лет бесплодных поисков общих формул для корней уравнений хотя бы степени 5, пока в 1820–30 гг. *Нильс Хенрик Абель* и *Эварист Галуа*, каждый посвоему, не ***доказали***, что *алгебраических формул* (с использованием операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корней) *не существует в принципе* — ни для общего уравнения $p_n(x) = 0$, $n \geqslant 5$ (Абель, а до него для степени в точности 5 *Руффини*), ни даже для большинства конкретных таких уравнений с «хорошими» (например, целыми) коэффициентами (Галуа). Это открытие было не только сенсационным, но и революционным для всей алгебры, так как привело к новым математическим идеям и понятиям, составляющим основы *современной* («*неэлементарной*») *алгебры*.

Конечно, *неразрешимость*[1] общих уравнений степеней $n \geqslant 5$ (а для нас, фактически, степеней $n \geqslant 3$) вовсе не означает, что *все* уравнения высших степеней нельзя решить, т. е. отыскать их корни. Например,

$$x^5 + 32 = 0 \Leftrightarrow x = -2,\ x^6 - 64 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2,\ x^8 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1,$$

и так далее.

Далее мы рассмотрим ***методы сведения рациональных*** (сначала целых, т. е. полиномиальных, а в § 3.1 — и дробных) ***алгебраических уравнений к простейшим***. Основных методов *два*: это только что рассмотренный ***метод замены*** (его мы использовали и в § 2.3) и ***метод разложения*** (уже применявшийся для решения кубического уравнения в примере 2.1.1).

2.4.2. Линейные замены, основанные на симметрии

Идею замены при решении уравнений можно формализовать следующим образом. Мы представляем исходное уравнение $F(x) = 0$ в виде $f(\varphi(x)) = 0$, делаем замену $\varphi(x) = z$ (можно сказать иначе: вводим новую переменную [неизвестную] —

[1] «*В радикалах*», т. е. с помощью только арифметических действий и извлечения корней — напомним, что *радикалами* называются знаки корней и выражения под знаками корней.

переменную замены), решаем уравнение $f(z) = 0$ относительно z и потом для каждого из найденных значений $z = z_1, z_2, \ldots$ находим x из *уравнений замены* $\varphi(x) = z_1$, $\varphi(x) = z_1$, $\ldots$. Как и ранее (в примерах), несколько вольно обращаясь со знаком равносильности, запишем ***схему замены***:

$$f(\varphi(x)) = 0 \iff \begin{cases} \varphi(x) = z, & \rightleftarrows \quad \rightleftarrows \quad \textit{Ответ.} \\ & \qquad\quad \uparrow \\ f(z) = 0 & \rightarrow \quad z \end{cases}$$

(Более длинно:

$$f(\varphi(x)) = 0 \iff \varphi(x) = z_1 \ \vee \ \varphi(x) = z_1 \ \vee \ \ldots ,$$

где $z_1, z_2, \ldots$ — корни уравнения $f(z) = 0$).

В рассмотренных выше случаях замены оба уравнения, $f(z) = 0$ и $\varphi(x) = z_k$, имели степени *меньшие*, чем степень исходного уравнения $F(x) = 0$, или $f(\varphi(x)) = 0$. Понятно, что если в полиномиальном уравнении сделать *линейную замену* $\varphi(x) = ax + b = z$, то степени уравнений $f(\varphi(x)) = 0$ и $f(z) = 0$ будут *одинаковы* (обдумайте!). Однако, как мы уже видели в § 2.3, при подходящей линейной замене можно «укоротить» уравнение: сделать так, что часть коэффициентов обратится в нуль и меньше станет не степень уравнения, а число его членов (отличных от нуля входящих в него одночленов). При этом *наводящими соображениями* могут оказаться те или иные свойства симметричности входящих в него выражений. Поясним сказанное на примерах.

Пример 2.4.1. В уравнение $(*)$ $x^4 + (x + 2)^4 = 82$ выражения x и $x + 2$ входят одинаковым, симметричным образом: то и другое в четвертой степени и с одним и тем же коэффициентом 1. В общем случае для двух точек x_1 и x_2 числовой оси *центром симметрии* этой пары точек будет середина отрезка с концами в точках x_1 и x_2 (рис. 2.5).

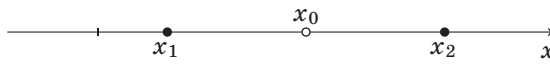


Рис. 2.5

Координата середины отрезка легко находится. Если выполняется соотношение $x_2 - x_0 = x_0 - x_1$ (см. рис. 2.5), то

$$2x_0 = x_1 + x_2 \implies x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Сделаем в уравнении $(*)$ линейную замену, приняв за новую переменную «центр симметрии» выражений x и $x+2$, т. е. их среднее арифметическое: положим

$$\frac{x + (x+2)}{2} = x + 1 = z.$$

Тогда $x = z - 1$, $x + 2 = z + 1$, и уравнение $(*)$ переписывается в «совсем симметричном» виде:

$$(z-1)^4 + (z+1)^4 = 82.$$

А теперь заметим, что после возведения биномов $z \pm 1$ в четвертую степень (по формулам из п. 2.2.8) и сложения результатов нечетные степени z взаимно уничтожатся, ибо коэффициенты при них в разложениях $(z \pm 1)^4$ по степеням z отличаются лишь знаком:

$$(z+1)^4 = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1, \quad (z-1)^4 = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1.$$

Следовательно, получается биквадратное уравнение:

$$2z^4 + 12z^2 + 2 = 82 \iff z^4 + 6z^2 - 40 = 0.$$

В нем можно сделать еще одну замену — стандартную: $z^2 = u$, — а можно просто *разложить* левую часть уравнения:

$$z^4 + 6z^2 - 40 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 4)(z^2 + 10) = 0 \Leftrightarrow z^2 = 4 \vee z^2 = -10 \Leftrightarrow z = \pm 2$$

(уравнение $z^2 = -10$ корней не имеет). Отметим, что *обосновывать* разложение нет необходимости: можно, на худой конец, просто его *проверить*, но и это совсем не обязательно — лишь бы разложение было правильным[1)], а *то, как* мы (вы) до него догадались — это наше (ваше!) дело. Конечно, нужен «слегка наметанный глаз» для того, чтобы сразу видеть разложение квадратных трехчленов (только не нужно говорить, что используется теорема Виета: она здесь ни при чем, и используется, как правило, совсем иначе, о чем будет речь в § 4.3).

Теперь находим значения исходной переменной x. Уравнения замены $x + 1 = \pm 2$ в случае линейных замен можно и не выписывать, благо тогда и x *линейно* выражается через z:

[1)] *Кто не верит — пусть проверит*!

в данном случае $x+1=z \Leftrightarrow x=z-1$, поэтому корням $z=2$, $z=-2$ уравнения относительно z отвечают корни $x=2-1=1$ и $x=-2-1=-3$ исходного уравнения относительно x.

Ответ: $x=-3;\ 1$ (в таких случаях корни лучше отделять один от другого *точкой с запятой*, во избежание путаницы с десятичными дробями). □

Пример 2.4.2. Решим уравнение

$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=40. \qquad (*)$$

Отметив на числовой оси точки $x+1$, $x+2$, $x+4$ и $x+5$, видим (рис. 2.6), что такая четверка чисел симметрична относительно точки $x+3$. Вот и сделаем линейную замену $x+3=z$!

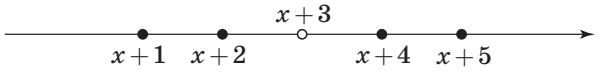


Рис. 2.6

Как и в п. 2.2.8, линейную замену легко осуществить, выразив x через z. В данном случае $x=z-3$, поэтому

$$(*) \iff (z-2)(z-1)(z+1)(z+2)=40.$$

Теперь ясно, что можно воспользоваться формулой $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ и получить (в данном случае) биквадратное уравнение

$$(z^2-4)(z^2-1)=40$$

относительно z^2. Вводим обозначение $z^2=u$ и находим:

$$(u-4)(u-1)=40 \iff u^2-5u-36=0 \iff u=\frac{5\pm 13}{2}=\left[\begin{array}{l}-4,\\ 9.\end{array}\right.$$

Так как $u=z^2\geqslant 0$[1)], корень $u=-4$ отбрасываем, и для переменной z получаем единственное уравнение: $z^2=9 \Leftrightarrow z=\pm 3$. Соответственно этому $x=z-3=\pm 3-3$, откуда $x=0$ или $x=-6$.

Ответ: $x=0,\ -6$. □

[1)]Внимание! Здесь появляется идея *замены с ограничением* на значения новой переменной. Эта идея будет весьма существенна в гл. 5.

Заметим, что в последнем примере можно было бы в самом начале догадаться и сгруппировать сомножители $x+1$ и $x+5$, $x+2$ и $x+4$ еще в исходном уравнении $(*)$: получится уравнение

$$(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)=40, \qquad (**)$$

в котором можно сделать *очевидную замену* $x^2+6x=y$ (или же $x^2+6x+5=v$ — это уже зависит от нашего желания), тем самым сразу *понизив степень* уравнения. Однако успех при таком способе решения тоже обусловлен справедливостью равенства $1+5=2+4$, эквивалентного симметричности четверки точек 1, 2, 4, 5 (или, соответственно, $x+1$, $x+2$, $x+4$, $x+5$) на числовой оси.

2.4.3. Метод разложения. Поиск рациональных корней

При использовании метода замены мы увеличивали число решаемых уравнений, но при этом понижали их степени. Другой способ понизить степень при решении полиномиальных уравнений, а к ним сводятся любые рациональные алгебраические уравнения, — это их *разложение на множители*. В этом и состоит ***метод разложения*** *для решения полиномиальных уравнений*.

Допустим, что левую часть полиномиального уравнения $p_n(x)=0$ степени n удается разложить на два сомножителя *меньшей* степени, т. е. представить в виде произведения $p_k(x)p_m(x)$, где $\deg p_k(x)=k>0$ и $\deg p_m(x)=m>0$ (так как $k+m=n$, отсюда уже следует, что $k,m<n$). Тогда степени решаемых уравнений немедленно понижаются:

$$p_n(x)=0 \iff p_k(x)p_m(x)=0 \iff p_k(x)=0 \lor p_m(x)=0.$$

Заметим, что если *в общем случае* при решении разложенных уравнений вида $AB=0$ к уравнениям $A=0$ и $B=0$ необходимо приписать ограничения на области определения сомножителей (см. п. 1.1.4, пример 1.1.4 и далее), то *в данном случае* никаких ограничений на переменную x накладывать не нужно: полиномиальные функции *определены всюду*.

Многочлены степени $n>0$, представимые в виде произведения двух многочленов меньшей степени, называются ***приводимыми***, а *не представимые* — ***неприводимыми***. Приводимые многочлены

являются аналогом *составных* целых чисел, неприводимые — аналогом простых чисел. Указанная аналогия простирается весьма далеко, и о ней еще будет идти речь в конце этого параграфа.

Теперь вопрос в том, *как разложить* тот или иной полином. Один из методов разложения полиномов был рассмотрен в § 2.1. Он состоит в вынесении в полиноме $p_n(x)$ за скобку (т. е. выделении в качестве сомножителя) линейного множителя вида $x - x_0$, где x_0 — какой-нибудь корень полинома. Тогда можно записать, что

$$p_n(x) = 0 \iff (x - x_0)p_{n-1}(x) = 0 \iff x = x_0 \ \vee \ p_{n-1}(x) = 0,$$

так что степень уравнения понижается на единицу.

Возможность вынесения отвечающего корню линейного бинома гарантируется *теоремой о делимости* из § 2.1 (п. 2.1.5, следствие 2 из теоремы Безу). Задача сводится к тому, как найти *хотя бы один* корень данного полинома. Вообще говоря, для *произвольных* полиномов эта задача практически невыполнимая. В случае же полиномов *с рациональными или целыми коэффициентами* можно найти даже *все* их *рациональные* корни, *если они есть*, причем это можно сделать простым *перебором*! Заметим, что любое полиномиальное уравнение с рациональными (дробными) коэффициентами эквивалентно уравнению с целыми коэффициентами, получающемуся домножением исходного уравнения на общий знаменатель всех его коэффициентов. Сформулируем утверждение, которое *дает возможность найти все* ***рациональные корни полиномиальных уравнений с целыми коэффициентами***, *если они есть*.

Теорема 10 (*о рациональных корнях целочисленных многочленов*). *Если* ***несократимая*** *дробь* $x_0 = \dfrac{p}{q}$ *является корнем полиномиального уравнения с целыми коэффициентами,*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_k \in \mathbb{Z},$$

то числитель дроби p является делителем свободного члена a_0 полинома, а знаменатель q — делителем старшего коэффициента a_n.

Идея доказательства этой теоремы проста. Сначала подставим гипотетический рациональный корень (дробь) в уравнение:

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0,$$

теперь избавимся от знаменателей, домножив обе части получившегося равенства на q^n. Мы придем к целочисленному равенству[1)]

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

из которого следует *равенство целых чисел*

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n.$$

Очевидно, левая часть этого равенства делится на число p (число p *можно вынести за скобку*!), поэтому и число $a_0 q^n$, стоящее в правой части, делится на p. По предположению о несократимости дроби $\frac{p}{q}$ числа p и q, а значит, и числа p и q^n не имеют общих множителей (делителей), т. е. *взаимно простые*. Таким образом, произведение целых чисел $a_0 \cdot q^n$ делится на p, причем второй сомножитель q^n и число p взаимно просты, ***поэтому*** первый сомножитель a_0 *должен* делиться на p. Следовательно, числитель p (несократимого) рационального корня уравнения с целыми коэффициентами является делителем свободного члена a_0 этого уравнения.

Аналогичным образом, только исходя из равенства

$$a_n p^n = -a_{n-1} p^{n-1} q - \ldots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n,$$

устанавливается, что знаменатель q должен являться делителем старшего коэффициента a_n уравнения. ■

Применяется эта теорема совсем просто. Отметим, что и числитель, и знаменатель дроби $x_0 = \frac{p}{q}$ можно считать натуральными, поставив знак перед само́й дробью. Если уравнение имеет хотя бы один рациональный корень, то он обязательно находится среди дробей вида

$$f_{ik} = \pm \frac{p_i}{q_k},$$

где числа p_i суть *все возможные натуральные делители свободного члена* a_0, считая единицу и само число a_0, а числа q_k — *все возможные натуральные делители старшего коэффициента* a_n (считая единицу и сам коэффициент a_0). Тех и других всегда конечное число, так что и набор возможных «кандидатов» f_{ik} в рациональные корни рассматриваемого уравнения конечен. Остается проверить, является ли каждое из чисел f_{ik} корнем, подставляя их в уравнение, причем сократимые дроби проверять не нужно (согласно условию теоремы).

[1)] То есть соотношению между *целыми* числами.

Если нам повезет, и мы найдем какой-то рациональный корень полинома (уравнения), то в случае кубических уравнений задачу отыскания всех корней можно считать решенной: после вынесения линейного множителя останется квадратичный множитель, и кубическое уравнение будет равносильно совокупности линейного и квадратного уравнений. Однако, что делать, если проверки всех чисел f_{ik} проваливаются? — Ничего не поделаешь: значит, *уравнение рациональных корней не имеет*.

Например, для уравнения $x^3 + 3x + 1 = 0$ кандидатами в рациональные корни будут только $x = \pm 1$ (и p, и q должны быть делителями единицы), но оба эти числа не удовлетворяют уравнению. Следовательно, рациональных корней нет, но только рациональных: по теореме 2 (о существовании корней многочленов нечетной степени) хотя бы один корень у рассматриваемого уравнения есть, и в данном случае — только один, так как левая часть уравнения возрастает на всей числовой оси. Но он иррационален! И его можно даже выписать: согласно п. 2.3.5, в данном случае единственный корень записывается формулой Кардано, в которой

$$A = 3, B = -1 \implies \Delta = \frac{5}{4} \implies x_0 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}}.$$

2.4.4. Применение теоремы о рациональных корнях к решению уравнений

Нахождение одного корня для кубических многочленов и уравнений полностью решает задачу — после этого они сводятся к квадратным (и, конечно, линейным, отвечающим вынесенным за скобку биномам $x - x_0$). В случае полиномов и уравнений степени 4 обнаружение одного корня еще недостаточно: останется решение получающегося кубического уравнения.

Пример 2.4.3. Решим уравнение

$$(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 5) = 40 \qquad (*)$$

из примера 2.4.2 непосредственно, т. е. раскроем скобки и посмотрим, нельзя ли решить получающееся уравнение четвер-

той степени. Иногда такой прямой («лобовой») подход приводит к цели.

Заметим, даже не раскрывая скобок, что *свободный член* левой части уравнения (∗) равен 40 (он равен произведению $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40$). Значит, он *взаимно уничтожится* с правой частью уравнения, так что в «окончательном» уравнении четвертой степени свободный член будет *нулевым*: за скобку сразу выносится сомножитель x и остается решить кубическое уравнение. Таким образом, вроде бы «игра стоит свеч»!

Некоторые хлопоты, конечно, доставляет раскрытие скобок. По существу, это делается так же, как при выписывании системы уравнений Виета (п. 2.2.7). Коэффициент при x^3 равен сумме всех свободных членов биномов: $a_3 = 1 + 2 + 4 + 5 = 12$. Коэффициент при x^2 равен сумме всех *попарных произведений* свободных членов биномов: этих попарных произведений ровно $\mathbf{C}_4^2 = 4 \cdot 3 : 2 = 6$ штук, и

$$a_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 2 + 4 + 5 + 8 + 10 + 20 = 49.$$

Наконец, коэффициент при x равен сумме всех *произведений по три* свободных члена, которых $\mathbf{C}_4^3 = 4$ штуки:

$$a_1 = 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 = 8 + 10 + 20 + 40 = 78.$$

Свободный член мы уже нашли: $a_0 = 40$, — так что

$$\begin{aligned}(*) &\iff x^4 + 12x^3 + 49x^2 + 78x + 40 = 40 \iff \\ &\iff x^4 + 12x^3 + 49x^2 + 78x = 0 \iff \\ &\iff x(x^3 + 12x^2 + 49x + 78) = 0 \iff \\ &\iff x = 0 \ \vee \ x^3 + 12x^2 + 49x + 78 = 0.\end{aligned}$$

Итак, один корень найден: $x = 0$, — и осталось «всего лишь» решить кубическое уравнение

$$x^3 + 12x^2 + 49x + 78 = 0. \qquad (**)$$

Мы не знаем никаких других способов решения кубических уравнений, кроме «угадывания корней», основанного на теореме 1 о рациональных корнях целочисленных многочленов. Согласно этой теореме, если уравнение (∗∗) имеет рациональный корень x_0, представляющийся в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, то числитель этой дроби p — делитель свободного члена $c_0 = 78$ уравнения (∗∗), а знаменатель q, который можно

считать натуральным числом, — делитель старшего коэффициента этого уравнения, равного единице. Следовательно, для q получается единственная возможность: $q = 1$. А вот для числителя p возможностей весьма много. Разложим число 78 на простые множители — как обычно, последовательным выделением простых множителей: $78 = 2 \cdot 39 = 2 \cdot 3 \cdot 13$. Делителями этого числа будут 1, 2, 3, 13, 78 и всевозможные попарные произведения простых множителей 2, 3, 13, которых всего $\mathbf{C}_3^2 = 3$ штуки: $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 13 = 26$, $3 \cdot 13 = 39$. Учитывая, что числитель дроби может быть отрицательным, получаем 16 возможных «кандидатов» на роль числителя, а раз знаменатель обязан равняться 1, то и на роль самого́ рационального корня x_0 уравнения (**):

$$x_0 = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \pm 13,\ \pm 26,\ \pm 39,\ \pm 78. \qquad (***)$$

Мы перечислили *в принципе возможные* значения рациональных корней в порядке возрастания их модулей, но это еще не всё!

Теперь нужно *проверить* возможные значения рациональных корней — вообще говоря, всех шестнадцати, — *подстановкой* в уравнение (**). При подобных проверках нужно использовать особенности конкретных уравнений с тем, чтобы сократить вычисления. В данном случае все коэффициенты кубического многочлена $p_3(x)$, записанного в левой части уравнения, положительны. Следовательно, при любом значении $x > 0$ значения $p_3(x)$ положительны, поэтому все положительные значения из списка (***) можно отбросить. Остается 8 возможностей, из которых вариант $x_0 = -1$ также можно отбросить, не проверяя: первые три коэффициента многочлена $p_3(x)$, т. е. числа 1, 12 и 49, никак не смогут «компенсировать» свободный член $c_0 = 78$, т. е. взаимно уничтожиться с ним — так, чтобы получился нуль. Далее по очереди проверяем числа $x_0 = -2,\ -3,\ -6,\ \ldots$. Стоп! Дойдя до значения $x_0 = -6$, мы увидим, что оно удовлетворяет уравнению:

$$-6^3 + 12 \cdot 6^2 - 49 \cdot 6 + 78 = 6(-36 + 72 - 49 + 13) = 6(-85 + 85) = 0.$$

Следовательно, в многочлене $p_3(x)$ выносится за скобку линейный сомножитель $x - x_0 = x + 6$. Это можно сделать любым из описанных в § 2.1 способов: группировкой членов, делением

уголком, методом Руффини—Горнера. Воспользуемся последним: заполнив таблицу

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 12 & 49 & 78 \\ \hline \alpha=-6 & 1 & ? & ? & ? \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 12 & 49 & 78 \\ \hline \alpha=-6 & 1 & 6 & 13 & 0 \end{array},$$

получаем коэффициенты квадратичного сомножителя: 1, 6, 13. Следовательно,

$$(**) \Leftrightarrow (x+6)(x^2+6x+13)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+6=0 \vee x^2+6x+13=0 \Leftrightarrow x=-6,$$

ибо дискриминант квадратного уравнения, очевидно, отрицателен (четверть дискриминанта равна $D_* = \frac{b^2}{4} - ac = 3^2 - 13 < 0$). Вспоминая, что ранее был найден корень $x = 0$, выписываем ***ответ***: $\{0, -6\}$ (на этот раз ради разнообразия мы записали ответ в теоретико-множественном виде — указали *множество* решений уравнения). Вот теперь всё.

Хотя такое решение, в конечном счете, привело к ответу, оно оказалось весьма трудоемким. □

Из приведенного решения видно, насколько более коротким было решение методом замены из примера 2.4.2. В разделе «Упражнения» мы покажем, каким образом можно сократить перебор различных возможностей для рациональных корней уравнений с целыми коэффициентами.

При попытках решить таким методом уравнение степени 4 и выше (а они нередко оказываются удачными) приходится по очереди выносить отвечающие найденным рациональным корням линейные множители — до тех пор, пока не останется квадратичный множитель. Разумеется, в общем случае это не всегда осуществимо. Во-первых, на каком-то шаге может получиться многочлен, вовсе не имеющий корней, а в таком многочлене нельзя выделить *никакой линейный множитель* (объясните). Во-вторых, может оказаться, что корни у многочлена есть, но *рациональных* корней нет. В первом случае нужно искать способ доказательства, что корней нет, а во втором — искать какой-то другой способ решения. Такие «другие» способы будут приведены ниже: в конце этого параграфа и в гл. 4. Сейчас же разберем еще два примера, не такие «длинные», как предыдущий.

Пример 2.4.4. Рациональными корнями уравнения

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

могут быть только дроби $\frac{p}{q}$, где p — целый делитель свободного члена $a_0 = -1$, т. е. $p = 1$ или -1, а q — натуральный делитель старшего коэффициента $a_3 = 2$, т. е. $q = 1$ или 2. Для дроби $x_0 = \frac{p}{q}$ получаем всего четыре возможности:

$$x_0 = \frac{p}{q} = \frac{1}{1}, \ \frac{-1}{1}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{-1}{2}.$$

Проверяем эти четыре числа:

1) $x = 1 \implies 2x^3 + 3x^2 - 1 = 2 + 3 - 1 = 4 \neq 0$;

2) $x = -1 \implies 2x^3 + 3x^2 - 1 = -2 + 3 - 1 = 0\,(!)$;

значит, один корень найден, и уравнение уже может быть решено. Однако продолжим проверку:

3) $x = \frac{1}{2} \implies 2x^3 + 3x^2 - 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 = 0\,(!)$;

4) $x = -\frac{1}{2} \implies 2x^3 + 3x^2 - 1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{2} \neq 0$.

Таким образом, мы нашли даже *два* рациональных корня данного уравнения: $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{1}{2}$. Им соответствуют множители $x - x_1 = x + 1$ и $x - x_2 = x - \frac{1}{2}$, которые можно выделить в левой части уравнения. Для его полного решения достаточно вынести любой из этих множителей. Для разнообразия вынесем множитель, отвечающий дробному корню, т. е. $x - \frac{1}{2}$. Но чтобы не возиться с дробями, выделим всё-таки не $x - \frac{1}{2}$, а другой, пропорциональный этому двучлен $2(x - \frac{1}{2}) = 2x - 1$, имеющий целые коэффициенты. На сей раз применим метод группировки слагаемых:

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = (2x^3 - x^2) + (4x^2 - 1) = (2x - 1)(x^2 + 2x + 1) = \\ = (2x - 1)(x + 1)^2.$$

Итак, получается, что рациональными корнями $\frac{1}{2}$ и -1 и исчерпываются все корни данного уравнения.

Ответ: $x = -1, \frac{1}{2}$. □

Пример 2.4.5. Возможностей для рациональных корней уравнения

$$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = 0$$

всего две: в соответствующих несократимых дробях $\frac{p}{q}$ и числитель p, и знаменатель q суть делители единицы, так что рациональный корень есть либо $x_0 = 1$, либо $x_0 = -1$. Ни одно из этих значений не удовлетворяет уравнению: соответствующие значения левой части $p_8(x)$ уравнения равны $p_8(1) = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$ и $p_8(-1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$. Следовательно, данное уравнение *не имеет рациональных корней*.

Задаваясь вопросом, а есть ли вообще корни у этого уравнения, нетрудно заметить, что отрицательных корней многочлен $p_8(x)$ не имеет: при любом $x < 0$ все входящие в $p_8(x)$ одночлены принимают положительные значения, поэтому $p_8(x) > 0$. То же самое можно сказать о значениях многочлена $p_8(x)$ при $x > 1$: тогда $x^8 > x^5$, $x^2 > x$, поэтому опять $p_8(x) > 0$. Поскольку значения $x = 0$ и $x = 1$ не являются корнями уравнения, то остается выяснить, могут ли удовлетворять уравнению числа $x \in (0, 1)$. Для этого запишем:

$$p_8(x) = (1 - x) + (x^2 - x^5) + x^8 > 0,$$

так как в случае $0 < x < 1$ выполнены неравенства $1 - x > 0$, $x^2 - x^5 > 0$. Таким образом, многочлен $p_8(x)$ положителен при всех значениях x и *корней не имеет*.

Ответ: $\varnothing$, или «*нет решений*». □

Хотя в принципе случай, когда полином не имеет корней, вовсе не редкость, обычно[1)] задачи со столь неожиданно-экстравагантным ответом не предлагают, или в формулировке задачи сразу дается ответ: «*Докажите, что уравнение не имеет решений*». Однако фактически та же самая задача из примера 2.4.5 может быть приведена и в стандартной *проблемной* формулировке: «*Решите неравенство* $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$» (тогда *ответ* уже будет отнюдь не «проблемным»: $-\infty < x < +\infty$, или «x *любое*», или $x \in \mathbb{R}$, или просто «$\mathbb{R}$»).

[1)] В задачниках, на экзаменах, на конкурсных испытаниях (при поступлении в вузы).

2.4.5. Применение теоремы о корнях к числовым задачам

Прежде чем обратиться еще к одному приему решения уравнений методом разложения, покажем, как теорема 10 из п. 2.4.3 помогает решать задачи на установление иррациональности (или, напротив, рациональности) тех или иных чисел.

Если какое-то число α является корнем полинома, не имеющего рациональных корней, то отсюда можно сделать вывод, что *число α иррационально*. На этом простом соображении основано доказательство иррациональности самых разных чисел, заданных как числовые выражения.

Воспроизведем стандартное доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$, восходящее к школе Пифагора и Платону. Оно использует свойства четности, т. е. делимости на 2. Именно, допустив, что данное число рационально, запишем его как *несократимую* дробь, $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Тогда число $m^2 = 2n^2$ четно, поэтому m четно, $m = 2k$, откуда $4k^2 = 2n^2$ и $n^2 = 2k^2$ тоже четно, поэтому и n четно, и дробь $\frac{m}{n}$ оказывается *сократимой* — **противоречие**.

Аналогичным образом, используя свойства делимости на 3, можно доказать иррациональность числа $\sqrt{3}$. Но сейчас в нашем распоряжении гораздо более мощный способ доказательства иррациональности не только $\sqrt{3}$, но многих более сложных числовых выражений.

Пример 2.4.6. Для числа $\alpha = \sqrt{3}$ значение $\alpha^2 = 3$, т. е. это число удовлетворяет полиномиальному уравнению $x^2 - 3 = 0$ с целыми коэффициентами. По теореме о рациональных корнях целочисленных уравнений из рациональных чисел ему могут удовлетворять только несократимые дроби $x_0 = \frac{p}{q}$, числитель которых p является целым делителем трех, т. е. $p = \pm 1$ или ± 3, а знаменатель q — натуральный делитель единицы, т. е. $q = 1$. Но ни одно из этих чисел $x_0 = \pm 1, \pm 3$ не удовлетворяет указанному уравнению: значения левой его части равны $p_2(\pm 1) = 1 - 3 = -2 \neq 0$ и $p_2(\pm 3) = 9 - 3 = 6 \neq 0$. *Следовательно, число $\alpha = \sqrt{3}$ иррационально.* □

Еще раз: число, удовлетворяющее уравнению, про которое известно, что у него нет рациональных корней, заведомо должно быть иррациональным.

Заметим, что точно так же, как для кубического многочлена $p_3(x) = x^3 + 12x^2 + 49x + 78$ из примера 2.4.3, в общем случае из теоремы о рациональных корнях целочисленных уравнений выводится, что *если приведенный многочлен* $p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ *с целыми коэффициентами имеет рациональный корень* $x_0 = \frac{p}{q}$, *то этот корень* ***целый*** и, более того, является делителем свободного члена a_0 (если дробь $\frac{p}{q}$ несократима, то ее знаменатель q — натуральный делитель единицы, т. е. $q = 1$; числитель же p является делителем a_0). В частности, рациональными корнями многочленов вида $p_n(x) = x^n - m$, где m — какое-то натуральное число, могут быть только целые числа. Если целое число p является корнем этого многочлена или уравнения $x^n - m = 0$, то $m = p^n$, т. е. число m является *полной n-й степенью* (степенью натурального числа). Отсюда вывод: *если число m* ***не*** *является полной n-й степенью, то корень n-й степени из этого числа, т. е. число* $\alpha = \sqrt[n]{m}$, *является иррациональным*. В самом деле, число α является корнем соответствующего полинома $x^n - m$, ибо $\alpha^n = m$, а в данном случае полином рациональных (а значит, целых) корней не имеет. Таким образом, мы получили весьма сильный результат. Так, для квадратных корней (случай $n = 2$) среди чисел $\sqrt{m}$, $m \in \mathbb{N}$, являются рациональными только корни из чисел $1, 4, 9, 16, 25, \dots$; значит, например, числа $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ иррациональны. При $n = 3$ получаем вывод об иррациональности всех кубических корней из натуральных чисел, кроме корней из чисел $1, 8, 27, 64, 125, \dots$, и т. д.

Пример 2.4.7. Докажем иррациональность числа $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Иногда предлагают такое «доказательство»: раз числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ иррациональны, то и их сумма $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррациональна. Это рассуждение не верно. Например, числа $2 - \sqrt{2}$ и $\sqrt{2} - 1$ иррациональны (объясните, почему), а их сумма равна 1, т. е. является не только рациональным, но даже целым числом.

С этой целью последовательным возведением в квадрат избавимся от радикалов (знаков корня):

$$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \implies \alpha^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{6} \iff \alpha^2 - 5 = 2\sqrt{6} \implies$$
$$\implies (\alpha^2 - 5)^2 = 24 \iff \alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0.$$

Значит, число α является корнем многочлена $p_4(x) = x^4 - 10x^2 + 1$. Старший коэффициент и свободный член этого многочлена равны единице, поэтому его возможными рациональными корнями могут быть только числа $x_0 = \pm 1$. Однако $p_4(\pm 1) = 1 - 10 + 1 = -8 \neq 0$, поэтому рассматриваемый многочлен рациональных корней не имеет и, следовательно, число $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррационально, что мы и хотели установить. □

Заметим, что процедуру освобождения от радикалов в этом примере можно остановить на первом шаге: получается соотношение $2\sqrt{6} = \alpha^2 - 5$, и если бы число α было рациональным, то и число $2\sqrt{6}$ было бы таковым, в противоречие с иррациональностью числа $\sqrt{6}$ (она была доказана раньше!). Это замечание позволяет и в других случаях не гнаться за полным освобождением от радикалов и не выписывать уравнения слишком высокой степени.

Пример 2.4.8. Число $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$ иррациональное, ибо, предположив противное, мы приходим в противоречие с уже доказанной иррациональностью числа $\sqrt{3}$:

$$\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} \iff \alpha^3 = 2 + \sqrt{3} \iff \sqrt{3} = \alpha^3 - 2.$$

При полном освобождении от радикалов мы получили бы уравнение шестой степени. □

Пример 2.4.9. Докажем иррациональность числа $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$. Конечно, от одного из радикалов, квадратного или кубического, нужно освобождаться — перенести другой радикал в левую часть и возвести в квадрат или в куб, соответственно. Избавляться от квадратного радикала смысла нет, так как в получающееся уравнение опять войдут два радикала: кубические $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{4}$. Уединим кубический радикал и возведем обе части соотношения $\sqrt[3]{2} = \alpha - \sqrt{3}$ в куб. Получим:

$$2 = \alpha^3 - 3\alpha^2\sqrt{3} + 3\alpha \cdot 3 - 3\sqrt{3} \iff (\alpha^3 + 9\alpha) - (3\alpha^2 + 3)\sqrt{3} = 2 \iff$$

$$\iff (3\alpha^2 + 3)\sqrt{3} = \alpha^3 + 9\alpha - 2 \iff \sqrt{3} = \frac{\alpha^3 + 9\alpha - 2}{3\alpha^2 + 3}$$

(мы имеем право произвести деление, ибо при любом значении α выражение $3\alpha^2 + 3 > 0$ отлично от нуля). Из последнего соотношения выводим, что если бы число α было рациональным, то таким было бы и число $\sqrt{3}$, а это не так. Значит, число α иррационально, что и требовалось установить. □

Пример 2.4.10. Выясним, рациональным или нет является число

$$\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}. \qquad (*)$$

Заметим, что из иррациональности квадратного корня $\sqrt{5}$, как и в примере 2.4.8, выводится, что каждое из слагаемых R_1, R_2 в сумме $(*)$ является числом иррациональным[1]. Что же можно сказать о сумме кубических радикалов R_1 и R_2?

Запишем уравнение, которому удовлетворяла бы сумма $\alpha = R_1 + R_2$. Это делается точно так же, как в п. 2.3.4: возведением суммы в куб с использованием формулы $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Получаем, что

$$\alpha^3 = R_1^3 + R_2^3 + 3R_1R_2(R_1+R_2) =$$

$$= (2+\sqrt{5}) + (2-\sqrt{5}) + 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\,\alpha = 4 + 3\sqrt[3]{-1}\alpha = 4 - 3\alpha$$

(после возведения в куб мы заменили сумму радикалов $R_1 + R_2$, записанную в скобках, на равное ей число α). Следовательно, число $\alpha = R_1 + R_2$ удовлетворяет соотношению $\alpha^3 = 4 - 3\alpha$, т. е. является корнем кубического уравнения $x^3 + 3x = 4$.

Однако один корень получающегося уравнения очевиден: это $x_0 = 1$. При этом левая часть уравнения является строго возрастающей на всей числовой оси функцией, поэтому *больше корней нет*. А раз число α *является* корнем, то $\alpha = x_0 = 1$!

Итак, мы не только выяснили, будет ли данная сумма радикалов числом рациональным или иррациональным, а установили, что она равна единице.

Конечно, в формуле, задающей число α, нетрудно узнать *формулу Кардано* для полученного кубического уравнения (см. п. 2.3.4). Вот так изобретаются довольно изысканные задачи. □

В следующем примере используется формула для косинуса тройного угла. Напомним ее:

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.$$

Пример 2.4.11. Докажем иррациональность числа $\alpha = \cos 20^\circ$. Для записи алгебраического уравнения, которому

[1] На самом деле число радикалов в выражениях для $R_{1,2}$ можно уменьшить — данные двойные радикалы записываются как $R_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ — проверьте!

заведомо удовлетворяет α, воспользуемся тем, что утроенный угол в 20° равен 60°, а косинус 60°, как известно, равен $\frac{1}{2}$. Записываем:

$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ = 4\alpha^3 - 3\alpha \implies 8\alpha^3 - 6\alpha - 1 = 0.$$

Таким образом, рассматриваемое число является корнем кубического многочлена $p_3(x) = 8x^3 - 6x - 1$.

По теореме о рациональных корнях многочленов в данном случае такими могут быть только числа

$$x_0 = \pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{1}{8}.$$

Можно проверить все эти восемь возможностей и убедиться, что наш полином $p_3(x)$ рациональных корней не имеет. Для доказательства иррациональности числа $\alpha = \cos 20^\circ$ есть гораздо более короткий путь. Во-первых, заметив, что $\alpha > 0$, сразу отбросим все отрицательные возможности: даже если какая-нибудь из них осуществляется, т. е. у полинома есть отрицательный рациональный корень, он не может равняться числу α. Далее, $\alpha = \cos 20^\circ < 1$, так что значение $x_0 = 1$ проверять тоже не нужно. Наконец, $20^\circ < 60^\circ$, поэтому $\alpha = \cos 20^\circ > \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; значит, и значение $x_0 = \frac{1}{2}$, и еще меньшие значения $x_0 = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ проверять не нужно — *ничего проверять не нужно*! Проведенные *рассуждения* показывают, что полином $p_3(x)$ *на интервале* $(\frac{1}{2}, 1)$ *не имеет ни одного рационального корня*, а поскольку число $\alpha = \cos 20^\circ$ является корнем этого полинома, лежащим на указанном интервале, это число иррационально, что и требовалось установить[1]. □

Оказывается, *косинус и синус любого рационального числа градусов, заключенного в интервале между* 0° *и* 90°, *суть числа иррациональные*, за двумя исключениями: $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Однако доказать этот факт не так уж просто. В «Упражнениях» приведен ряд конкретных простых задач на доказательство иррациональности значений тригонометрических выражений, некоторые из которых непосредственно (с использованием стандартных тригонометрических формул) сводятся к иррациональности числа из примера 2.4.11.

[1] Иначе: можно в уравнении $p_3(x) = 0$ сделать замену $2x = z$, тогда ... (продолжите!).

2.4.6. Разложение методом неопределенных коэффициентов

Продемонстрируем *метод неопределенных коэффициентов* на конкретном примере.

Пример 2.4.12. Пусть требуется решить уравнение

$$x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = 0. \qquad (*)$$

Не понятно, как здесь можно применить метод замены. Легко проверить также, что ни одно из чисел $x_0 = \pm 1, \pm 3$, которые в принципе могли бы быть рациональными корнями уравнения $(*)$, ему не удовлетворяют: если $p_4(x)$ — левая часть уравнения, то $p_4(1) = -12$, $p_4(-1) = 4$, $p_4(3) = 36$, $p_4(-3) = 84$. Следовательно, ранее рассмотренные методы для данного уравнения непригодны. А поскольку многочлен $p_4(x)$ принимает и положительные, и отрицательные значения ($p_4(1) < 0$, $p_4(-1) > 0$), по *теореме о промежуточном значении* (§ 2.1, теорема 1) он где-то обращается в нуль, т. е. заведомо имеет корни. Как же их отыскать?

Из отсутствия рациональных корней следует, что выделить в левой части уравнения линейный множитель вида $x - \frac{p}{q}$ или линейный множитель $q(x - \frac{p}{q}) = qx - p$ с целочисленными коэффициентами *нельзя*. Попробуем выделить *квадратичный* множитель, т. е. *разложить* полином $p_4(x)$ на квадратичные множители — представить его в виде

$$p_4(x) = x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = (x^2 + ax + b)(x^2 + px + q).$$

Раскрыв скобки в гипотетическом разложении полинома, т. е. записав

$$x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = x^4 + (a+p)x^3 + (ap + b + q)x^2 + (aq + bp)x + bq,$$

приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и свободные члены. Получим систему

$$\left\{\begin{aligned} a + p &= 0, && (1)\\ ap + b + q &= -2, && (2)\\ aq + bp &= -8, && (3)\\ bq &= -3 && (4) \end{aligned}\right. \qquad (**)$$

четырех уравнений с четырьмя неизвестными — *неопределенными коэффициентами* a, b, p, q. Если решать эту систему *общими методами* (подстановками выражений из одного уравнения в другое и т. д.; методы решения систем мы рассмотрим в гл. 4), то в конце концов ее решение сведется к решению уравнения степени 4, похожего на исходное уравнение ($*$) или совпадающего с ним (попробуйте!). Так что общий подход к системе ($**$) бесперспективен. Попытаемся решить эту систему *в целых числах* — вдруг да повезет.

Начать лучше всего с уравнения (4), так как оно имеет *конечное число* — всего четыре — целочисленных решений:

$$(b, q) = (1, -3), (-1, 3), (3, -1), (-3, 1).$$

Следовательно, решение всей системы ($**$) в целых числах сводится к *конечному перебору*. Заметим, что при этом последние две пары решений $(3, -1)$ и $(-3, 1)$ можно не рассматривать, поскольку они получаются из двух первых пар перестановкой коэффициентов b и q, отвечающей перестановке сомножителей в разложении $p_4(x)$.

Далее, зная b и q, проще всего найти a и p из *линейных* (по переменным a и p) уравнений (1) и (3), а потом просто проверить выполнение уравнения (2) подстановкой найденных значений a, b, p, q в это уравнение. Итак, разбираем два случая.

Случай 1: $b = 1$, $q = -3$. Коэффициенты a и p удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a + p = 0, & (1) \\ -3a + p = -8. & (3) \end{cases}$$

Из уравнения (1) $p = -a$, и после подстановки этого выражения в уравнение (3) находим: $-3a + p = -4a = -8$, поэтому $a = 2$ и, соответственно, $p = -2$. Подставим значения $a = 2$, $p = -2$, $b = 1$, $q = -3$ в левую часть уравнения (2) системы ($**$):

$$ap + b + q = -4 + 1 - 3 = -6 \neq -2.$$

Так как уравнение (2) не выполняется, первая из наших возможностей отпадает. Но не будем отчаиваться: ведь осталась еще одна возможность!

Случай 2: $b = -1$, $q = 3$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} a + p = 0, & (1) \\ 3a - p = -8 & (3) \end{cases}$$

находим: $p = -a$, $3a - p = 4a = -8$, $a = -2$, $p = 2$. Проверяем уравнение (2):

$$ap + b + q = -4 - 1 + 3 = -2,$$

что и требуется.

Значит, если взять $a = -2$, $b = -1$, $p = 2$, $q = 3$, то система уравнений (**) выполнена, а поэтому левая часть исходного уравнения (*) разлагается на соответствующие квадратичные множители:

$$p_4(x) = x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x + 3).$$

Таким образом,

$$(*) \iff x^2 - 2x - 1 = 0 \ \vee \ x^2 + 2x + 3 = 0.$$

Первое квадратное уравнение имеет корни $1 \pm \sqrt{2}$, второе — корней не имеет (его дискриминант $D = 4 - 12 < 0$). Тем самым исходное уравнение (*) решено.

Ответ: $x = 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$. □

Заметим, что найдя разложение полинома $p_4(x)$, его можно проверить, просто раскрыв скобки. Можно представить дело и так, как будто вы осуществили подходящую группировку слагаемых:

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2 - 8x - 3 &= (x^4 - 2x^3 - x^2) + (2x^3 - 4x^2 - 2x) + (3x^2 - 6x - 3) = \\ &= x^2(x^2 - 2x - 1) + 2x(x^2 - 2x - 1) + 3(x^2 - 2x - 1) = \\ &= (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x - 1). \end{aligned}$$

Ну а в действительности вы всё-таки действуете описанным в примере 2.4.12 приемом *решения системы условий на коэффициенты разложения в целых числах с помощью перебора* — он и называется в данном случае ***методом неопределенных коэффициентов***. Разумеется, может оказаться и так, что указанная система целочисленных решений не имеет[1]. В таком случае придется искать другие пути решения уравнения.

Вопрос о разложении полиномов в произведение многочленов меньших степеней, затронутый в этом и предыдущих параграфах, весьма важен в алгебре — хотя бы потому, что он связан с решением

[1] Например, так будет при попытке разложить этим же методом многочлена $p_4(x) = x^4 + 1$, который вообще-то, как мы знаем (см. п. 2.3.6), разлагается: $p_4(x) = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.

полиномиальных уравнений. В арифметике (в *теории чисел*) есть близкий вопрос о разложении чисел. Как известно, любое натуральное число $n \geqslant 2$ либо простое, либо представляется в виде произведения простых, далее уже не разложимых чисел. Аналогичным образом, любой многочлен степени $n \geqslant 1$ либо *неприводим*, т. е. не представим в виде произведения многочленов меньших степеней (к таким относятся, например, все линейные двучлены), либо разлагается в произведение неприводимых, т. е. далее уже не разложимых многочленов. Какие же многочлены (кроме линейных) являются неприводимыми? Как может выглядеть разложение многочлена на неприводимые сомножители?

Ответ на эти непростые вопросы дал в начале XIX в. великий немецкий математик *Карл Фридрих Гаусс*. Оказывается, что, в отличие от совокупности простых чисел, совокупность неприводимых многочленов $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ может быть полностью указана, описана. Именно, неприводимыми являются только линейные многочлены (возможно, со свободным членом 0) и квадратичные многочлены с отрицательным дискриминантом. Все же остальные полиномы (за исключением констант — многочленов нулевой степени) представляются в виде произведения указанных неприводимых многочленов, причем единственным образом (с точностью до числовых множителей и порядка сомножителей).

* * *

В заключение этой главы отметим, что в § 3.1 следующей главы, посвященном *дробно-рациональным алгебраическим уравнениям*, будет рассмотрен еще один частный, но часто встречающийся вид полиномиальных уравнений: *возвратные уравнения* (с их частными случаями — *симметрическими* и *кососимметрическими* уравнениями). Их решение требует манипуляций именно с дробно-рациональными функциями. Кроме того, в гл. 4–5 в связи с системами рациональных уравнений и иррациональными уравнениями рассматривается связанный с такими задачами специфический и красивый *метод итераций*, применимый и к некоторым полиномиальным уравнениям (см. п. 4.4.5).

Упражнения

1. Пусть многочлен $p_n(x) = (x+1)^n$ записан в стандартном виде

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Чему равна сумма его коэффициентов

$$S = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_k + \ldots + a_1 + a_0\,?$$

2. Ответьте на этот же вопрос для следующих многочленов:

1) $q_n(x) = (x-1)^n$;
2) $p_{2n}(x) = (x^2 - x + 1)^n$;
3) $q_{2n}(x) = (x^2 - 3x + 1)^n$;
4) $p(x) = (x^5 - 5x^3 - 2x^2 + 7)^{100}$;
5) $q(x) = (2x^5 - 5x^3 - 2x^2 + 2)^{100}(4x^5 - 5x^3 - 3x + 4)^{17}$;
6) $s(x) = (2x-1)^m + (x^2 + x - 1)^n$.

[*Композиция многочленов.*] Кроме арифметических действий, над двумя многочленами $p(x)$ и $q(x)$ можно осуществить и «действие композиции»: подставив в многочлен $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ вместо переменной x второй многочлен $q(x)$, получим новый многочлен,

$$P_{(q)}(x) = a_n\big(q(x)\big)^n + \cdots + a_0,$$

называемый композицией многочленов $p(x)$ и $q(x)$ и обозначаемый, как и композиция функций, $p \circ q$ (или $(p \circ q)(x)$).

3. Как связана степень композиции со степенями исходных многочленов?

4. Как вычислить свободный член композиции двух многочленов?

5. Чему равна сумма всех коэффициентов в стандартной записи композиций двух многочленов $p(x) = x^{10} - 5x^5 + 3x + 1$ и $q(x) = 5x^7 - 3x^4 - 3$, взятых в том и в другом порядках (т. е. композиций $p \circ q$ и $q \circ p$)?

6. Докажите, что совокупности $\mathbb{Q}[x]$ и $\mathbb{Z}[x]$ многочленов с рациональными и с целыми коэффициентами замкнуты по отношению к операции композиции (т. е. композиция многочленов с рациональными или целыми коэффициентами всегда являются многочленами с такими же — рациональными или целыми — коэффициентами).

7. Укажите все возможные рациональные корни следующих многочленов:

1) $p_{17}(x) = 2x^{17} + \ldots - 2$;
2) $p_{17}(x) = 2x^{17} + \ldots + 3$;
3) $p_7(x) = 2x^7 + \ldots - 3$;
4) $p_{13}(x) = 2x^{13} + \ldots + 15$;

5) $p_{13}(x) = 4x^{13} + \ldots - 15$;
6) $p_{17}(x) = 4x^{17} + \ldots + 15$

(точками обозначены «промежуточные» входящие в многочлен одночлены, имеющие *целые* коэффициенты). Могут ли многочлены указанного вида иметь одновременно *все* перечисленные корни (при подходящем выборе промежуточных одночленов)?

8. Докажите следующую теорему, уточняющую теорему о рациональных корнях многочленов: *если* ***несократимая*** *дробь* $x_0 = \frac{p}{q}$ *является корнем полиномиального уравнения с целыми коэффициентами,*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_k \in \mathbb{Z},$$

то при любом целом значении m *число* $p - mq$ *является делителем значения полинома в точке* m*, т. е. делителем числа* $P(m)$.

Наводящее соображение. Если дробь $x_0 = \frac{p}{q}$ является корнем полинома $P(x)$, то дробь $x_1 = x_0 - m = \frac{p}{q} - m = \frac{p - mq}{q}$ является корнем полинома $Q(x) = P(x + m)$.

9. Найдите все рациональные корни следующих уравнений:

1) $x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0$;
2) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$;
3) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24 = 0$;
4) $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4 = 0$;
5) $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1 = 0$;
6) $6x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$.

(*Замечание.* Перебор всех возможностей для рациональных корней целочисленных полиномов может быть сокращен за счет использования теоремы из упр. 8.)

10. Найдите *все* корни многочлена $p_4(x) = 2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21$.

11. Докажите, что если значения многочлена $p(x)$ с целыми коэффициентами в точках 0 и 1 (т. е. числа $p(0)$ и $p(1)$) оба нечетны, то этот многочлен не имеет целых корней.

12. Выясните, при каких значениях a данные многочлены $p(x)$ делятся на двучлен $x + 1$:

1) $p(x) = ax^2 + 2x + a$;
2) $p(x) = ax^3 + 3x + a$;
3) $p(x) = ax^4 + 4x + a$;
4) $p(x) = 6x^4 + ax^2 + a$;
5) $p(x) = x^5 - 5x^4 + 3a$;
6) $p(x) = x^6 - 5x^4 + 4a^2$.

Аналогично делению с остатком любого многочлена на линейный двучлен, произвольный многочлен $p_n(x)$ можно разделить на квадратный трехчлен $d_2(x)$, т. е. записать p_n в виде

$$p_n(x) = q_{n-2}d_2(x) + r(x), \qquad (*)$$

где остаток $r(x)$ имеет степень, *меньшую* степени делителя $d_2(x)$, т. е. $\deg r(x) < 2$. Доказать возможность такого представления проще всего *методом математической индукции* по степени многочлена $p_n(x)$. Считая, для простоты, квадратный трехчлен приведенным, т. е. имеющим вид $d_2(x) = x^2 + ax + b$, запишем для старшего одночлена данного многочлена степени $n \geqslant 2$:

$$a_n x^n = a_n x^{n-2}(x^2 + ax + b) - a_n a x^{n-1} - b a_n x^{n-2}. \qquad (**)$$

Если $n = 2$, то это представление имеет вид $(*)$ (*база индукции*). Для степеней $n > 2$ тождество $(**)$ позволяет записать исходный многочлен в виде $p_n(x) = a_n x^{n-2} d_2(x) + p_m(x)$, где степень «остаточного многочлена» $m < n$. Поэтому, если предположить возможность представления вида $(*)$ для многочленов степени $m < n$, то из нее выводится представимость в таком виде и многочленов степени n (*шаг индукции*).

13. Проведите деление с остатком многочлена $p(x)$ на квадратичный многочлен $d_2(x)$, если:

1) $p(x) = 2x^2, \quad d_2(x) = x^2 + x + 1;$
2) $p(x) = x^2, \quad d_2(x) = 2x^2 + x + 1;$
3) $p(x) = x^3 + 1, \quad d_2(x) = x^2 + 1;$
4) $p(x) = x^4, \quad d_2(x) = x^2 - 1;$
5) $p(x) = x^4 - 1, \quad d_2(x) = x^2 - 1;$
6) $p(x) = x^5, \quad d_2(x) = x^2 - 1.$

14. Докажите, что неполное частное q_{n-2} и остаток $r(x)$ от деления многочлена $p_n(x)$ на квадратный трехчлен $d_2(x)$ (т. е. представления в виде $(*)$) *определяются однозначно*.

Указание. Как в доказательстве теоремы Безу, приравняйте два представления вида $(*)$ и докажите сначала, что остатки должны быть одинаковыми (используйте, что степени остатков не превосходят 1).

15. Остатки от деления какого-то многочлена $p(x)$ на двучлены $x - 1$ и $x + 1$ равны 1 и 3, соответственно. Найдите остаток от деления этого многочлена на квадратный многочлен $d_2(x) = x^2 - 1$.

16. Найдите остаток от деления многочлена $p(x)$ на квадратный трехчлен $x^2 - 3x + 2$, если известно, что остатки от его деления на двучлены $x - 1$ и $x - 2$ равны 2 и 3, соответственно.

17. Используя алгоритм Руффини—Горнера, осуществите деление с остатком многочлена $p(x)$ на двучлен $b(x) = x - \alpha$ в случаях:

1) $p(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 1, \quad b(x) = x + 4;$
2) $p(x) = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 3, \quad b(x) = x - 2;$
3) $p(x) = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81, \quad b(x) = x + 3;$
4) $p(x) = 3x^6 - 5x^4 + 2x^3 - x + 4, \quad b(x) = x + 1;$
5) $p(x) = x^5 + 1, \quad b(x) = x + 1;$
6) $p(x) = x^7 - 1, \quad b(x) = x - 1.$

18. Докажите, что совокупность $\mathbb{Q}[x]$ многочленов с рациональными коэффициентами замкнута по отношению к делению с остатком на двучлены: если многочлен с рациональными коэффициентами разделить с остатком на двучлен $ax + b$ с рациональными коэффициентами, то и неполное частное, и остаток будут иметь рациональные коэффициенты.

19. Верно ли, что совокупность $\mathbb{Z}[x]$ многочленов с целыми коэффициентами замкнута по отношению к делению с остатком на двучлены вида $ax + b$ с целыми коэффициентами?

20. Докажите, что совокупность $\mathbb{Z}[x]$ многочленов с целыми коэффициентами замкнута по отношению к делению с остатком на двучлены вида $x - \alpha$ при целом α.

21. Определите кратность корня x_0 многочлена $p(x)$ в следующих случаях:

1) $p(x) = x^6 - 4x^4 - 16x^2 + 64, \quad x_0 = 2;$
2) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36, \quad x_0 = -2;$
3) $p(x) = x^4 + 4x^3 - 18x^2 + 20x - 7, \quad x_0 = 1;$
4) $p(x) = x^5 - x^4 - 14x^3 - 26x^2 - 19x - 5, \quad x_0 = -1;$
5) $p(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1, \quad x_0 = 1;$
6) $p(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16, \quad x_0 = -2.$

22. При каких значениях параметра c корень $x_0 = -1$ многочлена $p_5(x) = x^5 + cx^2 + cx + 1$ является кратным (т. е. имеющим кратность $\nu \geqslant 2$)?

23. При каких значениях a и b многочлен $p_{n+1}(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$ будет делиться на $(x - 1)^2$? (Здесь n — данное натуральное число.)

24. Докажите, что при натуральном $n \geqslant 2$ многочлен

$$p_{2n}(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$$

имеет число $x_0 = 1$ корнем кратности $\nu \geqslant 3$.

25. Докажите, что если все коэффициенты многочлена $p(x)$ целые, то при любых целом m и натуральном $d \geqslant 2$ (целое) число $p(m + d) - p(m)$ делится на d.

26. Докажите, что каков бы ни был многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, отличный от константы, существует бесконечно

много натуральных значений переменной x, в которых значения многочлена являются составными числами.

Комментарий. Из утверждения этой задачи следует, что не существует целочисленного многочлена, дающего при всех натуральных значениях переменной только простые числа. В этой связи напомним интересный пример: *многочлен Эйлера* $p_2(x) = x^2 + x + 41$ при значениях $x = 0, 1, 2, \ldots, 39$ дает различные простые числа, однако $p_2(40) = 40(40 + 1) + 41$ делится на 41.

27. Докажите, что *не существует* многочлена $p(x)$ с целыми коэффициентами, который при первых натуральных значениях переменной $x = 1, 2, 3$ принимал бы значения $p(1) = 2$, $p(2) = 3$, $p(3) = 5$, равные трем первым простым числам.

28. Докажите, что если число $2^n - 1$ простое, то и число n простое.

Указание. Рассуждайте от противного: предположив, что число n составное, докажите, что тогда и число $2^n - 1$ составное.

29. Докажите, что если число $2^n + 1$ простое, то n — степень двух.

Указание. Опять рассуждайте от противного: если число n не является степенью числа 2, то оно представляется в виде $n = 2^m \cdot n_1$, где $m \geqslant 0$, а число $n_1 > 1$ нечетное. Используя этот факт, покажите, что тогда и число $2^n + 1$ составное.

30. Докажите, что если значения двух приведенных многочленов степени n в n различных точках равны (совпадают), то сами многочлены равны (покоэффициентно).

31. Докажите, что через любые n точек координатной плоскости, никакие две из которых не лежат на одной вертикали, *проходит* график *единственного* приведенного многочлена степени n.

32. Докажите, что для любого n существует такой многочлен $P(x)$ с *рациональными* коэффициентами, что его значения в n первых натуральных точках $x = k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, суть первые n простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ($P(k) = p_k$; простые числа нумеруются в порядке возрастания: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $p_6 = 13$, $p_7 = 17$, и т. д.).

Комментарий. Согласно утверждению задачи 27, в случае $n \geqslant 3$ подобного многочлена с *целыми* коэффициентами *не существует*. *Вопрос*: а что будет в случае $n = 2$?

33. Используя *интерполяционную формулу Лагранжа*, найдите многочлен $p(x)$ наименьшей степени, удовлетворяющий условиям:

1) $p(4) = 13, p(5) = 21, p(-3) = 13$;
2) $p(0) = 1, p(1) = 5, p(-1) = 1, p(2) = 31, p(3) = 121$;
3) $p(0) = 5, p(1) = 4, p(-1) = 8, p(-2) = 13, p(4) = 13, p(6) = 29$.

Интерполяционная формула Лагранжа всем хороша, но неудобна в том случае, когда к n условиям интерполяции добавляется еще

одно, $p(x_{n+1}) = y_{n+1}$: приходится пересчитывать все вспомогательные многочлены. Этого недостатка нет у *интерполяционной формулы Ньютона*, имеющей вид

$$p(x) = \\ = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + A_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}).$$

Коэффициенты $A_0, A_1, \dots, A_n$ вычисляются последовательной подстановкой в формулу условий интерполяции $p(x_k) = y_k$. При $k = 0$ получаем, что $p(x_0) = A_0 = y_0$, при $k = 1$ — что $p(x_1) = A_0 + A_1(x_1 - x_0) = y_1$, откуда находится коэффициент A_1, и т. д. до коэффициента A_n.

34. Каким образом изменится формула Ньютона при добавлении еще одного условия интерполяции, $p(x_{n+1}) = y_{n+1}$?

35. Используя *интерполяционную формулу Ньютона*, найдите многочлен $p(x)$ наименьшей степени, удовлетворяющий условиям:

1) $p(0) = 2, p(1) = 3, p(3) = 11, p(-2) = 6$;
2) $p(3) = 1, p(5) = 2, p(1) = 0, p(-1) = -1$;
3) $p(0) = -1, p(1) = p(-1) = 0, p(2) = p(-2) = 15$.

36. Запишите в стандартном виде полностью разложимые приведенные многочлены, имеющие указанные полные наборы корней:

1) $<1, -1, -1>$;
2) $<1, 2, -1, -1>$;
3) $<1, 1, -1, -1, -1>$.

37. Покажите, что следующие многочлены являются *полностью разложимыми*, и запишите для них полные наборы корней:

1) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36$;
2) $p(x) = x^4 + 4x^3 - 18x^2 + 20x - 7$;
3) $p(x) = x^5 - x^4 - 14x^3 - 26x^2 - 19x - 5$.

38. Покажите, что следующие многочлены *не являются* полностью разложимыми:

1) $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 6$;
2) $p(x) = x^6 - 4x^4 - 16x^2 + 64$;
3) $p(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1$.

39. Исходя из основной формулы Виета для многочленов 4-й степени,

$$x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),$$

запишите систему Виета для корней уравнений степени 4.

Задачи по комбинаторике

В большинстве приводимых ниже задач нужно, самое главное, придумать *разумный метод перебора* всех возможностей.

40. Сколько различных трехзначных чисел можно составить:

1) перестановками цифр числа 173;
2) из трех различных цифр, входящих в запись числа 1234;
3) из трех различных ненулевых десятичных цифр?

41. Сколько существует различных:

1) двузначных чисел;
2) четных двузначных чисел;
3) двузначных чисел, не делящихся на 5?

42. Сколько существует различных:

1) трехзначных чисел;
2) нечетных трехзначных чисел;
3) трехзначных чисел, не делящихся на 10?

43. Сколько различных мелодий из трех нот (т. е. *последовательностей*) можно сочинить, используя семь нот (*до, ре, ми, фа, соль, ля, си*), если:

1) все три ноты должны быть разными;
2) если ноты могут быть и одинаковыми (например, «*ля—ля—ля*» — мелодия!);
3) если первая и последняя ноты не должны быть одинаковыми?

44. Ско́льким автомобилям можно дать различные номера вида «XXX-xx-xx» из трех букв русского алфавита (буквы «Ё», «Ь» и «Ъ» использовать нельзя) и четырех цифр? Хватит ли номеров, если считать, что каждый из 150 миллионов жителей России имеет автомобиль?

45. Сколько существует различных последовательностей:

1) из двух нулей или единиц;
2) из трех нулей или единиц;
3) из четырех нулей или единиц;
4) из пяти нулей или единиц?
5) из восьми нулей или единиц[1)];
6) из n нулей или единиц?

46. Ско́лькими различными способами можно осветить комнату, если в ней:

1) две лампочки;

[1)] Вы, наверное, хорошо знаете, как называются такие последовательности? — Конечно, это *байты*.

2) три лампочки;
3) пять лампочек;
4) n лампочек?

(Каждая лампочка может гореть или не гореть. Когда ни одна лампочка не горит — это тоже способ освещения!)

47. На улице пять светофоров, каждый из которых может находиться в одном из трех состояний: гореть красным, желтым или зеленым светом. Сколькими способами можно зажечь все светофоры?

48. Сколько существует различных подмножеств в множестве:

1) $\{A, B\}$ из двух элементов;
2) $\{A, B, C\}$ из трех элементов;
3) $\{A, B, C, D\}$ из четырех элементов;
4) $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ из n элементов?

(Пустое множество и само данное множество также считаются подмножествами данного множества.)

49. Сколько различных натуральных делителей, считая 1 и само число, имеют указанные числа n:

1) $n = 6$;
2) $n = 30$;
3) $n = 210$;
4) $n = 9$;
5) $n = 12$;
6) $n = 18$?

50. Решите ту же задачу для чисел вида

1) $n = p^\alpha$;
2) $n = p \cdot q$;
3) $n = p^\alpha q$;
4) $n = p^\alpha q^\beta$,

где p, q — различные простые числа, а показатели $\alpha, \beta \geqslant 2$.

51. Сколькими нулями оканчиваются десятичные записи чисел:

1) $10!$;
2) $20!$;
3) $100!$?

52. Найдите количество различных делителей числа $10!$.

53. Выпишите общую формулу для вычисления числа $\tau(n)$ всех (натуральных) делителей числа n по его разложению на простые множители:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

где все p_i — *различные* простые делители числа n, а показатели $\alpha_i \geqslant 1$.

54. Сколькими способами можно рассадить учащихся одного класса, если присутствует 17 учеников, а мест 20?

55. Сколькими способами 7 человек можно усадить:

1) в ряд (на скамейку);
2) в кружок (за круглый стол — или расставить в хороводе, если существен только порядок следования по кругу)?

56. Решите ту же задачу, если дополнительно требуется, чтобы:

1) Петя сидел на краю скамейки;
2) Петя и Вова сидели на скамейке рядом;
3) Петя и Вова сидели за круглым столом рядом.

57. На дискотеку пришли 15 девочек и 15 мальчиков. Сколькими способами они могут разбиться на 15 пар «мальчик—девочка»?

58. У мамы три яблока и две груши. В каждый из пяти дней она выдает Вовочке по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

59. На кухне 5 лампочек. Сколькими способами можно осветить кухню так, чтобы горело:

1) 2 лампочки;
2) 3 лампочки?

60. В поход на лодках отплывают пятеро. Сколькими способами они могут рассесться в две лодки: двухместную и трехместную?

61. Сколько существует фортепианных аккордов из трех нот, если используются:

1) только пять черных клавиш первой октавы;
2) только семь белых клавиш первой октавы;
3) все двенадцать клавиш первой октавы;
4) все 88 клавиш?

62. В течение недели папа моет посуду четыре дня, а мама — три дня. Сколькими способами они могут распределить дни недели?

63. В отряде из 10 скаутов нужно выбрать четырех человек в разведку, причем одного из них назначить командиром. Сколькими различными способами это можно сделать?

64. Команду из 15 человек нужно разбить:

1) на две группы из 8 и 7 человек;
2) на три пятерки;
3) на пять троек.

Сколькими способами это можно сделать?

65. В классе 10 мальчиков и 15 девочек. Сколькими способами можно выбрать из них совет, состоящий из трех мальчиков и трех девочек?

66. В классе 20 учеников. Сколькими способами их можно:

1) рассадить на 10 двухместных парт;
2) разбить на 10 пар?

67. Сколько существует трехэлементных подмножеств в множестве:

1) из пяти элементов;
2) из n элементов?

68. Чему равны суммы чисел сочетаний:

1) $\mathbf{C}_3^0 + \mathbf{C}_3^1 + \mathbf{C}_3^2 + \mathbf{C}_3^3$;
2) $\mathbf{C}_5^0 + \mathbf{C}_5^1 + \mathbf{C}_5^2 + \mathbf{C}_5^3 + \mathbf{C}_5^4 + \mathbf{C}_5^5$;
3) $\mathbf{C}_n^0 + \mathbf{C}_n^1 + \mathbf{C}_n^2 + \ldots + \mathbf{C}_n^{n-1} + \mathbf{C}_n^n$?

69. Докажите, что произведение любых n последовательных натуральных чисел делится на число $n!$ (например, произведение $m(m+1)(m+2)$ всегда делится на число $6 = 3!$, а произведение $m(m+1)(m+2)(m+4)$ делится на число $24 = 4!$, каково бы не было натуральное число m).

70. Докажите, что если число p простое, то число сочетаний $\mathbf{C}_p^k$ при любом k от 1 до $p-1$ делится на p.

71. В пространстве даны n точек $A_1, \ldots, A_n$, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Сколько существует:

1) отрезков с концами в данных точках;
2) векторов, начала и концы которых суть данные точки;
3) незамкнутых n-звенных ломаных с концами в данных точках;
4) замкнутых n-звенных ломаных с концами в данных точках?

72. На одной из двух параллельных прямых даны n точек $A_1, \ldots, A_n$, на другой — m точек $B_1, \ldots, B_m$. Сколько точек попарного пересечения имеют отрезки A_iB_k, если известно, что никакие три из них не проходят через одну точку?

73. При тех же условиях найдите число различных треугольников с вершинами в данных точках.

74. Чему равно число точек попарного пересечения диагоналей выпуклого n-угольника?

75. У мамы пять апельсинов, три яблока и две груши. В каждый из десяти дней она выдает Вовочке по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

76. Сколькими способами 12 участников похода могут расселиться:

1) по двум шестиместным палаткам;
2) по трем четырехместным палаткам;
3) по четырем трехместным палаткам;
4) по шести двухместным палаткам;
5) по трем палаткам на 3, 4 и 5 человек;

6) по трем палаткам на 3, 3 и 6 человек?

Рассмотрите два случая: когда одинаково-местные палатки неразличимы, и когда они различаются — скажем, цветом.

77. Сколькими способами множество из 12 элементов можно разбить:

1) на два подмножества — из 4 и 8 элементов;
2) на два подмножества из 6 элементов;
3) на три подмножества — из 3, 4 и 5 элементов;
4) на три подмножества — из 3, 3 и 6 элементов;
5) на три подмножества из 4 элементов;
6) на четыре подмножества из 3 элементов;
7) на четыре подмножества — два из 2 элементов и два из 4 элементов?

78. Сколько различных слов можно составить перестановками букв указанных слов:

1) АББА;
2) АБАК;
3) ЗОЛОТО;
4) ПАПАХА;
5) МАТЕМАТИКА;
6) АБРАКАДАБРА;
7) АМАЗОНКА;
8) МИССИСИПИ?

79. Сколько различных слов, состоящих не менее, чем из двух букв, можно составить из букв, входящих в слово:

1) СОН;
2) СЛОН;
3) ЖАБА;
4) ПЕТУХ;
5) ШАЛАШ;
6) НАЛЕВО;
7) ЕРАЛАШ;
8) ПАНАМА;
9) ПИКНИК?

(Каждую букву можно использовать в количестве, не большем того, сколько раз она встречается в слове.)

80. Сколькими способами данное натуральное число n можно представить в виде суммы k натуральных слагаемых, если:

1) n произвольное, $k = 2$;
2) $n = 10$, $k = 3$;
3) $n = 17$, $k = 3$;
4) n произвольное, $k = 3$;
5) $n = 17$, $k = 4$;

6) $n = 100$, $k = 4$;
7) n произвольное и $k \leqslant n$ произвольное ($k \geqslant 2$)?

(Порядок слагаемых считается существенным, так что, например, $10 = 4 + 6$ и $10 = 6 + 4$ — *разные* разбиения.)

81. Докажите, что при любом натуральном n:

1) число $n^3 - n$ делится на 3;
2) число $n^5 - n$ делится на 5;
3) число $n^7 - n$ делится на 7;
4) если число p простое, то число $n^p - n$ делится на p.

Указание (к п. 4): воспользуйтесь методом математической индукции и утверждением задачи 70.

Комментарий. Утверждение п. 4 последней задачи называется «*Малой теоремой Ферма*», названной так в отличие от «*Большой*» или «*Великой*» теоремы Ферма (об отсутствии при $n \geqslant 2$ отличных от нулевого решений уравнения $x^n + y^n = z^n$ в целых числах), сформулированной еще в XVII в. и доказанной только в 1994–95 гг.

82. Докажите, что при любом n

$$\mathbf{C}_n^0 + \mathbf{C}_n^2 + \mathbf{C}_n^4 + \ldots = \mathbf{C}_n^1 + \mathbf{C}_n^3 + \mathbf{C}_n^5 + \ldots .$$

Указание. Рассмотрите знакопеременную алгебраическую сумму

$$\mathbf{C}_n^0 - \mathbf{C}_n^1 + \mathbf{C}_n^2 - \mathbf{C}_n^3 + \mathbf{C}_n^4 - \ldots .$$

Степень какого выражения так записывается?

83. Найдите, чему равны левая и правая части равенства из предыдущей задачи.

84. Допустим, в выражении $(x + y + z)^n$ раскрыты скобки и приведены подобные члены. Запишите одночлен (от x, y, z), содержащий произведение $x^k y^m$ (вместе с коэффициентом!).

85. Исходя из результата предыдущей задачи, запишите формулы для степеней трехчлена $x + y + z$:

1) для $(x + y + z)^2$;
2) для $(x + y + z)^3$;
3) в общем случае — для $(x + y + z)^n$.

86. Сделайте в данном уравнении линейную замену $x - \alpha = z$ (откуда $x = z + \alpha$) так, чтобы коэффициент одночлена, следующего за старшим членом, стал равным нулю:

1) $x^3 + 6x^2 - 10x + 5 = 0$;
2) $x^4 - 12x^3 - 8x^2 + 10x - 24 = 0$;
3) $x^5 + 10x^4 - 5x^2 - 24x + 1 = 0$.

87. Используя метод Руффини—Горнера, в данных многочленах сделайте указанные линейные замены:

1) $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad x - 1 = z;$
2) $p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 6, \quad x + 1 = z;$
3) $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad x + 1 = z;$
4) $p(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1, \quad x - 1 = z;$
5) $p(x) = x^5 + x^4, \quad x - 1 = z;$
6) $p(x) = x^5, \quad x + 1 = z.$

88. Докажите формулу

$$\mathbf{C}_{n+1}^k = \mathbf{C}_n^k + \mathbf{C}_n^{k-1}, \qquad (*)$$

используя общие формулы для чисел сочетаний — формулы (3) или (4) из п. 2.2.4.

89. Запишите в формуле $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b)$ левую часть и первый сомножитель в правой части в соответствии с формулами Ньютона для степеней бинома — через биномиальные коэффициенты $\mathbf{C}_{n+1}^k$ в левой части и $\mathbf{C}_n^m$ — в правой. Затем раскройте скобки в правой части и приведите подобные члены. Наконец, сравните получившиеся коэффициенты в правой части с соответствующими коэффициентами в левой части — что получилось? — А получилось, конечно, еще одно доказательство формулы $(*)$ для биномиальных коэффициентов. И еще одно доказательство содержится в следующей задаче.

90. Допустим, нам известны количества B_m m-элементных подмножеств множества $M_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ из n элементов (и больше ничего! Забудем — на время — о числах сочетаний). Добавим к множеству M_n какой-то $(n+1)$-й элемент a_0 и подсчитаем число B'_m m-элементных подмножеств нового множества $M_{n+1} = M_n \cup \{a_0\}$ при m от 1 до n. Эти подмножества могут быть двух типов: не содержащие новый элемент и содержащие его. Следовательно, число B'_m получается сложением ... Каких чисел?

Глава 3

Рациональные алгебраические уравнения и неравенства

§ 3.1. Рациональные алгебраические уравнения

3.1.1. Рациональные алгебраические выражения и задачи

Пусть из чисел (числовых констант) и переменных составляется некоторое выражение. Если при этом разрешается применять только четыре арифметических действия (сложение, вычитание, умножение и деление), то полученное при этом выражение называется ***рациональным алгебраическим***. Различают два типа рациональных алгебраических выражений — *целые* и *дробные*, или *дробно-рациональные*.

Целые рациональные алгебраические выражения получаются из чисел и переменных только действиями сложения, вычитания и умножения (исключается действие *деления*). Такие выражения называются также ***многочленами*** или ***полиномами*** от соответствующих переменных. Многочлены от одной переменной[1)] рассматривались в предыдущей главе. Аналогично тому, как многочлен от одной переменной x записывается в виде суммы одночленов $a_k x^k$ от x, многочлен, скажем, от двух переменных x и y записывается в виде суммы одночленов $a_{k,m} x^k y^m$ от x и y (коэффициенты $a_{k,m}$ суть числа). Подробнее случай двух и большего числа переменных рассматривается в гл. 4.

Дробно-рациональные алгебраические выражения определяются как получающиеся из чисел и переменных с использованием *всех четырех* арифметических действий: сложения, вычитания, умножения и, *непременно*, деления. Такие выра-

[1)] А также некоторые многочлены от n переменных: многочлены $s_m(x_1, \ldots, x_n)$, через которые записываются уравнения системы Виета (см. п. 2.2.7).

жения после преобразований[1)] могут приводиться как к целым рациональным алгебраическим, так и к *стандартному виду* частного двух многочленов: в случае одной переменной — к виду

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P, Q \in \mathbb{R}[x], \ \deg Q > 0$$

(напомним, что через $\mathbb{R}[x]$ обозначается совокупность всех многочленов от x с действительными коэффициентами, а $\deg p$ — степень многочлена $p(x) \in \mathbb{R}[x]$).

Алгебраические задачи (т. е. *уравнения, неравенства, системы, совокупности задач*), в которые входят только рациональные алгебраические выражения, называются ***рациональными алгебраическими задачами***.

Стандартный вид рационального алгебраического уравнения

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \quad P, Q \in \mathbb{R}[x], \tag{1}$$

причем многочлен в знаменателе может быть и константой. *Общая схема решения рационального алгебраического уравнения* вида (1) — эквивалентный переход к смешанной системе:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \iff \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Далее остается ***решить*** *уравнение* и ***проверить*** *выполнение неравенства*.

Степень полинома $P(x)$, получающегося после приведения рационального алгебраического уравнения к стандартному виду (1), называется *степенью* этого уравнения. Из *теоремы о числе корней многочлена* (теорема 4) следует, что *число корней рационального алгебраического уравнения степени* $n \geqslant 1$ *не превосходит* n — такое уравнение обязательно имеет *конечное число корней*. Если же полином $P(x)$, получающийся в числителе, является константой, то всё зависит от константы: если она не нулевая, то решений нет вовсе, в случае же нулевой константы исходному уравнению удовлетворяют *все* действительные значения x, за исключением, возможно, какой-то

[1)] Заметим, что после преобразований ОДЗ (область допустимых значений) переменных может *расшириться*! Скажем, выражение $F = \dfrac{1}{x}$ не определено при $x = 0$, а выражение x, получающееся в результате деления 1 на F, определено всюду.

конечной совокупности значений (это корни знаменателя дроби, входящей в исходное уравнение).

Пример 3.1.1. Решим уравнение

$$1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}. \qquad (*)$$

Имеем:

$$(*) \iff 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{x-1}{x^2} = 0 \iff \frac{x^2 - 1 - (x-1)}{x^2} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{x^2 - x}{x^2} = 0 \iff \begin{cases} x^2 - x = 0, \\ x^2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-1) = 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Уравнение $x(x-1) = 0$ имеет корни $x = 0$, $x = 1$; ограничению $x \neq 0$ удовлетворяет только второй корень.

Ответ: $x = 1$. □

Итак, *в принципе* решение рационального алгебраического уравнения, приведенного к виду (1), сводится к решению полиномиального (или *целого рационального алгебраического*) уравнения $P(x) = 0$ с последующей проверкой условия $Q(x) \neq 0$. Значит, прежде всего нужно уметь решать *полиномиальные* уравнения, чему мы научились в гл. 2 (хотя это задача по крайней мере трудная, а для уравнений степени 5 и выше в общем случае в каком-то смысле и неразрешимая — см. п. 2.3.6). Обратимся к специфике дробно-рациональных алгебраических уравнений.

3.1.2. Метод замены

Вообще говоря, при решении рациональных алгебраических уравнений совсем не обязательно приводить их к «стандартному виду» (1) и действовать по «общей схеме» (2), хотя в простых случаях это и уместно. Пример такого простого случая — «линейно—дробно-линейные» уравнения:

$$kx + \frac{ax+b}{cx+d} = m \iff \begin{cases} kx(cx+d) + ax + b - m(cx+d) = 0, \\ cx + d \neq 0. \end{cases}$$

Однако, уже для уравнений вида

$$\alpha x^2 + kx + \frac{ax+b}{cx+d} = m$$

или

$$\alpha x^2 + kx + \frac{ax+b}{\gamma x^2 + cx + d} = m$$

подобные манипуляции приведут к не очень приятным уравнениям степеней 3 и 4.

Единственный вид уравнений четвертой степени, которые мы умеем решать почти непосредственно — биквадратные, очевидной заменой переменной сводящиеся к квадратным. Идея *замены переменной* — одна из основных при решении уравнений, и не только рациональных алгебраических, но и иррациональных алгебраических, и тригонометрических (и не только уравнений, но и неравенств, и систем и т. д.). Начнем с самых простых, «очевидных» замен.

Пример 3.1.2. В «квадратично—дробно-квадратичном» уравнении

$$x^2 + x + \frac{3}{x^2+x+1} = 3 \qquad (*)$$

замена просто напрашивается, но не нужно торопиться — сначала полезно подумать, какое выражение от переменной x принять в качестве новой переменной. Если положить $x^2 + x = u$, то получится уравнение

$$u + \frac{3}{u+1} = 3,$$

а если взять $x^2 + x + 1 = z$, то получится более простое[1)] уравнение:

$$z - 1 + \frac{3}{z} = 3.$$

Пойдем вторым путем, начав оформление решения с равносильного перехода по «схеме замены» из п. 2.4.2:

$$(*) \iff \begin{cases} x^2 + x + 1 = z, \\ z - 1 + \dfrac{3}{z} = 3. \end{cases} \qquad (**)$$

Далее,

$$(**) \iff \frac{z^2 - z + 3 - 3z}{z} = 0 \iff \begin{cases} z^2 - 4z + 3 = 0, \\ z \neq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff z = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 = \left[\begin{array}{l} 3, \\ 1 \end{array}\right.$$

[1)] Конечно, подобная оценка зависит от вкуса (или темперамента!).

(при последнем переходе мы опустили ограничение $z \neq 0$, ибо значение $z = 0$ *не удовлетворяет* уравнению $z^2 - 4z + 3 = 0$, так что для решений этого уравнения ограничение $z \neq 0$ *выполняется «автоматически»*; ***обратите внимание** на этот прием* — он часто укорачивает решение). Теперь решаем совокупность уравнений замены:

$$(*) \iff \left[\begin{array}{l} x^2 + x + 1 = 3, \\ x^2 + x + 1 = 1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 2 = 0, \\ x^2 + x = 0 \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} (x-1)(x+2) = 0, \\ x(x+1) = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 1 \lor x = -2, \\ x = 0 \lor x = -1. \end{array}\right.$$

Остается выписать ***ответ***: $x = 0, \pm 1, -2$ (или $\{0, 1, -1, -2\}$). □

Следующий пример предвосхищает дальнейшие обобщения.

Пример 3.1.3. В уравнении

$$x^2 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 8 \qquad (*)$$

так и хочется сгруппировать члены[1] — записать его в виде

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 8.$$

Если положить $x + \frac{1}{x} = z$, то

$$z^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \implies x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2,$$

и в данном уравнении годится соответствующая замена:

$$(*) \iff \begin{cases} x + \frac{1}{x} = z, \\ z^2 - 2 + 3z = 8. \end{cases} \qquad (**)$$

Решаем получившееся квадратное уравнение:

$$(**) \iff z^2 + 3z - 10 = 0 \iff (z+5)(z-2) = 0 \iff z = \left[\begin{array}{l} -5, \\ 2 \end{array}\right.$$

(вместо того, чтобы решать квадратное уравнение «по формулам», мы сразу увидели и записали разложение квадратного трехчлена, а затем и его корни; можно даже сказать, что мы воспользовались «методом разложения»). Далее решаем два уравнения замены, которые также сводятся к квадратным.

[1] В таких случаях лучше руководствоваться принципом: «*Если что-то очень хочется сделать, то это лучше сделать*»!

Вместо записи совокупности этих уравнений, как в предыдущем примере, на сей раз оформим решение как *разбор случаев*:

1) $z=-5;\quad x+\dfrac{1}{x}=-5 \iff \begin{cases} x^2+5x+1=0, \\ x\neq 0 \end{cases} \iff x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$;

2) $z=2;\quad x+\dfrac{1}{x}=2 \iff \begin{cases} x^2-2x+1=0, \\ x\neq 0 \end{cases} \iff (x-1)^2=0 \iff x=1;$

в первом случае мы опустили очевидную проверку условия $x \neq 0$, а во втором — просто отбросили это условие как заведомо выполняющееся (ибо, *очевидно*, $x = 0$ не является корнем уравнения; вспомните про «прием» из предыдущего примера).

Ответ: $x = 1,\ \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$. □

3.1.3. Симметрические и кососимметрические уравнения

Заметим, что если решать уравнение из примера 3.1.3 по теоретической схеме из п. 3.1.1, то получится уравнение степени 4 с ограничением:

$$x^2 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 8 \iff \begin{cases} x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Коэффициенты уравнения *симметричны* в том смысле, что при x^3 и x стоят одинаковые коэффициенты 3, а при x^4 и x^0 — одинаковые коэффициенты[1] 1 (коэффициент при x^3 роли не играет: он не нарушает симметрии, так как является «средним» — как бы «центром симметрии»).

Рассмотрим общее уравнение степени 4 с симметричными коэффициентами:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad a \neq 0. \tag{3}$$

Такие уравнения (равно как и стоящие в левой части многочлены) называются ***симметрическими***, и метод их решения подсказывается предыдущим примером. Именно, заметим, что число $x = 0$ не может удовлетворять уравнению (3), поскольку $a \neq 0$. Следовательно, обе части уравнения можно разделить на x^2, и при этом получится *равносильное* уравнение:

$$(3) \iff ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0 \iff a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

[1] Коэффициент при x^0 — это, конечно, свободный член уравнения.

Как и в ранее рассмотренном частном случае (в примере 3.1.3), последнее уравнение можно решить заменой $x + \frac{1}{x} = z$: при этом получится квадратное относительно z уравнение (запишите его).

Та же самая замена $x + \frac{1}{x} = z$ применима и в случае симметрического уравнения степени 6 (при делении обеих частей уравнения на $x^3 \neq 0$):

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \iff$$
$$\iff a\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + b\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c\left(x + \frac{1}{x}\right) + d = 0.$$

Первую скобку $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$ можно выразить через $z = x + \frac{1}{x}$ с помощью формул сокращенного умножения. Например, записывая формулу для суммы кубов, получим:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = z(z^2 - 3).$$

Можно исходить и из формулы для куба суммы, записываемой в виде $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ (это формула (13+) из п. 2.2.8):

$$z^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3z,$$

откуда, конечно, получается то же самое выражение

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z.$$

Разумеется, успех или неуспех дальнейшего зависит от того, удастся ли нам решить кубическое относительно z уравнение.

Близкий к симметрическим тип уравнений степени 4 составляют так называемые ***кососимметрические уравнения***, у которых коэффициенты при x^3 и x отличаются только знаком:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \quad (a \neq 0). \tag{4}$$

Обе части уравнения опять можно разделить на x^2:

$$(4) \iff a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

В этом случае помогает замена $x - \frac{1}{x} = y$; тогда

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2.$$

Однако если в уравнении (3) или (4) сменить знак перед свободным членом, т. е. взять $-a$ вместо a, то получающееся уравнение уже нельзя будет решить нашими заменами ($x + \frac{1}{x} = z$ или $x - \frac{1}{x} = y$).

Обобщением симметрических и кососимметрических уравнений являются *возвратные уравнения*, при решении которых осуществима замена $x + \frac{k}{x} = u$ ($k \neq 0$ — некоторое число). Запишите общий вид полиномиального уравнения степени 4, которое можно решить (после деления на x^2) такой заменой (случаи $k = 1$ и $k = -1$ отвечают как раз симметрическим и кососимметрическим уравнениям).

Можно рассматривать симметрические и кососимметрические уравнения (а также многочлены) и нечетных степеней. Кубическое *симметрическое* уравнение

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, \quad a \neq 0, \tag{5}$$

легко решается методом разложения:

$$(5) \iff a(x^3+1)+b(x^2+x)=0 \iff a(x+1)(x^2-x+1)+bx(x+1)=0 \iff$$
$$\iff (x+1)(ax^2+(b-a)x+a)=0 \iff x+1=0 \vee ax^2+(b-a)x+a=0.$$

Аналогичный подход применим и к *кососимметрическому* кубическому уравнению $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$ — разложите это уравнение самостоятельно.

Симметрическое уравнение степени 5

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

тоже допускает группировку членов — преобразование к виду

$$a(x^5 + 1) + b(x^4 + x) + c(x^3 + x^2) = 0.$$

Вторая и третья скобки имеют общий множитель $x + 1$, этот же множитель можно вынести за скобку и в выражении $x^5 + 1$: согласно формуле для разложения суммы нечетных степеней из § 2.1 (п. 2.1.6, предложение 2)

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1).$$

Следовательно, в левой части последнего уравнения можно выделить линейный множитель $x + 1$. При этом второй множитель будет симметрическим многочленом степени 4 (проверьте!), а соответствующее ему уравнение мы уже умеем решать.

§ 3.2. Рациональные алгебраические неравенства

[*Прежде чем приступить к освоению материала данного параграфа, целесообразно повторить п. 1.1.6 вводного § 1.1.*]

3.2.1. Зачем бывает нужно решать неравенства?

Неравенства, включающие переменные, нередко встречаются в прикладных задачах — они отвечают каким-либо ограничениям на рассматриваемые величины (таким, например, как ограниченность ресурсов в каком-то производстве). В математике (в математическом анализе, в алгебре) неравенства и их системы приходится решать при нахождении областей определения функций или областей допустимых значений переменных в выражениях. Например,

– функция $y = \sqrt{f(x)}$ определена в случае $f(x) \geqslant 0$,

– функция $y = \dfrac{1}{\sqrt{g(x)}}$ — в случае $g(x) > 0$,

сумма же этих функций определена на множестве решений системы неравенств $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) > 0$. Неравенства неизбежно возникают при равносильных преобразованиях иррациональных уравнений — скажем,

$$\sqrt{A} = B \iff \begin{cases} A = B^2, \\ B \geqslant 0 \end{cases}$$

(здесь A и B — выражения от переменной x). Правда, в таких случаях неравенства, как правило, не решают, а решают уравнения и подстановкой их корней в неравенства (или как-то иначе) проверяют, выполняются ли эти неравенства. Вопрос о равносильных переходах при решении иррациональных алгебраических уравнений и неравенств подробно обсуждается в гл. 5.

Неравенства приходится решать при исследовании функций на монотонность и экстремумы с помощью *производной*. Не вдаваясь в детали, отметим (на будущее), что промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$ находятся решением неравенств $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ (или же просто определением промежутков знакопостоянства производной $f'(x)$; это удобно

делать с помощью *метода интервалов*, рассмотренного в курсе алгебры в средних классах, который мы повторим ниже).

При изучении этого параграфа особое внимание нужно обратить на следующие два обстоятельства:

1) решение неравенств тесно связано с решением соответствующих этим неравенствам уравнений;

2) разложение левой части неравенства вида $F(x) \geqslant 0$ (или $\leqslant 0$, или > 0, или < 0), а в случае дробно-рационального выражения $F(x)$ — разложение числителя и знаменателя, — позволяет свести неравенство к *совокупности систем* более простых неравенств. Идея *разложения* при решении рациональных алгебраических неравенств играет более важную роль, чем метод *замены*, однако без последнего метода не обойтись при решении *неалгебраических* (трансцендентных — например, тригонометрических) неравенств.

3.2.2. Простейшие рациональные неравенства

Неравенство, в обе части которого входят только рациональные алгебраические выражения от x, называется ***рациональным алгебраическим***. При решении такого неравенства его стараются свести к *стандартным*, или *простейшим* задачам: к равносильному простейшему неравенству, к равносильной системе или совокупности систем простейших неравенств. Рассмотрим сначала сами *простейшие рациональные неравенства*.

1. *Линейные неравенства* вида $ax + b \leqslant 0$ (или < 0, $\geqslant 0$, > 0) решаются по стандартной схеме:

$$ax + b \leqslant 0 \iff ax \leqslant -b \iff \left[\begin{array}{ll} x \leqslant -\dfrac{b}{a} & \text{в случае} \quad a > 0, \\ x \geqslant -\dfrac{b}{a} & \text{в случае} \quad a < 0. \end{array}\right.$$

Некоторую трудность при решении таких неравенств или эквивалентных им может представить определение знака коэффициента a.

Пример 3.2.1. Неравенство $3\sqrt{3} \cdot x - 2 > 5x$ сначала приводим к стандартному виду:

$$3\sqrt{3} \cdot x - 2 > 5x \iff (3\sqrt{3} - 5)x > 2.$$

Коэффициент при x равен $a = 3\sqrt{3} - 5$. Чтобы определить его знак, нужно *сравнить* числа $3\sqrt{3}$ и 5, т. е. выяснить, какое

из этих чисел больше. Возводя их в квадрат, получим числа $9 \cdot 3 = 27$ и $5^2 = 25$. Так как $27 > 25$, то $3\sqrt{3} > 5$ и $a > 0$. Значит,

$$(3\sqrt{3} - 5)x > 2 \iff x > \frac{2}{3\sqrt{3} - 5} = \frac{2(3\sqrt{3} + 5)}{27 - 25} = 3\sqrt{3} + 5$$

(мы домножили числитель и знаменатель первой дроби на число $3\sqrt{3} + 5$, а потом воспользовались формулой $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$).

Ответ: $(3\sqrt{3} + 5, +\infty)$. □

Обратим внимание на графическую иллюстрацию к решению двучленного неравенства $ax + b \leqslant 0$: в ответе получается промежуток $x \leqslant x_0$ или $x \geqslant x_0$, где $x_0 = -\dfrac{b}{a}$ — корень двучлена $ax + b$ или соответствующего уравнения $ax + b = 0$. График левой части $y = ax + b$ пересекает ось Ox в точке x_0, причем справа от x_0, равно как и слева от x_0, линейная функция $y = ax + b$ *принимает значения одного знака*, в зависимости от знака коэффициента a. Точный график левой части (уравнения, неравенства ли) изображать ни к чему (мы же просто решаем неравенство), но нарисовать его «схематически», как показано на рис. 3.1, — полезно.

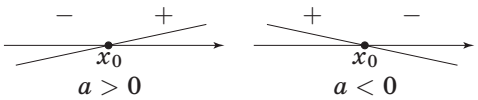


Рис. 3.1

2. *Квадратичные неравенства* вида $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ (или < 0 и т. д.) проще всего решаются с помощью схематического графика левой части, $y = ax^2 + bx + c$. Перечислим основные случаи.

1) Если дискриминант $D = b^2 - 4ac < 0$, то график не пересекает ось Ox и лежит:

выше нее в случае $a > 0$ — множество решений $M = \varnothing$ (решений нет);

ниже нее в случае $a < 0$ — множество решений $M = \mathbb{R}$ (вся числовая ось, т. е. все действительные числа; вместо $\mathbb{R}$ можно записать бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$).

2) Если дискриминант $D = b^2 - 4ac > 0$, то трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня $x_1 < x_2$, график пересекает ось

в соответствующих двух точках, и в зависимости от знака a знак $y = ax^2 + bx + c$ такой, как показано на схематических графиках (рис. 3.2; опять-таки, точные графики при решении неравенства рисовать ни к чему).

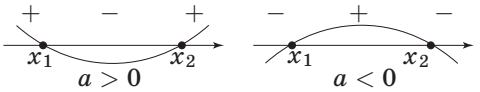


Рис. 3.2

По таким картинкам в каждом конкретном случае и выписывается ответ. Например, для нашего неравенства $ax^2 + bx + c \leqslant 0$:

– в случае $a > 0$ $x \in [x_1, x_2]$ (говорят, «x лежит *между корнями*»),

– в случае $a < 0$ $x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$ (x лежит «*за корнями*»).

Третью возможность, когда дискриминант $D = 0$, разберите самостоятельно.

Отдельно укажем на часто встречающиеся неравенства вида $x^2 \leqslant p$ или $x^2 \geqslant p$, где p — положительное число. Извлекая корень из обеих частей неравенств, получаем:

а) $x^2 \leqslant p \iff |x| \leqslant \sqrt{p} \iff -\sqrt{p} \leqslant x \leqslant \sqrt{p}$, или $x \in [-\sqrt{p}, \sqrt{p}]$;

б) $x^2 \geqslant p \iff |x| \geqslant \sqrt{p} \iff x \leqslant -\sqrt{p} \vee x \geqslant \sqrt{p}$, т. е. $x \in (-\infty, -\sqrt{p}] \cup [\sqrt{p}, +\infty)$.

3.2.3. Методы решения рациональных алгебраических неравенств

К простейшим можно было бы отнести еще один тип рациональных неравенств: *дробно-линейные неравенства*, имеющие вид

$$\frac{ax+b}{cx+d} \leqslant 0 \quad (< 0,\ \geqslant 0,\ > 0;\ \text{ конечно, } c \neq 0).$$

Их мы рассмотрим на конкретном примере, продемонстрировав при этом все стандартные *методы решения неравенств*.

Пример 3.2.2. Неравенство

$$\frac{2-x}{x+1} \leqslant 0$$

решим несколькими способами — с использованием различных подходов.

Способ 1: *сведéние к равносильной совокупности систем* линейных неравенств. Поскольку всегда

$$\frac{A}{B} \leqslant 0 \iff \begin{cases} A \leqslant 0, \\ B > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A \geqslant 0, \\ B < 0, \end{cases}$$

в данном случае получаем:

$$\frac{2-x}{x+1} \leqslant 0 \iff \textbf{(I)} \begin{cases} 2-x \leqslant 0, \\ x+1 > 0 \end{cases} \vee \textbf{(II)} \begin{cases} 2-x \geqslant 0, \\ x+1 < 0. \end{cases}$$

Решаем каждую из систем **(I)**, **(II)** с помощью «системы осей», как в примере 1.1.6, и объединяем полученные ответы в окончательный (нижняя ось на рис. 3.3).

Ответ: $x \in (-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$.

Способ 2: *сопоставление знаков числителя и знаменателя*. Чтобы дробь $\frac{A}{B}$ была неположительной (т. е. чтобы выполнялось неравенство $\frac{A}{B} \leqslant 0$), числитель A и знаменатель B дроби должны иметь *разные* знаки, или числитель должен обращаться в нуль (при ненулевом знаменателе). На двух осях схематически, как ранее на рис. 3.1, изображаем «графики» наших числителя $A = 2 - x$ и знаменателя $B = x + 1$ (рис. 3.4), отмечаем знаки A и B, а на третьей оси выбираем нужные промежутки, на которых знаки A и B различны, добавляя точку, где $A = 0$.

Остается выписать ***ответ***: $(-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$.

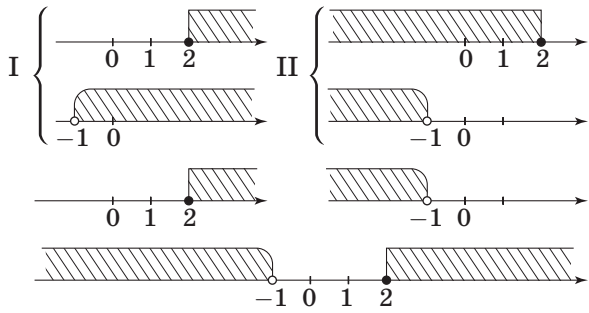


Рис. 3.3

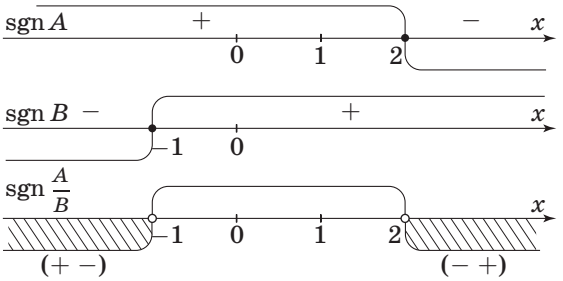


Рис. 3.4

Понятно, что изложенный способ можно применить к любому неравенству вида $R \leqslant 0$ (или $\geqslant 0$ и т. д.), где $R = \dfrac{P}{Q}$ — рациональная алгебраическая функция, числитель и знаменатель которой разложены на линейные множители. Однако даже в случае всего трех множителей числителя и знаменателя, например, при решении неравенств вида

$$\frac{A \cdot B}{C} \geqslant 0,$$

придется рассматривать *четыре* подходящие комбинации знаков: для A, B, C это $(+,+,+)$, $(+,-,-)$, $(-,+,-)$ и $(-,-,+)$. Занятие довольно утомительное. Но можно поступить иначе: заметить, что если все множители линейны, то каждый из них меняет знак только в одной точке — в той, в которой он обращается в нуль. Корни линейных множителей числителя и знаменателя разбивают ось Ox на некоторое (конечное) количество интервалов, в каждом из которых дробь *принимает значения одного знака* или, можно сказать, *сохраняет знак*. Разумеется то же самое можно заключить, используя *теорему* 1 *о промежуточном значении*: из этой теоремы следует, что если функция f определена на каком-то промежутке J, непрерывна на нем и не обращается в нуль ни в одной его точке, то f *принимает во всех точках промежутка* J *значения одного знака* (иначе говорят, что f *сохраняет знак на промежутке* J, или что J — *промежуток знакопостоянства для функции* f).

Однако в данном случае применение теоремы о промежуточном значении подобно «стрельбе из пушек по воробьям»: когда числитель и знаменатель дроби R разложены на линейные

или даже квадратичные сомножители, знакопостоянство R на каждом интервале между или «за» корнями числителя и знаменателя следует из элементарных алгебраических соображений, без привлечения мощных средств математического анализа. Тем самым мы приходим к *методу интервалов*: для решения неравенства указанного вида $R \leqslant 0$ остается проверить знак дроби R в каждом интервале, рассмотрев *значение* $R(x)$ или даже просто *знак* значения $R(x)$ в конкретной точке интервала. Напомним, как осуществляется решение методом интервалов, на том же конкретном дробно-линейном неравенстве.

Итак, **способ 3:** *использование метода интервалов*. Отмечаем на числовой оси (рис. 3.5) корни числителя ($2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$) и знаменателя ($x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$).

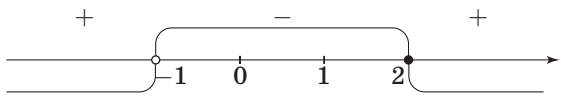


Рис. 3.5

Две отмеченные точки разбивают ось на три интервала, два из которых бесконечные. На каждом из них дробь

$$R(x) = \frac{2 - x}{x + 1}$$

принимает значения одного знака. Чтобы выяснить, каков именно знак $R(x)$ на этих интервалах, возьмем по точке $x = x_0$ в каждом из них:

– в интервале $(-\infty, -1)$ возьмем $x_0 = -2$; $R(x_0) = \frac{2-(-2)}{-2+1} = \frac{4}{-1} < 0$;

– в интервале $(-1, 2)$ возьмем $x_0 = 0$; $R(x_0) = \frac{2-0}{0+1} = \frac{2}{1} > 0$;

– в интервале $(2, +\infty)$ возьмем $x_0 = 10$; $R(x_0) = \frac{2-10}{10+1} =< 0$.

В соответствии с этим отмечаем знак R на всей оси (как показано на рис. 3.5), а затем выписываем ***ответ***. Существенно не забыть включить в него корень числителя $x = 2$, так как решаемое неравенство нестрогое. (Обратите внимание: на рис. 3.5 корни числителя и знаменателя мы отметили по-разному.)

Выяснить знак R на интервалах знакопостоянства можно и иначе: узнать (той же подстановкой или прикидкой) знак R на одном из крайних интервалов, а затем проследить, как меняется знак дроби при переходе значения переменной x через отмеченные точки. В рассматриваемом примере, скажем, возьмем $x > 2$: тогда

$$R(x) = \frac{2-x}{x+1} < 0.$$

При переходе через точку 2 (двигаясь по оси справа налево) числитель дроби меняет знак, а знаменатель не меняет, поэтому вся дробь меняет знак — в интервале $(-1, 2)$, на который мы «перешли», $R(x)$ будет иметь знак «плюс». Далее, при переходе через точку $x = -1$ (в левый бесконечный интервал) наоборот, числитель не меняет знак, а знаменатель меняет, поэтому дробь $R(x)$ сменит знак с «плюса» на «минус», так что на интервале $(-\infty, -1)$ значения $R(x) < 0$. Во многих случаях подобное рассмотрение быстрее дает «картину знаков». □

3.2.4. Сведение к системам неравенств

Хотя в предыдущем примере мы показали неоспоримые преимущества метода интервалов перед *методом сведения неравенств к равносильным совокупностям систем неравенств*, мы еще раз остановимся на последнем, ибо этот метод важен при решении неравенств со «смешанными» функциями (рациональными, иррациональными, тригонометрическими и т. д.).

Метод сведения к системам применяется к «*разложенным*» неравенствам, например,

$$AB \geqslant 0 \iff \begin{cases} A \geqslant 0, \\ B \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A \leqslant 0, \\ B \leqslant 0, \end{cases}$$

и к «*дробным*» неравенствам:

$$\frac{A}{B} > 0 \iff \begin{cases} A > 0, \\ B > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A < 0, \\ B < 0. \end{cases}$$

Вариант этого же метода — освобождение от знаменателей без приведения неравенства к стандартному виду, т. е. без переноса всех членов в одну часть и приведения к общему знаменателю. Например,

$$\frac{A}{B} \geqslant C \iff \begin{cases} B > 0, \\ A \geqslant BC \end{cases} \vee \begin{cases} B < 0, \\ A \leqslant BC. \end{cases}$$

В случае рациональных неравенств методом сведения к системам пользуются в случае, когда получающиеся в системах полиномиальные неравенства имеют степени не выше второй.

Пример 3.2.3. Следующее неравенство решим способом освобождения от знаменателей:

$$x \leqslant \frac{-6}{x-5} \iff \begin{cases} x-5>0, \\ x(x-5) \leqslant -6 \end{cases} \vee \begin{cases} x-5<0, \\ x(x-5) \geqslant -6 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x>5, \\ x^2-5x+6 \leqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<5, \\ x^2-5x+6 \geqslant 0. \end{cases}$$

Оформляем дальнейший ход решения первой и второй систем на координатных осях слева и справа на рис. 3.6:

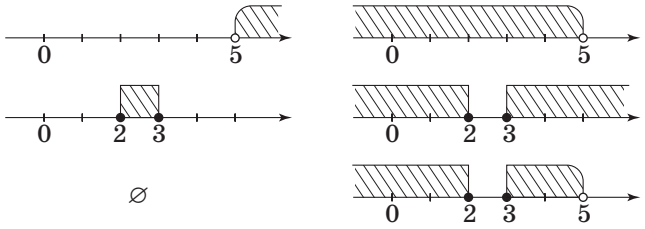


Рис. 3.6

Ответ: $(-\infty, 2] \cup [3, 5)$. □

3.2.5. Метод интервалов

Метод интервалов применяется к неравенствам после их приведения к стандартному виду

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0 \quad (\text{или } \leqslant 0, \text{ и т. д.}),$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены. Сформулируем *правила применения метода интервалов* применительно к рассматриваемой ситуации (напомним, что мы обходимся *без* теоремы о промежуточном значении).

(1) Переносим все входящие в неравенство выражения в левую часть неравенства, оставляя в правой части нуль.

(2) Приводим выражения в левой части к общему знаменателю (или просто приводим подобные члены, если дробных выражений нет).

(3) Раскладываем числитель и знаменатель на линейные и, возможно, квадратичные множители[1)] (заметим, что неразложимые квадратичные множители имеют отрицательный дискриминант и, следовательно, сохраняют знак на всей числовой оси).

(4) Отмечаем корни числителя и знаменателя на координатной оси; они разобьют ось на некоторое количество (на конечное число) интервалов, в каждом из которых левая часть сохраняет знак.

(5) Выясняем знак левой части на каждом из получающихся интервалов — либо узнав знак ее в точках, взятых по одной на каждом интервале, либо проследив за изменением знаков сомножителей числителя и знаменателя при последовательном (справа налево или слева направо по оси) переходе значения переменной через все отмеченные точки (заметим, что при переходе через некоторые из отмеченных точек знак левой части может и не меняться — так, например, знак произведения $(x-2)^2(x+3)$ не меняется при переходе через точку 2).

(6) Используя полученную картинку знаков, выписываем ответ.

Пример 3.2.4. Решим методом интервалов неравенство

$$x \leqslant 3 - \frac{1}{x-1}. \qquad (*)$$

Следуя правилам **(1)–(6)**, производим эквивалентные преобразования неравенства:

$$(*) \iff \frac{1}{x-1} + x - 3 \leqslant 0 \iff \frac{1+(x-1)(x-3)}{x-1} \leqslant 0 \iff$$
$$\iff \frac{1+x^2-4x+3}{x-1} \leqslant 0 \iff \frac{(x-2)^2}{x-1} \leqslant 0.$$

Отмечаем на оси точки $x=1$ и $x=2$ (рис. 3.7) и проставляем знак левой части.

Поскольку неравенство нестрогое, в ответ нужно включить и *изолированную* точку $x=2$.

Ответ: $(-\infty, 1) \cup \{2\}$. □

[1)] Согласно *теореме Гаусса*, упомянутой в конце предыдущего параграфа, *в принципе* это можно сделать *для любого многочлена*; другой вопрос — *как* это сделать.

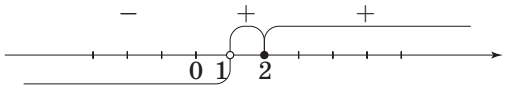


Рис. 3.7

Из правил **(1)–(6)** метода интервалов иногда трудно выполнимым, а в случае неравенств со «смешанными» функциями вообще невыполнимым, является правило **(3)**, т. е. разложение числителя и знаменателя на простые выражения (множители), а вслед за ним и правило **(4)**. Вот здесь на помощь и приходит *теорема о промежуточном значении*. Именно, если числитель $P(x)$ и знаменатель $Q(x)$ в выражении $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ являются непрерывными на своей области определения функциями, то при решении неравенств вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$$

правила **(3)–(4)** в случае всюду определенных функций можно заменить на одно новое правило:

(3А) отмечаем на координатной оси те точки, в которых либо числитель либо знаменатель дроби $R = \frac{P}{Q}$ обращается в нуль.

В общем же случае правила **(3)–(4)** модифицируются следующим образом:

(3Б) отмечаем на координатной оси те точки, в которых функция $R(x)$ обращается в нуль или не определена.

Тогда, как и для предыдущего варианта **(3А)**, будет выполнено заключение из правила **(4)** о знакопостоянстве функции на выделенных интервалах (правда, их может быть бесконечно много).

Отметим, что для рациональных алгебраических неравенств правила **(3А)** и **(3Б)** эквивалентны, но в случае, скажем, иррациональных неравенств они отнюдь не эквивалентны, и нужно будет пользоваться общим правилом **(3Б)** (см. далее § 5.2). При использовании правил **(3А)**, **(3Б)** отслеживание поведения знака левой части при переходе через отмеченные точки становится затруднительным, и придется проверять знак дроби $R(x)$ в точках, выбранных в каждом из получившихся интервалов.

3.2.6. Метод замены

Метод замены будет играть важную роль при решении неравенств других типов (тригонометрических, показательных, логарифмических), но он может несколько упростить решение и некоторых рациональных алгебраических неравенств.

Пример 3.2.5. Решим неравенство

$$(2x^2 + 11x + 6)(2x^2 + 11x + 13) > 8. \qquad (*)$$

Конечно, мы не будем раскрывать скобки и приводить неравенство к виду $p_4(x) > 0$ — вместо этого сделаем очевидную («напрашивающуюся») замену $2x^2 + 11x + 6 = z$. Получим квадратичное по переменной z неравенство:

$$z(z+7) > 8 \iff z^2 + 7z - 8 > 0 \iff (z+8)(z-1) > 0.$$

Корнями многочлена в левой части являются $z_1 = -8$ и $z_2 = 1$, значения z, удовлетворяющие неравенству, лежат «за корнями», т. е. задаются неравенствами $z < -8$ и[1] $z > 1$. Переходя к переменной x, получаем эквивалентную исходному неравенству совокупность двух квадратичных неравенств:

$$(*) \iff 2x^2 + 11x + 6 < -8 \ \vee \ 2x^2 + 11x + 6 > 1 \iff$$
$$\iff (1)\ 2x^2 + 11x + 14 < 0 \ \vee \ (2)\ 2x^2 + 11x + 5 > 0.$$

Решаем каждое из этих неравенств. Оформим решение как рассмотрение двух случаев.

(1) Дискриминант квадратного трехчлена $D = 121 - 112 = 9$, его корни суть[2] $x_{1,2} = \dfrac{-11 \mp 3}{4}$, т. е. $x_1 = -\dfrac{7}{2} = -3{,}5$ и $x_2 = -2$, значения x лежат *между корнями*: $x \in (-\dfrac{7}{2}, -2)$.

(2) Дискриминант квадратного трехчлена $D = 121 - 40 = 81$, его корни $x_{1,2} = \dfrac{-11 \mp 9}{4}$, т. е. $x_1 = -5$ и $x_2 = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$, и на этот раз значения x лежат *за корнями*: $x \in (-\infty, -5) \cup (-\dfrac{1}{2}, +\infty)$.

Ответ[3]: $(-\infty, -5) \cup (-\dfrac{7}{2}, -2) \cup (-\dfrac{1}{2}, +\infty)$. □

---

[1] Здесь союз «*и*» употреблен в смысле «*или*»! (А союз «*или*» не употреблен потому, что его можно перепутать с эквивалентностью предложений, т. е. понять в смысле «*то есть*».)

[2] Сейчас мы напишем в формуле «$\mp$» вместо «$\pm$» с тем, чтобы подчеркнуть, что x_1 — левый корень (со знаком «минус»), а x_2 — правый.

[3] Обратите внимание: при записи промежутков упорно употребляются обыкновенные дроби, а не десятичные. Это чтобы не думать, какой знак

Заметим, что в разобранном примере промежутки, составляющие множества решений неравенств (1) и (2), *не перекрываются*. В ситуации, когда промежутки перекрываются, например, в одном неравенстве получился ответ $(-2, 1)$, а в другом $(0, +\infty)$, ответ к совокупности этих неравенств следовало бы записать в виде $(-2, +\infty)$ (запись ответа в виде $(-2, 1) \cup (0, +\infty)$ была бы неправильной с точки зрения «математической грамотности»).

3.2.7. Неравенства с двумя переменными

Независимо от систем уравнений с двумя переменными, которые будут рассмотрены в следующем параграфе, иногда требуется умение изображать на координатной плоскости *Oxy множества решений неравенств с двумя переменными*. Напомним общие определения.

Уравнением (*неравенством*) с двумя переменными x, y называется предложение, имеющее вид равенства (неравенства) между двумя выражениями от переменных x и y. *Решением* уравнения (неравенства) с двумя переменными называется любая *упорядоченная пара чисел* $(x; y) = (x_0, y_0)$ такая, что при подстановке в уравнение (неравенство) значений $x = x_0$ и $y = y_0$ получается *верное числовое равенство* (*верное числовое неравенство*). Два уравнения (неравенства) называются *равносильными* или *эквивалентными*, если множества их решений совпадают. Аналогично вводится понятие равносильности (эквивалентности) для *систем* уравнений или неравенств, а также для *совокупностей* задач с двумя переменными.

Одно уравнение или неравенство с двумя переменными обычно имеет *бесконечно много* решений, так что просто выписать их в принципе нельзя. Вместо этого находится (*изображается*) множество тех точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют уравнению (неравенству) — можно сказать, изображается *множество решений* уравнения (неравенства). Иначе говорят, что это *множество*

препинания — запятую или точку с запятой — ставить между концами промежутка. Мы всегда ставим запятую, оставив точку с запятой для записи координат точки.

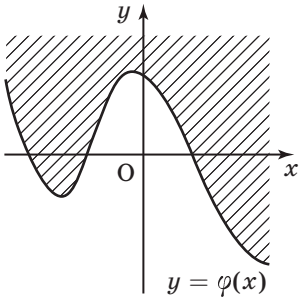


Рис. 3.8

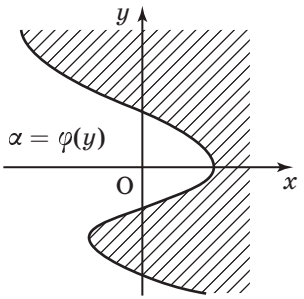


Рис. 3.9

точек[1], *заданное* (задаваемое, задающееся) данным уравнением (неравенством).

Таким образом, *решение неравенства* (*уравнения*) *с двумя переменными* сейчас для нас будет означать изображение множества решений на координатной плоскости. Опять же, такие неравенства мы подразделяем на *простейшие* и неравенства, которые *сводятся к простейшим*.

К простейшим отнесем неравенства двух типов.

1. Неравенства вида $y \geqslant \varphi(x)$ или $y < \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — функция, график которой $y = \varphi(x)$ мы умеем строить. Тогда, очевидно, первому неравенству удовлетворяют точки $(x; y)$ самого графика (в них неравенство обращается в равенство), а также при каждом $x \in D_\varphi$[2] те точки $(x; y)$ координатной плоскости, ординаты которых *больше*, чем значение $\varphi(x)$, т. е. точки, лежащие *выше графика* $y = \varphi(x)$, *над графиком* (рис. 3.8). Строгому неравенству $y < \varphi(x)$, наоборот, удовлетворяют точки *под графиком* $y = \varphi(x)$, лежащие *ниже графика*.

2. Неравенства вида $x \geqslant \varphi(y)$ или $x < \varphi(y)$, где φ — какая-нибудь известная функция, график которой мы умеем строить. Первое неравенство обращается в равенство в точках $(x; y)$ графика $x = \varphi(y)$, при построении которого оси Ox и Oy меняются местами (и ролями: на оси Oy теперь берутся аргументы, а на оси Ox — значения функции). Аналогично тому,

[1]Раньше говорили «*геометрическое* ***место*** *точек*», ибо, скажем, *линия* понималась как «единое целое», мыслилась не как *состоящая* из точек, а как гипотетическое «место расположения» точек.

[2]Напомним, что через D_φ обозначается *область определения функции* φ.

как график *обратной* функции можно получить из графика исходной функции с помощью *симметрии* относительно прямой $y = x$, график $x = \varphi(y)$ получается из привычного графика $y = \varphi(x)$ указанной симметрией. Также при каждом $y \in D_\varphi$ неравенству $x \geqslant \varphi(y)$ удовлетворяют те точки $(x;\, y)$ координатной плоскости, абсциссы которых *больше* значения $x = \varphi(y)$, т. е. точки, лежащие *правее графика* $x = \varphi(y)$ (рис. 3.9). Строгому неравенству $x < \varphi(y)$, напротив, удовлетворяют точки, лежащие *левее графика* $x = \varphi(y)$.

Если неравенство с двумя переменными изначально не имеет вид **1** или **2**, то можно попытаться привести его к такому виду. Это заведомо легко осуществимо для *линейных неравенств* (с двумя переменными). Например, если $b \neq 0$, то

$$ax+by+c\leqslant 0 \iff by\leqslant -ax-c \iff \left[\begin{array}{ll} y\leqslant -\dfrac{a}{b}\,x-\dfrac{c}{b} & \text{в случае} \quad b>0, \\ y\geqslant -\dfrac{a}{b}\,x-\dfrac{c}{b} & \text{в случае} \quad b<0. \end{array}\right.$$

Соответствующее неравенству линейное уравнение с двумя переменными, $ax + by + c = 0$, задает на координатной плоскости Oxy прямую, а рассматриваемое неравенство задает одну из двух полуплоскостей, на которые плоскость делится указанной прямой: нижнюю полуплоскость (т. е. полуплоскость, лежащую *под* прямой, *ниже* ее) в случае $b > 0$ и верхнюю полуплоскость в случае $b < 0$.

К неравенствам с двумя переменными, разлагающимся на множители, можно применить тот же прием *сведéния* к системам более простых неравенств, что и в пп. 3.1.3–3.1.4 (для неравенств с одной переменной).

Пример 3.2.6. Найдем множество точек координатной плоскости Oxy, удовлетворяющих неравенству $(*)$ $x^2 - y^2 \geqslant 0$. Это неравенство можно разложить и свести к совокупности систем линейных неравенств, приводимых к простейшему виду:

$$(*) \iff (x-y)(x+y)\geqslant 0 \iff \begin{cases} x-y\geqslant 0, \\ x+y\geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-y\leqslant 0, \\ x+y\leqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff (1)\ \begin{cases} y\leqslant x, \\ y\geqslant -x \end{cases} \vee \ (2)\ \begin{cases} y\geqslant x, \\ y\leqslant -x. \end{cases}$$

Первое неравенство системы (1) задает полуплоскость, лежащую *ниже* прямой $y = x$, а второе неравенство — полу-

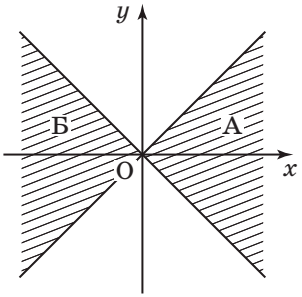


Рис. 3.10

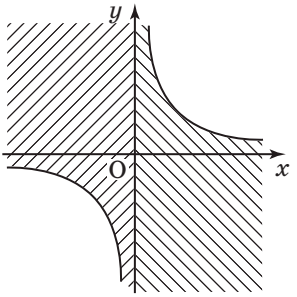


Рис. 3.11

плоскость, лежащую *выше* прямой $y = -x$ (в том и другом случае сами прямые включаются в полуплоскость). Система же задает пересечение указанных полуплоскостей, т. е. плоский прямой угол (**А** на рис. 3.10).

Аналогично, система (2) задает пересечение полуплоскостей $y \geqslant x$ и $y \leqslant -x$, т. е. угол, вертикальный к уже найденному (**Б** на рис. 3.10). Совокупность систем, а значит, и исходное неравенство $(*)$ задают *объединение* областей **А** и **Б**, т. е. пару вертикальных углов. Задача решена. □

Пример 3.2.7. Чтобы свести неравенство $(*)$ $xy - 1 \leqslant 0$ к простейшим, придется делить обе части неравенства на одну из переменных. Будем делить на x. Поскольку при $x = 0$ делить на x нельзя, этот случай придется выделить: тогда неравенство $(*)$ заведомо выполняется, и в множество решений войдет вертикальная прямая $x = 0$, т. е. ось ординат Oy. Далее можно записать:

$$(*) \iff xy \leqslant 1 \iff x = 0 \ \vee \ \begin{cases} x > 0, \\ y \leqslant \dfrac{1}{x} \end{cases} \vee \ \begin{cases} x < 0, \\ y \geqslant \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Таким образом, кроме оси Oy, в множество решений неравенства $(*)$ входит часть *правой полуплоскости* $x > 0$, лежащая *ниже* гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ (или $xy = 1$ — это уравнение задает именно указанную гиперболу), и часть *левой полуплоскости* $x < 0$, лежащая *выше* той же самой гиперболы. В результате обе части сомкнутся, причем в точности по рассмотренной отдельно прямой $x = 0$ (рис. 3.11). □

3.2.8. Метод областей

Конечно, тот факт, что все три части множества решений неравенства $xy - 1 \leqslant 0$ из последнего примера составили *одну область*, состоящую из точек *между ветвями* гиперболы $xy - 1 = 0$, *не случаен*. Похоже, задачу можно решить каким-нибудь более простым способом. И это действительно так. Будем рассуждать следующим образом.

Рассмотрим левую часть неравенства как *функцию двух переменных*, $F(x,y) = xy - 1$. Эта функция определена для всех пар $(x; y)$ — говорят, определена на всей координатной плоскости. Она обращается в нуль только в точках гиперболы $xy = 1$. Две ветви гиперболы разбивают плоскость Oxy на три области: **I**, **II** и **III** (рис. 3.12).

Утверждается, что *в каждой из указанных областей функция принимает значения одного знака*. Иначе говоря, какие бы две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, лежащие в одной области, мы ни взяли, знаки функции F в них совпадают: $\operatorname{sgn} F(x_2,y_2) = \operatorname{sgn} F(x_1,y_1)$.

В самом деле, допустим противное: пусть $\operatorname{sgn} F(M_2) = -\operatorname{sgn} F(M_1)$. Тогда получается, что если мы будем «двигаться» из точки M_1 в точку M_2, все время оставаясь в одной области, то где-то «по дороге» значение функции $F(M) = F(x,y)$ *сменит знак*. Следовательно, *в какой-то промежуточной точке той же области функция* $F(x,y)$ *будет равна нулю* (как в *теореме о промежуточном значении*). Однако все точки, в которых функция $F(x,y)$ обращается в нуль, лежат на *границах* областей — на ветвях гиперболы, а в точках самих областей $F(x,y) \neq 0$. Полученное противоречие и показывает, что $\operatorname{sgn} F(M_2) = \operatorname{sgn} F(M_1)$, что мы и хотели установить.

Таким образом, области **I**, **II** и **III** суть *области знакопостоянства функции двух переменных* $F(x,y)$. Взяв по точке в

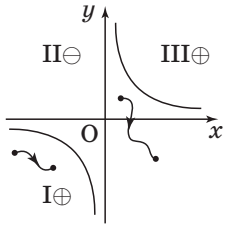


Рис. 3.12

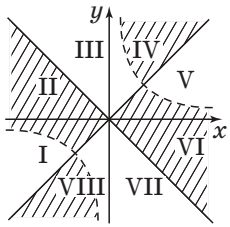


Рис. 3.13

каждой области, можно найти знаки $F(x,y)$ в этих областях, а потом выбрать те области, в которых функция $F(x,y)$ имеет нужный нам знак.

Как видите, рассуждения *такие же*, как при использовании метода интервалов — во всяком случае, *вполне аналогичные*. По аналогии можно обобщить рассуждения и на случай, когда функция не является определенной на всей плоскости. Рассмотрим это обобщение сразу в конкретной ситуации.

Пример 3.2.8. Чтобы найти множество решений неравенства

$$F(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{xy - 1} \leqslant 0,$$

отметим на координатной плоскости, во-первых, множество тех точек, где выражение $F(x,y)$ не определено, т. е., в данном случае, две ветви гиперболы $xy - 1 = 0$, а во-вторых, точки, в которых это выражение равно нулю: пару прямых $y = \pm x$, только из прямой $y = x$ следует выкинуть две общие с гиперболой точки $(1;\ 1)$ и $(-1,\ -1)$. Указанные четыре линии разбивают координатную плоскость на восемь областей **I–VIII** (рис. 3.13; области пронумерованы по часовой стрелке). Те же рассуждения, что и выше, показывают, что в каждой из этих областей функция двух переменных $F(x,y)$ принимает значения одного знака — остается проверить, в какой области какой знак.

Как и при использовании метода интервалов, в этом случае можно ограничиться определением знака в одной из областей, а затем проследить, как изменяется знак выражения $F(x,y)$ при переходе точки $(x;\ y)$ из одной области в другую. Возьмем, например, точку $(1;\ 0)$, принадлежащую области **VI**. Для нее $x^2 - y^2 = 1$, $xy - 1 = -1$, поэтому $F(x,y) = -1$ и выражение $F(x,y)$ в области **VI** отрицательно. А из примеров 3.2.6–3.2.7 следует, что числитель меняет знак при переходе через любую из прямых $y = \pm x$, а знаменатель — при переходе через каждую ветвь гиперболы. Значит, знаки в областях с общей границей различны, и получается картинка знаков, напоминающая шахматную доску (на рис. 3.13 области, знак в которых такой, какой устанавливается рассматриваемым неравенством, закрашены). □

Способ определения знака выражения с двумя переменными, описанный в последнем примере, и называется ***методом областей***. Он может пригодиться при решении задач с параметрами.

Упражнения

В задачах 1–19 требуется *решить заданное уравнение*.

1. $\frac{2}{x} - \frac{1}{1-x} = 2.$

2. $\frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - x - 6} = 0.$

3. $\frac{5}{x+1} + \frac{4x-6}{(x+1)(x+3)} = 3.$

4. $\frac{1-x}{(2-x)(x-3)} + 1 = \frac{1}{2-x}.$

5. $x^3 + \frac{1}{x^3} = 6\left(x + \frac{1}{x}\right).$

6. $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0.$

7. $x^4 + 3x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 3x + 1 = 0.$

8. $x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 12x + 9 = 0.$

9. $\frac{5}{x-1} + \frac{4}{x+2} + \frac{21}{x-3} = \frac{5}{x+1} + \frac{4}{x-2} + \frac{21}{x+3}.$

10. $(x-1)^5 + (x+3)^5 = 242(x+1).$

11. $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5.$

12. $\frac{6x}{x^2+2x+3} + \frac{11x}{x^2+7x+3} = 2.$

13. $\frac{2x}{(x+2)(x-6)} + \frac{2x}{(x+3)(x-4)} = 1.$

14. $3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 7\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0.$

15. $\frac{x^2}{2-x^2} + \frac{x}{2-x} = 2.$

16. $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0.$

17. $6x^6 - 13x^5 + 13x^4 - 12x^3 + 6x^2 + x - 1 = 0.$

18. $x^4 + 1 = 2(x+1)^4.$

19. $x^4 + x^3 - 2x^2 + 12x - 16 = 0.$

20. Заменой сведите уравнение $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 3$ к квадратному.

21. Решите ту же задачу для уравнения $x^2 + \frac{9x^2}{(3+x)^2} = 7.$

22. Докажите, что число $\sqrt[3]{\sqrt{7215325} + 2686} - \sqrt[3]{\sqrt{7215325} - 2686}$ рационально, и найдите это число.

В задачах 23–31 докажите иррациональность указанных чисел.

23. $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{6}.$

24. $\beta = \sqrt[3]{5} + \sqrt{3}.$

25. $\gamma = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}.$

26. $\delta = \sqrt{2+\sqrt{3}}$. **27.** $\varepsilon = \sqrt{1+\sqrt[3]{5}}$. **28.** $\zeta = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{2}}$.

29. $\eta = \sin 10^\circ$. **30.** $\theta = \operatorname{tg} 10^\circ$. **31.** $\iota = \sin 170^\circ$.

В задачах 32–49 требуется *решить заданное неравенство*.

32. $9x - 14 - x^2 > 0$. **33.** $\dfrac{2-5x}{x+1} > 2$. **34.** $x \geqslant \dfrac{4-x^2}{3-x}$.

35. $\dfrac{x^2(x+2)}{2x+3} \leqslant 0$. **36.** $x^4 - 12x^2 + 36 \leqslant 0$.

37. $\dfrac{x^2-7x+12}{x-4} \geqslant 0$. **38.** $\dfrac{3}{2-x} > \dfrac{1}{x+3}$. **39.** $\dfrac{x+1}{x-1} \geqslant \dfrac{x+5}{x+1}$.

40. $\dfrac{2x-3}{4-x} > \dfrac{1}{x}$. **41.** $3 - \dfrac{2x-17}{x-5} > \dfrac{x-5}{x+2}$.

42. $\dfrac{30x-9}{x-2} \geqslant 25(x+2)$. **43.** $\dfrac{3x+7}{6x-x^2-9} < \dfrac{1}{x+1}$. **44.** $x > \dfrac{1}{x-1}$.

45. $\dfrac{5-4x}{3x^2-x-4} < 4$. **46.** $\dfrac{2x^2-3x-459}{x^2+1} > 1$.

47. $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 1$. **48.** $x^2 + \dfrac{x^2}{(x+1)^2} \geqslant 3$.

49. $x^{12} - x^7 + x^6 - x^5 + 1 > 0$. **50.** $x^4 - 2x^2 + 8x - 3 \leqslant 0$.

51. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{x+7}{3x+5}} - \sqrt{x+4} = 0$.

В заданиях 52–61 требуется *изобразить множества решений* данных неравенств на координатной плоскости Oxy.

52. $x^2 - y \geqslant 0$. **53.** $x + y^2 \geqslant 0$.

54. $x^2 + y^2 + 2x \geqslant 0$. **55.** $(x^2-1)(y^2-1) \geqslant 0$.

56. $(x^2-y^2)(x^2-1) \geqslant 0$. **57.** $(x^2-y)(y^2-x) \geqslant 0$.

58. $(x^2-y)(y^2-x)(x^2-y^2) \geqslant 0$. **59.** $\dfrac{x^2-y^2}{xy+1} > 0$.

60. $|x| + |y| \leqslant 1$. **61.** $\dfrac{|xy|-1}{|x|+|y|-4} \geqslant 0$.

Глава 4

Рациональные алгебраические системы

§ 4.1. Уравнения с несколькими переменными

Если все определения и понятия § 1.1 об уравнениях с одной переменной применить к выражениям и предложениям с *несколькими* (двумя, тремя и т. д.) переменными, то тем самым будет введен «язык» логики уравнений с несколькими переменными. Основными понятиями этого языка являются: *уравнение*, *переменные* (или неизвестные), *решение* уравнения, ***решить*** уравнение, *равносильность* (*эквивалентность*) уравнений, *система* (*конъюнкция*) уравнений, *совокупность* (*дизъюнкция*) уравнений и систем, *решения* систем и совокупностей и т. д. Пожалуй, стоит уточнить только понятие *решения уравнения*. Будем говорить об уравнениях с двумя переменными, так как дальше в этом параграфе речь будет идти преимущественно о них. С другой стороны, всё (или почти всё) сказанное о задачах с двумя переменными, как правило, без труда переносится на задачи (т. е. уравнения, системы и т. д.) с тремя и бóльшим числом переменных.

4.1.1. Решение уравнений с двумя переменными

Пусть дано *уравнение с двумя переменными* x *и* y, или, говоря более кратко, *уравнение относительно* (или даже просто «*от*») x *и* y:

$$f(x,y) = g(x,y). \qquad \textbf{(A)}$$

Его *решениями* называются *упорядоченные пары чисел* $(x_0; y_0)$, удовлетворяющие уравнению — в том смысле, что при подстановке в уравнение **(A)** вместо переменных x, y соответствующих им числовых значений $x = x_0$, $y = y_0$ получается верное числовое равенство. Например, упорядоченная пара чисел (0; 1)

является решением уравнения

$$x^2 + y^2 + 1 = 2y. \qquad \textbf{(B)}$$

Заметьте: именно ***пара*** $(x;\, y) = (0;\, 1)$, ибо нельзя сказать, что $x = 0$ является решением уравнения **(B)**, и именно ***упорядоченная***, поскольку та же пара чисел, но взятых в другом порядке, $(1;\, 0)$, не является решением уравнения **(B)** — при подстановке в **(B)** пары $(x;\, y) = (1;\, 0)$ получается неверное равенство $1^2 + 0^2 + 1 = 2 \cdot 0$, т. е. $2 = 0$.

Уравнения называются *равносильными* или *эквивалентными*, если множества их решений одинаковы, совпадают. Переход от уравнения к равносильному ему обозначается с помощью стандартного знака эквивалентности предложений «$\Longleftrightarrow$» («тогда и только тогда»). Например,

$$\textbf{(B)} \Leftrightarrow x^2+y^2+1-2y=0 \Leftrightarrow x^2+(y^2-2y+1)=0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=0. \qquad \textbf{(C)}$$

С этим пока все просто. Неувязки начинаются, когда мы переходим к вопросу о том, как *решить* одно уравнение с двумя переменными, т. е. найти все его решения. Для нашего уравнения **(B)** из равносильного ему уравнения **(C)** имеем:

$$\textbf{(C)} \iff \begin{cases} x^2 = 0, \\ (y-1)^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases} \qquad \textbf{(D)}$$

Значит, решение *единственное*: это как раз указанная нами раньше пара $(x;\, y) = (0;\, 1)$. Если ставилась задача решения уравнения **(B)**, то эта задача решена, и ответ записывается просто: $(x;\, y) = (0;\, 1)$, или в теоретико-множественном виде $\{(0;\, 1)\}$, если при этом помнить, что мы считаем (по традиции) переменную x первой, а y — второй[1].

Как вы думаете, почему основной переменной в математике выбрана буква, третья от конца $\ldots u, v, w, x, y, z$ латинского алфавита? Логичнее было бы выбрать какую-нибудь исключительную букву — например, z.

Историки предполагают причину в том, что при печатании книг Декарта, который и ввел буквы для обозначения переменных, в типографиях буква x (литера для этой буквы) была в переизбытке, по сравнению с другими буквами, вот наборщики и определили ее для печатанья переменной!

[1] Запись с помощью систем вида **(D)**, по системе на каждое решение, также возможна, но весьма неудобна.

Может оказаться, что уравнение вообще не имеет решений. Например, если решать модифицированное уравнение **(B)**, в котором единица в левой части заменена на двойку, то получим:

$$x^2+y^2+2=2y \iff x^2+(y^2-2y+1)+1=0 \iff x^2+(y-1)^2+1=0.$$

Последнее равенство не может иметь место ни при каких значениях x и y, так что *ответ*: *нет решений* (или $\varnothing$ — «пусто», пустое множество решений). Однако в каком-то смысле «чаще» получается как раз наоборот: одно уравнение с несколькими переменными имеет *бесконечно много* решений. Что в этом случае означают слова «*Найти все решения*»?

Выход из этого положения — *описать* множество решений, как-то его *представить*. Приняты два *способа описания*, представления множеств решений уравнений с двумя переменными: *геометрический* и *параметрический*. Начнем с первого.

Как хорошо известно сейчас каждому восьмикласснику, уравнение с двумя переменными, как правило — или, как говорят математики, *в общем случае*, — задает на координатной плоскости некоторую линию (которая может состоять и из нескольких частей) или не задает ничего. В так называемых «*вырожденных*», исключительных случаях линия (или ее часть) превращается в точку — так у нас получилось для уравнения **(B)**.

В школе обычно рассматривают невырожденные случаи, причем такие, при которых уравнение задает некоторую линию. Например, линейное по переменным x и y уравнение

$$ax+by+c=0$$

в случае $(a;\,b)\neq(0;\,0)$[1)] задает на плоскости Oxy прямую. Квадратичные по x и y уравнения могут задавать уже гораздо более разнообразные линии — их называют *квадриками* (или, следуя древнегреческим математикам, *коническими сечениями*). Например, уравнения

$$x^2+y=0,\quad x^2+xy=0,\quad xy=0,\quad xy=1,\quad x^2+y^2=1$$

задают на координатной плоскости Oxy, соответственно, параболу, пару прямых, пару координатных осей, гиперболу, окружность.

[1)] Это неравенство означает, что либо a, либо b — *хотя бы одно* из этих чисел — отлично от нуля.

В настоящее время, когда мы уже привыкли к тому, что *пара чисел* может быть проинтерпретирована и изображена как *точка на координатной плоскости*, интерпретация уравнений с двумя переменными с помощью задаваемых ими линий кажется простой и естественной. А ведь открытие такой связи между алгеброй и геометрией было, быть может, одним из самых революционных в математике. Оно было сделано, можно сказать, не так давно — в начале XVII в. — одним из самых выдающихся математиков всех времен *Рене Декартом*[1].

Координатная интерпретация неравенств с двумя переменными рассматривалась в конце § 3.2. Координатную интерпретацию уравнений мы рассмотрим чуть ниже. Сейчас же упомянем более старый способ описания множеств решений уравнений с двумя переменными — *параметрический*. Поясним его на конкретном примере.

Пример 4.1.1. Уравнение

$$x^2 + y = 0$$

имеет бесконечно много решений, но *все они* могут быть описаны одной формулой:

$$(x;\, y) = (a;\, -a^2), \quad \text{где} \quad a \in \mathbb{R},$$

т. е. a — *произвольное* действительное число. Эта переменная a и называется *параметром*[2]. Выбор параметра в данном случае довольно естествен — взяв произвольное значение $x = a$, мы по нему можем однозначно определить значение y такое, чтобы рассматриваемое уравнение выполнялось: необходимо взять $y = -x^2 = -a^2$. Сама параметрическая запись уравнением определяется далеко не однозначно — с тем же успехом можно записать совокупность всех решений данного уравнения, например, в виде

$$(x;\, y) = (b^3;\, -b^6), \quad \text{где} \quad b \in \mathbb{R} \ \text{— любое},$$

или

$$(x;\, y) = (\pm\sqrt{c};\, c), \quad \text{где} \quad c \geqslant 0 \ \text{— любое},$$

---

[1] Как записал Декарт в своем дневнике, это открытие пришло ему во сне (!) 10 ноября 1619 г.

[2] Термин «*параметр*» (от греч. παρα, **para** — *рядом, около*, и μετρεω, **metreo** — *измеряю*; греч. παραμετρων, **parametron** — *отмеривающий*) даже в математике имеет несколько значений. Например, в гл. 1 это слово употреблялось несколько в другом смысле.

и т. д. В этом и преимущество, и недостаток параметрической записи ответа. В наших задачах, исключая тригонометрические[1)], такая запись будет нужна редко (но иногда всё-таки нужна). □

Наиболее распространенный тип задач с двумя переменными — это *системы* двух (именно *двух*!) уравнений. Как правило, такие системы имеют конечное число решений. Это легко понять, перейдя на геометрический язык: каждое из двух уравнений задает линию, и эти две линии имеют конечное число общих точек. Координаты точек пересечения линий и дают решения системы. Если переменных не две, а три — обычно их обозначают x, y, z, — то типичные задачи суть системы трех уравнений, и так далее.

Теперь мы перейдем к более конкретным вопросам.

4.1.2. Рациональные уравнения с двумя переменными

Напомним, что *многочленом от двух переменных* x и y называется выражение, записывающееся как *сумма одночленов* от x и y, имеющих вид

$$ax^k y^m.$$

Здесь $a = a_{k,m}$ — числовой коэффициент, а показатели степеней переменных x и y, т. е. числа k и m — целые неотрицательные.

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней переменных x и y, т. е. число $s = k + m$. *Степенью многочлена* называется наибольшая из степеней входящих в него одночленов. Например, одночлены степени 1 суть только x и y, с точностью до коэффициента, и общий вид линейного многочлена, т. е. многочлена степени 1 от x и y, такой:

$$p_1(x) = ax + by + c, \quad (a;\, b) \neq (0;\, 0).$$

Нормированных (с коэффициентом 1) одночленов степени 2 уже три: x^2, y^2 и xy, — и общий вид квадратичного многочлена довольно внушительный:

$$p_2(x) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \quad (a;\, b;\, c) \neq (0;\, 0;\, 0)$$

(так сказать, «квадратный шестичлен»).

[1)] В тригонометрических уравнениях с одной переменной, как правило, решений бесконечно много, и они описываются с помощью *целочисленного* параметра.

Как и в случае одной переменной, *рациональные алгебраические выражения от двух переменных x и y* определяются как получающиеся из чисел и переменных x, y применением четырех арифметических действий: сложения, вычитания, умножения и деления. Преобразованиями такие выражения приводятся к *стандартному виду* частного двух многочленов — к виду

$$R(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}, \quad p, q \in \mathbb{R}[x,y]$$

(через $\mathbb{R}[x,y]$ обозначена совокупность всех многочленов от x и y с действительными коэффициентами; напомним, что при преобразованиях область допустимых значений переменных x и y может расшириться). Если знаменатель в дробном выражении R есть константа, то выражение записывается как многочлен и называется также *целым рациональным алгебраическим выражением*; если же знаменатель $q(x,y)$ отличен от константы (можно записать $\deg q(x,y) \geqslant 1$), то выражение называется *дробно-рациональным алгебраическим выражением*.

Если в уравнение с переменными x и y входят только рациональные алгебраические выражения от x и y, то и уравнение называется *рациональным алгебраическим*. *Стандартный вид* рационального алгебраического уравнения от x и y такой:

$$\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = 0, \quad P, Q \in \mathbb{R}[x,y],$$

причем многочлен Q может быть и константой. *Общая схема решения рационального алгебраического уравнения* стандартного вида — эквивалентный переход к системе

$$\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = 0 \iff \begin{cases} P(x,y) = 0, \\ Q(x,y) \neq 0, \end{cases}$$

состоящей из уравнения и неравенства от x, y. Геометрически эта система интерпретируется так: из линии $P(x,y) = 0$ выбрасываются все точки, принадлежащие линии $Q(x,y) = 0$; то, что останется, и представляет собой множество решений исходного рационального уравнения.

Среди многочленов и уравнений от одной переменной x простейшими были линейные, квадратичные и двучленные. В случае двух переменных x, y ужé квадратичные уравнения $p_2(x,y) = 0$ нельзя отнести к «простейшим»: задаваемые ими на плоскости *кривые второго порядка* — упомянутые выше квадрики —

весьма разнообразны (вспомните их примеры из предыдущего пункта!). Первая классификация, систематизация квадрик была осуществлена Декартом и является главным предметом изучения в специальной математической науке — в *аналитической геометрии* (на плоскости). Кривые третьего порядка исследовал Ньютон, и они относятся уже к другой науке — *алгебраической геометрии*.

Среди уравнений от двух переменных x и y к простейшим можно отнести разве что линейные уравнения,

$$ax + by + c = 0 \quad \big((a;\, b) \neq (0;\, 0)\big),$$

а также уравнения, *разрешенные* относительно одной из переменных, т. е. имеющие вид

$$y = f(x) \quad \text{или} \quad x = g(y).$$

Имеет смысл выделить еще так называемые *однородные уравнения*.

4.1.3. Однородные уравнения с двумя переменными

Многочлен $h(x,y)$ называется *однородным* (относительно x и y), если все составляющие его одночлены имеют одну и ту же степень. Однородные многочлены степени 2 — это квадратичные (однородные) трехчлены:

$$h_2(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \big((a;\, b;\, c) \neq (0;\, 0;\, 0)\big).$$

Однородные кубические многочлены имеют вид

$$h_3(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \quad \big((a;\, b;\, c;\, d) \neq (0;\, 0;\, 0;\, 0)\big),$$

и т. д. Однородные многочлены (и выражения) часто встречаются в математике (вспомните формулы для $x^n \pm y^n$ и $(x \pm y)^n$ из гл. 2). С другой стороны, однородные выражения типичны для физических формул, причем по очень простой причине: однородные выражения от величин, имеющих одинаковую размерность, могут иметь «физический смысл», а не однородные — не могут. Например, если переменные величины x и y измеряются в метрах, и по ним необходимо что-то вычислить (геометрический случай — вычисление расстояния, площади или объема), то ответ вида $2x + 3y$ или $x^2 + 5xy$ может получиться — он «имеет размерность» (*м* или *м*^{2}), а вот ответ вида $x + 5xy$ заведомо неверен, так как в нем метры складываются с квадратными метрами.

Для нас особенно важно то, что отвечающие однородным многочленам однородные уравнения

$$h_n(x,y) = 0$$

имеют красивые геометрические и сравнительно простые аналитические решения. Любое линейное однородное уравнение

$$ax + by = 0 \quad \big((a;\, b) \neq (0;\, 0)\big)$$

задает на плоскости Oxy прямую, проходящую через начало координат $O(0;\, 0)$. Оказывается, однородное уравнение степени n задает на плоскости совокупность нескольких (не более, чем n) прямых, проходящих через начало координат. При этом само уравнение сводится к совокупности нескольких линейных однородных уравнений (а соответствующий однородный многочлен раскладывается в произведение линейных и неразложимых квадратных однородных многочленов, подобно многочленам от одной переменной). Покажем это на конкретном примере.

Пример 4.1.2. Опишем решения однородного уравнения степени 2:

$$3x^2 - 4xy + y^2 = 0.$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Если $x = 0$, то подстановка этого значения x в уравнение показывает, что тогда и $y = 0$, т. е. мы приходим к очевидному решению $(x;\, y) = (0;\, 0)$.

Случай 2. Если $x \neq 0$, то *без потери решений* можно разделить уравнение (обе его части) на x^2 (для общего однородного уравнения — на старшую степень x; можно делить и на старшую степень y — это уже дело вкуса). После сокращения складываемых дробей на x мы придем к уравнению

$$3 - 4\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 0.$$

Обозначим дробь $\frac{y}{x}$ через k; последнее уравнение является квадратным относительно k и легко решается:

$$3 - 4k + k^2 = 0 \iff k^2 - 4k + 3 = 0 \iff (k-1)(k-3) = 0 \iff k = \left[\begin{array}{l} 3, \\ 1. \end{array}\right.$$

Значит, либо $\frac{y}{x} = 3$, $y = 3x$, либо $\frac{y}{x} = 1$, $y = x$. Вот мы и получили, что исходное уравнение равносильно совокупности

двух линейных, $y = 3x$ и $y = x$, и задает на координатной плоскости пару прямых. (Полученную при рассмотрении случая 1 точку (0; 0) отдельно учитывать не нужно — она вошла в обе прямые; однако, заметим, что иногда при решении однородного уравнения в ответе может получиться только одна эта точка: так будет, например, для уравнения $x^2 + y^2 = 0$.) При желании *ответ* можно записать в параметрическом виде: $(x;\, y) = (a;\, 3a), (a;\, a)$, где $a \in \mathbb{R}$ — любое. □

Обратите внимание на ход рассуждений в приведенном решении, а именно, на рассмотрение двух случаев:

1) одна из переменных (у нас x) *равна нулю*;

2) эта переменная *не равна нулю* — тогда делим уравнение на ее старшую степень (равную степени однородного многочлена; у нас — на x^2) и получаем уравнение от одной «безразмерной» переменной (у нас — от переменной $\frac{y}{x} = k$).

Однородность тех или иных *уравнений* относительно каких-то выражений, которые можно принять за переменные, и в прикладных задачах, и в самой математике возникает довольно часто (например, среди тригонометрических уравнений выделяются уравнения, однородные относительно косинуса и синуса). И всегда эту однородность можно использовать, действуя по указанной схеме (тогда из однородных тригонометрических уравнений получатся полиномиальные уравнения относительно тангенса или котангенса). Запишем эту схему в общем случае, когда степень однородности (т. е., в данном случае, степень однородного многочлена) произвольна и равна n:

$$h_n(x,y) = 0 \iff \begin{cases} x = 0, \\ h_n(0,y) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \neq 0, \\ \dfrac{h_n(x,y)}{x^n} = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Далее,

$$(*) \iff h_n\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0,$$

и после замены $\frac{y}{x} = k$ мы приходим к полиномиальному уравнению от переменной k:

$$h_n(1,k) = 0 \quad \longrightarrow \quad k = k_1, k_2, \ldots .$$

Уравнения замены $\frac{y}{x} = k_i$ дают все семейства решений второй системы:

$$y = k_1 x,\ y = k_2 x,\ \ldots .$$

К ним следует добавить решения первой системы (случай $x = 0$). Если это только тривиальное решение (0; 0), то оно входит в прямые $y = k_i x$ (конечно, если уравнение относительно k имеет хотя бы одно решение). Однако может оказаться, что решения первой системы составляют целую прямую $x = 0$ (пример — уравнение $x^2 + xy = 0$).

А мораль отсюда *такова*[1]: если некоторое уравнение (например, в системе уравнений) однородно, то этим можно и нужно воспользоваться, чтобы заменить его на совокупность однородных линейных уравнений ($y = k_i x$).

4.1.4. О симметрических многочленах от двух переменных

Среди многочленов от x и y, отличных от линейных и однородных, интерес для нас представляют *симметрические многочлены*. Формально симметрические многочлены (или *симметрические рациональные выражения*) выделяются условием

$$R(y,x) \equiv R(x,y),$$

в том смысле, что при перестановке переменных x и y получается *то же самое* выражение, что и было (с точностью до перестановки сомножителей в одночленах и самих этих одночленов—слагаемых). Примеры симметрических многочленов: $x + y$, xy (эти два простейшие среди симметрических многочленов называются *элементарными симметрическими многочленами*), $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^2y + xy^2 + xy$ и т. д. Мы уже сталкивались с симметрией такого рода в § 2.4: уравнение $x^4 + (x + 2)^4 = 82$ симметрично в этом новом смысле относительно переменных $x = u$ и $x + 2 = v$. Аналогичная симметрия встречается в тригонометрических уравнениях — например, уравнение

$$\cos x + \sin x + \cos x \cdot \sin x = 1$$

симметрично относительно переменных $u = \cos x$ и $v = \sin x$. Во всех случаях *перестановочная симметрия* помогает решить ту или иную связанную с ней задачу. Симметрические системы мы рассмотрим в § 4.3. Про совокупность же решений *одного* симметрического уравнения $S(x,y) = 0$ ничего особенного сказать нельзя — разве что отметить тот очевидный факт, что задаваемая симметрическим уравнением линия (множество решений) симметрична относительно прямой $y = x$.

---

[1] «*А мораль отсюда* ***такова****: думай о смысле, а слова придут сами*!» *Льюис Кэрролл*. **Алиса в стране чудес**. М.: Наука, 1991, с. 73.

Перейдем, наконец, к основному интересующему нас типу задач — к системам уравнений с двумя переменными.

§ 4.2. Решение систем. Метод подстановки. Однородные системы

Системы из нескольких рациональных алгебраических уравнений с двумя, тремя и бóльшим числом переменных будем называть просто *рациональными алгебраическими системами*. Как мы видели, такую систему можно заменить системой полиномиальных уравнений от нескольких переменных с соответствующими ограничениями — учитывающими, что знаменатели всех дробей должны быть отличны от нуля.

К простейшим среди полиномиальных систем относятся *линейные системы*:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где $(a_1; b_1),(a_2,b_2) \neq (0;\, 0)$. Каждое из уравнений системы на плоскости Oxy задает прямую, две прямые могут совпадать, быть параллельными или пересекаться в одной точке; соответственно, система может иметь бесконечно много решений, ни одного решения или единственное решение. Если коэффициенты при y в том и другом уравнении отличны от нуля, то оба уравнения можно *разрешить относительно* y, т. е. записать как уравнения линейных функций:

$$y = k_1x + d_1, \quad y = k_2x + d_2; \quad k_i = -\frac{a_i}{b_i}, \quad d_i = \frac{c_i}{b_i}, \quad i = 1, 2.$$

Прямые с такими уравнениями совпадают тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $d_1 = d_2$. Для исходных уравнений эти условия отвечают их *пропорциональности*:

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \iff a_2 : a_1 = b_2 : b_1; \quad \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} \iff c_2 : c_1 = b_2 : b_1,$$

поэтому $a_2 : a_1 = b_2 : b_1 = c_2 : c_1 = \lambda$ — второе уравнение системы получается из первого умножением на число λ, так что оно выполняется автоматически и его можно отбросить; оставшееся же уравнение имеет бесконечно много решений, которые можно записать в параметрическом виде.

Далее, условия параллельности суть $k_1 = k_2$ и $d_1 \neq d_2$, а для исходной системы это означает, что $a_2 : a_1 = b_2 : b_1 \neq c_2 : c_1$ —

левые части уравнений системы пропорциональны, в то время как правые части не подчиняются этой пропорции. Условие пересечения прямых в одной точке есть $k_1 \neq k_2$, т. е. $a_2 : a_1 \neq b_2 : b_1$ или $a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 \neq 0$ — оно соответствует *непропорциональности* левых частей уравнения. Рассматривая случаи, когда значение b_1 или b_2 равно нулю, приходим к тем же самым условиям (бесконечного множества решений, их отсутствия, единственности решения — проверьте!).

Конкретные линейные системы проще всего решаются с помощью подстановки.

Пример 4.2.1. Чтобы решить систему

$$\begin{cases} x + 2y = 17, & (1) \\ 2x - 3y = 6, & (2) \end{cases}$$

достаточно из уравнения (1) выразить x через y:

$$x = 17 - 2y,$$

и подставить это выражение в уравнение (2):

$$2(17 - 2y) - 3y = 6 \iff 34 - 7y = 6 \iff -7y = -28 \iff y = 4.$$

Теперь из *уравнения подстановки* $x = 17 - 2y$ находим соответствующее значение x: $x = 17 - 2 \cdot 4 = 17 - 8 = 9$.

Ответ: $(x;\, y) = (9;\, 4)$. □

Вопрос: нужно ли здесь выполнять хорошо вам знакомую «*проверку*»? — Если оформлять решение в «вольном стиле», как только что, то проверка необходима. Однако лучше, как и в случае уравнений с одной переменной, оперировать с *равносильными системами* — тогда необходимость проверки отпадает. Соответствующим образом оформляется и запись решения. Скажем, в последнем примере решение можно записать так:

$$\begin{cases} x + 2y = 17, \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \overset{\text{I}}{\iff} \begin{cases} x = 17 - 2y, \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \overset{\text{II}}{\iff} \begin{cases} x = 17 - 2y, \\ 2(17 - 2y) - 3y = 6 \end{cases} \overset{\text{III}}{\iff}$$

$$\overset{\text{III}}{\iff} \begin{cases} x = 17 - 2y, \\ 34 - 7y = 6 \end{cases} \overset{\text{IV}}{\iff} \begin{cases} x = 17 - 2y, \\ -7y = -28 \end{cases} \overset{\text{V}}{\iff} \begin{cases} x = 17 - 2y, \\ y = 4 \end{cases} \overset{\text{VI}}{\iff}$$

$$\overset{\text{VI}}{\iff} \begin{cases} x = 17 - 2 \cdot 4 = 9, \\ y = 4. \end{cases}$$

Равносильность переходов **I, III, IV, V** сомнений не вызывает — в них мы просто преобразуем («подвергаем» равносильному

преобразованию) одно из уравнений системы. А вот при переходах **II** и **VI** мы осуществляем подстановку выражения для переменной из одного уравнения в другое. Хотя вы, наверняка, не раз пользовались подстановкой и в более сложных системах, необходимо обоснование «правомочности», равносильности такого действия — такого преобразования систем. Проще всего дать это обоснование сразу в общем случае.

4.2.1. Общий метод подстановки

Метод подстановки в основном его варианте состоит в переходе от системы вида

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ F(x,y) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

к системе

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ F(x,\varphi(x)) = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

В отличие от примера 4.2.1, мы здесь записали, что переменная y выражена через переменную x; в конкретных случаях вопрос «*Что через что выразить*?» решается, исходя из того, *что* проще выразить: y через x или x через y. При общем рассмотрении подстановки этот вопрос не принципиален, и мы допустили, что в системе $(*)$ в одном из уравнений переменная y выражена через переменную x, и поместили это уравнение на первое место в системе. Вопрос по существу: почему системы $(*)$ и $(**)$ равносильны?

Для доказательства этого факта нужно проверить, что любое решение $(x_0; y_0)$ первой системы является решением второй и, наоборот, любое решение второй системы является решением первой. Если выполнены равенства

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad F(x_0,y_0) = 0,$$

то, конечно, справедливо и второе равенство во втором уравнении системы $(**)$:

$$F(x_0,\varphi(x_0)) = F(x_0,y_0) = 0,$$

так как $\varphi(x_0)$ и y_0 — это *одно и то же* число. Обратно, если для пары $(x;\, y) = (x_0; y_0)$ обращаются в верные числовые равенства оба уравнения системы $(**)$, т. е.

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad F(x_0,\varphi(x_0)) = 0,$$

то верно и равенство $F(x_0,y_0) = 0$, т. е. пара $(x_0; y_0)$ удовлетворяет системе $(*)$. Итак, $(*) \iff (**)$ — метод подстановки обоснован.

Эти рассуждения, в общем-то, довольно очевидны. Однако и самые «очевидные» действия и факты в математике иногда бывают и самыми «коварными» (пример тому будет приведен в § 4.5). Во всяком случае, нами обоснована *общая* ***схема подстановки***, которую можно записать так:

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ F(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \varphi(x) \rightleftarrows y_1, y_2, \quad \ldots \\ \qquad\qquad\quad \uparrow \ \uparrow \\ F(x,\varphi(x)) = 0 \to x_1, x_2, \quad \ldots, \end{cases}$$

откуда получается *ответ*: $(x;\, y) = (x_1; y_1), (x_2; y_2), \ldots$.

Суть метода подстановки состоит в том, что решение системы с двумя переменными мы сводим к решению уравнения с одной переменной (а такие мы учились решать в § 3.1). Если вы видите, что какое-то из уравнений от x, y позволяет выразить одну из переменных через другую, обязательно попробуйте сделать соответствующую подстановку — может быть, получится достаточно простое уравнение.

Пример 4.2.2. Решим систему

$$\begin{cases} xy \quad = 2, & (1) \\ x^2 + y^2 = 5. & (2) \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $x \neq 0$ — точнее говоря, никакая пара $(x_0; y_0)$, в которой $x_0 = 0$, не может удовлетворять уравнению (1), а вместе с ним и всей системе. Поэтому из уравнения (1) можно выразить y через x — получится эквивалентная исходной система уравнений, решаемая методом подстановки:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x}, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{2}{x}, & (3) \\ x^2 + \dfrac{4}{x^2} = 5. & (4) \end{cases}$$

Дальнейший ход решения можно записать короче, если проводить равносильные преобразования не со всей системой, а только с уравнением (4) от x, т. е. не переписывать всякий

раз и уравнение подстановки (3). Итак,

$$(4) \iff \frac{x^4+4-5x^2}{x^2}=0 \iff \begin{cases} x^4-5x^2+4=0, \\ x^2 \neq 0 \ (\text{ или } \ x \neq 0). \end{cases}$$

Делаем замену $x^2 = z$ («z», а не «y» — буква y «занята»!), получаем квадратное уравнение:

$$z^2-5z+4=0 \iff (z-1)(z-4)=0 \iff z=1 \ \vee \ z=4$$

(напомним, что очевидные разложения, подобные приведенному, можно записывать без объяснений). Из *уравнений замены*[1] находим:

$$x^2=1 \iff x=\pm 1; \quad x^2=4 \iff x=\pm 2.$$

Теперь из *уравнения подстановки* $y=\dfrac{2}{x}$ для каждого найденного значения $x=\pm 1, \pm 2$ находим соответствующее значение y и сразу выписываем получающееся решение $(x;\ y)$ исходной системы:

$$x=1, y=\frac{2}{x}=2, (x;\ y)=(1;\ 2);\ x=-1, y=\frac{2}{x}=-2, (x;\ y)=(-1;\ -2),$$

и аналогичным образом отыскиваются еще два решения системы, $(x;\ y)=(2;\ 1), (-2; -1)$.

Отметим, что в подобных случаях *не следует* делать сомнительные по смыслу манипуляции и записи типа

$$x=\pm 1, \quad y=\frac{2}{x}=\frac{2}{\pm 1}=\pm 2, \quad (x;\ y)=(\pm 1;\ \pm 2).$$

Скажем, в последней записи в принципе возможны *четыре* комбинации знаков «плюс» и «минус», так что без дополнительных комментариев не понятно, сколько решений $(x;\ y)$ дается такой записью. В *ответе* к решению системы просто перечисляются все пары.

Ответ: $(x;\ y)=(1;\ 2), (-1; -2), (2;\ 1), (-2; -1)$. □

Еще одно замечание к этому примеру: *ни в коем случае* не нужно для выражения y через x использовать второе уравнение системы ($y=\pm\sqrt{5-x^2}$). Всегда, когда есть возможность, следует избегать радикалов (знаков корня) и стараться, напротив, освободиться от них. Почему дается такая рекомендация, наверное, понятно, и уж во всяком случае это будет ясно в следующей главе.

[1] Предостережение: не путайте термины «замена» и «подстановка»!

4.2.2. Линейные подстановки

Подстановка может быть сделана всякий раз, когда одно из уравнений системы линейное.

Пример 4.2.3. В следующей системе производим очевидную подстановку:

$$\begin{cases} y - x = 2, \\ x^4 + y^4 = 82 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + 2, \\ x^4 + (x+2)^4 = 82 \end{cases}$$

(мы сразу преобразовали первое уравнение и сделали подстановку во второе). Получилось хорошо знакомое нам уравнение (см. § 2.4). Закончите решение системы самостоятельно. □

Иногда среди уравнений системы линейного нет, но его можно получить преобразованиями — «вывести» из системы.

Пример 4.2.4. Решим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 7, & (1) \\ x^2 + y^2 + y = 6. & (2) \end{cases}$$

Вычтем *почленно*[1] из уравнения (1) уравнение (2):

$$(1), (2) \implies x - y = 1. \qquad (3)$$

Значит, $y = x - 1$, и можно сделать подстановку, но... Куда — в уравнение (1), или в уравнение (2), или в оба вместе? Экономнее подставить выражение $y = x - 1$ в первое уравнение, ибо в него переменная y входит только один раз, но будет ли при этом выполняться второе уравнение? Вообще, как быть, как записать решение, если оставаться при этом в рамках равносильных преобразований?

Выходов два. *Первый*: если к системе уравнений (1) и (2) добавить уравнение, являющееся *следствием* уравнений системы (в данном случае уравнение (3), которое условно записывают как «разность уравнений», т. е. результат их почленного вычитания: (3) = (1) − (2)), то получится, очевидно,

[1] Такова традиционная терминология: *почленное вычитание* или *сложение уравнений* $A = B$ и $C = D$ — это переход к уравнению $A - C = B - D$ или $A + C = B + D$, соответственно. Лучше, наверное, было бы говорить о вычитании и сложении уравнений *по частям* (имея в виду левые и правые части уравнений).

равносильная система — в данном случае

$$\begin{cases} x^2+y^2+x=7, \\ x^2+y^2+y=6 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2+x=7, \\ x^2+y^2+y=6, \\ x-y=1. \end{cases}$$

Тогда, конечно, придется делать подстановку из третьего уравнения в оба других уравнения «тройной» системы. Так иногда и приходится поступать (см. следующий пункт).

В данном случае лучше использовать *другой выход*: обратиться к ***равносильным линейным преобразованиям*** *систем уравнений*. А именно, любая система уравнений (1) и (2) равносильна системе уравнений (1) и (3) = (1) − (2) или же системе уравнений (1) и (1) + (2). Докажите это самостоятельно. (В конце параграфа мы рассмотрим указанные преобразования подробнее.) Для нашей системы записываем:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x=7, & (1) \\ x^2+y^2+y=6 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2+x=7, & (1) \\ x-y=1. & (1)-(2) \end{cases}$$

Далее следуем «проторенной дорожкой» метода подстановки — закончите решение этим методом самостоятельно. □

Наконец, рассмотрим некоторую модификацию метода подстановки.

Пример 4.2.5. Систему

$$\begin{cases} x+y=3, & (1) \\ x^3+y^3=9 & (2) \end{cases}$$

можно сразу решать подстановкой: уравнение (1) переписывается в виде $y=3-x$, и при подстановке этого выражения в уравнение (2) получится квадратное уравнение (кубы x^3 и $(-x)^3=-x^3$ взаимно уничтожаются). Однако, хочется разложить левую часть уравнения (2), т. е. переписать уравнение в виде

$$(2) \iff (x+y)(x^2-xy+y^2)=9,$$

и подставить в левую часть вместо выражения $x+y$ его значение 3 из уравнения (1). Таким образом, речь идет о подстановке уже не выражения одной переменной системы через другую, а о подстановке целого выражения от обеих переменных.

Формально ситуацию можно описать следующим образом. Имеется система от переменных x, y вида

$$\begin{cases} f(x, y) = A, \\ F(x, y, f(x, y)) = 0 \end{cases}$$

(здесь A может быть и числом, как в данном примере, и выражением от переменных x и y). Спрашивается, равносильна ли этой системе система

$$\begin{cases} f(x, y) = A, \\ F(x, y, A) = 0, \end{cases}$$

полученная подстановкой выражения $f(x, y) = A$ во второе уравнение системы? Ответ *положительный* — вторая система равносильна первой. Доказательство проводится так же, как обоснование общей схемы обычной подстановки. Проведите его самостоятельно, а затем закончите решение рассмотренной конкретной системы описанным *методом подстановки выражения*. □

4.2.3. Однородные системы

Однородные системы — это отнюдь не системы, состоящие из однородных уравнений, рассмотренных в п. 4.1.3. Системы однородных уравнений имеют, как правило, единственное решение — *нулевое*, то есть $(x; y) = (0; 0)$ (вспомните геометрическую интерпретацию таких уравнений). ***Однородными*** называются системы, которые могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} P_m(x, y) = P_n(x, y), \\ Q_m(x, y) = Q_n(x, y), \end{cases} \qquad (*)$$

где P_m и Q_m — однородные многочлены степени m, а P_n и Q_n — однородные многочлены степени n. В частности, P_n и Q_n могут быть ненулевыми константами (случай $n = 0$). Также допускается, что P и Q — не многочлены, а *однородные выражения* от x и y, приводимые к виду дробей

$$\frac{p_r(x, y)}{q_s(x, y)},$$

где p_r и q_s — уже однородные многочлены степеней r и s, соответственно. Для этих дробей вводится понятие *степени*

однородности, которая равна $r - s$. Так, например, дробно-рациональные выражения

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad \frac{x+y}{x^2+y^2}, \quad \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

являются однородными степеней 0, -1 и 2, соответственно.

Если уравнения системы $(*)$ перемножить «крест-накрест», по «схеме»

$$\begin{cases} P_m & = & P_n, \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & \times & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ Q_m & = & Q_n, \end{cases}$$

то получится *однородное уравнение* степени $m + n$:

$$P_m Q_n = P_n Q_m \iff P_m Q_n - P_n Q_m = S_{m+n} = 0. \qquad (**)$$

Решая известными нам методами (см. п. 4.1.3) это однородное уравнение, мы получим *линейные зависимости* между x и y,

$$y = k_1 x, \quad y = k_2 x, \quad \ldots,$$

а может быть, вдобавок, и случай $x = 0$, y — любое. Остается воспользоваться методом подстановки. Однако, подставлять выражения $y = k_i x$ нужно *в оба* уравнения системы $(*)$, так как уравнение $(**)$ является *следствием* из уравнений системы $(*)$, которое не может заменить (как то было в примере 4.2.4) ни одно из уравнений исходной системы. Запишем символическую ***схему решения однородных систем***:

$$\begin{cases} P_m = P_n, \\ Q_m = Q_n \end{cases} \iff \begin{cases} P_m = P_n, \\ Q_m = Q_n, \\ S_{m+n} = 0 \end{cases} \iff (1) \vee (2) \vee \ldots,$$

где (1), (2), ... — решаемые методом подстановки системы

$$(1) \quad \begin{cases} P_m = P_n, \\ Q_m = Q_n, \\ y = k_1 x, \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} P_m = P_n, \\ Q_m = Q_n, \\ y = k_2 x, \end{cases} \qquad \ldots$$

(коэффициенты k_i суть корни отвечающего однородному уравнению $S_{m+n}(x,y) = 0$ полиномиального уравнения $S_{m+n}(1,k) = 0$ степени $m + n$ относительно вспомогательной переменной

$k = \frac{y}{x}$ — см. п. 4.1.3; заметим, что к системам (1), (2), ... может добавиться и система, отвечающая случаю $x = 0$).

Пример 4.2.6. Система

$$\begin{cases} 2x^2 = x + y, \\ y^2 = 2x - y \end{cases}$$

является однородной: слева квадраты, справа — первые степени. Перемножение крест-накрест приводит к однородному уравнению степени 3:

$$2x^2(2x - y) = y^2(x + y) \;\Leftrightarrow\; 4x^3 - 2x^2y = xy^2 + y^3 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; y^3 + xy^2 + 2x^2y - 4x^3 = 0.$$

Если $x = 0$, то и $y = 0$ — получаем тривиальное решение $(x;\, y) = (0;\, 0)$. Если $x \neq 0$, то делим обе части уравнения на x^3, вводим переменную $\frac{y}{x} = k$ и получаем кубическое относительно k уравнение

$$k^3 + k^2 + 2k - 4 = 0.$$

Число $k_1 = 1$ является корнем этого уравнения. Выделим в его левой части сомножитель $k - 1$:

$$k^3 + k^2 + 2k - 4 = (k^3 - k^2) + (2k^2 - 2k) + (4k - 4) = (k - 1)(k^2 + 2k + 4).$$

Это произведение обращается в нуль только при $k = k_1 = 1$, ибо дискриминант его квадратичного сомножителя $D = 4 - 16 < 0$. Значит, $\frac{y}{x} = 1$, и наше однородное кубическое уравнение эквивалентно линейному однородному уравнению $y = x$. Делаем подстановку $y = x$ в исходную систему:

$$\begin{cases} 2x^2 = x + x, \\ x^2 = 2x - x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = x, \\ x^2 = x \end{cases} \iff x^2 - x = 0.$$

Следовательно, $x = 0$ или 1. Соответственно этому, $y = x = 0$ или 1.

Ответ: $(x;\, y) = (0;\, 0), (1;\, 1)$. □

В принципе, в только что рассмотренной системе можно *с самого начала* сделать подстановку: из первого уравнения получаем, что

$$y = 2x^2 - x,$$

и после подстановки этого выражения во второе уравнение получится уравнение относительно x степени 4 (а не кубическое, как

в приведенном решении). Правда, в этом уравнении,

$$(2x^2 - x)^2 = 2x - (2x^2 - x) \iff 4x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 3x = 0,$$

сразу выделяется множитель x, а вслед за ним и еще один очевидный множитель $x - 1$. Тем самым получающееся уравнение степени 4 будет «вполне разложено»:

$$x(x-1)(4x^2+3) = 0 \iff x = 0 \lor x = 1,$$

и так далее. Однако далеко не всегда, как вы увидите, решая однородные системы из «Упражнений», ситуация столь благополучная. Нередко бывает так, что без «соображений однородности» не обойтись.

Еще одно замечание. При первом способе решения после подстановки выражения $y = x$ в уравнения исходной системы получились *эквивалентные* (но, заметьте, *не одинаковые*!) уравнения $2x^2 = 2x$ и $x^2 = x$. Опять-таки, и вы это тоже увидите при решении систем из «Упражнений», так бывает довольно часто, хотя и не всегда. Приведем другой вариант схемы решения однородных систем, при котором подстановки $y = k_i x$ достаточно сделать только в одно из уравнений системы. «Цена», которую за это приходится «платить» — рассмотрение дополнительного случая:

$$\begin{cases} P_m = P_n, \\ Q_m = Q_n \end{cases} \iff \begin{cases} P_m = P_n, \\ Q_m = 0, \\ Q_n = 0 \end{cases} \lor \begin{cases} Q_m = Q_n, \\ \dfrac{P_m}{Q_m} = \dfrac{P_n}{Q_n}. \end{cases}$$

Последнее уравнение второй системы[1)] сводится к получающемуся при перекрестном перемножении уравнению $P_m Q_n - P_n Q_m = 0$, но с дополнительными ограничениями $Q_m \neq 0$ и $Q_n \neq 0$. После его решения подстановка делается только во второе уравнение исходной системы — первое уравнение, $P_m = P_n$ выполняется «автоматически» (объясните, почему).

Указанная схема «почленного деления» — общая, она применима к любой системе:

$$\begin{cases} A = B, & (1) \\ C = D & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} A = B, & (1) \\ C = 0, & \\ D = 0 & \end{cases} \lor \begin{cases} C = D, & (2) \\ \dfrac{A}{C} = \dfrac{B}{D} & \dfrac{(1)}{(2)} \end{cases}$$

(последнее уравнение нередко символически записывают как $\frac{(1)}{(2)}$, как у нас и указано). Конечно, эта схема нуждается в обосновании — проведите его самостоятельно.

Вопрос: почему в последних системах приведенных схем оставлено второе уравнение исходной системы ($Q_m = Q_n$, или (2)), а не первое?

— Конечно, для того, чтобы обеспечить *обратный переход* — от последней системы (с дробным уравнением) к исходной. Этот

[1)] Обратите внимание: оно *безразмерное*!

переход осуществляется почленным умножением уравнения $\frac{(1)}{(2)}$ на оставленное в системе уравнение (2).

Для системы из примера 4.2.6 решение только что изложенным методом выглядит так. Рассмотрим два случая:

1) $y^2 = 2x - y = 0$; тогда $y = 0$, поэтому $2x = 0$ и $x = 0$, — получается нулевое решение $(x; y) = (0; 0)$;

2) $y^2 = 2x - y \neq 0$. Тогда делим почленно первое уравнение на второе и записываем систему

$$\begin{cases} y^2 = 2x - y, \\ \dfrac{2x^2}{y^2} = \dfrac{x+y}{2x-y}. \end{cases}$$

Последнее уравнение — однородное степени однородности 0, и дальше — копия решения с перекрестным умножением, но с добавлением ограничений $y^2 \neq 0$, $2x - y \neq 0$. Учитывая первое уравнение $y^2 = 2x - y$, можно ограничиться одним из этих ограничений (*обратите внимание* на это соображение: оно нередко упрощает решения задач), например, просто $y \neq 0$.

Выигрыш при втором способе решения системы из примера 4.2.6 в том, что получающееся выражение y через x ($y = x$) придется подставлять только во второе уравнение исходной системы. В данном примере этот способ длиннее, чем способ с перекрестным умножением. Однако, если в правых частях уравнений решаемой однородной системы стоят константы (числа), отличные от нуля, то второй способ укорачивает решение, так как необходимость рассматривать первый случай (т. е. первую из систем совокупности, с условиями $Q_m = Q_n = 0$ или $C = D = 0$) отпадает. Иными словами, система вида

$$\begin{cases} A = a, \\ C = c \end{cases}$$

(a и c — числа) в случае $c \neq 0$ эквивалентна системе

$$\begin{cases} C = c, \\ \dfrac{A}{C} = \dfrac{a}{c} \end{cases}$$

(обдумайте!).

Пример 4.2.7. Систему

$$\begin{cases} xy = 2, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

мы уже решали методом подстановки — сведением к биквадратному уравнению (см. пример 4.2.2). Но эта система к тому же и однородная, причем имеет только что рассмотренный

вид. Значит, она эквивалентна системе

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ \dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

(проще было бы, наоборот, разделить второе уравнение на первое, но мы не будем отступать от описанной схемы, даже в нумерации уравнений). Решаем второе уравнение полученной системы как однородное:

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{2}{5} \iff \begin{cases} 5xy=2(x^2+y^2), \\ x^2+y^2\neq 0. \end{cases} \qquad (a)$$

Случай $x=0$ при решении уравнения (a) можно не рассматривать, сославшись на то, что произведение $xy=2\neq 0$. Если же $x\neq 0$, то ограничение $x^2+y^2\neq 0$ заведомо выполнено, а после деления уравнения (a) на x^2 приходим к квадратному относительно переменной $\dfrac{y}{x}=k$ уравнению:

$$5k=2(1+k^2) \iff 2k^2-5k+2=0 \iff k=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}=\left[\begin{array}{l} 2, \\ \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Таким образом, наша система эквивалентна совокупности двух совсем простых систем, решаемых линейной подстановкой:

$$1)\ \begin{cases} x^2+y^2=5, \\ y=2x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+4x^2=5, \\ y=2x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2=1, \\ y=2x; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x^2+y^2=5, \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+\frac{1}{4}x^2=5, \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2=4, \\ y=\frac{1}{2}x. \end{cases}$$

Конечно, получаем тот же *ответ*:

$$\{(1;\ 2), (-1;\ -2), (2;\ 1), (-2;\ -1)\}.$$

Судите сами, какой из методов: последний или сведение к биквадратному уравнению, — проще, красивее. □

В заключение отметим, что при решении однородных систем вида $(*)$ $(P_m(x,y)=P_n(x,y),\ Q_m(x,y)=Q_n(x,y))$ как первым, так и вторым способами в действительности нам требовалась лишь однородность уравнения

$$P_mQ_n-P_nQ_m=0,$$

т. е. равенство степеней однородности получающихся при перекрестном умножении левой и правой частей уравнений. Но для

этого вовсе не обязательно, чтобы степени однородности у левой и правой частей второго уравнения системы были точно такими же, как и у частей первого уравнения. Если система имеет более общий вид

$$\begin{cases} P_m(x,y) = P_n(x,y), \\ Q_r(x,y) = Q_s(x,y) \end{cases}$$

(r и s — степени однородности левой и правой частей второго уравнения), то для однородности получающегося при перекрестном умножении уравнения

$$P_m Q_s = P_n Q_r$$

нужно только, чтобы степени левой и правой частей совпали, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$m + s = n + r \iff m - n = r - s.$$

Это заведомо так, если $r = m$, $s = n$, но такая возможность не единственна. Например, для системы типа

$$\begin{cases} P_3(x) = P_1(x), \\ Q_2(x) = Q_0 \end{cases}$$

(Q_0 — ненулевая константа) нужное условие $3 - 1 = 2 - 0$ выполняется, поэтому ее можно решать и методом перекрестного умножения, и методом почленного деления. Конкретные примеры таких систем можно найти в «Упражнениях».

4.2.4. Исключение переменных. Равносильные линейные преобразования

При подстановке выражения $y = \varphi(x)$ из одного уравнения системы в другое уравнение $F(x,y) = 0$ мы получаем уравнение $f(x) = F(x,\varphi(x)) = 0$, в которое входит только переменная x, т. е. исключаем переменную y. Эта идея ***исключения переменных*** очень важна в алгебре и является более общей, чем идея подстановки. В случае двух переменных суть этой идеи в том, чтобы из уравнений системы от x, y получить, вывести уравнение только с одной переменной.

Пример 4.2.8. Решать систему

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 4y - 1 = 0, & (1) \\ xy + 2x + 2y - 2 = 0 & (2) \end{cases} \quad (*)$$

подстановкой (скажем, из уравнения (2): $y = \dfrac{2-2x}{x+2}$, с предварительным разбором случая $x + 2 = 0$) как-то не очень хочется. Однако нетрудно заметить, что если умножить уравнение (2)

на *два* и почленно вычесть результат из уравнения (1), то тем самым из системы исключится переменная y — получится уравнение только от x:

$$(1) - 2 \cdot (2): \qquad x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Из него немедленно находим, что $x = 1$ или $x = 3$. После подстановки этих двух значений в систему $(*)$ будем иметь:

1) если $x = 1$, то

$$(*) \iff \begin{cases} 1 + 2y + 4y - 1 = 0, \\ y + 2 + 2y - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6y = 0, \\ 3y = 0 \end{cases} \iff y = 0;$$

соответствующим решением системы $(*)$ будет $(x;\, y) = (1;\, 0)$;

2) если $x = 3$, то

$$(*) \iff \begin{cases} 9 + 6y + 4y - 1 = 0, \\ 3y + 6 + 2y - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10y = -8, \\ 5y = -4 \end{cases} \iff y = -\frac{4}{5},$$

и получаем второе решение системы: $(x;\, y) = (3;\, -\frac{4}{5})$.

Ответ: $(x;\, y) = (1;\, 0), (3;\, -\frac{4}{5})$. □

Можно трактовать исключение y в примере 4.2.8 в рамках модификации метода подстановки, рассмотренной в конце п. 4.2.2:

$$(*) \iff \begin{cases} x^2 + 2(xy + 2y) - 1 = 0, \\ xy + 2y = 2 - 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 2(2 - 2x) - 1 = 0, \\ xy + 2y = 2 - 2x. \end{cases}$$

Однако, вы, наверное, согласитесь, что такое решение уж чересчур «изысканное» — неясно, как до него догадаться, если не иметь «в голове» идею исключения.

Как и при решении однородных систем, подстановка в предыдущем примере найденных значений переменной x в оба уравнения исходной системы $(*)$ привела в том и другом случае (при $x = 1$ и $x = 3$) к *различным*, но *равносильным* уравнениям от y. Конечно, это не случайно. Вспомним, какие преобразования были произведены с уравнениями (1) и (2): мы умножили уравнение (2) на число $\lambda = 2$ и вычли результат из уравнения (1). Оказывается, при этом можно оставить только одно из уравнений системы, т. е. перейти от системы $(*)$ к *равносильной* системе

$$\begin{cases} (1) - \lambda \cdot (2), \\ (1) \end{cases} \quad \text{или к более удобной системе} \quad \begin{cases} (1) + k \cdot (2), \\ (2) \end{cases}$$

(у нас $\lambda = 2$, $k = -2$). Справедливо ***общее утверждение***:

если в системе уравнений одно из этих уравнений заменить на его сумму с другим уравнением, умноженным на произвольное

число, то получится система, равносильная исходной — всегда

$$\begin{cases}(1),\\(2)\end{cases} \iff \begin{cases}(1)+k\cdot(2),\\(2).\end{cases}$$

Доказательство этого факта, по сути дела, очевидно: если выполнены уравнения (1) и (2), то справедливы и уравнение $k\cdot(2)$, и уравнение $(3)=(1)+k\cdot(2)$ (равенство здесь, как и ранее, означает *совпадение* уравнений, а действия с уравнениями — сложение или вычитание, умножение на число — разумеется, *почленные*). Наоборот, если выполняются уравнения второй системы, т. е. $(3)=(1)+k\cdot(2)$ и (2), то выполняется и уравнение $k\cdot(2)$, а с ним — и уравнение $(3)-k\cdot(2)\equiv(1)$, т. е. выполняются оба уравнения, (2) и (1), первой системы. Вот и всё доказательство.

Равносильные преобразования систем по указанной схеме называют (элементарными) *линейными*, так как новое уравнение $(1)+k\cdot(2)$ есть *линейная комбинация* исходных уравнений. Рассматриваются и более сложные ***равносильные линейные преобразования***, в которых заменяются сразу оба уравнения исходной системы — в новой системе исходные уравнения (1) и (2) как бы «перепутываются» между собой. Рассмотрим сначала простейший, но важный случай такого преобразования, который хорошо бы запомнить.

Пример 4.2.9. Систему

$$\begin{cases}x+y=4, & (1)\\ x-y=2 & (2)\end{cases}$$

вряд ли кто-нибудь будет решать подстановкой. Чтобы найти x, достаточно сложить уравнения (1) и (2), а чтобы найти y — вычесть эти уравнения. Фактически, нужно перейти к системе

$$\begin{cases}2x=6,\\2y=2\end{cases}\left|\begin{matrix}(1)+(2)\\(1)-(2)\end{matrix}\right. \iff \begin{cases}x=3,\\y=1\end{cases} \iff (x;\,y)=(3;\,1).$$

Ответ: $\{(3;\,1)\}$. □

Использованное в примере преобразование системы *всегда* является равносильным: для любой системы

$$\begin{cases}(1),\\(2)\end{cases} \iff \begin{cases}(1)+(2)=(3),\\(1)-(2)=(4).\end{cases}$$

То, что из уравнений (1), (2) следуют уравнения (3) и (4), очевидно. Обратно, чтобы из уравнений (3) и (4) получить уравнения (1) и (2), достаточно проделать «обратное» линейное преобразование:

$$\frac{1}{2}\big((3)+(4)\big)=(1),\qquad \frac{1}{2}\big((3)-(4)\big)=(2)$$

(коэффициенты $\frac{1}{2}$ отвечают почленному делению уравнений на 2).

Пример 4.2.10. При решении системы

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, & (1) \\ 3x - 4y = 2 & (2) \end{cases}$$

методом подстановки появятся дроби. Чтобы не возиться с ними, можно исключить из системы, например, переменную x, перейдя к уравнению

$$3 \cdot (1) - 2 \cdot (2) = (3),$$

т. е.

$$(6x - 9y) - (6x - 8y) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \iff -y = -1 \iff y = 1.$$

Подстановка значения $y = 1$ в исходную систему опять дает пару равносильных уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3 = 1, \\ 3x - 4 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 4, \\ 3x = 6 \end{cases} \iff x = 2.$$

Ответ: $(x;\, y) = (2;\, 1)$. □

Опять-таки, получение равносильных уравнений в этом примере можно было предвидеть заранее: для любых чисел $k \neq 0$ и l справедлив равносильный переход

$$\begin{cases} (1), \\ (2) \end{cases} \iff \begin{cases} k \cdot (1) + l \cdot (2) = (3), \\ (2). \end{cases}$$

Обоснуйте это самостоятельно. Обязательно ли требование $k \neq 0$?

К исключению переменных и методу подстановки в системах, а также к использованию (в различных целях) равносильных линейных преобразований систем мы еще вернемся. Теперь же обратимся к другому кругу идей, знакомых нам по предыдущим главам.

§ 4.3. Решение систем: метод замены. Симметрические системы

Метод подстановки и вообще исключения одной из двух переменных можно назвать *методом сведéния систем уравнений к уравнениям с одной переменной*. Уравнения же мы

решаем путем их *упрощения* — понижения степени, сводящего, в идеале, исходные уравнения к простейшим и стандартным. Мы рассматривали в § 2.4 два метода такого упрощения: метод замены и метод разложения. Эти методы, их идеи можно применить и к упрощению систем уравнений, к понижению их степени (после чего, как правило, и делается подстановка).

4.3.1. Метод замены

При решении систем используются два типа замен:

I. *Замена* (введение новой переменной) *в одном уравнении*;

II. *Полная замена* — переход к новым переменным в обоих уравнениях системы.

Пример 4.3.1. Систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{2}, \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases}$$

решить методом подстановки довольно проблематично. Однако в первом уравнении «напрашивается» *замена* — введение *одной* переменной, $z = \dfrac{y}{x}$. Получается уравнение

$$\frac{1}{z} + z = \frac{5}{2},$$

которое немедленно решается:

$$z + \frac{1}{z} - \frac{5}{2} = 0 \iff \begin{cases} 2z^2 - 5z + 2 = 0, \\ z \neq 0. \end{cases} \iff 2z^2 - 5z + 2 = 0.$$

Дискриминант квадратного уравнения $D = 25 - 16 = 9$, корни суть

$$z = \frac{5 \pm 3}{4} = \left[\begin{array}{l} 2, \\ \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

(это уравнение нам уже встречалось!). Значит, $\dfrac{y}{x} = 2$ или $\dfrac{1}{2}$, соответственно, $y = 2x$ или $y = \dfrac{1}{2}x$, причем $x \neq 0$, и исходная система эквивалентна совокупности двух систем, **(A)** и **(B)**, где

$$\textbf{(A)} \begin{cases} y = 2x, \quad x \neq 0, \\ x^3 - y^3 = 7; \end{cases} \qquad \textbf{(B)} \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x, \quad x \neq 0, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$$

Решаем эти системы — конечно, подстановкой:

$$\textbf{(A)} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x, & x\neq 0, \\ x^3-8x^3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x, & x\neq 0, \\ -7x^3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x, & x\neq 0, \\ x^3=-1, \end{cases}$$

откуда $x=-1$, $y=2x=-2$, $(x;\,y)=(-1;\,-2)$;

$$\textbf{(B)} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x, & x\neq 0, \\ x^3-\frac{1}{8}x^3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x, & x\neq 0, \\ \frac{7}{8}x^3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x, & x\neq 0, \\ x^3=8, \end{cases}$$

откуда $x=2$, $y=\frac{1}{2}x=1$, $(x;\,y)=(2;\,1)$.

Ответ: $(x;\,y)=(-1;\,-2),(2;\,1)$. □

Теперь приведем пример системы, в которой вводятся две новые переменные.

Пример 4.3.2. В системе

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=2, \\ \dfrac{9}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}=2 \end{cases}$$

лучше всего, «не мудрствуя лукаво», ввести обозначения

$$\frac{1}{x+y}=a, \qquad \frac{1}{x-y}=b$$

и записать получающуюся линейную систему:

$$\begin{cases} 3a+b=2, & (1) \\ 9a-b=2. & (2) \end{cases}$$

Уж ее-то можно решить многими способами — например, так:

$$\begin{cases} (1), \\ (2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (1), \\ (1)+(2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3a+b=2, \\ 12a=4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3\cdot\frac{1}{3}+b=2, \\ a=\frac{1}{3}, \end{cases}$$

и $(a;\,b)=\left(\frac{1}{3}\,;\,1\right)$. Остается найти значения x и y из системы уравнений замены:

$$\frac{1}{x+y}=\frac{1}{3} \quad \& \quad \frac{1}{x-y}=1,$$

или

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x=4, \\ 2y=2 \end{cases} \Longleftrightarrow (x;\,y)=(2;\,1).$$

Ответ: $\{(2;\,1)\}$. □

Как видите, замена обеих переменных позволила свести решение системы, оба уравнения которой имеют степень 2 (степень дробно-рационального уравнения от x и y определяется как степень уравнения, получающегося при освобождении от знаменателей), к решению двух линейных систем.

А сейчас мы рассмотрим частный, но красивый и важный в математике и ее приложениях тип систем, также решаемых методом замены, но далеко не такой очевидной, как в разобранных примерах.

4.3.2. Системы Виета

Если оба уравнения системы симметричны относительно x и y, т. е. не меняются, с точностью до порядка сомножителей и слагаемых, при перестановке местами переменных x и y (когда мы всюду вместо x пишем y, а вместо y — наоборот, x; см. п. 4.1.4), то система называется ***симметрической***.

Простейшая из симметрических систем (с двумя переменными) — это ***система Виета***, в которой фигурируют два самых простых симметрических многочлена от x и y:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy \quad = b \end{cases} \qquad (*)$$

(здесь a и b — данные числа; конечно, «многочлен» xy было бы точнее называть одночленом — мономом). Как и система уравнений вида

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x - y = b, \end{cases}$$

соответствующая задаче поиска двух чисел по их сумме и разности, система Виета $(*)$ также имеет классическую арифметическую формулировку: она формализует задачу о нахождении двух чисел по их сумме и произведению.

Знаменитый *Франсуа Виет*, придворный математик французского короля *Генриха* IV *Наваррского* (мужа «королевы Марго»!), жил в XVI–XVII вв. (1540–1603). Наиболее примечательным его достижением является введение в математику *буквенного исчисления*, хотя сам Виет особенно ценил открытые им соотношения между корнями и коэффициентами многочленов, которые как раз и составляют *системы Виета*, рассматриваемые для многочленов любой степени (см. § 2.2).

Между тем, системы Виета с двумя переменными (вида $(*)$) решали еще в Древнем Вавилоне — за три тысячи лет до Виета!

Например, такого типа система (конечно, в словесной форме) встречается в клинописном тексте времен правления Хаммурапи (около 1750 г. до н. э.). Так что такие системы можно было бы назвать и «системами Хаммурапи»!

Конечно, систему $(*)$ можно решать методом подстановки:

$$(*) \iff \begin{cases} y = a - x, \\ x(a - x) = b \end{cases} \iff \begin{cases} y = a - x, \\ x^2 - ax + b = 0, \end{cases} \qquad (**)$$

и дальнейшее зависит от дискриминанта квадратного уравнения $(**)$. Если дискриминант $D = a^2 - 4b$ положителен, то корни уравнения суть

$$x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{D}{4}}, \quad x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{D}{4}}.$$

Из уравнения подстановки $y = a - x$ находим соответствующие значения y:

$$y_1 = a - x_1 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{D}{4}}, \quad y_2 = a - x_2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{D}{4}}.$$

Получилось, что $y_1 = x_2$, а $y_2 = x_1$, так что решениями системы $(*)$ являются *две пары*

$$(x_1; y_1) = (x_1; x_2) \ \text{ и } \ (x_2; y_2) = (x_2; x_1),$$

составленные из двух корней уравнения $(**)$.

В случае, когда дискриминант $D = 0$, уравнение $(**)$ имеет единственный корень $x = x_0$, по которому находится соответствующее значение y:

$$x = x_0 = \frac{a}{2} \implies y = y_0 = a - x_0 = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}.$$

Значит, $y_0 = x_0$, и решение у системы $(*)$ *единственное*: это пара $(x_0; x_0)$, где x_0 — единственный корень уравнения $(**)$.

Наконец, если дискриминант $D = a^2 - 4b$ уравнения $(**)$ отрицателен, то это уравнение корней не имеет, поэтому и система $(*)$ в этом случае *не имеет решений*.

Заметим, что в первых двух случаях оказывается, что решения системы Виета отвечают *полным наборам корней* квадратного трехчлена $x^2 - ax + b$, т. е. его *разложениям на линейные множители*:

$$x^2 - ax + b = (x - x_1)(x - x_2) \ \text{ или } \ x^2 - ax + b = (x - x_0)(x - x_0) = (x - x_0)^2.$$

Таким образом, решая систему $(*)$ методом подстановки, мы пришли к старой знакомой *теореме Виета* для квадратных уравнений из курса алгебры 9 класса и из § 2.2.

Уравнение $(**)$, только записанное через «нейтральную» (независимую от сделанной подстановки) переменную t, т. е.

уравнение

$$t^2 - at + b = 0, \qquad \textbf{(V)}$$

будем называть *уравнением Виета* для данного случая (для рассматриваемой системы Виета). Напомним формулировку теоремы Виета в том виде и тех обозначениях, в которых ее удобно применять при решении систем Виета с двумя переменными x и y.

Теорема (*о решениях систем Виета с двумя переменными*). *Пара чисел* $(x; y) = (x_1; x_2)$ *является решением системы Виета* $(*)$ ***тогда и только тогда, когда*** *числа* x_1, x_2 *образуют полный набор корней уравнения Виета* **(V)**, *т. е. когда его левая часть представляется в виде произведения* $t^2 - at + b = (t - x_1)(t - x_2)$.

(Напомним, что для доказательства этой теоремы формулы для корней квадратного уравнения *не нужны* — см. § 2.2.)

Из приведенной теоремы получается следующая *схема решения системы Виета* $(*)$.

(1) *Составляем уравнение Виета* **(V)**: $t^2 - at + b = 0$.

(2) *Находим его дискриминант* $D = a^2 - 4b$.

(3) В зависимости от знака (и значения) дискриминанта D *выписываем ответ для системы Виета* $(*)$, а именно:

А) если $D > 0$, то $(x; y) = (t_1; t_2), (t_2; t_1)$, где $t_1 \neq t_2$ — корни уравнения Виета (в этом случае их *два*);

Б) если $D = 0$, то $(x; y) = (t_0; t_0)$, где t_0 — *единственный* в данном случае корень уравнения Виета;

В) если $D < 0$, то *система* $(*)$ *решений не имеет* (равно как и уравнение Виета).

Использование этой схемы при решении систем Виета куда более удобно и экономно, чем подстановка, особенно когда приходится решать *много* таких систем. Да и «возможностей ошибиться» при ее использовании меньше, а это важно.

4.3.3. Общие симметрические системы

Оказывается, *произвольные симметрические системы с помощью замены сводятся*, в конечном счете, *к системам Виета*. Объясним, как это делается, сначала на конкретной системе.

Пример 4.3.3. Рассмотрим симметрическую систему

$$\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

В принципе, из первого уравнения можно сделать подстановку

$$y = \frac{5 - x}{x + 1}$$

во второе уравнение системы, но, по-видимому, перспектива решать получающееся уравнение степени 4 большого энтузиазма не вызывает. Вместо этого попробуем сделать *симметрическую замену*, вводя новые переменные

$$x + y = a, \qquad xy = b.$$

Тогда первое уравнение системы становится линейным: $a + b = 5$. Второе уравнение тоже нетрудно записать через переменные a и b:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2b,$$

поэтому получается уравнение $a^2 - 2b = 5$. Итак, после замены приходим к совсем простой системе

$$\begin{cases} a + b = 5, \\ a^2 - 2b = 5, \end{cases} \qquad \textbf{(A)}$$

решаемой, конечно, *линейной подстановкой*:

$$\textbf{(A)} \iff \begin{cases} b = 5 - a, \\ a^2 - 2(5 - a) = 5; \end{cases} \qquad \textbf{(B)}$$

$$\textbf{(B)} \iff a^2 + 2a - 15 = 0 \iff a = -1 \pm \sqrt{16} = -1 \pm 4 = \left[\begin{array}{l} 3, \\ -5, \end{array}\right.$$

и, соответственно этому, $b = 5 - a = 2$ или 10, а решения системы **(A)** суть $(a;\, b) = (3;\, 2)$ или $(-5;\, 10)$.

Уравнения замены $(x + y = a,\ xy = b)$ дают две *системы Виета* (!), совокупности которых равносильна исходная система:

$$\textbf{(I)} \begin{cases} x + y = 3, \\ xy \ \ = 2; \end{cases} \qquad \textbf{(II)} \begin{cases} x + y = -5, \\ xy \ \ = 10. \end{cases}$$

Решаем их по нашей схеме:

$$\textbf{(I)} \longrightarrow \textbf{(V)}: \ t^2 - 3t + 2 = 0 \iff (t - 1)(t - 2) = 0 \iff t = 1 \vee t = 2;$$

соответственно, $(x;\ y) = (1;\ 2), (2;\ 1)$;

$$\textbf{(II)} \longrightarrow \textbf{(V)}:\ t^2 + 5t + 10 = 0;\ D = 25 - 40 < 0,$$

поэтому *решений нет*.

Ответ: $\{(1;\ 2), (2;\ 1)\}$. □

В системе из этого примера можно было поступить иначе: умножить первое уравнение на 2, сложить его со вторым и перейти к равносильной системе

$$\begin{cases}(1),\\(2) + 2\cdot(1)\end{cases} \iff \begin{cases}x + y + xy = 5,\\x^2 + y^2 + 2(x + y) + 2xy = 15,\end{cases}$$

во втором уравнении которой можно сделать замену $x + y = z$: получится квадратное уравнение $z^2 + 2z - 15 = 0$. Дальнейший ход решения — это более длинный вариант решения, изложенного выше.

Оказывается, *симметрическая замена* $x + y = a$, $xy = b$ *может быть осуществлена в любой симметрической системе*, причем за счет замены монома xy степени 2 на моном первой степени, т. е. на новую переменную b, степени некоторых симметрических уравнений могут понизиться (как в приведенном примере). Это утверждение основывается на *теореме Варинга—Гаусса*, называемой также «основной теоремой теории симметрических функций». Сформулируем эту теорему для случая двух переменных.

Любой симметрический многочлен $S(x,y)$ *можно выразить через элементарные симметрические многочлены* $a(x,y) = x + y$ *и* $b(x,y) = xy$ *с помощью «целых» арифметических операций* (сложения, вычитания и умножения); иными словами, $S(x,y)$ *можно записать как многочлен от* $a = a(x,y)$ *и* $b = b(x,y)$:

$$S(x,y) = p(a,b).$$

Аналогичным образом любое *рациональное симметрическое выражение* можно записать как рациональное выражение от введенных переменных a и b; например,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y + x}{xy} = \frac{a}{b},$$

и т. п. Вообще, в конкретных случаях соответствующая запись $S(x,y)$ через $x + y = a$ и $xy = b$ особого труда не составляет — попробуйте, например, самостоятельно вывести *формулы Жирара—Ньютона*, выражающие через a и b степенны́е суммы $\Sigma_n(x,y) = x^n + y^n$.

Первые две формулы — это

$$\Sigma_1 = x + y = a, \qquad \Sigma_2 = x^2 + y^2 = a^2 - 2b.$$

Далее,

$$\Sigma_3 = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = a(a^2 - 3b) = a^3 - 3ab$$

или же сразу:

$$\Sigma_3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = a^3 - 3ab;$$

$$\Sigma_4 = x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = (a^2-2b)^2 - 2b^2 = a^4 - 4a^2b + 2b^2,$$

и т. д.

Первым формулы для степенных сумм выписал французский математик, последователь Ф. Виета *Альберт Жирар*. *Ньютон* же в своем трактате «*Всеобщая арифметика*» вывел так называемые *рекуррентные* (от лат. **recurrens** — *возвращающийся*) *формулы*, позволяющие из выражений для двух последовательных сумм Σ_{n-1} и Σ_n,

$$\Sigma_m = x^m + y^m = p_m(a,b), \quad m = n, n-1,$$

найти выражение для следующей суммы Σ_{n+1}:

$$\begin{aligned}\Sigma_{n+1} &= x^{n+1} + y^{n+1} = (x^n + y^n)(x + y) - x^n y - xy^n = \\ &= (x^n + y^n)(x + y) - xy(x^{n-1} + y^{n-1}) = \\ &= a\Sigma_n - b\Sigma_{n-1} = a \cdot p_n(a,b) - b \cdot p_{n-1}(a,b) = p_{n+1}(a,b).\end{aligned}$$

С помощью этих формул можно, начиная с очевидных формул для сумм Σ_1 и Σ_2 (или даже с формул $\Sigma_0 = 2$ и $\Sigma_1 = a$), последовательно выписать формулы для сумм Σ_3, Σ_4, Σ_5 и т. д.

Зная, что степенные суммы Σ_n можно выразить через a и b, нетрудно доказать и теорему Варинга—Гаусса для симметрических многочленов от двух переменных. Если в такой многочлен входит симметрический *моном* cx^my^m, то он просто равен $c \cdot b^m$. Если же в симметрический многочлен $S(x,y)$ входит несимметрический одночлен cx^ky^m ($k \neq m$), то в $S(x,y)$ входит и симметричный к нему одночлен cx^my^k (коэффициент «c» — тот же самый). Сумму же этих двух одночленов легко выразить через b и соответствующую «чистую» степенную сумму: если, например, $k > m$, то запишем k в виде $k = m + r$. Тогда

$$cx^ky^m + cx^my^k = c(x^{m+r}y^m + x^my^{m+r}) = cx^my^m(x^r + y^r) = c \cdot b^m \cdot \Sigma_r,$$

а про Σ_r мы знаем, что эта сумма выражается через a и b. Так «по частям» можно записать через a и b весь многочлен $S(x,y)$.

Наши вычисления при записи сумм $x^2 + y^2$ и $x^3 + y^3$ через элементарные симметрические многочлены $a = x + y$ и $b = xy$ весьма напоминают преобразования, осуществлявшиеся при решении симметрических уравнений от одной переменной — уравнений вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \text{ или } ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

(см. § 2.4.). Конечно, это не случайно. После деления уравнения на x^2 (а второго уравнения — на x^3) можно ввести еще одну переменную, обозначив $\frac{1}{x}$ через y. Тогда *вместо уравнения можно записать систему* с двумя переменными:

$$\begin{cases} xy = 1, \\ ax^2 + bx + c + by + ay^2 = 0. \end{cases}$$

Из нее нам нужно найти только x, т. е. для всех решений $(x; y)$ системы взять только значения x. Ну а система, конечно, симметрическая! (*Обратите внимание*: получается, что не только системы решаются сведением к уравнениям с одной переменной, но и наоборот, *уравнения с одной переменной можно решать их сведением к системам с двумя* (и не только с двумя!) *переменными*. К этой идее мы вернемся в § 4.4.)

В § 2.4 мы рассматривали не только симметрические, но и близкие к ним кососимметрические уравнения. Аналогично, можно рассмотреть «кососимметрические системы», решаемые с помощью замены

$$x - y = a, \qquad xy = b.$$

Пример 4.3.4. Произведя указанную замену в системе

$$\begin{cases} x - y + xy = 3, \\ x^2 + y^2 = 5, \end{cases}$$

мы придем к более простой системе, решаемой подстановкой:

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ a^2 + 2b = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 3 - a, \\ a^2 + 2(3 - a) = 5. \end{cases} \qquad \textbf{(B)}$$

Находим переменную a:

$$\textbf{(B)} \iff a^2 - 2a + 1 = 0 \iff (a - 1)^2 = 0 \iff a = 1,$$

а затем и $b = 3 - a = 2$, так что система относительно a и b имеет единственное решение $(a; b) = (1; 2)$.

Следовательно, исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Это уже *не* система Виета, но она тоже сводится к квадратному уравнению линейной подстановкой $y = x - 1$. Впрочем, можно «схитрить» — записать систему в виде системы Виета относительно x и $-y$:

$$\begin{cases} x + (-y) = 1, \\ x \cdot (-y) = -2. \end{cases}$$

Составляем и решаем соответствующее «уравнение Виета»,

$$t^2 - t - 2 = 0 \iff a = \frac{1 \pm 3}{2} = \left[\begin{array}{l} 2, \\ -1, \end{array}\right.$$

записываем «решения» последней системы,

$$(x; -y) = (2; -1), (-1;\ 2),$$

откуда получаем «настоящие» решения:

$$(x; y) = (2;\ 1), (-1; -2).$$

(Конечно, по сути мы произвели частичную замену, причем как бы «в уме»: вместо y ввели переменную $z = -y$. Если системы — как исходную, так и итоговую, — записать через переменные x и z, то они будут настоящими симметрическими, относительно x и z.)

Ответ: $(x; y) = (2;\ 1), (-1; -2)$. □

В заключение вернемся к системе, уже решенной ранее двумя методами: подстановкой и из соображений однородности (см. примеры 4.2.4 и 4.2.9).

Пример 4.3.5. Система

$$\begin{cases} xy &= 2, \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{cases}$$

является однородной, а также и симметрической, причем после стандартной симметрической замены $x + y = a$, $xy = b$ получается вовсе тривиальная система:

$$\begin{cases} b = 2, \\ a^2 - 2b = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2, \\ a^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2, \\ a = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 2, \\ a = -3. \end{cases}$$

Уравнения замены дают две системы Виета:

$$\textbf{(I)} \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases} \qquad \textbf{(II)} \begin{cases} x + y = -3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Решаем их, как обычно, составлением соответствующих уравнений Виета:

$$\textbf{(I)} \longrightarrow \textbf{(V)}: t^2 - 3t + 2 = 0 \iff (t-1)(t-2) = 0 \iff t = 1 \vee t = 2;$$

соответственно, $(x;\ y) = (1;\ 2), (2;\ 1)$;

$$\textbf{(II)} \longrightarrow \textbf{(V)}: t^2 + 3t + 2 = 0 \iff (t+1)(t+2) = 0 \iff t = -1 \vee t = -2,$$

поэтому $(x;\, y) = (-1; -2), (-2; -1)$;

Ответ: $(x;\, y) = (1;\, 2), (2;\, 1), (-1; -2), (-2; -1)$. □

К этой системе мы вернемся и в четвертый раз — в следующем параграфе!

§ 4.4. Решение систем: метод разложения. Частные методы и приемы

Если одно из уравнений полиномиальной (целой рациональной) системы удается представить в *разложенном виде*, $AB = 0$, то система распадается на две *более простые системы*, т. е. сводится к *совокупности* более простых систем:

$$\begin{cases} AB = 0, \\ C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0, \\ C = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B = 0, \\ C = 0. \end{cases}$$

Еще более упростятся решаемые системы, если разложить можно *оба* уравнения исходной системы; правда, число полученных систем будет больше:

$$\begin{cases} AB = 0, \\ CD = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0, \\ C = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A = 0, \\ D = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B = 0, \\ C = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B = 0, \\ D = 0. \end{cases}$$

Заметим, что пока мы рассматриваем *целые* рациональные системы, все входящие в разложения уравнений выражения являются *всюду определенными*, так что никаких дополнительных ограничений на ОДЗ вводить в системы *не нужно*.

4.4.1. Решение систем методом разложения

Пример 4.4.1. Система

$$\begin{cases} x + y + xy = -1, & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

совершенно аналогична системе из примера 4.3.3, — она также симметрическая и легко решается стандартной симметрической заменой переменных. Но не торопитесь! Еще проще *разложить* первое уравнение системы:

$$(1) \iff x+y+xy+1=0 \iff (x+1)+y(x+1)=0 \iff (x+1)(y+1)=0,$$

так что система эквивалентна совокупности двух банальнейших систем

$$\begin{cases} x+1=0, & (1') \\ x^2+y^2=5 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} x=-1, \\ 1+y^2=5 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-1, \\ y^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-1, \\ y=\pm 2 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y+1=0, & (1'') \\ x^2+y^2=5 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} y=-1, \\ x^2+1=5 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-1, \\ x^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-1, \\ x=\pm 2. \end{cases}$$

Ответ: $(x;\ y) = (-1;\ 2), (-1; -2), (2;\ -1), (-2; -1)$. □

Довольно типичным случаем уравнений, допускающих разложение на множители, являются уравнения, в левых и правых частях которых стоят *квадраты* выражений (или чисел, т. е. просто неотрицательные числа, которые всегда являются квадратами). В этом случае

$$A^2 = B^2 \iff A = B \ \vee \ A = -B,$$

или, если хотите, то же самое, но записанное подлиннее:

$$A^2=B^2 \Leftrightarrow A^2-B^2=0 \Leftrightarrow (A-B)(A+B)=0 \Leftrightarrow A-B=0 \vee A+B=0.$$

Старая знакомая система из примеров 4.2.2, 4.2.7 и 4.3.5 относится к такому типу, но только после равносильного преобразования.

Пример 4.4.2. Переход от системы

$$\begin{cases} xy = 2, & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

к эквивалентной системе

$$\begin{cases} (1) \\ (2) + 2 \cdot (1) \end{cases} \iff \begin{cases} xy = 2, \\ x^2 + y^2 + 2xy = 9 \end{cases} \qquad \textbf{(A)}$$

позволяет *сразу* придти к совокупности систем Виета:

$$\textbf{(A)} \iff \begin{cases} xy = 2, \\ (x+y)^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = 2, \\ x+y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} xy = 2, \\ x+y = -3 \end{cases}$$

(дальше действуем, как в примере 4.3.5). Но еще более эффективным здесь будет «полное разложение». Равносильный переход

$$\begin{cases} (1), \\ (2) \end{cases} \iff \begin{cases} (2)+2\cdot(1), \\ (2)-2\cdot(1) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2+2xy=9, \\ x^2+y^2-2xy=1 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+y)^2=9, \\ (x-y)^2=1 \end{cases}$$

дает возможность разложить *два* уравнения и перейти к эквивалентной совокупности четырех *элементарнейших* уравнений:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=3, \\ x-y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=-1 \end{cases}$$

(см. пример 4.2.9). Разумеется, мы придем к прежнему ответу, но зато каким простым и изящным способом! □

4.4.2. Примечательный пример

Разберем задачу посложнее.

Пример 4.4.3. Систему

$$\begin{cases} x^3 = y - 3x, & (1) \\ y^3 = x - 3y, & (2) \end{cases}$$

обладающую какой-то неуловимой симметричностью, тоже можно решить многими способами. Если сделать просто *подстановку* $y = x^3 + 3x$ из уравнения (1) в уравнение (2), то получится ... полиномиальное уравнение степени 9 — этот путь кажется (пока!) малоперспективным. С другой стороны, эта система является *однородной*: слева кубы, справа — первые степени. При перекрестном перемножении уравнений (1) и (2) получится однородное уравнение степени 4 — уже лучше. Но мы пойдем третьим путем — складывая и вычитая уравнения (1) и (2), мы получим *два* уравнения, допускающие разложение на множители:

$$\begin{cases} (1), \\ (2) \end{cases} \iff \begin{cases} (1)+(2) \\ (1)-(2) \end{cases} \iff \begin{cases} x^3+y^3=-2x-2y, \\ x^3-y^3=-4x+4y \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)+2(x+y)=0, \\ (x-y)(x^2+xy+y^2)+4(x-y)=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2+2)=0, \\ (x-y)(x^2+xy+y^2+4)=0 \end{cases} \iff \textbf{(I)} \vee \textbf{(II)} \vee \textbf{(III)} \vee \textbf{(IV)},$$

где системы **(I)**–**(IV)** суть

$$\textbf{(I)} \begin{cases} x+y=0, \\ x-y=0; \end{cases} \qquad \textbf{(II)} \begin{cases} x+y=0, \\ x^2+xy+y^2+4=0; \end{cases}$$

$$\textbf{(III)} \begin{cases} x^2-xy+y^2+2=0; \\ x-y=0; \end{cases} \qquad \textbf{(IV)} \begin{cases} x^2-xy+y^2+2=0, \\ x^2+xy+y^2+4=0. \end{cases}$$

Система **(I)** банальна — она имеет единственное нулевое решение $(x;\, y) = (0;\, 0)$. Система **(II)** симметрическая, но, видимо, проще решить ее линейной подстановкой $y = -x$. Система **(III)** — кососимметрическая, но ее тоже можно решить подстановкой $y = x$. Наконец, система **(IV)**, во-первых, симметрическая, во-вторых, может быть записана как однородная — достаточно константы перенести в правую часть. Второй подход после перекрестного перемножения приводит к квадратному однородному уравнению и представляется более предпочтительным. Но ... *не будем спешить*. Посмотрите внимательно на уравнения последней системы. Не хочется ли Вам что-нибудь с ними сделать?

Конечно, хочется их сложить: получится уравнение $2x^2 + 2y^2 + 6 = 0$, которое не может выполняться (т. е. обратиться в верное числовое равенство) *ни при каких значениях переменных x и y*! Следовательно, *система* **(IV)** ***несовместна***, т. е. *не имеет решений*.

А мораль отсюда такова: не нужно торопиться применять мощные методы — лучше сначала осмотреться и понять, *а не является ли решение задачи очевидным*.

Система **(III)** также несовместна: подстановка $y = x$ приводит к уравнению $x^2 + 2 = 0$, не имеющему корней. То же самое можно сказать и о системе **(II)**. Таким образом, *ответ*: $(x;\, y) = (0;\, 0)$. □

Заметим, что в действительности *ни одно* из квадратичных уравнений систем **(II)–(IV)** «само по себе» (без всяких сложений и подстановок!) *не имеет решений*. Это вытекает из *всегда выполняющихся неравенств*: *для любых значений x, y*

$$p_2(x,y) = p_2^{\pm}(x,y) = x^2 \pm xy + y^2 \geqslant 0,$$

причем это неравенство обращается в равенство только в случае $(x;\, y) = (0;\, 0)$. ***Докажем*** это примечательное и небесполезное утверждение. Приведем *три способа доказательства*.

Способ 1: *использование однородности многочленов* $p_2(x)$. Если $x = 0$, то $p_2(x,y) = p_2(0,y) = y^2 \geqslant 0$, причем равенство возможно только при $y = 0$. Если $x \neq 0$, то можно записать:

$$p_2(x,y) = x^2\left(1 \pm \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right) = x^2(k^2 \pm k + 1),\ k = \frac{y}{x}.$$

Поскольку дискриминант квадратного трехчлена $q(k) = k^2 \pm k + 1$ при любом выборе знака (плюс/минус) равен $D = 1 - 4 < 0$, этот трехчлен всегда положителен, так что в этом случае $p_2(x,y) > 0$. Требуемое доказано. ■

Способ 2: *использование неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим*. Напомним, что это неравенство,

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

справедливо для всех положительных чисел a и b, причем оно обращается в равенство только в случае $a = b$; очевидно, что то же самое верно, если считать a, b *неотрицательными*. Пусть $a = x^2$, $b = y^2$. Тогда получаем цепочку следований:

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant \sqrt{x^2y^2} = |xy| \Rightarrow -\frac{x^2+y^2}{2} \leqslant xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow \pm xy \geqslant -\frac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 \pm xy = p_2^{\pm}(x,y) \geqslant x^2+y^2-\frac{x^2+y^2}{2} = \frac{x^2+y^2}{2} \geqslant 0,$$

причем последнее неравенство может обратиться в равенство только в случае $x = y = 0$. ■

Способ 3: *алгебраическое преобразование — выделение полных квадратов*. Можно записать:

$$p_2(x,y) = \frac{1}{2}(2x^2 \pm 2xy + 2y^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (x \pm y)^2) \geqslant 0,$$

причем это неравенство обращается в равенство только в случае, когда все три квадрата обращаются в нуль, т. е. когда $(x;\, y) = (0;\, 0)$. ■

4.4.3. Поучительный пример

Разберем еще один пример «на метод разложения».

Пример 4.4.4. В системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = x + y, & (1) \\ x^2 + 3xy + y^2 = 0 & (2) \end{cases} \quad \textbf{(A)}$$

первое уравнение немедленно раскладывается на множители:

$$(1) \iff \frac{y+x}{xy} - (x+y) = 0 \iff (x+y)\left(\frac{1}{xy} - 1\right) = 0.$$

Значит, система **(A)** распадается на две:

$$\textbf{(A)} \overset{\bigstar}{\Longleftrightarrow} \textbf{(I)} \begin{cases} x+y=0, \\ x^2+3xy+y^2=0 \end{cases} \vee \textbf{(II)} \begin{cases} \dfrac{1}{xy}-1=0, \\ x^2+3xy+y^2=0. \end{cases}$$

Систему **(I)** решаем подстановкой $y=-x$ из первого уравнения во второе:

$$\textbf{(I)} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-x, \\ x^2-3x^2+x^2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-x, \\ -x^2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow (x;\, y)=(0;\, 0).$$

Но... — что-то здесь не так: ведь переменные x и y в исходной системе **(A)** обращаться в нуль *не могут* (*не должны*!). Как же так получилось?

А дело просто в том, что переход, отмеченный звездочкой, *не равносильный*: в первую из получившихся систем необходимо добавить *ограничение на область допустимых значений переменных* разложенного уравнения (1), т. е. *не-равенство* $xy \neq 0$ (или два неравенства — $x \neq 0$ и $y \neq 0$). Сделайте это и закончите решение системы **(A)**. □

А мораль отсюда ... — разложение уравнений *всегда требует осторожности*. Схема

$$AB=0 \Longleftrightarrow A=0 \ \vee \ B=0$$

заведомо справедлива лишь для *всюду определенных* выражений A и B. Если это не так, следует использовать схему

$$AB=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} A=0, \\ B \ \text{определено} \end{cases} \vee \begin{cases} B=0, \\ A \ \text{определено}. \end{cases}$$

(см. п. 1.1.4).

Теперь рассмотрим несколько изысканных приемов решения систем уравнений.

4.4.4. Метод оценок

Вернемся к системе из примера 4.4.3. Перепишем ее, «разделив переменные» — распределим x и y по разным частям уравнений:

$$\begin{cases} x^3=y-3x, \\ y^3=x-3y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=x^3+3x, \\ x=y^3+3y. \end{cases}$$

Теперь всё-таки сделаем подстановку выражения для y из первого уравнения во второе.

Цитата по этому поводу:

«Эразм Дарвин[1]*) считал, что время от времени следует производить самые дикие эксперименты. Из них почти никогда ничего не выходит, но если они удаются, то результат бывает потрясающим.*

Дарвин играл на трубе перед своими тюльпанами. Результат этого эксперимента оказался отрицательным» (*Дж. Литлвуд.* **Математическая смесь.** М.: Наука, 1990, с. 44).

Наш «эксперимент» будет успешнее, и это можно увидеть заранее.

Заметим, что свободный член получающегося уравнения степени 9,

$$x = (x^3 + 3x)^3 + 3(x^3 + 3x) \iff x^3(x^2 + 3)^3 + 3x(x^2 + 3) - x = 0,$$

будет равен нулю, так что в левой части $p_9(x)$ последнего уравнения можно выделить сомножитель x:

$$p_9(x) = x[x^2(x^2 + 3)^3 + 3(x^2 + 3) - 1] = x[x^2(x^2 + 3)^3 + 3x^2 + 8].$$

Далее, *выражение в квадратных скобках всегда не меньше восьми* (объясните!), поэтому обращаться в нуль не может, так что уравнение $p_9(x) = 0$ эквивалентно уравнению $x = 0$. Из уравнения подстановки $y = x^3 + 3x$ находим, что и $y = 0$. Таким образом, мы «запросто» получили тот же ответ, что и ранее, в примере 4.4.3!

Продолжим вариации на ту же тему.

Пример 4.4.5. В похожей на предыдущую системе

$$\begin{cases} y = x^3 + x, \\ x = y^3 + y \end{cases}$$

точно так же сделаем подстановку выражения $y = x^3 + x$ из первого уравнения во второе,

$$x = (x^3 + x)^3 + (x^3 + x) \iff p_9(x) = 0,$$

где на этот раз в многочлене $p_9(x)$ можно выделить даже x^3:

$$p_9(x) = (x^3 + x)^3 + (x^3 + x) - x = x[x^2(x^2 + 1)^3 + (x^2 + 1) - 1] =$$
$$= x[x^2(x^2 + 1)^3 + x^2] = x^3[(x^2 + 1)^3 + 1].$$

И опять выражение в последних квадратных скобках в нуль не обращается, ибо оно *всегда не меньше единицы*. Итак, мы

[1]) Дед *Чарльза Дарвина*.

снова получаем, что уравнение $p_9(x) = 0$ имеет единственный корень $x = 0$, а система — единственное решение: *нулевое*.

Ответ: $(x;\, y) = (0;\, 0)$. □

Сделаем коэффициент при линейных членах уравнений системы того же типа еще меньше.

Пример 4.4.6. Если в системе

$$\begin{cases} y = x^3 + \dfrac{3}{4}x, \\ x = y^3 + \dfrac{3}{4}y \end{cases}$$

сделать такую же подстановку, как и в двух предыдущих случаях, получится уравнение

$$x = \left(x^3 + \frac{3}{4}x\right)^3 + \frac{3}{4}\left(x^3 + \frac{3}{4}x\right) \iff p_9(x) = 0,$$

где

$$p_9(x) = \left(x^3 + \frac{3}{4}x\right)^3 + \frac{3}{4}\left(x^3 + \frac{3}{4}x\right) - x = x\left[x^2\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)^3 + \frac{3}{4}\left(x^2 + \frac{3}{4}\right) - 1\right].$$

Вот теперь выражение в квадратных скобках, т. е. многочлен степени 8, записываемый как

$$p_8(x) = x^2\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{16} - 1 = x^2\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{16},$$

может принимать как положительные, так и отрицательные значения:

$$p_8(1) = \left(1 + \frac{3}{4}\right)^3 + \frac{3}{4} - \frac{7}{16} > 0, \quad p_8(0) = -\frac{7}{16} < 0.$$

Значит[1], уравнение $p_9(x) = 0$ заведомо имеет корни, отличные от нуля. Но как их найти[2]?

На этом риторическом пока вопросе мы и остановимся в данном примере, обратившись к более внимательному анализу вида уравнений из систем этого и предыдущих примеров. □

Системы из указанных примеров имели вид

$$\begin{cases} y = x^3 + ax, \\ x = y^3 + ay, \end{cases} \quad \text{или же, более общо,} \quad \begin{cases} y = f(x), \\ x = f(y), \end{cases} \qquad (*)$$

[1] По *теореме о промежуточном значении непрерывной функции* из курса алгебры и начал анализа.

[2] Заметим, что вообще-то корни уравнения $p_9(x) = 0$ будут найдены, как только мы решим исходную систему, а ее заведомо можно решить *методом разложения*. Но сейчас нас интересуют *альтернативные подходы* к решению систем рассматриваемого вида.

где f — функция $f(z) = z^3 + az$, *одна и та же* и для одного, и для другого уравнения системы $(*)$. Метод подстановки дает:

$$\begin{cases} y = f(x), \\ x = f(f(x)) \quad (1) \end{cases}$$

или, в нашем случае,

$$\begin{cases} y = x^3 + ax, \\ x = (x^3 + ax)^3 + a(x^3 + ax). \quad (2) \end{cases}$$

Полиномиальное уравнение $p_9(x) = 0$, к которому сводится уравнение (2), преобразуется к виду $xp_8(x) = 0$, где полином

$$p_8(x) = x^2(x^2 + a)^3 + a(x^2 + a) - 1 = x^2(x^2 + a)^3 + ax^2 + (a^2 - 1)$$

при любом $a \geqslant 0$ допускает *оценку снизу*:

$$\text{для любого значения } x \in \mathbb{R} \quad p_8(x) \geqslant a^2 - 1.$$

В случае, когда $a > 1$, отсюда следует оценка $p_8(x) > 0$ (при любом $x \in \mathbb{R}$), откуда вытекает *единственность* корня $x = 0$ уравнения (2) и, соответственно, нулевого решения $(x; y) = (0; 0)$ исходной системы. Как показывает пример 4.4.5, то же самое это же верно и в случае $a = 1$. Как же быть в случае $a < 1$, если не использовать для решения системы метод разложения? Оказывается, в случае $a \geqslant 0$ есть другой, куда более эффективный (и эффектный!) метод решения уравнения (1) и соответствующей системы $(*)$.

4.4.5. Метод итераций

Для любой функции f смысл уравнения (1), $f(f(x)) = x$, в том, что *при повторном применении к аргументу x одной и той же функции f получается* ***то же самое*** *значение аргумента x*. Повторные применения к какому-то исходному математическому объекту некоторых *одинаковых* действий называются ***итерациями***[1]. Результаты повторного применения к какому-то исходному числу $x = x_0$ одной и той же функции: $f : x_0 \mapsto x_1 = f(x_0)$, $f : x_1 \mapsto x_2 = f(x_1)$, $f : x_2 \mapsto x_3 = f(x_2), \ldots$, — называются ***итерациями функции*** f. В этих терминах выполнение для числа $x = x_0$ уравнения (1) означает, что *вторая итерация* этого числа, $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$, совпадает с самим числом. Уравнения вида (1) называются *итерационными уравнениями*, а системы вида $(*)$ — *итерационными системами*.

[1] От лат. **iteratio** — *повторение*.

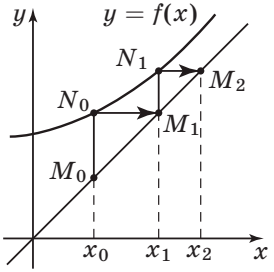


Рис. 4.1

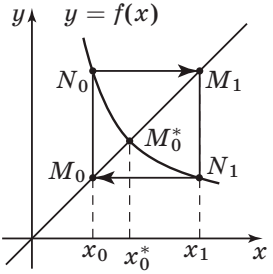


Рис. 4.2

Итерации любой заданной функции f удобно (и изящно!) интерпретируются с помощью графика функции $y = f(x)$ на координатной плоскости Oxy, на которой проведена еще прямая $y = x$ — биссектриса I-го и III-го координатных углов (четвертей). Точкам $(x;\,0)$ оси Ox будем ставить в соответствие точки $M(x;\,x)$ на указанной биссектрисе. Как показано на рис. 4.1, для того, чтобы по начальной точке $M_0(x_0; x_0)$ построить точку M_1, нужно рассмотреть точку пересечения вертикали $x = x_0$ с графиком функции $y = f(x)$: точку $N_0(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0) = x_1$, — а затем провести горизонталь $y = y_0 = x_1$, которая пересечет диагональ $y = x$ как раз в нужной точке $M_1(x_1; x_1)$: так сказать, «построить ступеньку» — двузвенную ломаную $M_0N_0M_1$. Построив вторую такую ступеньку $M_1N_1M_2$, получим точку $M_2(x_2; x_2)$, отвечающую второй итерации $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$, и так далее (см. рис. 4.1).

В каком случае выполняется уравнение (1), т. е. $f(f(x)) = x$? — В том случае, когда для точки $x = x_0$ ее вторая итерация x_2 совпадет с самой точкой x_0, т. е. когда вторая ступенька «замыкается» на первую: когда точка M_2 совпадет с начальной точкой M_0 (рис. 4.2). Другая возможность — это совпадение уже *первой* итерации $x_1 = f(x_0)$ с начальным значением x_0, соответствующее тому случаю, когда точки M_0, N_0 и, следовательно, M_1 совпадают, $x_1 = f(x_0) = x_0$ и значение $x = x_0$ является решением уравнения $f(x) = x$. На координатной плоскости Oxy решения этого уравнения отвечают точкам пересечения графика $y = f(x)$ с прямой $y = x$ — таким, как точка $M_0^*(x_0^*; x_0^*)$ на рис. 4.2.

Эти рассмотрения показывают, во-первых, что любое решение уравнения $f(x) = x$ является и решением уравнения (1). Это очевидно и *аналитически*: всегда

$$f(x) = x \implies f(f(x)) = f(x), \text{ а так как } f(x) = x, \text{ то } f(f(x)) = x \qquad (3)$$

(обдумайте это простое рассуждение!). Во-вторых, если уравнение (1) имеет решение $x = x_0$, для которого $x_1 = f(x_0) \neq x_0$, то график $y = f(x)$

обязательно проходит через две точки $N_0(x_0; x_1)$ и $N_1(x_1; x_0)$, симметричные относительно биссектрисы $y = x$ I-го и III-го координатных углов (см. рис. 4.2). Заметим, что это возможно лишь в случае, когда *функция f не является возрастающей*, ибо указанные точки лежат по разные стороны от оси симметрии $y = x$ (обдумайте и объясните; чуть ниже мы обоснуем это утверждение аналитически).

Возвращаясь к рассматриваемому случаю, когда $f(x) = x^3 + ax$, замечаем, что при любом значении $a \geqslant 0$ эта функция является строго возрастающей, поэтому для нее все решения уравнения (1) исчерпываются решениями уравнения (0) $f(x) = x$, т. е. корнями кубического уравнения $x^3 + ax = x$. Решаем его:

$$(0) \iff x^3 + (a-1)x = 0 \iff x(x^2 - (1-a)) = 0 \iff x = 0 \vee x^2 = 1 - a.$$

Таким образом, нуль всегда является корнем уравнения (1), а в случае $1 - a > 0$, т. е. $a < 1$, к нему добавляются еще два ненулевых корня квадратного уравнения $x^2 = 1 - a$, т. е. числа $x_{1,2} = \pm\sqrt{1-a}$. В частном случае, рассматривавшемся в примере 4.4.6,

$$a = \frac{3}{4} \implies x_{1,2} = \pm\sqrt{1-a} = \pm\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

так что в данном случае итерационное уравнение (1) имеет три корня, а итерационная система ($*$), соответственно, три решения, и *ответ* в примере 4.4.6 такой: $(x; y) = (0; 0), (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$.

Еще раз отметим, что мы пришли к ответу, минуя разложение системы, из «итерационных соображений». Поскольку итерационные уравнения встречаются и «сами по себе», без связи с итерационными системами[1)], сформулируем соответствующее утверждение и докажем его, не апеллируя к графическим представлениям.

Теорема 1 (*об итерационных уравнениях*). *Для любой функции f, строго возрастающей на своей области определения, уравнения*

$$(1) \quad f(f(x)) = x \quad \text{и} \quad (0) \quad f(x) = x$$

эквивалентны:

$$(1) \quad f(f(x)) = x \quad \iff \quad (0) \quad f(x) = x.$$

Доказательство. Тот факт, что из уравнения (0) следует уравнение (1), справедлив *для любой* функции f, независимо от ее свойств монотонности, и это мы доказали выше (см. следование (3)).

В обратную сторону ((1) $\implies$ (0)): докажем, что если для некоторого числа x выполнено равенство (1) $f(f(x)) = x$, то выполняется и равенство (0) $f(x) = x$.

[1)] Примечательно, что итерационные уравнения приходится решать и в некоторых важных *прикладных* задачах.

Допустим противное, т. е. что $f(x) \neq x$. Тогда либо $f(x) < x$, либо $f(x) > x$. Рассмотрим оба случая. По условию теоремы функция f строго возрастает, т. е. при любых допустимых значениях u, v из того, что $u < v$, следует, что $f(u) < f(v)$. В первом из наших случаев, $f(x) < x$, возьмем $u = f(x)$, $v = x$. Получим:

$$f(x) < x \implies f(f(x)) < f(x), \text{ а так как } f(x) < x, \text{ то } f(f(x)) < x,$$

что противоречит равенству $f(f(x)) = x$.

Аналогично, во втором случае получаем:

$$f(x) > x \implies f(f(x)) > f(x), \text{ а так как } f(x) > x, \text{ то } f(f(x)) > x,$$

что опять противоречит равенству (1). Итак, в обоих случаях мы приходим к противоречию. Следовательно, наше допущение неверно, и выполняется равенство (0) $f(x) = x$, что и требовалось установить. ■

Еще раз возвращаясь к итерационному уравнению (1) для частного случая $f(x) = x^3 + ax$, заметим, что в ситуации, когда $a < 0$, указанная функция f не является строго возрастающей и теорема об итерационных уравнениях *неприменима* (и более того, ее утверждение, *вообще говоря, неверно* — см. чуть ниже). В этом случае *для решения итерационного уравнения* (1) $f(f(x)) = x$, напротив, *переходят к итерационной системе* $(*)$, т. е. вводят новую переменную $f(x) = y$ и осуществляют в уравнении (1) *частичную замену*, записывая его в виде $f(y) = x$. Получающаяся система затем решается — в данном случае, методом разложения, а тем самым находятся и корни уравнения (1) как значения переменной x для решений $(x; y)$ системы $(*)$. При решении задач из «Упражнений», вы увидите, что вполне могут найтись корни уравнения (1), отличные от корней уравнения (0) $f(x) = x$. Это говорит о том, что *теорема об итерационных уравнениях* для произвольных функций просто неверна. (Впрочем, это можно увидеть на таком тривиальном примере: для функции $f(x) = 34 - x$ уравнение (0) $34 - x = x$ имеет *единственный* корень $x = 17$, в то время как $f(f(x)) = 34 - (34 - x) \equiv x$ и уравнению $f(f(x)) = x$, т. е. $x = x$ (!), удовлетворяет *любое* действительное число!)

4.4.6. Сведение уравнений к системам

Разовьем еще одну ранее затронутую идею — идею *сведения уравнений к системам*. Мы уже показали в п. 4.4.5, что некоторые уравнения проще решаются с помощью введения

дополнительных переменных. Вот еще одно не слишком простое уравнение, *неполная замена* в котором позволяет свести его к *стандартной* системе уравнений.

Пример 4.4.7. Классическое уравнение

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1 \qquad (1)$$

встречалось в «Упражнениях» к гл. 3: там требовалось подобрать замену, сводящую уравнение (1) к квадратному. Поиск нужной замены основан на не совсем очевидном (даже, скорее, *совсем не очевидном*) алгебраическом преобразовании левой части уравнения:

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x+1)^2 + x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^4 + 2x^3 + 2x^2}{(x+1)^2} =$$
$$= \frac{x^4}{(x+1)^2} + 2 \cdot \frac{x^2(x+1)}{(x+1)^2} = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + 2\,\frac{x^2}{x+1},$$

поэтому из уравнения (1) после замены $\frac{x^2}{x+1} = z$ получится именно квадратное уравнение $z^2 + 2z = 1$.

Можно поступить иным, гораздо более естественным образом: обозначим мешающую нам дробь $\frac{x}{x+1}$ через y, перейдя от уравнения (1) к замечательному уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Иными словами, сделаем в уравнении (1) *неполную замену*, введя указанную вспомогательную переменную и записав *систему* уравнений с двумя переменными,

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} = y, & (2) \\ x^2 + y^2 = 1, & (3) \end{cases} \qquad (*)$$

эквивалентную уравнению (1) в том смысле, что каждому решению x уравнения (1) отвечает решение $(x;\, y)$ системы $(*)$ (именно, если значение второй переменной y вычислено в соответствии с «уравнением замены» (2), то для пары $(x;\, y)$ выполнены оба уравнения системы), и наоборот, если $(x;\, y)$ — решение системы $(*)$, то значение первой переменной x удовлетворяет уравнению (1) (обдумайте, объясните).

Теперь освобождаемся от знаменателя в уравнении (2), переходя к равносильной системе с ограничением:

$$(*) \iff \begin{cases} x = (x+1)y, \\ x^2 + y^2 = 1, \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - xy = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Получилась стандартная кососимметрическая система с ограничением, которая решается введением новых переменных

$$x - y = a, \qquad xy = b.$$

В этих переменных получается очевидная система уравнений (ограничение мы будем проверять после решения системы!):

$$\begin{cases} a - b = 0, \\ a^2 + 2b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = a, \\ a^2 + 2a - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \pm \sqrt{2}, \\ b = a \end{cases} \iff$$

$$\iff (a;\, b) = (c_1; c_1) \ \vee\ (a;\, b) = (c_2; c_2), \text{ где } c_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Таким образом, система уравнений относительно x и y равносильна совокупности двух систем замены вида

$$\begin{cases} x - y = c, \\ \ \ xy \ \ = c, \end{cases}$$

где $c = c_{1,2}$ — выписанные выше корни уравнения относительно a. Если сделать в этих уравнениях подстановку $y = x - c$, то вспомогательная переменная y тем самым исключается, и мы получаем два уравнения относительно x,

$$x(x - c) = c \iff x^2 - cx - c = 0, \quad c = c_{1,2}, \qquad (4_{1,2})$$

совокупность которых эквивалентна исходному уравнению (1), даже без добавления ограничения $x \neq -1$: если подставить в любое из уравнений (4) значение $x = -1$, то получается равенство $1 + c - c = 0$, которое, разумеется, выполняться не может.

Дискриминант уравнений (4) имеет вид $D = c^2 + 4c$ и для положительного значения $c = c_1 = -1 + \sqrt{2}$ заведомо положителен, причем равен $D_1 = 3 - 2\sqrt{2} + 4(-1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1$, поэтому корни уравнения (4) и исходного уравнения (1) суть

$$x = \frac{c \pm \sqrt{D_1}}{2} = \frac{1}{2}\,(\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}).$$

Для отрицательного значения $c = c_2 = -1 - \sqrt{2}$ находим:

$$D = D_2 = c^2 + 4c = 3 + 2\sqrt{2} + 4(-1 - \sqrt{2}) = -1 - 2\sqrt{2} < 0,$$

поэтому второе из уравнений (4) корней не имеет.

Ответ: $x = \dfrac{\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$. □

Некоторые не слишком простые уравнения сводятся к простым системам относительно двух переменных с помощью *полной замены*, когда прежняя переменная x исключается *совсем*, а две новые переменные связываются каким-то вторым уравнением, исходя из уравнений замены. Поясним это на примере тригонометрического уравнения (алгебраические уравнения, решаемые с помощью подобного приема, рассмотрены в следующей главе).

Пример 4.4.8. Если в тригонометрическом уравнении

$$\cos x + \sin x = 1$$

ввести переменные $\cos x = a$ и $\sin x = b$, то получается простое линейное уравнение $a + b = 1$. Второе уравнение для определения переменных a и b записывается согласно основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: получается уравнение $a^2 + b^2 = 1$. Далее находим решения системы

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a^2 + b^2 = 1, \end{cases}$$

а затем ищем значения исходной переменной x из систем замены

$$\begin{cases} \cos x = a, \\ \sin x = b. \end{cases}$$

□

4.4.7. Оценка значений переменных

В пункте 4.4.4 было показано, как системы из примеров 4.4.3 и 4.4.5 могут быть решены с помощью достаточно простых *оценок значений функций*, входящих в получающиеся уравнения. Приводившиеся оценки (неравенства) выполнялись на всей числовой оси, т. е. при всех значениях переменной. Иногда при решении систем уравнений помогают оценки значений

входящих в уравнения выражений, исходящие из *предварительных оценок значений переменных*, которые делаются на основе уравнений тех же систем. Разъясним этот подход на нескольких «модельных» примерах.

Пример 4.4.9. Система

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1, & (1) \\ y - 4x = 5 & (2) \end{cases}$$

линейной подстановкой $y = 5 + 4x$ из уравнения (2) в уравнение (1) сводится к полиномиальному уравнению степени 4 и, в принципе, можно было бы попробовать пойти по этому пути. Гораздо проще, однако, заметить, что из уравнения (1) вытекают неравенства

$$x^4 \leqslant 1 \iff |x| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x \leqslant 1 \implies -x \leqslant 1 \iff -4x \leqslant 4 \tag{3}$$

и

$$y^4 \leqslant 1 \iff |y| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant y \leqslant 1 \implies y \leqslant 1. \tag{4}$$

Сложив последние из выписанных неравенств (3)–(4), получаем, что $y - 4x \leqslant 1 + 4 = 5$. Значит, *если пара значений* $(x;\, y)$ *удовлетворяет уравнениям системы* (1) и (2), то из уравнения (1) следуют неравенства (3), (4), из них — неравенство $y - 4x \leqslant 5$, причем, в соответствии с уравнением (2), *это неравенство должно обращаться в равенство*, что возможно лишь в случае, когда *оба нестрогие неравенства* (3) и (4) *обращаются в равенство*. (*Внимание*! Это заключение является *решающим* в нашем рассуждении.)

Значит, если $(x;\, y)$ — решение данной системы, то $-4x = 4$, $x = -1$, и $y = 1$, так что $(x;\, y) = (-1;\, 1)$. Это заключение в одну сторону, т. е. из него никоим образом не следует, что указанная пара действительно будет решением. (Еще раз: мы показали, что если $(x;\, y)$ — решение, то $(x;\, y) = (-1;\, 1)$, а это вовсе не значит, что верно и обратное!) Таким образом, нужно *проверить* непосредственной подстановкой в уравнения системы, будет ли пара $(x;\, y) = (-1;\, 1)$ решением системы или нет. В данном случае уравнение (1) не выполняется:

$$\text{если } (x;\, y) = (-1;\, 1), \text{ то } x^4 + y^4 = 1 + 1 = 2 \neq 1.$$

Значит, система заведомо не выполняется (заметим, что наши предварительные рассуждения показывают, что уравнение (2)

для рассматриваемой пары чисел заведомо выполняется, так что это уравнение проверять, в принципе, незачем; однако, чтобы не запутаться в логике своих рассуждений, лучше уж проверять *оба* уравнения системы).

Ответ: $\varnothing$ (пустое множество; или «*нет решений*»). □

Пример 4.4.10. В системе

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 4, & (1) \\ x + y = 3 & (2) \end{cases}$$

тоже можно сделать линейную подстановку $y = 3 - x$ (попробуйте). Но мы опять пойдем по другому пути. Если $(x; y)$ — решение данной системы, то из уравнения (1) выводим неравенства

$$x^4 \leqslant 4 \implies x \leqslant \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \quad \text{и} \quad y^4 \leqslant 4 \implies y \leqslant \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}.$$

Из них следует, что выражение $x + y \leqslant 2\sqrt{2}$, а $2\sqrt{2} < 3$, поскольку $(2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8 < 9 = 3^2$ (отметим, что для всяких «прикидок» полезно знать несколько десятичных знаков для некоторых корней — к примеру, $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$, $\sqrt{3} = 1{,}7321\ldots$). Значит, если в системе выполняется уравнение (1), то уравнение (2) уже выполняться не может.

Ответ: $\varnothing$. □

Пример 4.4.11. Система

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1, & (1) \\ 4x^2 + y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

после подстановки $y = -4x^2 - 1$ даст уравнение степени 8. Но уже само уравнение подстановки подсказывает оценку значения переменной y: для любого решения $(x; y)$ данной системы

$$y = -4x^2 - 1 \leqslant -1.$$

С другой стороны, из уравнения (1) следуют неравенства

$$y^4 \leqslant 1 \implies y \geqslant -1.$$

Раз $y \leqslant -1$ и, вместе с тем, $y \geqslant -1$, то единственная возможность для значения y есть $y = -1$. Подставляя это значение в оба уравнения системы, получаем систему двух уравнений для оставшейся переменной x:

$$\begin{cases} x^4 + 1 = 1, \\ 4x^2 - 1 + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^4 = 0, \\ 4x^2 = 0 \end{cases} \iff x = 0.$$

Итак, на сей раз, наконец-то, система имеет решения — в единственном числе.

Ответ: $(x;\ y) = (0;\ -1)$. □

§ 4.5. Системы с тремя переменными

Все три метода решения систем с двумя переменными: *подстановка, замена, разложение*, могут быть применены и к системам уравнений, зависящих от трех неизвестных. Мы проиллюстрируем эти методы на примерах трех конкретных систем.

4.5.1. Метод подстановки

Пример 4.5.1. *Линейная система*

$$\begin{cases} x + y = 8, & (1) \\ y + z = 9, & (2) \\ z + x = 5 & (3) \end{cases} \quad (*)$$

легко может быть решена исключением z из уравнения (2) с помощью подстановки $z = 5 - x$ из уравнения (3) (в уравнение (1) переменная z и так не входит): получается система с двумя переменными:

$$\begin{cases} x + y = 8, & (1) \\ y - x + 5 = 9 & (2') \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 8, \\ y - x = 4, \end{cases}$$

из которой после сложения и вычитания уравнений находим значения $y = 6$, $x = 2$; соответственно, $z = 5 - x = 3$.

Ответ: $(x;\ y;\ z) = (2;\ 6;\ 3)$. □

Обоснование подстановки (т. е. доказательство эквивалентности преобразования системы с помощью подстановки) проводится точно такими же рассуждениями, что и для случая двух переменных (см. п. 4.2.1). Данную систему можно решить и совсем изящно, дописав к уравнениям (1)–(3) их следствие: уравнение $(4) = (1) + (2) + (3)$, получающееся почленным сложением трех данных уравнений. Четвертое уравнение имеет вид

$$2x + 2y + 2z = 22 \iff x + y + z = 11. \qquad (4')$$

Вычитая из него уравнения (1), (2), (3), мы сразу находим значения переменных:

$$(*) \iff \begin{cases} (4') - (1): & z = 11 - 8, \\ (4') - (2): & x = 11 - 9, \\ (4') - (3): & y = 11 - 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2, \\ y = 6, \\ z = 3. \end{cases}$$

Существует довольно общий и алгоритмический метод *последовательного исключения неизвестных* из *линейных систем* с любым количеством переменных, основанный на *равносильных линейных преобразованиях*[1] таких систем, называемый также *методом Гаусса*. Он удобен при исследовании так называемых *линейных систем с параметрами*. Отметим, что именно метод Гаусса реализуется в компьютерных программах для решения систем линейных уравнений (а такие системы, причем с большим числом переменных и параметров, приходится решать во многих прикладных науках — например, в *математической экономике*).

4.5.2. Метод замены

Пример 4.5.2. Для системы

$$\begin{cases} x(y+z) = 5, & (1) \\ y(z+x) = 8, & (2) \\ z(x+y) = 9 & (3) \end{cases} \qquad (*)$$

возможная подстановка $z = \dfrac{9}{x+y}$ из уравнения (3) в первые два, кажется, оптимизма не вызывает (попробуйте!). Если просто раскрыть скобки во всех трех уравнениях, то окажется, что в систему *линейно* войдут все три попарных произведения переменных x, y, z и только они:

$$\begin{cases} xy + xz = 5, & (1) \\ yz + xy = 8, & (2) \\ zx + yz = 9, & (3) \end{cases}$$

и если ввести три новые переменные,

$$\begin{cases} xy = a, & (1') \\ yz = b, & (2') \\ zx = c, & (3') \end{cases} \qquad (**)$$

[1] См. п. 4.2.4.

то получится линейная система вида

$$\begin{cases} a+c=5, & (1'') \\ b+a=8, & (2'') \\ c+b=9 & (3'') \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=8, & (2'') \\ b+c=9, & (3'') \\ c+a=5. & (1'') \end{cases}$$

Мы переставили слагаемые в уравнениях и циклически переставили уравнения так, чтобы вы сразу узнали систему из предыдущего примера. Решая ее, как и выше, находим: $(a;\, b;\, c) = (2;\, 6;\, 3)$. Остается решить систему замены $(**)$:

$$\begin{cases} xy=2, & (1') \\ yz=6, & (2') \\ zx=3. & (3') \end{cases} \qquad (**)$$

Проще всего ее решить, добавив к уравнениям $(1')$–$(3')$ их почленное произведение, т. е. уравнение $(4) = (1')\cdot(2')\cdot(3')$, имеющее вид $x^2y^2z^2 = 2\cdot 6\cdot 3$, или $(xyz)^2 = 6^2$. Это уравнение немедленно раскладывается — получаются два уравнения $(4_\pm)$ $xyz = \pm 6$, и система замены эквивалентна совокупности двух систем по четыре уравнения в каждой:

$$\begin{cases} xy=2, & (1') \\ yz=6, & (2') \\ zx=3, & (3') \\ xyz=6 & (4_+) \end{cases} \vee \begin{cases} xy=2, & (1') \\ yz=6, & (2') \\ zx=3, & (3') \\ xyz=-6. & (4_-) \end{cases}$$

Разделив в обеих системах последнее уравнение на каждое из трех первых (деление «законно», ибо в правых частях уравнений записаны ненулевые числа; см. конец п. 4.2.3), сразу найдем значения переменных x,y,z:

$$(*) \iff \begin{cases} (4_+)/(1'): & z=3, \\ (4_+)/(2'): & x=1, \\ (4_+)/(3'): & y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} (4_-)/(1'): & z=-3, \\ (4_-)/(2'): & x=-1, \\ (4_-)/(3'): & y=-2. \end{cases}$$

Ответ: $(x;\, y;\, z) = (1;\, 2;\, 3), (-1; -2; -3)$. □

4.5.3. Использование однородности

Заметим, что система из последнего примера является *однородной* с тремя переменными: слева записаны вторые степени, а справа — нулевые степени, т. е. ненулевые константы. Этим

тоже можно воспользоваться для решения системы. Именно, перекрестное умножение уравнения (1) на два других приводит к двум *однородным уравнениям*:

$$(*) \implies \begin{cases} 8x(y+z) = 5y(z+x), & (1)\times(2) \\ 9x(y+z) = 5z(x+y). & (1)\times(3) \end{cases}$$

Теперь можно разделить оба получившихся уравнения на старшую степень переменной x, т. е. на x^2 (при этом никакие решения мы не потеряем, так как при $x = 0$ уравнение (1) исходной системы $(*)$ не выполняется), и ввести *две* новые «безразмерные» переменные

$$\frac{y}{x} = k, \quad \frac{z}{x} = q,$$

так что получится система с новыми двумя переменными:

$$\begin{cases} 8(k+q) = 5k(q+1), \\ 9(k+q) = 5q(1+k). \end{cases}$$

Эта система легко решается, поскольку после вычитания первого уравнения из второго получается линейное уравнение,

$$k + q = 5q - 5k \iff 6k = 4q \iff q = \frac{3}{2}k,$$

так что после соответствующей линейной подстановки в то или другое уравнение (это без разницы) мы придем к квадратному уравнению относительно k. Находим k, потом соответствующие значения q, затем осуществляем линейные подстановки $y = kx$ и $z = qx$ в уравнения исходной системы $(*)$, получаем значения x, а вслед на ними и значения y и z. Проделайте это самостоятельно.

4.5.4. Система Виета с тремя переменными

Мы уже рассматривали *теорему Виета для кубических многочленов*, в которой как раз фигурирует система Виета с тремя переменными (п. 2.2.1), а также рассматривали пример конкретной системы Виета (в п. 2.2.2). Напомним основные конструкции и утверждения, используя принятые в этой главе обозначения для переменных.

Система Виета с переменными x, y, z записывается через *элементарные симметрические многочлены* от этих переменных, которые получаются как коэффициенты при степенях

переменной t при раскрытии скобок в произведении трех биномов, $t-x$, $t-y$ и $t-z$:

$$(t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz. \quad (0)$$

С системой Виета

$$\begin{cases} x+y+z &= a, \\ xy+yz+zx &= b, \\ xyz &= c \end{cases} \qquad (*)$$

ассоциируется *уравнение Виета* — кубическое уравнение, записывающееся в виде

$$t^3 - at^2 + bt - c = 0. \qquad \textbf{(V)}$$

Теорема (*о решениях систем Виета с тремя переменными*). *Тройка чисел* $(x;\, y;\, z) = (x_1; x_2; x_3)$ *является решением системы Виета* $(*)$ ***тогда и только тогда, когда*** *числа* x_1, x_2, x_3 *образуют полный набор корней уравнения Виета* **(V)**, *т. е. когда его левая часть представляется в виде произведения*

$$t^3 - at^2 + bt - c = (t-x_1)(t-x_2)(t-x_3).$$

Доказательство опирается на *основную формулу Виета* (0) и не требует никаких формул для корней (тем более, что мы их и не знаем, и еще тем более, что кубическое уравнение не всегда может быть полностью разложено!). Вспомните это доказательство (или проведите его заново).

4.5.5. Симметрические системы

Рассмотренная теорема Виета используется при решении *симметрических систем с тремя переменными*, состоящей из *симметрических уравнений*, а они, в свою очередь, записываются через *рациональные симметрические выражения* или через *симметрические многочлены* от трех переменных. Многочлен $S(x,y,z)$ называется симметрическим, если он *не меняется*, остается тем же, с точностью до перестановок сомножителей в составляющих его одночленах и самих этих одночленов—слагаемых, *при любой перестановке переменных* x, y, z — при любой из *шести* всевозможных таких перестановок (см. § 2.2; число перестановок из трех элементов равно $\mathbf{P}_3 = 3! = 6$). Примеры: три так называемых *элементарных* симметрических

многочлена — это левые части уравнений системы Виета (∗). Еще примеры: суммы степеней

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad x^3 + y^3 + z^3, \quad \ldots .$$

Примеры дробно-рациональных симметрических выражений:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

Возможность сведения произвольных симметрических систем к системам Виета основана на следующей *теореме Варинга—Гаусса*.

Любой симметрический многочлен $S(x,y,z)$ можно выразить через элементарные симметрические многочлены

$$a(x,y,z) = x + y + z, \quad b(x,y,z) = xy + yz + zx, \quad c(x,y,z) = xyz$$

с помощью сложения, вычитания и умножения, т. е. записать как многочлен от $a = a(x,y,z)$, $b = b(x,y,z)$ и $c = c(x,y,z)$:

$$S(x,y,z) = p(a,b,c).$$

Английский математик, профессор Кембриджа *Эдмунд Варинг*, можно сказать, был продолжателем алгебраических исследований Ньютона и предшественником на этом поприще Гаусса. Именно он доказал формулы Жирара—Ньютона для сумм степеней в общем случае произвольного числа переменных. Он придумал и интерполяционную формулу, носящую теперь имя Лагранжа (см. п. 2.1.8). Варинг доказал возможность выражения симметрических многочленов через элементарные только для двух переменных (см. выше, § 4.3); в общем же случае это было доказано в 1815 г. *Карлом Фридрихом Гауссом*. Доказательство вполне элементарное, но выходит за пределы нашего курса.

В простых конкретных случаях запись симметрических выражений и многочленов через элементарные особого труда не составляет. Например,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz + xz + xy}{xyz} = \frac{b}{c}.$$

Выразим через a, b и c сумму квадратов $\Sigma_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Нетрудно сообразить, что для этого нужно записать формулу для *квадрата суммы трех слагаемых*. Эта полезная и в других случаях формула,

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \qquad (**)$$

(читается «*квадрат суммы трех слагаемых равен сумме квадратов этих слагаемых плюс сумма трех удвоенных их*

попарных произведений»), выводится с помощью «виртуального» раскрытия скобок и приведения подобных членов в произведении $(x+y+z)(x+y+z)$: если бы мы действительно раскрыли скобки, то получилась бы сумма девяти произведений по одному сомножителю из каждой скобки (любое из трех слагаемых первой скобки умножается на каждое из трех слагаемых второй скобки, итого $3 \cdot 3 = 9$ произведений); три из них суть квадраты слагаемых, а остальные шесть — попарные произведения различных слагаемых, причем каждое произведение встретится дважды (скажем x из первой скобки на y из второй и y из первой скобки на x из второй суть одинаковые произведения xy). Это и доказывает формулу $(**)$.

Записав ее в принятых обозначениях, мы получаем выражение для суммы квадратов:

$$a^2 = \Sigma_2 + 3b \implies \Sigma_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - 2b$$

(заметьте: получилась в точности *та же* формула, что и для суммы $\Sigma_2(x,y) = x^2 + y^2$ из п. 3.4.7!).

Пример 4.5.3. В симметрической системе

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ xyz=2 \end{cases}$$

делаем *симметрическую замену*, т. е. вводим новые переменные

$$x+y+z=a, \quad xy+yz+zx=b, \quad xyz=c,$$

в которых система приобретает совсем простой вид и сразу решается:

$$\begin{cases} a=4, \\ a^2-2b=6, \\ c=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=4, \\ 16-2b=6, \\ c=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=4, \\ 2b=10, \\ c=2, \end{cases}$$

так что $(a;\ b;\ c) = (4;\ 5;\ 2)$. Решаем систему замены, т. е. систему Виета

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ xy+yz+zx=5, \\ xyz=2. \end{cases}$$

Для этого записываем уравнение Виета **(V)**,

$$t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0,$$

и выясняем, *является ли оно полностью разложимым* (если нет, то заключаем, что получившаяся система Виета, а с нею и исходная система *решений не имеют*). Уравнение имеет очевидный корень $t_1 = 1$; выносим за скобку бином $t - t_0 = t - 1$:

$$t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t^3 - t^2) - (3t^2 - 3t) + (2t - 2) = (t-1)(t^2 - 3t + 2).$$

Квадратичный множитель немедленно разлагается: он равен $(t-1)(t-2)$, поэтому *многочлен $p_3(t)$ в левой части уравнения Виета полностью разложим* — представляется в виде

$$p_3(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-1)(t-1)(t-2) = (t-1)^2(t-2).$$

Согласно теореме Виета, решения системы Виета, а значит, и исходной системы, составляются из полного набора корней 1, 1, 2 уравнения Виета, берущихся во всевозможных порядках. Поскольку один из корней, единица, двукратный и присутствует в наборе дважды, число перестановок с повторениями этих корней равно $\mathbf{P}_{[2,1]} = \mathbf{C}_3^2 = \mathbf{C}_3^1 = 3$ (см. § 2.2; разумеется, в данном совсем простом случае перестановки корней проще указать непосредственно, т. е. *перебором*).

Ответ: $(x;\ y;\ z) = (1;\ 1;\ 2), (1;\ 2;\ 1)\,(2;\ 1;\ 1)$. □

4.5.6. Метод разложения

Обратимся к идее разложения в случае трех переменных.

Пример 4.5.4. В системе

$$\begin{cases} x^2 + y + z = 2, & (1) \\ x + y^2 + z = 2, & (2) \\ x + y + z^2 = 2 & (3) \end{cases} \quad (*)$$

примечательнее всего одинаковые правые части. Если заменить уравнение (1) на его разность с уравнением (2), получим *равносильную разлагающуюся систему*, эквивалентную совокупности двух систем:

$$\begin{cases} (1)-(2): & x^2 - y^2 + y - x = 0, \\ (2): & x + y^2 + z = 2, \\ (3): & x + y + z^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-y)(x+y-1) = 0, \\ x + y^2 + z = 2, \\ x + y + z^2 = 2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x - y = 0, \\ x + y^2 + z = 2, \\ x + y + z^2 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x + y^2 + z = 2, \\ x + y + z^2 = 2. \end{cases}$$

Одно из уравнений каждой из систем — линейное, поэтому линейной подстановкой ($y = x$ в первой и $y = 1 - x$ во второй системе) переменная y исключается из уравнений (2) и (3). Получается система двух *квадратичных* уравнений относительно переменных x и z — не так уж плохо, но и не так уж и хорошо, ибо такие системы, как мы видели, обычно сводятся к уравнениям степени 4. Поэтому, чтобы сразу добиться еще большего упрощения, заменим и уравнение (2) на его разность с уравнением (3) — перейдем к эквивалентной системе, в которой уже *два* уравнения будут разлагаться:

$$\begin{cases} (1)-(2): & x^2 - y^2 + y - x = 0, \\ (2)-(3): & y^2 - z^2 + z - y = 0, \\ (3): & x + y + z^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-y)(x+y-1) = 0, \\ (y-z)(y+z-1) = 0, \\ x + y + z^2 = 2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x - y = 0, \\ y - z = 0, \\ x + y + z^2 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x - y = 0, \\ y + z - 1 = 0, \\ x + y + z^2 = 2 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y - z = 0, \\ x + y + z^2 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y + z - 1 = 0, \\ x + y + z^2 = 2. \end{cases}$$

Первые два уравнения этих систем линейные, и из них переменные y и x можно линейно выразить через z:

– в первой системе $y = z$, $x = y = z$;
– во второй $y = 1 - z$, $x = y = 1 - z$;
– в третьей $y = z$, $x = 1 - y = 1 - z$;
– наконец, в четвертой системе $y = 1 - z$, $x = 1 - y = z$.

Подстановки этих выражений в уравнение (3) дают четыре квадратных уравнения относительно z, решая которые, мы определяем значения переменной z, а вслед за ними и соответствующие значения x, y:

1) $2z + z^2 = 2 \iff z^2 + 2z - 2 = 0 \iff z = -1 \pm \sqrt{3}; \quad x = y = z,$

и получаются два решения:

$$(x;\, y;\, z) = (-1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}), (-1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3});$$

2) $2 - 2z + z^2 = 2 \iff z^2 - 2z = 0 \iff z = 0 \vee z = 2; \quad x = y = 1 - z,$

и получаются еще два решения: $(x;\, y;\, z) = (1;\, 1;\, 0), (-1; -1;\, 2)$;

3) $1 + z^2 = 2 \iff z^2 = 1 \iff z = \pm 1; \quad x = 1 - z, y = z,$

и еще два решения суть $(x;\, y;\, z) = (0;\, 1;\, 1), (2;\, -1;\, -1)$;

4) $1+z^2 = 2 \iff z^2 = 1 \iff z = \pm 1; \quad x = z,\, y = 1-z,$

и последние два решения: $(x;\, y;\, z) = (1;\, 0;\, 1), (-1;\, 2;\, -1)$.

Осталось переписать все восемь найденных решений в *ответ* — мы на этот раз не будем этого делать (в порядке исключения!). □

Но... аппетит приходит во время еды! Что, если *совсем* разложить систему из последнего примера?! Мы вычли из уравнения (1) уравнение (2), из уравнения (2) уравнение (3), так вычтем еще и из уравнения (3) уравнение (1) — тогда получатся *три* разлагающихся уравнения, т. е. система

$$\begin{cases} (1)-(2): & x^2 - y^2 + y - x = 0, \\ (2)-(3): & y^2 - z^2 + z - y = 0, \\ (3)-(1): & z^2 - x^2 + x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-y)(x+y-1) = 0, \\ (y-z)(y+z-1) = 0, \\ (z-x)(z+x-1) = 0, \end{cases}$$

которая эквивалентна совокупности *восьми* систем, состоящих только из линейных уравнений. Именно, это системы

$$\begin{cases} x-y=0, \\ y-z=0, \\ z-x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-y=0, \\ y-z=0, \\ z+x-1=0 \end{cases} \vee \ \ldots$$

Стоп! Из второй системы $x = y = z$, причем последнее уравнение дает $z + z - 1 = 0$, т. е. $2z = 1$, $z = 0{,}5$, решение $(x;\, y;\, z) = (0{,}5;\, 0{,}5;\, 0{,}5)$. *Но такого решения* ***не было***! Откуда оно взялось?

Проверяем уравнение (1): $(0{,}5)^2 + 0{,}5 + 0{,}5 = 1{,}25$, а вовсе не 2, как должно быть. А в первой системе получается просто $x = y = z$ *без всяких ограничений*, т. е. любой набор $(x;\, y;\, z) = (a;\, a;\, a)$ трех одинаковых чисел будет решением! Это же *полнейшая чепуха*! В чем дело?

А всё дело в том, что из трех линейных преобразований систем,

$$\begin{cases} (1), \\ (2), \\ (3) \end{cases} \to \begin{cases} (1)-(2), \\ (2), \\ (3); \end{cases} \quad \begin{cases} (1), \\ (2), \\ (3) \end{cases} \to \begin{cases} (1)-(2), \\ (2)-(3), \\ (3); \end{cases} \quad \begin{cases} (1), \\ (2), \\ (3) \end{cases} \to \begin{cases} (1)-(2), \\ (2)-(3), \\ (3)-(1), \end{cases}$$

первые два действительно равносильные, в чем нетрудно убедиться, проделав обратные преобразования, а вот третье

не является равносильным! Из уравнений (1) – (2), (2) – (3) и (3) – (2) *никакими линейными преобразованиями* нельзя получить ни одно из уравнений (1), (2), (3). Попробуйте установить это самостоятельно (см. «Упражнения»).

Мораль: *нужно очень тщательно следить за тем, чтобы проделываемые преобразования систем были* ***равносильными, эквивалентными***, даже (и *особенно* тщательно!) в случае самых простых и с виду таких «невинных» преобразований, как линейные.

Упражнения

В задачах 1–42 *требуется решить указанные системы уравнений*.

1. $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+6\,\frac{x-y}{x+y}=5, \\ xy=2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x^2+2y^2-3x+5y=3, \\ 4{,}5x^2+3y^2-3x+8y=7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+xy=28, \\ y^2+xy+12=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy=12, \\ (x+y)^2-\frac{1}{2}\,y^2=7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^3=x+y, \\ x^2+y^2=40. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+xy=28, \\ y^2+xy=-12. \end{cases}$

7. $\begin{cases} (x^2+y^2)\cdot\frac{x}{y}=6, \\ (x^2-y^2)\cdot\frac{y}{x}=1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^3-y^3=3x+5y, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{2}{3x-y}-\frac{5}{x-3y}=3, \\ \frac{1}{3x-y}+\frac{2}{x-3y}=\frac{3}{5}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y-xy+1=0, \\ x^2+y^2=xy+7. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x-y+xy=17, \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+y+xy=0, \\ x^3+y^3+x^3y^3=12. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^3=5x+y, \\ y^3=x+5y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x^2+xy+y^2=7. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y), \\ x^3+y^3=7(x+y). \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2+3xy=54, \\ 4y^2+xy=115. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x^2+y^2-4x+2y=1, \\ 3x^2-2y^2-6x-4y=5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} y^2-4xy+4y-1=0, \\ 3x^2-2xy-1=0, \\ xy>0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0, \\ 2x^2-4x+3+y^3=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} y^2-x^2=4x+4, \\ x^2+y^2+3xy=4. \end{cases}$

22. $\begin{cases} y^2-xy+1=0, \\ x^2+2x=-y^2-2y-1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} y^2-1=4x^2+4x, \\ 4x^2+y-3xy=1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2+2xy+y^2-x-y=6, \\ x-2y=3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x^4+x^2y^2+y^4=133. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2y^2-4xy+3x^2=17, \\ y^2-x^2=16. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ 2x-y+z=2, \\ 3x-5y+2z=-7. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^2+2yz=1, \\ y^2+2zx=2, \\ z^2+2xy=1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=18, \\ (y+z)(x+y+z)=30, \\ (z+x)(x+y+z)=24. \end{cases}$

31. $\begin{cases} (x+2y)(x+2z)=-16, \\ (y+2x)(y+2z)=8, \\ (z+2x)(z+2y)=-7. \end{cases}$

32. $\begin{cases} xyz+xz^2=2, \\ xy+2xz=-z, \\ x^2yz=-15. \end{cases}$

33. $\begin{cases} x+y=z, \\ y^2+z^2=13x^2, \\ 2(x^2+z^2)=zy^2. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x^3+y^3-z^3-xyz=-4, \\ x^3-y^3+z^3-xyz=8, \\ -x^3+y^3+z^3-xyz=-2. \end{cases}$

35. $\begin{cases} 5xy=12(x+y), \\ 2yz=3(y+z), \\ 3zx=4(z+x). \end{cases}$

36. $\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=3a^2, \\ x^2y^2z^2=a^6. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x+y+z=3a, \\ x^2+y^2+z^2=3a^2, \\ x^2y^2z^2=a^6. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3a^2, \\ xy+yz+zx+a^2=0, \\ xyz=a^3. \end{cases}$

39. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3a^2, \\ xy+yz+zx=3a^2, \\ xyz=-a^3. \end{cases}$

40. $\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0, \\ z^3-9y^2+27y-27=0, \\ x^3-9z^2+27z-27=0. \end{cases}$

41. $\begin{cases} 6x+y^2-z^2=6, \\ x^2-y-4z=-4, \\ 21x^2-2y^2+3y=22z^2. \end{cases}$

42. $\begin{cases} 2z^2+yz+10x^2y=0, \\ yz+z^2+9x^3y^2=3xy^2, \\ 2y^2+18xy^2-z^2=10x^2z. \end{cases}$

Глава 5

Иррациональные алгебраические задачи

§ 5.1. Уравнения с радикалами

5.1.1. Иррациональные алгебраические выражения

Выражение, образованные из чисел (числовых констант) и переменных с помощью четырех арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления), а также с помощью операции *извлечения корня произвольной степени*[1], называются **иррациональными алгебраическими**.

Поскольку модуль (абсолютную величину) можно записать в виде равенства $|A| = \sqrt{A^2}$, то и любые *выражения с модулями* относятся к иррациональным алгебраическим.

Алгебраические задачи (т. е. *уравнения, неравенства, системы, совокупности таких задач*), в которые входят иррациональные алгебраические выражения[2], называются ***иррациональными алгебраическими задачами*** или ***задачами с радикалами*** (напомним, что *радикалами* принято называть знаки извлечения корней).

Основная идея решения таких задач (как уравнений, так и неравенств, и систем) — *исключение иррациональностей* (или «*освобождение от радикалов*»). Методы исключения иррациональностей мы рассмотрим прежде всего в случае квадратичных иррациональностей.

5.1.2. Уравнения с квадратными радикалами. Замена переменной

Пример 5.1.1. В уравнении $\sqrt{x} = x - 2$ введение новой переменной $\sqrt{x} = z$ позволяет избавиться от иррациональности:

[1] *Арифметического* корня степени n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) или *алгебраического* корня нечетной степени $n = 2k + 1 \geqslant 3$ из заданного выражения A ($A \mapsto \sqrt[n]{A}$).

[2] И больше ничего!

$x = z^2$, и исходное уравнение записывается как квадратное: $z = z^2 - 2$. При этом нас интересуют не все, а только неотрицательные его корни, ибо $z = \sqrt{x} \geqslant 0$. Получаем смешанную систему:

$$\begin{cases} z = z^2 - 2, \\ z \geqslant 0; \end{cases}$$

следовательно,

$$z^2 - z - 2 = 0 \iff (z-2)(z+1) = 0 \iff z = \left[\begin{array}{r} 2, \\ -1. \end{array}\right.$$

Второй корень $z = -1$ не удовлетворяет ограничению $z \geqslant 0$, поэтому приходим к единственному *уравнению замены*:

$$\sqrt{x} = 2 \iff x = 4.$$

Ответ: $x = 4$. □

Подобный метод замены разумно использовать в тех случаях, когда в уравнение входит *только один* радикал вида $z = \sqrt{ax+b}$ — тогда x *квадратично* выражается через z. При этом, скажем, уравнение вида $\sqrt{ax+b} = cx + d$ сведется к квадратному уравнению (относительно z). В иных случаях может получиться более сложное рациональное алгебраическое уравнение.

Вопрос. *Что получится, если в точности ту же замену применить к уравнению вида* $\sqrt{ax+b} = \sqrt{cx+d}$?

5.1.3. Неэквивалентные преобразования с проверкой

Конечно, чтобы избавиться от квадратного радикала в выражении $A = \sqrt{U}$, достаточно возвести его в квадрат — перейти к выражению $A^2 = U$. Однако при возведении в квадрат обеих частей уравнения получится, вообще говоря, только *следствие*, а не эквивалентное уравнение:

$$A = B \implies A^2 = B^2,$$

но обратное следование гарантировать нельзя — в общем случае

$$A^2 = B^2 \not\Longrightarrow A = B;$$

можно лишь заключить, что

$$A^2 = B^2 \implies A = B \ \vee \ A = -B.$$

Значит, при использовании процедуры возведения уравнений в квадрат у задачи (уравнения) могут появиться ***посторонние корни***. Чтобы «отсечь» такие корни, достаточно ***выполнить проверку*** всех получившихся в итоге корней их *подстановкой в исходное уравнение*. Такова общая схема решения уравнений с радикалами «*методом неэквивалентных*[1] *преобразований*».

Пример 5.1.2. Приме́ним эту схему к уже разобранному уравнению.

$$\sqrt{x} = x - 2 \implies x = (x-2)^2 \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff$$

$$\iff (x-1)(x-4) = 0 \iff x = \left[\begin{array}{l} 1, \\ 4. \end{array}\right.$$

Обратите внимание: при обычных тождественных преобразованиях, когда равносильность заведомо имеет место, мы используем знак равносильности ($\iff$) — так удобнее, хотя не было бы ошибкой и при этих преобразованиях употреблять знак следования ($\implies$).

Проверка.

1) При подстановке значения $x = 1$ в левую часть $L(x) = \sqrt{x}$ исходного уравнения получаем, что $L(1) = 1$; в правую часть $R(x) = x - 2$: $R(1) = 1 - 2 = -1$. Значит, $L(1) \neq R(1)$ — корень $x = 1$ является *посторонним*.

2) При $x = 4$ имеем: значение левой части $L(x) = \sqrt{4} = 2$, правой — $R(x) = 4 - 2 = 2$; $L(4) = R(4)$, следовательно, значение $x = 4$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 4$. □

Замечание 1. Иногда вместо проверки путем подстановки найденных корней итогового уравнения (следствия) в исходное уравнение просто проверяют, входят ли корни в так называемую «*область допустимых значений*» (ОДЗ) исходного уравнения. Это ***в принципе неверно***. Скажем, в разобранном примере оба корня входят в ОДЗ (напомним, что *областью допустимых значений уравнения*[2] *называется множество тех значений переменной, при которых обе части уравнения определены* — имеют смысл, — так что в рассматриваемом случае ОДЗ есть полуось $\{x | x \geqslant 0\}$). Тем не менее, один из корней посторонний.

[1] Или *неравносильных*.

[2] Или иного предложения — скажем, неравенства.

В отношении этого вопроса встречается и такая путаница, когда за ОДЗ рассматриваемого уравнения принимается промежуток, выделяемый ***ограничением*** $x \geqslant 2$. Да, такое ограничение действительно должно выполняться, но оно не имеет отношения к ОДЗ! (См. определение выше.)

Замечание 2. В простых случаях — когда и исходное уравнение, и получающиеся корни уравнения-следствия не слишком громоздкие, — проверка подстановкой в исходное уравнение особых затруднений не вызывает (как в разобранном случае). Однако представьте себе, что нужно проверить подстановкой значения, например, вида $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ — вычисления будут несколько утомительными (мягко говоря!). Поэтому при решении уравнений с радикалами, не говоря о неравенствах, гораздо предпочтительнее равносильные (эквивалентные) преобразования задач.

5.1.4. Метод эквивалентных преобразований

Преобразование, обратное возведению обеих частей уравнения в квадрат — извлечение квадратных корней из обеих частей получившегося уравнения. Для возможности обратного перехода необходимо обеспечить два условия: (1) саму возможность извлечения корней, т. е. неотрицательность частей уравнения; (2) получение после извлечения корней именно исходного уравнения — заметьте, что при извлечении корня из квадрата выражения получится вовсе не исходное выражение, а его модуль, абсолютная величина: $\sqrt{R^2} = |R|$, что дает исходное выражение R только при выполнении условия $R \geqslant 0$. Эти соображения позволяют получить схемы равносильных переходов от уравнений с радикалами к рациональным уравнениям с дополнительными ограничениями в виде неравенств, т. е. к эквивалентным *смешанным системам*. Мы рассмотрим три стандартные схемы освобождения от квадратных радикалов.

Схема 1. Уравнения вида $\sqrt{A} = B$

Чтобы избавиться от радикала, возводим обе части в квадрат:

$$\sqrt{A} = B \quad (1) \quad \Longrightarrow \quad A = B^2 \quad (2).$$

Для получения уравнения (1) из уравнения (2) нужно извлечь корень из обеих частей последнего уравнения. Это заведомо возможно, ибо обе части неотрицательны: во-первых, всегда $B^2 \geqslant 0$, а левая часть $A \geqslant 0$, будучи равна правой (!). В результате получится уравнение

$$\sqrt{A} = \sqrt{B^2} \iff \sqrt{A} = |B|, \quad (1')$$

которое совпадет с уравнением (1) при выполнении условия (ограничения) $B \geqslant 0$. Замечая, что из уравнения (1) это условие вытекает, приходим к следующей схеме освобождения от радикалов:

$$\sqrt{A} = B \iff \begin{cases} A = B^2, \\ B \geqslant 0. \end{cases} \quad (3)$$

Конечно, для поиска решений смешанной системы вида (3) или системы общего вида (смешанная система = уравнения + неравенства) *нет необходимости решать неравенства*: достаточно решить уравнение, а затем проверить, удовлетворяют ли найденные корни неравенствам (ограничениям). Как правило, проверять выполнение неравенств гораздо проще, чем проверять корни подстановкой в исходное уравнение.

Пример 5.1.3. Применим схему 1 к конкретному уравнению:

$$\sqrt{x+4} = x - 2 \iff \begin{cases} x + 4 = (x-2)^2, \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 5x = 0, \\ x \geqslant 2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \ \vee \ x = 5, \\ x \geqslant 2 \end{cases} \iff x = 5.$$

Ответ: $x = 5$. □

Схема 2. Уравнения вида $\sqrt{A} = \sqrt{B}$

Здесь возведение обеих частей уравнения в квадрат позволяет избавиться от обоих радикалов:

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \quad (4) \quad \Longrightarrow \quad A = B \quad (5).$$

Обратно, чтобы получить уравнение (4) из уравнения (5), нужно извлечь корень из обеих частей уравнения (5). Это возможно, если обе части уравнения (5) неотрицательны: $A \geqslant 0$ и $B \geqslant 0$. Однако левая и правая части уравнения равны,

поэтому достаточно потребовать выполнения только одного из указанных ограничений, $A \geqslant 0$ или $B \geqslant 0$. Естественно, следует выбирать то из них, которое попроще. Приходим к следующей схеме освобождения от радикалов:

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \iff \begin{cases} A = B, \\ B \geqslant 0 \quad [\text{или } A \geqslant 0]. \end{cases} \tag{6}$$

Пример 5.1.4. Решая уравнение с вложенными радикалами

$$\sqrt{4 - \sqrt{3 + x}} = \sqrt{x + 1}, \tag{$*$}$$

сначала избавляемся от внешних радикалов: $4 - \sqrt{3 + x} = x + 1$, и приписываем более простое ограничение $x + 1 \geqslant 0$. Таким образом, действуем сначала по схеме 2, а потом «уединяем» радикал $\sqrt{3 + x}$ и применяем схему 1:

$$(*) \iff \begin{cases} 4 - \sqrt{3+x} = x+1, \\ x+1 \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{3+x} = 3-x, \\ x \geqslant -1, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3+x = (3-x)^2, \\ 3-x \geqslant 0, \\ x \geqslant -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0, \\ -1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (x-1)(x-6) = 0, \\ -1 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \ \vee \ x = 6, \\ -1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases} \iff x = 1.$$

Ответ: $x = 1$. □

Разумеется, нет смысла «разрабатывать» схемы освобождения от радикалов «на все случаи жизни». Однако разберем еще одну общую схему.

Схема 3. Уравнения вида $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C}$

В данном случае при первом возведении в квадрат никаких ограничений приписывать не нужно — можно просто записать эквивалентность

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} \iff \tag{7}$$

$$\iff A + B + 2\sqrt{A}\sqrt{B} = C \iff \tag{8}$$

$$\iff 2\sqrt{A}\sqrt{B} = C - A - B. \tag{9}$$

Действительно, в левой части уравнения (8) записан полный квадрат, $(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$, и извлечение корней из обеих частей

приводит в точности к уравнению (7):

$$\sqrt{(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2} = |\sqrt{A}+\sqrt{B}| = \sqrt{A}+\sqrt{B},$$

ибо $\sqrt{A}+\sqrt{B} \geqslant 0$. Вслед за тем мы «уединили» радикалы, но оставили их произведение — не стали заменять $\sqrt{A}\sqrt{B}$ на $\sqrt{AB}$. Однако, чтобы применить к получившемуся уравнению (9) схему 1, придется-таки воспользоваться формулой

$$\sqrt{A}\sqrt{B} = \sqrt{AB} \tag{10}$$

и перейти к *следствию*:

$$(9) \implies 2\sqrt{AB} = C - A - B. \tag{11}$$

В общем случае такой переход не является равносильным — из-за того, что формула (10) является *тождеством, расширяющим область определения выражения*[1]. Его левая часть определена при $A \geqslant 0$ и $B \geqslant 0$, а правая — в случае $AB \geqslant 0$, поэтому использование этого тождества может привести к появлению посторонних корней. Чтобы сделать предыдущий переход равносильным, нужно к уравнению (11) добавить ограничения на область определения (на ОДЗ):

$$2\sqrt{A}\sqrt{B} = C - A - B \iff \begin{cases} 2\sqrt{AB} = C - A - B, \\ A \geqslant 0, \\ B \geqslant 0. \end{cases} \tag{12}$$

Отметим, что в данном случае необходимы *оба* неравенства $A \geqslant 0$ и $B \geqslant 0$ — иначе мы рискуем попасть в ситуацию $A = 0$, $B < 0$, когда правая часть тождества (10) определена, а левая — нет (!).

Последний переход осуществляется по схеме 1, и тем самым разработка схемы 3 завершена:

$$\sqrt{A}+\sqrt{B} = \sqrt{C} \iff (12) \iff \begin{cases} 4AB = (C - A - B)^2, \\ C - A - B \geqslant 0, \\ A \geqslant 0, \\ B \geqslant 0. \end{cases} \tag{13}$$

Разумеется, эту и прочие «схемы» **не нужно** (и вредно!) запоминать или заучивать. *Важно понять принципы, рассуждения*, с помощью которых от уравнения с радикалами можно

[1] Или, если угодно, ОДЗ.

перейти к равносильным смешанным системам рациональных уравнений и неравенств.

Важно еще понять, что использование подобных эквивалентных преобразований *избавляет* от необходимости поиска пресловутых ОДЗ! Иногда они и бывают полезны, но большей частью нахождение ОДЗ — пустая трата времени (к тому же найти ОДЗ уравнения зачастую труднее, чем решить само уравнение).

Ну и, конечно, глубже и логически точнее понять «метод эквивалентных преобразований» можно только практикуясь в решении конкретных задач.

Пример 5.1.5. Решая конкретную задачу, нужно стремиться в полной мере использовать ее специфику — упрощать решение, насколько это удается.

$$\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1} \iff$$
$$\iff 2x^2-4x=2x^2+2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1} \iff$$
$$\iff \sqrt{(x^2+1)(x^2-1)}=-2x.$$

При последнем переходе никаких ограничений добавлять не нужно, так как выражение x^2+1 *всюду положительно*. Остается применить стандартную схему — перейти к смешанной системе:

$$\begin{cases}(x^2+1)(x^2-1)=4x^2,\\ -2x\geqslant 0.\end{cases}$$

Далее уместна замена с ограничением: $x^2=z\geqslant 0$, уравнение записывается в виде

$$z^2-1=4z \iff z^2-4z-1=0,$$

откуда $z=2\pm\sqrt{5}$. В силу ограничения на z остается только значение $x^2=z=2+\sqrt{5}$; соответственно, $x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$, причем положительный корень отбрасывается ограничением $-2x\geqslant 0$.

Ответ: $x=-\sqrt{2+\sqrt{5}}$. □

Пример 5.1.6. Уравнение

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2} \qquad (*)$$

нельзя решать по схеме 3 — «простым» возведением в квадрат, — так как обратный переход, т. е. извлечение корня, даст

в левой части *модуль* разности радикалов,

$$\sqrt{(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2}=|\sqrt{A}-\sqrt{B}|,$$

а не саму разность. Однако все-таки хочется сразу возвести в квадрат, поскольку $x+2x=3x$ (см. уравнение $(*)$) — почему бы этим не воспользоваться?

Такое преобразование можно сделать эквивалентным, если после возведения уравнения в квадрат к полученному уравнению приписать *ограничение на знак левой части*:

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\sqrt{C} \iff \begin{cases} A+B-2\sqrt{A}\sqrt{B}=C, \\ \sqrt{A}\geqslant\sqrt{B} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2\sqrt{AB}=A+B-C, \\ A\geqslant B\geqslant 0 \end{cases}$$

(мы сразу воспользовались формулой (10) $\sqrt{A}\sqrt{B}=\sqrt{AB}$, так как переписали неравенство с радикалами $\sqrt{A}\geqslant\sqrt{B}$ в виде *двойного неравенства* $A\geqslant B\geqslant 0$[1]). Далее уже применима схема 1.

Возвращаясь к уравнению $(*)$, будем иметь:

$$(*)\iff\begin{cases} 3x+2-2\sqrt{(x+3)(2x-1)}=3x-2, \\ x+3\geqslant 2x-1\geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff\begin{cases} 2\sqrt{(x+3)(2x-1)}=4, \\ x\geqslant\frac{1}{2}, \quad x\leqslant 4 \end{cases} \iff$$

$$\iff\begin{cases} (x+3)(2x-1)=4\iff 2x^2+5x-7=0\iff x=1\vee x=-\frac{7}{2}, \\ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4. \end{cases}$$

Ответ: $x=1$.

Для сравнения приведем решение и знакомым способом — по схеме 3. Имеем:

$$(*) \iff \sqrt{x+3}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2} \iff$$

$$\iff x+3=5x-3+2\sqrt{2x-1}\sqrt{3x-2} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{(2x-1)(3x-2)}=3-2x, \qquad (0) \\ \{2x-1\geqslant 0, \quad 3x-2\geqslant 0\} \iff x\geqslant\frac{2}{3}. \end{cases} \qquad (**)$$

[1] Это просто *сокращенная запись системы двух неравенств*: $A\geqslant B$ и $B\geqslant 0$.

Далее,

$$(0) \iff \begin{cases}(2x-1)(3x-2)=(3-2x)^2,\\ 3-2x \geqslant 0\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}2x^2+5x-7=0\\ x \leqslant \frac{3}{2}\end{cases} \iff \begin{cases}x=1 \ \vee \ x=-\frac{7}{2},\\ x \leqslant \frac{3}{2}.\end{cases}$$

Последнему ограничению удовлетворяют оба корня квадратного уравнения, однако неравенству $x \geqslant \frac{2}{3}$ из предыдущей системы $(**)$ — только один из них: $x=1$. Естественно, получился тот же ответ.

Примечательно, что в обоих случаях мы пришли *к одному и тому же* уравнению: $2x^2+5x-7=0$, — *случайно ли это*? *Всегда ли так будет*? (С другой стороны, системы неравенств — ограничений получились *разные*,

$$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4 \quad \text{и} \quad \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2},$$

но выделили-то они *один и тот же корень*. Ну, это-то, конечно, не случайно!) □

5.1.5. Сведение уравнений к системам

Сначала разберем «классический» пример, к которому применима *неполная замена*, типа рассмотренных в предыдущей главе (пп. 4.3.1 и 4.4.6).

Пример 5.1.7. Если решать уравнение $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}=x$ подобно уравнению из примера 5.1.4, последовательным возведением в квадрат, то получится не слишком привлекательное уравнение степени 4. Введем новую переменную: $\sqrt{1+x}=y$, — но *оставим* и переменную x (посмотрите, что получится, если сделать *полную* замену, т. е. подставить в исходное уравнение $x=y^2-1$) — перейдем к системе

$$\begin{cases}\sqrt{1+x}=y,\\ \sqrt{1+y}=x\end{cases} \iff \begin{cases}\begin{cases}1+x=y^2,\\ 1+y=x^2,\end{cases}\\ x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.\end{cases} \qquad (*)$$

Получающаяся рациональная алгебраическая система допускает разложение:

$$\begin{cases} x = y^2 - 1, & (1) \\ y = x^2 - 1 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} (1) - (2): & x - y = y^2 - x^2, \\ & (2): \quad y = x^2 - 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (y^2 - x^2) + (y - x) = 0, \\ y = x^2 - 1, \end{cases} \iff \begin{cases} (y - x)(y + x + 1) = 0, \\ y = x^2 - 1, \end{cases}$$

так что вся система $(*)$ равносильна совокупности двух смешанных систем с двумя переменными,

$$(*) \iff \begin{cases} y = x, \\ y = x^2 - 1, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y + x + 1 = 0, \\ y = x^2 - 1, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \end{cases} \tag{3}$$

из которых нам нужно найти только значение переменной x.

Первая система решается подстановкой:

$$y = x \longrightarrow x = x^2 - 1 \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

а поскольку $x \geqslant 0$, исходному уравнению удовлетворяет только значение $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Вторая же система *несовместна*, ибо если $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то $x + y + 1 \geqslant 1$, что противоречит уравнению (3). Итак,

Ответ: $\quad x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. □

Другой подход к этому же уравнению — ***итерационный***. Заметим, что уравнение может быть записано в виде

$$f(f(x)) = x, \text{ где } f(x) = \sqrt{1 + x}.$$

Поскольку функция f возрастает на своей области определения $[-1, +\infty)$, *по теореме об итерационных уравнениях* (п. 4.4.5) рассматриваемое уравнение эквивалентно уравнению

$$f(x) = x, \text{ т. е. } \sqrt{1 + x} = x,$$

которое решается совсем легко — заменой с ограничением или же по схеме 1 (см. выше).

Метод сведения к системам уравнений путем введения новых переменных примени́м к уравнениям с радикалами любых степеней — второй, третьей и выше.

Пример 5.1.8. Для решения уравнения $\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1$ введем две переменные: $\sqrt[3]{10-x}=a$, $\sqrt[3]{3-x}=b$. Тогда исходное уравнение записывается в виде $a-b=1$, а второе соотношение между a и b получается исключением из системы замены переменной x:

$$a^3=10-x,\quad b^3=3-x \implies a^3-b^3=7.$$

Находим решения $(a;\,b)$ новой системы:

$$\begin{cases} a-b=1, \\ a^3-b^3=7 \end{cases} \iff \begin{cases} a-b=1, \\ a^2+b^2+ab=7. \end{cases}$$

Далее можно воспользоваться подстановкой $a=b+1$ или же использовать кососимметричность системы — ввести новые переменные $a-b=u$, $ab=v$. Получаем:

$$\begin{cases} u=1, \\ u^2+3v=7 \end{cases} \iff \begin{cases} u=1, \\ 1+3v=7 \end{cases} \iff (u;\,v)=(1;\,2).$$

Продолжаем:

$$\begin{cases} a-b=1, \\ ab=2 \end{cases} \iff \begin{cases} b=a-1, \\ a^2-a=2 \end{cases} \iff \begin{cases} b=a-1, \\ (a-2)(a+1)=0. \end{cases}$$

Следовательно, $(a;\,b)=(2;\,1),(-1;\,-2)$.

Теперь решаем получающиеся *системы замены*:

$$(1)\quad \begin{cases} \sqrt[3]{10-x}=2, \\ \sqrt[3]{3-x}=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 10-x=8, \\ 3-x=1 \end{cases} \iff x=2;$$

$$(2)\quad \begin{cases} \sqrt[3]{10-x}=-1, \\ \sqrt[3]{3-x}=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} 10-x=-1, \\ 3-x=-8 \end{cases} \iff x=11.$$

Ответ: $x=2;11$. □

Замечание. На последнем шаге решения в каждом из случаев вместо системы можно было бы рассмотреть только одно уравнение — значения a и b удовлетворяют уравнениям $a-b=1$, $a^3-b^3=7$, поэтому

$$\sqrt[3]{10-x}=a \iff 10-x=a^3=b^3+7 \iff 3-x=b^3 \iff \sqrt[3]{3-x}=b,$$

так что уравнения системы эквивалентны и одно из них можно *не рассматривать*. Такое рассуждение годится в случае аналогичных уравнений с радикалами произвольной *нечетной* степени, однако оно не проходит для радикалов *четной* степени — в этом случае необходимо рассматривать систему обоих уравнений замены.

Пример 5.1.9. Для решения уравнения

$$\sqrt[4]{41+x}+\sqrt[4]{41-x}=2$$

можно ввести переменные $\sqrt[4]{41+x}=a$, $\sqrt[4]{41-x}=b$ — получим систему рациональных уравнений

$$\begin{cases} a+b=2, \\ a^4+b^4=82 \end{cases} \iff \begin{cases} b=2-a, \\ a^4+(a-2)^4=82. \end{cases} \qquad (*)$$

Получилось почти в точности хорошо знакомое уравнение четвертой степени $(*)$ (см. п. 3.2.5) — линейной заменой $a-1=z$ оно сводится к *биквадратному*; таким образом, находим значения z, затем a, b и, наконец, корни исходного уравнения x. Однако ... *не будем торопиться*!

Взгляните внимательно на рассматриваемое уравнение: каждый из радикалов a, b *неотрицателен*; кроме того, при любом значении x хотя бы одно из подкоренных выражений $41\pm x$ не меньше числа $41>16=2^4$, поэтому хотя бы один из радикалов $a,b=\sqrt[4]{41\pm x}$ *больше двух*, и данное уравнение *никак не может выполняться*!

Ответ: *данное уравнение не имеет решений* (*корней*). □

Ответ в данной задаче можно записать короче: просто «*нет решений*», или в теоретико-множественном виде: «$\varnothing$» (*пустое множество*)[1].

5.1.6. Освобождение от кубических радикалов

В уравнениях с кубическими радикалами иногда имеет смысл просто возводить в куб, используя равносильные переходы типа

$$A=B \iff A^3=B^3,$$
$$A=B \iff \sqrt[3]{A}=\sqrt[3]{B},$$

а также ***абсолютные тождества***, справедливые *при всех* значениях входящих в них переменных:

$$\left(\sqrt[3]{A}\right)^3\equiv A,$$
$$\sqrt[3]{A^3}\equiv A,$$
$$\sqrt[3]{AB}\equiv\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B}.$$

[1] Но, напомним, ни в коем случае нельзя писать $\{\varnothing\}$ — так обозначается отнюдь не пустое множество, а *множество, состоящее из одного элемента — **пустого множества***! Также не стоит писать «$x\in\varnothing$».

При этом полезны не однажды уже использовавшиеся формулы (тоже абсолютные тождества)

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b).$$

Мы ограничимся разбором всего одного (но классического!) уравнения.

Пример 5.1.10. Решим уравнение с тремя кубическими радикалами повторным возведением в куб:

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$x + 1 + 3x + 1 + 3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}\right) = x - 1$$

$$\Updownarrow$$

$$3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)(x-1)} = -3x - 3$$

(на этом шаге сумму радикалов в скобках мы заменили на равный ей один радикал согласно исходному уравнению)

$$\Updownarrow$$

$$(x+1)(3x+1)(x-1) = -(x+1)^3$$

$$\Updownarrow$$

$$(x+1)\left[(3x+1)(x-1) + (x+1)^2\right] = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x+1)\left[4x^2\right] = 0 \text{ (проверьте!)} \iff x = -1 \vee x = 0,$$

и вроде бы всё!

Ответ: $\{-1, 0\}$.

Однако, проверим!

1. При $x = -1$ левая часть исходного уравнения равна $L(-1) = \sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{-2}$, и правая часть $R(-1) = \sqrt[3]{-1-1} = \sqrt[3]{-2}$ равна левой — уравнение выполняется.

2. Для $x = 0$ левая часть $L(x) = L(0) = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 2$, а правая часть $R(x) = R(0) = \sqrt[3]{0-1} = -1$ — отнюдь **не равна** левой! Таким образом, значение $x = 0$ **не является корнем рассматриваемого уравнения.**

Вопрос. *В чем же дело?* — Попробуйте ответить на этот вопрос самостоятельно, а потом уже прочтите нижеследующее объяснение!

Правильный ответ: $x = -1$. □

Объяснение. *Рассматривая последовательно все равносильные* (якобы!) *переходы, нетрудно увидеть единственное* «подозрительное место»: *замену во втором уравнении суммы радикалов в скобках на равный ей, согласно исходному уравнению, один радикал, т. е.* ***подстановку в уравнение выражения из равносильного ему уравнения.*** *Спрашивается,* ***с какой стати*** *при этом получится уравнение, равносильное двум упомянутым?* — ***А ни с какой!***

В самом деле, скажем, уравнение $x = 1$ равносильно уравнению $x^3 = 1$, которое можно переписать в виде $x^2 \cdot x = 1$; если теперь вместо сомножителя x в последнее уравнение подставить $x = 1$ (из первого уравнения), то мы получим уравнение $x^2 = 1$, отнюдь не равносильное исходному! Еще более «крутой» пример — если в то же уравнение $x = 1$ вместо единицы подставить равное ей выражение $1 = x$, то получится уравнение $x = x$, ну уж «*совсем не равносильное*» исходному!!

Таким образом, слишком вольное, «бездумное» обращение с уравнениями при их преобразованиях, с виду эквивалентных, может привести к полной бессмыслице, поэтому нужно «***думать о смысле***[1)]», *проверять* равносильность конкретных преобразований и *обосновывать* ее.

5.1.7. Использование монотонности

В гл. 2–4 приводились примеры того, как соображения монотонности помогают при решении полиномиальных уравнений. Использование монотонности при решении иррациональных уравнений основано на *свойствах монотонности арифметических корней и алгебраических корней нечетной степени*:

– ***арифметические корни произвольной натуральной степени*** $n \geqslant 2$ — ***функции*** $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ — ***строго возрастают на всей положительной полуоси*** $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$;

– ***алгебраические корни произвольной нечетной степени*** $n = 2k + 1 \geqslant 3$ — ***функции*** $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ — ***строго возрастают на всей числовой оси*** $\mathbb{R}$.

Отсюда вытекает монотонность соответствующих корней из любой линейной функции $y(x) = kx + b$, $k \neq 0$.

[1)] Напомним цитату из Льюиса Кэрролла: «*А мораль отсюда* ***такова:*** *думай о смысле, а слова придут сами*», — говорила Герцогиня Алисе!

Пример 5.1.11. Уравнение $\sqrt{17+x}-\sqrt{9-x}=4$ можно решить повторным возведением в квадрат (даже двумя путями — см. пример 5.1.6; попробуйте!), или заменой с ограничением — скажем, $\sqrt{9-x}=z\geqslant 0$ (тогда $x=9-z^2$, и получается стандартное уравнение $\sqrt{26-z^2}=z+4$), или же сведением к системе уравнений $a-b=4$, $a^2+b^2=26$. Однако, самый короткий (и *изящный*!) способ — заметить, что значение $x=8$ удовлетворяет уравнению $(5-1=4)$, а левая часть уравнения, т. е. функция $L(x)=\sqrt{17+x}-\sqrt{9-x}$, *строго возрастает* на своей области определения (на отрезке $[-17,9]$), ибо является суммой $L(x)=a(x)+c(x)$ двух возрастающих функций $a(x)=\sqrt{17+x}$ и $c(x)=-\sqrt{9-x}$ (функция $b(x)=\sqrt{9-x}$ — строго убывающая, поэтому $c(x)=-b(x)$ — строго возрастающая). Значит, если $x<8$, то $L(x)<L(8)=4$, а если $x>8$, то $L(x)>L(8)=4$, поэтому у нашего уравнения $L(x)=4$ ***единственный корень*** $x=8$.

Ответ: $x=8$. □

Отличительная черта последнего способа решения — его ***универсальность*** (*относительная, конечно*!). Этот способ годится для множества обобщений разобранного уравнения — например, для уравнений

$$\sqrt{17+x}-\sqrt[4]{9-x}=4,$$
$$\sqrt{17+x}-\sqrt[10]{9-x}=4,$$
$$\sqrt{17+x}-\sqrt[17]{9-x}=4,$$
$$\sqrt{17+x}+\sqrt[5]{7-x}=4,$$
$$\sqrt{17+x}+\sqrt[13]{7-x}=4,$$

и т. д. и т. п.

Отметим, что вместо *оценок* (типа $x<8\Rightarrow L(x)<L(8)$ и т. п.) можно сформулировать, ***доказать***, а затем систематически использовать следующее утверждение.

Теорема 1 (*о значениях монотонных функций*). *Любая строго монотонная (строго возрастающая или строго убывающая) на всей области своего определения функция каждое свое значение принимает не более, чем при одном значении аргумента.*

Иными словами, ***если функция $L(x)$ является строго монотонной на своей области определения $D_L \subset \mathbb{R}$, то при любом значении $c \in \mathbb{R}$ уравнение $L(x) = c$ имеет не более одного решения.***

Отсюда следует, что, *в условиях теоремы*, для решения уравнения $L(x) = c$ достаточно указать (угадать и **проверить!**) один его корень — (*конкретное*) значение $x = x_0$; других корней это уравнение иметь не будет.

Доказательство теоремы проведите самостоятельно.

Упомянем еще один полезный вытекающий из приведенной теоремы факт.

Следствие 1. ***Если левая часть уравнения $L(x) = R(x)$ строго возрастает, а правая часть строго убывает на ОДЗ (области допустимых значений) этого уравнения (или наоборот, левая часть убывает, а правая часть возрастает), то данное уравнение имеет не более одного корня.***

Для *доказательства* достаточно переписать уравнение в эквивалентном виде: $L(x) - R(x) = 0$, — и заметить, что функция $F(x) = L(x) - R(x)$ *строго монотонна* в ОДЗ уравнения. Добавим к этому, что в условии теоремы достаточно, чтобы *строго* монотонной была хотя бы одна из частей уравнения; скажем, если функция $L(x)$ *строго убывающая*, то $R(x)$ может быть и *нестрого возрастающей* (иначе говоря, ***неубывающей***[1]). Важно только, чтобы «*направления*» монотонности частей уравнения были ***различными*** (это, разумеется, **существенно**).

5.1.8. Использование однородности

Соображения однородности при решении уравнений с одной переменной x могут быть использованы в случае, когда то или иное уравнение записывается как однородное относительно каких-то двух новых переменных $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Пример 5.1.12. Если уравнение

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = 2\sqrt[3]{x^2-1}$$

[1] То есть при любых значениях x_1, x_2 из **ОДЗ** $x_1 \leqslant x_2 \implies R(x_1) \leqslant R(x_2)$.

переписать в переменных $u = \sqrt[3]{x+1}$, $v = \sqrt[3]{x-1}$, то получится однородное уравнение степени 2:

$$u^2 + v^2 = 2uv. \qquad (*)$$

Его можно решать по стандартной схеме для однородных уравнений:

$$(*) \iff \{u = 0 \ \& \ v = 0\} \ \vee \ \left\{\frac{v}{u} = k \ \& \ 1 + k^2 = 2k\right\}$$

(см. п. 3.4.2). Однако в данном конкретном случае (когда справа стоит коэффициент 2!) проще записать уравнение $(*)$ в виде

$$(u - v)^2 = 0 \iff u = v;$$

соответственно,

$$\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x-1} \iff x + 1 = x - 1 \iff 2 = 0 \iff \varnothing.$$

Ответ: нет решений. □

Пример 5.1.13. Похожее уравнение

$$2\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = 3\sqrt[3]{x^2-1}$$

тоже относится к однородным в указанном выше смысле. Для его решения совсем не обязательно вводить новые переменные — можно сразу «рассмотреть случаи».

1) Если $x + 1 = 0$, то подстановка в уравнение значения $x = -1$ приводит к числовому равенству $0 + \sqrt[3]{-8} = 0$, которое, очевидно, не выполняется. Значит, в этом случае решений нет.

2) В случае $x + 1 \neq 0$ делим обе части уравнения на выражение $\sqrt[3]{(x+1)^2}$, вводим новую переменную

$$\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}} = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} = k$$

и решаем получающееся уравнение относительно k:

$$2 + k^2 = 3k \iff k^2 - 3k + 2 = 0 \iff k = 1 \ \vee \ k = 2.$$

Далее переписываем уравнение замены,

$$\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} = k \iff \frac{x-1}{x+1} = k^3,$$

и решаем его для найденных значений k.

А) Для $k = 1$, как и в предыдущем примере,

$$\frac{x-1}{x+1} = 1 \iff \begin{cases} x - 1 = x + 1, \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2 = 0, \\ x \neq -1 \end{cases} \iff \varnothing,$$

и решений нет.

Б) Если $k = 2$, то

$$\frac{x-1}{x+1} = 8 \iff \begin{cases} x - 1 = 8x + 8, \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 7x = -9, \\ x \neq -1 \end{cases} \iff x = -\frac{9}{7}.$$

Ответ: $x = -\dfrac{9}{7}$. □

§ 5.2. Неравенства с радикалами

Этот параграф посвящен в основном методам решения неравенств с *квадратными* радикалами. Освобождаться от радикалов при их решении придется *путем возведения неравенств в квадрат*. Уже такие преобразования неравенств существенно отличаются от соответствующих преобразований уравнений.

5.2.1. Почему неравенства с радикалами сложнее уравнений

В § 1.1 мы видели, что, в отличие от уравнений, *неравенства нельзя даже умножать на ненулевые константы*: если

$$\text{при любом } c \neq 0 \qquad A = B \iff cA = cB,$$

то для числовых неравенств неверно и просто следование: при $c \neq 0$

$$a < b \not\Longrightarrow ca < cb.$$

Более точно, ***неравенства можно умножать на ненулевые константы, но «с умом»***:

$$\text{при любом } c > 0 \qquad A \leqslant B \implies cA \leqslant cB,$$
$$\text{при любом } c < 0 \qquad A \leqslant B \implies cA \geqslant cB$$

(причем здесь имеет место не только *следование*, но и *равносильность*!).

Пикантнее обстоит дело с возведением в квадрат. Возведение уравнения в квадрат не является, вообще говоря, эквивалентным преобразованием, но, по крайней мере, всегда приводит к *следствию*:

$$A = B \quad \implies \quad A^2 = B^2,$$

даже если после возведения в квадрат применить *расширяющее ОДЗ тождество* $(\sqrt{C})^2 = C$. При возведении неравенств в квадрат даже следование не гарантировано: и для числовых неравенств, вообще говоря,

$$a < b \;\not\Longrightarrow\; a^2 < b^2$$

(например, $-17 < 0$, но $(-17)^2 = 289 > 0^2 = 0$). ***Неравенства можно возводить в квадрат, если только обе его части имеют один знак***:

$$0 \leqslant a < b \quad \implies \quad a^2 < b^2;$$
$$a < b \leqslant 0 \quad \implies \quad a^2 > b^2.$$

Мораль отсюда такова: ***при возведении в квадрат неравенств с переменными необходимо следить за знаками частей неравенства.***

Еще один нюанс, который нужно учитывать при решении иррациональных неравенств — ***необходимость использовать только равносильные преобразования***, поскольку *проверка* после перехода к следствиям *в случае неравенств, как правило, невозможна* — хотя бы потому, что «чаще всего» неравенства (и системы неравенств) имеют бесконечно много решений. Мы и начнем с рассмотрения *стандартных схем эквивалентных преобразований неравенств с квадратными радикалами*, позволяющих сводить неравенства к равносильным системам и совокупностям систем неравенств.

5.2.2. Эквивалентные преобразования неравенств

Начнем с простейшего случая.

Схема 1. Неравенства вида $\sqrt{A} \leqslant B$

Поскольку обе части такого неравенства *неотрицательны* (левая часть *всегда*, т. е. *в своей области определения*, неотрицательна), имеет место следование

$$\sqrt{A} \leqslant B \quad \Longrightarrow \quad A \leqslant B^2.$$

Однако следует озаботиться возможностью *обратного перехода* — от неравенства $A \leqslant B^2$ к исходному неравенству. Для этого нужно обеспечить, во-первых, законность извлечения корней из обеих частей получившегося неравенства, т. е. неотрицательность частей. Поэтому нужно добавить ограничение $A \geqslant 0$ (правая часть $R = B^2$ неотрицательна «автоматически»). Во-вторых, при наложенном условии после извлечения корней получится неравенство $\sqrt{A} \leqslant \sqrt{B^2}$, т. е. $\sqrt{A} \leqslant |B|$, и чтобы прийти именно к исходному уравнению, нужно добавить условие $B \geqslant 0$.

Таким образом, получаем такую схему перехода от данного неравенства к эквивалентной системе неравенств (рациональных алгебраических, если выражения A, B — рациональные алгебраические):

$$\sqrt{A} \leqslant B \iff \begin{cases} A \leqslant B^2, \\ A \geqslant 0, \\ B \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Пример 5.2.1. Решение неравенства $\sqrt{x} \leqslant x - 2$ $(*)$ без особого труда проводится чисто аналитическими средствами:

$$(*) \iff \begin{cases} x \leqslant (x-2)^2, \\ x \geqslant 0, \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ x \geqslant 2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (x-1)(x-4) \geqslant 0, \\ x \geqslant 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant 1, \\ x \geqslant 4, \end{array}\right. \\ x \geqslant 2 \end{cases} \iff x \geqslant 4.$$

Однако даже в столь простых случаях уместно и полезно *иллюстрировать* решение системы неравенств на картинке,

как о том было рассказано в § 3.3 — на осях, по одной для каждого из неравенств плюс ось «для ответа» — для множества решений системы.

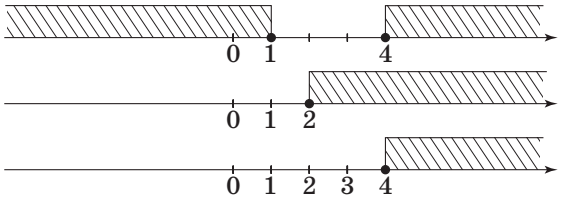


Рис. 5.1

Картинка для данного случая приведена на рис. 5.1.

Ответ: $[4, +\infty)$. □

Пример 5.2.2. Еще одно — чуть более сложное — неравенство того же типа:

$$\sqrt{x^2-6x} < 8+2x \iff \begin{cases} x^2-6x < (8+2x)^2, \\ x^2-6x \geqslant 0, \\ 8+2x \geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x^2+38x+64 > 0, \\ x(x-6) \geqslant 0, \\ x \geqslant -4 \end{cases} \iff \begin{cases} (3x+32)(x+2) > 0, \\ x(x-6) \geqslant 0, \\ x \geqslant -4. \end{cases}$$

Используя картинку (рис. 5.2), находим множество решений.

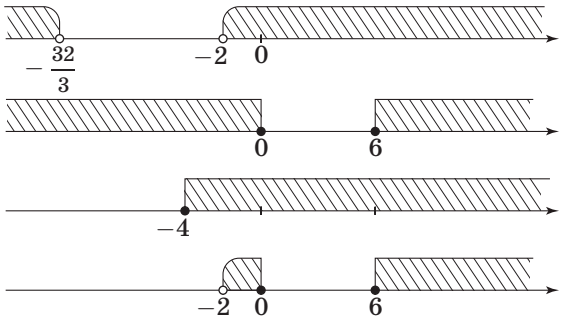


Рис. 5.2

Ответ: $(-2, 0] \cup [6, +\infty)$. □

Схема 2. Неравенства вида $\sqrt{A} \geqslant B$

Подобные неравенства **нельзя** сразу возводить в квадрат, ибо его части могут иметь *разные знаки*. Поэтому придется рассмотреть *два случая*:

1) если правая часть отрицательна, $B < 0$, то как раз возводить в квадрат и *нельзя*; однако, в этом случае левая часть *неотрицательна*, поэтому неравенство выполняется автоматически, если только левая часть *определена*, т. е. $A \geqslant 0$;

2) если правая часть неотрицательна, $B \geqslant 0$, то неравенство *можно* возводить в квадрат — получится неравенство $A \geqslant B^2$, из которого заведомо можно, обратно, извлечь корень (правая, а с ней и левая, части неотрицательны), и при этом, в силу неравенства $B \geqslant 0$, получается исходное неравенство (так как в данном случае $\sqrt{B^2} = B$).

Рассмотрение случаев оформляется как переход к эквивалентной исходному неравенству *совокупности систем неравенств* — как схема равносильного преобразования:

$$\sqrt{A} \geqslant B \iff \begin{cases} B < 0, \\ A \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B \geqslant 0, \\ A \geqslant B^2. \end{cases} \qquad (2)$$

Пример 5.2.3. Неравенство $\sqrt{x} \geqslant x - 2$ $(*)$, «парное» к неравенству из примера 5.2.1, сводится к совокупности двух систем:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2<0, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ x \geqslant (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x < 2 \vee \begin{cases} (x-1)(x-4) \leqslant 0, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$$

Каждую из систем лучше проиллюстрировать на своей картинке (рис. 5.3 слева и справа), объединяя в итоге («в ответе») множества решений систем (рис. 5.3, нижняя длинная ось).

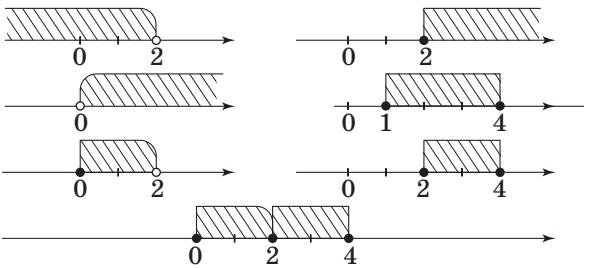


Рис. 5.3

Ответ: $[0, 4]$. □

Пример 5.2.4. Использование графических иллюстраций особенно оправдано при решении более громоздких неравенств (но, разумеется, сначала нужно освободиться от радикалов):

$$2-3x \leqslant \sqrt{4+9x-9x^2} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2-3x<0, \\ 4+9x-9x^2 \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-3x \geqslant 0, \\ (2-3x)^2 < 4+9x-9x^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x > \frac{2}{3}, \\ (3x-4)(3x+1) \leqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leqslant \frac{2}{3}, \\ 3x(6x-7) < 0. \end{cases}$$

Изображаем множества решений неравенств и систем на числовых осях (рис. 5.4) и записываем результат.

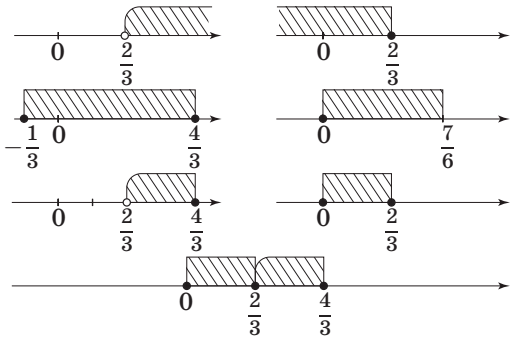


Рис. 5.4

Ответ: $0 < x \leqslant \frac{4}{3}$. □

Схема 3. Неравенства вида $\sqrt{A} \geqslant \sqrt{B}$

Поскольку обе части такого неравенства неотрицательны, его можно возвести в квадрат — перейти к следствию — неравенству $A \geqslant B$. Для обеспечения обратного перехода достаточно потребовать неотрицательность правой части: $B \geqslant 0$, — ибо при этом условии левая часть «автоматически» будет неотрицательной: $A \geqslant B \geqslant 0$. Таким образом, справедлива следующая схема эквивалентного перехода:

$$\sqrt{A} \geqslant \sqrt{B} \iff \begin{cases} A \geqslant B, \\ B \geqslant 0 \end{cases} \qquad (3)$$

(конечно, систему можно записать и как *двойное неравенство*, однако неравенство $A \geqslant B$ всё равно придется решать *отдельно*).

Пример 5.2.5. В неравенствах с вложенными радикалами часто приходится последовательно применять несколько схем. В неравенстве

$$\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$$

сначала «разносим» радикалы, т. е. записываем его в виде

$$\sqrt{4-\sqrt{1-x}}>\sqrt{2-x}.$$

Затем применяем схему 3 — переходим к равносильной системе

$$\begin{cases}4-\sqrt{1-x}>2-x,\\ 2-x\geqslant 0,\end{cases}$$

уединяем в первом неравенстве радикал и, применяя к нему схему 1, приходим к системе четырех рациональных алгебраических неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{1-x}<2+x,\\ x\leqslant 2\end{cases}\iff\begin{cases}1-x<(2+x)^2,\\ 1-x\geqslant 0,\\ 2+x\geqslant 0,\\ x\leqslant 2.\end{cases}$$

Линейные неравенства $x\leqslant 1$, $x\geqslant -2$, $x\leqslant 2$ приводят к двойному неравенству $-2\leqslant x\leqslant 1$. Квадратичное неравенство записывается в виде $x^2+5x+3>0$; корни левой части оба отрицательны, причем

$$x_1=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}<-\frac{5}{2}<-2,\qquad x_2=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}>\frac{-5+3}{2}=-1,$$

поэтому картинка выглядит так, как показано на рис. 5.5, с помощью которого мы и записываем множество решений.

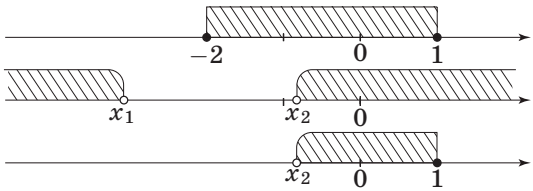


Рис. 5.5

Ответ: $\left(\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2},1\right]$. □

Схемы 4–5. Неравенства видов $\sqrt{A}+\sqrt{B}\lesseqgtr\sqrt{C}$

Не вдаваясь в детали, приведем схемы решения неравенств таких типов в общем виде — путем повторного возведения в квадрат с добавлением соответствующих ограничений.

Во-первых,

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}<\sqrt{C}\iff$$

$$\iff\begin{cases}A+B+2\sqrt{AB}<C,\\A\geqslant 0,\\B\geqslant 0\end{cases}\iff\begin{cases}4AB<(C-A-B)^2,\\C-A-B\geqslant 0,\\A,B\geqslant 0.\end{cases}\qquad(4)$$

В этом случае получается единственная система.

Во втором случае неравенство сведется к совокупности двух систем:

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}>\sqrt{C}\iff$$

$$\iff\begin{cases}A+B+2\sqrt{AB}>C,\\A\geqslant 0,\\B\geqslant 0,\\C\geqslant 0\end{cases}\iff\begin{cases}2\sqrt{AB}>C-A-B,\\A,B,C\geqslant 0\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases}C-A-B<0,\\A,B,C\geqslant 0;\end{cases}\vee\begin{cases}4AB>(C-A-B)^2,\\C-A-B\geqslant 0,\\A,B,C\geqslant 0.\end{cases}\qquad(5)$$

При решении конкретных неравенств, разумеется, следует учитывать их специфику.

Пример 5.2.6. Неравенство

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-1}\qquad(*)$$

можно привести к типу 4, перенося второй радикал в правую часть:

$$(*)\iff\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}\iff$$

$$\iff\begin{cases}x+3>3x-2+2\sqrt{(x-1)(2x-1)},\\x-1\geqslant 0,\\2x-1\geqslant 0\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases}5-2x<2\sqrt{2x^2-3x+1},\\x\geqslant 1\end{cases}\iff\begin{cases}(5-2x)^2<4(2x^2-3x+1),\\5-2x\geqslant 0,\\x\geqslant 1.\end{cases}$$

Линейные неравенства дают двойное ограничение $1\leqslant x\leqslant 2{,}5$. Квадратичное неравенство приводится к виду $4x^2+8x-21<0$ или же $(2x-3)(2x+7)<0$, и с помощью графической иллюстрации (рис. 5.6) получаем окончательный результат.

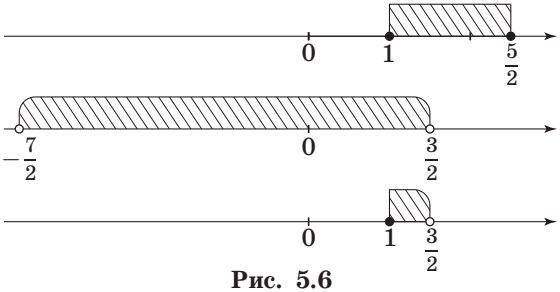


Рис. 5.6

Ответ: $1 \leqslant x < \dfrac{3}{2}$. □

Однако, приведенный путь решения — совсем не кратчайший. Легко видеть, что левая часть исходного неравенства $L(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}$ *положительна* в своей области определения. Действительно из неравенства $x + 3 > x - 1$, выполненного при любом значении x, следует, что $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1}$ при всех $x \geqslant 1$. Поэтому неравенство $(*)$ *можно сразу возвести в квадрат*, да еще и приписать ограничение $x \geqslant 1$:

$$(*) \iff \begin{cases} 2x + 2 - 2\sqrt{(x+3)(x-1)} > 2x - 1, \\ x \geqslant 1, \\ 2x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2\sqrt{x^2 + 2x - 3} < 3, \\ x \geqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 4(x^2 + 2x - 3) < 9, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$$

Мы приходим к тому же квадратичному неравенству, $4x^2 + 8x - 21 < 0$, но с другим ограничением: просто $x \geqslant 1$. Картинка при этом несколько другая (рис. 5.7), но результат, конечно, тот же.

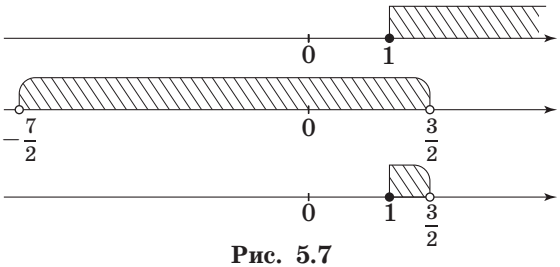


Рис. 5.7

5.2.3. Дробно-иррациональные неравенства

При решении иррациональных неравенств с дробями сначала стоит избавиться от знаменателя — перейти к эквивалентной совокупности систем неравенств, — а уже потом избавляться от радикалов.

Пример 5.2.7. Для неравенства

$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geqslant 2 \qquad (*)$$

рекомендуемый подход в конце концов приводит к совокупности трех систем рациональных алгебраических неравенств. Именно, $(*) \Leftrightarrow$ **(I)** $\vee$ **(II)**, где

$$\textbf{(I)} \begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{2-x}+4x-3 \geqslant 2x; \end{cases} \qquad \textbf{(II)} \begin{cases} x < 0, \\ \sqrt{2-x}+4x-3 \leqslant 2x. \end{cases}$$

Далее,

$$\textbf{(I)} \iff \begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{2-x} \geqslant 3-2x \end{cases} \iff \textbf{(Ia)} \vee \textbf{(Ib)},$$

где, в свою очередь,

$$\textbf{(Ia)} \begin{cases} x > 0, \\ 3-2x < 0, \\ 2-x \geqslant 0; \end{cases} \qquad \textbf{(Ib)} \begin{cases} x > 0, \\ 3-2x \geqslant 0, \\ 2-x \geqslant (3-2x)^2. \end{cases}$$

Система из линейных неравенств **(Ia)** приводит первому *промежуточному* ответу — к двойному неравенству $\frac{3}{2} < x \leqslant 2$. В системе **(Ib)** линейные неравенства дают двойное: $0 < x \leqslant \frac{3}{2}$, квадратичное же неравенство $4x^2 - 11x + 7 \leqslant 0$ переписывается в виде $(x-1)(4x-7) \leqslant 0$. Изображаем решение этих неравенств на числовых осях (рис. 5.8) и получаем второй *промежуточный* ответ: $1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$.

Система **(II)** записывается в виде

$$\begin{cases} x < 0, \\ \sqrt{2-x} \leqslant 3-2x \end{cases} \iff \begin{cases} x < 0, \\ 2-x \leqslant (3-2x)^2, \\ 2-x \geqslant 0, \\ 3-2x \geqslant 0. \end{cases}$$

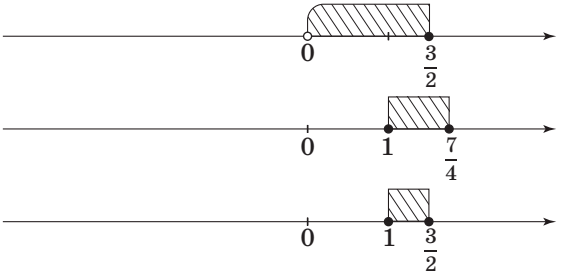


Рис. 5.8

Три линейных неравенства последней системы эквивалентны одному: $x < 0$. Квадратичное неравенство переписывается в виде $(x-1)(4x-7) \geqslant 0$, и картинка (рис. 5.9) иллюстрирует третий *промежуточный* ответ: $x < 0$.

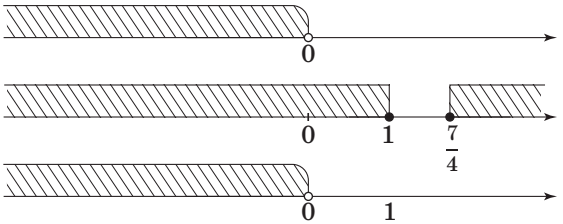


Рис. 5.9

Объединяя все три промежуточных ответа, получаем *окончательный*.

Ответ: $(-\infty, 0) \cup [1, 2]$. □

5.2.4. Метод интервалов при решении иррациональных неравенств

Только что приведенный способ решения неравенства из примера 5.2.7 простой, но несколько громоздкий. Короткий, но довольно изысканный способ — применение ***метода интервалов***. В общем случае возможность применения этого метода основана на ***свойстве непрерывности*** иррациональных алгебраических функций:

любая иррациональная алгебраическая функция, записывающаяся с помощью иррационального алгебраического

выражения, непрерывна и, следовательно, сохраняет знак[1] ***на каждом интервале, содержащемся в области определения этой функции.***

Это утверждение (о *непрерывности*) для иррациональных алгебраических функций (в смысле функций, задающихся иррациональными алгебраическими выражениями) выводится из *свойств непрерывности полиномиальных и дробно-рациональных функций*, из непрерывности *функций извлечения корня произвольной степени* $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ (на положительной полуоси $x > 0$ для *арифметического* корня четной степени $n = 2k \geqslant 2$ и на всей оси для *алгебраического* корня нечетной степени $n = 2k + 1 \geqslant 3$), из ***теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций***[2] (отсюда уже следует, например, непрерывность любого «простого радикала»: функции вида $F(x) = \sqrt[n]{R(x)}$, где $R(x)$ — *рациональная алгебраическая функция*, — на любом интервале в его области определения) и из ***теорем о непрерывности суммы/разности, произведения и частного непрерывных функций.***

Поскольку применение метода интервалов к иррациональным алгебраическим уравнениям основывается не на «идеологии» разложения алгебраических выражений на множители[3] — для иррациональных уравнений она просто не проходит, — а на идее использования *непрерывности* иррациональных алгебраических функций, то ***схема применения метода интервалов*** в данном случае несколько отличается от схемы, приведенной в § 3.2. Изложим ее «по шагам».

0. Прежде всего, неравенство приводится к виду «*сравнения с нулем*», т. е. к виду $L(x) \lesseqgtr 0$, где «$\lesseqgtr$» — одно из отношений неравенства (т. е. $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$). Разумеется, при этом используются только *равносильные преобразования*; при наличии в левой части дробных выражений **«всё»** (в левой части) *приводится к общему знаменателю* — левая часть записывается как дробь $L(x) = \dfrac{A(x)}{Z(x)}$.

---

[1] То есть ***принимает значения одного знака*** (напомним, что этот вывод основан на ***теореме о промежуточном значении непрерывной функции*** — см. § 2.1, п. 2.1.2).

[2] Доказываемой в курсах анализа.

[3] Которая использовалась в § 3.2 при решении методом интервалов *рациональных алгебраических неравенств*.

1. Далее находится *область определения* левой части неравенства. Для этого, во-первых, ***из числовой оси «выбрасываются» — отмечаются — все точки, в которых левая часть* не определена**. Это будут те точки, в которых знаменатель левой части (коли он есть) *обращается в нуль*, т. е. корни уравнения $Z(x) = 0$. Во-вторых, из числовой оси исключаются точки, в которых входящие в неравенство выражения под знаками корней *четной* степени *отрицательны*. Возможно, для нахождения таких точек придется решать свои *неравенства с радикалами*, но они, по крайней мере, будут проще исходного (на худой конец, к ним можно применить излагаемый сейчас *метод интервалов*!).

2. Кроме того, находятся и ***отмечаются*** на числовой оси *все корни* соответствующего неравенству уравнения $L(x) = 0$.

3. *Допустим*, что множество $\mathcal{M}$ всех ***не отмеченных*** точек представляется в виде *объединения* некоторой совокупности[1)] попарно непересекающихся промежутков I_α:

$$\mathcal{M} = \bigcup_\alpha I_\alpha.$$

Тогда *на каждом из этих промежутков функция* $x \mapsto L(x)$ *принимает значения одного знака* — ибо в противном случае, **если бы (непрерывная!)** функция $L(x)$ меняла знак — при том, что аргумент x пробегает единственный промежуток I_α, — **то** в какой-то точке этого промежутка данная функция обращалась бы в нуль[2)], в противоречие с выбором промежутков I_α (в силу которого функция $L(x)$ *определена, непрерывна и отлична от нуля* на каждом из промежутков I_α). В соответствии с этим, на рассматриваемом шаге ***определяется знак*** левой части неравенства ***на каждом из промежутков*** I_α, для чего достаточно *вычислить* значение $L(x)$ в конкретных (желательно, «удобных»!) точках каждого промежутка (отметим, что можно брать и *концевые точки промежутков*, но только, разумеется, принадлежащие промежуткам).

4. Наконец, на завершающем шаге ***указывается множество решений исходного неравенства*** — в соответствии с

[1)] В принципе, возможно, бесконечной, но в рассматриваемом случае *алгебраических функций* всегда получается *конечная* совокупность промежутков. (Случай бесконечного числа промежутков осуществляется, скажем, для неравенства $\sqrt{\{x\} - 0{,}5} \geqslant 0$, где $\{x\}$ — *дробная часть* числа x.)

[2)] Это следует из *теоремы о промежуточном значении*!

полученной информацией, выбираются промежутки положительности или отрицательности выражения (функции) $L(x)$, в зависимости от знака неравенства, и, если неравенство нестрогое, к ним добавляются нули функции $L(x)$ (т. е. корни уравнения $L(x) = 0$).

Само собой разумеется, что на каждом этапе, начиная с шага **1**, ход решения неравенства методом интервалов *иллюстрируется* и, тем самым, *контролируется с помощью картинки — на оси Ox*.

Пример 5.2.8. Запишем неравенство из примера 5.2.7 в стандартном виде:

$$L(x) = \frac{\sqrt{2-x} + 2x - 3}{x} \geqslant 0.$$

Дальше записываем решение по шагам:

1) левая часть $L(x)$ не определена при $x = 0$ и при $2 - x < 0$, т. е. при $x > 2$ — соответственно, выбрасываем из числовой оси Ox точку $\{0\}$ и (*открытый*!) луч $(2, +\infty)$ (рис. 5.10);

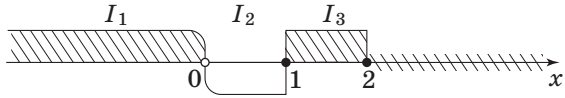


Рис. 5.10

2) для нахождения нулей функции $L(x)$ решаем уравнение:

$$L(x) = 0 \iff \begin{cases} \sqrt{2-x} + 2x - 3 = 0, \ (*) \\ x \neq 0; \end{cases}$$

далее,

$$(*) \iff \sqrt{2-x} = 3 - 2x \iff \begin{cases} 2 - x = (3-2x)^2, \\ 3 - 2x \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^2 - 11x + 7 = 0, \\ x \leqslant \dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

и из двух корней $x = 1, \dfrac{7}{4}$ получившегося квадратного уравнения обоим ограничениям: $x \neq 0$ и $x \leqslant \dfrac{3}{2}$, — удовлетворяет только $x = 1$ — эту точку тоже выкидываем (временно!) из оси Ox (тот же рис. 5.10);

3) множество оставшихся точек есть объединение трех промежутков: $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, 1)$, $I_3 = (1, 2]$. В первом из

них возьмем точку $x = -2$ (чтобы корень хорошо извлекался!):

$$L(-2) = \frac{\sqrt{4} - 4 - 3}{-2} = \frac{5}{2} > 0,$$

поэтому весь интервал I_1 *войдет в ответ*. Знак $L(x)$ «при переходе» аргумента x с интервала I_1 на интервал I_2 сменится с положительного на отрицательный, ибо сменится знак знаменателя дроби $L(x)$ (но не числителя, так как числитель обращается в нуль только в точке $x = 1$!), так что интервал I_2 *не войдет в ответ*. Наконец, чтобы определить знак $L(x)$ на полуинтервале $I_3 = (1, 2]$, в качестве «пробной точки» возьмем его правый конец — точку $x = 2$:

$$L(2) = \frac{\sqrt{0} + 4 - 3}{2} = \frac{1}{2} > 0,$$

поэтому весь промежуток I_3 *войдет в ответ*.

4) Наконец, учитывая, что неравенство *нестрогое*, приходим к окончательному результату.

Ответ: $x \in (-\infty, 0) \cup [1, 2]$. □

Преимущество метода интервалов состоит в том, что решение иррационального неравенства сводится к решению *уравнений* и к элементарным вычислениям, что, как правило, проще. Однако, не следует злоупотреблять этим методом — совсем простые и стандартные неравенства зачастую быстрее решаются ***аналитически*** — сведением к системам и их совокупностям. Иногда помогают и соображения монотонности и ограниченности, о чем будет идти речь дальше (в пп. 5.2.6–5.2.7).

5.2.5. Замена при решении иррациональных неравенств

Как и в случае иррациональных уравнений, метод замены в неравенствах имеет смысл использовать тогда, когда в неравенство входит *только один* радикал — корень из *линейного* выражения от x: если обозначить этот радикал через z, то x записывается в виде многочлена от z.

Пример 5.2.9. В том же неравенстве из примера 5.2.7:

$$\frac{\sqrt{2 - x} + 4x - 3}{x} \geqslant 2,$$

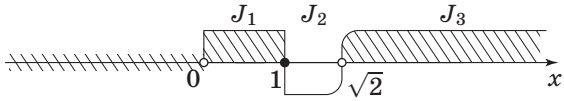


Рис. 5.11

сделаем замену $\sqrt{2-x} = z$, $z \geqslant 0$. Тогда $x = 2 - z^2$, и неравенство записывается в виде

$$\frac{z + 4(2-z^2) - 3}{2 - z^2} \geqslant 2 \iff \frac{4z^2 - z - 5}{z^2 - 2} \geqslant 2 \iff \frac{2z^2 - z - 1}{z^2 - 2} \geqslant 0 \iff$$

$$\iff R(z) = \frac{(z-1)(2z+1)}{(z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})} \geqslant 0. \qquad (*)$$

Это неравенство естественно решать методом интервалов — но *на неотрицательной полуоси Oz*, т. е. с учетом ограничения $z \geqslant 0$, и по схеме из § 3.3. Именно, на полуоси $z \geqslant 0$ отмечаем (лежащие на ней!) корни числителя и знаменателя выражения $R(z)$, т. е. всего две точки: $z = 1$ и $z = \sqrt{2}$. Затем проставляем знаки $R(z)$ на промежутках $J_1 = [0, 1)$, $J_2 = (1, \sqrt{2})$ и $J_3 = (\sqrt{2}, +\infty)$ (рис. 5.11), используя то, что они меняются при переходах через отмеченные точки. Множество решений неравенства $(*)$ состоит из промежутков $0 \leqslant z \leqslant 1$ и $\sqrt{2} < z$.

Для исходной переменной x получаем совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leqslant \sqrt{2-x} \leqslant 1, \\ \sqrt{2-x} > \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant 2-x \leqslant 1, \\ 2-x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \geqslant x-2 \geqslant -1, \\ x < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \geqslant x \geqslant 1, \\ x < 0. \end{array}\right.$$

Конечно, мы пришли к прежнему результату.

Ответ: $x < 0$ или $1 \leqslant x \leqslant 2$. □

5.2.6. Использование монотонности при решении неравенств

Покажем, как можно использовать соображения монотонности, на примере довольно сложного иррационального неравенства.

Пример 5.2.10. Решая неравенство

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x(x+7)} < 35 - 2x,$$

прежде всего перепишем его в стандартном виде,

$$L(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x(x+7)} + 2x - 35 < 0, \qquad (*)$$

и заметим, что ОДЗ неравенства, определяемое неравенством $x \geqslant 0$, есть неотрицательная полуось $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, причем левая часть $L(x)$ *строго возрастает* на всей полуоси. В самом деле, функции $u = \sqrt{x}$ и $v = \sqrt{x+7}$ строго возрастают и *неотрицательны* на $\mathbb{R}_+$, поэтому и третье слагаемое, которое *в ОДЗ* можно записать в виде

$$2\sqrt{x(x+7)} = 2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x+7} = 2u \cdot v,$$

также является строго возрастающей функцией[1)], равно как и линейная функция $h(x) = 2x - 35$; ну, а сумма возрастающих функций также строго возрастает. *Вывод*: если в какой-то точке $x = x_0 \in \mathbb{R}_+$ левая часть неравенства обращается в нуль, то неравенство $(*)$ выполнено для тех и только тех значений x из ОДЗ, для которых $x < x_0$. (Можно, вдобавок, заметить, что $L(0) = \sqrt{7} - 35 < 0$, а при достаточно большом значении x значение $L(x) > 0$ (объясните), так что, *в силу непрерывности* функции $L(x)$, она действительно обращается в нуль в какой-то точке $x_0 > 0$. Однако можно обойтись и без этого замечания (как-никак, оно апеллирует к *математическому анализу*), а попросту *найти* нужную точку x_0.)

Итак, чтобы решить неравенство $(*)$, достаточно решить соответствующее уравнение, которое записывается в виде

$$L(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x}\sqrt{x+7} + 2x - 35 = 0 \iff$$
$$\iff \sqrt{x} + \sqrt{x+7} + x + (x+7) + 2\sqrt{x}\sqrt{x+7} - 42 = 0 \iff$$
$$\iff (\sqrt{x} + \sqrt{x+7}) + (\sqrt{x} + \sqrt{x+7})^2 - 42 = 0,$$

или

$$z^2 + z - 42 = 0, \quad z = \sqrt{x} + \sqrt{x+7} \geqslant \sqrt{7}.$$

Из квадратного уравнения находим:

$$z^2 + z - 42 = 0 \iff (z+7)(z-6) = 0 \iff z = \left[\begin{array}{r} 6, \\ -7. \end{array}\right.$$

Поскольку корень $z = -7$ не удовлетворяет ограничению $z \geqslant \sqrt{7}$, приходим к единственному уравнению замены,

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+7} = 6.$$

[1)] Здесь существенна *неотрицательность* сомножителей — *почему*?

Решить его можно по-разному. Применим опять замену с ограничением: положим $\sqrt{x} = u \geqslant 0$; тогда $x = u^2$ и $\sqrt{x+7} = \sqrt{u^2+7}$, так что получается уравнение с ограничением, т. е. смешанная система, легко решаемая по схеме 1 из § 3.5:

$$\begin{cases} u + \sqrt{u^2+7} = 6, \\ u \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{u^2+7} = 6 - u, \\ u \geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} u^2 + 7 = (6-u)^2, \\ u \geqslant 0, \\ 6 - u \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 7 = 36 - 12u, \\ 0 \leqslant u \leqslant 6 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 12u = 29, \\ 0 \leqslant u \leqslant 6 \end{cases} \iff u = \frac{29}{12}.$$

Остается вычислить значение $x = x_0 = u^2$, которое и является искомым корнем уравнения $L(x) = 0$:

$$x_0 = u^2 = \frac{(30-1)^2}{12^2} = \frac{900 - 60 + 1}{144} = \frac{841}{144}.$$

Ответ: $x \in [0, x_0) = \left[0, \dfrac{841}{144}\right)$. □

5.2.7. Смешанные системы с двумя переменными

Мы не будем специально останавливаться на иррациональных системах уравнений с несколькими переменными — при их решении используются идеи и методы гл. 4, с учетом приемов обращения с радикалами (и модулями) из параграфов настоящей главы. Отметим, что один из удобнейших методов решения таких систем — замена переменных (возможно, с ограничениями), позволяющая избавиться от радикалов и свести иррациональную систему к рациональной.

Ограничимся разбором довольно поучительной *смешанной системы* уравнения и неравенства с двумя переменными.

Пример 5.2.11. Требуется найти все пары значений переменных $(x; y)$, для которых выполнены два условия:

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2y^2 - x^4y^4} = y^6 + x^2(1-x), & (1) \\ \sqrt{1 + (x+y)^2} + x(2y^3 + x^2) \leqslant 0. & (2) \end{cases}$$

Введем обозначения

$$L = \sqrt{2x^2y^2 - x^4y^4} = \sqrt{t(2-t)}, \quad t = x^2y^2 \geqslant 0 \text{ — любое;}$$
$$R = y^6 + x^2(1-x) = y^6 + x^2 - x^3;$$
$$L_1 = \sqrt{1+(x+y)^2} = \sqrt{1+u^2}, \quad u = x+y \in \mathbb{R} \text{ — любое;}$$
$$L_2 = x(2y^3 + x^2) = 2xy^3 + x^3,$$

так что условия (1) и (2) кратко записываются как $L = R$ и $L_1 + L_2 \leqslant 0$.

Теперь посмотрим, какие выводы относительно *возможных значений* x и y можно сделать на основании этих условий.

Заметим, что квадратичная функция $q(t) = t(2-t)$ относительно вспомогательной переменной $t = x^2y^2 \geqslant 0$, записанная под знаком корня в выражении L, может быть записана в виде $q(t) = -t^2 + 2t = 1 - (t-1)^2$, так что возможные значения левой части уравнения (1) заключены в пределах от 0 до 1. Поскольку для любого решения $(x;\, y)$ системы выполнено уравнение (1), $L = R$, то и значение правой части R этого уравнения заведомо должно лежать в этих пределах. В частности, должно быть выполнено неравенство

$$R(x,y) = y^6 + x^2 - x^3 \leqslant 1 \iff y^6 + x^2 - x^3 - 1 \leqslant 0. \qquad (3)$$

С другой стороны, всегда $L_1 = \sqrt{1+u^2} \geqslant 1$, поэтому из справедливости неравенства $L_1 + L_2 \leqslant 0$ следует, что и $1 + L_2 \leqslant L_1 + L_2 \leqslant 0$, т. е. выполнено неравенство

$$1 + 2xy^3 + x^3 \leqslant 0. \qquad (4)$$

Сложив неравенства (3) и (4), получаем, что для любого решения $(x;\, y)$ данной системы должно выполняться неравенство

$$(y^6 + x^2 - x^3 - 1) + (1 + 2xy^3 + x^3) = y^6 + x^2 + 2xy^3 = (y^3 + x)^2 \leqslant 0. \qquad (5)$$

Так как квадрат выражения не может быть отрицательным, неравенство (5), а вместе с ним и слагающие его неравенства (3)–(4), *должны обращаться в равенства*. Поскольку неравенство (5) обращается в равенство, любое решение $(x;\, y)$ исходной системы удовлетворяет уравнению

$$x + y^3 = 0. \qquad (6)$$

Уже сейчас можно было бы сделать подстановку $x = -y^3$ в уравнение (1), найти *возможные* значения y, по ним отыскать

соответствующие значения x и затем проверить, для каких из найденных пар $(x;\, y)$ выполняется и неравенство (2) исходной системы. Однако можно воспользоваться и тем, что неравенства (3), (4) обращаются в равенства. Это означает, что $q(t) = 1 - (t-1)^2 = 1$, откуда $t = 1$, т. е. выполняется и уравнение

$$x^2y^2 = 1. \tag{7}$$

Кроме того, неравенство $1 + L_2 \leqslant L_1 + L_2$, из которого следовало неравенство (4), тоже должно обращаться в равенство, и поэтому должно выполняться соотношение $L_1 = \sqrt{1+u^2} = 1$, откуда $u = x + y = 0$, т. е. выполняется еще и уравнение

$$x + y = 0. \tag{8}$$

Подставив выражение $y = -x$ из уравнения (8) в уравнение (7), получим, что $x^2 \cdot (-x)^2 = x^4 = 1$, поэтому значение $x = \pm 1$ и, соответственно, $y = -x = \mp 1$. Обе найденные пары $(x;\, y) = (1; -1)$ и $(-1;\, 1)$ удовлетворяют и уравнению (6) $x + y^3 = 0$, так что это уравнение и не понадобилось. Однако всё это не означает, что выполнены оба условия (1), (2) исходной смешанной системы. Пока что установлено только *условное утверждение*: *если пара* $(x;\, y)$ *удовлетворяет данной системе, то* ***неизбежно*** *либо* $(x;\, y) = (1; -1)$, *либо* $(x;\, y) = (-1;\, 1)$. Иначе говоря, мы вывели ***необходимое условие*** того, чтобы пара $(x;\, y)$ удовлетворяла условию задачи. Оно *не обязано* быть одновременно и ***достаточным условием***. Другими словами, *мы должны еще проверить, действительно ли две найденные пары удовлетворяют условиям* — уравнению (1) и неравенству (2) — непосредственной подстановкой[1].

Проверка. 1) Если $(x;\, y) = (1; -1)$, то $x^2y^2 = 1$ и

$$L = \sqrt{2x^2y^2 - x^4y^4} = \sqrt{2-1} = 1;$$

так как и $R = y^6 + x^2(1-x) = 1 + 1 \cdot 0 = 1$, уравнение (1) выполнено. В неравенстве (2)

$$L_1 = \sqrt{1+(x+y)^2} = \sqrt{1+0} = 1, \quad L_2 = x(2y^3 + x^2) = 1(-2+1) = -1,$$

[1] Мы опять потратили столько слов для объяснения разницы между *необходимыми* и *достаточными* условиями потому, что именно недостаточным ее пониманием объясняются основные *логические ошибки* в решениях подобного рода.

поэтому $L_1 + L_2 = 1 + (-1) = 0 \leqslant 0$ — неравенство (2) также выполнено (естественно, оно обратилось в равенство). Таким образом, эта пара удовлетворяет условиям задачи.

2) Если $(x;\, y) = (-1;\, 1)$, то опять $x^2y^2 = 1$ и $L = 1$; в то же время $R = y^6 + x^2(1 - x) = 1 + 1 \cdot 2 = 3$, поэтому уравнение (1) *не выполнено*. Следовательно, данная пара *не* удовлетворяет условиям задачи (первому из условий).

Ответ: $(x;\, y) = (1;\, -1)$. □

Среди упражнений в конце настоящей главы приведены еще несколько задач такого рода.

§ 5.3. Уравнения и неравенства с модулями

5.3.1. Уравнения с модулями

Возможный подход к решению задач, содержащих модуль $|A|$ некоторого выражения A, состоит в замене модуля тождественно равным ему выражением $\sqrt{A^2}$ с последующим избавлением от радикала. Например, уравнение вида $|A| = B$ можно решить по схеме 1 из § 5.1:

$$|A| = B \iff \sqrt{A^2} = B \iff \begin{cases} A^2 = B^2, \\ B \geqslant 0; \end{cases}$$

после разложения уравнения,

$$A^2 - B^2 = 0 \iff (A - B)(A + B) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} A = B, \\ A = -B, \end{array}\right. \qquad (1)$$

получится эквивалентная исходному уравнению *совокупность двух смешанных систем*:

$$|A| = B \iff \begin{cases} A = B, \\ B \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A = -B, \\ B \geqslant 0. \end{cases} \qquad (2)$$

С другой стороны, можно воспользоваться *определением модуля* — как говорят, *раскрыть модуль*: по определению

$$|A| = \begin{cases} A, & A \geqslant 0, \\ -A, & A < 0. \end{cases}$$

При этом подходе к уравнению $|A| = B$ получится иная совокупность систем,

$$|A| = B \iff \begin{cases} A \geqslant 0, \\ A = B \end{cases} \vee \begin{cases} A < 0, \\ -A = B, \end{cases} \qquad (3)$$

которая, как нетрудно видеть, эквивалентна совокупности систем (2).

Конечно, если выражение A проще, чем B, лучше применять раскрытие модуля по схеме (3), а если B проще, то предпочтительнее схема (2). Раскрытие модулей в соответствии с определением — например, по схеме (3), — можно трактовать как *рассмотрение случаев*: каждый случай отвечает своей смешанной системе.

Вопрос. *Сколько случаев придется рассмотреть, если в уравнение входят два выражения под знаком модуля,* $|A|$ *и* $|B|$?

Ответ. В принципе, 4 случая, соответствующих четырем возможным комбинациям знаков $|A|$ и $|B|$: «$++$», «$+-$», «$-+$», «$--$». Так бывает, но старайтесь не переусердствовать. Например, если уравнение имеет вид $|A| = |B|$, то никаких случаев рассматривать не надо:

$$|A| = |B| \iff A = B \vee A = -B.$$

Это очевидно — например, из трактовки модуля числа как *расстояния от соответствующей точки числовой оси до начала координат*. То же получится и из записи уравнения через радикалы (см. выше разложение (1)).

Особо отметим частный случай уравнений последнего типа — уравнения, имеющие вид *равенства модуля выражения положительному числу*. Геометрическая интерпретация модуля сразу приводит к следующему эквивалентному переходу: если число $c > 0$, то

$$|A| = c \iff A = c \vee A = -c \left(\iff \left[\begin{array}{l} A = c, \\ A = -c \end{array}\right. \right).$$

Количество рассматриваемых случаев можно сократить и тогда, когда «подмодульные» выражения *линейные*. В этом случае применяется прием, иногда называемый «***методом интервалов для решения задач с модулями***». Продемонстрируем этот метод на конкретном примере.

Пример 5.3.1. Идея проста: ось переменной x разбивается на промежутки (интервалы), каждому из которых отвечает некоторая комбинация знаков подмодульных выражений (одна и та же для всех точек рассматриваемого промежутка). Эта комбинация знаков может изменяться только в *нулях* подмодульных выражений. Для уравнения

$$|2x+5| = |x| + 2 \iff 2\left|x + \frac{5}{2}\right| = |x| + 2$$

эти точки суть 0 и $-2{,}5$. Соответственно, уравнение эквивалентно следующей совокупности систем:

$$\begin{cases} x \leqslant -2{,}5, \\ -(2x+5) = -x+2 \end{cases} \vee \begin{cases} -2{,}5 < x \leqslant 0, \\ 2x+5 = -x+2 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 0, \\ 2x+5 = x+2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \leqslant -2{,}5, \\ x = -7 \end{cases} \vee \begin{cases} -2{,}5 < x \leqslant 0, \\ 3x = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 0, \\ x = -3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad x = -7 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad \varnothing.$$

Ответ: $\{-7, -1\}$. □

При решении уравнения, в которое входят *три* (разных!) выражения под знаками модуля, $|A|$, $|B|$, $|C|$, возможны восемь (!) комбинаций их знаков. Но если выражения A, B, C *линейные*, то при раскрытии модулей *методом интервалов* потребуется рассмотреть всего 4 случая.

Не всегда нужно торопиться раскрывать модули — не забывайте об их *геометрической интерпретации*:

> *модуль разности двух чисел равен расстоянию между соответствующими точками числовой* (координатной) *оси*.

Пример 5.3.2. Страшноватое на вид уравнение

$$\sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x-2}} = 2 \qquad (*)$$

значительно упрощается после напрашивающейся замены $\sqrt{x-2} = z \geqslant 0$: тогда $x - 2 = z^2$, $x = z^2 + 2$ и

$$(*) \iff \sqrt{z^2 + 1 - 2z} + \sqrt{z^2 + 9 - 6z} = 2 \iff |z-1| + |z-3| = 2.$$

Если M_z, M_1, M_3 — точки оси с координатами z, 1 и 3, соответственно, то последнее уравнение интерпретируется

как равенство между расстояниями: $M_1M_z + M_zM_3 = M_1M_3$, — выполняющееся *тогда и только тогда, когда* точка M_z лежит на отрезке M_1M_3, т. е. $1 \leqslant z \leqslant 3$. Таким образом,

$$1 \leqslant \sqrt{x-2} \leqslant 3 \iff 1 \leqslant x-2 \leqslant 9 \iff 3 \leqslant x \leqslant 11.$$

Ответ: $x \in [3, 11]$. □

Ответ в данной задаче можно записать по-разному:

$$3 \leqslant x \leqslant 11;$$
$$\{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 11\};$$
$$x \in [3, 11]$$

наконец, просто $[3, 11]$ (в теоретико-множественном виде).

5.3.2. Неравенства с модулями

При решении неравенств, содержащих модули некоторых выражений, применимы те же подходы, что и при решении уравнений с модулями: *замена модуля* $|A|$ выражения A тождественно равным ему выражением $\sqrt{A^2}$ с последующим избавлением от радикала, а также *раскрытие модуля* в соответствии с определением. Проиллюстрируем оба подхода на схемах решения неравенств трех стандартных типов.

1. Неравенства вида $|A| \leqslant B$.

Первый подход — переписав неравенство через квадратный радикал, применяем к нему схему 1 из § 5.2:

$$\sqrt{A^2} \leqslant B \iff \begin{cases} A^2 \leqslant B^2, \\ B \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A - B \leqslant 0, \\ A + B \geqslant 0, \\ B \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A - B \geqslant 0, \\ A + B \leqslant 0, \\ B \geqslant 0. \end{cases}$$

Второй подход — раскрываем модуль:

$$|A| \leqslant B \iff \begin{cases} A \geqslant 0, \\ A \leqslant B \end{cases} \vee \begin{cases} A < 0, \\ -A \leqslant B. \end{cases}$$

Хотя в обоих случаях получаются *две* совокупности систем неравенств, при втором подходе системы *проще*, так что этот вариант предпочтительнее.

Однако, еще проще заметить, что в случае $B < 0$ неравенство $|A| \leqslant B$ решений, очевидно, не имеет, а при $B \geqslant 0$

из геометрического смысла модуля вытекает, что неравенство $|A| \leqslant B$ эквивалентно двойному неравенству $-B \leqslant A \leqslant B$, т. е. соответствующей системе, так что можно записать

$$|A| \leqslant B \iff \begin{cases} B \geqslant 0, \\ A \leqslant B, \\ A \geqslant -B \end{cases} \iff \begin{cases} A \leqslant B, \\ A \geqslant -B \end{cases}$$

(при записи первого равносильного перехода мы не стали записывать случай $B < 0$, заведомо не дающий решений, а при втором равносильном переходе отбросили неравенство $B \geqslant 0$, очевидным образом вытекающее из двух других: $B \geqslant A$, $A \geqslant -B$, откуда $B \geqslant -B$, $2B \geqslant 0$ и $B \geqslant 0$!). Эту последнюю схему избавления от модуля стоит запомнить:

$$|A| \leqslant B \iff -B \leqslant A \leqslant B,$$

она существенно укорачивает решение неравенств рассмотренного вида. Аналогично, для строгого неравенства того же вида получаем схему $|A| < B \iff -B < A < B$.

2. Неравенства вида $|A| \geqslant B$.

Первый подход (по схеме 2) в итоге приводит к совокупности *трех* задач: одного неравенства и двух систем неравенств. Именно,

$$\sqrt{A^2} \geqslant B \iff B < 0 \ \vee \ \begin{cases} B \geqslant 0, \\ A^2 \geqslant B^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff B < 0 \ \vee \ \begin{cases} B \geqslant 0, \\ A - B \geqslant 0, \\ A + B \geqslant 0 \end{cases} \ \vee \ \begin{cases} B \geqslant 0, \\ A - B \leqslant 0, \\ A + B \leqslant 0. \end{cases}$$

Второй подход, как и раньше, приводит к совокупности двух систем,

$$|A| \geqslant B \iff \begin{cases} A \geqslant 0, \\ A \geqslant B \end{cases} \ \vee \ \begin{cases} A < 0, \\ -A \geqslant B, \end{cases} \qquad (1)$$

так что и в этом случае второй вариант предпочтительнее.

Примечательно, что в данном случае тоже можно записать еще более простой эквивалентный переход, избавляющий от необходимости рассматривать знаки A и B: $|A| \geqslant B \iff$

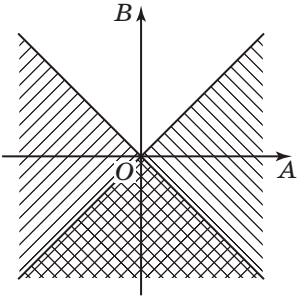


Рис. 5.12

$A \geqslant B \ \vee \ A \leqslant -B$, или

$$|A| \geqslant B \iff \left[\begin{array}{l} A \geqslant B, \\ A \leqslant -B. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Этот равносильный переход к совокупности двух неравенств кажется не столь очевидным, сколь аналогичный переход к системе двух неравенств в предыдущем случае (для неравенств вида $|A| \leqslant B$). Однако он справедлив: заметим, что при $B \leqslant 0$ неравенство $|A| \geqslant B$ заведомо выполняется (конечно, в ОДЗ выражения A), а в случае $B > 0$ из геометрического смысла модуля вытекает, что или $A \geqslant B$, или $A \leqslant -B$. Так как при $B \leqslant 0$ одно из двух последних неравенств заведомо выполняется, условие $B > 0$ к ним можно не добавлять: получится в точности схема (2).

Заметим, что эквивалентность совокупностей (1) и (2) можно усмотреть *на плоскости* $(A; B)$ *значений выражений* A и B: обе совокупности определяют на координатной плоскости OAB совокупность точек, лежащих *не выше* графика $B = |A|$, которая как раз и задается рассматриваемым неравенством $B \leqslant |A|$ (рис. 5.12).

(Еще один красивый способ увидеть равносильный переход (2) — заметить, что наше неравенство $|A| \geqslant B$ выполняется тогда и только тогда, когда **не выполняется** неравенство $|A| < B$, т. е. система неравенств $-B < A < B$, т. е. **не выполняется** *хотя бы одно* из неравенств $A < B$, $A > -B$, т. е. **выполняется** хотя бы одно из нестрогих неравенств $A \geqslant B$ или $A \leqslant -B$, а это и есть задача (2)!)

3. Неравенства вида $|A| \geqslant |B|$.

Первый подход в данном случае приводит к совокупности двух систем неравенств:

$$|A| \geqslant |B| \iff \sqrt{A^2} \geqslant \sqrt{B^2} \iff A^2 \geqslant B^2 \iff A^2 - B^2 \geqslant 0 \iff$$
$$\iff \begin{cases} A - B \geqslant 0, \\ A + B \geqslant 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A - B \leqslant 0, \\ A + B \leqslant 0. \end{cases}$$

Отметим, что обе системы можно заменить двойными неравенствами: используя схему (2) и переход к двойным неравенствам для неравенств 1-го типа, получаем

$$|A| \geqslant |B| \iff \left[\begin{array}{l} A \geqslant |B|, \\ A \leqslant -|B| \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} |B| \leqslant A, \\ |B| \leqslant -A \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} -A \leqslant B \leqslant A, \\ A \leqslant B \leqslant -A. \end{array}\right.$$

Второй подход — раскрытие *двух* модулей — потребует рассмотрения *всех четырех* случаев, соответствующих четырем возможным комбинациям знаков $|A|$ и $|B|$, что приведет к совокупности ***четырех*** систем, по три неравенства в каждом — их даже выписывать не хочется! Для неравенств рассматриваемого типа этот подход, напротив, *значительно* более громоздкий, чем первый.

Особо следует отметить частный случай неравенств последнего типа — неравенства, имеющие вид *сравнения модуля выражения с положительным числом*. Геометрическая интерпретация модуля сразу приводит к следующим двум схемам эквивалентных переходов: если число $c > 0$, то

$$|A| \leqslant c \iff -c \leqslant A \leqslant c \ \left(\iff \begin{cases} A \geqslant -c, \\ A \leqslant c \end{cases}\right)$$

и

$$|A| \geqslant c \iff A \leqslant -c \vee A \geqslant c \ \left(\iff \left[\begin{array}{l} A \leqslant -c, \\ A \geqslant c \end{array}\right.\right).$$

5.3.3. Комбинированные задачи с модулями

При раскрытии модулей в неравенствах не столь стандартного вида, как выше, нередко бывает полезным *метод интервалов для решения неравенств с модулями* (см. § 5.2). Не следует забывать и другие рассмотренные в предыдущем параграфе приемы.

Пример 5.3.3. Непосредственное раскрытие модуля в неравенстве

$$8+6\left|3-\sqrt{x+5}\right|>x \qquad (*)$$

приводит к эквивалентной совокупности двух систем иррациональных неравенств:

$$(*) \iff \begin{cases} 3-\sqrt{x+5}\geqslant 0, \\ 8+6\left(3-\sqrt{x+5}\right)>x \end{cases} \vee \begin{cases} 3-\sqrt{x+5}<0, \\ 8-6\left(3-\sqrt{x+5}\right)>x \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{x+5}\leqslant 3, \\ 26-x>6\sqrt{x+5} \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{x+5}>3, \\ 6\sqrt{x+5}>x+10. \end{cases}$$

Первая из них дает одну, а вторая — две системы рациональных алгебраических неравенств. Так что этот путь решения довольно громоздкий.

Поступим иначе: запишем неравенство $(*)$ в виде

$$L(x)=6\left|3-\sqrt{x+5}\right|+8-x>0 \qquad (**)$$

и приме́ним *метод интервалов для решения неравенств*[1].

1) Левая часть неравенства $(**)$ определена при $x+5\geqslant 0$, т. е. на промежутке $[-5,+\infty)$, на котором и «развернется» метод интервалов.

2) Теперь нужно найти нули левой части, т. е. корни уравнения $L(x)=0$. Проще всего это сделать с помощью *замены с ограничением*, введя новую переменную $\sqrt{x+5}=z\geqslant 0$. Тогда $x=z^2-5$, уравнение с ограничением запишется как смешанная система

$$\begin{cases} 6|3-z|+8-(z^2-5)=0, \\ z\geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z^2-6|z-3|-13=0, \\ z\geqslant 0. \end{cases}$$

Раскрывая модуль, приходим к совокупности двух систем:

$$\begin{cases} z\geqslant 3, \\ z^2-6z+5=0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0\leqslant z\leqslant 3, \\ z^2+6z-31=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} z\geqslant 3, \\ (z-1)(z-5)=0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0\leqslant z<3, \\ z=-3\pm\sqrt{40}. \end{cases}$$

Первая система имеет единственное решение $z=5$, вторая — ни одного (один корень квадратного уравнения $z=-3-\sqrt{40}$

[1] А **не** *метод интервалов для решения задач с модулями* — сейчас у нас в употреблении целых **два** метода интервалов!

отрицательный; второй корень $z = -3 + \sqrt{40} > -3 + 6 = 3$ тоже не удовлетворяет ограничениям $0 \leqslant z < 3$).

Итак, $z = 5$, т. е. $\sqrt{x+5} = 5$, и уравнение $L(x) = 0$ имеет единственный корень $x = 25 - 5 = 20$, который мы и отмечаем на оси Ox (рис. 5.13).

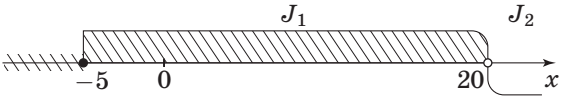


Рис. 5.13

3) Возвращаясь к неравенству (**), проверяем знак его левой части на выявленных промежутках $J_1 = [-5, 20)$ и $J_2 = (20, +\infty)$. Точки, в которых будем проверять знак, лучше выбирать так, чтобы «извлекался корень» $\sqrt{x+5}$. На промежутке J_1 возьмем $x = -4$; тогда

$$L(x) = L(-4) = 6\left|3 - \sqrt{1}\right| + 8 - (-4) = 12 + 12 = 24 > 0,$$

поэтому промежуток J_1 целиком войдет в ответ (вместе со своей граничной точкой $x = -5$; кстати сказать, в качестве пробной можно было бы выбрать и эту точку, ибо функция $x \mapsto \sqrt{x+5}$, а с нею и функция $L(x)$ *непрерывна справа* в точке $x = -5$).

На промежутке J_2 можно взять точку $x = 31$ — тогда

$$L(31) = 6\left|3 - \sqrt{36}\right| + 8 - 31 = 18 + 8 - 31 = -5 < 0,$$

и промежуток J_2 в ответ не войдет.

4) Наконец, выписываем окончательный результат.

Ответ: $x \in [-5, 20)$. □

Возвращаясь к неравенствам последнего из разобранных типов, отметим, что очевидны следующие три равносильных перехода:

$$|A| > |B| \iff A^2 > B^2,$$
$$|A| = |B| \iff A^2 = B^2,$$
$$|A| < |B| \iff A^2 < B^2.$$

Все они могут быть записаны *одним* соотношением, с использованием функции ***знак числа*, «сигнум»**[1]:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x > 0, \\ -1 & \text{если } x < 0, \\ 0 & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Указанные эквивалентные переходы означают, что *всегда*

$$\operatorname{sgn}(|A| - |B|) = \operatorname{sgn}(A^2 - B^2).$$

Этим обстоятельством можно воспользоваться в ситуации, когда приходится решать неравенства *вида сравнения с нулем*: всегда

$$F \gtrless 0 \iff \operatorname{sgn} F \gtrless 0,$$

поэтому, когда неравенство имеет, например, вид $(|A| - |B|)C \gtrless 0$, то разность модулей можно заменить в нем разностью квадратов, тем самым сразу освободившись от модулей. Формальное обоснование равносильности перехода, скажем,

$$(|A| - |B|)\,C < 0 \iff (A^2 - B^2)\,C < 0,$$

состоит в последовательной подстановке в неравенство выражений в последовательности

$$|A| - |B| \;\to\; \operatorname{sgn}(|A| - |B|) \;\to\; \operatorname{sgn}(A^2 - B^2) \;\to\; A^2 - B^2.$$

Пример 5.3.4. Решая неравенство

$$\frac{2|x| - 3}{|x^2 - 3x + 2| - |x - 1|} \geqslant 0, \qquad (*)$$

не нужно рассматривать никакие случаи: достаточно заменить разности в числителе и знаменателе разностями квадратов:

$$(*) \iff \frac{4x^2 - 9}{(x^2 - 3x + 2)^2 - (x - 1)^2} \geqslant 0.$$

После разложения числителя и знаменателя на множители получим:

$$(*) \iff \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 2x + 1)} \geqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{(x - 1)(x - 3) \cdot (x - 1)^2} \geqslant 0 \iff \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{(x - 1)(x - 3)} \geqslant 0$$

[1] На латыни **signum**, а по-английски **sign** — знак. Мы, вообще-то, уже использовали эту функцию для сокращения записи обоснования метода областей в § 3.2.

(мы отбросили в знаменателе положительное выражение $(x-1)^2$ — ОДЗ при этом не расширяется, ибо в знаменателе остается множитель $x-1$). Теперь отмечаем на оси корни числителя и знаменателя и выписываем *ответ*:

$$x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left(1, \frac{3}{2}\right] \cup (3, +\infty). \qquad \square$$

Упражнения

В задачах 1–42 *требуется решить уравнение*.

1. $2\sqrt{x+5} = x+2.$

2. $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2.$

3. $3x - \sqrt{18x+1} + 1 = 0.$

4. $\sqrt{x+7} - x + 3 = 0.$

5. $\sqrt{2x^2+8x+7} - x = 2.$

6. $\sqrt{6x-x^2-5} = 2x-6.$

7. $\sqrt{-x^2-6x+8} - x = 6.$

8. $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3 = 0.$

9. $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} = 7.$

10. $\sqrt{17+x} - \sqrt{17-x} = 2.$

11. $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6.$

12. $\sqrt{2-x} + \dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2.$

13. $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x-3} = \sqrt{3x-11}.$

14. $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = \sqrt{x-2}.$

15. $\dfrac{3(x-2)+4\sqrt{2x^2-3x+1}}{2(x^2-1)} = 1.$

16. $\sqrt{3x^2+6x+16} + \sqrt{x^2+2x} = 2\sqrt{x^2+2x+4}.$

17. $(x+1)\sqrt{x^2+x-2} = 2x+2.$

18. $\dfrac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{x}} - \sqrt{\dfrac{x}{1+2x}} = \dfrac{3}{2}.$

19. $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-3} = \sqrt{3x+3}.$

20. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = \sqrt{2x+19}.$

21. $\sqrt{\dfrac{x+7}{3x+5}} - \sqrt{x+4} = 0.$

22. $\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+2x+4}.$

23. $\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}.$

24. $\sqrt{2x(x-1)+\dfrac{1}{2}} - \sqrt{2x(x-2)+2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} - x(2-3x)} - \sqrt{\frac{1}{12} - x(1-3x)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

25. $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}=\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4.$

26. $|x^2-3|=8.$

27. $14x-2x^2=|x-7|.$

28. $|3x-2|+x=11.$

29. $|2x^2-43|=7.$

30. $|x^2-x+6|=x+2.$

31. $(x-1)^2+|x-1|-2=0.$

32. $|7x-12|-|7x-11|=1.$

33. $x^2+3x+|x+3|=0.$

34. $|2x+5|=|x|+2.$

35. $\dfrac{|x-2|}{|x-1|-1}=1.$

36. $\sqrt{2-\sqrt{2+x}}=x.$

37. $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1.$

38. $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{16-x}=\sqrt[3]{x-8}.$

39. $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}.$

40. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4.$

41. $\sqrt[5]{1+2x}+\sqrt[5]{1-2x}=\sqrt[5]{2}.$

42. $\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{12}=\dfrac{64}{3}\sqrt[7]{x}.$

В задачах 43–78 *требуется решить неравенство.*

43. $x-3\sqrt{x-3}-1>0.$

44. $\sqrt{x^2-9}<14-2x.$

45. $x-3<\sqrt{x^2+4x-5}.$

46. $x+\sqrt{x^2+x-6}>-1.$

47. $2x-17<\sqrt{81-x^2}.$

48. $\sqrt{x^2-4x}>x-3.$

49. $4-5x<\sqrt{16+30x-25x^2}.$

50. $\sqrt{2x^2-6x+1}-x+2>0.$

51. $\sqrt{x^2-3x+2}\leqslant 3x-3.$

52. $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1.$

53. $\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5}>1.$

54. $\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}}\leqslant 0.$

55. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0.$

56. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}.$

57. $\sqrt{1-3x}-\sqrt{5+x}>1.$

58. $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1.$

59. $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}>\dfrac{1}{x-2}.$

60. $\sqrt{9-\dfrac{9}{x}}<x-\sqrt{x-\dfrac{9}{x}}.$

61. $\dfrac{1-\sqrt{8x-3}}{4x}<1.$

62. $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+9}}<\sqrt{1+2x}-1.$

63. $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}.$

64. $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x}.$

65. $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}<35-2x.$

66. $\sqrt{x+5}<1+\sqrt{-x-3}+\sqrt{(x+5)(-x-3)}.$

67. $\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}\geqslant\frac{2}{x}.$

68. $x^2-2|x+1|<0.$

69. $|x^2-1|-2x<0.$

70. $|x^2-2x-3|<3x-3.$

71. $\left|\frac{2x-4}{x+1}\right|>2.$

72. $\frac{|x-5|}{x+3}\geqslant 2.$

73. $3|x-2|+|5x+4|\leqslant 10.$

74. $x-9<7\left|4-\sqrt{x+9}\right|.$

75. $\frac{4}{|x+1|-2}\geqslant|x-1|.$

76. $\frac{|x-3|}{|x-2|-1}\geqslant 1.$

77. $\left|\frac{2-3|x|}{1+|x|}\right|<1.$

78. $\frac{1}{x-1}+\frac{3}{|x|+1}\geqslant\frac{1}{|x|-1}.$

В задачах 79–80 *требуется найти все пары* $(x;\,y)$, для которых выполнены заданные условия.

79. $\begin{cases}4y^2-2x^2=\sqrt{2(x+2y)^2-(x+2y)^4},\\ x^4+2\leqslant 4y(x^2-1).\end{cases}$

80. $\begin{cases}y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2},\\ 4xy^3+y^3+\frac{1}{2}\geqslant 2x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2}.\end{cases}$

Ответы и указания к упражнениям

Мы опускаем ответы и указания в случае, когда они приводятся в самих разделах «Упражнения», и в некоторых других случаях (например, в ряде упражнений и задач на доказательство).

Глава 1

1. $\{2;\ \frac{1}{2}\}$. **2.** $\{-2;\ \frac{3}{2}\}$. **3.** $\{-\frac{5}{2};\ \frac{3}{2}\}$.

4. $x=\pm 4$. **5.** $x=1$. **6.** $\{-\frac{1}{2};\ -\frac{4}{3}\}$.

7. $x=4$. **8.** $\{1, -3, -1\pm\sqrt{3}\}$. **9.** $\{2,\ \frac{1}{2}, -2\pm\sqrt{3}\}$.

10. $x=1$. **11.** $\{-1,\ \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})\}$. **12.** $x=\pm 1$.

13. $\{-1;\ 2\}$. **14.** $\{-3;\ 2\}$. **15.** $x=-3$.

16.
$$\begin{aligned} a<0 &\ \to\ x=x_{1,2},\\ a=0 &\ \to\ x=-\frac{1}{2},\\ 0<a<1 &\ \to\ x=x_{1,2},\\ a=1 &\ \to\ x=-1,\\ a>1 &\ \to\ \varnothing,\\ x_{1,2}&=\frac{-1\pm\sqrt{1-a}}{a}. \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} a<0 &\ \to\ x\in[2a, a],\\ a=0 &\ \to\ x=0,\\ a>0 &\ \to\ x\in[a, 2a]. \end{aligned}$$

18. $-\frac{7+\sqrt{45}}{2}<a<-4+\sqrt{12}$. **19.** $1<a<7$. **20.** $-3<a<-2$.

21. $a<-2 \quad \to \quad x=x_{1,2},$
$a=-2 \quad \to \quad x=1,$
$-2<a<2 \quad \to \quad \varnothing,$
$a=2 \quad \to \quad x=-1,$
$a>2 \quad \to \quad x=x_{1,2},$
$x_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}.$

22. $a<-1 \quad \to \quad x=a;\ \pm\sqrt{-a},$
$a=-1 \quad \to \quad x=\pm 1,$
$-1<a<0 \quad \to \quad x=a;\ \pm\sqrt{-a},$
$a\geqslant 0 \quad \to \quad x=a.$

23. $a<1 \quad \to \quad x\in[x_1,x_2],$
$a=1 \quad \to \quad x=1,$
$a>1 \quad \to \quad \varnothing.$

24. $a\leqslant -8 \quad \to \quad \varnothing,$
$-8<a<0 \quad \to \quad x\in[x_3,x_2),$
$0\leqslant a<1 \quad \to \quad x\in[x_1,x_2),$
$a\geqslant 1 \quad \to \quad \varnothing,$
$x_{1,2}=-2\mp\sqrt{1-a},\ x_3=-\dfrac{a+6}{2}.$

25. $a\leqslant 0 \quad \to \quad x\in[x_2,x_1],$
$a=0 \quad \to \quad \varnothing,$
$a>0 \quad \to \quad x\in[x_1,x_2),$ где $x_1=-\dfrac{a}{2},\ x_2=a.$

26. $a=-1,\ a=8.$

Глава 2

1. $S=p_n(1).$

2. 1) 0; 2) 1; 3) $(-1)^n$; 4) 1; 5) 0; 6) 2.

3. $\deg p\circ q=\deg p\cdot\deg q.$

4. $A_0=p(q(0))=p(b_0)$, если $q(x)=\ldots+b_0.$

5. $S_{p\circ q}=p(-1)=4,\quad S_{q\circ p}=q(0)=-3.$

10. $\{-3;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{29})\}.$

12. 1) $a=1$; 2) ни при каких a; 3) $a=2$;
4) $a=-3$; 5) $a=2$; 6) $a=\pm 1.$

13. 1) $2x^2=2(x^2+x+1)+(-2x-2);$
2) $x^2=\frac{1}{2}(2x^2+x+1)+(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2});$

3) $x^3+1=x(x^2+1)+(-x+1)$;

4) $x^4=(x^2+1)(x^2-1)+1$;

5) $x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)+0$;

6) $x^5=(x^3+x)(x^2-1)+x$.

14. $r(x)=-x+2$.

15. $r(x)=x+1$.

19. Неверно.

22. $c=5$.

23. $a=n, b=-n-1$.

33. 1) $p(x)=x^2-x+1$;

2) $p(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$;

3) $p(x)=x^2-2x+5$.

35. 1) $p(x)=x^2+2$;

2) $p(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$;

3) $p(x)=x^4-1$.

36. 1) x^3+x^2-x-1;

2) $x^4-x^3-3x^2+x+2$;

3) $x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1$.

37. 1) $p(x)=(x+2)^2(x-3)^2$, $<-2,-2,3,3>$;

2) $p(x)=(x-1)^3(x+7)$, $<1,1,1,-7>$;

3) $p(x)=(x+1)^4(x-5)$, $<-1,-1,-1,-1,5>$.

38. 1) $p(x)=(x-1)(x^2+3x+6)$, $D=9-4\cdot 6<0$;

2) $p(x)=(x-2)^2(x+2)^2(x^2+4)$;

3) $p(x)=(x-1)^3(x^2+1)$.

39. $x_1+x_2+x_3+x_4=-c_1$,

$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=c_2$,

$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-c_3,$

$x_1x_2x_3x_4=c_4.$

Задачи по комбинаторике

40. 1) $3\cdot2\cdot1=3!=6$; 2) $4\cdot3\cdot2=4!=24$; 3) $9\cdot8\cdot7=504$.

41. 1) $9\cdot10=90$; 2) $9\cdot5=45$; 3) $9\cdot8=72$.

42. 1) $9\cdot10\cdot10=900$; 2) $9\cdot10\cdot5=450$; 3) $9\cdot10\cdot9=810$.

43. 1) $7\cdot6\cdot5=210$; 2) $7\cdot7\cdot7=343$; 3) $7\cdot7\cdot6=294$.

44. $30\cdot30\cdot30\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=27\cdot10^7=270\,000\,000>150\,000\,000$.

45. 1) $2\cdot2=4$; 2) $2\cdot2\cdot2=8$; 3) $2^4=16$;
4) $2^5=32$; 5) $2^8=256$; 6) 2^n.

46. 1) $2\cdot2=4$; 2) $2^3=8$; 3) $2^5=32$; 4) 2^n.

47. $3^5=243$.

48. 1) $2\cdot2=4$; 2) $2^3=8$; 3) $2^4=16$; 4) 2^n.

49. 1) $n=6=2\cdot3$, $\tau=2\cdot2=4$;
2) $n=30=2\cdot3\cdot5$, $\tau=2\cdot2\cdot2=8$;
3) $n=210=2\cdot3\cdot5\cdot7$, $\tau=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$;
4) $n=9=3^2$, $\tau=3$;
5) $n=12=2^2\cdot3$, $\tau=3\cdot2=6$;
6) $n=18=2\cdot3^2$, $\tau=2\cdot3=6$.

50. 1) $\alpha+1$; 2) $2\cdot2=4$; 3) $(\alpha+1)\cdot2$; 4) $(\alpha+1)(\beta+1)$.

51. 1) $10!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$ — 2 нуля;
2) $20!=\ldots\cdot5\cdot\ldots\cdot10\cdot\ldots\cdot15\cdot\ldots\cdot20$ — 4 нуля;
3) $100!=\ldots5\ldots10\ldots15\ldots20\ldots25\ldots30\ldots\ \ldots85\ldots$
$90\ldots95\ldots100$ — 21 нуль.

52. $n=10!=2\cdot3\cdot2^2\cdot5\cdot2\cdot3\cdot7\cdot2^3\cdot3^2\cdot2\cdot5=2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$,
$\tau=9\cdot5\cdot3\cdot2=270$ делителей.

53. $\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$.

54. $\mathbf{A}_{20}^{17} = \frac{20!}{3!} = 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4.$

55. 1) $\mathbf{P}_7 = 7! = 5040$; 2) $\frac{1}{7}\mathbf{P}_7 = 6! = 720.$

56. 1) $2 \cdot 6! = 1440$; 2) $2 \cdot 6 \cdot 5! = 1440$; 3) $2 \cdot 5! = 240.$

57. $\mathbf{P}_{15} = 15!.$

58. $\mathbf{C}_5^3 = \mathbf{C}_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$

59. 1) $\mathbf{C}_5^2 = 10$; 2) $\mathbf{C}_5^3 = 10.$

60. $\mathbf{C}_5^2 = \mathbf{C}_5^3 = 10.$

61. 1) $\mathbf{C}_5^3 = 10$; 2) $\mathbf{C}_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$; 3) $\mathbf{C}_{12}^3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} = 220$;

4) $\mathbf{C}_{88}^3 = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{6}.$

62. $\mathbf{C}_7^4 = \mathbf{C}_7^3 = 35.$

63. $10 \cdot \mathbf{C}_9^3 = 10 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 840.$

64. 1) $\mathbf{C}_{15}^8 = \mathbf{C}_{15}^7$; 2) $\frac{1}{3!}\mathbf{C}_{15}^5\mathbf{C}_{10}^5 = \frac{15!}{3! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!}$;

3) $\frac{1}{5!}\mathbf{C}_{15}^3\mathbf{C}_{12}^3\mathbf{C}_9^3\mathbf{C}_6^3 = \frac{15!}{5! \cdot (3!)^5}.$

65. $\mathbf{C}_{10}^3 \cdot \mathbf{C}_{15}^3.$

66. 1) $\mathbf{A}_{20}^2\mathbf{A}_{18}^2\mathbf{A}_{16}^2 \ldots \mathbf{A}_4^2\mathbf{A}_2^2 = 20! = \mathbf{P}_{20}$;

2) $\frac{1}{10!}\mathbf{C}_{20}^2\mathbf{C}_{18}^2\mathbf{C}_{16}^2 \ldots \mathbf{C}_4^2\mathbf{C}_2^2 = \frac{20!}{10!(2!)^{10}}.$

67. 1) $\mathbf{C}_5^3 = 10$; 2) $\mathbf{C}_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$

68. 1) $2^3 = 8$; 2) $2^5 = 32$; 3) $2^n.$

69. $\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!} = \mathbf{C}_{m+n-1}^n$ — целое число.

71. 1) $\mathbf{C}_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$; 2) $\mathbf{A}_n^2 = n(n-1)$; 3) $\mathbf{P}_n = n!$;

4) $\frac{1}{n}\mathbf{P}_n = (n-1)!.$

72. $C_n^2 \cdot C_m^2$.

73. $m \cdot C_n^2 + n \cdot C_m^2$.

74. C_n^4.

75. $C_{10}^5 \cdot C_5^3 = \frac{10!}{5!3!2!} = 2520$.

76. В случае неразличимых палаток: 1) $\frac{1}{2!} C_{12}^6 = \frac{12!}{2!(6!)^2}$;

2) $\frac{1}{3!} C_{12}^4 C_8^4 = \frac{12!}{3!(4!)^3}$; 3) $\frac{1}{4!} C_{12}^3 C_9^3 C_6^3 = \frac{12!}{4!(3!)^4}$;

4) $\frac{1}{6!} C_{12}^2 C_1 0^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2 = \frac{12!}{6!(2!)^6}$; 6) $\frac{1}{2!} C_{12}^3 C_9^3 = \frac{12!}{2!3!3!6!}$.

Если палатки различимы, то в указанных ответах следует отбросить первую дробь (вида $\frac{1}{m!}$); в п. 5) ответ $C_{12}^3 C_9^4 = \frac{12!}{3!4!5!}$.

77. 1) $C_{12}^4 = C_{12}^8 = 495$; 2) $\frac{1}{2!} C_{12}^6$; 3) $C_{12}^3 C_9^4 = \frac{12!}{3!4!5!}$;

4) $\frac{1}{2!} C_{12}^3 C_9^3 = \frac{12!}{2!3!3!6!}$; 5) $\frac{1}{3!} C_{12}^4 C_8^4 = \frac{12!}{3!(4!)^3}$;

6) $\frac{1}{4!} C_{12}^3 C_9^3 C_6^3 = \frac{12!}{4!(3!)^4}$; 7) $\frac{1}{(2!)^2} C_{12}^2 C_{10}^2 C_8^4 = \frac{12!}{(2!)^4(4!)^2}$.

78. 1) $C_4^2 = 6$; 2) $C_4^2 \cdot 2! = 12$; 3) $C_6^3 \cdot 3! = 120$; 4) $C_6^3 C_3^2 = 60$;

5) $C_{10}^3 C_7^2 C_5^2 \cdot 3! = \frac{10!}{3!2!2!}$; 6) $C_{11}^5 C_6^2 C_4^2 \cdot 2! = \frac{11!}{5!2!2!}$; 7) $C_8^3 \cdot 5! = \frac{8!}{3!}$;

8) $C_9^4 C_5^3 \cdot 2! = \frac{9!}{4!3!}$.

80. 1) $n-1$; 2) $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$; 3) $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$; 4) $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = C_{n-1}^2$;

5) $\frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3!} = 560$; 6) $\frac{99 \cdot 98 \cdot 97}{3!}$; 7) C_{n-1}^{k-1}.

83. $L = R = 2^{n-1}$.

84. $C_n^k C_{n-k}^m x^k y^m z^{n-k-m} = \frac{n!}{k!m!(n-k-m)!} x^k y^m z^{n-k-m}$.

85. 1) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$;

2) $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3y^2z+3yz^2+3z^2x+3zx^2+$ $+6xyz$.

86. 1) $x+2=z$; 2) $x-3=z$; 3) $x+2=z$.

90. $B'_m=B_{m-1}+B_m$.

Глава 3

1. $\{-2;-\frac{1}{2}\}$. **2.** $x=\frac{1}{2}$. **3.** $x=0$. **4.** $x=1$.

5. $\{\pm\sqrt{\frac{1}{2}(7+\sqrt{45})},\pm\sqrt{\frac{1}{2}(7-\sqrt{45})}\}$ или $\{\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5}),\ \frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})\}$.

6. $\{1,-3,-1\pm\sqrt{3}\}$. **7.** $\{-2;\frac{1}{2}\}$.

8. $x=1+\sqrt{7}\pm\sqrt{5+2\sqrt{7}}$. **9.** $\{\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3}\}$.

10. $\{-2;-1;0\}$. **11.** $\{-\frac{1}{12};\frac{1}{2}\}$.

12. $\{1,3,\frac{1}{4}(-9\pm\sqrt{33})\}$. **13.** $\{1\pm\sqrt{13},\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{97})\}$.

14. $\{-1;3;\frac{1}{3}\}$. **15.** $\{1,\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{33})\}$.

16. $x=-\frac{1}{2}$. **17.** $\{1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\}$.

18. $x=-\frac{1}{2}(4+\sqrt{6})\pm\sqrt{\frac{1}{2}(9+4\sqrt{6})}$.

19. $x=-1\pm\sqrt{5}$. **20.** $\frac{x^2}{x+1}=z,\quad z^2+2z=3$.

21. $\frac{x^2}{3+x}=z,\quad z^2+6z=7$. **22.** Это число равно 17.

32. $(2,7)$. **33.** $(-1,0)$.

34. $\left[\frac{4}{3},3\right)$. **35.** $\left[-2,-\frac{3}{2}\right)\cup\{0\}$.

36. $\{\sqrt{6}, -\sqrt{6}\}$.

37. $[3, 4)\cup(4, +\infty)$.

38. $(-\infty, -3)\cup\left(\frac{4}{7}, 2\right)$.

39. $(-\infty, 1)\cup(1, 3]$.

40. $(-1, 0)\cup(2, 4)$.

41. $\left(-2, \frac{3}{2}\right)\cup(5, +\infty)$.

42. $\left(-\infty, -\frac{7}{5}\right]\cup\left(2, \frac{13}{5}\right]$.

43. $(-1, 3)\cup(3, +\infty)$.

44. $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

45. $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\cup\left(-1, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\cup\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

46. $(-\infty, -20)\cup(23, +\infty)$.

47. $(-\infty, -3)\cup(-2, -1)$.

48. $(-\infty, -1)\cup\left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

49. $(-\infty, +\infty)$.

50. $[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$.

51. $x=-1$.

Глава 4

1. $(x; y)=\pm(2; 1), \pm\left(\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

2. $(x; y)=(2; -1), \left(\frac{12}{7}; -\frac{1}{7}\right)$.

3. $(x; y)=(7; -3), (-7; 3)$.

4. $(x; y)=\pm(1; 2), \pm(\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

5. $(x; y)=\pm(2; 6)$.

6. $(x; y)=(7; -3), (-7; 3)$.

7. $(x; y)=\pm\left(\sqrt[4]{8}; \sqrt[4]{2}\right), \pm\left(\sqrt[4]{\frac{27}{4}}; \sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)$.

8. $(x; y)=\pm(3; 2)$.

9. $(x;\ y)=(1;\ 2)$.

10. $(x;\ y)=(3;\ 2), (2;\ 3), (-1+\sqrt{2};\ -1-\sqrt{2}), (-1-\sqrt{2};\ -1+\sqrt{2})$.

11. $(x;\ y)=(5;\ 3), (-3;\ -5), \pm(\sqrt{17};\ \sqrt{17})$.

12. $(x;\ y)=(1+\sqrt{3};\ 1-\sqrt{3}), (1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3})$.

13. $(x;\ y)=(0;\ 0), \pm(2;\ -2), \pm(\sqrt{6};\ \sqrt{6}), \pm\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right),$

$\pm\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right)$.

14. $(x;\ y)=\pm(2;\ 1), \pm\left(\frac{5}{\sqrt{3}}; -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

15. $(x;\ y)=(0;\ 0), \pm(2;\ 3), \pm(3;\ 2), \pm(\sqrt{7};\ \sqrt{7}), \pm(\sqrt{19};\ -\sqrt{19})$.

16. $(x;\ y)=\pm(3;\ 5), \pm\left(-36, \frac{23}{2}\right)$.

17. $(x;\ y)=(1\pm\sqrt{2};\ -1)$.

18. $(x;\ y)=(1;\ 1)$.

19. $(x;\ y)=(2;\ 1)$.

20. $(x;\ y)=(1;\ -1)$.

21. $(x;\ y)=(-2;\ 0), \pm(0;\ 2)$.

22. $(x;\ y)=(-2;\ -1)$.

23. $(x;\ y)=\left(-\frac{1}{2}; 0\right), \pm(0;\ 1)$.

24. $(x;\ y)=(3;\ 0), \left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

25. $(x;\ y)=\pm(2;\ 3), \pm(3;\ 2)$.

26. $(x;\ y)=\pm(3;\ 5), \pm\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}\right)$.

27. $(x;\ y;\ z)=(4;\ 4;\ -4)$.

28. $(x;\ y;\ z)=(2;\ 3;\ 1)$.

29. $(x;\ y;\ z)=\pm(1;\ 0;\ 1),\ \pm\left(\frac{1}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right)$.

30. $(x;\ y;\ z)=\pm(1;\ 2;\ 3)$.

31. $(x;\ y;\ z)=\pm(0;\ 4;\ -1),\ \pm(2;\ -2;\ 3)$.

32. $(x;\ y;\ z)=\left(-3;\ -\frac{5}{3};\ 1\right),\ \left(-3;\ \frac{5}{3};\ -1\right),\ \left(-\frac{5}{4};\ -\frac{12\sqrt{2}}{5};\ 2\sqrt{2}\right),$
$\left(-\frac{5}{4};\ \frac{12\sqrt{2}}{5};\ -2\sqrt{2}\right)$.

33. $(x;\ y;\ z)=(0;\ 0;\ 0),\ \left(\frac{5}{3};\ \frac{10}{3};\ 5\right),\ \left(-\frac{5}{9};\ \frac{5}{3};\ \frac{10}{9}\right)$.

34. $(x;\ y;\ z)=\left(2;\ \sqrt[3]{3};\ \sqrt[3]{9}\right),\ \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}};\ -\sqrt[3]{\frac{9}{2}};\ \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$.

35. $(x;\ y;\ z)=(0;\ 0;\ 0),(4;\ 6;\ 2)$.

36. $(x;\ y;\ z)=(a;\ a;\ -a),(a;\ -a;\ a),(-a;\ a;\ a)$.

37. $(x;\ y;\ z)=(a;\ a;\ a)$.

38. $(x;\ y;\ z)=(a;\ -a;\ -a),(-a;\ a;\ -a),(-a;\ -a;\ a)$.

39. $(x;\ y;\ z)=(-a;\ -a;\ -a)$.

40. $(x;\ y;\ z)=(3;\ 3;\ 3)$.

41. $(x;\ y;\ z)=(1;\ 1;\ 1),\ \left(\frac{-5+\sqrt{11}}{2};\ \frac{10-\sqrt{11}}{2};\ \frac{4-\sqrt{11}}{2}\right),$
$\left(\frac{-5-\sqrt{11}}{2};\ \frac{10+\sqrt{11}}{2};\ \frac{4+\sqrt{11}}{2}\right)$.

42. $(x;\ y;\ z)=(-1;\ -1;\ -2),(a;\ 0;\ 0),a\in\mathbb{R}$ — любое.

Глава 5

1. $x=4$.

2. $x=3$.

3. $\left\{0;\ \frac{4}{3}\right\}$.

4. $x=\frac{7+\sqrt{41}}{2}$.

5. $x=-1$.

6. $x=3+\frac{2}{\sqrt{5}}$.

7. $x=-2$. **8.** $\left\{3;\ -\frac{9}{2}\right\}$. **9.** $x=5$.

10. $x=8$. **11.** $x=-1$. **12.** $x=1$.

13. $x=4$. **14.** $x=3$. **15.** $\left\{0;\ \frac{3}{2};\ \frac{3\pm\sqrt{73}}{4}\right\}$.

16. $\{0;\ -2\}$. **17.** $\{-3;\ 2\}$. **18.** $x=\frac{1}{2}$.

19. $x=2$. **20.** $x=3$. **21.** $x=-1$.

22. $x=-1$. **23.** $x=7$. **24.** $x\geqslant 1$ — любое.

25. $x=2$. **26.** $x=\pm\sqrt{11}$. **27.** $\left\{7;\ \frac{1}{2}\right\}$.

28. $\left\{-\frac{9}{2};\ \frac{13}{4}\right\}$. **29.** $\{\pm 5;\ \pm 3\sqrt{2}\}$. **30.** $\varnothing$ (нет решений).

31. $\{0;\ 2\}$. **32.** $x\leqslant\frac{11}{7}$ — любое. **33.** $\{-3;\ -1\}$.

34. $\{-7;\ -1\}$. **35.** $x>2$ — любое. **36.** $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

37. $\{1;\ 2;\ 10\}$. **38.** $\left\{8;\ 8\pm 12\sqrt{\frac{3}{7}}\right\}$. **39.** $\left\{1;\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

40. $x=0$. **41.** $x=\pm\frac{1}{2}$. **42.** $x=\frac{12}{127}$.

43. $[3,4)\cup(7,+\infty)$. **44.** $(-\infty,-3]\cup[3,5)$.

45. $(-\infty,-5]\cup[1,+\infty)$.

46. $(-\infty,-7)\cup[2,+\infty)$.

47. $\left[-9,\ \frac{34+\sqrt{116}}{5}\right)$. **48.** $(-\infty,0)\cup\left(\frac{9}{2},+\infty\right)$.

49. $\left(0,\ \frac{8}{5}\right]$. **50.** $\left(-\infty,\ \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right]\cup(3,+\infty)$.

51. $\{1\}\cup[2,+\infty)$. **52.** $[-6,0)\cup(3,4]$.

53. $(-\infty,-7)\cup(-5,-3]\cup[2,+\infty)$.

54. $(-1, 2]$. **55.** $\{-1\}\cup[2, +\infty)$. **56.** $\left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$.

57. $\left[-5, \frac{-9-\sqrt{61}}{8}\right]$. **58.** $(-1, 15)$.

59. $(-\infty, 2)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3\right)$. **60.** $\left[3, \frac{1+\sqrt{37}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{37}}{2}, +\infty\right)$.

61. $\left[\frac{3}{8}, +\infty\right)$. **62.** $\left(0, \frac{45}{8}\right)$. **63.** $\left(\frac{2\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$.

64. $\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 1\right]$. **65.** $\left[0, \frac{841}{144}\right)$.

66. $\left[-5, -4+\sqrt{4\sqrt{5}-8}\right)$.

67. $\left[\frac{\sqrt[3]{5}}{4}, +\infty\right)$. **68.** $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$. **69.** $(-1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

70. $(2, 5)$. **71.** $(-\infty, -1)\cup\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

72. $\left(-3, -\frac{1}{3}\right]$. **73.** $[-1, 0]$. **74.** $[-9, 16)$.

75. $(-1-2\sqrt{2}, -3)\cup(1, 3]$. **76.** $(-\infty, 1)\cup(3, +\infty)$.

77. $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$. **78.** $(-\infty, -3]\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty)$.

79. $(x; y)=\left(-2; \frac{3}{2}\right), \left(0; -\frac{1}{2}\right)$. **80.** $(x; y)=\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$.

Предметный указатель

Абель Н. Х. 117, 121
Алгоритм 54
Александров И. И. 9
Ассоциативность 43

Биквадрат 61
Бином 49
  Ньютона 92
Биномиальные коэффициенты 92

***В**аринг Э.* 217, 243
Виет Ф. 9, 213, 218
Вольф Х. 120, 121
Выражения
  дробно-рациональные 156
    от двух переменных 189
  иррациональные алгебраические 251
  однородные 201
  от двух переменных
    рациональные симметрические 193
  рациональные алгебраические 156
    дробные 156
    от двух переменных 189
    целые 156
  с модулями 251

***Г**алуа Э.* 121
Гаусс К. Ф. 142, 217, 243
Геометрическое место (множество) точек 177
Геометрия
  алгебраическая 190
  аналитическая 190

***Д**екарт Р.* 111, 120, 187, 190
Деление многочленов с остатком 50, 145
Делимое 50
Делимость многочленов 50, 57
Дель Ферро С. 111, 118, 120
Дизъюнкция предложений 20
Дискретная математика 94
Дискриминант 28, 46, 72, **97**, 116, 118, 166
  кубического уравнения 111, 115
Дистрибутивность 43

***Ж**ирар А.* 217, 218, 243

Задачи
  алгебраические 13
  иррациональные алгебраические 251
  рациональные алгебраические 157
  с модулями 289
  с параметрами 26
    кванторные 32
    логические 29, 40, 112
  с радикалами 251
Замена
  линейная 97, 98, 121
  неполная 233, 260
  переменной 119
  полная 235, 261
  с ограничением 124
  симметрическая 215, 217

Итерации 229
  функций 229

Кардано *Д.* 9, 111, 118, 120
Квантор
  единственности 32
  существования 32
Кванторы 32
Кольцо
  многочленов 45
  числовое 43
Комбинаторика 69, 84, 93, 94
Коммутативность 43
Композиция
  многочленов 143
Конические сечения (квадрики) 186, 189
Конъюнкция предложений 20
Координаты вспомогательные 96
Корень
  многочлена 46
    кратный 146
  уравнения 16
Кратность корня 58
Критические значения
  параметра 28

Лагранж *Ж. Л.* 95, 243
Лейбниц Г. В. 61, 95, 121
Лемма
  о единственности многочлена 64
    вторая 67
  о равенстве многочленов 62
Литлвуд Д. 227
Ломоносов М. В. 120

Метод
  Гаусса 239
  Руффини—Горнера 11, 52, 54–57, 60, 69, 73, 101–107, 131
  Феррари 115
  геометрический
    в задачах с модулями 291
  группировки 49, 56, 57, 69, 102, 131
  деления «уголком» 55–57, 69, 102, 131
  замены 11, 121, 158, 210, 211
    в иррациональных неравенствах 283
    в иррациональных уравнениях 251
    в одном уравнении системы 211
    для трех переменных 239
    при решении неравенств 175
  интервалов 165, 170, 172, 296
    в задачах с модулями 290, 295
    в иррациональных неравенствах 279
    правила 172, 174
  исключения иррациональностей 251
  исключения переменных 207, 239
  использования монотонности
    в иррациональных неравенствах 284
    в иррациональных уравнениях 265
  использования однородности 267
  итераций 142, 229, 261
  математической индукции 58, 145
  неопределенных коэффициентов 11, 139, 141
  неэквивалентных преобразований 252, 253
  областей 180, 181
  освобождения от знаменателей 171, 172
  освобождения от кубических радикалов 263
  оценки
    значений переменных 235
  оценок
    при решении систем 226
  перебора 75
  подстановки 12, 194, 196
    выражения 201
    для трех переменных 238
    линейной 199, 206, 216

равносильных линейных преобразований 200, 207, 209, 239
разложения 11, 121, 125, 211
для трех переменных 245
при решении систем 221
сведения к равносильной совокупности 168, 171
сведения неравенств к системам 171, 178
сведения уравнений к системам 232, 235, 260, 261
сопоставления знаков 168
эквивалентных преобразований
иррациональных неравенств 271
иррациональных уравнений 254
Мнимая единица 111
Многочлен
Эйлера 147
неприводимый 126, 142
приведенный 70
приводимый 126
Многочлен (полином) 44, 156
от двух переменных 188
Многочлены
Лагранжа 64, 68
однородные 190
от двух переменных
симметрические 193
симметрические элементарные 193
от трех переменных
симметрические 242
симметрические элементарные 241, 242
полностью разложимые 69
Множество
значений функции 40
пустое 16, 23, 263
решений задачи 13
решений уравнения,
параметрическая запись 187
с определенными на нем операциями 43
Моном 50
Мультимножество 70

Неполное частное 50
Неравенства
двойные 259
дробно-иррациональные 278
дробно-линейные 167
иррациональные алгебраические 269
квадратичные 166
линейные 165
нестрогие 25
рациональные алгебраические 164, 165
рациональные простейшие (стандартные) 165
с вложенными радикалами 275
с двумя переменными 176
линейные 178
простейшие 177
с двумя переменными,
множество решений 177
решения 176
с модулями 292
с переменными 24
с радикалами 36, 269
строгие 25
числовые 24
свойства 25
Низшие степени 93
Ньютон И. 87, 93, 190, 217, 218, 243

Области знакопостоянства 180
Область допустимых значений 157
выражения 16
уравнения 16, 253, 258
Ограничения 18, 254, 255, 259
на ОДЗ 257
Одночлен 44, 156
Остаток от деления 50

Пара упорядоченная 185
Парабола 96
Параметры 26, 187
Паскаль Б. 95, 107
Пеано Д. 33
Перестановки 75, 76
  с повторениями 79
  тип 83
Пирс Ч. 33
Пифагор 134
Платон 134
Подкольцо 43
Подполе 44
Подстановки
  линейные 199, 206, 216
Поле
  числовое 44
Полный набор корней
  многочлена 70
Посторонние
  корни 18, 22, 23, 253
  решения 14
Правило знаков 25
Предложение с переменной 13
Принцип математической
  индукции 59
Проверка 14, 22, 252, 253
Промежутки знакопостоянства
  164, 169, 171

Равенство многочленов
  алгебраическое 62
  функциональное 62
Равносильные
  линейные преобразования
    200, 207, 209, 239
Размещения 86, 88
Разрешимость уравнений
  в радикалах 112, 117
Раскрытие модулей 289
Расширение поля 44
Резольвента 117
Рекуррентное свойство
  биномиальных коэффициентов 107
Рекурсивность 55
Решение 15
Решения
  неравенства 24
  системы
    задач 20
    смешанной 19
    уравнений 73
  совокупности задач 20
  уравнения 16
Руффини П. 11, 117, 121

Самоподстановка 265
Свободный член 45
Семейство графиков 36
Системы
  Виета 11, 70–73, 76–81, 86, 89, 91–93, 108, 109, 124, 148, 156, 213–215, 217, 219, 221, 222
    с тремя переменными 241, 242, 244
  задач 20
  замены 239, 244, 262
  итерационные 229, 231, 232
  кососимметрические 219, 233
  линейные 194
  неравенств 25
  однородные 201
    с тремя переменными 240
  равносильные 195
  рациональные алгебраические 194
  с двумя переменными 188
  с тремя переменными 238
  симметрические 193, 210, 213, 215
    с тремя переменными 242
  смешанные 19
    с двумя переменными 286
  уравнений 73
    рациональные 184
Следование задач 14
Совокупности
  систем неравенств 165
Совокупность задач 20
Соотношение
  Безу 51, 57
Сочетания 83, 84

Старший коэффициент 45
Степень
бинома 91, 92
многочлена 45, 90, 188
однородности 202
одночлена 44, 90, 188
уравнения 157
Схема
Горнера 11
замены 122
подстановки 197
почленного деления 204
решения однородных систем 202
решения системы
Виета 215
Схемы
освобождения от модулей 297
в неравенствах 292, 293, 295
в уравнениях 289
освобождения от радикалов
в неравенствах 271, 273, 274, 276
в уравнениях 254–256

***Т**арталья Н.* 111, 118, 120
Теорема
Безу 11, 49, 50, 54, 60
Варинга—Гаусса 217, 218, 243
Виета 11, 69–73, 76, 78, 86, 89, 91–93, 108, 109, 124, 214, 215, 241
с тремя переменными 242, 245
Гаусса 142, 173
Лагранжа
об интерполяции 68
Ферма
большая 154
малая 154
о делимости 57, 69
о значениях монотонных функций 266, 267
о промежуточном значении 47, 169, 174, 180, 228, 281
о равенстве многочленов 62
о рациональных корнях 126, 128
о существовании корней 48
о числе корней 58, 157
об итерационных уравнениях 231, 232, 261
Тождества 23
абсолютные 23, 263
расширяющие ОДЗ 257, 270
Тождественное преобразование 23
Треугольник
Паскаля 11, 101, 107

Уединение параметра 38
Упорядоченные подмножества 88
Упорядоченный набор чисел 73
Уравнение
Виета 215, 220, 221
кубическое 242, 245
Уравнений
почленное вычитание (сложение) 199
Уравнения 15
биквадратные 119
бикубические 120
возвратные 142, 163
высших степеней 117
двучленные 95, 119
дробно-рациональные 119, 142, 158
замены 119, 160, 198, 212, 216, 252
иррациональные алгебраические 251
итерационные 229, 231, 232
квадратные 46, 95, 118
(термин) 120
кососимметрические 142, 161, 162
кубические 46, 107
(термин) 120

линейные 46, 95, 118
низших степеней 95
однородные 192
подстановки 195, 198
полиномиальные 46, 119
стандартные 118
рациональные алгебраические 157
с вложенными радикалами 256
с двумя переменными 184
однородные 190
рациональные 188
с двумя переменными, решения 184
с несколькими переменными 73, 184
с несколькими переменными, решения 73
с радикалами 251
симметрические 142, 161
степени 4 115
степенные 95, 119
трехчленные 120
Условия
достаточные 34, 288
необходимые 34, 288

Факториал 77
Ферма П. 95
Феррари Л. 115
Формула
Виета 71, 89, 148
Кардано 109, 111, 112, 117, 118, 128, 137
Лагранжа
интерполяционная 147
Ньютона
для степени бинома 11, 92, 93, 104
интерполяционная 148
Руффини—Горнера 54, 55
рекурсивная 78, 85
Формулы
Жирара—Ньютона 217, 243
рекуррентные 218
сокращенного умножения 59
Функции
биквадратные 46
бикубические 46
двучленные 46
квадратичные 46
кубические 46
линейные 46
полиномиальные 45

Число
перестановок 77
с повторениями 86, 88
размещений 88
сочетаний 84

Эйлер Л. 95, 120, 121
Эквивалентное (равносильное)
преобразование 17
Эквивалентность (равносильность)
задач 14
уравнений 185
Эквивалентный (равносильный)
переход 17, 120, 185

Учебное электронное издание

Земляков Александр Николаевич

АЛГЕБРА+: РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ. ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС

Учебное пособие

Ведущий редактор *И. Маховая*
Редактор *М. Стригунова*
Художник *Ф. Инфантэ*
Корректор *Н. Ектова*
Оригинал-макет подготовлен *О. Лапко* в пакете LaTeX 2_ε
Подписано 18.01.12. Формат $60 \times 90/16$.
Усл. печ. л. 20.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

Системные требования: процессор *Intel* с тактовой частотой от 1,3 ГГц и выше; операционная система *Microsoft Windows XP*, *Vista* или *Windows 7*; от 256 Мб оперативной памяти; от 260 Мб свободного пространства на жестком диске; разрешение экрана не ниже 1024×768; программа *Adobe Reader* не ниже X.