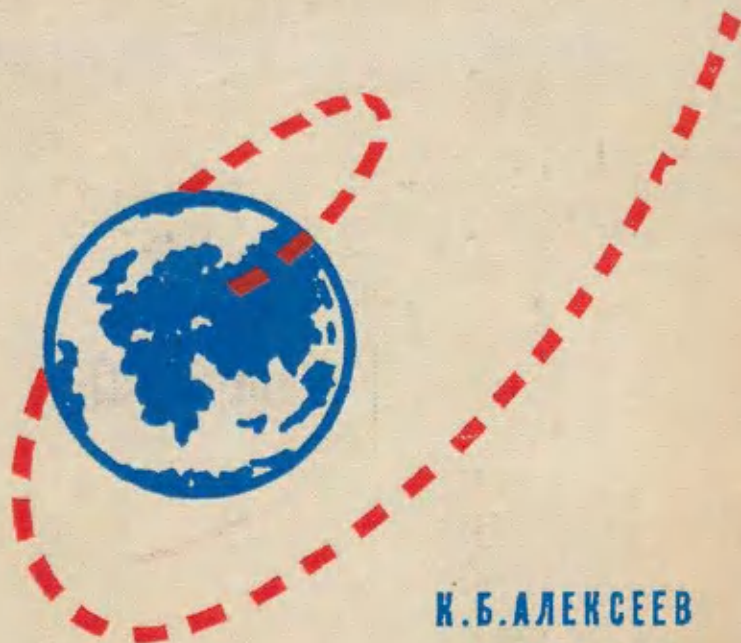




Н.Б.АЛЕКСЕЕВ
Г.Г.БЕБЕНИН
В.А.ЯРОШЕВСКИЙ

Маневрирование КОСМИЧЕСКИХ аппаратов

К. Б. АЛЕКСЕЕВ,
Г. Г. БЕБЕНИН,
В. А. ЯРОШЕВСКИЙ

МАНЕВРИРОВАНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ



ИЗДАТЕЛЬСТВО
„МАШИНОСТРОЕНИЕ“
Москва 1970

Книга знакомит читателя с теоретическими основами и методами расчета траектории маневра космического аппарата при выполнении операции встречи на орбите, при полете и посадке на Луну, межпланетных полетах и при спуске на Землю.

Рассмотрены уравнения движения космического аппарата, способы изменения параметров орбитального движения под действием импульсной и непрерывной тяг, а также возможные принципы построения систем управления траекторией снижения космического аппарата.

Приведены методы измерений параметров траекторий и метод дифференциальной коррекции для определения величины корректирующих импульсов.

Книга рекомендуется инженерам и может быть использована студентами вузов.

Табл. 14. Иллюстр. 192. Библ. 130 назв.

Рецензент канд. техн. наук **Ц. В. Соловьев**
 Научный редактор канд. техн. наук **Г. Н. Кашин**

*Кир Борисович Алексеев, Геннадий Георгиевич Бебенин,
 Василий Александрович Ярошевский*

МАНЕВРИРОВАНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Редактор *Е. В. Сербиновская*
 Техн. редактор *А. Я. Дубинская*

Художник *Н. Т. Дворников*
 Корректор *А. И. Карамышкина*

Г-72398	Сдано в набор 8/1 1970 г.	Подписано в печать 21/IV 1970 г.
Формат 60×90/16	Печ. л. 26	Уч.-изд. л. 23,80
Бум. л. 13	Бумага № 1	Изд. зак. 1096
Цена 2 р. 28 к.	Тираж 3500 экз.	Тем. план 1970 г. № 202

Издательство «Машиностроение», Москва, К-51, Петровка, 24

Московская типография № 8 Главполиграфпрома
 Комитета по печати при Совете Министров СССР,
 Хохловский пер., 7. Тип. зак. 5508

Предисловие

Проблема маневрирования космических летательных аппаратов находит все более широкое освещение на страницах советской и зарубежной периодической печати. Обобщение и систематизация этих материалов в свете последних достижений в области освоения космоса позволяет изложить основы теории маневрирования космических аппаратов и показать применение этой теории к решению таких важных для практики задач, как встреча и стыковка аппаратов на орбите, сход с орбиты, снижение и посадка аппарата в заданный район поверхности планеты.

Решение каждой из указанных задач должно быть оптимальным в том или ином смысле. В одних случаях показателем оптимальности служат энергетические затраты, необходимые для осуществления маневрирования, в других — таким показателем является точность выполнения маневра, в третьих — оба показателя одновременно.

Вопросы оптимального маневрирования затронуты в данной книге применительно к тем задачам, решение которых удастся получить в виде конечных аналитических выражений. В какой-то мере такой подход к проблеме оптимальности ограничивает возможности обеспечения требований, предъявляемых к системам управления космических аппаратов. Однако на начальном этапе проектирования таких систем приведенные в книге приближенные формулы или оценки могут оказаться весьма полезными.

Основное внимание в книге уделяется исследованию динамики управляемого движения аппарата при встрече и сближении на орбите, при входе в атмосферу и межпланетных полетах, а также построению систем управления с учетом технической возможности их реализации. Это объясняется актуальностью затронутых вопросов и тем интересом, который проявляется к ним в настоящее время со стороны широких инженерных кругов.

В книге освещены различные аспекты общей проблемы маневрирования. В частности приводится анализ требований к маневру разгона межпланетного корабля, обеспечивающему его

перевод с промежуточной орбиты спутника Земли на оптимальную орбиту перелета к планете.

Рассматриваются задачи оптимальных алгоритмов выполнения корректирующих маневров на участке перелета с учетом неполной информации о движении аппарата, общие характеристики и классификация типов траекторий входа в атмосферу с учетом подъемной силы, создаваемой аппаратом, максимальных перегрузок и тепловых потоков, которые возникают в процессе входа его в атмосферу.

Предлагаются приближенные уравнения движения космического аппарата при входе в атмосферу, позволяющие провести сравнительное исследование различных траекторий.

Анализируются различные системы управления, предназначенные для обеспечения посадки аппарата в заданном районе Земли или другой планеты.

Обсуждаются варианты систем управления космическими аппаратами на участке входа в атмосферу с учетом характера используемой информации и сложности реализации систем.

Книга предназначена для инженеров и научных работников, специализирующихся в области управления полетом космических аппаратов. Она может быть также полезна студентам старших курсов соответствующей специальности.

Гл. I—IV и § 5.1 и 5.2 гл. V написаны К. Б. Алексеевым и Г. Г. Бебениным, § 5.3—5.6 гл. V, а также гл. VI, VII и приложение — В. А. Ярошевским.

Авторы выражают благодарность Ю. А. Демьянову, Ц. В. Соловьеву и Г. Н. Кашину, сделавшим ряд ценных замечаний, которые были учтены при подготовке рукописи к печати.

Введение

Для проведения исследований космического пространства и осуществления полетов к Луне и планетам солнечной системы необходимо решить ряд технических проблем. Одной из таких проблем является задача обеспечения управления движением космического аппарата. Функции управления исключительно многообразны, они включают в себя и ориентацию аппарата в пространстве, и необходимое изменение траектории полета, и осуществление посадки на поверхность небесного тела и т. п.

По мере развития космической техники и усложнения программ научных исследований роль управления неуклонно возрастает. Действительно, для успешных полетов космических кораблей типа «Восток» (СССР) и «Меркурий» (США) было достаточно обеспечить их определенную ориентацию при включении тормозного двигателя. Существенное изменение орбиты производилось космическими аппаратами типа «Полет» (СССР). На пилотируемых кораблях «Джемини-6» и «Джемини-7» (США) в ходе полета было выполнено ручное управление сближением на орбите.

Принципиально по-иному решалась задача в полете аппаратов «Космос-186» и «Космос-188», а также «Космос-213» и «Космос-214» (СССР). После вывода их на заданную орбиту радиотехническая измерительная аппаратура корабля «Космос-186» осуществила автоматический поиск корабля — цели «Космос-188», а затем с помощью автоматической системы управления было произведено сближение кораблей и их стыковка. В этом эксперименте, произведенном впервые в космическом полете, возникла необходимость в достаточно точном определении орбит кораблей, параметров относительного их движения, пред-

полагаемого момента встречи и момента включения двигательных установок с последующим управлением величиной и направлением создаваемой ими тяги.

Любой эксперимент в космосе, проводимый с участием человека, связан с надежным решением задач снижения и посадки аппарата на Землю. При решении этой задачи возникают принципиально новые трудности, обусловленные воздействием на аппарат больших аэродинамических сил и тепловых потоков на участке входа в плотные слои атмосферы. Поэтому система управления движением аппарата должна обеспечить как посадку аппарата в заданный район Земли, так и приемлемый динамический и тепловой режимы на участке спуска.

Сложные проблемы управления решались при полете и стыковке космических кораблей «Союз-4» и «Союз-5» и при групповом полете и многократном маневрировании трех космических кораблей «Союз-6», «Союз-7» и «Союз-8».

Большое значение вопросы управления имеют при полетах на Луну. Одной из задач управления в таких полетах является мягкая посадка на лунную поверхность. Следует отметить следующие особенности ее решения в техническом отношении. На Луне нет атмосферы, которая могла бы затормозить движение космического аппарата, приближающегося к ее поверхности со скоростью порядка $2,5 \text{ км/сек}$. Поэтому единственная возможность осуществления мягкой посадки состоит в исключительно точном управлении тягой тормозного ракетного двигателя космического аппарата, так как снижение скорости аппарата до единиц метров в секунду должно быть выполнено таким образом, чтобы конец торможения совпал с его приближением к поверхности Луны.

Впервые мягкая посадка на поверхность Луны была осуществлена советской автоматической станцией «Луна-9». Характерно, что успешное проведение этого эксперимента стало возможным благодаря применению системы управления, основанной на сочетании быстродействующих и точных управляющих автоматов с совершенными измерительными устройствами. Роль этих устройств возрастает при коррекции траектории полета с целью прилунения в заданный район.

При полетах на Луну с последующим возвращением на Землю функции управления еще более усложняются. Доста-

точно сказать, что при этом требуется управлять взлетом с поверхности Луны и посадкой при возвращении на Землю.

Возможность осуществления межпланетных полетов в значительной мере зависит от уровня развития техники управления космическим аппаратом. В этом направлении уже получены определенные результаты. Коррекция орбиты, выполненная в полете межпланетной автоматической станции «Венера-3» (СССР), обеспечила ее попадание на планету. Заслуживает внимания высокая точность, с которой была произведена коррекция орбиты. В соответствии с командой, переданной с Земли, радиальная скорость станции должна была измениться на $19,75 \text{ м/сек}$. Высокая точность ориентации и управления величиной импульса тяги позволила осуществить указанную ориентацию с погрешностью по скорости $0,07 \text{ м/сек}$. В результате максимальное отклонение фактической точки попадания от расчетной составило всего 450 км . Еще более значительные успехи в области управления были достигнуты в полете автоматических станций «Венера-4», «Венера-5» и «Венера-6» (СССР). Сложные проблемы управления были решены при полетах космических аппаратов «Зонд-5», «Зонд-6», «Зонд-7», «Зонд-8» (СССР).

В успешных полетах на Луну космических аппаратов «Аполлон-11» и «Аполлон-12» (США) эти задачи решались при активном участии космонавтов.

Тем не менее, созданию высокоманевренных космических аппаратов, предназначенных для выполнения большого круга задач научного исследования, должна предшествовать подготовительная работа, в ходе которой необходимо решить много сложных вопросов управления. При рассмотрении этих вопросов принято выделять управление движением вокруг центра масс для ориентации корабля и движением центра масс аппарата для получения заданной траектории. В данной книге вопросы ориентации не излагаются. При этом предполагается, что требуемая ориентация аппарата в пространстве обеспечивается с помощью специальной системы управления.

Траектория движения центра масс космического аппарата состоит из нескольких участков. На первом участке производится вывод аппарата в заданную точку пространства с приданием ему необходимой скорости. Параметры траектории (координаты и скорость) в конце этого участка выведения определяют траекторию движения аппарата на втором (пассивном) участке.

Здесь движение аппарата происходит по инерции в поле тяготения одного или нескольких небесных тел. Изменение траектории (орбиты) полета на пассивном участке может быть выполнено с помощью управляющей тяги, приложенной к аппарату. Участок полета аппарата с работающей двигательной установкой называется активным участком. Наконец, последний участок траектории — это участок, на котором происходит снижение с орбиты и посадка аппарата на поверхность небесного тела.

Управление движением космического аппарата на участке выведения производится изменением направления вектора тяги ракеты-носителя и исследуется в ракетодинамике. В данной книге рассматриваются вопросы движения центра масс аппарата при действии на аппарат искусственно создаваемых управляющих сил. Такое движение принято называть маневрированием.

Содержание книги посвящено инженерным аспектам теории маневрирования в ее наиболее важных применениях. Вопросы проектирования систем управления и конструкции аппаратов затрагиваются в той мере, которая необходима для пояснения излагаемых принципов.

ГЛАВА I

Космический полет и задачи управления

§ 1.1. ЗАКОНЫ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Наиболее характерным случаем движения космического аппарата является полет в поле тяготения какого-либо небесного тела — Земли, Солнца, планеты солнечной системы или естественных спутников. Это не означает, что на космический аппарат не действуют силы тяготения других небесных тел; но при движении вблизи рассматриваемого тела они настолько малы по сравнению с силой тяготения рассматриваемого небесного тела, что при изучении движения аппарата в первом приближении их можно исключить из рассмотрения.

Проанализируем основные закономерности движения космического аппарата при условии, что на него действует сила тяготения одного небесного тела. Все планеты и их естественные спутники, как правило, имеют неровную поверхность и неравномерное распределение масс. Поэтому их поле тяготения является очень сложной функцией координат аппарата. Некоторые небесные тела имеют атмосферу, которая оказывает сопротивление движению аппарата.

В первом приближении считают, что небесное тело является однородным и имеет сферическую форму с постоянной плотностью, а сопротивление атмосферы пренебрежимо мало. Тогда траектория космического аппарата определяется единственной силой

$$\vec{F} = \vec{F}_g,$$

где $\vec{F}_g$ — сила тяготения однородного сферического тела.

Поскольку размеры космического аппарата пренебрежимо малы по сравнению с размерами небесного тела, их можно не учитывать и рассматривать аппарат в виде точечной массы. Сила тяготения однородного сферического тела $\vec{F}_g$, действующая на точечную массу, находящуюся над его поверхностью, равна силе тяготения эквивалентной точечной массы (равной по величине массе сферического тела и сосредоточенной в его центре).

Следовательно, сила $\vec{F}_g$ может быть определена в соответствии с законом всемирного тяготения Ньютона, который можно записать в виде

$$\vec{F}_g = -\frac{\mu m}{r^3} \vec{r},$$

где μ — постоянная тяготения небесного тела, m — масса аппарата.

Значения постоянной тяготения для некоторых небесных тел солнечной системы приведены в табл. 1.1.

Если приведенные выше выражения поделить на массу аппарата, то получим ускорение силы тяготения (так называемое гравитационное ускорение)

Таблица 1.1

Небесное тело	μ , км ³ /сек ²
Солнце	1,323·10 ¹¹
Земля	3,986·10 ⁵
Венера	3,242·10 ⁵
Марс	4,251·10 ⁴
Луна	4,830·10 ³

$$\vec{g} = -\frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (1.1)$$

Таким образом, гравитационное ускорение зависит лишь от положения притягиваемой точки (ее радиуса-вектора) относительно центра притягивающего тела. Поэтому можно говорить о поле тяготения (гравитационном поле). Так как вектор поля в каждой

точке направлен к его центру, оно называется центральным. Величина ускорения изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от притягивающего центра.

Заметим, что в выражении (1.1) можно представить

$$\mu = g_0 R^2, \quad (1.2)$$

где R — средний радиус небесного тела (его сферической модели);

g_0 — величина гравитационного ускорения на поверхности этого тела.

Полет космического аппарата при выключенной тяге в центральном поле сил будем называть невозмущенным движением по аналогии с соответствующим движением небесных тел. Это движение подчиняется широко известным в небесной механике законам Кеплера.

Уравнение траектории полета космического аппарата. Для изучения движения космического аппарата введем инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом в центре небесного тела. Момент количества движения аппарата определится выражением

$$\vec{K} = \vec{r} \times m \vec{V} \quad (1.3)$$

($\vec{V}$ — вектор скорости космического аппарата).

Момент внешних сил удовлетворяет равенству

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_g = 0.$$

Следовательно, в соответствии с законом сохранения момента количества движения имеем

$$\vec{r} \times m\vec{V} = \text{const.}$$

Величина

$$\vec{\lambda}_c = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{V} \quad (1.4)$$

называется секториальной скоростью, которая характеризует площадь, ометаемую радиусом-вектором в единицу времени.

Таким образом, траектория движения космического аппарата при постоянной массе определяется равенством

$$\vec{\lambda}_c = \text{const.}$$

Это первый закон орбитального движения. Согласно этому закону *секториальная скорость движения космического аппарата по орбите является величиной постоянной.*

Из выражения (1.3) вытекает следующее равенство:

$$\vec{K} \cdot \vec{r} = 0,$$

или в проекциях на оси системы координат $OXYZ$

$$K_x x + K_y y + K_z z = 0. \quad (1.5)$$

Так как момент количества движения является постоянным, равенство (1.5) является уравнением плоскости, проходящей через начало координат и сохраняющей неизменной свою ориентацию в инерциальной системе координат $OXYZ$. Эту плоскость будем в дальнейшем называть орбитальной плоскостью, а траекторию невозмущенного движения — орбитой. Поскольку уравнение (1.5) справедливо и для начальных условий, орбитальная плоскость будет проходить также через вектор начальной скорости космического аппарата $\vec{V}_0$. Таким образом, положение орбитальной плоскости в пространстве определяется однозначно: она проходит через центр притяжения и вектор начальной скорости.

Введем в рассмотрение полярную систему координат (r, θ) , плоскость которой совместим с орбитальной плоскостью, а начало отсчета углов θ с начальным радиусом-вектором $\vec{r}_0$

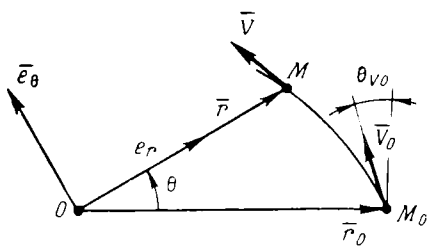


Рис. 1.1. Движение материальной точки в центральном поле сил

(рис. 1.1). При этом вектор кинетического момента орбиты $\bar{K}$ и коллинеарный ему вектор секториальной скорости $\bar{\lambda}_c$ будут направлены перпендикулярно координатной (орбитальной) плоскости, а величина последнего определится формулой

$$\lambda_c = \frac{1}{2} r V \cos \theta_V = \frac{1}{2} r_0 V_0 \cos \theta_{V_0}, \quad (1.6)$$

где θ_V — угол между вектором скорости и перпендикуляром к радиусу-вектору (угол наклона вектора скорости к горизонту).

Так как $V \cos \theta_V / r = \dot{\theta}$, то секториальную скорость можно выразить следующим образом:

$$\lambda_c = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}. \quad (1.7)$$

Согласно закону сохранения энергии дифференциал от кинетической энергии аппарата должен равняться элементарной работе внешних сил. В данном случае действует единственная внешняя сила — сила тяготения, элементарная работа которой dA определяется формулой

$$dA = m \bar{g} \cdot d\bar{r},$$

где

$$d\bar{r} = dr \bar{e}_r + r d\theta \bar{e}_\theta.$$

Здесь $\bar{e}_r$ и $\bar{e}_\theta$ — единичные векторы (см. рис. 1.1).

С учетом формул (1.1) и (1.2) находим $dA = -mg_0 \frac{R^2}{r^2} dr$.

Тогда закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{m}{2} d(V^2) = -mg_0 \frac{R^2}{r^2} dr.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (V^2) = -g_0 \frac{R^2}{r^2} \frac{dr}{d\theta}.$$

Интегрируя это уравнение и выполняя несложные преобразования, получим

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p} (1 + e^2 + 2e \cos \vartheta)}, \quad (1.8)$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}. \quad (1.9)$$

Здесь p — фокальный параметр, e — эксцентриситет орбиты и $\vartheta = \theta - \theta_0$ — истинная аномалия, которые выражаются через на-

чальные условия следующими формулами:

$$p = \frac{r_0^2 V_0^2}{\mu} \cos^2 \theta_{V_0}, \quad (1.10)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{r_0^2 V_0^2}{\mu^2} \left(V_0^2 - 2 \frac{\mu}{r_0} \right) \cos^2 \theta_{V_0}}, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{r_0 V_0^2 \sin \theta_{V_0} \cos \theta_{V_0}}{\mu - r_0 V_0^2 \cos^2 \theta_{V_0}}. \quad (1.12)$$

Полученное соотношение (1.9) является уравнением кривой второго порядка (или конического сечения) в полярных координатах, оно отражает второй закон орбитального движения, со-

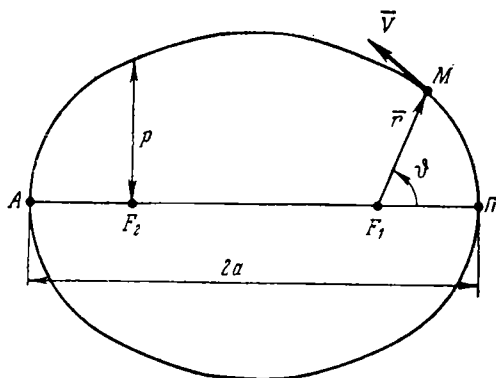


Рис. 1.2. Эллиптическая орбита

гласно которому орбита невозмущенного движения космического аппарата является кривой второго порядка, в одном из фокусов которой находится центр тяготения.

При $\phi=0$ космический аппарат находится на минимальном расстоянии от центра притяжения. В небесной механике эта точка называется *перицентром* орбиты. При этом скорость полета, как видно из выражения (1.8), максимальна.

Рассмотрим наиболее характерные виды орбит космических летательных аппаратов.

Эллиптическая орбита. Как известно, при $0 < e < 1$ уравнение (1.9) соответствует эллипсу, один из фокусов которого находится в начале координат (в центре притяжения). Очень важным параметром эллипса является его *большая полуось* a (рис. 1.2), которая характеризует средний радиус эллиптической орбиты. С учетом известного равенства

$$p = a(1 - e^2) \quad (1.13)$$

и формул (1.10) и (1.11) можно выразить большую полуось через начальные условия

$$a = \frac{\mu}{2 \frac{\mu}{r_0} - V_0^2}. \quad (1.14)$$

При полете по эллиптической орбите, как видно из уравнения (1.9), расстояние космического аппарата от центра тяготения является периодической функцией истинной аномалии. Оно изменяется от минимального значения в перигеуме орбиты ($\vartheta=0$) до максимального значения при $\vartheta=\pi$. Соответствующая точка A орбиты называется *апоцентром*. При полете в поле земного тяготения эти точки называются *перигеем* и *апогеем*, а при полете в поле тяготения Солнца — *перигелием* и *афелием*, соответственно.

Используя формулы (1.8), (1.9) и (1.13), можно получить следующее выражение для скорости полета космического аппарата по эллиптической орбите:

$$V = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}. \quad (1.15)$$

Частным случаем эллипса является круг. Определим начальные условия, соответствующие полету по круговой орбите. Так как для круга должны выполняться равенства

$$r = a = \text{const}, \quad e = 0,$$

то из формулы (1.15) находим начальную скорость, потребную для полета по круговой орбите:

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{r_0}}. \quad (1.16)$$

Второе условие ($e=0$) на основании выражения (1.11) с учетом равенства (1.16) приводится к виду $\cos^2 \theta_{v0} = 1$, или $\theta_{v0} = 0, \pi \dots$. Скорость полета

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{g_0 \frac{R^2}{r}} \quad (1.17)$$

называется *первой космической*, или *круговой* скоростью.

Следовательно, для полета по круговой орбите необходимо, чтобы космический аппарат имел начальную скорость, равную по величине первой космической и направленную строго горизонтально.

При $r=R$ из формулы (1.17) получим первую космическую скорость для поверхности планеты:

$$V_{IR} = \sqrt{g_0 R} = \sqrt{\frac{\mu}{R}}.$$

Эта величина скорости является постоянной для каждой планеты, ее значения для некоторых планет солнечной системы и Луны приведены в табл. 1.2. С учетом последней формулы равенство (1.17) можно представить в виде

$$V_I = V_{IR} \sqrt{\frac{R}{r}} = V_{IR} \sqrt{\frac{R}{R+H}},$$

где H — высота полета над поверхностью небесного тела.

Таблица 1.2

Небесное тело	V_{IR}	$V_{II R}$
	км/сек	
Земля	7,91	11,19
Венера	7,25	10,25
Марс	3,56	5,09
Луна	1,67	2,36

Как видим, величина первой космической скорости уменьшается с увеличением высоты полета. Это объясняется тем, что поле тяготения становится слабее и требуется меньшая центробежная сила, чтобы уравновесить силу тяготения.

При $e=1$ получим параболу. На основании формул (1.8) и (1.9) находим, что начальная скорость должна равняться второй космической скорости

$$V_0 = V_{II} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{2g_0 \frac{R^2}{r}}, \quad (1.18)$$

которую также называют *параболической* скоростью, или *скоростью освобождения*, так как при достижении такой скорости космический аппарат преодолевает поле тяготения небесного тела. Значения второй космической скорости на поверхности планет V_{IIR} приведены в табл. 1.2. Сравнивая выражение (1.18) с формулой (1.17), замечаем, что $V_{II} = \sqrt{2} V_I$.

Таким образом, если начальная скорость находится в пределах $V_I < V_0 < V_{II}$, то космический аппарат будет выполнять полет по эллиптической орбите. Условие $V_0 < V_{II}$ является необходимым и достаточным, а условие $V_I < V_0$ — только достаточ-

ным, так как полет по эллиптической орбите возможен и при меньшей начальной скорости. Чтобы убедиться в этом, представим выражение (1.15) с учетом формулы (1.17) в виде

$$V = V_I \sqrt{2 - \frac{r}{a}}.$$

Отсюда следует, что скорость в перигентре орбиты больше первой космической скорости, а в апоцентре меньше первой космической. Следовательно, при выводе космического аппарата в апоцентр орбиты ему необходимо сообщить скорость, меньшую первой космической.

Очевидно, что минимальная начальная скорость ($V_{0\min}$), обеспечивающая полет по эллиптической орбите вокруг небесного тела, потребуется в том случае, если аппарат выводится в точку апоцентра орбиты, которая касается своим перигентром поверхности небесного тела. В этом случае

$$e = \frac{r_0 - R}{r_0 + R}$$

и

$$V_{0\min} = V_I \sqrt{\frac{2R}{r_0 + R}}.$$

Следовательно, для полета по эллиптической орбите вокруг небесного тела необходимо и достаточно выполнить условие

$$V_I \sqrt{\frac{2R}{r_0 + R}} < V_0 < V_{II}. \quad (1.19)$$

Заметим, что для небесного тела, имеющего атмосферу (планета), при определении $V_{0\min}$ нужно в качестве R в условии (1.19) принимать не радиус этого небесного тела, а радиус R_0 сферы, соответствующей границе эффективного торможения космического аппарата атмосферой.

Выполненный выше анализ уравнения (1.9) и выражения (1.15) показывает, что в процессе полета космического аппарата по эллиптической орбите его высота над поверхностью небесного тела (расстояние до центра тяготения) изменяется от минимального значения в перигентре до максимального в апоцентре, а скорость — от максимального в перигентре, до минимального в апоцентре. Это объясняется периодическим перераспределением энергии. Если в перигентре космический аппарат имеет избыток кинетической энергии по сравнению с количеством энергии, необходимым для полета по круговой орбите, то по мере приближения к апоцентру этот избыток энергии переходит в соответствующее приращение потенциальной энергии. В апоцентре космический аппарат имеет кинетическую энергию, недостаточную для полета по круговой орбите на этой высоте, и начинает

снижаться. Его потенциальная энергия уменьшается, что приводит к соответствующему увеличению кинетической энергии. После того как космический аппарат придет в точку перицентра (совершит полный оборот вокруг небесного тела), этот процесс повторяется. Таким образом, движение по эллиптической орбите сопровождается периодическим перераспределением энергии, переходом части кинетической энергии в потенциальную, и наоборот. Полная энергия при этом (если не включается двигатель) остается неизменной.

Важной характеристикой эллиптической орбиты является период обращения — время полного оборота (витка) — космического аппарата вокруг небесного тела. Так как площадь эллипса

$S_э = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$, период обращения будет

$$T = \frac{\pi a^2}{\lambda_c} \sqrt{1-e^2}.$$

Для перицентра орбиты ($\vartheta=0$) имеем $\lambda_c = \frac{1}{2} r_n V_n$.

С учетом выражений (1.6), (1.9) и (1.15) для перицентра ($\vartheta=0$, $\theta_v=0$) находим

$$\lambda_c = \frac{1}{2} \sqrt{\mu a (1-e^2)}. \quad (1.20)$$

Тогда

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}. \quad (1.21)$$

На основании этой формулы получим

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Последнее равенство отражает третий закон орбитального движения. Согласно этому закону *квадраты периодов обращения космических аппаратов вокруг центра тяготения относятся как кубы больших полуосей их эллиптических орбит.*

Из равенства (1.7) с помощью (1.9), (1.13) и (1.20) получим выражение для угловой скорости $v = \dot{\vartheta} = \dot{\theta}$ поворота радиус-вектора вокруг центра тяготения (угловой скорости обращения космического аппарата)

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{(1+e \cos \vartheta)^2}{(1-e^2)^{3/2}}}, \quad (1.22)$$

или с учетом формулы (1.17) имеем

$$v = V_{1a} \frac{(1+e \cos \vartheta)^2}{a (1-e^2)^{3/2}}, \quad (1.23)$$

где V_{1a} — первая космическая скорость при $r=a$.

Выражение для средней угловой скорости обращения $v_0 = 2\pi/T$ после подстановки формул (1.17) и (1.21) примет вид

$$v_0 = V_{1a}/a. \quad (1.24)$$

Таким образом, большая полуось играет роль среднего радиуса круговой орбиты не только в геометрическом, но и в кинематическом смысле, поскольку движение точки с первой космической скоростью по круговой орбите с радиусом, равным большой полуоси, характеризует среднее движение космического летательного аппарата по эллиптической орбите. Поэтому в ряде практических задач орбиту с малым эксцентриситетом рассматривают как круговую с постоянным радиусом $r=a$ (или с постоянной высотой $H=a-R$). При этом считают, что космический аппарат движется с постоянной скоростью $V = V_{1a}$.

Подставляя формулу (1.24) в (1.23), получим

$$v = v_0 \frac{(1 + e \cos \vartheta)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}. \quad (1.25)$$

Как видно из формулы (1.25), угловая скорость v является периодической функцией и изменяется в течение времени T от максимального значения в перигенте ($\vartheta=0$) до минимального значения в апоцентре ($\vartheta=\pi$).

Полученные выше формулы определяют основные параметры орбиты космического аппарата: расстояние от центра тяготения (высоту над поверхностью небесного тела), скорость полета и угловую скорость обращения, как функцию истинной аномалии. Для того чтобы определить их изменение во времени, необходимо установить связь истинной аномалии ϑ со временем t . Интегрируя равенство (1.25), где $v = \dot{\vartheta}$, находим

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \frac{v_0}{(1 - e^2)^{3/2}} (t - t_n), \quad (1.26)$$

где t_n — момент прохождения космического аппарата через перигент. Для вычисления интеграла в полученном равенстве введем вспомогательный параметр ϑ_e , который называется *эксцентрической аномалией*.

Используя геометрические соотношения на рис. 1.3, получим

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{\sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_e}{2}. \quad (1.27)$$

После перехода в левой части уравнения (1.26) к новой переменной ϑ_e в соответствии с равенством (1.27) и интегрирования находим

$$\vartheta_e - e \sin \vartheta_e = v_0(t - t_{\Pi}).$$

Если обозначить

$$v_0(t - t_{\Pi}) = \vartheta_{cp}, \quad (1.28)$$

где ϑ_{cp} — средняя аномалия,

то полученное равенство можно представить также в виде

$$\vartheta_e - e \sin \vartheta_e = \vartheta_{cp}. \quad (1.29)$$

Таким образом, выразить параметры орбитального движения в виде явных функций времени в общем случае не удастся и приходится пользоваться соотношениями (1.27), (1.28) и (1.29), которые устанавливают связь истинной аномалии со временем через промежуточную величину ϑ_e . Поскольку в ряде задач желательно иметь хотя бы приближенные выражения параметров орбитального движения в виде явных функций времени, воспользуемся полученными в небесной механике разложениями этих параметров в ряды [15]:

$$\vartheta = \vartheta_{cp} + 2e \sin \vartheta_{cp} + \frac{5}{4} e^2 \sin 2\vartheta_{cp} + \dots$$

$$r = a(1 - e \cos \vartheta_{cp} + e^2 \sin 2\vartheta_{cp} + \dots)$$

$$V = V_{Ia}(1 + 2e \cos \vartheta_{cp} + 2e^2 \cos 2\vartheta_{cp} + \dots)$$

$$v = v_0 \left(1 + 2e \cos \vartheta_{cp} + \frac{5}{2} e^2 \cos 2\vartheta_{cp} + \dots \right)$$

В инженерной практике при выявлении общих закономерностей явления довольно часто точность представления величин в виде какой-либо функции с максимальной погрешностью в несколько процентов является вполне достаточной. Поэтому для орбит с эксцентриситетом порядка 0,1 можно ограничиться в разложении двумя первыми членами ряда.

Гиперболическая орбита. Как видно из сопоставления формул (1.11) и (1.18), при $V_0 > V_{\Pi}$ эксцентриситет орбиты больше единицы и уравнение (1.9) соответствует гиперболе с фокусом в центре тяготения (рис. 1.4), которая является типовой орбитой

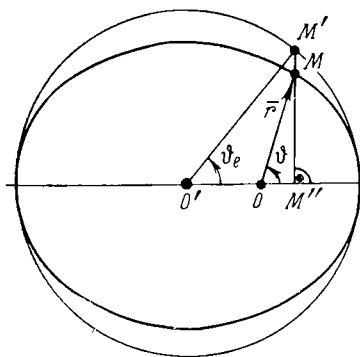


Рис. 1.3. Геометрическое представление эксцентрической аномалии

космического аппарата, преодолевающего поле тяготения небесного тела.

В случае гиперболической орбиты большая полуось a_Γ , параметр и эксцентриситет орбиты связаны равенством

$$p = a_\Gamma (e^2 - 1). \quad (1.30)$$

Подставляя сюда формулы (1.10) и (1.11), выразим большую полуось через начальные условия

$$a_\Gamma = \frac{\mu}{V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}}. \quad (1.31)$$

Скорость полета по гиперболической орбите может быть определена либо по формуле (1.8), либо по формуле, аналогичной (1.15):

$$V = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a_\Gamma} \right)}. \quad (1.32)$$

Так как по мере удаления космического аппарата от небесного тела касательная к гиперболической орбите, определяющая

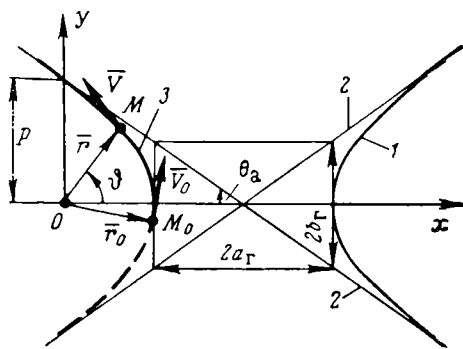


Рис. 1.4. Гиперболическая орбита:

1—мнимая ветвь; 2—асимптоты; 3—реальная ветвь гиперболы (действительная часть траектории показана сплошной линией)

направление скорости, приближается к асимптоте, последняя может использоваться на этом участке для определения направления скорости. Угол θ_a наклона асимптоты к оси Ox системы координат Oxy , центр которой совмещен с центром тяготения, а ось Ox направлена в перигецентр орбиты (см. рис. 1.4), определяется равенством

$$\operatorname{tg} \theta_a = -\frac{b_\Gamma}{a_\Gamma}.$$

Так как $b_{\Gamma} = \sqrt{a_{\Gamma} p}$, то с учетом формул (1.6), (1.10) и (1.31) находим

$$\operatorname{tg} \theta_a = -\frac{2\lambda_c}{\mu} \sqrt{V_0^2 - 2g_0 \frac{R^2}{r_0}} = -\frac{2\lambda_c}{RV_{IR}} \sqrt{V_0^2 - V_{II}^2}. \quad (1.33)$$

При $V_0 \approx V_{II}$ угол θ_a близок к π . С увеличением начальной скорости угол θ_a уменьшается, приближаясь к $\pi/2$. Другими словами, космический аппарат удаляется от небесного тела по более отвесной траектории.

Заметим, что если $\theta_{V_0} = \pi/2$ (космический аппарат выводится строго вертикально), то $\lambda_c = 0$, $p = 0$, $e = 1$, что соответствует прямой линии, проходящей через начало координат. Для реализации этого частного случая требуется строго выполнить условие вертикальности вектора начальной скорости. В действительности за счет ошибок вывода будет либо очень сильно вытянутый эллипс (при $V_0 < V_{II}$), либо гипербола, у которой угол наклона асимптоты близок к π .

§ 1.2. ОРБИТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ ЗЕМНОГО ТЯГОТЕНИЯ

Космические аппараты самого разнообразного назначения совершают длительные полеты вокруг Земли. При этом решается целый ряд задач, связанных с маневрированием на орбите, в том числе задача встречи на орбите с последующей стыковкой.

Космический аппарат, совершающий полет к Луне, на значительной части своей траектории движется в поле земного тяготения, причем этот начальный участок оказывает большое влияние на качество выполнения полета в целом, и только небольшой конечный участок определяется, главным образом, полем тяготения Луны. Поэтому условия полета в поле земного тяготения представляют особый интерес.

Прежде всего кратко рассмотрим основные характеристики Земли как небесного тела, влияющие на условия полета космического аппарата и, главным образом, на его траекторию. К таким характеристикам в первую очередь относятся форма, размеры и распределение плотности Земли, изменение плотности атмосферы с высотой.

Земля представляет собой, строго говоря, неоднородное тело со сложной конфигурацией. Однако в первом приближении ее можно представить в виде однородного тела, имеющего форму сферы с радиусом $R = 6371$ км. Гравитационное ускорение на поверхности такой сферы $g_0 = 9,81$ м/сек². Более точная аппроксимация Земли получается в виде трехосного эллипсоида, который обычно принимается за основу в картографических и геодезических работах в качестве референц-эллипсоида. В космонавтике обычно учитывается лишь сплюснутость (сжатие) Земли вдоль полюсов, что позволяет рассматривать ее как эллипсоид вращения, или сфероид. Большая полуось сфероида (экваториальный

радиус Земли) принимается равной $R_3 = 6378$ км, а малая полуось (расстояние от центра Земли до полюсов) $R_n = 6357$ км. Таким образом, эксцентриситет земного сфероида равен $e \approx 0,081$.

Плотность атмосферы изменяется с высотой по очень сложному закону, причем это изменение носит нестационарный характер и зависит от целого ряда факторов. Однако считают, что при решении задач динамики полета удовлетворительные результаты дает модель атмосферы с изменением плотности по экспоненциальному закону

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta_H H},$$

где $\rho_0 = 0,125 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2 \cdot \text{м}^{-4}$ — плотность атмосферы над уровнем моря;

β_H — логарифмический градиент плотности, который изменяется с высотой; для определенных слоев атмосферы его можно считать постоянным, например в диапазоне высот до 100 км можно принять $\beta_H \approx \frac{1}{7000} \text{ 1/м}$.

Элементы геоцентрических орбит. При изучении движения космического аппарата в поле земного тяготения используется инерциальная геоцентрическая система координат O_3XYZ с началом в центре Земли (рис. 1.5). Ось O_3Z направим по оси вращения Земли в сторону северного полюса, ось O_3X — в точку весеннего равноденствия*, а ось OY направлена так, чтобы получить правую систему координат**.

Линия пересечения плоскости орбиты с плоскостью экватора носит название *линии узлов*. Точка B , в которой космический аппарат переходит из южной полушферы в северную, называется *восходящим узлом* орбиты, а противоположная H — *нисходящим*. Для геоцентрических орбит перигеи Π и апогеи A орбиты называются, соответственно, перигеи и апогеи.

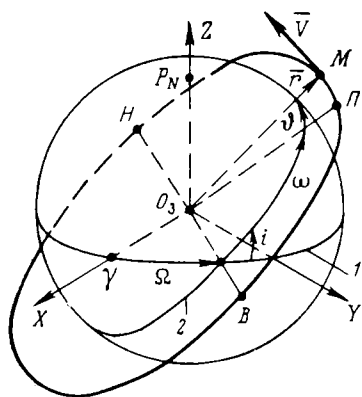


Рис. 1.5. Элементы орбиты:

1—экватор; 2—проекция орбиты на вращающуюся Землю, γ —точка весеннего равноденствия

* Точка на экваторе воображаемой небесной сферы (сфера бесконечно большого радиуса, построенная относительно центра Земли), в которой Солнце в процессе его видимого с Земли годичного движения переходит из южной полушферы в северную.

** В последующем будут применяться только правые системы координат, без соответствующих оговорок.

Положение орбиты в пространстве и положение космического аппарата на орбите определяется шестью элементами. Ниже приводится их краткая характеристика.

Долгота восходящего узла Ω , которую иногда для краткости называют просто долготой узла *, — это угол, отсчитываемый в плоскости экватора против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса, от направления в точку весеннего равноденствия до направления в восходящий узел орбиты. Этот угол может изменяться в диапазоне $0 \leq \Omega \leq 360^\circ$.

Наклонение орбиты i — угол, отсчитываемый против часовой стрелки, если смотреть со стороны восходящего узла, от плоскости экватора до плоскости орбиты. Этот угол в зависимости от начальных условий находится в пределах: $0 \leq i \leq 180^\circ$. При $i=0^\circ$ и $i=180^\circ$ орбита называется *экваториальной* (плоскость орбиты совпадает с плоскостью экватора), а при $i=90^\circ$ — *полярной* (плоскость орбиты проходит через полюсы).

Аргумент перигея ω — угол, отсчитываемый в плоскости орбиты по направлению движения от направления в восходящий узел до направления в перигей. Аргумент перигея изменяется в пределах $0 \leq \omega \leq 360^\circ$. С учетом этого элемента в ряде задач для определения положения космического аппарата на орбите вместо истинной аномалии используется аргумент широты

$$u = \omega + \vartheta.$$

В качестве элементов орбиты используются введенные ранее параметры, такие как большая полуось орбиты a , эксцентриситет e и момент прохождения перигея $t_{\text{п}}$.

Заметим, что элемент $t_{\text{п}}$ входит в уравнения движения посредством истинной аномалии ϑ . Поэтому в ряде случаев вместо $t_{\text{п}}$ в качестве шестого элемента используется значение истинной аномалии в некоторый фиксированный момент времени, например, в момент вывода аппарата на орбиту. Таким образом, в качестве шестого элемента орбиты можно воспользоваться начальным значением истинной аномалии ϑ_0 . Учитывая, что $\vartheta_0 = -\vartheta_0$, из равенства (1.12) находим

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = - \frac{4\lambda^2 \operatorname{tg} \vartheta_{V0}}{\mu r_0 - 4\lambda^2}. \quad (1.34)$$

Вместо большой полуоси в качестве элемента орбиты иногда используется ее фокальный параметр p , особенно при исследовании гиперболических орбит.

Для целей последующего исследования введем в рассмотрение следующие системы координат (рис. 1.6). Узловая система координат $O_3X_0Y_0Z_0$, которая получается поворотом системы O_3XYZ на угол Ω вокруг оси O_3Z ; перигейная система координат $O_3X_{\text{п}}Y_{\text{п}}Z_{\text{п}}$, ось $O_3Z_{\text{п}}$ которой направлена в перигей, а ось $O_3X_{\text{п}}$

* Встречается в литературе также такое название этого элемента, как прямое восхождение узла.

в сторону, противоположную вектору секториальной скорости λ_c ; $O_3x_0y_0z_0$ — орбитальная система координат, ось O_3y_0 которой направлена по текущему радиусу-вектору $\bar{r}$, а ось O_3x_0 — в сторону движения космического аппарата. При анализе невозмущенного движения узловую и перигейную системы координат можно считать неподвижными в инерциальном пространстве, а орбитальная система координат вращается с угловой скоростью обращения $\bar{v}$.

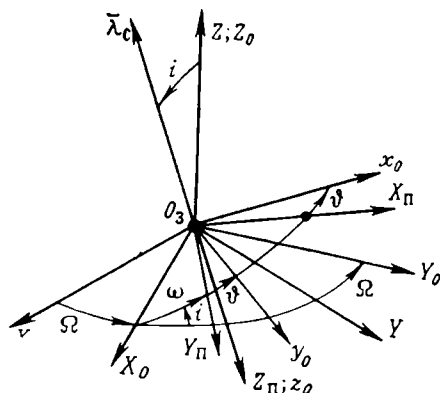


Рис. 1.6. Системы координат

На основании рис. 1.6 связь между указанными системами координат определяется соотношениями:

$$[X, Y, Z]^T = A_1 [X_0, Y_0, Z_0]^T, \quad (1.35)$$

$$[X_0, Y_0, Z_0]^T = A_2 [X_n, Y_n, Z_n]^T, \quad (1.36)$$

$$[X_n, Y_n, Z_n]^T = A_3 [x_0, y_0, z_0]^T, \quad (1.37)$$

где

$$A_1 = \begin{vmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ \cos i \cos \omega & \cos i \sin \omega & \sin i \\ \sin i \cos \omega & \sin i \sin \omega & -\cos i \end{vmatrix};$$

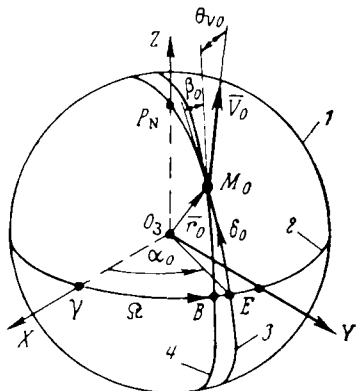
$$A_3 = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

T — индекс транспонирования.

Заметим, что переход от орбитальной системы координат к узловой системе координат определяется матрицей $A_{2,3} = A_2 \cdot A_3$, которая по структуре полностью совпадает с матрицей A_2 , если

вместо ω использовать $u = \omega + \vartheta$. В этом нетрудно убедиться как на основании рис. 1.6, так и вычислением произведения матриц.

Установим связь элементов орбиты с начальными параметрами орбитального движения (параметрами в конце активного участка). В качестве начальных параметров (рис. 1.7) воспользуемся следующими координатами точки M_0 : модуль вектора $\bar{r}_0$, прямое восхождение α_0 и склонение δ_0 , а также координатами вектора $\bar{V}_0$: модуль вектора V_0 , угол θ_{V0} его наклона к местному горизонту (плоскости, перпендикулярной к вектору $\bar{r}_0$), азимут β_0 вектора скорости $\bar{V}_0$ (угол, отсчитываемый в плоскости местного горизонта, от направления на северный полюс P_N оси мира до проекции вектора $\bar{V}_0$). Введенные угловые параметры могут изменяться в следующих пределах:



$$\begin{aligned} 0^\circ &\leq \alpha_0 \leq 360^\circ, \\ -90^\circ &\leq \delta_0 \leq 90^\circ, \\ -90^\circ &\leq \theta_{V0} \leq 90^\circ, \\ 0^\circ &\leq \beta_0 \leq 360^\circ. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Рис. 1.7. Параметры начальной точки орбитального движения:

1—невращающаяся сфера радиусом r_0 ; 2—сечение сферы плоскостью экватора; 3—сечение сферы плоскостью меридиана; 4—проекция орбиты на сферу

Для большой полуоси, фокального параметра и эксцентриситета соответствующие соотношения (1.14), (1.10) и (1.11) уже получены. Необходимое соотношение для t_n можно получить, используя равенство (1.34) совместно с (1.27), (1.28) и (1.29). Будем считать, что космический аппарат выводится в перигей орбиты (такой вывод осуществляется с минимальными энергетическими затратами), тогда для первого орбитального участка можно принять $t_n = t_0$.

Чтобы выразить остальные элементы через начальные условия, обратимся к рис. 1.7. Из прямоугольного сферического треугольника BM_0E имеем

$$\operatorname{tg}(\omega + \vartheta_0) = \operatorname{tg} u_0 = \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{\cos \beta_0}, \quad (1.39)$$

$$\cos i = \cos \delta_0 \sin \beta_0, \quad (1.40)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_0 - \Omega) = \sin \delta_0 \operatorname{tg} \beta_0. \quad (1.41)$$

В том случае, когда начало орбитального движения совпадает с конечной точкой последнего активного участка ракеты-носителя при выведении космического аппарата (рассматри-

вается первый орбитальный участок), вместо α_0 и δ_0 в качестве угловых координат вектора $\vec{r}_0$ можно использовать геоцентрическую широту φ_{r0} и географическую долготу * λ_{r0} точки вывода. Зная эти координаты, также можно определить элементы орбиты, используя выражения (1.39), (1.40) и (1.41), с учетом следующих равенств:

$$\begin{aligned}\varphi_{r0} &= \delta_0, \\ \lambda_{r0} &= \alpha_0 + S_{rp},\end{aligned}\tag{1.42}$$

где S_{rp} — гринвичское звездное время, которое может быть найдено на заданный момент времени в астрономических справочниках.

Рассмотрим некоторые частные случаи орбит при запуске космического аппарата. Как видно из полученных выражений, при $\beta_0 = 0$ (космический аппарат запускается строго на север) $\Omega = \alpha_0$, $i = 90^\circ$, $u_0 = \varphi_{r0}$, а при $\beta_0 = 180^\circ$ (запуск в южном направлении) $\Omega = \alpha_0 + 180^\circ$, $i = 90^\circ$, $u_0 = 180^\circ - \varphi_{r0}$. Если $\beta_0 = 90^\circ$ (запуск в восточном направлении), то $\Omega = \alpha_0 - 90^\circ$, $i = \varphi_{r0}$, $u_0 = 90^\circ$. Полученное при этом наклонение орбиты, равное широте точки старта, является минимальным для заданной точки старта. В случае $\beta_0 = 270^\circ$ (западный запуск), то $\Omega = \alpha_0 + 90^\circ$, $i = 180^\circ - \varphi_{r0}$, $u_0 = 90^\circ$. Если космический аппарат запускается с экватора ($\varphi_{r0} = 0$), то $\Omega = \alpha_0$, $i = 90^\circ - \beta_0$, $u_0 = 0$. При запуске с северного полюса ($\varphi_{r0} = 90^\circ$) имеем $i = 90^\circ$. Долготу же восходящего узла в этом случае определить с помощью выражения (1.43) не представляется возможным, так как азимут вектора скорости β_0 теряет смысл так же, как и α_0 . Если же точка выведения космического аппарата находится не строго на полюсе, а вблизи него, то $\Omega = \alpha_0 - \beta_0$.

Возмущения геоцентрической орбиты. В реальном полете на космический аппарат, помимо силы тяготения Земли, действует целый ряд других сил, в частности, сопротивление атмосферы, притяжение Солнца и Луны. Кроме того, как уже отмечалось выше, Земля не является однородным сферическим телом. Поэтому ее поле не будет строго центральным. Все отмеченные факторы приводят к отклонениям траектории полета от рассмотренной идеальной орбиты (кривой второго порядка). Правда эти отклонения невелики ввиду относительной малости возмущающих сил. Поэтому реальную траекторию в каждой ее точке заменяют идеальной орбитой, которая касается реальной траектории (оскулирует) в рассматриваемой точке. В результате действие возмущающих сил сводится к изменению элементов оскулирующей орбиты.

* Географическая широта, представляющая собой угол наклона нормали к поверхности земного эллипсоида относительно плоскости экватора, не совпадает с геоцентрической широтой, тогда как географическая долгота равна геоцентрической долготы.

Возмущения орбиты на небольших участках полета, как правило, очень малы и их можно не учитывать. Однако ряд возмущений имеет тенденцию накапливаться во время полета, что постепенно приводит к значительному отклонению элементов орбиты от их первоначальных значений. Такие возмущения принято называть *вековыми* возмущениями орбиты. Вековые возмущения свойственны эллиптическим орбитам, так как полет по ним может продолжаться в течение очень длительного времени. Гиперболические орбиты возмущаются очень незначительно, если не считать участков полета, находящихся на больших удалениях от Земли, когда начинает сильно сказываться притяжение со стороны Солнца. Однако этот вопрос представляет самостоятельный интерес.

Рассмотрим возмущения, вызываемые несферичностью Земли. Обычно отклонение от сферической формы (несферичность) учитывают в виде сжатия (сплюснутости) Земли вдоль полюсов. В этом случае на космический аппарат наряду с силой тяготения $\bar{F}_g$, создаваемой идеальным центральным полем, будет действовать возмущающая сила $\bar{F}_{gB}$.

Под действием этой возмущающей силы эллиптическая орбита испытывает вековые возмущения в виде поворота линии узлов в сторону, противоположную вращению Земли (это возмущение называют прецессией орбиты, или регрессией линии узлов), и поворота радиуса-вектора точки перигея. Таким образом, за счет сжатия Земли испытывают вековые возмущения такие элементы, как долгота восходящего узла и аргумент перигея. Их изменения определяются формулами [36]

$$\frac{d\Omega}{dn} = -\frac{2\pi\epsilon}{\mu p^2} \cos i, \quad (1.43)$$

$$\frac{d\omega}{dn} = \frac{\pi\epsilon}{\mu p^2} (5 \cos^2 i - 1), \quad (1.44)$$

где n — количество оборотов космического аппарата по орбите вокруг Земли.

Из формулы (1.43) видно, что скорость прецессии орбиты зависит от наклонения. Ее величина максимальна для орбит, близких к экваториальной (для чисто экваториальной орбиты само понятие восходящего узла теряет смысл), и равна нулю для полярных орбит. Анализ формулы (1.44) показывает, что при наклонении орбиты $i = 63^\circ,5$ вековое возмущение аргумента перигея отсутствует, а при переходе через это значение изменяется направление движения перигея. Так, при $i < 63^\circ,5$ аргумент перигея увеличивается (перигей смещается по направлению движения аппарата), а при $i > 63^\circ,5$ аргумент перигея уменьшается (перигей смещается против движения аппарата).

Наряду с вековыми возмущениями, определяемыми формулами (1.43) и (1.44), сжатие вызывает также периодические

возмущения всех элементов орбиты с частотой, равной или крат-
ной частоте обращения.

Однако эти возмущения по причине их малости обычно не
учитывают.

На орбитальное движение космического аппарата в поле
земного тяготения существенное возмущающее воздействие ока-
зывает также сопротивление атмосферы, особенно на малых
высотах. Как известно, величина силы сопротивления, создавае-
мой атмосферой, пропорциональна квадрату воздушной скорости
(скорости движения аппарата относительно воздушных масс).
Вектор воздушной скорости определяется равенством:

$$\bar{V}_в = \bar{V} - \bar{V}_{ат},$$

где $\bar{V}$ — скорость движения космического аппарата по орбите;
 $\bar{V}_{ат}$ — скорость движения атмосферы за счет вращения ее
вместе с Землей,

или в проекциях на оси орбитальной системы координат

$$\bar{V}_в = V_x \bar{i}_0 + V_y \bar{j}_0 + V_z \bar{k}_0,$$

Здесь $\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0$ — единичные векторы орбитальной системы коор-
динат;

$$V_x = V \cos \theta_V - V_{ат x},$$

$$V_y = V \sin \theta_V,$$

$$V_z = V_{ат z}.$$

Угол наклона вектора орбитальной скорости к горизонту (0)
может быть найден с помощью равенства (1.6). После подста-
новки в это равенство выражений (1.8), (1.9) и (1.20) находим

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_V &= \frac{1 + e \cos \vartheta}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \vartheta}}, \\ \sin \theta_V &= \frac{e \sin \vartheta}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \vartheta}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

Если считать, что все слои атмосферы увлекаются Землей и вра-
щаются с угловой скоростью ω_3 , то вектор $\bar{V}_{ат}$ будет направлен
вдоль параллели, а его величина может быть подсчитана по
формуле

$$V_{ат} = \omega_3 r \cos \varphi_1.$$

Тогда составляющие $V_{ат}$ по осям орбитальной системы координат

$$V_{ат x} = V_{ат} \sin \beta, \quad V_{ат z} = V_{ат} \cos \beta$$

на основании сферического треугольника BM_0E (см. рис. 1.7)
с учетом выражений (1.39) и (1.40), которые справедливы не
только для начальной, но и для любой точки орбиты, примут вид

$$V_{ат x} = \omega_3 r \cos i, \quad V_{ат z} = \omega_3 r \sin i \cos u.$$

Следовательно, вращение атмосферы приводит к уменьшению составляющей воздушной скорости вдоль оси O_3x_0 на постоянную величину и не меняет характера возмущений элементов орбиты, полученных без учета вращения атмосферы. Изменяется лишь величина возмущений элементов орбиты на несколько процентов, по сравнению с возмущениями от невращающейся атмосферы.

Возмущения, вызываемые составляющей воздушной скорости по оси O_3x_0 , носят следующий характер. Происходит уменьшение большой полуоси орбиты и эксцентриситета. При этом сравнительно быстрее уменьшается высота апогея. Последнее объясняется тем, что основное торможение космического аппарата происходит в перигее орбиты (больше скорость и меньше высота). Уменьшение кинетической энергии в перигее преобразуется в соответствующее уменьшение потенциальной энергии в апогее, что выражается в уменьшении высоты. В апогее поле тяготения более слабое, чем в перигее. Поэтому, даже если бы уменьшение кинетической энергии в перигее и апогее было одинаковым, высота в апогее изменялась бы скорее. Это обстоятельство дополнительно способствует более быстрому уменьшению высоты в апогее.

В результате эллиптическая орбита как бы стремится к круговой. Однако это стремление следует понимать условно, так как высота перигея тоже уменьшается и это уменьшение происходит все быстрее по мере того, как высота апогея становится сравнимой с высотой перигея. Правильнее говорить об асимптотическом уменьшении эксцентриситета.

В результате уменьшения большой полуоси уменьшается и период обращения космического аппарата. На основании формулы (1.24) имеем

$$\frac{dT}{dn} = \frac{3T}{2a} \frac{da}{dn}.$$

Одновременно увеличивается средняя скорость полета V_{Ia} .

Боковая составляющая воздушной скорости $V_{атз}$, обусловленная вращением атмосферы, приводит к появлению боковой возмущающей аэродинамической силы

$$F_z = \frac{c_{x\delta} S_{\delta} \rho}{2} (\omega_3 r)^2 \sin^2 i |\cos u| \cos u,$$

где $c_{x\delta}$ — коэффициент боковой аэродинамической силы;

S_{δ} — площадь, к которой отнесен $c_{x\delta}$.

Эта сила меняет свой знак при переходе космического аппарата через точки с аргументами широты $u_1 = 90^\circ$ и $u_2 = 270^\circ$ (эти точки принято называть точками вертекса орбиты). Наибольшая боковая сила имеет место при полярных орбитах. Для экваториальной орбиты она равна нулю.

Наличие боковой аэродинамической силы приводит к вековому возмущению наклонения орбиты

$$\frac{di}{dn} = -\frac{4}{3} \frac{r_0}{\chi_z V^2} (\omega_3 r)^2 \sin^2 i, \quad (1.46)$$

где

$$\chi_z = \frac{m/S_\delta}{c_{x\delta}}.$$

Из формулы (1.46) видно, что за счет вращения атмосферы орбита имеет тенденцию приблизиться к экваториальной. Правда, эта тенденция выражена очень слабо. Расчеты по этой формуле показывают, что для высоты полета 250 км при $i=90^\circ$ имеем $di/dn \simeq -2,33 \cdot 10^{-4}$ град/об. Следовательно, для изменения наклонения на 1° на этой высоте потребуется около одного года, что соизмеримо с временем существования спутника на такой высоте. Это возмущение имеет существенное значение лишь при очень малых высотах космического полета. Например, в полете по круговой орбите с высотой 70 км $di/dn \simeq -0,134$ град/об; и при $n \simeq 7$ наклонение уменьшается примерно на 1° .

Возмущения орбиты за счет притяжения космического аппарата Солнцем для высот, существенно меньших средней высоты орбиты Луны, незначительны [36] и ими пренебрегают. Возмущения орбиты, не проходящей в непосредственной близости от Луны, полем тяготения последней также незначительно.

§ 1.3. ОРБИТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

На траекторию полета межпланетного космического аппарата, строго говоря, влияют поля тяготения всех небесных тел, входящих в солнечную систему: центрального тела — Солнца, планет, астероидов (малых планет), комет и метеоритных роев (скопление мелких частиц). Поля тяготения всех тел, кроме Солнца, при этом являются подвижными за счет их движения вокруг Солнца. Поэтому строгое решение уравнений движения с учетом всех указанных полей представляет чрезвычайно сложную задачу, известную в небесной механике как задача многих тел.

Однако многие поля можно исключать из рассмотрения по причине малости создаваемых ими ускорений. На отдельных участках траектории даже оказывается возможным учитывать поле тяготения лишь одного небесного тела. Для того чтобы правильно учитывать поле тяготения того или иного небесного тела, входящего в солнечную систему, кратко рассмотрим основные характеристики солнечной системы.

Солнечная система состоит из центрального тела — Солнца, девяти планет (их еще называют большими планетами): Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун и

Плутон, астероидов (малых планет), комет и метеоритных роев. Полагают, что в солнечной системе существует 50—100 тысяч астероидов и более 100 тысяч комет. Основные характеристики Солнца и некоторых планет приведены в табл. 1.3 [13, 51].

Таблица 1.3

Небесное тело	Отношение массы планеты к массе Земли	g_0/g_{03}	Средний радиус км	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты
Солнце	$3,325 \cdot 10^5$	27,9	695300	25, 38 суток	$\sim 7^\circ 15' **$
Земля	1,000	1,00	6371	23 час 56 мин 04 сек	$23^\circ 21' 45''$
Венера	0,814	0,87	6175	22 час 17 мин*	$32^\circ *$
Марс	0,107	0,38	3370	24 час 37 мин 23 сек	$24^\circ 48'$

* Значения параметров в настоящее время точно не установлены.

** Отсчет от плоскости эклиптики.

Все планеты движутся по эллиптическим орбитам, обладающим малым эксцентриситетом, с фокусом в центре Солнца. Значения элементов планетных орбит для Земли, Марса и Венеры (наиболее вероятных пунктов назначения в межпланетных полетах ближайшего будущего) приведены в табл. 1.4 [13], [51]. Следует при этом учитывать, что элементы орбит отсчитываются в гелиоцентрической системе координат.

Таблица 1.4

Планета	a $a. e.$	e	ω $град$	Ω $град$	i $град$	$\lambda_{сер}$ $град$	Годичные изменения	
							$\Delta \omega$ $град$	$\Delta \Omega$ $град$
Земля	1,00000	0,01673	102,080	—	0,000	99,096	+1,03	—
Венера	0,72333	0,00680	54,638	76,230	3,394	80,771	+0,30	+0,54
Марс	1,52369	0,09336	285,967	49,172	1,850	144,061	+0,64	+0,46

Примечания. 1. Величины большой полуоси даны в астрономических единицах $a. e.$ Согласно последним данным $1 a. e. = 149\,599\,300$ км.

2. Все элементы даны на начало 1950 г.

3. $\lambda_{сер}$ —средняя долгота в начальную эпоху (начало 1950 г.).

Как видно из табл. 1.4, орбиты планет имеют малый эксцентриситет и малое наклонение. Поэтому в первом приближении их

можно считать круговыми орбитами. Для более точного анализа в ряде случаев достаточно учесть первую гармонику в выражениях для параметров орбитального движения. При определении элементов, характеризующих размеры и форму орбит, иногда считают, что они расположены в плоскости эклиптики.

Область преобладания и сфера действия небесного тела. В целях более четкого деления траектории межпланетного полета (или полета к Луне) на участки и определения поля тяготения, которое является определяющим на том или ином участке, вводятся понятия области преобладания и сферы действия поля,

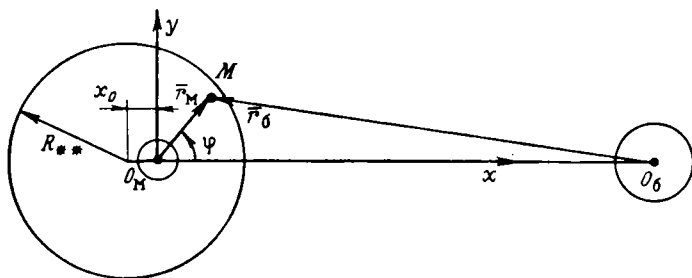


Рис. 1.8. К определению сферы преобладающего притяжения малого тела

создаваемого малым небесным телом относительно большого небесного тела. В межпланетных полетах в качестве малого небесного тела принимают планеты, а большого — Солнце. При полетах к Луне последняя является малым телом, а Земля — большим.

Пусть имеется два однородных сферических небесных тела: большое с массой M_6 и малое с массой M_m , расположенные на удалении L (рис. 1.8). Определим область, в пределах которой величина гравитационного ускорения $\bar{g}_m$, создаваемого малым телом, больше величины гравитационного ускорения $\bar{g}_6$, создаваемого большим телом, т. е. область, в которой выполняется условие $|\bar{g}_m| > |\bar{g}_6|$. Это и есть условие, определяющее область преобладания или область преобладающего действия поля тяготения малого небесного тела.

Введем систему координат O_mxyz , начало которой совместим с центром O_m малого тела, а ось O_mx направим в центр большого тела. Положение осей O_my и O_mz может быть произвольным. Для определенности совместим плоскость O_mxy с плоскостью рис. 1.8. Область преобладания будет ограничена некоторой поверхностью, которая определяется уравнением

$$|\bar{g}_m| = |\bar{g}_6|. \quad (1.47)$$

Искомая поверхность будет пересекать плоскость O_mxy по некоторой кривой, которая также определяется уравнением (1.47)

Если ввести радиусы-векторы $\vec{r}_M$ и $\vec{r}_6$, определяющие положение произвольной точки M на этой кривой относительно O_M и O_6 , соответственно, то уравнение (1.47) можно представить в виде

$$\frac{f M_M}{r_M^2} = \frac{f M_6}{r_6^2},$$

или

$$M_6 r_M^2 = M_M r_6^2.$$

На основании рис. 1.8 имеем

$$r_6^2 = r_M^2 + L^2 - 2Lr_M \cos \varphi.$$

Тогда после перехода от полярных координат r_M и φ к прямоугольным координатам x и y уравнение искомой кривой примет вид

$$x^2 + y^2 + 2 \frac{LM_M}{M_6 - M_M} x - \frac{L^2 M_M}{M_6 - M_M} = 0.$$

Это есть уравнение окружности, центр которой имеет координаты

$$x_0 = -\frac{LM_M}{M_6 - M_M}, \quad y_0 = 0.$$

Радиус окружности равен

$$R_{**} = L \frac{\sqrt{M_M (M_6 - 2M_M)}}{M_6 - M_M}. \quad (1.48)$$

Так как ориентация осей $O_M y$ и $O_M z$ относительно малого небесного тела выбрана произвольно, поверхность, ограничивающая область преобладания, будет сферой с радиусом R_{**} и указанными выше координатами центра. Учитывая, что $M_M \ll M_6$ (см табл. 1.3) величиной x_0 можно пренебречь и считать, что центр сферы преобладания совпадает с центром малого небесного тела.

Поля тяготения малого и большого небесных тел не только действуют на космический аппарат, находящийся в некоторой точке пространства, но и друг на друга, в результате чего малое небесное тело движется относительно большого небесного тела по эллиптической орбите (система координат на рис. 1.8 не является неподвижной, а вращается вокруг точки O_6). Поэтому в качестве характеристики условий полета космического аппарата считается более правильным пользоваться не областью преобладания, а сферой действия поля тяготения малого небесного тела.

Если рассматривать движение космического аппарата в системе координат, связанной с малым телом (например, в геоцентрической системе координат), то его траектория невозмущен-

ного движения определяется ускорением $\bar{g}_M$. Большое тело будет оказывать возмущающее воздействие с ускорением

$$\bar{g}_{B.B} = \bar{g}_B - \bar{g}_{B.M},$$

где $\bar{g}_{B.M}$ — гравитационное ускорение, действующее со стороны большого небесного тела на малое.

Степень возмущающего воздействия большого тела на движение аппарата относительно малого тела будет зависеть от отношения возмущающего ускорения к гравитационному ускорению, создаваемому малым телом, т. е.

$$\frac{|\bar{g}_{B.B}|}{|\bar{g}_M|} = \frac{|\bar{g}_B - \bar{g}_{B.M}|}{|\bar{g}_M|}.$$

Если же рассматривать движение космического аппарата в системе координат, связанной с большим небесным телом (например, в гелиоцентрической системе координат), то возмущающее воздействие будет оказывать малое тело. При этом возмущающее ускорение будет

$$\bar{g}_{B.M} = \bar{g}_M - \bar{g}_{M.B},$$

где $\bar{g}_{M.B}$ — гравитационное ускорение, действующее со стороны малого небесного тела на большое.

Соответствующая степень возмущающего воздействия определится аналогично предыдущему случаю как

$$\frac{|\bar{g}_{B.M}|}{|\bar{g}_B|} = \frac{|\bar{g}_M - \bar{g}_{M.B}|}{|\bar{g}_B|}.$$

Сферой действия малого небесного тела (например, Земли) или какой-либо другой планеты по отношению к большому небесному телу (например, Солнцу) принято считать границу области, в пределах которой степень возмущающего воздействия большого тела на движение космического аппарата в системе координат, связанной с малым небесным телом, меньше, чем степень возмущающего воздействия малого тела на движение космического аппарата в системе координат, связанной с большим телом. Следовательно, равенство

$$\frac{|\bar{g}_M - \bar{g}_{M.B}|}{g_B} = \frac{|\bar{g}_B - \bar{g}_{B.M}|}{g_M}$$

является уравнением сферы действия малого небесного тела. Решение этого уравнения позволяет найти радиус сферы действия

$$R_* = L \left(\frac{M_M}{M_B} \right)^{2/5}. \quad (1.49)$$

Значения радиусов области преобладания и сферы действия, подсчитанные в соответствии с формулами (1.48) и (1.49) для некоторых небесных тел, приведены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Участки траектории межпланетного полета. По принципу сферы действия траекторию межпланетного полета можно разделить на три следующих участка:

1) полет в сфере действия планеты отправления;

2) полет в поле тяготения Солнца;

3) полет в сфере действия планеты назначения.

Роль планеты отправления вначале играет Земля, а при обратном полете — та планета, на которую выполнялся полет, Земля уже играет роль планеты назначения. Поскольку в процессе полета в поле тяготения Солнца космический аппарат покрывает несоизмеримо большее расстояние и длительность полета на этом участке также является максимальной (она близка к общему времени полета), этот участок принято называть основным участком межпланетного полета. Ввиду того что полеты в прямом и обратном направлении в принципе аналогичны, в последующем будем рассматривать лишь прямой полет (с Земли на планету назначения), имея в виду, что для обратного полета в последующем анализе Землю и планету назначения достаточно поменять местами.

Полет в сфере действия Земли выполняется по гиперболической орбите, фокус которой находится в центре Земли. Вывод космического аппарата на эту орбиту осуществляется либо непосредственно с Земли, либо с промежуточной орбиты спутника Земли, которую будем называть стартовой орбитой. Конечная точка этого участка определяется пересечением гиперболы со сферой действия. Ее положение в гелиоцентрической системе координат (начало в центре Солнца) определяется радиусом-вектором $\vec{r}_0$ (рис. 1.9).

Небесное тело	R^{**} млн. км	R^* млн. км
Земля	0,26	0,93
Венера	0,169	0,62
Марс	0,129	0,58
Луна	0,043	0,036

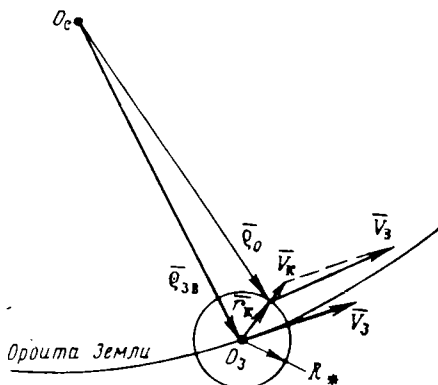


Рис. 1.9. Выход из сферы действия Земли

На границе сферы действия космический аппарат будет также иметь определенную скорость $\bar{V}_K$, которая является конечной для полета по гиперболической орбите. Ее величина на основании выражения (1.32) при $r=R_{*3}$ будет

$$V_K = V_{1R} \sqrt{R \left(\frac{2}{R_{*3}} + \frac{1}{a_\Gamma} \right)}. \quad (1.50)$$

Гелиоцентрическая скорость космического аппарата при выходе из сферы действия Земли называется его *выходной* скоростью $\bar{V}_B$. Эта скорость определяется выражением

$$\bar{V}_B = \bar{V}_3 + \bar{V}_K. \quad (1.51)$$

Здесь V_3 — скорость Земли; вектор $\bar{V}_K$ задан в гелиоцентрической системе координат. Его величина определяется формулой (1.50), а направление совпадает с асимптотой к гиперболе и легко может быть найдено в геоцентрической системе координат с помощью формулы (1.33) и равенств (1.35), (1.36). При определении вектора выходной скорости по формуле (1.51) найденный вектор $\bar{V}_K$ необходимо предварительно преобразовать к гелиоцентрической системе координат.

Векторы $\bar{q}_0$ и $\bar{V}_B$ определяют начальные условия для основного участка траектории межпланетного полета, а следовательно, и элементы его орбиты. Поэтому основное назначение первого участка состоит в том, чтобы обеспечить необходимое сочетание $\bar{q}_0$ и $\bar{V}_B$. Это достигается правильным выбором элементов гиперболической орбиты, а также времени старта космического аппарата, которое определяет величину и направление вектора $\bar{q}_{3n}$ (см. рис. 1.9), т. е. положение Земли в момент выхода космического аппарата из ее сферы действия, и истинную аномалию, соответствующую указанному моменту.

Чтобы максимально использовать орбитальную скорость Земли для достижения необходимой выходной скорости V_B , что обеспечивает меньшее потребное значение V_K и соответственно меньшие затраты топлива при выводе космического аппарата на гиперболическую орбиту, целесообразно выбрать такую орбиту, чтобы направление конечной скорости было близко к направлению V_3 . При этом вектор $\bar{r}_K$ также будет направлен под небольшим углом к вектору $\bar{V}_3$, который почти перпендикулярен $\bar{q}_{3n}$. Если к этому добавить, что R_{*3}/ϵ_{3n} составляет величину менее одного процента (см. табл. 1.4 и 1.5), то в первом приближении можно принять

$$\bar{q}_0 \simeq \bar{q}_{3n}. \quad (1.52)$$

Основным участком траектории межпланетного полета является кривая второго порядка (как правило, эллипс) с фокусом в центре Солнца. В процессе движения по этому участку траек-

тории осуществляется межпланетный перелет, т. е. переход космического аппарата из сферы действия планеты отправления в сферу действия планеты назначения. Поэтому соответствующую орбиту космического аппарата называют орбитой межпланетного перелета. Для успешного выполнения основной задачи межпланетного полета необходимо выполнить два условия:

1) орбита межпланетного перелета должна пересекаться с орбитой планеты назначения;

2) космический аппарат должен прибыть в точку пересечения орбит одновременно с планетой.

Таким образом, назначение основного участка межпланетного полета состоит в обеспечении условий встречи космического аппарата с планетой назначения.

Плоскость орбиты межпланетного перелета определяется двумя векторами: $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$. Вектор $\bar{q}_1$ располагается в плоскости орбиты планеты отправления и определяется положением последней в момент выхода космического аппарата из ее сферы действия; он должен равняться вектору $\bar{q}_0$. Вектор $\bar{q}_2$ располагается в плоскости орбиты планеты назначения и определяется ее положением в момент входа космического аппарата в сферу действия планеты.

Так как законы движения планет во времени, определяемые элементами их орбит (см. табл. 1.4), известны, взаимное положение векторов $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$ и их величины могут быть заранее определены для любого момента времени. Поэтому для каждого момента времени можно найти потребные элементы орбиты межпланетного перелета. Так, наклонение орбиты равно углу между нормалью к плоскости орбиты и перпендикуляром к плоскости эклиптики, определяемым единичным вектором $\bar{e}_3$. Единичный вектор нормали к плоскости орбиты определится выражением

$$\bar{e}_n = \frac{\bar{q}_1 \times \bar{q}_2}{|\bar{q}_1 \times \bar{q}_2|}.$$

Следовательно, потребное наклонение орбиты будет

$$i = \arccos \frac{\bar{q}_1 \times \bar{q}_2}{|\bar{q}_1 \times \bar{q}_2|} \bar{e}_3. \quad (1.53)$$

Заметим, что изменение величины и направления векторов $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$ определяется уравнением (1.9) в орбитальной системе координат соответствующей планеты. Поэтому для вычисления произведений векторов в формуле (1.53) необходимо предварительно осуществить приведение этих векторов к инерциальной гелиоцентрической системе координат с помощью матриц, аналогичных по структуре A_1 , A_2 , A_3 в выражениях (1.35), (1.36) и (1.37), составленных применительно к рассматриваемым планетам.

Остальные элементы: фокальный параметр орбиты, аргумент перигелия и эксцентриситет находятся с помощью системы уравнений:

$$\begin{aligned} p &= \frac{q_1^2 V_b^2 \cos^2 \theta_{V0}}{g_c R_c^2}, \\ q_1 &= \frac{p}{1 + e \cos \omega}, \\ q_2 &= \frac{p}{1 + e \cos (\Delta\theta - \omega)}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

где R_c — радиус Солнца;

g_c — ускорение на его поверхности;

$\Delta\theta$ — угловое расстояние между векторами $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ в плоскости орбиты.

Уравнения (1.54) легко получить, если принять в формуле (1.10) $r_0 = q_1$, $V_0 = V_b$, $\mu = g_c R_c^2$, а также записать выражение (1.9) для начальной и конечной точек орбиты перелета, считая начальную точку восходящим узлом этой орбиты.

При входе в сферу действия планеты назначения космический аппарат имеет гелиоцентрическую скорость $V_{г.к.}$. С этого момента начинается последний, третий, участок траектории межпланетного полета. Для изучения дальнейшего движения космического аппарата необходимо выполнить переход от гелиоцентрической к планетоцентрической системе координат. Характер последующего движения будет целиком определяться скоростью космического аппарата в системе координат, связанной с планетой.

Планетоцентрическая скорость космического аппарата на границе сферы действия планеты назначения называется *входной* скоростью. Входную скорость будем определять в инерциальной планетоцентрической системе координат

$$\vec{V}_{вх} = \vec{V}_{г.к.} - \vec{V}_п, \quad (1.55)$$

где $\vec{V}_п$ — вектор скорости планеты.

Траектория последующего движения является гиперболической орбитой, расположенной в плоскости, проходящей через центр планеты и вектор скорости $\vec{V}_{вх}$. Элементы этой орбиты определяются вектором $\vec{V}_{вх}$. Необходимые значения элементов определяются конкретным назначением космического аппарата. Ориентация орбиты относительно планеты, по-видимому, не имеет особого значения, по крайней мере, на первых этапах межпланетных полетов (тем более, что обеспечение определенной ориентации этой орбиты является исключительно сложной проблемой с точки зрения управления). Поэтому будем считать, что такие элементы, как Ω , i и ω могут быть произвольными.

Рассмотрим характер движения в плоскости орбиты (рис. 1.10). В зависимости от $V_{вх}$ и угла входа $\theta_{вх} = \theta_{V0}$ (здесь

$\theta_{\gamma 0}$ — угол наклона $\bar{V}_{\text{вх}}$ к местному горизонту на границе сферы действия) получим семейство гиперболических орбит с различным значением $r_{\text{п}}$ (расстояние от центра $O_{\text{п}}$ планеты до перигея), потребное значение которого определяется характером рассматриваемой задачи.

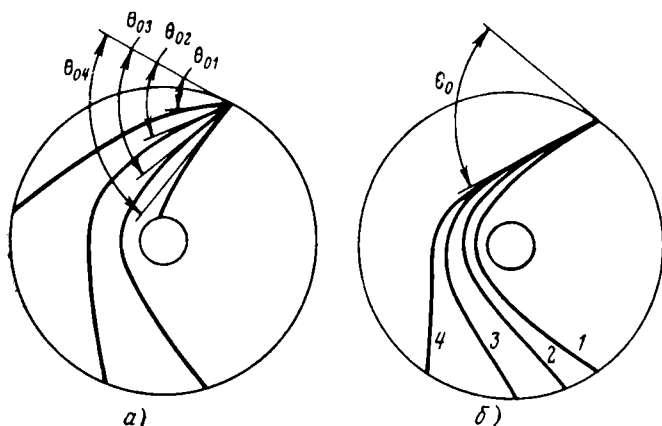


Рис. 1.10. Семейство гиперболических орбит облета:

а) $V_{\text{вх}} = \text{const}$; $\theta_{01} < \theta_{02} < \theta_{03} < \theta_{04}$;

б) $\theta_0 = \text{const}$; $V_{\text{вх}1} < V_{\text{вх}2} < V_{\text{вх}3} < V_{\text{вх}4}$

1. При решении задачи простого попадания в планету расстояние до перигея должно удовлетворять условию

$$0 \leq r_{\text{п}} \leq R. \quad (1.56)$$

2. Если решается задача посадки на планету непосредственно с гиперболической орбиты, то величина радиуса-вектора в перигее выбирается из условий

$$R + H_{p1} \leq r_{\text{п}} \leq R + H_{p2}, \quad (1.57)$$

где H_{p1} и H_{p2} — определяются из условий обеспечения захвата аппарата атмосферой, а также обеспечения допустимых термических и динамических нагрузок на космический аппарат в процессе торможения атмосферой (определяются величиной скорости в перигее и углом входа космического аппарата в атмосферу).

3. Для вывода космического аппарата на орбиту спутника планеты в заданном диапазоне высот без торможения в атмосфере необходимо выполнить условия

$$R + H_{\text{э.а}} \leq r_{\text{п}} \leq R + H_3, \quad (1.58)$$

где H_3 — максимальная желаемая высота орбиты спутника планеты;

$H_{\text{э.а}}$ — высота «эффективной» атмосферы.

4. При решении задачи одноразового облета планеты по гиперболической орбите достаточно выполнить условие

$$R + H_{\text{э.а}} \leq r_{\text{п}} < R_*, \quad (1.59)$$

где R_* — максимально допустимое расстояние облета.

Таким образом, в зависимости от назначения космического аппарата задача управления состоит в том, чтобы обеспечить выполнение одного из условий (1.56), (1.57), (1.58) или (1.59). Ввиду большой важности $r_{\text{п}}$ и $V_{\text{п}}$ выразим их через начальные условия входа в сферу действия. На основании выражения (1.9) при $\vartheta=0$ имеем

$$r_{\text{п}} = \frac{p}{1+e}.$$

Подставляя в это равенство выражения (1.10) и (1.11) и выполняя несложные преобразования с учетом формулы (1.17), находим

$$r_{\text{п}} = \frac{v_{\text{нх}}^2 \tilde{R}_*^2 \cos^2 \theta_{V0}}{1 + \sqrt{1 + v_{\text{нх}}^2 \tilde{R}_*^2 \left(v_{\text{нх}}^2 - \frac{2}{\tilde{R}_*} \right) \cos^2 \theta_{V0}}} R, \quad (1.60)$$

где

$$v_{\text{нх}} = \frac{V_{\text{нх}}}{V_{\text{IR}}}, \quad \tilde{R}_* = \frac{R_*}{R}.$$

На основании формулы (1.32) имеем

$$V_{\text{п}} = V_{\text{нх}} \sqrt{\frac{R_*}{r_{\text{п}}} \left(\frac{2a_{\Gamma} + r_{\text{п}}}{2a_{\Gamma} + R_*} \right)}.$$

Подставляя сюда выражения (1.31) и (1.60), после преобразований, аналогичных предыдущим, получим

$$V_{\text{п}} = V_{\text{нх}} \sqrt{\frac{2\tilde{R}_* \left[1 + \sqrt{1 + v_{\text{нх}}^2 \tilde{R}_*^2 \left(v_{\text{нх}}^2 - \frac{2}{\tilde{R}_*} \right) \cos^2 \theta_{V0}} \right]}{v_{\text{нх}}^2 \left[v_{\text{нх}}^2 \tilde{R}_* + 2(\tilde{R}_*^2 - 1) \cos^2 \theta_{V0} \right]} + \frac{v_{\text{нх}}^2 (v_{\text{нх}}^2 \tilde{R}_* - 2) \cos^2 \theta_{V0}}{v_{\text{нх}}^2 \left[v_{\text{нх}}^2 \tilde{R}_* + 2(\tilde{R}_*^2 - 1) \cos^2 \theta_{V0} \right]}}.$$

Определим угол θ_{V0} , удовлетворяющий условию (1.56). Как видим из выражения (1.60), $r_{\text{п}}=0$ при $\theta_0=90^\circ$ (полет по прямой, проходящей через центр планеты). Угол θ_0 , соответствующий $r_{\text{п}}=R$, должен удовлетворять равенству

$$\cos^2 \theta_{V0 \text{ min}} = \frac{v_{\text{нх}}^2 \tilde{R}_* + 2(\tilde{R}_* - 1)}{v_{\text{нх}}^2 \tilde{R}_*^3}. \quad (1.61)$$

Графики $\theta_{вх} = \theta_{v0 \min}$ в зависимости от $v_{вх}$ для Земли, Луны, Венеры и Марса представлены на рис. 1.11. Значения $\theta_{вх}$, которые обеспечивают попадание в планету, заключены в области,

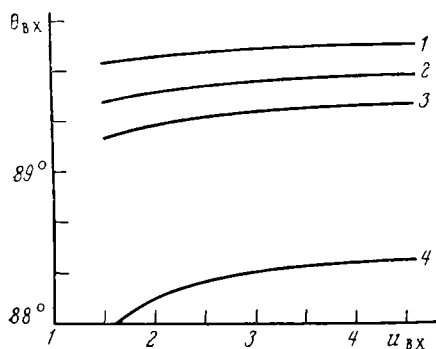


Рис. 1.11. Углы входа в сферу действия, обеспечивающие попадание в небесное тело:

1—Марс; 2—Земля; 3—Венера; 4—Луна

ограниченной прямой $\theta_{вх} = 90^\circ$ и соответствующим графиком. Как видно из графиков, для попадания в планету требуются углы входа, очень близкие к 90° . Даже для Луны диапазон изменения этого угла невелик — примерно $1,5^\circ$.

ГЛАВА II

Основы орбитального маневрирования

§ 2.1. ВИДЫ ОРБИТАЛЬНЫХ МАНЕВРОВ

Управляемое движение космического аппарата, в результате которого происходит изменение орбиты или траектории его полета, называется маневром. В зависимости от функционального назначения выполняемого аппаратом маневра принято различать:

- маневры орбитального перехода;
- корректирующие маневры;
- маневры входа в атмосферу планеты;
- маневры снижения и посадки.

Под маневром орбитального перехода понимается такое управляемое движение, которое обеспечивает переход аппарата с одной орбиты на другую.

Маневры орбитального перехода, выполняемые при решении конкретных задач управления движением космического аппарата, часто имеют свое название. Так, при использовании промежуточной орбиты спутника для запуска космического аппарата к Луне, Венере или Марсу переход аппарата на гиперболическую орбиту отлета от Земли называется маневром старта.

Корректирующие маневры также изменяют орбиту аппарата, однако это изменение предназначено для коррекции ошибок действительной траектории полета с целью перехода на орбиту, близкую к расчетной. Особенностью корректирующих маневров является их вероятностный характер, поскольку отклонения действительной траектории от расчетной могут быть предсказаны лишь статистически.

В качестве примеров таких маневров можно указать на маневры, обеспечивающие коррекцию траектории полета к Луне, Венере или Марсу, а также управляемое сближение двух аппаратов при их встрече в космосе. Необходимость выполнения этих маневров обусловлена в основном случайными ошибками систем наведения и управления, неточным знанием солнечных и планетных постоянных, пренебрежением при расчете планетными возмущениями и т. д.

Маневры входа в атмосферу предназначены для осуществления спуска аппарата на поверхность планеты либо для погружения аппарата в плотные слои атмосферы с последующим переходом на новую орбиту.

В процессе снижения и посадки обеспечивается вывод аппарата в заданный район и уменьшение скорости аппарата в момент соприкосновения с поверхностью планеты до безопасной величины для сохранения конструкции и жизни экипажа. Способы выполнения этих маневров в значительной мере зависят от того, имеется ли атмосфера у небесного тела, на которое осуществляется посадка.

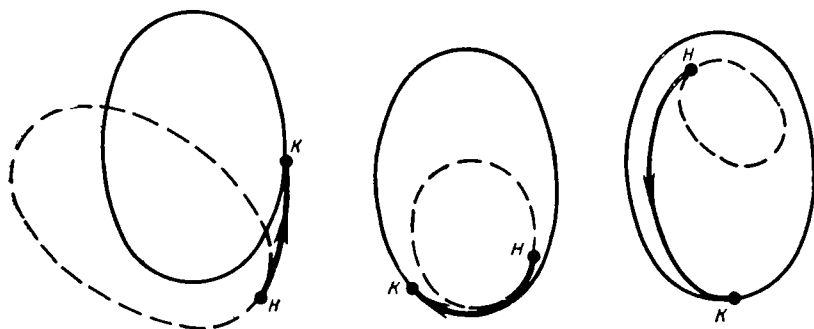


Рис. 2.1. Виды орбитальных компланарных переходов:

h—начало маневра; k—конец маневра

Решение задачи космического полета в некоторых случаях предусматривает выполнение аппаратом всех перечисленных маневров, а иногда достаточно некоторых из них. Так, при межпланетном полете с Земли на Венеру или Марс с посадкой обязательны все маневры. При сближении и встрече одного аппарата с другим аппаратом, движущимся по известной орбите, бывает достаточно первых двух маневров.

Рассмотрим более подробно виды маневров орбитального перехода. В зависимости от расположения начальной и конечной орбиты различают маневры между компланарными и некомпланарными орбитами. На рис. 2.1 показаны возможные траектории перехода между компланарными орбитами. Пунктиром изображены начальные орбиты. Начальная и конечная орбиты могут быть круговыми и эллиптическими, гиперболическими и параболическими; они могут пересекаться, касаться, иметь и не иметь общих точек. Поэтому изображение на рис. 2.1 служит иллюстрацией наиболее типовых маневров орбитального перехода.

При некомпланарном переходе также возможны различные случаи. Наиболее простым в смысле выполнения является переход между двумя орбитами, имеющими общую точку M (рис. 2.2). Если орбиты не имеют такой точки, осуществление

маневра перехода усложняется. Однако и в том и другом случае некомпланарный переход можно представить состоящим из двух маневров, из которых первый задает аппарату требуемую плоскость орбиты, а второй — обеспечивает придание аппарату необходимого положения и скорости в плоскости орбиты.

Маневры орбитального перехода преследуют различные цели, определяемые функциональным назначением аппарата. Если аппарат предназначен для встречи с другим аппаратом, то основная цель маневра заключается в перелете с одной орбиты на другую желаемую орбиту.

Для осуществления исследований планет солнечной системы необходимо выполнение маневра перехода аппарата с орбиты искусственного спутника Земли на траекторию межпланетного полета и т. д.

Составив краткое представление о маневрах космических аппаратов, рассмотрим в общих чертах определение их характеристик.

Движение аппарата происходит под действием силы гравитационного притяжения некоторого центрального тела (Солнца, Земли и т. д.) и управляющей тяги, создаваемой двигательной установкой.

Эффективное использование двигательной установки предполагает знание изменений элементов орбиты под действием приложенной к аппарату тяги. При этом ориентация тяги в пространстве и ее изменение во времени должны определяться с учетом конкретных требований, предъявляемых к выполняемому маневру. Примерами таких требований является, например, обеспечение минимума затрат топлива или максимума полезной нагрузки при осуществлении заданного маневра за фиксированное время. Аналитическое выражение того или иного требования позволяет сформулировать задачу наиболее рационального управления тягой. Решение данной задачи связано с интегрированием дифференциальных уравнений движения космического аппарата. Для аппарата, рассматриваемого как материальная точка постоянной массы m , обращающегося вокруг некоторого центрального притягивающего тела, эти уравнения могут быть представлены в виде одного векторного уравнения

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \vec{a}. \quad (2.1)$$

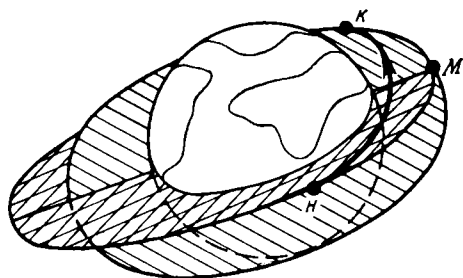


Рис. 2. 2. Некомпланарный орбитальный переход:

н—начало маневра; к—конец маневра

Здесь $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$; $\bar{a} = \frac{P}{m} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ — вектор управляющего ускорения;

P — вектор тяги.

В проекциях на оси инерциальной базовой системы координат $OXYZ$ с началом в центре планеты имеем

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\mu x}{r^3} + a_x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\mu y}{r^3} + a_y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\mu z}{r^3} + a_z.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Начальные условия уравнений (2.1) представляют собой значения параметров кинематического состояния аппарата $\bar{r}(t_0)$ и $\bar{V}(t_0)$ в момент времени $t=t_0$.

Сущность орбитального маневра заключается в таком изменении вектора тяги $\bar{P}$ или управляющего ускорения $\bar{a}$, при котором переход аппарата из начального $\bar{r}(t_0)$ и $\bar{V}(t_0)$ в желаемое конечное состояние $\bar{r}(t_k)$ и $\bar{V}(t_k)$ осуществляется за заданное время $t_k - t_0$, где t_k — время окончания маневра.

При выполнении некоторых маневров желаемое конечное состояние аппарата задается безотносительно ко времени, например при снижении и посадке аппарата.

Наиболее простой путь к решению уравнений (2.2) состоит в задании составляющих вектора управляющего ускорения в виде

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{\mu x}{r^3} + k_{x1}f_{x1}(t) + k_{x2}f_{x2}(t), \\ a_y &= \frac{\mu y}{r^3} + k_{y1}f_{y1}(t) + k_{y2}f_{y2}(t), \\ a_z &= \frac{\mu z}{r^3} + k_{z1}f_{z1}(t) + k_{z2}f_{z2}(t),\end{aligned}\quad (2.3)$$

где $k_{ij} (i=x, y, z, j=1, 2)$ — постоянные, коэффициенты;

$f_{ij} (i=x, y, z, j=1, 2)$ — функции времени.

Подставляя эти значения для a_x , a_y и a_z в уравнения (2.2), получаем линейно независимую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= k_{x1}f_{x1}(t) + k_{x2}f_{x2}(t), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= k_{y1}f_{y1}(t) + k_{y2}f_{y2}(t), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= k_{z1}f_{z1}(t) + k_{z2}f_{z2}(t).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Определение коэффициентов k_{ij} и функций времени $f_{ij}(t)$ рассмотрим на примере первого уравнения (2.4). Предварительно заметим, что выполнение условий (2.3) предполагает применение двигателя с регулируемой тягой, создающего ускорение, модуль которого определяется равенством

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Поскольку граничные условия известны, то в результате двойного интегрирования первого уравнения (2.4) находим

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_k) - \dot{x}(t_0) &= k_{x1} \int_{t_0}^{t_k} f_{x1}(t) dt + k_{x2} \int_{t_0}^{t_k} f_{x2}(t) dt, \\ x(t_k) - x(t_0) - \dot{x}(t_0)(t_k - t_0) &= k_{x1} \int_{t_0}^{t_k} \left[\int_{t_0}^t f_{x1}(t) dt \right] dt + \\ &+ k_{x2} \int_{t_0}^{t_k} \left[\int_{t_0}^t f_{x2}(t) dt \right] dt. \end{aligned}$$

После вычисления интегралов получим алгебраическую систему из двух уравнений для однозначного определения k_{x1} и k_{x2} . Основная задача заключается в таком задании функций $f_{x1}(t)$ и $f_{x2}(t)$, при котором приращение характеристической скорости будет минимальным. Можно показать, что при сравнительно малом изменении радиуса-вектора $\bar{r}$ как по направлению (поворот аппарата по орбите на небольшой угол), так и по величине (незначительное изменение высоты аппарата за время действия тяги) приращение характеристической скорости по всем трем осям минимизируется, когда

$$\begin{aligned} f_{x1}(t) &= f_{y1}(t) = f_{z1}(t) = 1, \\ f_{x2}(t) &= f_{y2}(t) = f_{z2}(t) = t - t_0. \end{aligned}$$

Вычисление k_{ij} производится по указанному выше способу. Таким образом, требуемый закон формирования управляющего ускорения будет

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\mu x}{r^3} + k_{x1} + k_{x2}(t - t_0), \\ a_y &= \frac{\mu y}{r^3} + k_{y1} + k_{y2}(t - t_0), \\ a_z &= \frac{\mu z}{r^3} + k_{z1} + k_{z2}(t - t_0). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Эти выражения определяют величину и направление вектора управляющего ускорения, обеспечивающего выполнение орби-

тального маневра. Однако в случае непрерывного приложения к аппарату тяги полученное решение трудно реализовать, поскольку величина тяги обычно несоизмеримо мала по сравнению с ньютоновской силой притяжения, т. е. $|\bar{a}| \ll \frac{\mu}{r^2}$. Данное обстоя-

тельство, с одной стороны, исключает возможность выбора законов управления в форме (2.5), а с другой — служит обоснованием применения при решении уравнений (2.2) как классических методов теории возмущений небесной механики, так и других асимптотических методов.

В гл. I показано, что орбита невозмущенного движения аппарата представляет собой коническое сечение (эллипс, парабола, гипербола), для вычисления которой необходимо шесть элементов, а именно:

— наклонение i и долгота восходящего узла Ω , задающие ориентацию плоскости орбиты;

— длина большой полуоси a и эксцентриситет e , определяющие геометрию орбиты;

— аргумент перигентра ω и время прохождения t_p перигентра, фиксирующие положение орбиты в ее плоскости.

Заметим, что некоторые из указанных элементов орбиты могут быть заменены другими равноценными им элементами. Так, вместо длины большой полуоси нередко принимается параметр орбиты p , в случае плоского движения аппарата, когда наклонение и долгота восходящего узла постоянны, в качестве элементов орбиты рассматриваются расстояния до перигентра r_p и апоцентра r_a .

Изменение элементов орбиты в возмущенном движении аппарата в зависимости от составляющих вектора управляющего ускорения $\bar{a}$ по радиусу-вектору a_r , трансверсали a_θ и нормали a_φ к плоскости орбиты определяется следующей системой дифференциальных уравнений, которые приводятся здесь без вывода [27]:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\cos u}{1 + e \cos \vartheta} a_\varphi, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\sin u \operatorname{cosec} i}{1 + e \cos \vartheta} a_\varphi, \\ \frac{da}{dt} &= \frac{2p}{(1-e)^2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} [e \sin \vartheta a_r + (1 + e \cos \vartheta) a_\theta], \\ \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left(\sin \vartheta a_r + \frac{e \cos^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta + e}{1 + e \cos \vartheta} a_\theta \right), \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\cos \vartheta a_r + \frac{\sin \vartheta (2 + e \cos \vartheta)}{1 + e \cos \vartheta} a_\theta - \frac{e \operatorname{ctg} i \sin u}{1 + e \cos \vartheta} a_\varphi \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{dt_n}{dt} = \frac{p^2}{e\mu(1+e\cos\vartheta)^2} \left[(eN\sin\vartheta - \cos\vartheta)\alpha_r + \frac{N}{1+e\cos\vartheta} \alpha_\theta \right],$$

где

$$u = \omega + \vartheta,$$

$$N = \frac{2}{1+e\cos\vartheta} \int_0^\vartheta \frac{\cos\vartheta d\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)^3},$$

$$t - t_n = p \sqrt{\frac{p}{\mu}} \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta'}{(1+e\cos\vartheta')^2}.$$

Учитывая, что

$$p = a(1-e^2) \quad r_n = \frac{p}{1+e}, \quad r_a = \frac{p}{1-e},$$

легко найти

$$\frac{dp}{dt} = 2p \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1}{1+e\cos\vartheta} \alpha_\theta,$$

$$\frac{dr_n}{dt} = \frac{p}{(1+e)^2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\sin\vartheta \alpha_r + \frac{2(1-\cos\vartheta) + e\sin\vartheta}{1+e\cos\vartheta} \alpha_\theta \right], \quad (2.7)$$

$$\frac{dr_a}{dt} = \frac{p}{(1-e)^2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\sin\vartheta \alpha_r + \frac{2(1+\cos\vartheta) + e\sin^2\vartheta}{1+e\cos\vartheta} \alpha_\theta \right].$$

Определение из этих уравнений явных зависимостей элементов орбиты от приложенного ускорения в общем случае представляет серьезные трудности. Не меньшие трудности возникают при проведении параметрического анализа полученных решений с целью установления зависимости между требуемым изменением оскулирующих элементов орбиты и действующей на аппарат тяги. Поэтому целесообразно вначале составить на основе приведенных уравнений общее представление о влиянии ориентации в пространстве постоянной по величине тяги на характер изменения элементов орбиты. Из первых двух уравнений системы (2.6) следует, что изменение положения плоскости орбиты происходит под действием составляющей тяги, нормальной к мгновенной плоскости орбиты. Причем для обеспечения монотонности изменения этих элементов орбиты во времени необходимо периодически менять при $u = \pm \frac{\pi}{2}$ и $u = \pi$ направление действия

тяги на противоположное. Изменение большой полуоси и эксцентриситета [третье и четвертое уравнение системы (2.6)] зависит от составляющей тяги, расположенной в плоскости орбиты. Естественно, что ориентация этой составляющей по отношению к радиусу-вектору определяют скорость изменения этих элементов. Наконец, последние два уравнения системы (2.6) свиде-

тельствуют о зависимости положения орбиты в ее плоскости от действия всех составляющих вектора тяги. В случае плоского движения аппарата ($a_{\varphi}=0$) уравнения (2.7) позволяют сравнительно просто выбрать такое направление действия постоянной по величине тяги, при котором элементы орбиты либо остаются постоянными, либо изменяются с максимальной скоростью [27]. Обозначив λ угол между вектором тяги $\bar{p}$ и радиусом-вектором аппарата $\bar{r}$, представим

$$a_r = a \cos \lambda,$$

$$a_{\eta} = a \sin \lambda,$$

где

$$a = |\bar{a}|. \quad (2.8)$$

Примем в качестве элементов орбиты e , p , ω , r_n , r_a , a и перепишем соответствующие уравнения систем (2.6) и (2.7) с учетом равенств (2.8):

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= a \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\sin \vartheta \cos \lambda + \frac{e \cos^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta + e}{1 + e \cos \vartheta} \sin \lambda \right], \\ \frac{dp}{dt} &= 2ap \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1}{1 + e \cos \vartheta} \sin \lambda, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{a}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\cos \vartheta \cos \lambda + \frac{\sin \vartheta (2 + e \cos \vartheta)}{1 + e \cos \vartheta} \sin \lambda \right], \\ \frac{dr_n}{dt} &= \frac{ap}{(1+e)^2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\sin \vartheta \cos \lambda - \frac{2(1-\cos \vartheta) + e \sin^2 \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \sin \lambda \right], \\ \frac{dr_a}{dt} &= \frac{ap}{(1-e)^2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\sin \vartheta \cos \lambda + \frac{2(1+\cos \vartheta) - e \sin^2 \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \sin \lambda \right], \\ \frac{da}{dt} &= \frac{2ap}{(1-e^2)^2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} [e \sin \vartheta \cos \lambda + (1 + e \cos \vartheta) \sin \lambda]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Приведенные соотношения, следуя методике работы [27], можно записать в общем виде

$$\frac{dk}{dt} = \frac{a}{\sqrt{\mu}} [f_1(e, p, \vartheta) \cos \lambda + f_2(e, p, \vartheta) \sin \lambda], \quad (2.10)$$

где k — любой из шести рассматриваемых элементов орбиты; f_1 и f_2 — известные функции e , p , ϑ .

Управление, обеспечивающее постоянство элемента k , находится из условия $dk/dt=0$, откуда в соответствии с уравнениями (2.10) находим

$$\operatorname{tg} \lambda = - \frac{f_1(e, p, \vartheta)}{f_2(e, p, \vartheta)}. \quad (2.11)$$

Уравнение, при котором изменение элемента k максимально, определяется в предположении независимости a от λ из условия

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{dk}{dt} = \frac{a}{\sqrt{\mu}} [-f_1(e, p, \vartheta) \sin \lambda + f_2(e, p, \vartheta) \cos \lambda] = 0, \quad (2.12)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{f_2(e, p, \vartheta)}{f_1(e, p, \vartheta)}. \quad (2.13)$$

Подстановка значений для $\sin \lambda$ и $\cos \lambda$ в соответствии с выражением (2.13) в уравнение (2.10) дает

$$\frac{dk}{dt} = \pm \frac{a}{\sqrt{\mu}} \sqrt{[f_1(e, p, \vartheta)]^2 + [f_2(e, p, \vartheta)]^2}. \quad (2.14)$$

Для определения характера изменения элемента k (возрастание или убывание) вычислим вторую производную по λ от dk/dt . Продифференцируем выражение (2.13) и с учетом значений $\sin \lambda$ и $\cos \lambda$ получим

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \frac{dk}{dt} = \mp \frac{a}{\sqrt{\mu}} \sqrt{[f_1(e, p, \vartheta)]^2 + [(f_2(e, p, \vartheta))]^2}. \quad (2.15)$$

Сопоставляя уравнения (2.14) и (2.15) заключаем, что управление обеспечивает максимальную скорость возрастания элемента k при

$$\sin \lambda = \frac{f_2(e, p, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(e, p, \vartheta)]^2 + [f_2(e, p, \vartheta)]^2}},$$

максимальную скорость убывания k при

$$\sin \lambda = - \frac{f_2(e, p, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(e, p, \vartheta)]^2 + [f_2(e, p, \vartheta)]^2}}.$$

Отметим, что направления действия тяги, обеспечивающие постоянство и максимальную скорость изменения элемента k , как это видно из выражений (2.11) и (2.13), взаимно перпендикулярны.

На основании полученных соотношений не составляет труда найти конкретные выражения для ориентации вектора тяги при сохранении максимальной скорости изменения того или иного элементов орбиты или постоянства одного из следующих элементов:

— эксцентриситета

$$\operatorname{tg} \lambda = - \frac{\sin \vartheta (1 + e \cos \vartheta)}{e \cos^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta + e},$$

— расстояния до перицентра

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sin \vartheta (1 + e \cos \vartheta)}{2(1 - \cos \vartheta) + e \sin^2 \vartheta}, \quad (2.16)$$

— большой полуоси

$$\operatorname{tg} \lambda = -\frac{e \sin \vartheta}{1 + e \cos \vartheta},$$

в случае максимальной скорости изменения указанных элементов соответственно имеем

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{e \cos^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta + e}{\sin \vartheta (1 + e \cos \vartheta)},$$

$$\operatorname{tg} \lambda = -\frac{2(1 - \cos \vartheta) + e \sin^2 \vartheta}{\sin \vartheta (1 + e \cos \vartheta)},$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{1 + e \cos \vartheta}{e \sin \vartheta}.$$

Из приведенных формул видно, что направление действия тяги зависит от эксцентриситета и истинной аномалии. Послед-

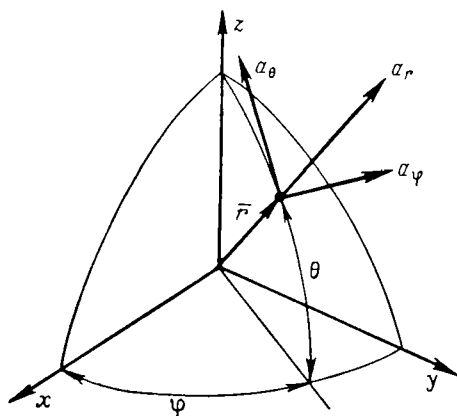


Рис. 2.3. Направление составляющих вектора ускорения

ние удобно выразить через координаты местоположения аппарата и составляющие его скорости в полярной системе координат. С этой целью перепишем уравнения (2.2) в сферической системе координат r , θ и φ (рис. 2.3)

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 &= -\frac{\mu}{r^2} + a_r, \\ 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \varphi + r\ddot{\theta} \cos \varphi - 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \varphi &= a_\theta, \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi + r\ddot{\varphi} &= a_\varphi. \end{aligned} \quad (2.17)$$

В случае плоского движения аппарата ($\varphi=0$) эти уравнения приобретают вид

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} + a_r, \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = a_\theta.$$

Измерение расстояния r между притягивающим центром и аппаратом, радиальной $V_r = \dot{r}$ и трансверсальной $V_\theta = r\dot{\theta}$ составляющих вектора скорости $\vec{V}$ аппарата позволяют вычислить эксцентриситет и истинную аномалию. Соответствующие соотношения нетрудно получить с помощью выражений (1.8), (1.9) и (1.45), записанных для точки измерений. Выполняя необходимые преобразования, находим

$$e = \frac{1}{\mu} \sqrt{(rV_\theta^2 - \mu)^2 + (rV_r V_\theta)^2},$$

$$\sin \vartheta = \frac{rV_r V_\theta}{\sqrt{(rV_\theta^2 - \mu)^2 + (rV_r V_\theta)^2}}, \quad (2.19)$$

$$\cos \vartheta = \frac{rV_\theta^2 - \mu}{\sqrt{(rV_\theta^2 - \mu)^2 + (rV_r V_\theta)^2}}.$$

Следовательно, ориентация вектора тяги в плоскости орбиты может быть произведена по результатам измерения r , $\dot{r}$ и $r\dot{\theta}$.

Количественная оценка изменения элементов орбиты обычно производится решением уравнений (2.17) и (2.18) одним из приближенных методов. В случае плоского движения при $a_r = a_\theta = 0$ система уравнений (2.18) имеет два интеграла:

интеграл энергии (на единицу массы аппарата)

$$E = \frac{1}{2} V^2 - \frac{\mu}{r}, \quad (2.20a)$$

где

$$V^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2,$$

и интеграл кинетического момента (на единицу массы аппарата)

$$h = r^2 \dot{\theta}. \quad (2.20б)$$

Эти интегралы могут быть использованы в качестве искоемых функций системы уравнений (2.18), которые переписутся тогда в виде

$$\frac{dh}{dt} = a_\theta r = r \frac{P}{m} \cos \lambda,$$

$$\frac{dE}{dt} = a_r \dot{r} + a_\theta r \dot{\theta} = V \frac{P}{m} \cos(\lambda - \theta). \quad (2.21)$$

Здесь λ обозначает угол между вектором тяги и трансверсалью.

На основании приведенных уравнений текущее положение космического аппарата на орбите и прикладываемое к нему управляющее воздействие определяются соответственно трехмерными векторами состояния $\bar{X} = (X_1 X_2 X_3)$ и управления $\bar{u} = (u_1 u_2 u_3)$. При этом движение аппарата $X_i(t)$ описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{X}_i = f_i(X_1 X_2 X_3 \ u_1, \ u_2, \ u_3) \quad i = 1, \ 2, \ 3.$$

Общая задача о переходе аппарата между двумя орбитами сводится, таким образом, к отысканию решений данной системы уравнений, обеспечивающих минимум приращения характеристической скорости.

Покажем возможный способ нахождения этих решений для рассматриваемого случая.

Параметры орбитального движения аппарата (элементы орбиты) могут быть вычислены при задании h и E . Примем в качестве составляющих вектора состояния

$$X_1 = h^2,$$

$$X_2 = E.$$

Третьей составляющей будем считать характеристическую скорость аппарата

$$X_3 = \int_{t_0}^t \frac{P}{m} dt,$$

где t_0 — время начала процесса управления;

m — текущее значение массы аппарата.

Результат действия на аппарат тяги двигателя зависит, как уже отмечалось, от величины тяги P , ее ориентации по отношению к трансверсали λ и от положения аппарата на орбите ϑ . Следовательно, составляющими вектора управления можно считать

$$u_1 = \frac{P}{P_m},$$

$$u_2 = \lambda,$$

$$u_3 = \vartheta,$$

где P_m — максимальная допустимая величина тяги.

Изменение u_1 заключено в пределах $0 \leq u_1 \leq 1$, в то время как изменение u_2 и u_3 практически неограничено.

Из уравнений (2.21) несложно получить

$$\frac{dX_1}{dt} = \frac{2\sqrt{X_1} \frac{P}{m} p \cos u_2}{1 + e \cos u_3},$$

$$\frac{dX_2}{dt} = \frac{\sqrt{X_1} \frac{P}{m}}{p} [\cos u_2 + e \cos(u_2 + u_3)].$$

Уравнение, описывающее изменение X_3 в соответствии с выражением для характеристической скорости, будет

$$\frac{dX_3}{dt} = \frac{P}{m}.$$

Анализируя полученные уравнения, видим, что время не входит явно в их правые части, что позволяет перейти к новому аргументу. Таким аргументом можно принять характеристическую скорость в силу монотонности ее изменения с течением времени, т. е.

$$dX_3 = \frac{P}{m} dt.$$

Тогда уравнения движения аппарата приобретают вид (дифференцирование по новому аргументу обозначено точкой)

$$\dot{X}_1 = \frac{2\sqrt{X_1} p \cos u_2}{1 + e \cos u_3} = f_1,$$

$$\dot{X}_2 = \frac{\sqrt{X_1}}{p} [\cos u_2 + e \cos(u_2 + u_3)] = f_2, \quad (2.22a)$$

$$\dot{X}_3 = 1 = f_3.$$

Задача управления состоит в выборе такого вектора $\bar{u}$, который обеспечивает переход с начальной орбиты $\bar{X}_0$ на конечную $\bar{X}_K$ с минимальным значением X_{3m} . В соответствии с принципом максимума Понтрягина уравнения движения аппарата следует дополнить следующими уравнениями относительно составляющих ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 сопряженного вектора $\bar{\psi}$

$$\dot{\psi}_i = - \sum_{s=1}^3 \psi_s \frac{\partial f_s}{\partial X_i} \quad (i=1, 2, 3). \quad (2.22б)$$

Искомый оптимальный переход аппарата между орбитами является решением полученных систем уравнений (2.22), причем

вектор управления выбирается из условия максимума гамильтониана

$$H = \sum_{i=1}^3 \psi_i f_i = \sqrt{X_1} \left\{ \psi_1 \frac{2p \cos u_2}{1 + e \cos u_3} + \right. \\ \left. + \frac{\psi_2}{p} [\cos u_2 + e \cos (u_2 + u_3)] + \psi_3 \right\}$$

при следующих граничных условиях:

$$X_i(0) = X_{i0}, X_i(t_K) = X_{iK}, i = 1, 2, 3.$$

Время окончания процесса управления t_K , или при новом аргументе — X_{3K} , находится из равенства

$$H(X_{3K}) = 0.$$

Заметим, что выражение гамильтониана не содержит u_1 . Максимум H может быть достигнут при

$$u_2 = 0 \text{ или } \pi,$$

$$u_3 = 0 \text{ или } \pi.$$

Физически это соответствует приложению тяги к аппарату в апсидальных точках оскулирующих орбит по касательной к орбите. Данное требование точно выполняется при неограниченной тяге (импульсный режим). Если тяга ограничена, то это требование удовлетворяется путем многократного включения тяги на время пребывания аппарата в окрестности указанных оптимальных циклов. Определение моментов переключения управления, связанное с интегрированием уравнений (2.22а) и (2.22б) при оптимальных значениях u_2 и u_3 , по причине громоздкости здесь не приводится.

§ 2.2. МАНЕВРЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНОЙ ТЯГИ

При установлении связи между элементами орбиты и приложенным к аппарату импульсом тяги будем пренебрегать изменением радиуса-вектора $\vec{r}$ орбиты и массы m аппарата за время действия импульса тяги t_{II} . Тогда единственным следствием действия импульса тяги будет изменение вектора скорости $\vec{V}$ аппарата. Данное обстоятельство позволяет непосредственно получить с помощью уравнения (2.1) следующее уравнение возмущенного движения аппарата:

$$\frac{d\Delta\vec{V}}{dt} = \frac{\vec{P}}{m}, \quad (2.23)$$

записанное в инерциальной системе координат.

Учитывая малость времени $t_{\text{и}}$, в качестве такой системы координат удобно принять систему, оси которой ориентированы по осям естественного трехгранника орбиты невозмущенного движения до приложения импульса, так как поворотом этих осей за время $t_{\text{и}}$ можно пренебречь. Тогда уравнение (2.23) будет определять движение космического аппарата относительно первоначальной орбиты под действием тяги управляющего двигателя. В качестве координат такого относительного движения примем следующие: ΔV — изменение скорости аппарата по модулю; $\Delta \theta_V$ — угол поворота вектора скорости в плоскости первоначальной орбиты и $\Delta \sigma_V'$ — угол поворота вектора скорости относительно плоскости первоначальной орбиты. Для изучения движения космического аппарата в приведенных координатах спроектируем уравнение (2.23) на оси естественного трехгранника относительного движения. В результате имеем

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta V}{dt} &= \frac{P_T}{m}, \quad -V \frac{d\Delta \theta_V}{dt} = \frac{P_N}{m}, \\ V \frac{d\Delta \sigma_V'}{dt} &= \frac{P_B}{m},\end{aligned}$$

где $P_{S(S=T, N, B)}$ — проекции тяги на касательную, нормаль и бинормаль, соответственно;

V — величина скорости движения аппарата по первоначальной орбите.

Пренебрегая изменением V за время действия импульса и выполняя интегрирование по времени $t_{\text{и}}$, находим

$$\begin{aligned}\Delta V &= J_T, \\ -\Delta \theta_V &= J_N/V, \\ \Delta \sigma_V' &= J_B/V,\end{aligned}\tag{2.24}$$

где

$$J_S = \int_0^{t_{\text{и}}} \frac{P_S}{m} dt \quad (S=T, N, B).$$

Уравнения (2.24) могут быть использованы для определения изменений элементов орбиты под действием импульсной тяги. При этом, учитывая независимость этих уравнений, рассмотрим последовательно действие импульсов тангенциальной, нормальной и бинормальной сил.

Предположим, что на космический аппарат действует тангенциальная управляющая сила $P = P_T \vec{e}_T$ в течение малого времени $t_{\text{и}}$.

Установим связь тангенциального управляющего импульса J_T с изменениями элементов орбиты. Так как этот импульс дей-

ствуется в плоскости орбиты невозмущенного движения, первоначальное положение плоскости орбиты в пространстве не изменится. Поэтому изменения таких элементов, как наклонение орбиты и долгота восходящего узла будут равны нулю.

Из равенства (1.15) следует, что изменение скорости космического аппарата приведет к изменению большой полуоси эллиптической орбиты. На основании равенств (1.15) и (1.17) имеем

$$(V + \Delta V)^2 = g_0 R^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a + \Delta a_T} \right).$$

Отсюда с учетом равенства (2.24а) находим

$$\Delta a_T = \frac{V_{IR}^2 R r}{2V_{IR}^2 R - (V + J_T)^2} - a. \quad (2.25)$$

Обычно $\Delta a_T \ll a$ и $J_T \ll V$. Если пренебречь малыми второго и более высоких порядков, то

$$\Delta a_T = \frac{2a^2 V}{V_{IR}^2 R} J_T. \quad (2.26)$$

Аналогичным образом на основании выражения (1.32) при малых Δa_{IT} и J_T получим формулу для изменения большой полуоси гиперболической орбиты

$$\Delta a_{IT} = - \frac{2a_{IT}^2 V}{V_{IR}^2 R} J_T. \quad (2.27)$$

Чтобы определить изменение остальных элементов эллиптической орбиты, воспользуемся основным свойством эллипса, согласно которому сумма расстояний от любой точки эллипса, до его фокусов есть величина постоянная, равная большой оси, т. е.

$$r + r_2 = 2a. \quad (2.28)$$

Так как во время действия импульса $r = \text{const}$, то $\Delta r_2 = 2\Delta a$. Поэтому под действием тангенциального импульса (рис. 2.4) расстояние от точки M (точки приложения импульса) до второго фокуса F_2 орбиты должно измениться на величину Δr_2 , следовательно, второй фокус сместится в точку F_2' . В результате смещения второго фокуса изменится межфокусное расстояние $2c$ на величину $2\Delta c$ и линия апсид повернется на угол $\Delta \omega$, что приведет к соответствующему изменению аргумента перигея.

Эксцентриситет эллипса (и гиперболы), как известно, определяется отношением межфокусного расстояния к большой оси

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}. \quad (2.29)$$

Переходя в этом выражении к приращениям, находим

$$\Delta e = e \left[\frac{1 + \frac{\Delta c}{c}}{1 + \frac{\Delta a}{a}} - 1 \right].$$

Обычно $\Delta a/a \ll 1$, однако $\Delta c/c$ для орбит с очень малым эксцентриситетом (околокруговых) может быть близко к единице. По-

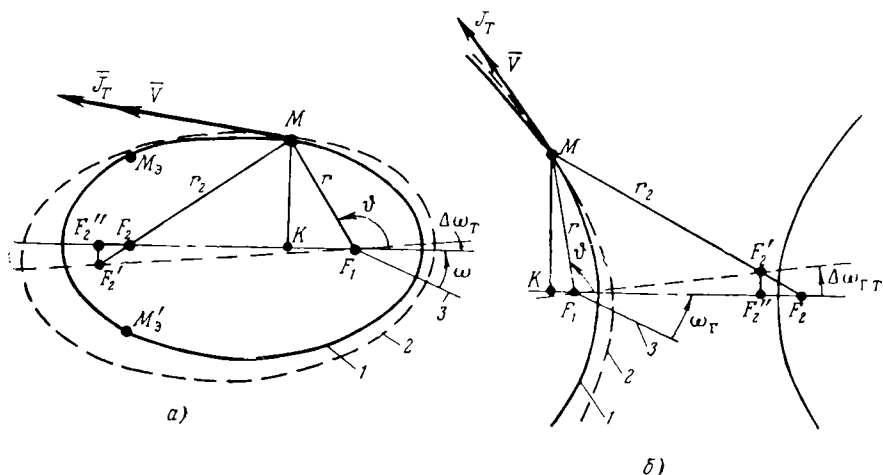


Рис. 2.4. Схема маневра под действием тангенциального импульса:
1—орбита до маневра; 2—орбита после маневра; 3—линия узлов

этому полученное выражение в общем случае может быть линеаризовано лишь по Δa , т. е.

$$\Delta e = e \left[\frac{\Delta c}{c} \left(1 - \frac{\Delta a}{a} \right) - \frac{\Delta a}{a} \right]. \quad (2.30)$$

Для орбит с заметным эксцентриситетом (при $e \approx 0,1$ и более), как правило, можно считать $\Delta c/c \ll 1$. Тогда, пренебрегая в выражении (2.30) членом $\Delta a \Delta c / ac$, получим

$$\Delta e = \left(\frac{\Delta c}{c} - \frac{\Delta a}{a} \right) e. \quad (2.31)$$

На основании рис. 2.4, а имеем следующие соотношения:

$$2\Delta c_T = F_2 F_2'',$$

$$\operatorname{tg} \Delta \omega_T = \frac{F_2' F_2''}{F_1 F_2''},$$

где $2\Delta c_T$ — изменение межфокусного расстояния при действии импульса J_T .

Из подобия треугольников $F_2F_2'F_2''$ и F_2MK имеем

$$\frac{F_2F_2''}{F_2K} = \frac{F_2F_2'}{F_2M} = \frac{F_2'F_2''}{MK},$$

но

$$MK = r \sin(180^\circ - \vartheta) = r \sin \vartheta,$$

$$F_2M = r_2 = 2a - r,$$

$$F_2F_2' = \Delta r_2 = 2\Delta a_T,$$

$$F_2K = 2c - r \cos(180^\circ - \vartheta) = 2c + r \cos \vartheta.$$

Отсюда

$$F_2F_2'' = (2c + r \cos \vartheta) \frac{2\Delta a_T}{2a - r},$$

$$F_2'F_2'' = \frac{2\Delta a_T}{2a - r} r \sin \vartheta,$$

$$F_1F_2'' = 2c + (2c + r \cos \vartheta) \frac{2\Delta a_T}{2a - r}.$$

Следовательно,

$$\Delta c_T = (2c + r \cos \vartheta) \frac{\Delta a_T}{2a - r}$$

и

$$\operatorname{tg} \Delta \omega_T = \frac{\frac{r}{a} \sin \vartheta}{e \left(2 - \frac{r}{a} \right) - \left(2e + \frac{r}{a} \cos \vartheta \right) \frac{\Delta a_T}{a}} \cdot \frac{\Delta a_T}{a}. \quad (2.32)$$

Подставляя выражение для Δc_T в формулу (2.30), находим

$$\Delta e_T = e \left[\frac{2e + \frac{r}{a} \cos \vartheta}{e \left(2 - \frac{r}{a} \right)} \left(1 - \frac{\Delta a_T}{a} \right) - 1 \right] \frac{\Delta a_T}{a}. \quad (2.33)$$

Полученные формулы (2.32) и (2.33) позволяют найти изменение аргумента широты и эксцентриситета при воздействии на космический аппарат тангенциального управляющего импульса J_T . При этом необходимо предварительно определить изменение большой полуоси по формуле (2.26). Подстановкой a_T из формулы (2.26) в (2.32) и (2.33) можно было бы непосредственно выразить $\Delta \omega_T$ и Δe_T через управляющий импульс J_T , однако полученные при этом формулы оказываются очень громоздкими.

Если принять точку M в качестве начальной точки новой эллиптической орбиты, то изменение начального значения истинной аномалии, которое может рассматриваться в качестве шестого элемента орбиты вместо момента прохождения перигея, определяется равенством

$$\Delta \vartheta_0 = -\Delta \omega. \quad (2.34)$$

Таким образом, с помощью формулы (2.32) можно также определить изменение начального значения истинной аномалии эллиптической орбиты, вызываемое тангенциальным управляющим импульсом. Поскольку связь, выражаемая равенством (2.34), справедлива при любом управляющем импульсе (а не только при тангенциальном), в дальнейшем будем рассматривать только изменения пяти элементов: большой полуоси, эксцентриситета, аргумента перигея, наклона и долготы восходящего узла.

В тех случаях, когда можно полагать $\Delta c/c \ll 1$ (орбиты с заметным эксцентриситетом), для определения Δe_T можно воспользоваться формулой (2.31). Подставляя в эту формулу найденное выше выражение для Δc_T и выполняя несложные преобразования, находим

$$\Delta e_T = \frac{r(e + \cos \vartheta)}{a(2a - r)} \Delta a_T,$$

или после подстановки формулы (2.26)

$$\Delta e_T = \frac{2aV(e + \cos \vartheta)}{V_{IR}^2 R(2a - r)} J_T. \quad (2.35)$$

Как видно из рис. 2.4, a , при $\Delta c/c \ll 1$ можно положить

$$\operatorname{tg} \Delta \omega_T \simeq \Delta \omega_T \simeq \frac{F_2' F_2''}{2c}.$$

Тогда после подстановки найденного выше выражения для отрезка $F_2' F_2''$ и несложных преобразований получим

$$\Delta \omega_T = \frac{r \sin \vartheta}{ea(2a - r)} \Delta a_T.$$

После подстановки формулы (2.26) окончательно имеем

$$\Delta \omega_T = \frac{2aVr \sin \vartheta}{eV_{IR}^2 R(2a - r)} J_T. \quad (2.36)$$

При определении изменений элементов гиперболической орбиты под действием тангенциального импульса можно также воспользоваться ее основным свойством, согласно которому

разность расстояний от любой точки гиперболы до ее фокусов есть величина постоянная, равная большой оси, т. е.

$$r_2 - r = 2a_{\Gamma}.$$

Следовательно, при воздействии на космический аппарат тангенциального управляющего импульса J_T (рис. 2.4, б) вследствие изменения большой полуоси второй фокус сместится в точку F_2' на расстояние

$$\Delta r_2 = 2\Delta a_{\Gamma T}.$$

Характер изменения орбиты космического аппарата при воздействии на него тангенциального импульса одинаков как при

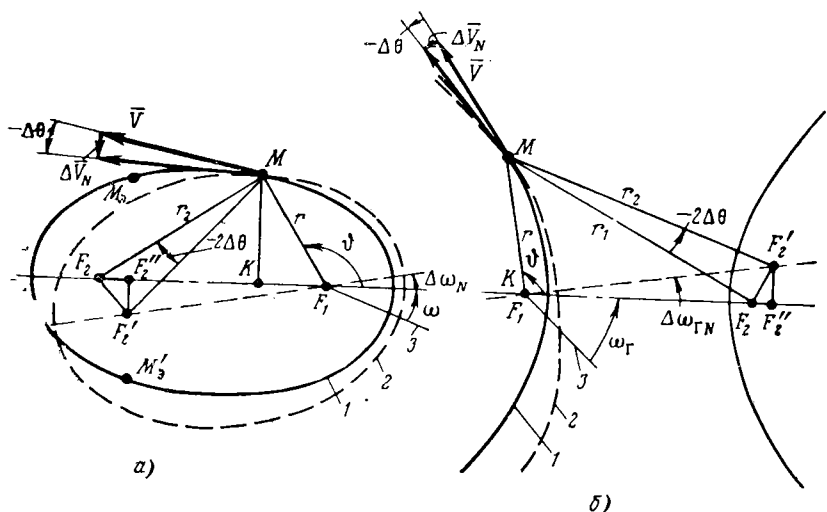


Рис. 2.5. Схема маневра под действием нормального импульса:

1—орбита до маневра; 2—орбита после маневра; 3—линия узлов

эллиптической, так и при гиперболической орбите: под действием тангенциального импульса второй фокус орбиты космического аппарата смещается по линии, соединяющей его первоначальное положение с точкой приложения импульса. Положительный импульс смещает второй фокус в направлении от точки его приложения. Величина смещения равна изменению большой оси орбиты, вызванному приложенным импульсом.

В случае гиперболической орбиты $c_{\Gamma} > a_{\Gamma}$ и при $\Delta a_{\Gamma}/a_{\Gamma} \ll 1$ можно всегда считать $\Delta c_{\Gamma}/c_{\Gamma} \ll 1$. Поэтому на основании рис. 2.4, б

$$2\Delta c_{\Gamma T} = F_2 F_2'',$$

$$\Delta \omega_{\Gamma T} \simeq -\frac{F_2' F_2''}{2c_{\Gamma}}.$$

Из подобия треугольников $F_2F_2'F_2''$ и F_2MK имеем

$$\frac{F_2F_2''}{F_2K} = \frac{F_2F_2'}{F_2M} = \frac{F_2'F_2''}{MK},$$

но

$$MK = r \sin(180^\circ - \vartheta) = r \sin \vartheta,$$

$$F_2M = r_2 = 2a_\Gamma + r,$$

$$F_2F_2' = \Delta r_2 = 2\Delta a_{\Gamma T},$$

$$F_2K = 2c_\Gamma + r \cos(180^\circ - \vartheta) = 2c_\Gamma - r \cos \vartheta.$$

Отсюда

$$F_2F_2'' = (2c_\Gamma - r \cos \vartheta) \frac{2\Delta a_{\Gamma T}}{2a_\Gamma + r},$$

$$F_2'F_2'' = \frac{2\Delta a_{\Gamma T}}{2a_\Gamma + r} r \sin \vartheta.$$

Следовательно,

$$\Delta c_{\Gamma T} = (2c_\Gamma - r \sin \vartheta) \frac{\Delta a_{\Gamma T}}{2a_\Gamma + r}$$

и

$$\Delta \omega_{\Gamma T} \simeq - \frac{\Delta a_{\Gamma T} r}{c_\Gamma (2a_\Gamma + r)} \sin \vartheta.$$

Подставляя выражение для $\Delta c_{\Gamma T}$ и формулу (2.27) в (2.31), а также формулу (2.27) в выражение для $\Delta \omega_{\Gamma T}$, после несложных преобразований получим

$$\Delta e_{\Gamma T} = \frac{2a_\Gamma V (e_\Gamma + \cos \vartheta)}{V_{IR}^2 R (2a_\Gamma + r)} J_T, \quad (2.37)$$

$$\Delta \omega_{\Gamma T} = \frac{2a_\Gamma V r \sin \vartheta}{e_\Gamma V_{IR}^2 R (2a_\Gamma + r)} J_T. \quad (2.38)$$

Полученные формулы (2.37) и (2.38) наряду с формулой (2.29) позволяют определить изменения элементов гиперболической орбиты под действием тангенциального управляющего импульса.

Если на космический аппарат действует нормальная управляющая сила $\bar{P} = P_N \bar{e}_N$ в течение малого времени t_n , то вектор скорости поворачивается на угол $\Delta \vartheta_\Gamma$, а его величина остается неизменной ($\Delta V = 0$).

Нормальный управляющий импульс так же, как и тангенциальный, действует в плоскости орбиты невозмущенного движения. Поэтому первоначальное положение плоскости орбиты не изменится. Следовательно, $\Delta i_N = \Delta i_T = 0$, $\Delta \Omega_N = \Delta \Omega_T = 0$.

Ввиду того что величина скорости полета не меняется, из равенства (1.15) следует, что величина большой полуоси эллиптической орбиты останется неизменной и $\Delta a_N = 0$.

Для определения изменений эксцентриситета и аргумента перигея воспользуемся следующим свойством эллипса как геометрической фигуры. Касательная к эллипсу является биссектрисой внешнего угла между радиусами-векторами (проведенными из двух его фокусов) точки касания.

Под действием нормального импульса J_N вектор скорости, направленный по касательной, повернется на угол $-\Delta\theta_v$. В результате космический аппарат перейдет на новую орбиту, для которой указанное свойство должно сохраняться. Нетрудно убедиться (см. рис. 2.5, а), что в соответствии с этим свойством линия, проходящая через точку приложения импульса и второй фокус, должна повернуться на угол $-2\Delta\theta_v$. Так как $\Delta a_N = 0$, имеем

$$r_2 = \text{const} \quad (2.39)$$

и второй фокус переместится в точку F_2' по дуге F_2F_2' окружности с центром в точке M и радиусом r_2 .

В случае гиперболической орбиты, как видно из равенства (1.32), величина большой полуоси также останется неизменной $\Delta a_{TN} = 0$. На основании свойства гиперболы как геометрической фигуры (касательная к гиперболе является биссектрисой внутреннего угла между радиусами-векторами точки касания, проведенными из двух ее фокусов) путем аналогичных рассуждений приходим к выводу (см. рис. 2.5, б), что второй фокус гиперболической орбиты также переместится в точку F_2' по дуге F_2F_2' окружности с центром в точке M и радиусом r_2 . Таким образом, под действием нормального импульса второй фокус орбиты космического аппарата перемещается по дуге окружности, центр которой находится в точке приложения импульса, а радиус равен расстоянию от этой точки до второго фокуса. Угол поворота линии, соединяющей точку приложения импульса и второй фокус орбиты, равен удвоенному значению угла поворота вектора скорости. Поворот осуществляется в том же направлении, что и поворот вектора скорости.

Выразим изменения аргумента перигея и эксцентриситета эллиптической орбиты под действием импульса нормальной силы с помощью рис. 2.5, а. Так как угол $-\Delta\theta$ является малым, то дугу F_2F_2' можно заменить касательной, проведенной в точке F_2 .

Тогда на основании подобия треугольников $F_2F_2'F_2''$ и F_2MK имеем

$$\frac{F_2F_2''}{MK} = \frac{F_2F_2'}{F_2M} = \frac{F_2'F_2''}{F_2K},$$

но

$$MK = r \sin(180^\circ - \vartheta) = r \sin \vartheta, \quad MF_2 = r_2,$$

$$KF_2 = 2c - r \cos(180^\circ - \vartheta) = 2c + r \cos \vartheta,$$

$$F_2F_2' = -r_2 2\Delta\theta_V.$$

Отсюда находим

$$F_2F_2'' = -2r \sin \vartheta_V \Delta\theta_V,$$

$$F_2'F_2'' = -2(2c + r \cos \vartheta) \Delta\theta_V.$$

Учитывая, что

$$\frac{F_2'F_2''}{F_1F_2''} = \operatorname{tg} \Delta\omega_N, \quad F_2F_2'' = -2\Delta c_N,$$

где $2\Delta c_N$ — изменение межфокусного расстояния под действием нормального импульса,

получим

$$\operatorname{tg} \Delta\omega_N = - \frac{2e + \frac{r}{a} \cos \vartheta}{e - \frac{r}{a} \sin \vartheta \Delta\theta_V} \Delta\theta_V \quad (2.40)$$

и

$$\Delta c_N = r \sin \vartheta \Delta\theta_V.$$

Подставляя Δc_N в формулу (2.31), с учетом того, что $\Delta a_N = 0$, находим изменение эксцентриситета под действием нормального импульса

$$\Delta e_N = \frac{r}{a} \sin \vartheta \Delta\theta_V. \quad (2.41)$$

Формулы (2.40) и (2.41) совместно с выражением (2.39) позволяют определить изменение аргумента перигея (в общем случае, перицентра) и эксцентриситета эллиптической орбиты под действием нормального импульса.

В том случае, если орбита имеет заметный эксцентриситет, при котором выполняется условие $e \gg \Delta\theta_V$, в выражении (2.40) можно принять $\operatorname{tg} \Delta\omega_N \simeq \Delta\omega_N$, а также пренебречь вторым сла-

гаемым в знаменателе. В этом случае после подстановки выражения (2.24, б) формула (2.40) примет вид

$$\Delta\omega_N = \left(2 + \frac{r}{ae} \cos \vartheta \right) \frac{J_N}{V}. \quad (2.42)$$

Подставляя также формулу (2.24, б) в (2.41), получим

$$\Delta e_N = - \frac{r}{aV} \sin \vartheta J_N. \quad (2.43)$$

Аналогичным образом для гиперболической орбиты (см. рис. 2.5, б) имеем соотношения

$$\frac{F_2 F_2''}{MK} = \frac{F_2 F_2'}{MF_2} = \frac{F_2' F_2''}{KF_2},$$

но

$$MK = r \sin \vartheta, \quad MF_2 = r_2,$$

$$KF_2 = 2C_\Gamma + r \cos(180^\circ - \vartheta) = 2C_\Gamma - r \cos \vartheta, \quad F_2 F_2' = -r_2 2\Delta\theta_V.$$

Так как в случае гиперболической орбиты $\Delta C_\Gamma / C_\Gamma \ll 1$, то можно считать, что

$$\operatorname{tg} \Delta\omega_{\Gamma N} \simeq \omega_{\Gamma N} \simeq \frac{F_2' F_2''}{F_1 F_2}.$$

Аналогично случаю эллиптической орбиты

$$F_2 F_2'' = 2\Delta C_{\Gamma N}.$$

С учетом приведенных соотношений находим

$$\Delta\omega_{\Gamma N} = - \left(2 - \frac{r}{a_\Gamma e_\Gamma} \cos \vartheta \right) \Delta\theta_V$$

и

$$\Delta C_{\Gamma N} = -r \sin \vartheta \Delta\theta_V.$$

После подстановки $\Delta C_{\Gamma N}$ в формулу (2.31) получим

$$\Delta e_{\Gamma N} = - \frac{r}{a_\Gamma} \sin \vartheta \Delta\theta_V.$$

Таким образом, изменение эксцентриситета для гиперболической орбиты определяется аналогично случаю эллиптической орбиты. После подстановки выражения (2.24, б) формулы для $\Delta\omega_{\Gamma N}$ и $\Delta e_{\Gamma N}$ примут вид

$$\Delta\omega_{\Gamma N} = \left(2 - \frac{r}{a_\Gamma e_\Gamma} \cos \vartheta \right) \frac{J_N}{V}, \quad (2.44)$$

$$\Delta e_{\Gamma N} = - \frac{r}{a_\Gamma} \sin \vartheta \frac{J_N}{V}. \quad (2.45)$$

Маневры, осуществляемые под действием импульсов тангенциальной и нормальной сил, не приводят к изменению положения плоскости орбиты в пространстве. Эти маневры принято называть продольными. В результате продольных маневров изменяются такие элементы орбиты, как большая полуось, эксцентриситет, аргумент перигея и начальное значение истинной аномалии (или момент прохождения перигея).

Величина управляющего импульса равна характеристической скорости ракетного двигателя, создающего тягу $\bar{P}$ при выполнении маневра. Величина характеристической скорости, как известно, однозначно связана с расходом топлива в процессе работы двигателя. Поэтому в целях экономии расхода топлива в процессе маневра желательно, чтобы управляющий импульс был минимальным.

Определим условия, при которых для изменения того или иного элемента эллиптической орбиты в результате продольного маневра требуется минимальный импульс. Это достигается, как видно из выражений (2.27), (2.35), (2.36), (2.42) и (2.43), выбором истинной аномалии точки приложения импульса. Она должна соответствовать максимуму коэффициентов перед импульсами в указанных выражениях.

Из выражения (2.27) непосредственно следует, что для изменения большой полуоси целесообразно прикладывать тангенциальный импульс в перигее орбиты. В апогее потребуются максимальный импульс для изменения большой полуоси на ту же величину. Исследование выражения (2.35) на экстремум после подстановки равенств (1.9) и (1.15) показывает, что для изменения эксцентриситета необходимо прикладывать тангенциальный импульс в перигее орбиты. Потребная величина минимального импульса при этом определяется формулой

$$J_{T \min} = \frac{av_0}{2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \Delta e.$$

Аналогичные исследования равенства (2.36) дают следующее приближенное экстремальное значение ϑ_0 истинной аномалии:

$$\cos \vartheta_0 = -\frac{2e}{1+e^2}.$$

Такому значению ϑ_0 соответствует точка M_0 или M_0' на рис. 2.4. а. Приложение тангенциального импульса в этой точке будет оптимальным; его величина определяется формулой

$$J_{T \min} = \frac{aev_0}{2} \sqrt{\frac{1+e^2}{1-e^2}} \Delta \omega.$$

Тот факт, что точка M_0 близка к оптимуму, нетрудно установить из физических соображений, используя сформулированный выше вывод. Действительно, тангенциальный импульс, приложенный

в этой точке, приводит к смещению второго фокуса по перпендикуляру к первоначальной линии апсид, что дает максимальное изменение аргумента перигея при определенном значении Δr_2 . Заметим, что при этом эксцентриситет орбиты не меняется. В последнем можно убедиться также подстановкой выражения для ϑ_a в формулу (2.35). Из формулы (2.36) также следует, что тангенциальный импульс, приложенный в перигее или апогее, не меняет величину аргумента перигея, что также вполне естественно, так как при этом второй фокус смещается вдоль первоначальной линии апсид.

Исследование выражения (2.43) на экстремум после подстановки формул (1.9) и (1.15) показывает, что для изменения эксцентриситета потребуется минимальный нормальный импульс

$$J_{N \min} = - \frac{av_0}{\sqrt{1-e^4}} \Delta e,$$

если он прикладывается в точке M_a (или M_a'). При этом, как видно из равенства (2.42), $\Delta \omega_N = 0$. Оптимальной точкой приложения нормального импульса для изменения аргумента перигея является перигей (или апогей) орбиты. Потребный минимальный импульс определяется формулой

$$J_{N \min} = \frac{ae v_0}{\sqrt{1-e^2}} \Delta \omega.$$

Из формулы (2.43) видно, что при этом $\Delta e_N = 0$.

Отмеченные свойства непосредственно следуют из приведенного выше соответствующего вывода. Действительно, нормальный импульс, приложенный в точках M_a и M_a' (см. рис. 2.5, а), приводит к смещению второго фокуса орбиты вдоль первоначальной линии апсид. В результате все смещение переходит в изменение межфокусного расстояния и, соответственно, к наибольшему изменению эксцентриситета для данного импульса. Поворот линии апсид отсутствует и аргумент перигея не меняется. В перигее и апогее орбиты нормальный импульс смещает второй фокус по перпендикуляру к первоначальной линии апсид, что обеспечивает максимальное изменение аргумента перигея и нулевое изменение эксцентриситета.

Сравнивая выражения для минимальных значений тангенциального и нормального импульсов, замечаем, что использование тангенциального импульса более целесообразно, так как его потребное значение примерно вдвое меньше. Следовательно, для изменения элементов орбиты; a , e , ω необходимо прикладывать тангенциальный импульс в перигее орбиты или в точках M_a и M_a' , соответственно.

Орбитальные маневры, связанные с изменением положения плоскости орбиты в пространстве, называются *боковыми*. Рас-

смотрим боковые маневры, осуществляемые под действием импульса бинормальной управляющей силы P_B . Для этого воспользуемся третьим уравнением системы (2.24). Оно описывает поворот вектора орбитальной скорости $\bar{V}$ вокруг нормали к орбите в точке приложения импульса (рис. 2.6). После этого космический аппарат будет двигаться по орбите, плоскость которой будет проходить через центр тяготения и новый вектор скорости. Следовательно, плоскость орбиты повернется относительно сво-

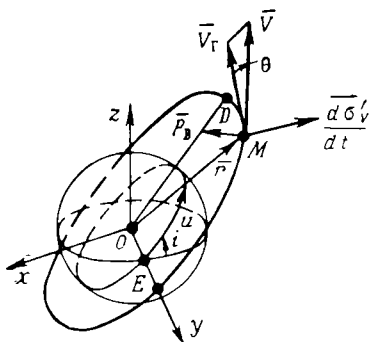


Рис. 2.6. Схема поворота плоскости орбиты под действием боковой силы

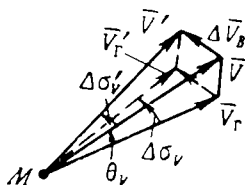


Рис. 2.7. Действие бокового импульса

его первоначального положения вокруг радиуса-вектора точки приложения импульса бинормальной управляющей силы на угол $\Delta\sigma$, который может быть найден из пирамиды (рис. 2.7), образованной векторами $\bar{V}$, $\bar{V}'$, $\bar{V}_r$, $\bar{V}'_r$ (здесь $|\bar{V}| = |\bar{V}'|$ и $|\bar{V}_r| = |\bar{V}'_r|$, причем V_r — горизонтальная проекция вектора скорости). На основании рис. 2.9 имеем

$$\begin{aligned} V_r &= V \cos \theta_V, \\ \Delta V_B &= 2V \sin \frac{\Delta \sigma'_V}{2}, \\ \Delta V_B &= 2V_r \sin \frac{\Delta \sigma_V}{2}. \end{aligned}$$

Здесь
$$\Delta V_B = J_B = \int_0^{t_n} \frac{P_B}{m} dt. \quad (2.46)$$

Отсюда

$$\sin \frac{\Delta \sigma_V}{2} = \frac{1}{\cos \theta_V} \sin \frac{\Delta \sigma'_V}{2},$$

или при малых $\Delta\sigma_V$ (и соответственно $\Delta\sigma'$)

$$\Delta\sigma_V = \frac{\Delta\sigma'_V}{\cos \theta_V}.$$

Подставляя выражение для $\Delta\sigma'_V$ и учитывая равенство (2.46), получим

$$\Delta\sigma_V = \frac{J_B}{V \cos \theta_V}. \quad (2.47)$$

Эта формула позволяет определить угол поворота плоскости орбиты космического аппарата при воздействии кратковременного управляющего импульса.

Дифференцируя формулу (2.47) по времени с учетом равенства (2.46), имеем

$$\frac{d\Delta\sigma_V}{dt} = \frac{P_B}{mV \cos \theta_V}. \quad (2.48)$$

Умножим числитель и знаменатель правой части полученного равенства на r . Замечаем, что $M = P_B r$ представляет собой момент боковой силы относительно центра Земли, а

$$K = mVr \cos \theta_V = 2\lambda_c m \simeq \text{const}$$

есть не что иное как кинетический момент орбитального движения. В результате формула (2.48) приобретает вид

$$\frac{d\Delta\sigma_V}{dt} = \frac{M}{K},$$

аналогичный формуле, выражающей угловую скорость прецессии гироскопа с кинетическим моментом $\bar{K}$ под действием внешнего момента $\bar{M}$, перпендикулярного $\bar{K}$. Учитывая также, что плоскость орбиты невозмущенного движения космического аппарата (а следовательно, и вектор $\bar{K}$) сохраняет неизменным свое положение в пространстве, причем величина K является постоянной, можно отметить аналогию свойств плоскости орбиты и гироскопа. Это позволяет сформулировать следующий важный вывод.

Плоскость орбиты космического аппарата можно рассматривать как некоторый эквивалентный гироскоп, кинетический момент которого равен кинетическому моменту орбитального движения. Действие боковой (бинормальной) управляющей силы вызывает поворот плоскости орбиты, аналогичный прецессии гироскопа под действием момента этой силы относительно центра тяготения.

Для определения изменений элементов орбиты, характеризующих ее положение в пространстве, разложим угловую скорость $d\Delta\sigma/dt$ по направлениям OD и OE (см. рис. 2.6). Состав-

ляющая по направлению OE представляет собой скорость изменения наклона орбиты

$$\frac{di}{dt} = \frac{d\Delta\sigma_V}{dt} \cos u.$$

После подстановки формулы (2.48) имеем

$$\frac{di}{dt} = \frac{P_B \cos u}{mV \cos \theta_V}. \quad (2.49)$$

Составляющая на направление OD

$$\omega_{0D} = \frac{d\Delta\sigma_V}{dt} \sin u$$

вызывает изменение долготы восходящего узла и аргумента перигея. На основании рис. 2.8 имеем

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\omega_{0D}}{\sin i}, \quad \frac{d\omega_B}{dt} = -\frac{\omega_{0D}}{\operatorname{tg} i},$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{d\Delta\sigma_V}{dt} \frac{\sin u}{\sin i}, \\ \frac{d\omega_B}{dt} &= -\frac{d\Delta\sigma_V}{dt} \frac{\sin u}{\operatorname{tg} i}, \end{aligned}$$

и после подстановки выражения (2.48) окончательно находим

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{P_B \sin u}{mV \cos \theta_V \sin i}, \quad (2.50)$$

$$\frac{d\omega_B}{dt} = -\frac{P_B \sin u}{mV \cos \theta_V \operatorname{tg} i}. \quad (2.51)$$

Рис. 2.8. Изменение элементов орбиты при боковом маневре

Интегрируя выражения (2.49), (2.50) и (2.51) по времени t_n , с учетом равенства (2.46) получим

$$\Delta i = \frac{\cos u}{V \cos \theta_V} J_B,$$

$$\Delta \Omega = \frac{\sin u}{V \cos \theta_V \sin i} J_B, \quad (2.52)$$

$$\Delta \omega_B = -\frac{\sin u}{V \cos \theta_V \operatorname{tg} i} J_B.$$

Формулы (2.52) позволяют определить изменения элементов орбиты, вызванные действием бинормального управляющего импульса J_B .

Анализ выражения (2.52) позволяет определить оптимальные точки приложения импульса J_B . Действительно, для изменения наклона орбиты, очевидно, целесообразно прикладывать им-

пульс в точке с аргументом широты $u=0$ или π (в восходящем или нисходящем узле). Из указанных двух точек нужно выбрать ту, в которой величина радиуса-вектора является наибольшей. Для доказательства этого положения преобразуем первое выражение (2.52) с помощью равенства (1.6), получим

$$\Delta i = -\frac{r \cos u}{2\lambda_c} J_B.$$

Наибольшее значение Δi при данном J_B и u имеет место при наибольшем значении r . Следовательно, при

$$-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$$

импульс J_B следует прикладывать в нисходящем узле (см. рис. 1.5), а при

$$\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{3}{2} \pi$$

в восходящем узле орбиты. При $\omega = \pm \pi/2$ обе указанные точки эквивалентны. Заметим, что такое приложение импульса J_B не вызывает изменения долготы восходящего узла.

Для изменения долготы восходящего узла импульс J_B целесообразно прикладывать в точках вертекса (при $u = \pi/2$ — точка верхнего вертекса, а при $u = -\pi/2$ точка нижнего вертекса). Если $-\pi < \omega < 0$, то необходимо использовать верхний вертекс, а если $0 < \omega < \pi$, то нижний вертекс. В случае $\omega = 0, \pi$ обе точки эквивалентны. Наклонение орбиты, как видно из первого выражения (2.52), при этом не меняется.

В общем случае импульсная управляющая сила $\bar{P}$ может быть ориентирована произвольно. Если ее разложить на рассмотренные выше три составляющие: тангенциальную, нормальную и бинормальную, то с помощью ранее полученных формул можно найти соответствующие изменения элементов орбиты. Учитывая, что уравнения (2.24) являются линейными и независимыми, на основании принципа суперпозиции, изменения элементов орбиты под действием импульса силы $\bar{P}$ можно вычислить суммированием соответствующих изменений от каждой составляющей.

Суммируя равенства (2.26), (2.35), (2.36), (2.42), (2.43) и (2.52), получим выражения, определяющие изменения элементов эллиптической орбиты в случае произвольной ориентации управляющего импульса:

$$\Delta a = \frac{2a^2 V}{V_{IR}^2 R} J_T,$$

$$\Delta e = \frac{2aV(e + \cos \vartheta)}{V_{IR}^2 (2a - r)} J_T - \frac{r}{aV} \sin \vartheta J_N,$$

$$\Delta\omega = \frac{2aVr \sin \vartheta}{eV_{IR}^2 R (2a-r)} J_T + \frac{1}{V} \left(2 + \frac{r}{ae} \cos \vartheta \right) J_N - \frac{\sin u}{V \cos \theta_V \operatorname{tg} i} J_B, \quad (2.53)$$

$$\Delta\Omega = \frac{\sin u}{V \cos \theta_V \sin i} J_B,$$

$$\Delta i = \frac{\cos u}{V \cos \theta_V} J_B.$$

Для определения изменений элементов гиперболической орбиты под действием управляющего импульса с произвольной ориентацией достаточно просуммировать равенства (2.27), (2.37), (2.38), (2.44), (2.45) и (2.52).

В ряде случаев требуется производить оценку действия составляющих импульса управляющей силы по осям орбитальной системы координат. Для этого достаточно спроектировать импульсы J_T и J_N на трансверсаль и вертикаль (радиус-вектор). Осуществляя указанное преобразование выражений (2.53) с помощью формул (1.45), находим

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{2e \sin \vartheta}{v_0 \sqrt{1-e^2}} J_y + \frac{2\sqrt{1-e^2} a}{v_0 r} J_x, \\ \Delta e &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{v_0 ae} \left[\frac{a(1-e^2)}{r} - \frac{r}{a} \right] J_x + \frac{\sqrt{1-e^2} \sin \vartheta}{v_0 a} J_y, \\ \Delta\omega &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{v_0 ae} \left(\frac{2+e \cos \vartheta}{1+e \cos \vartheta} \right) \sin \vartheta J_x - \\ &\quad - \frac{\sqrt{1-e^2} \cos \vartheta}{v_0 ae} J_y - \frac{r \operatorname{ctg} i \sin u}{v_0 a^2 \sqrt{1-e^2}} J_z, \\ \Delta\Omega &= \frac{r \sin u}{v_0 a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} J_z, \\ \Delta i &= \frac{r \cos u}{v_0 a^2 \sqrt{1-e^2}} J_z. \end{aligned}$$

Эти выражения позволяют определить изменения элементов орбиты при воздействии на космический аппарат импульсов J_x, J_y, J_z трансверсальной P_x , вертикальной P_y и боковой P_z управляющих сил, соответственно.

§ 2.3. ИМПУЛЬСНЫЕ МАНЕВРЫ ОРБИТАЛЬНОГО ПЕРЕХОДА

В предыдущем параграфе был проведен анализ изменения элементов орбиты при действии на космический аппарат импульсной тяги. Необходимость в изменении отдельных элементов орбиты может иногда возникнуть при выполнении корректирующих маневров. Например, в ряде практических случаев

возникает необходимость введения поправок в период обращения спутника либо с целью ликвидации ошибок выведения, либо для компенсации возмущающего действия атмосферы. Для этого достаточно выполнить маневр, в результате которого изменится лишь большая полуось орбиты, которая однозначно связана с периодом обращения.

Чаще всего маневр выполняется для перехода космического аппарата с одной орбиты на другую. При этом могут изменяться сразу несколько элементов орбиты (иногда все). Такой переход можно осуществить путем последовательного изменения отдельных элементов орбиты.

Однако это не всегда дает наилучшие результаты как с точки зрения времени орбитального перехода, так и с точки зрения суммарного управляющего импульса (расхода топлива), затрачиваемого на его выполнение. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть специально вопрос о переходе космического аппарата с одной орбиты (начальной) на другую.

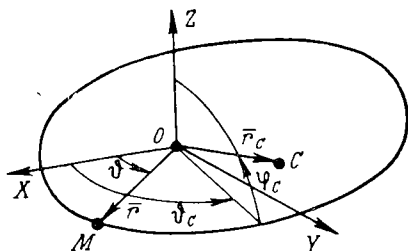


Рис. 2.9. Одноимпульсный маневр

Если орбиты имеют одну общую точку, то возможен одноимпульсный орбитальный переход, который осуществляется за счет маневра, выполняемого под действием импульсной тяги, прикладываемой к аппарату в точке (точнее вблизи точки) пересечения орбит. В общем случае орбитальный переход можно осуществить путем выполнения нескольких импульсных маневров. На практике чаще всего применяется двухимпульсный переход. В качестве примера ниже рассматривается случай двухимпульсного орбитального перехода между компланарными орбитами.

Одноимпульсный орбитальный переход. Для анализа одноимпульсного маневра воспользуемся в качестве исходной перигейной системой координат $OXYZ$ первоначальной орбиты (рис. 2.9). Проведем через ось OZ и точку C , в которую должен выйти космический аппарат, плоскость до пересечения с плоскостью XOY . Положение точки C в выбранной системе координат однозначно определяется координатами r_c, φ_c, θ_c .

Чтобы обеспечить выход космического аппарата в точку C , в общем случае некомпланарного перехода необходимо в точке M совершить боковой маневр, в результате которого плоскость орбиты повернется на некоторый угол σ и будет проходить через точку C , а также продольный маневр, в результате которого расстояние аппарата от точки O на угловом удалении $\Delta\theta_c = \theta_c - \theta$ от точки M станет равным r_c . При условии малости угла φ_c по-

требный угол поворота плоскости орбиты можно определить по формуле

$$\sigma_V \simeq \frac{\varphi_C}{\sin(\vartheta_C - \vartheta)}. \quad (2.54)$$

Для заданной точки орбиты (задана истинная аномалия), в которой прикладывается управляющий импульс, выполнение бокового маневра возможно лишь при вполне определенном импульсе, обеспечивающем поворот плоскости орбиты на угол, определяемый формулой (2.54). В этом случае оптимизация маневра в целом сводится, как и в случае компланарного перехода, к оптимизации продольного маневра. Если имеется возможность выбора точки приложения управляющего импульса, то возможна оптимизация бокового маневра по минимуму расхода топлива (минимуму бокового управляющего импульса).

Приравнивая выражения (2.54) и (2.47) с учетом выражений (1.8) и (1.45), имеем

$$J_B = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \frac{1 + e \cos \vartheta}{\sin(\vartheta_C - \vartheta)} \varphi_C. \quad (2.55)$$

Условия оптимизации соответствуют минимуму функции

$$f_B(\vartheta) = \frac{1 + e \cos \vartheta}{\sin(\vartheta_C - \vartheta)}.$$

Дифференцируя функцию по ϑ и приравнивая нулю, после несложных преобразований находим

$$e \cos \vartheta_C + \cos(\vartheta_C - \vartheta) = 0.$$

Отсюда экстремальное значение истинной аномалии будет

$$\vartheta_{0B} = \vartheta_C - \arccos(-e \cos \vartheta_C). \quad (2.56)$$

Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что условие (2.56) соответствует минимуму $f_B(\vartheta)$. В случае круговой орбиты ($e=0$) имеем

$$\Delta \vartheta_{0B} = \vartheta_C - \vartheta_{0B} = \frac{\pi}{2}.$$

При малых эксцентриситетах разность истинных аномалий $\Delta \vartheta_{0B}$ близка к $\pi/2$. В общем случае $\Delta \vartheta_{0B}$ является периодической функцией ϑ_C . Ее значения повторяются после изменения ϑ_C на 2π . Среднее значение ϑ_{0B} за период равно $\pi/2$. Максимальные отклонения $\Delta \vartheta_{0B}$ от $\pi/2$ будут при $\vartheta_C = 0, \pi$. Они могут быть найдены по формуле $\Delta \vartheta_{0B \max}^* = \arcsin e$. При больших эксцентриситетах $\Delta \vartheta_{0B \max}^*$ может быть довольно значительной. Так, при $e=0,5$ получим $\Delta \vartheta_{0B \max}^* = \pi/6$. Следовательно, в этом случае условие оптимальности бокового маневра требует прикладывать управ-

ляющий импульс на удалении $\Delta\vartheta_0$ от точки C , изменяющемся в пределах от 60° (при $\vartheta_C = \pi$) до 120° (при $\vartheta_C = 0$).

Подставляя выражение (2.56) в формулу (2.55), получим

$$J_{B \min} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1 + e \left[\sin \vartheta_C \left(\frac{\pi}{2} + e \cos \vartheta_C \right) + e \cos^2 \vartheta_C \right]}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \vartheta_C}} \varphi_C.$$

Эта формула определяет требуемое значение управляющего импульса при выполнении оптимального бокового маневра в зависимости от координат (φ_C, ϑ_C) точки C .

Рассмотрим возможности оптимизации продольного маневра. При этом будем полагать, что изменение высоты полета в заданной точке $\Delta H = r_C - r(\vartheta_C)$ удовлетворяет условию $\Delta H/r(\vartheta_C) \ll 1$,

где $r(\vartheta_C)$ — величина радиуса-вектора первоначальной орбиты в точке с истинной аномалией ϑ_C .

Тогда изменение высоты ΔH может быть выражено через изменения элементов орбиты варьированием выражения (1.9) после подстановки в него равенства (1.13)

$$\Delta H = \left(\frac{\partial r}{\partial a} \right)_{\vartheta=\vartheta_C} \Delta a + \left(\frac{\partial r}{\partial e} \right)_{\vartheta=\vartheta_C} \Delta e + \left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta=\vartheta_C} \Delta \vartheta_0, \quad (2.57)$$

где

$$\left(\frac{\partial r}{\partial a} \right)_{\vartheta=\vartheta_C} = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \vartheta_C},$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial e} \right)_{\vartheta=\vartheta_C} = -a \frac{2e + (1 + e^2) \cos \vartheta_C}{(1 + e \cos \vartheta_C)^2},$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta=\vartheta_C} = ae \frac{(1 - e^2) \sin \vartheta_C}{(1 + e \cos \vartheta_C)^2}.$$

Маневр выполняется под действием управляющего импульса $\vec{J}$, направленного под углом α к вектору скорости $\vec{V}$ в точке M (рис. 2.10). Разложим его на направление касательной и нормали к орбите. В результате находим

$$J_T = J \cos \alpha, \quad J_N = -J \sin \alpha.$$

Под действием этих импульсов элементы орбиты a, e, ϑ_0 получают приращения $\Delta a, \Delta e, \Delta \vartheta_0$. Подставляя выражения импульсов J_T и J_N в соответствующие уравнения (2.53) и выполняя несложные

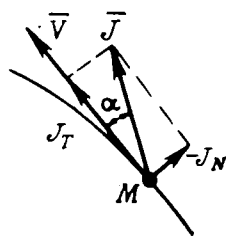


Рис. 2.10. Схема приложения импульса

преобразования с использованием формул (1.9), (1.13), (1.15), (1.17) и (1.24), имеем

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \left(\frac{2}{v_0 \sqrt{1-e^2}} \right) \sqrt{1+e^2+2e\cos\vartheta} J \cos\alpha, \\ \Delta e &= \left(\frac{2\sqrt{1-e^2}}{av_0} \right) \frac{e+\cos\vartheta}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\vartheta}} J \cos\alpha + \\ &+ \left[\frac{(1-e^2)^{3/2}}{av_0} \right] \frac{1}{(1+e\cos\vartheta)\sqrt{1+e^2+2e\cos\vartheta}} J \sin\alpha. \\ \Delta\vartheta_0 &= - \left(\frac{2\sqrt{1-e^2}}{eav_0} \right) \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\vartheta}} J \cos\alpha + \\ &+ \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{av_0} \right) \frac{2e+(1+e^2)\cos\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)\sqrt{1+e^2+2e\cos\vartheta}} J \sin\alpha.\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в равенство (2.57). Тогда после несложных преобразований получим

$$\Delta H = f_H(\alpha, \vartheta) J. \quad (2.58)$$

Здесь

$$f_H(\alpha, \vartheta) = K_T^H \cos\alpha - K_N^H \sin\alpha,$$

где

$$\begin{aligned}K_T^H &= \left[\frac{2(1-e^2)^{3/2}}{v_0} \right] \frac{1 - \cos\Delta\vartheta}{(1+e\cos\vartheta_C)^2 \sqrt{1+e^2+2e\cos\vartheta}}, \\ K_N^H &= - \left[\frac{(1-e^2)^{3/2}}{v_0} \right] \frac{2e(\sin\vartheta_C - \sin\vartheta) + (1+e^2)\sin\Delta\vartheta}{(1+e\cos\vartheta_C)^2 (1+e\cos\vartheta) \sqrt{1+e^2+2e\cos\vartheta}}, \\ \Delta\vartheta &= \vartheta_C - \vartheta.\end{aligned}$$

При заданной ΔH условие оптимальности (минимум J) соответствует максимуму функции $f_H(\alpha, \vartheta)$. Исследуем эту функцию на экстремум, принимая в качестве независимой переменной α (истинную аномалию точки M считаем заданной). Дифференцируя $f_H(\alpha, \vartheta)$ по α и приравнявая полученную производную нулю, находим

$$\operatorname{tg}\alpha_* = \frac{-K_N^H}{K_T^H},$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha_* = \frac{2e(\sin\vartheta_C - \sin\vartheta) + (1+e^2)\sin\Delta\vartheta}{2(1+e\cos\vartheta)(1-\cos\Delta\vartheta)}. \quad (2.59)$$

Нетрудно убедиться, что экстремальное значение угла α , определяемое формулой (2.59), соответствует максимуму функции $f_H(\alpha, \vartheta)$. Преобразуем функцию $f_H(\alpha, \vartheta)$ следующим образом:

$$f_H(\alpha, \vartheta) = K_T^H \left[\cos \alpha - \frac{K_N^H}{K_T^H} \sin \alpha \right] = K_T^H (\cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha_* \sin \alpha),$$

или

$$f_H(\alpha, \vartheta) = \frac{K_T^H}{\cos \alpha_*} \cos(\alpha - \alpha_*).$$

Коэффициент, стоящий перед косинусом, не зависит от α . Следовательно, максимум $f_H(\alpha, \vartheta)$ достигается в том случае, когда

$$\cos(\alpha - \alpha_*) = 1,$$

или

$$\alpha = \alpha_*,$$

где α_* определяется формулой (2.59).

В случае круговой орбиты ($e=0$) формула (2.59) значительно упрощается

$$\operatorname{tg} \alpha_* = \frac{\sin \Delta \vartheta}{2(1 - \cos \Delta \vartheta)}.$$

Выполняя несложные тригонометрические преобразования, получим

$$\operatorname{tg} \alpha_* = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\Delta \vartheta}{2}. \quad (2.60)$$

Характер изменения α_* в зависимости от $\Delta \vartheta$ иллюстрируется графиками, приведенными на рис. 2.11, которые рассчитаны для $e=0$ и $e=0,1$ при $\vartheta=0$. Анализ этих графиков показывает, что при малых угловых расстояниях между точкой приложения управляющего импульса и точкой C оптимальный управляющий импульс близок к нормальному ($\alpha_* \approx \pi/2$ или $3/2\pi$). Если угловое расстояние $\Delta \vartheta_C$ близко к π , то оптимальным будет импульс, близкий к тангенциальному ($\alpha_* \approx 0$ или π).

Таким образом, при $\alpha = \alpha_*$

$$f_H(\alpha, \vartheta) = f_{H*}(\vartheta) = \frac{K_T^H}{\cos \alpha_*}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (2.58), найдем величину управляющего импульса J_* , потребного для выполнения маневра:

$$J_* = \frac{\cos \alpha_*}{K_T^H} \Delta H.$$

Эта формула позволяет при наличии необходимых вычислительных устройств определять на борту космического аппарата потребное значение J_* . Предварительно необходимо вычислить значение угла α_* по формуле (2.59) и коэффициент K_T^H . В случае круговой орбиты формула принимает более простой вид

$$J_* = \frac{v_0 \operatorname{cosec} \frac{\Delta\vartheta}{2}}{2 \sqrt{1 + 3 \sin^2 \frac{\Delta\vartheta}{2}}} \Delta H.$$

При возможности выбора точки приложения управляющего импульса можно оптимизировать маневр выбором истинной ано-

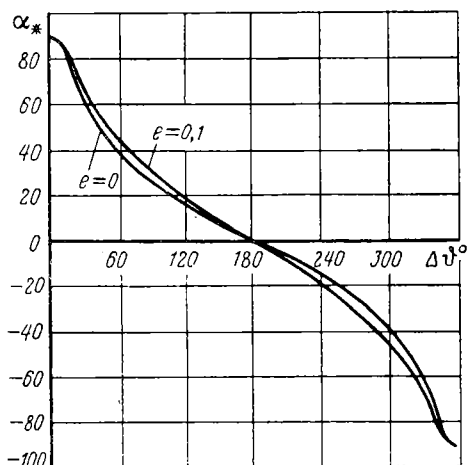


Рис. 2.11. Оптимальный угол наклона импульса к вектору скорости

малии ϑ точки M , которая обеспечивает минимум импульса J , направленного под углом α_* к касательной, для заданного изменения высоты в точке C . Для этого достаточно найти ϑ , соответствующее максимуму $f_{H*}(\vartheta)$. Условие экстремума этой функции соответствует уравнению

$$\frac{d}{d\vartheta} K_T^H - K_N^H \frac{d\alpha_*}{d\vartheta} = 0. \quad (2.61)$$

Поскольку K_T^H , K_N^H и α_* являются сложными функциями ϑ , исследование уравнения (2.61) в общем виде вызывает серьезные трудности и является чрезвычайно громоздким. Однако совершенно ясно, что истинная аномалия, удовлетворяющая этому уравнению, зависит от эксцентриситета орбиты и истинной аномалии точки C . Характерно, что условия оптимальности маневра

зависят лишь от формы (эксцентриситета) орбиты и не зависят от ее размера (большой полуоси). Это позволяет предварительно произвести расчет ϑ , как функции ϑ_C для возможных эксцентриситетов орбит космического аппарата, используя для решения уравнения (2.61) цифровые вычислительные машины, и иметь на борту соответствующие графики.

Уравнение (2.61) существенно упрощается в случае круговой орбиты. Подставляя в это уравнение K_T^H и K_N^H при $e=0$, а также α_* из равенства (2.59) после выполнения необходимых операций и преобразований, получим

$$\frac{1}{v_0} \left(2 + \frac{\cos^2 \alpha_*}{2 \sin^2 \frac{\Delta \vartheta}{2}} \right) \sin \Delta \vartheta = 0.$$

Решая это уравнение, находим $\Delta \vartheta = \pi$.

Следовательно, наименьшая величина управляющего импульса для изменения высоты в точке C на величину ΔH потребуется в том случае, если импульс прикладывается в противоположащей точке орбиты; при этом, как видно из формулы (2.59), $\alpha_* = 0$, т. е. управляющий импульс является тангенциальным. В результате такого маневра космический аппарат переходит с круговой орбиты на эллиптическую, перигей которой совпадает с точкой M , а апогей находится над точкой C исходной круговой орбиты.

Двухимпульсный орбитальный переход. При осуществлении двухимпульсного орбитального перехода к космическому аппарату последовательно прикладываются два импульса тяги управляющего двигателя: один в некоторой точке первоначальной орбиты, второй — в точке заданной орбиты. Под действием первого импульса аппарат переводится на орбиту перехода. Второй импульс после векторного суммирования со скоростью движения аппарата в конечной точке орбиты перехода обеспечивает полет по заданной орбите. Для каждой пары орбит существует бесчисленное множество орбит перехода, определяемых относительным положением точек начала и конца перехода, а также положением начальной точки на исходной орбите (или конечной точки на заданной орбите). Поэтому для анализа двухимпульсного перехода необходимо наложить определенное условие на переходную орбиту. В качестве примера рассмотрим два случая перехода между компланарными эллиптическими орбитами.

Положим, что начальная точка A_1 и конечная точка A_2 орбиты перехода находятся на угловом расстоянии, равном π . Отмечая элементы исходной орбиты индексами 1, а конечной — индексами 2 с учетом связи между истинными аномалиями точек A_1 и A_2 (рис. 2.12), имеем

$$\begin{aligned} \vartheta_2 &= \vartheta_1 + \pi, \\ \vartheta_{22} &= \vartheta_{11} - \Delta \vartheta_2 + \pi. \end{aligned}$$

Запишем уравнение (1.9) в точках A_1 и A_2 для исходной и переходной орбит, а также для заданной и переходной орбит, соответственно *

$$r_1 = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos \vartheta_{11}} = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta_1},$$

$$r_2 = \frac{p_2}{1 - e_2 \cos (\vartheta_{11} - \Delta \vartheta_2)} = \frac{p}{1 - e \cos \vartheta_1}.$$

Отсюда находим

$$p = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2},$$

$$e \cos \vartheta_1 = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}. \quad (2.62)$$

Равенства (2.62) определяют элементы p и e орбиты перехода при определенных значениях r_1 , r_2 и ϑ_1 .

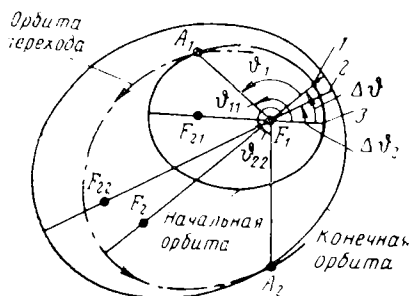


Рис. 2.12. Двухимпульсный переход с разностью аномалий 180° .

1—перигеи начальной орбиты; 2—перигеи орбиты перехода; 3—перигеи конечной орбиты

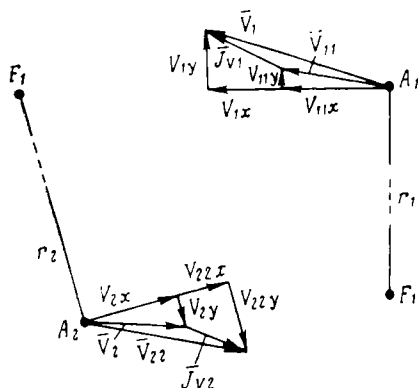


Рис. 2.13. Диаграммы скоростей

На основании выражений (1.8) и (1.45) имеем следующие формулы для горизонтальной и вертикальной составляющих скорости полета по эллиптической орбите:

$$V_x = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 - e \cos \vartheta), \quad V_y = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta.$$

* Элементы переходной орбиты приводятся без индексов.

Исходя из диаграммы скоростей (рис. 2.13), применяя эти формулы к точкам A_1 и A_2 с учетом их диаметральности и соотношений для истинных аномалий, получим

$$\begin{aligned}
 V_{11x} &= \sqrt{\frac{\mu}{p_1}} (1 + e_1 \cos \vartheta_{11}), \\
 V_{11y} &= \sqrt{\frac{\mu}{p_1}} (e_1 \sin \vartheta_{11}), \\
 V_{1x} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta_1), \\
 V_{1y} &= V_y = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta_1, \\
 V_{22x} &= \sqrt{\frac{\mu}{p_2}} [1 - e_2 \cos (\vartheta_{11} - \Delta \vartheta_2)], \\
 V_{22y} &= \sqrt{\frac{\mu}{p_2}} e_2 \sin (\vartheta_{11} - \Delta \vartheta_2), \\
 V_{2x} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 - e \cos \vartheta_1), \\
 V_{2y} &= -V_y.
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Суммарный управляющий импульс определяется выражением

$$\begin{aligned}
 J_V &= J_{V1} + J_{V2} = \sqrt{(V_{1x} - V_{11x})^2 + (V_y - V_{11y})^2} + \\
 &+ \sqrt{(V_{22x} - V_{2x})^2 + (V_{22y} + V_y)^2}.
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Так как элементы исходной (p_1, e_1) и конечной (p_2, e_2) орбит заданы и известно их относительное положение, определяемое углом $\Delta \vartheta_2$, то, как видно из выражений (2.63), для каждой начальной точки перехода, характеризуемой истинной аномалией ϑ_{11} , существуют вполне определенные значения V_{11x} , V_{11y} , V_{22x} и V_{22y} . В качестве независимого переменного в последнем выражении можно принять V_y . Тогда необходимое условие минимизации суммарного импульса будет

$$\frac{dJ_V}{dV_y} = 0.$$

Подставляя сюда выражение (2.64), после дифференцирования и несложных преобразований получим уравнение

$$\Delta V_{2x}^2 (V_y - V_{11y})^2 - \Delta V_{1x}^2 (V_y + V_{22y})^2 = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{1x} &= V_{1x} - V_{11x}, \\
 \Delta V_{2x} &= V_{22x} - V_{2x}.
 \end{aligned}$$

Корни этого уравнения

$$V_{y*} = \frac{V_{11y}\Delta V_{2x} \mp V_{22y}\Delta V_{1x}}{\Delta V_{2x} \pm \Delta V_{1x}}. \quad (2.65)$$

определяют экстремальные значения J_V .

Вторая производная при $V_y = V_{y*}$ может быть преобразована так:

$$\frac{d^2 J_V}{dV_y^2} = \left(\frac{1}{J_{V1}} + \frac{1}{J_{V2}} \right) \left[1 - \frac{(V_{11y} + V_{22y})^2}{(V_{11y} + V_{22y})^2 + (\Delta V_{1x} \pm \Delta V_{2x})^2} \right].$$

Учитывая, что V_{y*} является конечной величиной, можно утверждать, что

$$\Delta V_{2x} \pm \Delta V_{1x} \neq 0.$$

Следовательно, при $V_y = V_{y*}$

$$\frac{d^2 J_V}{dV_y^2} > 0.$$

Это неравенство является достаточным условием минимума. Поэтому после подстановки выражения (2.65) в выражение (2.64), получим

$$J_{V \min} = \sqrt{\Delta V_{1x}^2 \left[1 + \frac{(V_{11y} + V_{22y})^2}{(\Delta V_{2x} \pm \Delta V_{1x})^2} \right]} + \\ + \sqrt{\Delta V_{2x}^2 \left[1 + \frac{(V_{11y} + V_{22y})^2}{(\Delta V_{2x} \pm \Delta V_{1x})^2} \right]}.$$

Очевидно, что если ΔV_{1x} и ΔV_{2x} имеют одинаковые знаки, необходимо в формуле брать «+», а в противоположном случае — знак «—». Следовательно, имеем два выражения для минимального суммарного импульса:

— при одинаковых знаках ΔV_{1x} и ΔV_{2x}

$$J_{V \min} = \sqrt{(V_{11y} + V_{22y})^2 + (\Delta V_{2x} + \Delta V_{1x})^2},$$

— при различных знаках ΔV_{1x} и ΔV_{2x}

$$J_{V \min} = \sqrt{(V_{11y} + V_{22y})^2 + (\Delta V_{2x} - \Delta V_{1x})^2}.$$

Эти выражения определяют минимальную величину суммарного управляющего импульса при определенной точке A_1 исходной орбиты (и соответствующей ей точке A_2 заданной орбиты). Однако путем выбора точки A_1 (истинной аномалии ϑ_{11}) можно осуществить дальнейшую минимизацию импульса J_V . В результате получим импульс, соответствующий оптимальному пере-

ходу. Для определения условия оптимальности представим выражения для $J_{V \min}$ в виде

$$J_{V \min} = \sqrt{\frac{\mu}{p_1}} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad (2.66)$$

где

$$x_1 = \frac{(\Delta V_{1x})}{\sqrt{\frac{\mu}{p_1}}}, \quad x_2 = \frac{-(\Delta V_{2x})}{\sqrt{\frac{\mu}{p_1}}}, \quad y_1 = \frac{V_{11y}}{\sqrt{\frac{\mu}{p_1}}}, \quad y_2 = -\frac{V_{22y}}{\sqrt{\frac{\mu}{p_1}}}.$$

Безразмерные параметры x_1 , x_2 , y_1 , y_2 являются функциями истинной аномалии ϑ_{11} и с учетом выражений (2.63) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \left| \sqrt{\frac{p}{p_1}} - 1 \right| (1 + e_1 \cos \vartheta_{11}), \\ x_2 &= - \left| \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \right| \left| 1 - \sqrt{\frac{p}{p_2}} \right| [1 - e_2 \cos (\vartheta_{11} - \Delta \vartheta_2)], \\ y_1 &= e_1 \sin \vartheta_{11}, \\ y_2 &= \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} e_2 \sin (\vartheta_{11} - \Delta \vartheta_2). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Оптимизация орбитального перехода может быть выполнена минимизацией подкоренного выражения (2.66), так как p_1 является постоянной величиной. Следовательно, условие оптимальности будет

$$(x_1 - x_2) \frac{d}{d\vartheta_{11}} (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \frac{d}{d\vartheta_{11}} (y_1 - y_2) = 0.$$

После подстановки в это уравнение равенств (2.67) и представления p в виде функции ϑ_{11} с помощью равенства (2.62) и соотношений для истинных аномалий можно получить уравнение, которое определяет значение ϑ_{11} , соответствующее оптимальному переходу. Однако это уравнение является трансцендентным и его анализ в общем виде затруднителен. Поэтому воспользуемся приближенным решением, которое можно назвать условием практической оптимальности. Последнее может быть получено с учетом следующих соображений. При выбранном способе орбитального перехода переходная орбита (в геометрическом смысле) является средней между исходной и заданной (см. рис. 2.12),

причем величина p , как правило, незначительно меняется с изменением ϑ_{11} . Тогда, принимая

$$\left| \sqrt{\frac{p}{p_1}} - 1 \right| \approx \left| 1 - \sqrt{\frac{p}{p_2}} \right| \approx \text{const},$$

получим

$$\frac{d}{d\vartheta_{11}}(x_1 - x_2) \approx \left| \sqrt{\frac{p}{p_1}} - 1 \right| (y_1 - y_2).$$

Следовательно, условие практической оптимальности будет $y_1 = y_2$.

Отсюда

$$\text{tg } \vartheta_{11}^* = \frac{e_2 \sin \Delta \vartheta_2}{e_2 \cos \Delta \vartheta_2 - e_1 \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}}, \quad (2.68)$$

а оптимальный импульс

$$J_{V \text{ опт}} = (x_1 - x_2) \sqrt{\frac{p}{p_1}}.$$

Равенство (2.68) дает два значения истинной аномалии ϑ_{11} , отвечающих условию оптимальности. Только в одном частном случае, когда

$$e_1 \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \ll e_2 \cos \Delta \vartheta_2, \quad \text{tg } \Delta \vartheta_{11}^* \approx \text{tg } \Delta \vartheta_2$$

и истинная аномалия точки начала перехода имеет одно значение $\vartheta_{11}^* = \Delta \vartheta_2$.

Проанализируем случай касательного перехода, когда переходная орбита касается в точке A_1 исходной, а в точке A_2 заданной орбиты. При этом будем полагать, что $a_2 > a_1$.

Если орбиты не пересекаются, т. е. выполняется условие $a_1 < a < a_2$, то, как видно из рис. 2.14, $F_2 F_{21} = F_2 A_1 - F_{21} A_1$, $F_2 F_{22} = F_{22} A_2 - F_2 A_2$.

Учитывая следующие равенства:

$$\begin{aligned} F_1 A_1 + F_{21} A_1 &= 2a_1, & F_1 A_2 + F_{22} A_2 &= 2a_2, \\ F_1 A_1 + F_2 A_1 &= 2a, & F_1 A_2 + F_2 A_2 &= 2a, \end{aligned} \quad (2.69)$$

которые отражают основное свойство эллипса применительно к точкам A_1 и A_2 , получим

$$F_2 F_{21} + F_2 F_{22} = 2(a - a_1) + 2(a_2 - a) = 2(a_2 - a_1) = \text{const}.$$

Это равенство позволяет сформулировать следующую теорему. При касательном орбитальном переходе между непересекающимися эллиптическими орбитами геометрическое место вторых

фокусов переходной орбиты является эллипсом, фокусы которого совпадают со вторыми фокусами исходной и заданной орбит, а большая полуось равна разности больших полуосей этих орбит.

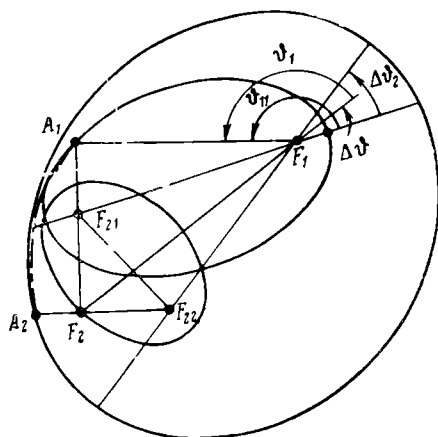


Рис. 2.14. Двухимпульсный касательный переход между непересекающимися орбитами

При пересекающихся орбитах $a > a_2 > a_1$ на основании рис. 2.15 имеем $F_2F_{21} = F_2A_1 - F_{21}A_1$, $F_2F_{22} = F_2A_2 - F_{22}A_2$. Используя соотношение (2.93), находим

$$F_2F_{21} - F_2F_{22} = 2(a_1 - a) - 2(a_2 - a) = -2(a_2 - a_1) = \text{const.}$$

Отсюда следует теорема. При касательном орбитальном переходе между пересекающимися эллиптическими орбитами гео-

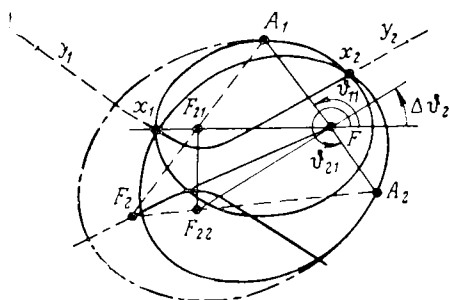


Рис. 2.15. Двухимпульсный касательный переход между пересекающимися орбитами

метрическое место вторых фокусов переходной орбиты является гиперболой, фокусы которой совпадают со вторыми фокусами

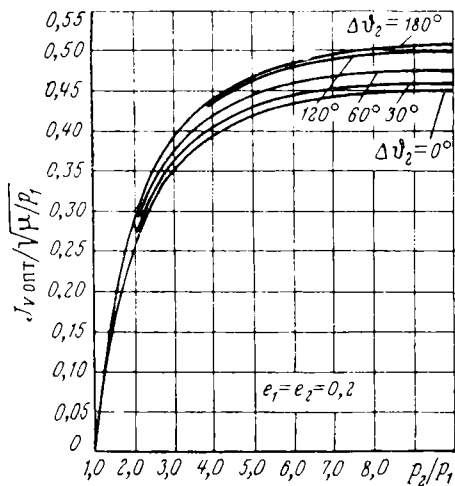


Рис. 2. 16. Зависимость величины импульса от отношения фокальных параметров конечной и начальной орбит для практически оптимального перехода

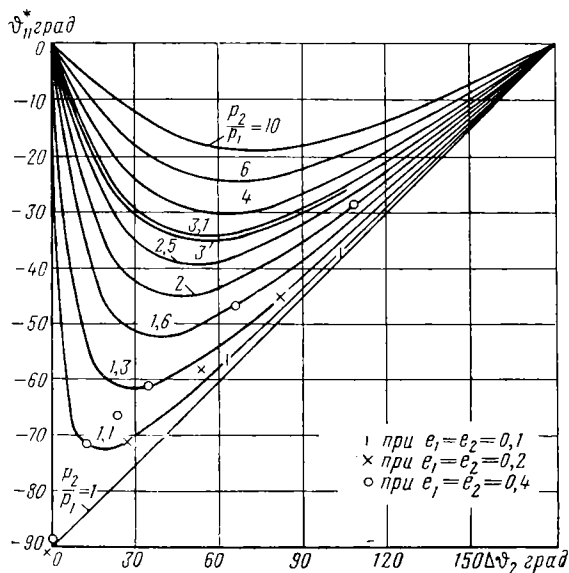


Рис. 2. 17. Зависимость истинной аномалии точки начала перехода от углового расстояния между перигелиями начальной и конечной орбит

исходной и заданной орбит, а большая полуось равна разности больших полуосей орбит.

Каждому из положений фокуса на указанных кривых (эллипсе или гиперболе) соответствует определенная орбита перехода, характеризующаяся точкой A_1 (ее истинной аномалией ϑ_{11}). При определенном значении ϑ_{11} имеет место оптимальный переход с минимальным суммарным импульсом.

Расчеты, выполненные в работе [117], показывают, что истинные аномалии ϑ_{11} и величины импульсов при оптимальных переходах в обоих рассмотренных случаях (когда разность истинных аномалий точек A_1 и A_2 равна π и в случае касательного перехода) очень близки и мало отличаются от соответствующих значений для оптимального перехода, полученного путем вычислений на цифровой машине без ограничений орбиты перехода. Поэтому для оценки условий оптимального перехода между эллиптическими орбитами можно использовать полученные выше выражения (2.66) и (2.68). В качестве иллюстрации на рис. 2.16 приведены графики зависимости $J_{V \text{ опт}} / \sqrt{\mu/p_1}$ от p_2/p_1 для нескольких значений $\Delta\vartheta_2$ (отмечены на графиках в градусах) при $e_1=e_2=0,2$, а на рис. 2.17 графики ϑ_{11}^* в функции $\Delta\vartheta_2$ (на графиках отмечены значения p_2/p_1) при $e_1=e_2$.

Указанные выше расчеты также показывают, что в случае непересекающихся орбит касательный переход очень близок к оптимальному для любой начальной точки перехода (любого значения ϑ_{11}). При пересекающихся орбитах касательный переход является удовлетворительным лишь в точках A_1 , соответствующих истинному оптимуму, т. е. при $\vartheta_{11} \approx \vartheta_{11}^*$. В остальных точках требуемый импульс может значительно отличаться от оптимального. Оптимальной переходной орбите соответствует второй фокус, находящийся во внутренней области исходной и заданной орбит.

Действительно, по мере перемещения точки F (см. рис. 2.14) из внутренней области к любой из точек пересечения $p \rightarrow 0$ и в пределе переходной эллипс вырождается в прямую с углом перехода 0 или 2π . Таким образом, той части гиперболы, которая заключена между точками x_1 и x_2 соответствует эллиптическая орбита. Если точку F перемещать еще дальше от точки x_1 или x_2 , то $a \rightarrow 0$. В пределе при $a=0$ (точки y_1 и y_2) переход осуществляется по прямой линии, касательной к обоим эллипсам. В промежутках между точками x_1 и y_1 , а также x_2 и y_2 имеют место гиперболы, вогнутые во внешнюю сторону (относительно эллипсов). По мере дальнейшего удаления точки F за точки y_1 и y_2 переходные орбиты становятся гиперболами, вогнутыми во внутреннюю сторону. В пределе, когда F удаляется в бесконечность, орбита перехода становится параболой. Ясно, что во всех последних случаях орбиты перехода (прямые линии, гиперболы и парабола) являются просто нереальными, а переходы в точках x_1 и x_2 по существу являются одноимпульсными и

определяют предельные случаи реально возможных орбитальных переходов между пересекающимися орбитами.

В частном случае импульсного перехода между круговыми орбитами касательный переход и переход с угловой дальностью π совпадают. В этом случае орбита перехода является половиной эллипса (ее называют *полуэллиптической* орбитой перехода). Перигей орбиты перехода располагается на более низкой орбите,

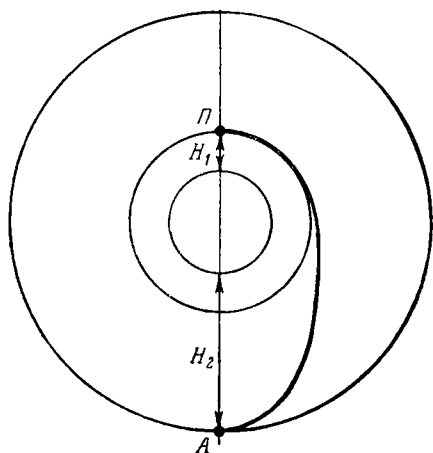


Рис. 2. 18. Переход по эллипсу Хомана

а апогей на более высокой (рис. 2. 18). В случае перехода на более высокую орбиту вначале (в точке Π) космическому аппарату сообщается ускоряющий импульс, а затем (в точке A) тормозной импульс. При обратном переходе очередность следования импульсов меняется.

При небольшой разнице в высотах начальной и конечной орбит величина суммарного потребного импульса может быть вычислена по формуле (2. 26) после подстановки $\Delta a_{\pi} = \Delta H = H_2 - H_1$. В более общем случае величины импульсов, сообщаемых аппарату в точках Π и A , находятся как разность скоростей в перигее эллиптической орбиты при $r_1 = R + H_1$, $a = R + \Delta H/2$ и первой космической на высоте H_1 , а также в апогее при $r_2 = R + H_2$, $a = R + \Delta H/2$ и первой космической на высоте H_2 , соответственно. Сложение величин этих импульсов дает суммарный потребный импульс.

Рассмотренный переход между круговыми орбитами является оптимальным и получил название *хомановского* перехода.

Исследование орбитальных маневров при импульсном приложении тяги к аппарату выполнялось в предположении, что время действия импульса тяги равно нулю. В действительности это время конечно, в результате чего орбита перехода оказывается состоящей из активных и пассивных участков. Поэтому полученные ранее результаты требуют определенного уточнения.

Из физических соображений ясно, что траектория активного участка полета аппарата наряду с ориентацией направления действия тяги зависит от ее величины (уровня) и времени приложения. Следовательно, одному и тому же импульсу тяги может соответствовать множество возможных значений параметров траектории в конце активного участка. Последнее, в свою очередь, определяет множество последующих траекторий на пассивном участке полета, представляющих собой кривые кониче-

ских сечений. В этой связи интересно рассмотреть влияние конечной величины тяги и времени ее действия на выполнение маневров орбитального перехода.

Предположим, что управляющий импульс J создается в результате действия на космический аппарат постоянной тяги за конечное время t_k

$$P = W_{\text{э}} \dot{m}_{\text{т}}, \quad (2.70)$$

где $W_{\text{э}}$ — эффективная скорость истечения;

$\dot{m}_{\text{т}}$ — секундный массовый расход топлива.

Связь управляющего импульса с расходом топлива на его создание определяется известной формулой Циолковского:

$$J = W_{\text{э}} \ln \frac{m_0}{m_0 - m_{\text{т}}}, \quad (2.71)$$

где m_0 — масса космического аппарата до включения тяги.

Интегрируя равенство (2.70) по времени t_k , находим

$$t_k = \frac{W_{\text{э}} m_{\text{т}}}{P}. \quad (2.72)$$

Представим тягу управляющего ракетного двигателя в виде

$$P = n g_0 m_0,$$

где n — безразмерный параметр, представляющий собой отношение тяги к начальному весу аппарата.

Тогда с учетом равенства (2.71) формула (2.72) преобразуется следующим образом:

$$\tau_k = \frac{t_k}{J} = \frac{1}{n} \left(1 - e^{-\frac{J}{W_{\text{э}}}} \right), \quad (2.73)$$

где τ_k — безразмерное время включения тяги;

$J = \frac{W_{\text{э}}}{g_0}$ — удельный импульс.

Из формулы (2.73) видно, что с увеличением импульса τ_k асимптотически приближается к n^{-1} . Для оценки величины τ_k (или t_k при известном J) могут быть использованы графики на рис. 2.19.

Конечное время действия тяги необходимо учитывать введением угла упреждения ψ , который представляет собой угол между радиусом-вектором точки включения тяги и радиусом-вектором расчетной точки приложения мгновенного импульса. Величина этого угла определяется в каждом конкретном случае интегрированием дифференциальных уравнений движения аппарата при действующей тяге.

Заметим, что выполнение одного и того же маневра при мгновенном создании импульса и конечном времени действия тяги

требует большей затраты энергии (топлива) во втором случае. Дополнительное увеличение энергии ΔE , приходящейся на единицу массы аппарата, вычисляется по формуле [111]

$$\Delta E = V_k \Delta V_k,$$

где ΔV_k — приращение скорости аппарата под действием импульса тяги за время t_k .

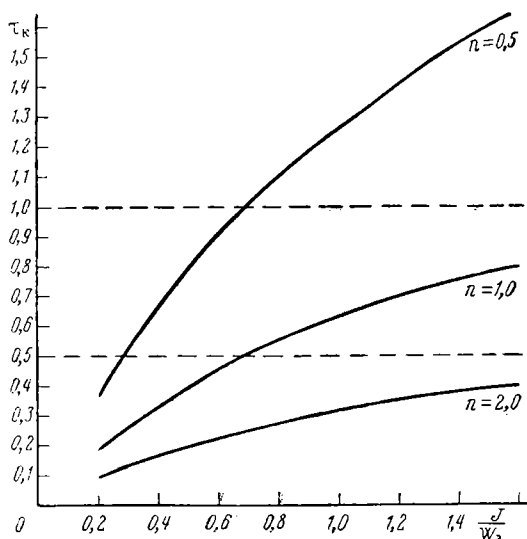


Рис. 2.19. Радиальное и угловое смещение точки конца активного участка в зависимости от n

В результате конечного времени действия тяги в точке ее выключения произойдет также смещение космического аппарата по высоте относительно первоначальной орбиты. Однако расчеты показывают, что это смещение относительно величины начального радиуса-вектора составляет 10^{-4} — 10^{-5} и им можно пренебрегать. Следовательно, учет времени t_k сводится лишь к определению угла упреждения.

§ 2.4. МАНЕВРЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕПРЕРЫВНОЙ ТЯГИ

Определение изменений элементов орбиты под действием непрерывно действующей на аппарат тяги в общем случае ее ориентации в пространстве связано с численным решением дифференциальных уравнений движения аппарата. Точные и приближенные решения этих уравнений в виде обзримых аналитических выражений удастся получить только для частных случаев приложения к аппарату постоянной, малой по величине, тяги.

Поскольку именно такая тяга может быть реализована в настоящее время, рассмотрим наиболее важные в практическом отношении частные случаи, характеризуемые действием на аппарат радиальной P_r , трансверсальной P_θ , нормальной к мгновенной плоскости орбиты (бинормальной) P_B и тангенциальной P_T тяг. При этом будем считать, что масса аппарата за время выполнения маневра остается неизменной. Данное обстоятельство позволяет рассматривать при решении уравнений движения аппарата отношение тяги к массе аппарата как заданное по величине и направлению управляющее ускорение.

При анализе первого случая (рис. 2.20) воспользуемся уравнениями (2.18), полагая $a_\theta = 0$:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{\mu}{r^2} + a_r,$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0. \quad (2.74)$$

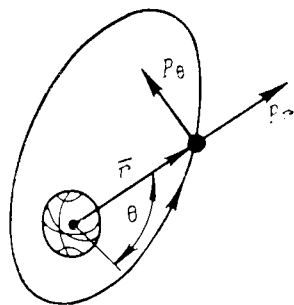


Рис. 2.20. Действие радиальной и трансверсальной тяг

Из последнего уравнения непосредственно следует полученное ранее соотношение (1.7)

$$r^2 \dot{\theta} = h = \text{const.}$$

Первое уравнение приведем к более удобной форме, принимая в качестве независимой переменной угол θ , а искомой функцией $\gamma_1 = 1/r$. Учитывая, что $d^2 \gamma_1 / d\theta^2 = -(r^2/h^2) d^2 r / dt^2$, представим это уравнение следующим образом:

$$\frac{d^2 \gamma_1}{d\theta^2} + \gamma_1 = \frac{\mu}{h^2} - \frac{a_r}{h^2 \gamma_1^2}. \quad (2.75)$$

Полученное нелинейное уравнение не имеет решения в квадратурах. Однако для малой по величине тяги ($a_r \ll \mu/r^2$) решение может быть получено с помощью приближенных методов, например метода Крылова—Боголюбова [23], [86]. Запишем уравнение (2.75) в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{d\gamma_1}{d\theta} = \gamma_2,$$

$$\frac{d\gamma_2}{d\theta} = -\gamma_1 + \frac{\mu}{h^2} - \frac{a_r}{h^2 \gamma_1^2}. \quad (2.76)$$

При $a_r=0$ решение данной системы (1.9) в принятом обозначении искомых функций

$$\gamma_1 = \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{p},$$

$$\gamma_2 = -\frac{e}{p} \sin(\theta - \theta_0)$$

$$\left(\text{где } p = \frac{h^2}{\mu} \right),$$

представим, имея в виду использование метода Крылова—Боголюбова, следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= A \sin(\theta + \psi) + \frac{\mu}{h^2}, \\ \gamma_2 &= A \cos(\theta + \psi). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Из выражения для γ_1 в рассматриваемом случае следует, что

$$\gamma_1 = A \sin \psi \cos \theta + A \cos \psi \sin \theta + \frac{\mu}{h^2}$$

или

$$r = \frac{1}{\gamma_1} = \frac{p}{1 + pA \sin \psi \cos \theta + pA \cos \psi \sin \theta}.$$

Сравнивая это выражение с выражением (1.9), находим

$$A \sin \psi = C_1 = \frac{e}{p} \cos \theta_0, \quad A \cos \psi = C_2 = \frac{e}{p} \sin \theta_0,$$

что позволяет записать с учетом выражений (1.10) и (1.11)

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p} \right)^2 + \frac{V_0^2 \sin^2 \theta_0}{h^2}}, \\ \psi &= \operatorname{arctg} \frac{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_0} \right) h}{V_0 \sin \theta_0}. \end{aligned}$$

При $a_r \neq 0$ решение уравнения (2.75) по-прежнему принимаем в виде выражений (2.76), но A и ψ считаем теперь неизвестными функциями θ . Тогда после вычисления производных $d\gamma_1/d\theta$ и $d\gamma_2/d\theta$ уравнения (2.75) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\theta} \sin(\theta + \psi) + A \left(1 + \frac{d\psi}{d\theta} \right) \cos(\theta + \psi) &= A \cos(\theta + \psi), \\ \frac{dA}{d\theta} \cos(\theta + \psi) - A \left(1 + \frac{d\psi}{d\theta} \right) \sin(\theta + \psi) &= \\ = -A \sin(\theta + \psi) - \frac{\mu}{h^2} - \frac{a_r}{h^2 \left[A \sin(\theta + \psi) + \frac{\mu}{h^2} \right]^2}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}\frac{dA}{d\theta} &= -\frac{a_r \cos(\theta + \psi)}{h^2 \left[A \sin(\theta + \psi) + \frac{\mu}{h^2} \right]^2}, \\ \frac{d\psi}{d\theta} &= \frac{a_r \sin(\theta + \psi)}{h^2 A \left[A \sin(\theta + \psi) + \frac{\mu}{h^2} \right]^2}.\end{aligned}\quad (2.78)$$

Осредняя эти выражения за период обращения аппарата, считая, что за время этого периода A и ψ остаются неизменными, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{A}}{d\theta} &= -\frac{a_r}{2\pi h^2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta + \psi) d\theta}{\left[A \sin(\theta + \psi) + \frac{\mu}{h^2} \right]^2} = 0, \\ \frac{d\tilde{\psi}}{d\theta} &= \frac{a_r}{2\pi h^2 A} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta + \psi) d\theta}{\left[A \sin(\theta + \psi) + \frac{\mu}{h^2} \right]^2} = -\frac{a_r}{h^2} \left(\frac{\mu^2}{h^4} - A^2 \right)^{-\frac{3}{2}}.\end{aligned}\quad (2.79)$$

Сразу же оговорим здесь, что проведенное осреднение справедливо при периодическом движении аппарата относительно притягивающей планеты, например при движении по эллиптической орбите. В случае движения по гиперболической орбите проводить осреднение, а следовательно, применять данный метод, нельзя. Интегрирование уравнений (2.79) дает

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \tilde{A}_0 = \text{const}, \\ \tilde{\psi} &= -\frac{a_r}{h^2} \left(\frac{\mu^2}{h^4} - \tilde{A}_0^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \theta + \psi_0,\end{aligned}$$

что позволяет записать следующее решение уравнения (2.75):

$$r_1 = \frac{\mu}{h^2} + \tilde{A}_0 \sin \left\{ \left[1 - \frac{a_r}{h^2} \left(\frac{\mu^2}{h^4} - \tilde{A}_0^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \theta + \psi_0 \right\}$$

или

$$r = \frac{p}{1 + p\tilde{A}_0 \sin \psi_0 \cos q_a \theta + p\tilde{A}_0 \cos \psi_0 \sin q_a \theta},$$

где

$$q_a = 1 - \frac{a_r}{h^2} \left(\frac{\mu^2}{h^4} - \tilde{A}_0^2 \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Сравнивая последнее выражение с выражением (1.9), замечаем, что действие малой радиальной тяги приводит к смещению линии апсид (линии отсчета угла θ) за один оборот аппарата по орбите на угол, равный по величине

$$\theta_c = \frac{2\pi a_r}{h^2} \left(\frac{\mu^2}{h^4} - \tilde{A}_0^2 \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Высота перигея и апогея остаются неизменными.

Для почти круговой орбиты с малым эксцентриситетом $e \ll 1$ или $\tilde{A}_0 \ll \mu/h^2$, что возможно при $a_r \ll \mu/r^2$, можно получить более простое выражение для определения угла прецессии линии апсид. Принимая $h \simeq \sqrt{r\mu}$ и пренебрегая значением $\tilde{A}_0^2$ в сравнении с μ^2/h^4 , получаем

$$\theta_c = 2\pi \frac{a_r}{\mu/r^2}.$$

Как и следовало ожидать, величина угла прецессии пропорциональна отношению ускорения, создаваемого радиальной тягой, к ускорению гравитационного поля.

В данном случае можно найти также уточненное решение уравнения (2.75), используя уже найденное решение. Для этого положим

$$\gamma_1 = \frac{\mu}{h^2} + \tilde{A}_0 \sin[(1-S)\theta + \psi_0] + a_r k(\theta),$$

где $k(\theta)$ неизвестная пока функция угла θ ,

$$S = \frac{a_r}{h^2} \left(\frac{\mu^2}{h^4} - \tilde{A}_0^2 \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.75) и пренебрегая членами порядка a_r^2 и $a_r \frac{\tilde{A}_0 h^2}{\mu}$, находим следующее уравнение для определения $k(\theta)$:

$$\frac{d^2 k(\theta)}{d\theta^2} + k(\theta) = -\frac{h^2}{\mu^2}.$$

Усреднение решения этого уравнения показывает, что оно удовлетворяется при $k = -h^2/\mu^2$. Следовательно, для орбит с малым эксцентриситетом уточненное решение уравнения (2.75) будет

$$\gamma_1 = \frac{\mu}{h^2} + \tilde{A}_0 \sin[(1-S)\theta + \psi_0] - \frac{a_r h^2}{\mu^2}$$

или

$$r = \frac{p}{1 + p \tilde{A}_0 \sin[(1-S)\theta + \psi_0] - \frac{a_r h^4}{\mu^3}}.$$

Отсюда можно получить более точное значение θ_c .

В случае действия трансверсальной тяги p_θ (см. рис. 2.20) уравнения (2.18) приобретают вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = - \frac{\mu}{r^2}, \quad (2.80a)$$

$$\frac{1}{r} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = a_\theta. \quad (2.80б)$$

По-прежнему будем считать, что ускорение, создаваемое тягой, значительно меньше гравитационного ускорения, т. е. $a_\theta \ll \mu/r^2$. Обозначим $h = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ и примем в качестве независимой переменной θ , а искомой функцией $\gamma_1 = 1/r$. Из уравнения (2.80б) имеем

$$\frac{dh}{dt} = a_\theta r,$$

или, так как $dt = r^2/h d\theta$:

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{a_\theta r^3}{h} = \frac{a_\theta}{h \gamma_1^3}. \quad (2.81)$$

После подстановки в уравнение (2.80a) значений

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -h \frac{d\gamma_1}{d\theta}, \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= -\frac{d}{dt} \left[h \frac{d\gamma_1}{d\theta} \right] = -h^2 \gamma_1^2 \frac{d^2 \gamma_1}{d\theta^2} - \frac{a_\theta d\gamma_1}{\gamma_1 d\theta} \end{aligned}$$

и несложных преобразований получаем

$$\frac{d^2 \gamma_1}{d\theta^2} + \frac{a_\theta}{n \gamma_1^3} \frac{d\gamma_1}{d\theta} + \gamma_1 = \frac{\mu}{n}, \quad (2.82)$$

где $n = h^2$.

Уравнение (2.81) удобно теперь записать так:

$$\frac{dn}{d\theta} = \frac{2a_\theta}{\gamma_1^3}. \quad (2.83)$$

Уравнение (2.82) запишем в виде двух уравнений первого порядка:

$$\frac{d\gamma_1}{d\theta} = \gamma_2(\theta), \quad (2.84)$$

$$\frac{d\gamma_2(\theta)}{d\theta} = -\gamma_1 + \frac{\mu}{n} - \frac{a_\theta}{n \gamma_1^3} \gamma_2(\theta),$$

которые с дополнительным уравнением (2.83) образуют полную систему уравнений для исследования движения аппарата под

действием трансверсальной тяги. При $a_\theta = 0$ решение этой системы уравнений будет

$$\begin{aligned} n &= n_0 = \text{const}, \\ \gamma_1 &= \frac{\mu}{n_0} + A_0 \sin(\theta + \theta_0), \\ \gamma_2 &= A_0 \cos(\theta + \theta_0). \end{aligned}$$

В случае $a_\theta \neq 0$ решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\mu}{n} + A \sin(\theta + \psi), \\ \gamma_2 &= A \cos(\theta + \psi), \end{aligned}$$

где n , A и ψ неизвестные функции θ . Тогда уравнения (2.83) и (2.84) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\theta} &= 2a_\theta \left[\frac{\mu}{n} + A \sin(\theta + \psi) \right]^{-3}, \\ \frac{d\gamma_1}{d\theta} &= \frac{dA}{d\theta} \sin(\theta + \psi) + A \left[1 + \frac{d\psi}{d\theta} \right] (\cos \theta + \psi) - \frac{\mu}{n^2} \frac{dn}{d\theta} = \\ &= A \cos(\theta + \psi), \\ \frac{d\gamma_2}{d\theta} &= \frac{dA}{d\theta} \cos(\theta + \psi) - A \left(1 + \frac{d\psi}{d\theta} \right) \sin(\theta + \psi) = \\ &= -A \sin(\theta + \psi) - \frac{a_\theta A}{n} \cos(\theta + \psi) \left[\frac{\mu}{n} + A \sin(\theta + \psi) \right]^{-3}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Последние два уравнения после подстановки равенства (2.85) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\theta} \sin(\theta + \psi) + A \frac{d\psi}{d\theta} \cos(\theta + \psi) &= \frac{2\mu a_\theta}{n^2} \left[\frac{\mu}{n} + A \sin(\theta + \psi) \right]^{-3}, \\ \frac{dA}{d\theta} \cos(\theta + \psi) - A \frac{d\psi}{d\theta} \sin(\theta + \psi) &= \\ &= -\frac{a_\theta A}{n} \cos(\theta + \psi) \left[\frac{\mu}{n} + A \sin(\theta + \psi) \right]^{-3}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\theta} &= \left[\frac{2\mu a_\theta}{n^2} \sin(\theta + \psi) - \frac{a_\theta A \cos^2(\theta + \psi)}{n} \right] \left[\frac{\mu}{n} + A \sin(\theta + \psi) \right]^{-3}, \\ \frac{d\psi}{d\theta} &= \left[\frac{2\mu a_\theta}{n^2 A} \cos(\theta + \psi) + \frac{a_\theta \sin(\theta + \psi) \cos(\theta + \psi)}{n} \right] \times \\ &\times \left[\frac{\mu}{n} + A \sin(\theta + \psi) \right]^{-3}. \end{aligned}$$

Применение метода Крылова—Боголюбова для решения уравнения (2.85) и (2.86) позволяет найти значения неизвестных $n(\theta)$, $A(\theta)$ и $\psi(\theta)$. Действительно, усредняя за период обращения спутника уравнения (2.85) и (2.86), получаем

$$\frac{d\tilde{n}}{d\theta} = \frac{a_0 \left(2 \frac{\mu^2}{n^2} + A^2 \right)}{\left(\frac{\mu^2}{n^2} - A^2 \right)^{5/2}}, \quad (2.87a)$$

$$\frac{d\tilde{A}}{d\theta} = -\frac{a_0}{2n} \frac{\left(7 \frac{\mu^2}{n^2} - A^2 \right)}{\left(\frac{\mu^2}{n^2} - A^2 \right)^{5/2}}, \quad (2.87б)$$

$$\frac{d\tilde{\psi}}{d\theta} = 0. \quad (2.87в)$$

Из уравнений (2.87a) и (2.87б) следует, что

$$\frac{d\tilde{A}}{d\tilde{n}} = -\frac{A}{2n} \frac{\left(7 \frac{\mu^2}{n^2} - A^2 \right)}{\left(2 \frac{\mu^2}{n^2} + A^2 \right)}.$$

Последнее выражение легко проинтегрировать. Для этого воспользуемся подстановкой $A = w/n$, тогда

$$\frac{dw}{dn} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} w = -\frac{w(7\mu^2 - w^2)}{2n^2(2\mu^2 + w^2)}$$

а после разделения переменных

$$\frac{dw[w^2 + 2\mu^2]}{(w^2 - \mu^2)w} = \frac{3}{2} \frac{dn}{n}.$$

Приведем левую часть данного равенства к виду

$$-\frac{4}{3} \frac{dw}{w} + \frac{d(\mu^2 - w^2)}{\mu^2 - w^2} = \frac{3}{2} \frac{dn}{n}.$$

Откуда после интегрирования и преобразования получаем

$$n = C \frac{(\mu^2 - w^2)}{w^{4/3}},$$

или

$$n = C \frac{[\mu^2 - (nA)^2]}{(nA)^{4/3}}, \quad (2.88)$$

где C — постоянная.

Перейдем к анализу полученных результатов. Из уравнения (2.87a) при $a_0 < 0$ следует, что $dn/d\theta < 0$. Это означает, что $n \rightarrow 0$,

а следовательно, $r \rightarrow 0$, поскольку в соответствии с выражением (2.77)

$$r = \frac{1}{\frac{\mu}{n} + A \sin(\theta + \psi)} = \frac{n/\mu}{1 + e \sin(\theta + \psi)},$$

где $e = \frac{An}{\mu}$ — эксцентриситет орбиты.

Таким образом, действие на аппарат трансверсальной тяги, направленной в сторону, противоположную движению аппарата, приводит к его снижению на планету. Траектория снижения приближается к параболе, поскольку при $n \rightarrow 0$ квадрат эксцентриситета $e^2 = n^2 A^2 / \mu^2$, как это следует из выражения (2.88), стремится к единице. При $a_0 > 0$, наоборот $n \rightarrow \infty$, а значит и $r \rightarrow \infty$. Величина радиуса-вектора в апогее орбиты будет

$$r_a = \frac{1}{\frac{\mu}{n} - A}.$$

Изменение r_a за один период обращения аппарата приближенно может быть определено следующим образом:

$$\Delta r_a = \frac{2\pi}{\left(\frac{\mu}{n} - A\right)^2} \left(\frac{\mu}{n^2} \frac{dn}{d\theta} + \frac{dA}{d\theta} \right),$$

или с учетом значений для $dn/d\theta$ и $dA/d\theta$ согласно уравнениям (2.87)

$$\Delta r_a = \frac{\pi a_0}{n^2} \frac{(4\mu + An)}{\left(\frac{\mu^2}{n^2} - A^2\right)^{5/2}}.$$

Для почти круговых орбит $e \ll 1$ и $A \ll 1$

$$r_a = \frac{n}{\mu},$$

а

$$\Delta r_a = 4\pi r_a \frac{a_0}{\mu/r_a^2}.$$

Следовательно, изменение высоты апогея пропорционально отношению трансверсального ускорения, создаваемого тягой, к гравитационному ускорению.

Рассмотрим случай, когда на космический аппарат действует тяга P_B , направление которой перпендикулярно к мгновенной плоскости орбиты [86]. При этом возможно изменение параметров, определяющих положение плоскости орбиты в инерциальной системе координат $OXYZ$ с началом в притягивающем центре.

Введем также подвижную орбитальную систему координат $Oxyz$ (рис. 2.21). Пусть ось Oz направлена по нормали к мгновенной плоскости орбиты, а ось Ox совпадает с радиусом-вектором $\vec{r}$ аппарата. Обозначим единичные векторы осей Ox , Oy , Oz через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, соответственно. Тогда выражение вектора тяги $\vec{P}_B$ можно записать так:

$$\vec{P}_B = P\vec{k},$$

где P — постоянная тяга.

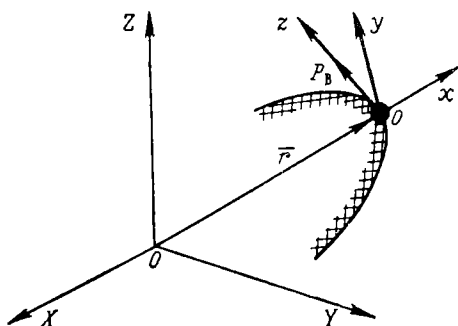


Рис. 2.21. Действие тяги, нормальной к мгновенной плоскости орбиты (бинормальная тяга)

Дифференциальное уравнение движения аппарата (2.1) применительно к данному случаю будет

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} - \frac{P}{m} \vec{k}. \quad (2.89)$$

В подвижной системе координат $\vec{r} = r\vec{i}_1$, поэтому

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{i} + r \frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{i} + r(\vec{\omega} \times \vec{i}),$$

где $\vec{\omega} = \omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{j} + \omega_3\vec{k}$ — вектор абсолютной угловой скорости радиуса-вектора $\vec{r}$.

Таким образом, вектор скорости аппарата определяется выражением

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{i} + r\omega_3\vec{j} - r\omega_2\vec{k}.$$

Поскольку в процессе орбитального движения вектор скорости совпадает с мгновенной плоскостью орбиты, то $\omega_2 = 0$ и

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt} \vec{i} + r\omega_3\vec{j}.$$

Дифференцируя это выражение и учитывая, что $\frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j} = -\omega_3 \bar{i} + \omega_1 \bar{k}$, получаем

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega_3^2 \right) \bar{i} + \frac{1}{r} (r^2\omega_3) \bar{j} + r\omega_1\omega_3 \bar{k}.$$

Подставляя значение для $d^2\bar{r}/dt^2$ в исходное уравнение (2.89), имеем

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\omega_3^2 &= -\frac{\mu}{r^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\omega_3) &= 0, \\ r\omega_1\omega_3 &= \frac{P}{m} = a_\varphi. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Из второго уравнения данной системы следует, что составляющая кинетического момента аппарата на ось Oz остается неизменной во времени $r^2\omega_3 = \text{const}$. Обозначая $h = r^2\omega_3$, представим первое уравнение, определяющее изменение расстояния аппарата от притягивающего центра, в виде

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (2.91)$$

Для определения изменения плоскости орбиты аппарата в пространстве найдем производные $\frac{d\bar{i}}{dt}$, $\frac{d\bar{j}}{dt}$ и $\frac{d\bar{k}}{dt}$ единичных векторов. Из очевидного равенства

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i} = \omega_3 \bar{j}$$

получаем

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \frac{h}{r^2} \bar{j}. \quad (2.92)$$

Аналогично

$$\frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j} = -\omega_3 \bar{i} + \omega_1 \bar{k},$$

или, так как согласно последнему равенству системы (2.90):

$$\omega_1 = \frac{a_\varphi}{r\omega_3},$$

$$\frac{d\bar{j}}{dt} = -\frac{h}{r^2} \bar{i} + \frac{ra_\varphi}{h} \bar{k}, \quad (2.93)$$

а

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \frac{d\bar{i}}{dt} \times \bar{j} + \bar{i} \times \frac{d\bar{j}}{dt} = -\omega_1 \bar{j} = -\frac{ra_\varphi}{h} \bar{j}. \quad (2.94)$$

Итак, движение аппарата определяется уравнениями (2.91), (2.92), (2.93) и (2.94). Если изменение r , $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ во времени задано, то движение аппарата полностью определено. Переходя к новой независимой переменной θ и искомой функции $\gamma_1 = 1/r$, преобразуем эти уравнения таким образом:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\gamma_1}{d\theta^2} + \gamma_1 &= \frac{\mu}{h^2}, \\ \frac{d\bar{i}}{d\theta} &= \bar{j}, \\ \frac{d\bar{j}}{d\theta} &= -\bar{i} + \frac{a_\varphi}{h^2\gamma_1^3} \bar{k}, \\ \frac{d\bar{k}}{d\theta} &= -\frac{a_\varphi}{h^2\gamma_1^3} \bar{j}.\end{aligned}\tag{2.95}$$

Решение первого уравнения системы (2.95) известно: оно представляет собой уравнение (1.9) кривой второго порядка. Это решение получено в предположении действия на аппарат постоянной бинормальной тяги. Следовательно, эксцентриситет орбиты e и фокальный параметр p не зависят от действия этой тяги.

Рассмотрим решение оставшихся трех уравнений системы (2.95).

В случае, когда $a_\varphi = 0$, имеем

$$\frac{d\bar{i}}{d\theta} = \bar{j}, \quad \frac{d\bar{j}}{d\theta} = -\bar{i}, \quad \frac{d\bar{k}}{d\theta} = 0.\tag{2.96}$$

Представляя первые два уравнения в виде

$$\frac{d^2\bar{i}}{d\theta^2} + \bar{i} = 0, \quad \frac{d^2\bar{j}}{d\theta^2} + \bar{j} = 0,$$

находим

$$\begin{aligned}\bar{i} &= \bar{A} \cos \theta + \bar{B} \sin \theta, \\ \bar{j} &= \bar{A} \cos(\theta + 90^\circ) + \bar{B} \sin(\theta + 90^\circ) = \\ &= -\bar{A} \sin \theta + \bar{B} \cos \theta,\end{aligned}$$

где $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — постоянные коэффициенты.

С учетом начальных условий ($\theta = 0$)

$$\bar{A} = \bar{i}_0, \quad \bar{B} = \bar{j}_0$$

можно записать решения системы (2.96)

$$\begin{aligned}\bar{i} &= \bar{i}_0 \cos \theta + \bar{j}_0 \sin \theta, \\ \bar{j} &= -\bar{i}_0 \sin \theta + \bar{j}_0 \cos \theta, \\ \bar{k} &= \bar{k}_0,\end{aligned}$$

где $\bar{i}_0$, $\bar{j}_0$ и $\bar{k}_0$ — начальная ориентация единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$.

Постоянство ориентации единичного вектора $\bar{k}$ во времени означает, что положение плоскости орбиты в инерциальном пространстве сохраняется неизменным.

В случае, когда $a_\varphi \neq 0$ и движение аппарата происходит по круговой орбите ($r=a$, $\dot{r}=0$, $\dot{\theta}=h/a^2$ или $\dot{\theta}=(\mu/a^3)^{1/2}$, целесообразно снова вернуться к уравнениям (2.92), (2.93) и (2.94), записывая их следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d^3 \bar{i}}{dt^3} + (\alpha^2 + \beta^2) \frac{d\bar{i}}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2 \bar{j}}{dt^2} + (\alpha^2 + \beta^2) \bar{j} &= 0, \\ \frac{d^3 \bar{k}}{dt^3} + (\alpha^2 + \beta^2) \frac{d\bar{k}}{dt} &= 0,\end{aligned}$$

где

$$\alpha = \frac{h}{a^2}, \quad \beta = \frac{aa_\varphi}{h}.$$

Решение этих уравнений, как легко проверить, будет

$$\begin{aligned}\bar{i} &= \bar{J}_1 + \bar{J}_2 \cos vt + \bar{J}_3 \sin vt, \\ \bar{j} &= \frac{v}{\alpha} (-\bar{J}_2 \sin vt + \bar{J}_3 \cos vt), \\ \bar{k} &= \frac{1}{\alpha^3} (\alpha^2 \bar{J}_1 - \beta^2 \bar{J}_2 \cos vt - \beta^2 \bar{J}_3 \sin vt),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{J}_1 &= \frac{1}{v^2} (\beta^2 \bar{i}_0 + \alpha \beta \bar{k}_0), \\ \bar{J}_2 &= \frac{1}{v^2} (\alpha^2 \bar{i}_0 - \alpha \beta \bar{k}_0), \\ \bar{J}_3 &= \frac{\alpha}{v} \bar{j}_0, \quad v = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Заметим, что векторы $\vec{i}_0$, $\vec{j}_0$ и $\vec{k}_0$ определяются в данном случае начальным положением и начальной скоростью аппарата.

Анализируя выражения для векторных постоянных $\vec{J}_1$, $\vec{J}_2$ и $\vec{J}_3$, видим, что они взаимноперпендикулярны. Действительно, $\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 = 0$, $\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_3 = 0$ и $\vec{J}_2 \cdot \vec{J}_3 = 0$. Положение аппарата на орбите в произвольный момент времени определяется вектором

$$\vec{r} = a\vec{i} = a\vec{J}_1 + a\vec{J}_2 \cos vt + a\vec{J}_3 \sin vt. \quad (2.97)$$

Поскольку $\vec{J}_1 = \text{const}$, из данного выражения следует, что движение аппарата происходит в фиксированной плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{J}_1$, по окружности с центром в точке $\vec{r}_H = a\vec{J}_1$. Замечая, что

$$\vec{J}_2 \cdot \vec{J}_2 = \vec{J}_3 \cdot \vec{J}_3 = \frac{\alpha^2}{v^2} = \frac{\frac{\mu^2}{a^4}}{a_\varphi^2 + \frac{\mu^2}{a^4}},$$

найдем радиус этой окружности

$$a_1 = a \sqrt{(\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2) + (\vec{J}_3 \cdot \vec{J}_3)} = a \frac{a}{v} = \frac{\frac{\mu}{a^2}}{\left(a_\varphi^2 + \frac{\mu^2}{a^4}\right)^{1/2}}. \quad (2.98)$$

Отсюда видно, что текущий радиус орбиты меньше начального радиуса a круговой орбиты.

Из этого равенства можно определить угловую скорость движения аппарата

$$v = \frac{aa}{a_1} = \frac{a}{a_1} \left(\frac{\mu}{a^3} \right)^{1/2},$$

которая оказывается больше начальной угловой скорости обращения $v_0 = \mu/a^3$. Для более четкого представления физического эффекта действия бинормальной тяги допустим, что начальное движение аппарата происходило в экваториальной плоскости XU . В результате действия тяги P_φ плоскость движения будет расположена на расстоянии

$$d = a|\vec{J}_1| = \frac{aa_\varphi}{\left[a_\varphi + \frac{\mu^2}{a^4}\right]^{1/2}} < a$$

от центра притяжения планеты (рис. 2.22). Угол δ наклона этой плоскости к плоскости XU будет определяться формулой

$$\delta = \arctg \frac{\beta}{\alpha} = \arctg \frac{a_\varphi}{\mu} a^2,$$

которая непосредственно получается из выражения для I_2 . Расстояние аппарата l от плоскости XU в любой момент времени t находится согласно выражению

$$l = \bar{r} \cdot \bar{k}_0 = a \bar{i} \cdot \bar{k}_0 = a \frac{a^3}{v^2} (1 - \cos vt).$$

Максимальное расстояние аппарата от плоскости XU будет при $l_{\max} = a$, когда $a_{\dot{\varphi}} = \mu/a^2$, причем время достижения этого расстояния равно

$$t_{\Delta} = \frac{\pi}{v} = \pi \left(\frac{a}{2p} \right)^{1/2} \approx \pi \left(\frac{a}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{\mu}{a^2} \right)^{1/2},$$

а угол $\delta = 45^\circ$.

При движении аппарата по эллиптическим орбитам нахождение решения уравнений (2.92), (2.93) и (2.94) в замкнутой

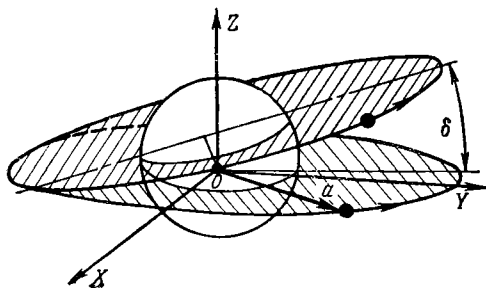


Рис. 2.22. Изменение ориентации плоскости орбиты под действием бинормальной тяги

форме существенно усложняется. Однако при выполнении ряда условий, оговариваемых ниже, можно получить приближенное решение, позволяющее сделать заключение об общем характере действия на аппарат бинормальной тяги. Воспользуемся для этого методом Крылова—Боголюбова. Для орбит с малым эксцентриситетом ($e \ll 1$) заменим

$$\gamma_1^{-3} = \left(\frac{h^2}{\mu} \right)^3 \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^3}$$

приближенным выражением

$$\gamma_1^{-3} \approx \frac{h^6}{\mu^3} (1 - 3e \cos \theta).$$

Это позволяет записать три последних уравнения (2.95) в виде:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{i}}{d\theta} &= \bar{j}, \\ \frac{d\bar{j}}{d\theta} &= -\bar{i} + S(1 - 3e \cos \theta) \bar{k}, \\ \frac{d\bar{k}}{d\theta} &= -S(1 - 3e \cos \theta) \bar{i}_2,\end{aligned}\quad (2.99)$$

где с точностью до членов порядка e^2

$$S = \frac{a_\varphi h^4}{\mu^3} = \frac{a_\varphi \mu^2 a^2}{\mu^3} (1 - e^2)^2 = \frac{a_\varphi}{\mu/a^2}.$$

При $e=0$ решения системы уравнений (2.99) будут:

$$\begin{aligned}\bar{i}_1 &= S\bar{A} + \bar{B} \sin \omega\theta + \bar{C} \cos \omega\theta, \\ \bar{j}_1 &= \omega\bar{B} \cos \omega\theta - \omega\bar{C} \sin \omega\theta, \\ \bar{k}_1 &= \bar{A} - S\bar{B} \sin \omega\theta - S\bar{C} \cos \omega\theta,\end{aligned}\quad (2.100)$$

где $\omega^2 = 1 + S^2$,

$\bar{A}$, $\bar{B}$ и $\bar{C}$ — произвольные постоянные векторы.

Решение при $e \neq 0$ будем искать в виде

$$\bar{i} = \bar{i}_1 + e\bar{i}_2, \quad \bar{j} = \bar{j}_1 + e\bar{j}_2, \quad \bar{k} = \bar{k}_1 + e\bar{k}_2.$$

Подставляя данные соотношения в уравнения (2.99) и пренебрегая членами порядка e^2 , приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{i}_2}{d\theta} &= \bar{j}_2, \\ \frac{d\bar{j}_2}{d\theta} &= -\bar{i}_2 + S\bar{k}_2 - 3S \cos \theta [\bar{A} - S\bar{B} \sin \omega\theta - S\bar{C} \cos \omega\theta], \\ \frac{d\bar{k}_2}{d\theta} &= -S\bar{j}_2 + 3\omega S \cos \theta [\bar{B} \cos \omega\theta - \bar{C} \sin \omega\theta].\end{aligned}$$

В результате интегрирования данной системы уравнений получаем

$$\begin{aligned}\bar{i} &= S\bar{A} + \bar{B} \sin \omega\theta + \bar{C} \cos \omega\theta + \frac{3}{2} e S^2 \left\{ \bar{B} \left[\frac{\sin(\omega-1)\theta}{\omega-1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\theta \sin(\omega+1)\theta}{\omega+1} \right] + \bar{C} \left[\frac{\cos(\omega-1)\theta}{\omega-1} - \frac{\cos(\omega+1)\theta}{\omega+1} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\bar{C}}{S^2} + \frac{2\bar{A}}{S^3} [\cos \omega\theta - \cos \theta] \right\}.\end{aligned}\quad (2.101)$$

Аналогично могут быть получены выражения для $\bar{j}$ и $\bar{k}$. Постоянные векторы $\bar{A}$, $\bar{B}$ и $\bar{C}$ определяются из начальных условий. Если при $\vartheta=0$, $\bar{i}=\bar{i}_0$, $\bar{j}=\bar{j}_0$ и $\bar{k}=\bar{k}_0$, то

$$\bar{A} = \frac{S}{\omega^2} \bar{i}_0 + \frac{1}{\omega^2} \bar{k}_0, \quad \bar{B} = \frac{1}{\omega^2} \bar{j}_0, \quad \bar{C} = \frac{1}{\omega^2} \bar{i}_0 - \frac{S}{\omega^2} \bar{k}_0.$$

Движение аппарата определяется зависимостью $\bar{r}=r\bar{i}$, где r и $\bar{i}$ определяются выражениями (2.97) и (2.101), соответственно. Количественная оценка полученного решения и анализ движения аппарата усложняется наличием четырех основных частот ν , ω , $\omega-1$, $\omega+1$. Нахождение решения в случае, когда условие $e \ll 1$ не выполняется, связано с исключительно трудоемкой вычислительной процедурой. Не приводя здесь этого решения, ограничимся замечанием, что для эллиптических орбит ($0 < e < 1$) метод Крылова—Боголюбова можно применять, если величина $S = \frac{a_\varphi (1-e^2)^2}{\mu/a}$ достаточно мала [86].

Рассмотрим изменение некоторых элементов орбиты под действием непрерывной тангенциальной тяги. Для получения аналитического решения уравнений движения будем считать, что тяга прикладывается к аппарату, обращающемуся вначале (до приложения тяги) по эллиптической орбите с эксцентриситетом $e < 0,2$. При этом будем использовать следующие соотношения, устанавливающие связь между элементами орбиты с помощью эксцентрической аномалии (см. рис. 1.3):

$$\left. \begin{aligned} r \cos \vartheta &= a (\cos \vartheta_3 - e), \\ r \sin \vartheta &= a \sqrt{1-e^2} \sin \vartheta_3, \\ r &= a (1 - e \cos \vartheta_3), \\ V^2 &= \frac{\mu}{r} (1 + e \cos \vartheta_3), \\ \frac{d\vartheta_3}{dt} &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{a}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

Используем также уравнения для оскулирующих элементов орбиты a и e , которые могут быть получены из первых двух соотношений (2.73):

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2V}{\mu} a_T, \quad (2.103a)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{V} 2a_T (e + \cos \vartheta). \quad (2.103b)$$

Для простоты примем, что тангенциальная тяга P_T (или a_T) прикладывается к аппарату в перигее.

Изменение большой полуоси найдем, поделив уравнение (2.103а) на последнее соотношение (2.102):

$$\frac{da}{d\vartheta_3} = \frac{2a^3}{\mu} (1 - e^2 \cos^2 \vartheta_3)^{1/2} a_T. \quad (2.104)$$

Изменение a за один оборот получим после интегрирования уравнения (2.104) за период обращения в соответствии с методом Крылова—Боголюбова.

Поскольку e мало по величине, то подынтегральное выражение можно разложить в ряд по степеням e . В результате разложения в ряд и интегрирования имеем

$$\Delta a = 2qa^3 \left[1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} + O(e^6) \right], \quad (2.105)$$

где

$$q = 2a_\varphi \frac{\pi}{\mu};$$

$O(e^6)$ — слагаемые, содержащие члены с e в шестой степени и выше.

Полученная формула позволяет оценить влияние тангенциальной тяги на изменение большой полуоси за один оборот.

Аналогичным образом после деления уравнения (2.103б) на последнее соотношение (2.102), интегрирования в пределах от 0 до 2π и разложения в ряд по степеням e получаем

$$\Delta e = -qa^2e \left[1 - \frac{5e^2}{8} + O(e^4) \right], \quad (2.106)$$

где $O(e^4)$ — слагаемые, содержащие члены с e в четвертой степени и выше.

Знак минус свидетельствует об уменьшении эксцентриситета орбиты. Для определения изменений a и e с течением времени (вековые изменения) разделим равенство (2.105) на (2.106)

$$\frac{\Delta a}{\Delta e} = -\frac{2a}{e} \left[1 + \frac{3}{8} e^2 + O(e^4) \right]. \quad (2.107)$$

Считая, что изменения Δa и Δe бесконечно малы, перепишем выражение (2.107) в виде

$$\frac{da}{a} = -\frac{de}{e} \left[1 + \frac{3}{8} e^2 + O(e^4) \right].$$

Интегрирование данного уравнения дает

$$\frac{a}{a_0} = \frac{e_0^2}{e^2} \left[1 + \frac{3}{8} e_0^2 \left(1 - \frac{e^2}{e_0^2} \right) + O(e_0^4) \right],$$

где a_0 и e_0 — начальные значения (в момент включения тяги), или

$$\frac{e}{e_0} = \sqrt{\frac{a_0}{a}} \left[1 + \frac{3}{16} e_0^2 \left(1 - \frac{a_0}{a} \right) + O(e_0^4) \right].$$

Из данного выражения видно, что с течением времени с каждым оборотом эксцентриситет уменьшается, причем изменение эксцентриситета не зависит от q , т. е. от изменения управляющей тяги. Приведенные соотношения (2.105) и (2.106) позволяют представить общий характер орбитального движения аппарата под действием малой тангенциальной тяги. От движения по эллиптической орбите аппарат переходит к движению по почти круговой спиралевидной траектории. Такое движение происходит до тех пор, пока аппарату не будет сообщена параболическая скорость. Время достижения этой скорости может быть вычислено приближенно по формуле [34]

$$\text{tg} \simeq \frac{T_0}{qa_0^2} \left(1 + \frac{e_0^2}{12} \right),$$

где T_0 — начальный период обращения аппарата.

Действие тангенциальной тяги не вызывает изменения наклона, долготы восходящего узла и углового расстояния перигея от узла.

Маневрирование при встрече

§ 3.1. ВСТРЕЧА КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ОРБИТЕ

Одной из проблем космонавтики является решение задач, связанных со встречами двух космических аппаратов на орбите. При этом космические аппараты на отдельных участках полета должны выполнять разнообразные маневры, без которых невозможно осуществить встречу на орбите. Прежде чем переходить к исследованию этих маневров, рассмотрим кратко основные задачи исследования космического пространства, для решения которых необходимо осуществление встречи, а также возможные траектории космических аппаратов, предназначенных для встречи на орбите с другим аппаратом.

Создание больших орбитальных космических станций со значительным экипажем, предназначенных для проведения длительных экспериментов в космическом пространстве, требует неимоверно больших ракет-носителей. Однако эту задачу можно решить и с использованием ракет-носителей приемлемых размеров путем вывода на орбиту отдельных частей станции и стыковки их в космическом пространстве в процессе движения по орбите. Часть станции выводится на заданную орбиту и с помощью системы наведения сближается с другой, ранее выведенной частью, до физического контакта с ней. После этого осуществляется стыковка. Аналогичным образом выводятся на орбиту и стыкуются остальные части; в результате может быть собрана станция значительных размеров. Экипаж такой станции может доставляться либо в отдельных частях станции, либо с помощью специального космического аппарата.

Наряду с научными экспериментами подобная станция может использоваться для ремонта, контроля и запуска космических аппаратов различных назначений. В качестве примера на рис. 3.1 показан внешний вид, а на рис. 3.2 схема размещения основных отсеков такой ремонтно-стартовой станции (ОРСС) [121]. Станция рассчитана на экипаж в 25 человек и запуск на круговую орбиту высотой до 550 км.

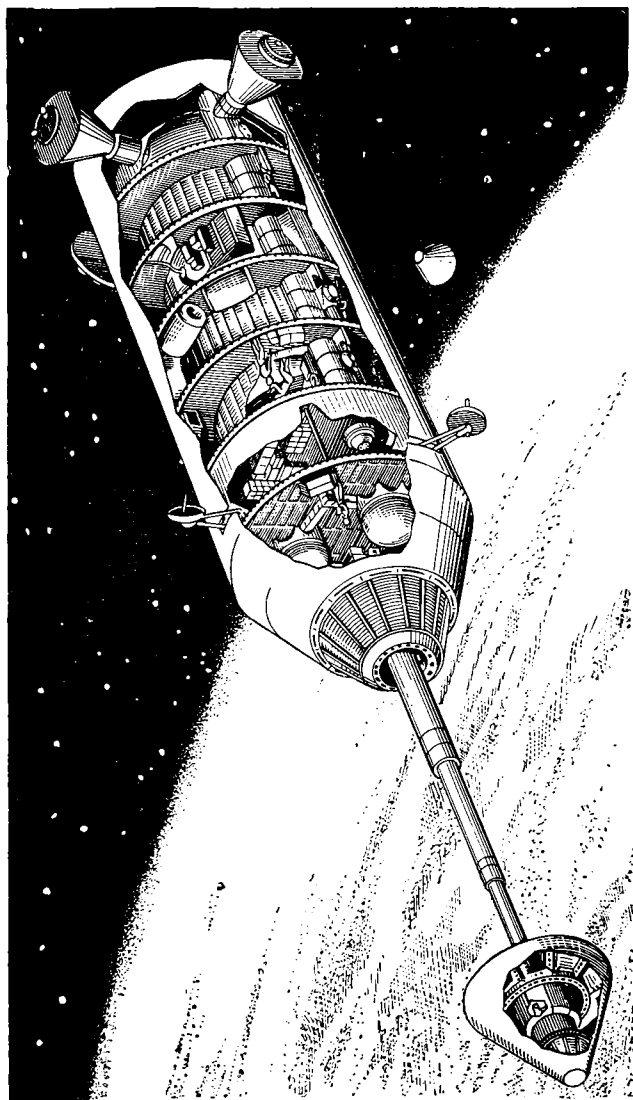


Рис. 3. 1. Внешний вид орбитальной ремонтно-стартовой станции

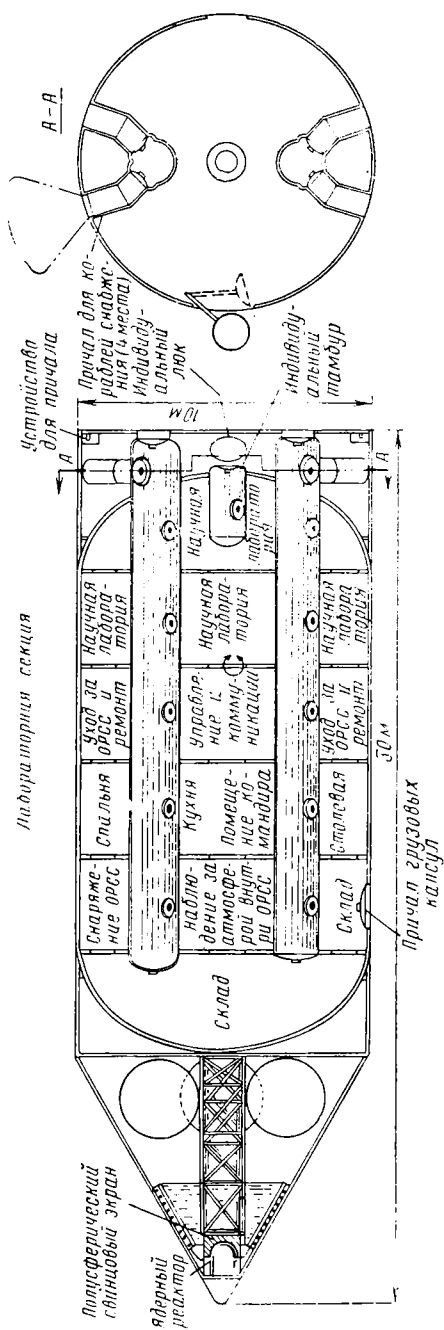


Рис. 3. 2. Схема размещения основных отсеков ремонтно-стартовой станции

Необходимость в выполнении операций встречи может возникнуть в будущем также при сборке на орбите мощных космических аппаратов, предназначенных для полета к планетам солнечной системы с последующим возвращением на Землю. Создание таких аппаратов может производиться путем вывода отдельных его частей на орбиту спутника Земли с последующей стыковкой.

Задача регулярного снабжения является неотъемлемой составной частью общей проблемы построения и нормального

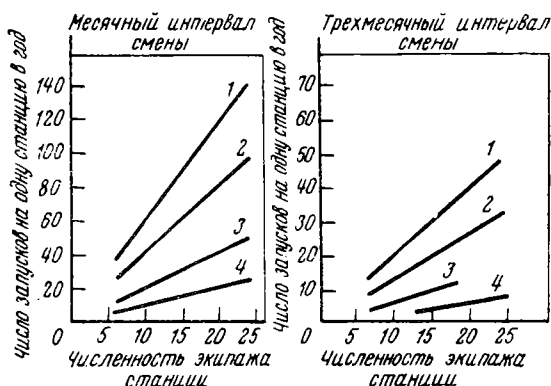


Рис. 3.3. Потребное количество запусков кораблей снабжения для двух интервалов смены экипажа станции:

1—корабль на 2 человека; 2—корабль на 3 человека;
3—корабль на 6 человек; 4—корабль на 12 человек

функционирования больших космических станций. Станция будет находиться на орбите в течение года и более. Создание достаточных запасов на борту такой станции для автономной ее работы в течение длительного времени практически неосуществимо. Кроме того, потребуется периодическая смена экипажа такой станции, а также доставка необходимого оборудования и специалистов для выполнения некоторых ремонтных работ.

Задача снабжения орбитальной космической станции, периодической смены экипажа и проведения ремонтных работ решается путем создания специальных космических кораблей снабжения. Помимо этого, в сложных аварийных ситуациях может потребоваться немедленный запуск кораблей спасения. Во всех отмеченных случаях требуется обеспечить сближение кораблей с космической станцией с последующей швартовкой с помощью причальных устройств.

Результаты расчетов потребных количеств запуска кораблей снабжения в зависимости от численности экипажа станции, возможностей кораблей снабжения и периодичности смены экипажа представлены графиками на рис. 3.3 [121]. Из этих графиков

видно, что за исключением станций с небольшим экипажем решение задачи смены и снабжения на базе двух- и трехместных кораблей требует чрезмерно большого числа запусков. Поэтому наиболее рациональными с экономической точки зрения считаются корабли снабжения, рассчитанные на 6, а еще лучше на 12 человек. Однако и в этом случае потребуется довольно значительное количество запусков. Поэтому желательно иметь корабли с повторным использованием.

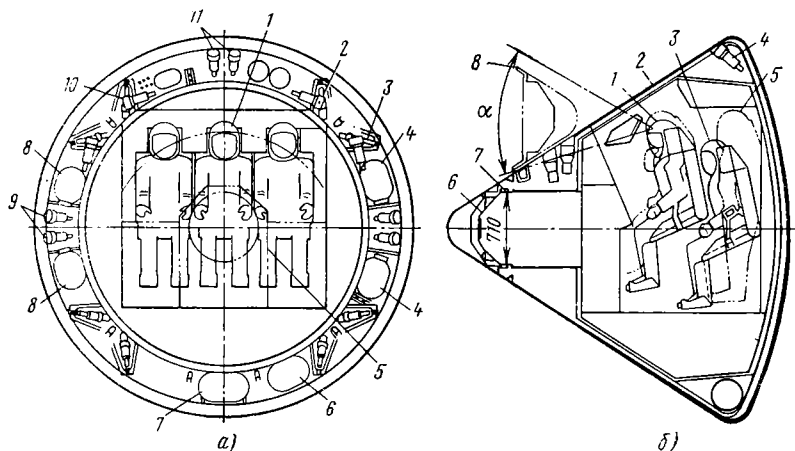


Рис. 3.4. Схема размещения основных элементов шестиместного космического корабля:

а) вид спереди:

1—три передних члена экипажа в нормальном положении; 2—горизонтальные противоударные демпферы; 3—вертикальные противоударные демпферы; 4—бак окислителя; 5—панель приборов контроля атмосферы кабины; 6—бак с водой для охлаждения; 7—бак с водой; 8—топливный бак; 9—двигатели ориентации по оси рыскания; 10—двигатели ориентации по оси крена; 11—двигатели ориентации по оси тангажа

б) вид сбоку

1—три передних члена экипажа в нормальном положении; 2—центральный входной люк; 3—три задних члена экипажа при взлете и входе в атмосферу; 4—двигатели ориентации по оси тангажа; 5—три задних члена экипажа при малых перегрузках; 6—крышка люка; 7—люк, используемый при швартовке в космосе; 8—крышка люка в открытом положении (в другой плоскости); α —угол переднего обзора, равный 47°

В качестве примера на рис. 3.4 приведена возможная схема шестиместного корабля снабжения для станции с экипажем 24 человека [122]. Корабль состоит из двух отсеков. В одном размещается экипаж, а во втором необходимые грузы. В грузовом отсеке устанавливаются двигатели, обеспечивающие управление операцией встречи и посадку корабля, устройства для хранения твердых и жидких грузов, а также система жизнеобеспечения экипажа, рассчитанная на 24 часа (до встречи со станцией). Корабль может выводиться на промежуточную круговую орбиту высотой 185 км или на орбиту (тоже круговую) станции

высотой порядка 500 км. Длительность полета по промежуточной орбите до 12 час. Управление сближением начинается на дальности до станции 185 км (при использовании импульсного приемопередатчика) или с расстояния 28 км (без него). Начальная скорость сближения может достигать величины 240 м/сек, а угловая скорость поворота линии: корабль-станция (линии визирования) — 0,4 мрад/сек. Система управления снижает скорость сближения к моменту швартовки до 0—0,6 м/сек. При этом допускается радиальное смещение оси корабля в пределах 0,3 м и угловое смещение до 10° .

Таким образом, операция встречи имеет довольно много практических применений и в каждом случае есть некоторые особенности. Например, причаливание кораблей снабжения к орбитальной космической станции должно осуществляться со скоростью сближения, близкой к нулю. В случае встречи отсеков космической станции или составного космического корабля допустимы сравнительно большие скорости сближения в момент контакта. Предельное значение скорости сближения должно выбираться из условия, чтобы появляющийся при этом удар не вызвал существенных деформаций конструкции, а перегрузки, возникающие в процессе контакта отсеков с экипажем, не превышали допустимой величины. Следовательно, в первом случае требуется прецизионная система управления скоростью сближения, тогда как во втором случае может быть использована система управления с менее жесткими требованиями по точности.

Необходимо также отметить различные требования ко времени выполнения операции встречи. Например, при выполнении операции спасения экипажа станции в случае аварийной ситуации необходимо осуществить встречу спасательного корабля со станцией в возможно короткое время. При осуществлении встречи в нормальных условиях (например, снабжение станции) требование ко времени не имеет столь существенного значения и на первый план выступает требование экономичности.

Несмотря на отмеченные особенности операций встречи при различных конкретных применениях, в схемах их выполнения имеется много общего. Поэтому в дальнейшем, за исключением тех случаев, когда необходимо отметить особенности конкретной задачи, будем использовать следующую общую терминологию: космический объект, с которым должна произойти встреча, будем называть станцией, а объект, осуществляющий операцию встречи, назовем космическим кораблем. Правда, в принципе не исключена возможность так называемой двухсторонней встречи, когда управление сближением осуществляется не только на корабле, но и на станции. Однако такая операция считается маловероятной и, видимо, менее эффективной, так как при этом задача управления существенно усложняется. Участие станции в процессе наведения и управления сближением обычно рассматривается в виде установки на ней приемопередатчика (маяка-

ответчика) для увеличения дальности действия системы наведения космического корабля.

Из приведенных выше примеров следует, что станция, как правило, будет выводиться на круговую орбиту. При этом решение задачи встречи значительно упрощается, так как прогнозирование движения станции осуществляется значительно проще и точнее, чем в случае эллиптической орбиты, что, в свою очередь, облегчает операцию встречи. К тому же и в целях нормального функционирования самой станции (особенно в тех случаях, когда это ремонтно-стартовая станция или составной космический корабль) круговая орбита является более предпочтительной. Поэтому в дальнейшем* будем полагать, что станция движется по круговой орбите на высоте H_0 .

Операцию встречи космического корабля со станцией можно разделить на три этапа:

— вывод корабля на орбиту станции (точнее на орбиту, близкую к орбите станции);

— наведение корабля на станцию с помощью бортовых средств (самонаведение);

— причаливание корабля к космической станции (или швартовка).

Задача первого этапа состоит в том, чтобы вывести космический корабль на орбиту станции с таким расчетом, чтобы в точке вывода расстояние между кораблем и станцией удовлетворяло условию

$$\Delta r_0 \leq L_H, \quad (3.1)$$

где L_H — дальность действия системы наведения корабля. Другими словами, необходимо обеспечить почти одновременное прибытие станции и корабля в точку вывода последнего на орбиту станции, так как ошибки во времени вывода величиной несколько секунд приводят к расстоянию в десятки километров.

Вывод корабля на орбиту станции может выполняться двумя путями. В первом случае корабль непосредственно из данной точки старта A_0 выводится на орбиту станции (рис. 3.5). Подобный метод будем называть прямым выходом корабля на орбиту станции (в точку B_0). При этом возможны два варианта: плоскость траектории корабля совпадает с плоскостью орбиты станции (рис. 3.5, а), плоскость траектории корабля наклонена к плоскости орбиты станции (см. рис. 3.5, б) на угол Δi . Первый вариант называют компланарным, а второй — некомпланарным выходом корабля на орбиту станции.

Величина угла Δi зависит от геоцентрического углового расстояния $\Delta\varphi_0$ точки старта корабля от плоскости орбиты станции и геоцентрического угла $\Delta\vartheta_0$ между точкой орбиты станции, расположенной на траверзе точки A_0 , и точкой B_0 . Используя

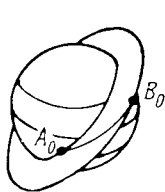
* За исключением отдельных случаев, оговоренных особо.

соответствующую формулу сферической тригонометрии для прямоугольного треугольника, находим

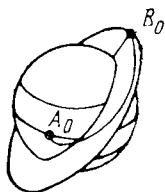
$$\operatorname{tg} \Delta i = \frac{\operatorname{tg} \Delta \varphi_{0*}}{\sin \Delta \vartheta_{\text{в}}} . \quad (3.2)$$

Заметим, что в случае эллиптической орбиты станции величина угла $\Delta \vartheta_{\text{в}}$ определяется как модуль разности истинных аномалий соответствующих точек орбиты.

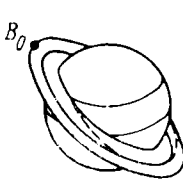
Из равенства (3.2) следует, что $\Delta i = 0$ при $\Delta \varphi_{0*} = 0$. Следовательно, компланарный выход возможен лишь в том случае, когда точка A_0 располагается в плоскости орбиты станции. При дан-



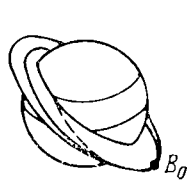
а)



б)



а)



б)

Рис. 3.5. Схемы прямого выхода корабля на орбиту станции

Рис. 3.6. Выход корабля на орбиту станции с использованием дежурной орбиты

ном значении $\Delta \varphi_{0*}$ минимальное значение Δi будет при $\Delta \vartheta_{\text{в}} = \pi/2$ и определяется равенством $\Delta i_{\min} = \Delta \varphi_{0*}$. Случай $\Delta \vartheta_{\text{в}} = -\pi/2$ практического значения не имеет, так как он соответствует встречному движению корабля и станции, что приводит к очень большой скорости сближения и требует чрезмерно больших затрат топлива на последующее наведение. Поэтому реальные значения $\Delta \vartheta_{\text{в}}$ находятся в пределах

$$0 < \Delta \vartheta_{\text{в}} < \pi,$$

что соответствует изменению угла Δi в диапазоне от $\Delta i_{\min}$ до $\pi/2$.

Наряду с прямым методом может использоваться предварительный вывод корабля на промежуточную (или дежурную) орбиту (рис. 3.6) с последующим переходом на орбиту станции. Такой метод будем называть выходом с промежуточной (дежурной) орбиты. В качестве промежуточной орбиты выбирается либо круговая орбита (см. рис. 3.6, а), которая по экономическим соображениям должна располагаться ниже орбиты станции, либо эллиптическая орбита (см. рис. 3.6, б), апогей которой касается орбиты станции. При этом также принципиально возможны два варианта: компланарный (плоскости промежуточной орбиты и орбиты станции совпадают) и некомпланарный выход на орбиту станции.

В качестве переходной орбиты (см. рис. 3.6, а) целесообразно использовать эллипс Хомана — полуэллиптическую орбиту, пе-

ригей которой касается дежурной орбиты, а апогей — орбиты станции. В апогее, который совпадает с точкой B_0 выхода корабля на орбиту станции, должно выполняться условие (3.1). При использовании эллиптической промежуточной орбиты дежурный полет корабля происходит до тех пор, пока в момент его выхода в точку B_0 не будет выполняться условие (3.1).

Во всех рассмотренных методах вывода космического корабля на орбиту станции в процессе полета к точке B_0 могут выполняться орбитальные маневры (не считая маневра орбитального перехода с дежурной орбиты). Их принято называть маневрами на среднем участке траектории встречи. Необходимость в таких маневрах может возникнуть в случае, если ошибки вывода велики и условие (3.1) в точке B_0 не выполняется. Они обеспечивают коррекцию указанных ошибок.

В точке B_0 начинается следующий этап — наведение корабля на станцию, которое состоит из грубого наведения и точного наведения. В результате грубого наведения, которое принято называть маневрированием на конечном участке, кораблю сообщается импульс скорости ΔV_K . Этот импульс примерно выравнивает скорости корабля и станции (не считая относительно небольшой скорости их сближения). В общем случае некомпланарного выхода импульс ΔV_K определяется как векторная разность

$$\Delta \bar{V}_K = \bar{V}_c - \bar{V}_K.$$

В том случае, когда корабль выходит в точку B_0 по касательной к орбите станции векторы $\bar{V}_c$ и $\bar{V}_K$ лежат в одной плоскости и модуль вектора $\Delta \bar{V}_K$ определяется равенством (рис. 3.7)

$$\Delta V_K = \sqrt{\Delta V_n^2 + \Delta V_6^2}, \quad (3.3)$$

где $\Delta V_n = V_c - V_K \cos \Delta i$ — продольная составляющая;
 $\Delta V_6 = V_K \sin \Delta i$ — боковая составляющая.

Если выход компланарный, то $\Delta V_K = \Delta V_n$. Однако достижение идеальной компланарности практически исключено вследствие неизбежных ошибок наведения. Поэтому целесообразно ввести практическое условие компланарности.

Очевидно, что выход корабля на орбиту станции можно считать практически компланарным, если составляющая ΔV_6 оказывает сравнительно малое влияние на величину ΔV_K , что, как видно из равенства (3.3), предполагает

$$\Delta V_6 \ll \frac{\Delta V_n}{3}.$$

С учетом малости угла Δi , полагая $\sin \Delta i \approx \Delta i$ и $\cos \Delta i \approx 1$, получим

$$3\Delta i \leq \frac{V_c}{V_K} - 1.$$

Для оценки этого условия положим, что используется прямой выход с геоцентрическим углом $\Delta\varphi_{\text{в}} = \pi/2$, а точка B_0 является апогеем траектории вывода (рис. 3.8). Тогда, применяя уравне-

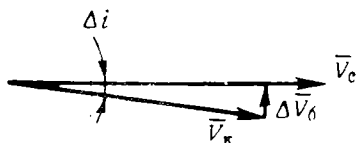


Рис. 3.7. Диаграмма скоростей при некомпланарном выходе

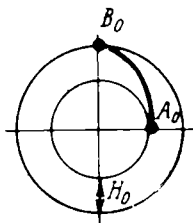


Рис. 3.8. Схема орбиты выведения при $\Delta\varphi = 90^\circ$

ние (1.9), с учетом равенства (1.13) к точкам A_0 и B_0 орбиты вывода получим уравнения

$$a(1 - e^2) = R, \quad a(1 + e^2) = R + H_0,$$

решение которых с учетом малости H_0/R дает $a \approx R$. Скорости корабля и станции на основании формул (1.15) и (1.17) будут

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{R + H_0}}, \quad V_k = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{R + H_0} - \frac{1}{R} \right)}.$$

Преобразуя последнее равенство, находим

$$V_k = V_c \sqrt{1 - \frac{H_0}{R}}$$

и условие практической компланарности приобретает вид

$$3\Delta i \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{H_0}{R}}} - 1.$$

Линеаризуя правую часть по H_0/R , окончательно получим

$$3\Delta i \leq \frac{H_0}{2R}. \quad (3.4)$$

На рис. 3.9 в соответствии с условием (3.4) показана область практически компланарного выхода космического корабля на орбиту станции.

По окончании маневра на конечном участке начинается точное наведение, которое обеспечивает управление сближением со станцией. Его основное назначение состоит в том, чтобы обеспечить сближение корабля со станцией с постепенным уменьшением скорости сближения до безопасной величины. Одноре-

менно по мере сближения осуществляется взаимная ориентация корабля и станции по линии визирования.

Как уже отмечалось выше, в некоторых случаях имеется дополнительная фаза прецизионного управления сближением. За этой фазой следует завершающий этап — причаливание корабля к станции. Прецизионное управление не имеет принципиальных

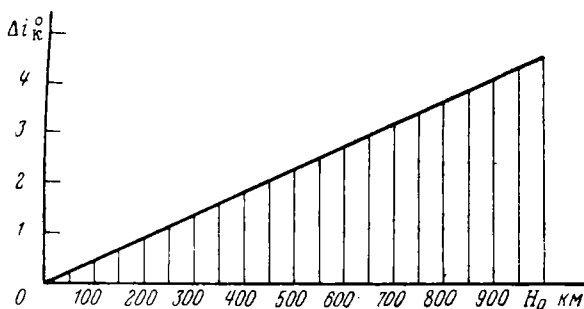


Рис. 3.9. Область практически компланарного выхода ($\Delta i_K^{\circ} = 3\Delta i$)

отличий (с точки зрения законов управления) от первой фазы управления сближением. Его особенность состоит лишь в более высокой чувствительности системы управления, других значениях параметров (коэффициенты усиления и т. п.). Поэтому аналитическое исследование можно проводить для обеих фаз одновременно. Характерной особенностью управления сближением является возможность его осуществления космонавтом с помощью системы ручного управления.

§ 3.2. МАНЕВРЫ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ ВЫХОД КОРАБЛЯ НА ОРБИТУ ВСТРЕЧИ

В произвольный момент старта космического корабля точка старта может находиться на значительном геоцентрическом угловом расстоянии $\Delta\varphi_{0*}$ и выход на орбиту станции будет некомпланарным. Такой выход требует выполнения бокового маневра для поворота плоскости орбиты корабля на угол Δi , определяемый равенством (3.2), что связано с дополнительной затратой топлива на создание импульса ΔJ_5 . Для повышения экономичности операции встречи необходимо стремиться к тому, чтобы обеспечить компланарный выход, а если это невозможно, то к уменьшению угла $\Delta\varphi_{0*}$. Следовательно, боковой маневр можно заменить частично или полностью выбором («маневром») места и момента старта.

Учитывая отмеченные выше случаи практического применения операции встречи, можно рассматривать следующие ва-

рианты запуска космического корабля для выведения на орбиту станции.

1. Запуск корабля и станции производится из одной и той же точки старта A_0 . Корабль запускается со сравнительно небольшим интервалом после старта станции (несколько часов или один-два сутки).

2. Запуск космического корабля из той же точки A_{01} , с которой стартовала станция, или из некоторой другой точки A_{02} . Корабль запускается с интервалом в несколько суток (как видно из рис. 3.3, этот интервал может составлять 1—3 месяца). Подобный вариант характерен для запуска корабля снабжения.

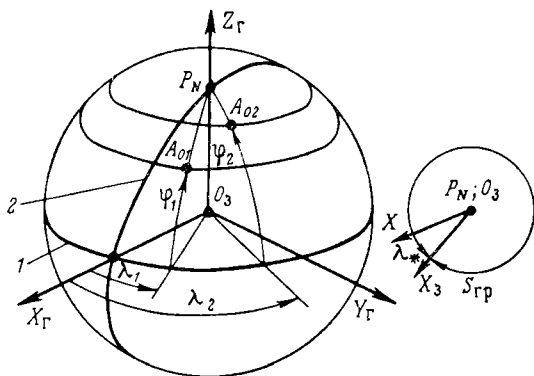


Рис. 3.10. Схема размещения возможных точек старта:

1—экватор; 2—гринвичский меридиан

3. Срочный запуск космического корабля, как правило, из точки, не совпадающей с точкой старта станции.

Таким образом, в первом варианте возможен «маневр» моментом старта для выполнения условия компланарности выхода корабля ($\Delta i = 0$). Второй вариант допускает практически неограниченный «маневр» моментом и местом старта. В последнем варианте «маневр» моментом старта очень ограничен и в основном «маневрирование» осуществляется местом старта. Как следует из равенства (3.2), условие компланарности выполняется при $\Delta \varphi_{0*} = 0$, т. е. при совпадении точки старта корабля с плоскостью орбиты станции.

Рассмотрим возможность выполнения условия компланарности в первом случае. Для этого введем помимо инерциальной системы координат O_3XYZ (см. рис. 1.5) географическую систему координат $O_3X_\Gamma Y_\Gamma Z_\Gamma$ (рис. 3.10), ось OZ_Γ которой направим по оси вращения Земли, а ось OX_Γ в точку пересечения нулевого (гринвичского) меридиана с экватором. Система координат $O_3X_\Gamma Y_\Gamma Z_\Gamma$ вращается относительно системы координат O_3XYZ

с угловой скоростью вращения Земли ω_3 , совершая один оборот за звездные сутки.

Положение плоскости орбиты станции в пространстве определяется вектором

$$\bar{e}_0 = (\sin i \sin \Omega) \bar{i} + (-\sin i \cos \Omega) \bar{j} + (\cos i) \bar{k}. \quad (3.5)$$

Переход от инерциальной к географической системе координат можно осуществить с помощью матрицы

$$A_{0r} = \begin{vmatrix} \cos \lambda_* & -\sin \lambda_* & 0 \\ \sin \lambda_* & \cos \lambda_* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

Здесь λ_* — географическая долгота проекции точки весеннего равноденствия на поверхность Земли, которая может быть найдена из равенства

$$\lambda_* = 360^\circ - S_{\text{Гр}},$$

где $S_{\text{Гр}}$ — гринвичское звездное время.

Единичный вектор $\bar{e}_1$, определяющий точку A_{01} с координатами $(\varphi_1, \lambda_1)^*$ в системе координат $O_3 X_r Y_r Z_r$, определяется из рис. 3.10:

$$\bar{e}_1 = (\cos \varphi_1 \cos \lambda_1) \bar{i}_r + (\cos \varphi_1 \sin \lambda_1) \bar{j}_r + (\sin \varphi_1) \bar{k}_r. \quad (3.7)$$

Условие компланарности для точки A_{01} , очевидно, будет

$$\bar{e}_1 \cdot A_{0r} \bar{e}_0 = 0.$$

Подставляя сюда выражения для векторов $\bar{e}_0$ и $\bar{e}_1$, находим

$$\cos \varphi_1 \sin i \sin (\lambda_n - \lambda_1) + \sin \varphi_1 \cos i = 0, \quad (3.8)$$

где

$$\lambda_n = \Omega + \lambda_*$$

представляет собой текущее значение географической долготы восходящего узла орбиты станции в рассматриваемый момент времени. Величина этого угла изменяется за счет вращения Земли и прецессии орбиты. Принимая за начало отсчета времени t момент старта станции, этот параметр можно записать следующим образом:

$$\lambda_n = \lambda_{n0} - \omega_\Sigma t$$

где λ_{n0} — географическая долгота восходящего узла в момент старта станции;

ω_Σ — суммарная угловая скорость (скорость вращения Земли и прецессии орбиты).

* Индексы «г» при обозначении географической долготы и геоцентрической широты для сокращения записи опускаем.

При $t=0$ уравнение (3.7) примет вид

$$\cos \varphi_1 \sin i \sin (\lambda_{в0} - \lambda_1) - \sin \varphi_1 \cos i = 0.$$

Отсюда с учетом рис. 3.11, а имеем

— при северо-восточном запуске станции

$$\lambda_{в0} = \lambda_1 - \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} i}, \quad (3.9)$$

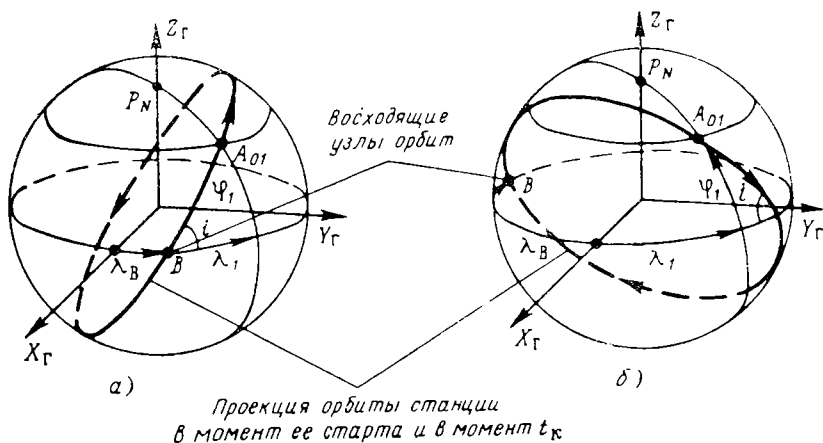


Рис. 3.11. К анализу условий компланарности выхода корабля на орбиту станции

— при юго-восточном запуске станции (см. рис. 3.11, б)

$$\lambda_{в0} = \lambda_1 - \pi + \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} i}.$$

Долгота станции в начале первого витка (оборота по орбите), т. е. в момент

$$t_{10} = t_{в} - \Delta t_0 \div T,$$

где $t_{в}$ — время полета станции на участке выведения;

Δt_0 — время движения станции по орбите от восходящего узла до точки ее вывода на орбиту,

может быть записана следующим образом:

$$\lambda_{в1} = \lambda_{в0} - \omega_{\Sigma} t_{10},$$

или

$$\lambda_{в1} = \lambda_{в0} - \omega_{\Sigma} (t_{в} - \Delta t_0 \div T).$$

Аналогично долгота станции в начале n -го витка будет

$$\lambda_{вn} = \lambda_{в0} - \omega_{\Sigma} (t_{в} - \Delta t_0 \div nT).$$

Представим текущее значение географической долготы восходящего узла в виде

$$\lambda_n = \lambda_{n0} - \omega_\Sigma (t_n - \Delta t_0 + nT) - \omega_\Sigma \Delta t, \quad (3.10)$$

где

$$0 \leq \Delta t \leq T.$$

Тогда из уравнения (3.8) получим следующие условия компланарности:

$$\lambda_{n0} - \lambda_1 - \omega_\Sigma (t_n - \Delta t_0 + \Delta t_k) - \omega_\Sigma n_k T = -2m_k \pi - \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} i},$$

когда точка A_{01} совпадает с восходящей ветвью орбиты станции (см. рис. 3.11, а), и

$$\lambda_{n0} - \lambda_1 - \omega_\Sigma (t_n - \Delta t_0 + \Delta t_k) - \omega_\Sigma n_k T = -(2m_k + 1)\pi + \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} i},$$

когда точка A_{01} совпадает с нисходящей ветвью орбиты станции (см. рис. 3.11, б).

Здесь m_k — количество суток, прошедших с момента старта станции до момента, в который выполняется условие компланарности;

n_k — номер витка станции, соответствующий условию компланарности;

Δt_k — время движения станции от начала n_k -го витка до точки орбиты в момент t_k , когда выполняется условие компланарности, которое характеризует положение станции относительно восходящего узла, определяемое аргументом широты u_k в момент t_k .

С учетом равенства (3.9) найденные условия компланарности преобразуются следующим образом:

$$\omega_\Sigma (\Delta t_0 - t_n - \Delta t_k) = \omega_\Sigma n_k T - 2m_k \pi \quad (3.11a)$$

— при северо-восточном запуске (восходящая ветвь);

$$\omega_\Sigma (\Delta t_0 - t_n - \Delta t_k) = \omega_\Sigma n_k T - (2m_k + 1)\pi + 2 \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} i}$$

— при северо-восточном запуске (нисходящая ветвь);

$$\omega_\Sigma (\Delta t_0 - t_n - \Delta t_k) = \omega_\Sigma n_k T - (2m_k - 1)\pi - 2 \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} i}$$

— при юго-восточном запуске (нисходящая ветвь);

$$\omega_\Sigma (\Delta t_0 - t_n - \Delta t_k) = \omega_\Sigma n_k T - 2m_k \pi$$

— при юго-восточном запуске (восходящая ветвь).

Условие (3.11a) соответствует случаю, когда относительно точки A_{01} движение станции происходит по восходящей ветви орбиты (см. рис. 3.11, а), а условие (3.11б) — наоборот, когда

движение станции происходит по нисходящей ветви орбиты (см. рис. 3.11, б). Предположим, что запуск станции производится в северо-восточном направлении. Тогда на первоначальном витке (нулевой виток) станция движется относительно точки A_{01} по восходящей ветви и имеется возможность выполнения условия компланарности на первых витках (в течение времени много меньшего суток) при движении станции по нисходящей ветви орбиты. Ввиду практической важности этого случая рассмотрим его подробнее. Полагая в первом равенстве (3.11б) $m_k=0$, имеем

$$\omega_\Sigma (\Delta t_0 - t_b - \Delta t_k) = \omega_\Sigma n_k T - \pi - 2 \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} i}. \quad (3.12a)$$

Следовательно, если операция встречи выполняется спустя несколько часов после запуска станции, то для данной точки A_{01} (широты φ_1) можно выбрать орбиту, которая допускает компланарный выход корабля на первом, втором или третьем витке. В том случае, когда на выбор наклона не накладывается особых ограничений, то, задаваясь требуемым значением n_k , можно для определенного периода обращения подобрать наклонение орбиты, которое при приемлемых значениях Δt_k обеспечивает выполнение условия (3.12, а). Когда требуется определенное наклонение, выполнение условия (3.12, а) можно обеспечить за счет изменения периода обращения в допустимых пределах. Тот же результат при заданной орбите (T, i) можно получить за счет выбора φ_1 .

При запуске станции в юго-восточном направлении (см. рис. 3.11, б) первое условие компланарности выполняется спустя время $t_{k1} \geq 0,5$ суток. В этом случае, полагая во втором уравнении (3.11, б) $m_k=1$, находим

$$n_{k1} + \frac{\Delta t_k}{T} = \frac{\pi + 2 \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} i}}{T \omega_\Sigma} + \frac{\Delta t_0 - t_b}{T}. \quad (3.12б)$$

Здесь n_{k1} определяется целой, а t_k/T — дробной частью выражения, стоящего справа. Интересно отметить, что при $\varphi_1=i$ первое и второе условия (3.11б), а также условие (3.11а) полностью совпадают, и в этом случае достаточно анализировать лишь условие (3.11, а).

Наиболее благоприятные условия для встречи имеют место в том случае, когда корабль выводится на орбиту станции по той же траектории. Это возможно, если

$$\Delta t_0 - t_b - \Delta t_b = 0, \quad (3.13)$$

или

$$\Delta t_k = \Delta t_0 - t_b,$$

что обеспечивает одновременный выход станции и корабля в точку B_0 , которая совпадает с точкой вывода станции на орбиту. Подставляя это соотношение в равенство (3.11а), получим

$$n_k \omega_\Sigma T - 2m_k \pi = 0.$$

Плоскость орбиты совпадает со своим первоначальным положением (в момент старта) спустя n_k витков, определяемых формулой

$$n_k = \frac{2\pi}{T\omega_\Sigma} m_k,$$

или

$$n_k = \frac{v_0}{\omega_\Sigma} m_k. \quad (3.14)$$

Поскольку n_k и m_k являются целыми числами, равенство (3.14) выполняется лишь в том случае, когда знаменатель дроби v_0/ω_Σ , представляемой как отношение целых чисел, равен m_k . В дальнейшем условие (3.14) выполняется при m_k , кратных этому знаменателю. В этом случае положение плоскости орбиты относительно Земли периодически повторяется с периодом $T_{r0} = n_k T$. Такие орбиты будем называть *геопериодическими*. Очевидно, что наименьшее значение указанного периода соответствует $m_k = 1$. В этом случае

$$T_{r0} = \frac{v_0}{\omega_\Sigma} T \simeq 24 \text{ часа},$$

где v_0/ω_Σ — целое число.

Подобные орбиты назовем *минимальными геопериодическими*. Они наилучшим образом обеспечивают условие компланарного выхода корабля для встречи со станцией, так как последнее выполняется с наибольшей частотой.

Величина угловой скорости ω_Σ включает угловую скорость прецессии орбиты, которая зависит от высоты и наклона орбиты. Однако ввиду относительной малости ω_Π по сравнению с ω_Σ можно считать, что v_0/ω_Σ зависит лишь от высоты (точнее средней высоты $H_a = a - R$) орбиты. Эта зависимость представлена графиком на рис. 3.12. Замечаем, что в диапазоне высот $200 < H_0 < 1000$ возможны три минимальные геопериодические орбиты (на высотах порядка 280, 570, 890 км), для которых отношение v_0/ω_Σ соответственно равно 16, 15, 14. Указанный диапазон высот, ограниченный снизу по плотности атмосферы (следовательно, по времени существования станции) и сверху по интенсивности радиации, считается [120], [121] наиболее вероятным для запуска космических станций.

С увеличением m_k количество геопериодических орбит в указанном диапазоне широт возрастает. В качестве примера

m_K , сутки	2		3					5						
H , км	427	737	376	477	684	790	339	398	456	519	637	704	770	
T , час	$1\frac{17}{31}$	$1\frac{19}{29}$	$1\frac{25}{47}$	$1\frac{13}{23}$	$1\frac{7}{11}$	$1\frac{29}{43}$	$1\frac{41}{79}$	$1\frac{7}{12}$	$1\frac{43}{77}$	$1\frac{11}{19}$	$1\frac{23}{37}$	$1\frac{47}{73}$	$1\frac{2}{3}$	

в табл. 3.1 приведены значения высот и периода обращения геопериодических орбит, рассчитанные по формуле (3.14) при $m_k=2, 3, 5$.

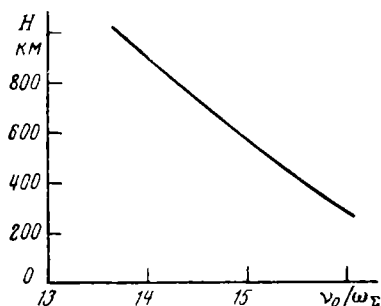


Рис. 3.12. Зависимость ν_0/ω_2 от высоты орбиты

Нетрудно убедиться в том, что равенство (3.14) обеспечивает одновременно и периодичность выполнения условий (3.11б). Отличие состоит лишь в том, что при этом, как правило, не выполняется условие (3.13), так как величина Δt_k определяется равенством (3.12а) или (3.12б), правые части которых в общем случае не равны нулю.

Проанализируем случай, когда корабль и станция стартуют из разных точек земной поверхности: станция из точки A_{01} с координатами φ_1, λ_1 , а корабль из точки A_{02} с координатами φ_2, λ_2 . По аналогии с выражением (3.7) единичный вектор $\bar{e}_2$, определяющий точку A_{02} , запишется в системе координат $O_3X_rY_rZ_r$ следующим образом:

$$\bar{e}_2 = (\cos \varphi_2 \cos \lambda_2) \bar{i}_r + (\cos \varphi_2 \sin \lambda_2) \bar{j}_r + (\sin \varphi_2) \bar{k}_r.$$

Условие компланарности

$$\bar{e}_2 \cdot A_{0r} \bar{e}_0 = 0$$

после подстановки выражений (3.5) и (3.6) примет вид

$$\cos \varphi_2 \sin i \sin (\lambda_B - \lambda_2) + \sin \varphi_2 \cos i = 0.$$

Отсюда находим

$$\lambda_B = \lambda_2 - (2m_k + 1)\pi + \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} i},$$

$$\lambda_B = \lambda_2 - 2m_k\pi - \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} i}.$$

Преобразуем найденные выражения с учетом равенств (3.9) и (3.10). В результате получим соотношения, аналогичные (3.11):

$$\omega_{\Sigma}(\Delta t_0 - t_n - \Delta t_k) = \omega_{\Sigma} n_k T - 2m_k \pi + \Delta \lambda_{\varphi 1} + \Delta \lambda_{\varphi 2} \quad (3.15a)$$

— при северо-восточном запуске (восходящая ветвь);

$$\omega_{\Sigma}(\Delta t_0 - t_n - \Delta t_k) = \omega_{\Sigma} n_k T - (2m_k - 1)\pi + \Delta \lambda_{\varphi 1} - \Delta \lambda_{\varphi 2}$$

— при юго-восточном запуске (нисходящая ветвь);

$$\omega_{\Sigma}(\Delta t_0 - t_n - \Delta t_k) = \omega_{\Sigma} n_k T - (2m_k + 1)\pi - \Delta \lambda_{\varphi 1} + \Delta \lambda_{\varphi 2} \quad (3.15b)$$

— при северо-восточном запуске (нисходящая ветвь);

$$\omega_{\Sigma}(\Delta t_0 - t_n - \Delta t_k) = \omega_{\Sigma} n_k T - 2m_k \pi + \Delta \lambda_{\varphi 1} - \Delta \lambda_{\varphi 2}$$

— при юго-восточном запуске (восходящая ветвь),

где

$$\Delta \lambda_{\varphi 1} = \lambda_2 - \lambda_1,$$

$$\Delta \lambda_{\varphi 1} = \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} i} + \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} i},$$

$$\Delta \lambda_{\varphi 2} = \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} i} - \arcsin \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} i}.$$

Соответствующим выбором широты φ_2 и долготы λ_2 при заданных значениях φ_1 , λ_1 , i , T , Δt_0 можно обеспечить условие компланарности для точки A_{02} уже в течение первых суток полета станции ($m_k = 0; 1$). Для того чтобы в последующем условия компланарности также выполнялись, период обращения станции должен по-прежнему удовлетворять условию геопериодичности (3.14). В целях повышения частоты выполнения условий компланарности снова нужно стремиться к получению минимальной геопериодической орбиты. Однако в данном случае гораздо сложнее выполнить условие (3.13), так как величины Δt_k , характеризующие положение станции в момент выполнения условий компланарности, определяются равенствами

$$\omega_{\Sigma}(\Delta t_0 - t_n - \Delta t_k) = n_k \omega_{\Sigma} T \pm \pi + \Delta \lambda_{21} \pm \Delta \lambda_{\varphi 1},$$

$$\omega_{\Sigma}(\Delta t_0 - t_n - \Delta t_k) = n_k \omega_{\Sigma} T + \Delta \lambda_{21} \pm \Delta \lambda_{\varphi 2},$$

которые вытекают из условий (3.15) при $m_k = 0; 1$. Правые части полученных равенств обращаются в нуль лишь при определенных сочетаниях n_k , $\Delta \lambda_{21}$, $\Delta \lambda_{\varphi 1}$ или n_k , $\Delta \lambda_{21}$, $\Delta \lambda_{\varphi 2}$.

Таким образом, при запуске космического корабля из той же точки, из которой стартовала станция, достаточно обеспечить условие геопериодичности орбиты станции. Тогда при старте корабля через одни сутки (для минимальных геопериодических орбит) или несколько суток (в соответствии с $T_{\Gamma 0}$) после старта станции задача выведения решается довольно просто, так как

при этом выполняется условие компланарности и корабль выводится по той же траектории, что и станция. Если старт корабля производится при выполнении условий (3.12), а также при старте корабля из другой точки в моменты, удовлетворяющие условиям (3.15), выведение, как правило, осуществляется по другой траектории. Методика выведения корабля в последнем случае определяется величиной Δt_k (положением станции на орбите) в момент его старта. Следовательно, в общем случае станция в момент старта корабля находится в некоторой произвольной точке C_0 с аргументом широты u_0 . Величина угла u_0 определяется тем, что время движения станции из точки B в точку C_0 равно Δt_k , не удовлетворяющему условию (3.13).

Реализуемый метод выведения корабля зависит от положения точки C_0 относительно A_0 в момент старта, т. е. от угла

$$\Delta u_0 = u_0 - u_A,$$

который будем называть *начальной фазой* станции.

Здесь $u_A = \arcsin \frac{\sin \varphi_A}{\sin i}$ — угловое расстояние точки A_0 (φ_A, λ_A) от экватора в плоскости орбиты станции. Угол u_0 при движении станции по круговой орбите определяется выражением

$$u_0 = v_0 \Delta t_k.$$

Прямой выход корабля на орбиту станции возможен лишь при определенных значениях угла Δu_0 , который зависит от элементов орбиты станции и геоцентрического угла $\Delta \varphi_B$. При идеальном соблюдении условий компланарности наиболее экономичной траекторией выведения корабля является эллипс Хомана ($\Delta \varphi_B = \pi$). В этом случае точка A_1 (конец стартового участка) является перигеем траектории выведения и скорость V_0 корабля в этой точке (высотой H_1 точки A_1 пренебрегаем из-за ее сравнительной малости) на основании выражения (1.15) будет

$$V_{0\min} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a_n} \right)},$$

где a_n — большая полуось орбиты выведения, которая может быть вычислена следующим образом:

$$a_n = R + \frac{H_0}{2}.$$

После выхода корабля в точку B_0 ему сообщается дополнительная скорость

$$\Delta V_0 = V_c - V_{Bk},$$

в результате чего корабль приобретает скорость, равную (в действительности, близкую) скорости станции. Скорость $V_{B \kappa}$ корабля в момент выхода в точку B_0 в данном случае будет

$$V_{B \kappa \min} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{R + H_0} - \frac{1}{a_n} \right)}.$$

Характеристическая скорость ракеты-носителя выбирается с таким расчетом, чтобы обеспечить преодоление сопротивления атмосферы и силы тяготения при выводе корабля в точку A_1 , а также придание кораблю указанных скоростей не только в случае выведения по эллипсу Хомана, но и в более общем случае ($\Delta\theta_n < \pi$). Следовательно, она должна удовлетворять условию

$$V_{\kappa} = V_0 + \Delta V_0$$

и реальное выведение будет происходить по одной из траекторий, ограниченных предельными траекториями 1 и 2 на рис. 3. 13. Траектория 1 — эллипс Хомана, которая соответствует минимальному использованию энергетических возможностей ракеты-носителя, а траектория 2 соответствует полному использованию этих возможностей (полное выгорание топлива). Поскольку конкретная траектория выведения корабля не является эллипсом Хомана, то вектор скорости $\vec{V}_0$ составляет с плоскостью горизонта точки A_0 угол $\theta_{V \kappa}$, а вектор дополнительной скорости $\Delta \vec{V}_0$ — с плоскостью горизонта точки B_0 угол $\theta_{V \kappa}$.

Таким образом, возможные точки встречи космического корабля со станцией находятся в пределах дуги $B_{01}B_{02}$ орбиты станции, которая называется *областью встречи*. Этой дуге соответствует дуга $C_{01}C_{02}$, характеризующая возможные положения станции в момент старта корабля, при которых решается задача встречи (точнее, выход корабля на орбиту станции). Длину дуги $C_{01}C_{02}$ и соответствующий ей интервал времени называют *областью старта*, или *окном старта* при выполнении операции встречи.

Размер области старта и начальная фаза станции Δu_0 при заданной высоте орбиты станции зависит от характеристической скорости ракеты-носителя корабля. Для иллюстрации возможных значений параметров V_0 , $\theta_{V \kappa}$, ΔV_0 и Δu_0 на рис. 3. 14 приведены графики, рассчитанные для различных траекторий выведения корабля на орбиту станции высотой $H_0 = 550$ км. Точки, лежащие на пунктирной кривой $\theta_{V \kappa} = 0$, соответствуют выведению по эллипсу Хомана.

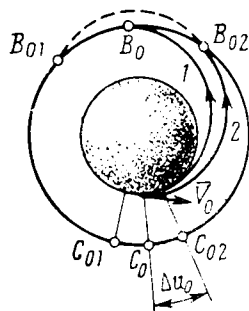


Рис. 3. 13. К определению окна старта при выполнении операции встречи

В том случае, когда коррекция геопериодичности орбиты станции отсутствует, идеальное выполнение условий компланарности маловероятно как из-за ошибок в определении момента старта корабля, так и вследствие нарушения условий геопериодичности орбиты станции, вызванных изменением ее периода обращения под действием сопротивления атмосферы. Кроме

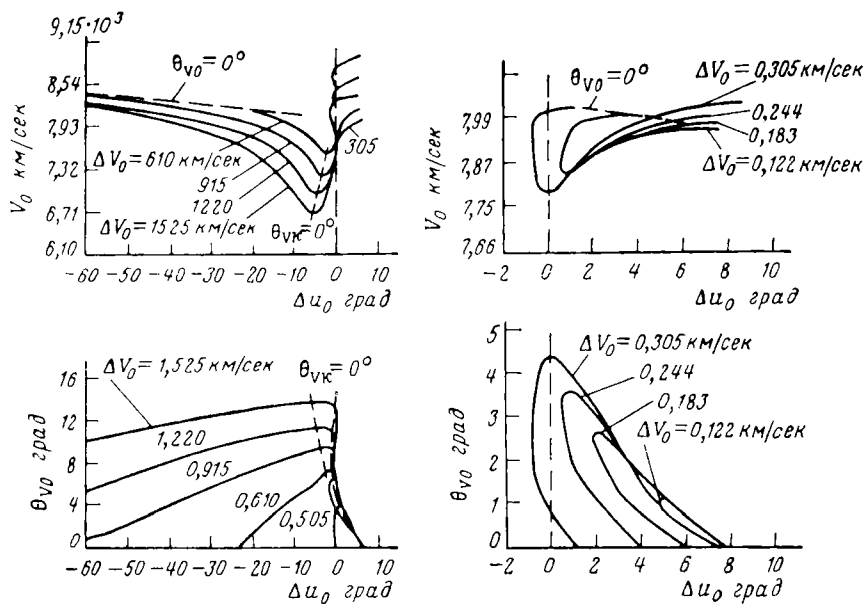


Рис. 3.14. Графики начальных параметров орбиты выведения корабля при высоте орбиты станции 550 км

того, при запуске корабля из произвольной точки и в произвольный момент времени (необходимость такого запуска может возникнуть в аварийной ситуации) выход на орбиту станции будет, как правило, некомпланарным.

Тогда целесообразно принимать $\Delta\varphi_{\text{в}} = \pi/2$, так как при этом отклонение от условий компланарности оказывает наименьшее влияние на экономичность встречи ($\Delta i = \Delta i_{\text{min}}$). Применяя, как и ранее, к точкам A_0 и B_0 (см. рис. 3.8) уравнение (1.9), с учетом равенства (1.13) и того, что $H/R \ll 1$, получим

$$a \approx R, \quad e = \frac{H_0}{R + H_0}.$$

Следовательно, в данном случае средняя угловая скорость обращения корабля будет

$$v_{0\text{к}} = \frac{V_{1R}}{R}.$$

Учитывая, что в принятой схеме истинная аномалия за время t_B выведения изменяется от $\pi/2$ до π , имеем

$$\frac{\pi}{2} = \frac{V_{IR}}{R} \left(t_B + \frac{2eR}{V_{10}} \sin \frac{V_{IR}}{R} t_B \right),$$

а так как

$$t_B = \frac{\frac{\pi}{2} - \Delta u_0}{V_c} (R + H_0),$$

то окончательно находим

$$\begin{aligned} \frac{V_{IR}}{V_c} \left(1 + \frac{H_0}{R} \right) \left[\Delta u_0 + \frac{2eV_c}{V_{IR} \left(1 + \frac{H_0}{R} \right)} \sin \frac{V_{IR}}{V_c} \left(1 + \frac{H_0}{R} \right) \Delta u_0 \right] = \\ = \frac{\pi}{2} \left[\frac{V_{IR}}{V_c} \left(1 + \frac{H_0}{R} \right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Результаты расчетов по этому уравнению приведены в виде графика зависимости Δu_0 от H_0 на рис. 3.15, из которого видно, что в данном случае начальная фаза находится в пределах $6-12^\circ$.

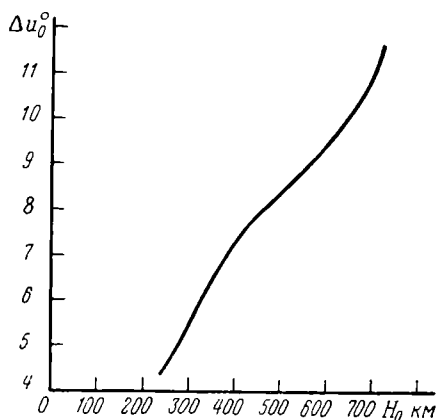


Рис. 3.15. Зависимость потребной начальной фазы от высоты орбиты станции при $\Delta \theta = 90^\circ$

В том случае, когда начальная фаза станции выходит за пределы окна старта, корабль предварительно выводится на промежуточную орбиту, на которой выполняется «маневр» фазирования за счет разности периодов обращения корабля и станции. В качестве промежуточной орбиты может использоваться

круговая или эллиптическая орбита. Рассмотрим маневры фазирования с использованием указанных промежуточных орбит.

Предположим, что корабль выводится на промежуточную круговую орбиту высотой H_{π} (см. рис. 3.6, а). В момент вывода корабля на эту орбиту станция находится впереди корабля на угловом удалении Δu_0 . Фазирование производится до тех пор, пока фаза станции не достигнет некоторой величины Δu_{π} . Последняя должна быть такой, чтобы время движения корабля по орбите перехода и время движения станции до точки B_0 были одинаковыми, т. е.

$$\frac{\pi - \Delta u_{\pi}}{v_0} = \frac{T_{\pi}}{2}.$$

Здесь $T_{\pi} = 2\pi \sqrt{\frac{\left(R + \frac{H_0 + H_{\pi}}{2}\right)^3}{\mu}}$ — период обращения по переходной орбите.

Учитывая, что H_{π} и H_0 являются величинами малыми по сравнению с $R + H_0$, линейризуем выражение для T_{π} и представим его в виде

$$T_{\pi} = \frac{2\pi}{v_0} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{H_0 - H_{\pi}}{R + H_0} \right).$$

После подстановки этого выражения в приведенное выше равенство получим

$$\Delta u_{\pi} = \frac{3}{4} \pi \left[\frac{H_0 - H_{\pi}}{R + H_0} \right].$$

Угловое расстояние между кораблем и станцией в процессе фазирования изменяется со скоростью

$$\Delta v = v_{0\pi} - v_0.$$

Здесь $v_{0\pi}$ — угловая скорость обращения корабля на промежуточной орбите. Ее величина на основании формулы (1.22) определяется равенством

$$v_{0\pi} = v_0 \left[\frac{1}{1 - \frac{H_0 - H_{\pi}}{R + H_0}} \right]^{\frac{3}{2}},$$

или приближенно

$$v_{0\pi} \approx v_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{H_0 - H_{\pi}}{R + H_0} \right).$$

Следовательно,

$$\Delta v = \frac{3}{2} v_0 \frac{H_0 - H_{\pi}}{R + H_0}.$$

В процессе фазирования станция совершает некоторое количество n_Φ витков за время $t_\Phi = n_\Phi T$. При этом фаза станции изменяется от Δu_0 до Δu_n . В результате имеет место равенство

$$\Delta u_0 - \Delta u_n = \Delta \nu n_\Phi T.$$

Подставляя сюда найденные выше формулы для Δu_n и $\Delta \nu$, получим

$$\Delta u_0 = 3\pi n_\Phi \frac{H_0 - H_n}{R + H_0} + \frac{3}{4} \pi \left[\frac{H_0 - H_n}{R - H_0} \right],$$

откуда потребное количество витков для фазирования будет

$$n_\Phi = \frac{R + H_0}{3\pi(H_0 - H_n)} \Delta u_0 = 0,25.$$

В качестве промежуточной орбиты естественно принять орбиту с наименьшей возможной высотой, обеспечивающей по-

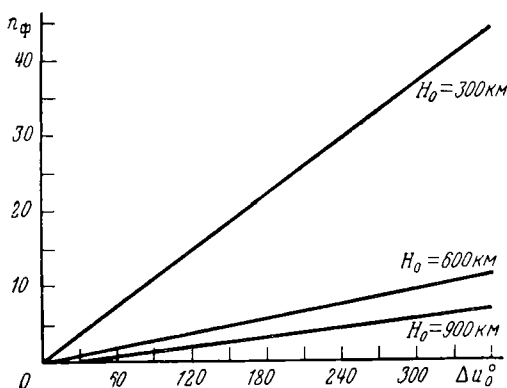


Рис. 3.16. К оценке времени фазирования при использовании круговой орбиты

лет корабля в течение t_Φ (время существования спутника на этой высоте должно быть больше t_Φ). При этом n_Φ будет зависеть от высоты H_0 орбиты станции и от начальной фазы Δu_0 . На рис. 3.16 приведены графики зависимости n_Φ от Δu_0 , рассчитанные по приведенной выше формуле при $H_n = 200$ км для высот орбиты станции 300, 600, 900 км, которые позволяют оценить потребное количество витков станции в процессе фазирования.

Из этих графиков следует, что при движении станции по орбите сравнительно малой высоты (около 300 км) для осуществления фазирования при любой начальной фазе станции $0 < \Delta u_0 < 360^\circ$ потребуются до 44,2 витков (около 3 суток). Если высота орбиты станции около 600 км, максимальное потребное количество витков на фазирование уменьшается до 11,3 (около

18 час). По мере дальнейшего увеличения H_0 максимальная величина n_Φ еще более уменьшается и при $H_0=900$ км она составит 6, 7, что соответствует примерно 10 час. Как видим, даже при большой высоте орбиты станции процесс фазирования может быть довольно длительным. При $\Delta u_0 > \pi$ его можно сократить за счет использования промежуточной орбиты, имеющей высоту больше H_0 , однако это приводит к излишним затратам топлива и снижает экономичность операции встречи.

Проанализируем маневр фазирования, основанный на использовании эллиптической промежуточной орбиты. При этом будем считать, что корабль выводится в перигей этой орбиты (см. рис. 3.6, б), имеющий высоту H_1 , а апогей касается орбиты станции в расчетной точке встречи B_0 . В момент вывода корабля на промежуточную орбиту фаза станции равна Δu_0 .

Фаза станции к концу первого полуоборота корабля (первого выхода в точку B_0) будет

$$\Delta u_1 = \Delta u_0 - \left(\pi - v_0 \frac{T_\pi}{2} \right),$$

где

$$T_\pi = 2\pi \sqrt{\frac{a_r^3}{\mu}}.$$

Высота в перигее должна выбираться с таким расчетом, чтобы через n_Φ оборотов корабля по переходной орбите фаза станции стала равной нулю. Величина n_Φ может быть найдена из уравнения

$$\Delta u_0 - \left(\pi - v_0 \frac{T_\pi}{2} \right) - n_\Phi (2\pi - v_0 T_\pi) = 0. \quad (3.16)$$

Подставляя в выражение для периода T_π значение большой полуоси

$$a_\pi = R + \frac{H_0 + H_1}{2},$$

с учетом формулы (1.22) имеем

$$T_\pi = \frac{2\pi}{v_0} \left[1 - \frac{H_0 - H_1}{2(R + H_0)} \right]^{\frac{3}{2}}.$$

Разлагая это выражение в ряд относительно $H_0 - H_1$ и ограничиваясь малыми первого порядка, находим

$$T_\pi \simeq \frac{2\pi}{v_0} \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{H_0 - H_1}{R + H_0} \right) \right].$$

После подстановки этого равенства в уравнение (3.16) получим

$$n_\Phi = \frac{2}{3\pi} \left(\frac{R + H_0}{H_0 - H_1} \right) \Delta u_0 - 0,5. \quad (3.17)$$

Поскольку n_{ϕ} должно обязательно быть целым числом, выбор высоты H_1 в перигее промежуточной орбиты производится с учетом двух положений. Во-первых, эта высота должна быть такой, чтобы время существования равнялось времени фазирования или превышало его. Во-вторых, для каждого значения Δu_0 необходимо выбирать такое значение H_1 , чтобы первый член формулы (3.17) включал целое число и половину. На рис. 3.17 приведены графики зависимости n_{ϕ} от Δu_0 , рассчитанные по формуле (3.17) для двух значений H_0 , причем в каждом случае построены два графика, соответствующие двум разным значениям

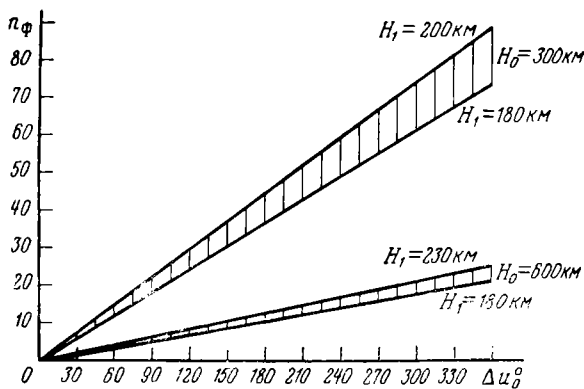


Рис. 3.17. К оценке времени фазирования при использовании эллиптической орбиты

высот H_1 . Для каждого значения Δu_0 с помощью этих графиков можно выбрать определенную величину H_1 . Для этого нужно взять ближайшую к одному из графиков точку на координатной плоскости с целым значением n_{ϕ} и интерполированием определить H_1 . Например, при начальной фазе $\Delta u_0 = 300^\circ$ и высоте станции 600 км из соответствующих графиков на рис. 3.17 имеем $17,9 < n_{\phi} < 20,4$. Следовательно, фазирование выполняется в течение $n_{\phi} = 18$ на промежуточной орбите с высотой перигея

$$H_1 = \frac{230 - 180}{20,4 - 17,9} \cdot 0,1 + 180 = 182 \text{ км.}$$

Последний метод фазирования является более простым по сравнению с предыдущим, так как он не требует дополнительного перехода с промежуточной орбиты на орбиту станции. Однако он имеет существенные недостатки. Во-первых, длительность фазирования по второму методу примерно вдвое больше, что объясняется почти вдвое меньшим значением относительной угловой скорости корабля и станции. Во-вторых, требование к точности выдерживания высоты перигея эллиптической орбиты фазирования является более высоким, чем требование к точно-

сти высоты круговой орбиты. В процессе фазирования на круговой орбите имеется возможность уточнить ее элементы и осуществить более точный переход на орбиту станции. При фазировании на эллиптической орбите отклонение высоты перигея от расчетного значения на несколько километров приводит к появлению остаточной фазы в точке B_0

$$|\Delta u_k| \leq \pi - \gamma_0 \frac{T_n}{2} \simeq \frac{3\pi}{4} \frac{H_0 - H_1}{R + H_0}.$$

В рассмотренном выше примере $|\Delta u_k|_{\max} = 8^{\circ}, 15$, что соответствует расстоянию корабля от станции в районе точки B_0 около 1000 км. Для этого достаточно отклонения высоты перигея от расчетного значения

$$\Delta H_1 = \frac{230 - 180}{4} = 12,5 \text{ км.}$$

Так как в пределах высот $180 < H_1 < 230$ км существует три высоты, соответствующие целому значению n_Φ , то отклонение H_1 от расчетного значения на 12,5 км приводит к тому, что нулевая фаза достигается не в точке B_0 , а в перигее перед выходом или после выхода корабля в точку B_0 .

Следовательно, ошибка в высоте перигея промежуточной орбиты должна быть меньше 12,5 км. Обеспечение такой точности при выводе корабля на промежуточную орбиту не представляет особых трудностей. Однако при длительном фазировании, которое имеет место в рассмотренном примере, изменение высоты перигея за счет возмущающего действия атмосферы может привести к указанному отклонению. Изменение высоты (уменьшение) в апогее будут при этом еще больше, что приведет к дополнительным затруднениям на последующем конечном этапе операции встречи. Следовательно, при длительном фазировании на эллиптической орбите необходимо либо выбирать ее параметры (высоты перигея и апогея с учетом возмущающего действия атмосферы), либо корректировать в процессе фазирования. Последнее, естественно, снижает экономичность операции встречи.

Таким образом, фазирование на эллиптической орбите имеет смысл применять лишь в том случае, когда начальная фаза велика, а ко времени процесса фазирования не предъявляется достаточно жестких требований. Следует при этом отметить, что при больших начальных фазах ($\Delta u_0 > \pi$) можно для фазирования использовать эллиптическую орбиту, перигей которой касается орбиты станции, а высота апогея больше, чем H_0 . В этом случае время фазирования может быть уменьшено, так как уменьшение фазы достигается за счет постепенного отставания корабля от станции. Возмущающее действие атмосферы здесь не играет столь существенного значения. Однако для того чтобы время

фазирования приближалось к соответствующим значениям для круговой промежуточной орбиты, необходимо иметь высоту в апогее, значительно большую высоты орбиты станции. При этом суммарные энергетические затраты на выведение корабля существенно возрастают и экономичность операции встречи снижается.

Время выведения корабля на орбиту станции является минимальным в том случае, когда выполняется условие (3.13), так как в этом случае необходимость в «маневре» фазирования отсутствует. Поэтому желательно выбирать орбиту станции и точку старта корабля (в том случае, когда корабль стартует из другой точки), чтобы периодически выполнялось указанное условие. Последнее возможно, если орбита станции удовлетворяет условию геопериодичности. Однако под действием различных возмущений условия геопериодичности будут нарушаться и со временем может возникнуть необходимость в выполнении «маневров» фазирования. Возмущения орбиты приводят также к нарушению условий компланарности. Все это снижает эффективность операции встречи.

Одним из методов повышения эффективности встречи является коррекция орбиты станции, обеспечивающая восстановление условий геопериодичности. Расчеты [125] показывают, что энергетические затраты на выполнение маневров коррекции орбиты станции пренебрежимо малы по сравнению с тем выигрышем, который в этом случае имеет место.

Из анализа возмущений орбиты, выполненного в гл. I, следует, что на нарушение условий геопериодичности могут влиять вековые возмущения долготы восходящего узла (прецессия орбиты) вследствие несферичности Земли и большой полуоси под действием сопротивления атмосферы. Первый фактор учитывается введением ω_z при определении условий геопериодичности. Следовательно, основной причиной нарушения условий геопериодичности орбиты станции является сопротивление атмосферы, которое приводит к постепенному уменьшению периода обращения (большой полуоси орбиты) станции. К возмущениям, нарушающим условие геопериодичности, можно отнести также толчки при встрече станции с кораблями. Однако эти возмущения малы. К тому же, естественно, предположить, что их среднее значение (точнее математическое ожидание) равно нулю. Поэтому последние возмущения в дальнейшем учитывать не будем.

Если периодически станция выполняет коррекционные маневры, увеличивая большую полуось орбиты (период обращения), то при определенных условиях можно получить замкнутый предельный цикл коррекции с нулевым средним отклонением станции от движения по номинальной геопериодической орбите.

Проанализируем маневры коррекции орбиты станции, полагая, что она движется по околокруговой орбите с большой полу-

осью (средним радиусом) a . Под влиянием сопротивления атмосферы

$$F_a = c_x S Q \frac{V^2}{2},$$

где c_x — коэффициент лобового сопротивления, отнесенного к характеристической площади S ,

большая полуось в промежутке между маневрами коррекции изменяется от a_0 до a_k . Это изменение может быть определено с помощью первого уравнения (2.53), которое после подстановки выражения для F_a и перехода к новой независимой переменной $u = u_0 + vt$ примет вид

$$\frac{da}{du} = \left(\frac{V}{v_0} \right)^2 \left(\frac{c_x S Q}{m} \right). \quad (3.18)$$

Будем считать, что изменение высоты, как за счет эллиптичности, так и за счет возмущения большой полуоси, мало (порядка сотен метров). Тогда плотность атмосферы можно считать постоянной. Учитывая, что

$$V^2 = \frac{\mu}{a}, \quad v_0^2 = \frac{\mu}{a^3},$$

и обозначая

$$x_a = \frac{a_k c_x Q}{m/S},$$

где a_k — номинальное значение большой полуоси (среднего радиуса) орбиты, преобразуем уравнение (3.18) следующим образом:

$$\frac{da}{a^2} = -x_a \frac{du}{a_n}.$$

Интегрируя это уравнение в промежутке между коррекционными маневрами ($u_0 \leq u \leq u_k$), получим

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0} = \frac{x_a}{a_n} (u - u_0). \quad (3.19)$$

Введем относительные безразмерные переменные (рис. 3.18)

$$\xi = u - u_n, \quad \eta = (a - a_n)/a_n, \quad (3.20)$$

где u_n — аргумент широты точки, совершающей движение по номинальной орбите.

На основании выражений (1.17) и (1.24) имеем

$$\frac{du}{du_n} = \frac{v_0}{v_{0n}} = \left[\left(\frac{a_n}{a_0} \right) \left(\frac{a_0}{a} \right) \right]^{3/2},$$

где v_{0n} — средняя угловая скорость обращения на номинальной орбите.

или с учетом равенства (3.19)

$$\frac{du}{du_n} = \left(\frac{a_n}{a_0} \right)^{3/2} \left[1 + \kappa_a \frac{a_0}{a_n} (u - u_0) \right]^{3/2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя это уравнение, находим

$$-2 \frac{a_n}{\kappa_a a_0} \left\{ \left[1 + \kappa_a \frac{a_0}{a_n} (u - u_0) \right]^{-\frac{1}{2}} - 1 \right\} = \left(\frac{a_n}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} (u_n - u_{n0}),$$

откуда
$$u - u_0 = \frac{a_n}{\kappa_a a_0} \left\{ \left[1 - \frac{\kappa_a}{2} \left(\frac{a_n}{a_0} \right)^{\frac{1}{2}} (u_n - u_{n0}) \right]^{-2} - 1 \right\}.$$

Разложим это выражение в ряд по степеням $u_n - u_{n0}$. Учитывая, что $\kappa_a \ll 1$ (например, при $m/S = 500$ $\kappa\Gamma/\text{М}^2$ и $H_n = a_n - R =$

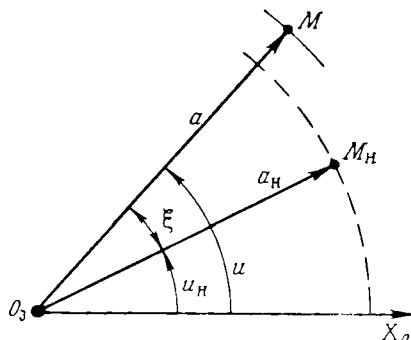


Рис. 3.18. Схема отсчета относительных координат станции:

M_n — текущее положение на номинальной орбите; M — фактическое положение станции в данный момент времени

$= 300$ км $\kappa_a \approx 2,40 \cdot 10^{-6}$, а если $H_n = 500$ км, то $\kappa_a = 6,00 \cdot 10^{-8}$), ограничимся членами разложения, содержащими κ_a в первой степени. В результате получим

$$u - u_0 = \left(\frac{a_n}{a_0} \right)^{3/2} (u_n - u_{n0}) + \frac{3}{4} \kappa_a \left[\frac{a_n}{a_0} (u_n - u_{n0}) \right]^2. \quad (3.21)$$

Преобразуем выражения (3.19) и (3.21) к новой переменной η в соответствии с равенством (3.20). Тогда будем иметь

$$\eta = (\eta_0 + 1) \left[1 + \kappa_a \frac{a_0}{a_n} (u - u_0) \right]^{-1} - 1, \quad (3.22)$$

$$u - u_0 = (1 + \eta_0)^{-3/2} (u_n - u_{n0}) + \frac{3}{4} \kappa_a [(1 + \eta_0)^{-2} (u_n - u_{n0})^2].$$

Разложение первого выражения (3.22) в ряд по степеням κ_a с учетом нулевого и первого членов ряда дает

$$\eta - \eta_0 = -\kappa_a (1 + \eta_0)^2 (u - u_0), \quad (3.23)$$

откуда после подстановки второго выражения (3.22), пренебрегая малыми второго и более высоких порядков, находим

$$\eta - \eta_0 = -\kappa_a (1 + \eta_0)^{1/2} (u_n - u_{n0}),$$

или

$$\eta - \eta_0 \simeq -\kappa_a (u_n - u_{n0}). \quad (3.24)$$

Полученное уравнение (3.24) определяет изменение относительной переменной η под действием сопротивления атмосферы. На основании соответствующих равенств (3.20) и (3.22) находим уравнение для второй относительной переменной

$$\xi - \xi_0 = [(1 + \eta_0)^{3/2} - 1] (u_n - u_{n0}) + \frac{3}{4} \kappa_a (1 + \eta_0)^{-2} (u_n - u_{n0})^2,$$

или с учетом малости η_0

$$\xi - \xi_0 = -\frac{3}{2} \eta_0 (u_n - u_{n0}) + \frac{3}{4} \kappa_a (u_n - u_{n0})^2.$$

Подставляя в последнее выражение равенство (3.24), окончательно получим

$$\xi - \xi_0 = \frac{3}{4\kappa_a} (\eta^2 - \eta_0^2). \quad (3.25)$$

Это уравнение определяет относительное движение станции. Соответствующая траектория на фазовой плоскости (в координатах ξ, η) является параболой. Нетрудно убедиться, что максимальное продольное смещение станции (максимальное изменение ξ) относительно точки, движущейся по номинальной орбите, имеет место при $\eta = 0$.

В некоторый момент времени, характеризуемый параметрами ξ_1 и η_1 , начинается двухимпульсный хомановский переход, в результате которого параметры относительного движения должны приобретать свои начальные значения ξ_0 и η_0 . Следовательно, в конце орбитального перехода имеем

$$u_K - u_{n,K} = \xi_0, \quad (3.26)$$

где u_K и $u_{n,K}$ — значения действительного и номинального аргументов широты станции в конце орбитального перехода.

Учитывая, что

$$u_k = u_1 + \pi, \quad u_{n,k} = u_{n1} + v_{0n} \frac{T_n}{2},$$

где u_1 и u_{n1} — соответствующие значения аргумента широты станции в начале орбитального перехода;

T_n — период обращения по орбите перехода,

можно представить равенство (3.26) в виде

$$\xi_0 = u_1 - u_{n1} + \pi - v_0 \frac{T_n}{2},$$

или

$$\xi_0 - \xi_1 = \pi - v_0 \frac{T_n}{2}. \quad (3.27)$$

Полагая в равенстве (3.25) $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$ и складывая его с последним равенством, находим

$$\frac{3}{4x_a} (\eta_1^2 - \eta_0^2) + \pi - v_{0n} \frac{T_n}{2} = 0.$$

Так как η_1 и η_0 являются величинами малыми, то в первом приближении

$$T_n = \frac{2\pi}{v_{0n}} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\eta_1 + \eta_0}{2} \right) \right].$$

Подставляя это выражение в приведенное выше равенство, получим

$$(\eta_1 + \eta_0) \left(\frac{\eta_1 - \eta_0}{2} - 1 \right) = 0,$$

откуда

$$\eta_1 = \eta_0 + x_a, \quad \eta_1 = -\eta_0.$$

Первое равенство является невыполнимым, так как $x_a > 0$, а под действием сопротивления атмосферы большая полуось орбиты уменьшается. Последнее выражение определяет значение большой полуоси орбиты, при котором необходимо производить коррекцию (выполнять маневр орбитального перехода). С учетом этого выражения из уравнения (3.25) находим значение продольного смещения в точке коррекции

$$\xi_1 = \xi_0.$$

Анализируя уравнение (3.27) с учетом выражения для T_n , приходим к выводу, что на участке орбитального перехода фазовая траектория является прямой линией. Таким образом, фазовая траектория предельного цикла коррекции имеет вид, показанный на рис. 3.19. Здесь приведен предельный цикл для высоты орбиты $H_0 = 500$ км и станции с удельной нагрузкой $m/S \approx 500$ кг/м² [125].

Определим период предельного цикла коррекции, который можно представить в виде

$$T_{\text{ц}} = 2t_m + \frac{T_{\text{ц}}}{2}, \quad (3.28)$$

где t_m — время движения станции от ξ_0 до ξ_{max} .

На основании уравнения (3.25) и рис. 3.19

$$\xi_{\text{max}} = \xi_0 - \frac{3\eta_0^2}{4\kappa_a}.$$

Учитывая, что

$$\xi_0 = u_0 - u_{\text{н}0}, \quad \xi_{\text{max}} = u_m - u_{\text{н}m},$$

где u_m и $u_{\text{н}m}$ — значения аргументов широты в момент времени t_m ,

$$u_{\text{н}m} - u_{\text{н}0} = u_m - u_0 + \frac{3\eta_0^2}{4\kappa_a}.$$

Подставляя сюда значение $u_m - u_0$ в соответствии с равенством (3.23) при $t = t_m$, находим

$$u_{\text{н}m} - u_{\text{н}0} = \frac{\eta_0}{\kappa_a (1 + \eta_0)^2} + \frac{3\eta_0^2}{4\kappa_a} = \frac{\eta_0}{\kappa_a} \left[\frac{1}{(1 + \eta_0)^2} + \frac{3}{4} \eta_0 \right],$$

или, разлагая выражение в квадратных скобках в ряд по степеням η_0 , получим

$$u_{\text{н}m} - u_{\text{н}0} = \frac{\eta_0}{\kappa_a} \left[1 - \frac{5}{4} \eta_0 + 3\eta_0^2 - 4\eta_0^3 + \dots \right].$$

Для оценки периода цикла достаточно ограничиться первым членом разложения. Тогда

$$t_m = \frac{u_{\text{н}m} - u_{\text{н}0}}{v_{0\text{н}}} \approx \frac{\eta_0}{\kappa_a v_{0\text{н}}}.$$

В рассматриваемой задаче можно также положить $T_{\text{ц}} \approx T$. И выражение (3.28) принимает вид

$$T_{\text{ц}} = \frac{1}{v_{0\text{н}}} \left(\frac{2\eta_0}{\kappa_a} + \pi \right).$$

Так как η_0 , даже при отклонениях большой полуоси всего на единицы метров, составляет величину порядка 10^{-6} , а κ_a имеет порядок 10^{-8} (при $H_0 = 500$ км), ясно, что $\eta_0/\kappa_a \gg \pi$. Поэтому в формуле для периода цикла коррекции величиной π можно пренебречь. В результате с достаточно высокой точностью имеем

$$T_{\text{ц}} = \frac{2\eta_0}{\kappa_a v_{0\text{н}}}.$$

В процессе орбитального перехода большая полуось изменяется от a_1 до a_0 и суммарная характеристическая скорость коррекционных маневров на основании равенства (2.26) будет

$$\Delta V_{\Sigma} = \frac{v_{0+}}{2} (\eta_0 - \eta_1) a_n.$$

Учитывая, что в данном случае $\eta_1 = -\eta_0$, получим

$$\Delta V_{\Sigma} = V_{0n} a_n \eta_0.$$

Следовательно, средний расход характеристической скорости в единицу времени

$$\frac{\Delta V_{\Sigma}}{T_{\Sigma}} = \frac{v_{0n}^2 a_n}{2} z_a$$

не зависит от параметров предельного цикла коррекции орбиты.

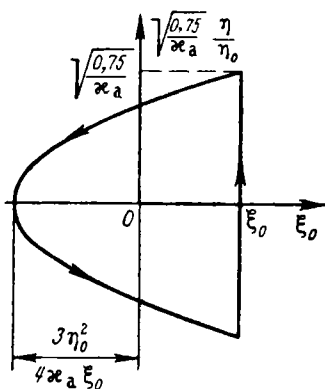


Рис. 3.19. Предельный цикл колебаний станции

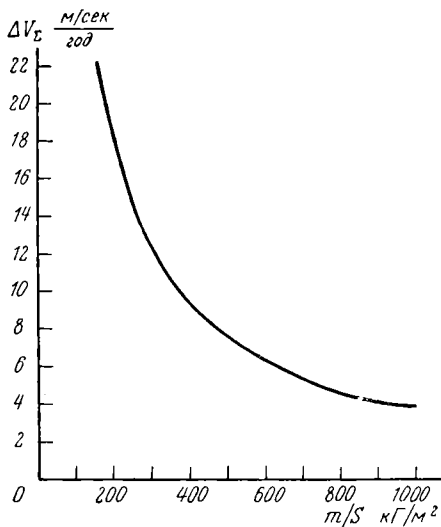


Рис. 3.20. К оценке характеристической скорости, потребной для коррекции условий геоупругости орбиты станции

Пользуясь полученной формулой, можно рассчитать расход характеристической скорости в заданный промежуток времени. Для этого достаточно умножить правую часть на соответствующий отрезок времени. На рис. 3.20 приведены графики потребной характеристической скорости за год в зависимости от удельной нагрузки станции m/S , откуда видно, что коррекция геоупругости орбиты станции требует довольно малых затрат

характеристической скорости. Следовательно, введение такой коррекции энергетически оправдано, особенно для станций с большой высотой орбиты (порядка 500 км).

§ 3.3. МАНЕВРЫ ОРБИТАЛЬНОГО ПЕРЕХОДА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ВСТРЕЧИ

Для осуществления встречи космического корабля с орбитальной станцией необходимо знание законов их относительного движения в пространстве. Только при этом условии становится возможным выбор метода наведения, устанавливающего требуемые приращения относительной скорости корабля для его сближения со станцией.

Эфемериды станции обычно известны заранее, тогда как изменяющиеся под действием управляющей тяги эфемериды орбиты корабля необходимо вычислять и уточнять в процессе маневра встречи. Последнее удобно осуществлять по отношению к орбите станции измерением взаимного расположения станции и корабля. Прежде чем говорить о преобразовании результатов этого измерения для формирования вектора скорости корабля, необходимого для выполнения маневра, получим точные аналитические выражения, определяющие трехмерное относительное движение корабля в задаче встречи при заданном времени полета. При этом будем предполагать, что гравитационное поле планеты является центральным силовым полем. Действительно, в процессе сближения расстояние между кораблем и станцией будет небольшим по сравнению с их расстоянием до центра планеты. Поэтому возмущающие силы, обусловленные нецентральностью силового поля, будут действовать на корабль и станцию почти одинаково.

Как станция, так и корабль считаются точечной массой, так что вопросы их ориентации, а следовательно, и управление ориентацией вектора тяги здесь не рассматриваются. Наклонение плоскости орбиты корабля к плоскости орбиты станции i не превышает $\pi/2$.

Орбиты с наклоном $i > \pi/2$ здесь не рассматриваются, поскольку для таких орбит (см. § 3.1) требуются нереализуемые в настоящее время приращения относительной скорости корабля.

Введем правую инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом в центре гравитационного притяжения планеты (рис. 3.21, а). Совместим координатную плоскость XU с плоскостью орбиты станции. При этом ось OX совместим с положением станции в эпоху, под которой условимся понимать момент прохождения станцией восходящего узла орбиты. Заметим, что вектор кинетического момента станции в ее орбитальном движении совпадает с осью OZ .

Положение плоскости орбиты корабля по отношению к орбите станции будем определять относительными углами наклона i

и долготой Ω восходящего узла S . В момент прохождения кораблем восходящего узла S положение станции на орбите задается радиусом-вектором $\vec{r}_{c*}$ и углом (долготой) α_{c*} , отсчитываемым от оси OX . В дальнейшем условимся обозначения параметров, относящихся к станции, сопровождать индексом «с», значения параметров движения корабля или станции в моменты времени t_i или t_j в случае необходимости отличать соответствующими индексами i или j .

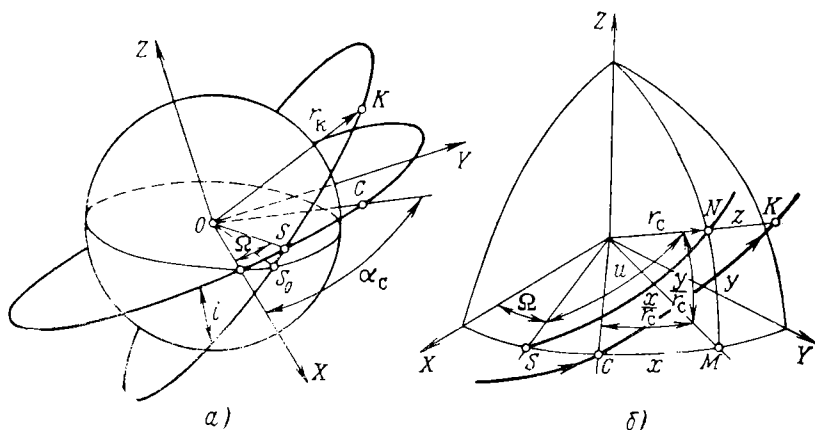


Рис. 3.21. а) Взаимное расположение орбит корабля и станции;
 S —восходящий узел орбиты корабля; S_c —восходящий узел орбиты корабля относительно станции
 б) Относительные координаты корабля

Определим относительные сферические координаты корабля соотношениями (см. рис. 3.21, б)

$$r = r_c + Z, \quad (3.29a)$$

$$\alpha = \alpha_c + \frac{X}{r_c}, \quad (3.29b)$$

$$\delta = \frac{Y}{r_c}, \quad (3.29c)$$

где X , Y , Z — линейные перемещения корабля относительно станции в текущий момент времени по сфере с радиусом, равным r_c .

Получим некоторые кинематические выражения для орбитального движения корабля в сферических координатах, полезные при последующих выкладках. Из сферического треугольника NMS имеем

$$\cos u = \cos \delta \cos (\alpha - \Omega), \quad (3.30a)$$

$$\cos \delta = \cos u \cos (\alpha - \Omega) + \sin u \sin (\alpha - \Omega) \cos i.$$

Используя эти соотношения, находим

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} u &= \sec i \operatorname{tg} (\alpha - \Omega), \\ u &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} [\sec i \operatorname{tg} (\alpha - \Omega)], \\ \cos i &= \frac{\cos \delta - \cos u \cos (\alpha - \Omega)}{\sin u \sin (\alpha - \Omega)}.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Так как по теореме синусов

$$\sin u = \frac{\sin \delta}{\sin i},$$

то после исключения $\sin u$ и $\cos u$ в соответствии с формулой (3.30) из равенства (3.31) находим связь между широтой δ , наклоном i и долготой α корабля

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} i \sin (\alpha - \Omega),$$

или

$$\delta = \frac{y}{r_c} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} [\operatorname{tg} i \sin (\alpha - \Omega)]. \quad (3.32)$$

Решение рассматриваемой задачи встречи может быть получено при условии, что положение и скорость корабля относительно станции в эпоху и в любой последующий момент времени известны. Для этого необходимо представить дифференциальные уравнения движения корабля (2.17) в относительных координатах (3.29). Введем функцию Лагранжа

$$L = T - U,$$

где $T = \frac{1}{2} m V^2$ — кинетическая энергия;

$U = -\frac{m\mu}{r}$ — потенциальная энергия корабля.

Учитывая, что составляющие вектора скорости $\bar{V}$ корабля в сферической системе координат r , α и δ равны $\dot{r}$, $r\dot{\alpha}$ и $r \cos \delta \dot{\alpha}$, имеем

$$L = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r\dot{\alpha})^2 + (r \cos \delta \dot{\alpha})^2] + \frac{m\mu}{r}.$$

Записывая уравнения движения корабля в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_j} - \frac{\partial L}{\partial g_j} = 0,$$

где g_j и $\dot{g}_j$ — обобщенные координаты и скорости, равные r , α , δ и $\dot{r}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\delta}$, соответственно ($j = 1, 2, 3$),

после выполнения операций дифференцирования по g_j и g_i получаем

$$\ddot{r} - r(\dot{\delta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \delta) + \frac{\mu}{r^2} = 0, \quad (3.33a)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\delta}) + r^2 \dot{\alpha}^2 \sin \delta \cos \delta = 0, \quad (3.33б)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\alpha} \cos^2 \delta) = 0. \quad (3.33в)$$

Решение полученной системы уравнений позволяет найти все необходимые кинематические соотношения для исследования движения корабля относительно станции. Из уравнения (3.33в) непосредственно следует

$$r^2 \dot{\alpha} \cos^2 \delta = K \cos i = K_1. \quad (3.34)$$

Данное равенство выражает собой закон сохранения кинетического момента корабля в проекции его движения на плоскость орбиты станции. Поскольку действительное движение корабля происходит по орбите с наклонением i к орбите станции, то

$$K_1 = K \cos i,$$

где K — модуль полного вектора кинетического момента корабля, приходящийся на единицу его массы.

Из выражения (3.34) имеем

$$\dot{\alpha} = \frac{K_1}{r^2 \cos^2 \delta}, \quad (3.35)$$

что позволяет представить

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \dot{\alpha} \frac{d\delta}{d\alpha} = \frac{K_1}{r^2 \cos^2 \delta} \frac{d\delta}{d\alpha}, \\ \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\delta}) &= \dot{\alpha} \frac{d}{d\alpha}(r^2 \dot{\delta}) = \frac{K_1^2}{r^2 \cos^2 \delta} \frac{d^2 \operatorname{tg} \delta}{d\alpha^2}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Подставляя последнее равенство и равенство (3.35) в уравнение (3.33б), приведем его к виду

$$\frac{d^2 \operatorname{tg} \delta}{d\alpha^2} + \operatorname{tg} \delta = 0. \quad (3.37)$$

Решение этого уравнения будет

$$\operatorname{tg} \delta = A \sin(\alpha + \alpha_n),$$

где A и α_n — постоянные, определяемые из начальных условий. Сопоставляя данное решение с выражением (3.32), находим

$$A = \operatorname{tg} i \quad \alpha_n = -\Omega.$$

Обращаясь к первому уравнению системы (3.33), преобразуем вначале входящее в него выражение в скобках

$$\begin{aligned}\dot{\delta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \delta &= \dot{\alpha}^2 \left[\left(\frac{d\delta}{d\alpha} \right)^2 + \cos^2 \delta \right] = \\ &= \frac{K_1^2}{r^4} \left[\left(\frac{d \operatorname{tg} \delta}{d\alpha} \right)^2 + 1 + \operatorname{tg}^2 \delta \right].\end{aligned}$$

Из решения уравнения (3.37) следует, что

$$\left(\frac{d \operatorname{tg} \delta}{d\alpha} \right)^2 + \operatorname{tg}^2 \delta = \operatorname{tg}^2 i,$$

и, следовательно, с учетом равенства (3.34)

$$\dot{\delta}^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \delta = \frac{K_1^2}{r^4} (1 + \operatorname{tg}^2 i) = \frac{K^2}{r^4}.$$

После подстановки этого равенства в уравнение (3.33а) последнее сводится к известному ранее дифференциальному уравнению

$$\ddot{r} - \frac{K}{r^3} + \frac{\mu}{r^2} = 0, \quad (3.38a)$$

решение которого находим следующим образом. Выражение (3.34) можно представить так:

$$r^2 \dot{\delta} \cos^2 \delta = r^2 \dot{\delta} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} = r^2 \dot{\delta} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 i \sin^2 (\alpha - \Omega)}.$$

С другой стороны, дифференцируя по времени выражение (3.31), получаем

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{d}{dt} \{ \operatorname{arctg} (\sec i \operatorname{tg} (\alpha - \Omega)) \} = \\ &= \frac{\sec i \dot{\alpha}}{[1 + \sec^2 i \operatorname{tg}^2 (\alpha - \Omega)] \cos^2 (\alpha - \Omega)} = \frac{\dot{\alpha} \sec i}{1 + \operatorname{tg}^2 i \sin^2 (\alpha - \Omega)}.\end{aligned}$$

Умножая полученное равенство на r^2 и учитывая выражения (3.32), (3.34) и (3.35), устанавливаем, что

$$r^2 \dot{u} = K, \quad (3.38б)$$

отсюда находим

$$\begin{aligned}\dot{r} = \dot{u} \frac{dr}{du} &= \frac{K}{r^2} \frac{dr}{du} = -K \frac{d \left(\frac{1}{r} \right)}{du}, \\ \ddot{r} = \dot{u} \frac{d\dot{r}}{du} &= -\frac{K^2}{r^2} \frac{d^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{du^2},\end{aligned}$$

что позволяет переписать уравнение (3.38a) в виде

$$\frac{d^2\gamma}{du} + \gamma - \frac{\mu}{K^2} = 0,$$

где

$$\gamma = \frac{1}{r}.$$

Решение данного уравнения будет

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)}, \quad (3.39)$$

где $p = \frac{K^2}{\mu}$ — фокальный параметр;

ω — аргумент перигея орбиты корабля.

Полученный результат следовало ожидать, так как он показывает, что траектория движения корабля представляет собой коническое сечение.

Располагая решением системы уравнений (3.33), можно выразить время, необходимое для осуществления встречи, координаты местоположения корабля и его скорость относительно станции в функции элементов орбит и параметров их движения. Из равенства (3.38б) с учетом соотношения (3.39) находим

$$dt = \frac{K^3}{\mu^2} \frac{du}{[1 + e \cos(u - \omega)]^2},$$

что после интегрирования дает уравнение времени для эллиптических ($e < 1$)

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} - \frac{1}{1 - e^2} \left[\frac{-e \sin(u - \omega)}{1 + e \cos(u - \omega)} + \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \arctg \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{u - \omega}{2} \right) \right] \Big|_{u_0}^u, \quad (3.40a)$$

параболических ($e = 1$)

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \operatorname{tg} \frac{(u - \omega)}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{u - \omega}{2} \right) \Big|_{u_0}^u, \quad (3.40б)$$

и гиперболических ($e > 1$) орбит

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \frac{1}{1 - e^2} \times \left[\frac{-e \sin(u - \omega)}{1 + e \cos(u - \omega)} + \frac{2}{\sqrt{e^2 - 1}} \operatorname{Arth} \left(\sqrt{\frac{e - 1}{e + 1}} \operatorname{tg} \frac{u - \omega}{2} \right) \right] \Big|_{u_0}^u. \quad (3.40в)$$

Здесь индекс «0» относится к значениям переменных в эпоху, причем μ , K , e , ω и u_0 предполагаются известными. Выражения (3.40) позволяют найти при заданном временном интервале $t-t_0$ относительный аргумент широты u . Тогда, вычисляя по формуле (3.31)

$$\alpha = \arctg \frac{\operatorname{tg} u}{\sec i} + \Omega,$$

на основании равенства (3.29б) имеем

$$\frac{x}{r_c} = \arctg \frac{\operatorname{tg} u}{\sec i} + \Omega - \alpha_c, \quad (3.41a)$$

где i , Ω и α_c — также считаются известными.

Выражение для y/r_c находится по формуле (3.32), которая приобретает теперь вид

$$\frac{y}{r_c} = \arctg \left[\operatorname{tg} i \sin \left(\arctg \frac{\operatorname{tg} u}{\sec i} \right) \right]. \quad (3.41б)$$

Наконец, последняя относительная координата корабля z определяется из соотношения (3.29a) с учетом выражения (3.39)

$$z = r - r_c = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)} - r_c. \quad (3.41в)$$

Найдем теперь скорости изменения относительных координат $\frac{\dot{x}}{r_c}$, $\frac{\dot{y}}{r_c}$ и $\dot{z}$. Продифференцируем соотношение (3.29б) по времени

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_c + \frac{\dot{x}}{r_c} - \frac{x}{r_c^2} \dot{r}_c.$$

Отсюда

$$\frac{\dot{x}}{r_c} = \dot{\alpha} - \dot{\alpha}_c + \frac{x}{r_c^2} \dot{r}_c,$$

или с учетом равенства (3.35) и соотношения (3.29в)

$$\frac{\dot{x}}{r_c} = \frac{K \cos i}{r_c^2 \cos^2 \frac{y}{r_c}} - \dot{\alpha}_c + \frac{x}{r_c^2} \dot{r}_c. \quad (3.42)$$

Для определения $\dot{y}/r_c$ продифференцируем выражение (3.32)

$$\frac{\dot{y}}{r_c} - \frac{y}{r_c^2} \dot{r}_c = \frac{\operatorname{tg} i \cos \left(\alpha_c + \frac{x}{r_c} - \Omega \right) \left(\alpha_c + \frac{\dot{x}}{r_c} - \frac{x}{r_c^2} \dot{r}_c \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 i \sin^2 \left(\alpha + \frac{x}{r_c} - \Omega \right)}.$$

С учетом решения уравнения (3.37) и выражения (3.29в) находим

$$\frac{\dot{y}}{r_c} = \left(\dot{\alpha}_c + \frac{\dot{x}}{r_c} - \frac{x}{r_c^2} \dot{r}_c \right) \operatorname{tg} i \cos^2 \frac{y}{r_c} \cos \left(\alpha_c + \frac{x}{r_c} - \Omega \right) + \frac{y}{r_c} \dot{r}_c. \quad (3.43)$$

Аналогично, дифференцируя выражение (3.41), получаем

$$\dot{z} = \frac{pe \sin(u - \omega) \dot{u}}{[1 + e \cos(u - \omega)]^2} - \dot{r}_c$$

и, так как согласно равенствам (3.38б) и (3.39)

$$\dot{u} = K p^2 [1 + e \cos(u - \omega)]^2,$$

то окончательно

$$\dot{z} = \frac{eK}{p} \sin(u - \omega) - \dot{r}_c. \quad (3.44)$$

Таким образом, зная элементы* орбиты корабля по отношению к орбите станции, с помощью формул (3.41) можно определить сферические координаты относительного движения, а по формулам (3.42), (3.43), (3.44) — скорости их изменения.

Однако элементы орбиты корабля в большинстве случаев сами подлежат определению, поэтому относительные координаты положения $\left(\frac{x}{r_c}, \frac{y}{r_c} \text{ и } \dot{z} \right)$ и составляющие скорости $\left(\frac{\dot{x}}{r_c}, \frac{\dot{y}}{r_c} \text{ и } \dot{z} \right)$ должны вычисляться по результатам измерений относительного движения корабля и станции. Покажем, что в случае, когда эфемериды станции считаются известными, для нахождения указанных координат достаточно данных измерения трех величин: дальности l между кораблем и станцией, угла азимута φ и угла места ψ (рис. 3.22). Измерение этих величин производится в системе координат $Kxyz$ с началом в центре масс корабля и с осями, параллельными осям системы $OXYZ$. Угол азимута φ отсчитывается от точки пересечения осью x плоскости, проходящей через ось Kz , и положение станции на орбите в рассматриваемый момент времени t_i . Проекция вектора дальности на оси системы $Kxyz$ можно представить в виде

$$(r_c + z) \cos \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{x}{r_c} - r_c \cos \alpha_c = l \cos \varphi \cos \psi, \quad (3.45a)$$

$$(r_c + z) \sin \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{y}{r_c} - r_c \sin \alpha_c = l \cos \varphi \sin \psi, \quad (3.45б)$$

$$(r_c + z) \sin \frac{y}{r_c} = e \sin \varphi. \quad (3.45в)$$

* Хотя отсчет i и Ω производится в системе координат, отличной от системы, принятой в гл. I, будем условно называть их элементами орбиты корабля.

$$-(r_c + z) \cos \left(\frac{x}{r_c} + a_c \right) \sin \frac{y}{r_c} \left(\frac{\dot{y}}{r_c} - \frac{\dot{y}}{r_c^2} \dot{r}_c + a_c \right) = \\ = \dot{l} \cos \varphi \cos \psi - l \sin \varphi \cos \psi \dot{\varphi} - l \cos \varphi \sin \psi \dot{\psi}.$$

представим полученное выражение в виде

$$a_{11} \frac{\dot{x}}{r_c} + a_{12} \frac{\dot{y}}{r_c} + a_{13} \dot{z} = b_1,$$

где

$$a_{11} = -(r_c + z) \sin \left(\frac{x}{r_c} + a_c \right) \cos \frac{y}{r_c};$$

$$a_{12} = -(r_c + z) \cos \left(\frac{x}{r_c} + a_c \right) \sin \frac{y}{r_c};$$

$$a_{13} = \cos \left(\frac{x}{r_c} + a_c \right) \cos \frac{y}{r_c};$$

$$b_1 = \dot{l} \cos \varphi \cos \psi - \dot{\varphi} l \sin \varphi \cos \psi - \dot{\psi} l \cos \varphi \sin \psi - \\ - r_c \left\{ \cos \left(\frac{x}{r_c} + a_c \right) \cos \frac{x}{r_c} + \frac{r_c + z}{r_c} \left[\frac{y}{r_c} \cos \left(\frac{x}{r_c} + a_c \right) \sin \frac{y}{r_c} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{x}{r_c} \sin \left(\frac{x}{r_c} + a_c \right) \cos \frac{y}{r_c} \right] - \cos a_c \right\} + \\ + a_c \left[(r_c + z) \sin \left(\frac{x}{r_c} + a_c \right) \cos \frac{y}{r_c} - r_c \sin a_c \right].$$

Аналогично продифференцируем уравнения (3.45б) и (3.45в). Окончательный результат представим в матричной форме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\dot{x}}{r_c} \\ \frac{\dot{y}}{r_c} \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}, \quad (3.49)$$

где

$$a_{21} = (r_c + z) \cos \left(\frac{x}{r_c} + a_c \right) \cos \frac{y}{r_c};$$

$$a_{22} = -(r_c + z) \sin \left(\frac{x}{r_c} + a_c \right) \sin \frac{y}{r_c};$$

$$a_{23} = \sin \left(\frac{x}{r_c} + a_c \right) \cos \frac{y}{r_c};$$

$$a_{31} = 0;$$

$$a_{32} = (r_c + z) \cos \frac{y}{r_c}, \quad a_{33} = \sin \frac{y}{r_c};$$

$$\begin{aligned} b_2 = & \dot{l} \cos \varphi \sin \psi - \dot{\varphi} l \sin \varphi \sin \psi - \dot{\psi} l \cos \varphi \cos \psi - \\ & - \dot{r}_c \left\{ \sin \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{y}{r_c} + \frac{r_c + z}{r_c} \left[\frac{y}{r_c} \sin \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \sin \frac{y}{r_c} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{x}{r_c} \cos \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{y}{r_c} \right] - \sin \alpha_c \right\} - \\ & - \dot{\delta}_c \left[(r_c + z) \cos \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{y}{r_c} - r_c \cos \alpha_c \right]; \\ b_3 = & \dot{l} \sin \varphi + \dot{\varphi} l \cos \varphi + \dot{r}_c \left(\frac{r_c + z}{r_c} \frac{y}{r_c} - \sin \frac{y}{r_c} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, располагая данными измерения: дальность от корабля до станции, углы азимута и места корабля по отношению к станции, можно вычислить значение относительных координат положения и составляющих скорости.

Можно и наоборот, выразить данные измерений l , φ , ψ как функции указанных сферических координат и составляющих скорости.

Из треугольников COK (см. рис. 3.22) находим

$$l = \sqrt{(r_c + z)^2 + r_c^2 - 2(r_c + z)r_c \cos \angle COK},$$

или так как $\cos \angle COK = \cos \frac{x}{r_c} \cos \frac{y}{r_c}$:

$$l = \sqrt{(r_c + z)^2 + r_c^2 - 2(r_c + z)r_c \cos \frac{x}{r_c} \cos \frac{y}{r_c}}. \quad (3.50)$$

Зная l , из уравнения (3.45в) имеем

$$\varphi = \arcsin \left[\frac{(r_c + z) \sin \frac{y}{r_c}}{l} \right], \quad (3.51)$$

где

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Выражение для определения ψ при известных l и φ можно получить из уравнений (3.45а) и (3.45б)

$$\psi = \arctg \frac{(r_c + z) \sin \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{y}{r_c} - r_c \sin \alpha_c}{(r_c + z) \cos \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{y}{r_c} - r_c \cos \alpha_c}. \quad (3.52)$$

где

$$\begin{aligned}
 C_1 = & \dot{r}_c \left\{ \cos \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{y}{r_c} + \frac{r_c + z}{r_c} \left[\frac{y}{r_c} \cos \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \sin \frac{y}{r_c} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{x}{r_c} \sin \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{y}{r_c} \right] - \cos \alpha_c \right\} + \\
 & + \dot{\alpha}_c \left[r_c \sin \alpha_c - (r_c + z) \cdot \sin \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{y}{r_c} \right] - \\
 & - \frac{\dot{x}}{r_c} (r_c + z) \sin \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cdot \cos \frac{y}{r_c} - \\
 & - \frac{\dot{y}}{z_c} (r_c + z) \cos \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cdot \sin \frac{y}{r_c} + \dot{z} \cos \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{y}{r_c}, \\
 C_2 = & \dot{r}_c \left\{ \sin \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{y}{r_c} + \frac{r_c + z}{r_c} \left[\frac{y}{r_c} \sin \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \sin \frac{y}{r_c} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{x}{r_c} \cos \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{y}{r_c} \right] - \sin \alpha_c \right\} + \\
 & + \dot{\alpha}_c \left[(r_c + z) \cos \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{y}{r_c} - r_c \cos \alpha_c \right] + \\
 & + \frac{\dot{x}}{r_c} (r_c + z) \cos \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{y}{r_c} - \\
 & - \frac{\dot{y}}{r_c} (r_c + z) \sin \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \sin \frac{y}{r_c} + \dot{z} \sin \left(\frac{x}{r_c} + \alpha_c \right) \cos \frac{y}{r_c}, \\
 C_3 = & \dot{r}_c \left(\sin \frac{y}{r_c} - \frac{r_c + z}{r_c} \frac{y}{r_c} \cos \frac{y}{r_c} \right) + \\
 & + \frac{\dot{y}}{r_c} (r_c + z) \cos \frac{y}{r_c} + \dot{z} \sin \frac{y}{r_c}.
 \end{aligned}$$

Переписывая результаты дифференцирования уравнения (3.45) относительно l , $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$, найдем

$$\left\| \begin{array}{ccc} \cos \varphi \cos \psi & -l \cos \varphi \sin \psi & -l \sin \varphi \cos \psi \\ \cos \varphi \sin \psi & l \cos \varphi \cos \psi & -l \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi & 0 & l \cos \varphi \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \dot{l} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} \right\|, \quad (3.53)$$

Рассмотрим теперь определение элементов орбиты корабля по данным измерения в некоторый фиксированный момент времени t_i в случае, когда известны значения относительных координат и составляющих скорости корабля. Заметим, что угол наклона i плоскости орбиты корабля к плоскости орбиты

станции не превышает $\pi/2$, поэтому значение $\operatorname{tg} i$ будет либо равно нулю, либо положительно. Возвращаясь к выражению (3.32), перепишем его для момента времени t_i следующим образом:

$$\operatorname{tg} \delta_i = \operatorname{tg} i (\sin \alpha_i \cos \Omega - \cos \alpha_i \sin \Omega).$$

После дифференцирования по времени ($\Omega = \text{const}$) имеем

$$\frac{\dot{\delta}_i}{\alpha_i \cos^2 \delta_i} = \operatorname{tg} i (\cos \alpha_i \cos \Omega + \sin \alpha_i \sin \Omega).$$

Умножая первое равенство на $\cos \alpha_i$, а второе на $\sin \alpha_i$ и вычитая затем из второго равенства первое, получим

$$\operatorname{tg} i \sin \Omega = -\operatorname{tg} \delta_i \cos \alpha_i + \frac{\dot{\delta}_i \sin \alpha_i}{\alpha_i \cos^2 \delta_i}.$$

Аналогично, умножая первое равенство на $\sin \alpha_i$, второе на $\cos \alpha_i$ и складывая затем левые и правые части обоих равенств, находим

$$\operatorname{tg} i \cos \Omega = \operatorname{tg} \delta_i \sin \alpha_i + \frac{\dot{\delta}_i \cos \alpha_i}{\alpha_i \cos^2 \delta_i}.$$

Отсюда после очевидных преобразований получаем следующие формулы:

$$i = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\dot{\delta}_i^2}{\alpha_i^2 \cos^4 \delta_i} + \operatorname{tg}^2 \delta_i}, \quad (3.54)$$

$$\Omega = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\frac{\dot{\delta}_i \sin \alpha_i}{\alpha_i} - \sin \delta_i \cos \alpha_i}{\frac{\dot{\delta}_i \cos \alpha_i}{\alpha_i} + \sin \delta_i \sin \alpha_i}. \quad (3.55)$$

для определения относительного наклона и долготы восходящего узла орбиты корабля. Соответствующий квадрант при вычислении Ω определяется по знаку числителя и знаменателя. Зная угол наклона i , из формулы (3.34) находим кинетический момент корабля

$$K = \frac{r_i^2 \dot{\alpha}_i \cos^2 \delta_i^2}{\cos i}.$$

Это позволяет сразу же определить фокальный параметр орбиты

$$p = \frac{K^2}{\mu},$$

где μ — предполагается известным.

Из выражений (3.39) и (3.44) находим для момента времени

$$e \cos (u_i - \omega) = \left(\frac{p}{r_i} - 1 \right),$$

$$e \sin (u_i - \omega) = \dot{r}_i \sqrt{\frac{p}{\mu}},$$

откуда

$$e \sin \omega = \left(\frac{p}{r_i} - 1 \right) \sin u_i - \dot{r}_i \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cos u_i,$$

$$e \cos \omega = \left(\frac{p}{r_i} - 1 \right) \cos u_i + \dot{r}_i \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sin u_i.$$

Вычисление e и ω производится так же, как в предыдущем случае. Значение u_i находится по формуле (3.31).

После определения элементов орбиты корабля можно найти значения относительных координат и составляющие скорости для более позднего (или более раннего) момента времени. Действительно, обозначим через t_j момент времени, для которого необходимо определить указанные координаты и составляющие скорости. Поскольку последние известны в момент времени t_i , то согласно уравнениям (3.40) имеем

$$t_j - t_i = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \frac{1}{1 - e^2} \left[- \frac{e \sin (u - \omega)}{1 + e \cos (u - \omega)} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \arctg \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{u - \omega}{2} \right) \right] \Bigg|_{u_i}^{u_j},$$

$$t_j - t_i = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \operatorname{tg} \frac{u - \omega}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{u - \omega}{2} \right) \Bigg|_{u_i}^{u_j},$$

$$t_j - t_i = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \frac{1}{1 - e^2} \left[- \frac{e \sin (u - \omega)}{1 + e \cos (u - \omega)} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{e^2 - 1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{e - 1}{e + 1}} \operatorname{tg} \frac{u - \omega}{2} \right) \right] \Bigg|_{u_i}^{u_j},$$

где

$$u_j = \arctg \left[\sec i \operatorname{tg} \left(\alpha_{cj} + \frac{x_j}{r_{cj}} - \Omega \right) \right].$$

Значения параметров, входящих в эти уравнения, кроме u_j , известны. Поэтому, решая одно из этих уравнений (в зависимости

от величины эксцентриситета e), например методом последовательных приближений относительно u_j , можно найти $x/r_{c j}$. Затем по формулам (3.32) и (3.41) определяем $y/r_{c j}$ и z_j , а по формулам (3.42), (3.43) и (3.44) — составляющие скоростей $\dot{x}_j/r_{c j}$, $\dot{y}/r_{c j}$ и $\dot{z}_j$ в момент времени t_j . Таким образом, знание относительных координат корабля в некоторый момент времени позволяет найти значения координат и составляющих скорости для более позднего (или более раннего) момента времени.

Рассмотрим теперь определение элементов орбиты встречи корабля со станцией. Будем предполагать, что встреча осуществляется приложением к кораблю двух импульсов тяги. Пусть первый импульс прикладывается в момент времени t_0 , соответствующий положению станции в эпоху. Значения относительных координат и составляющих скоростей в этот момент будем называть *начальными*. *Конечные* значения указанных координат и скоростей, соответствующих моменту приложения к кораблю второго импульса, принимаются нулевыми. Это допущение позволяет представить выражение (3.32) в виде

$$\operatorname{tg} \frac{y_0}{r_{c0}} = \operatorname{tg} i \sin (\alpha_0 - \Omega) = \operatorname{tg} i \sin \left(\frac{x_0}{r_{c0}} - \Omega \right) \quad (3.56)$$

для начального t_0 и

$$0 = \operatorname{tg} i \sin (\alpha_{c.k} - \Omega) \quad (3.57)$$

для конечного t_k момента времени. Здесь i и Ω неизвестные пока элементы орбиты встречи.

Из равенства (3.57) имеем

$$\Omega = \alpha_{c.k} - (2n - \eta)\pi,$$

где n — положительное целое число, которое выбирается из условия

$$0 \leq \alpha_{c.k} - 2\pi n < 2\pi,$$

$$\eta = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}.$$

С учетом найденного значения для Ω и того обстоятельства, что $i \leq \pi/2$, из равенства (3.56) найдем

$$\operatorname{tg} i = \frac{\operatorname{tg} \frac{y_0}{r_{c0}}}{\sin \left[\frac{x_0}{r_{c0}} - \alpha_{c.k} + (2n - \eta)\pi \right]} > 0. \quad (3.58)$$

Данное неравенство позволяет определить, в каких случаях $\eta = 0$ и в каких $\eta = 1$.

Действительно, η следует положить нулю, если это не нарушает неравенства (3.58) и принять равным единице, если окажется, что

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{y_0}{r_{c0}}}{\sin \left[\frac{x_0}{r_{c0}} - \alpha_{c.k} + 2n\pi \right]} < 0.$$

Физически значения $\eta=0$ и $\eta=1$ соответствуют в указанном порядке встрече корабля со станцией в восходящем и нисходящем узлах орбиты. Попутно обратим внимание на следующее интересное обстоятельство. Выражение (3.58) становится неопределенным при

$$\frac{x_0}{r_{c0}} - \alpha_{c.k} = m\pi.$$

Легко видеть, что случай, когда $m=0$ или представляет собой четное целое число, соответствует прямолинейной траектории относительного движения (по радиусу в плоскости xy). Случай, когда m нечетное целое число, соответствует многовитковой траектории встречи с центральным углом $m\pi$ рад. Второй случай, как более реальный, достаточно подробно рассматривается ниже. Пока же будем считать, что условие (3.58) не выполняется. Учитывая, что в момент встречи $\frac{y_k}{r_{c.k}} = 0$, $y_k = 0$ и, следовательно, $i=0$, после подстановки выражения для Ω в равенство (3.31) находим

$$u_k = (2n - \eta)\pi.$$

Значение аргумента широты в эпоху определяется подстановкой в равенство (3.31) соответствующих значений параметров в эпоху

$$u_0 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \sec i \operatorname{tg} \left[\frac{x_0}{r_{c0}} - \alpha_{c.k} + (2\pi - \eta)\pi \right] \right\},$$

где i вычисляется по формуле (3.58). С учетом значений для u_0 и u_k уравнения времени (3.55) переписутся в виде (для сокращения записи приводятся только уравнения для эллиптической орбиты)

$$\begin{aligned} t_k - t_0 = & \frac{k_B^3}{\mu^2} \frac{1}{1 - e_B^2} \left[- \frac{e_B \sin(u - \omega_B)}{1 + e_B \cos(u - \omega_B)} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\sqrt{1 - e_B^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{1 - e_B}{1 + e_B}} \operatorname{tg} \frac{(u - \omega_B)}{2} \right) \right] \Bigg|_{u_0}^{u_k = (2n - \eta)\pi} \end{aligned} \quad (3.59)$$

В данном уравнении левая часть известна, тогда как правая содержит неопределенные пока элементы орбиты встречи e_B , ω_B

и K_B . Для нахождения этих параметров обратимся к уравнению траектории встречи, которое имеет вид, аналогичный уравнению (3.39), т. е.

$$r_R = \frac{\frac{K_B^2}{\mu}}{1 + e_R \cos(u - \omega_R)}.$$

Записывая это уравнение в эпоху

$$(r_{c0} + z_0) = \frac{\frac{K_B^2}{\mu}}{1 + e_R \cos(u - \omega_R)}$$

и в момент встречи

$$r_{c.K} = \frac{\frac{K_B^2}{\mu}}{1 + e_R \cos(u_K - \omega_R)},$$

находим

$$e_R \sin \omega_R = \frac{-\left(\frac{K_B^2}{\mu r_{c.K}} - 1\right) \cos u_0 + \left(\frac{K_B^2}{\mu (r_{c0} + z_0)} - 1\right) \cos \eta \tau}{\sin(u_0 + \eta \tau)}, \quad (3.60)$$

$$e_R \cos \omega_R = \frac{\left(\frac{K_B^2}{\mu r_{c.K}} - 1\right) \sin u_0 + \left[\frac{K_B^2}{\mu (r_{c0} + z_0)} - 1\right] \sin \eta \tau}{\sin(u_0 + \eta \tau)}.$$

Полученная система двух алгебраических уравнений вместе с уравнением (3.59) позволяет определить три неизвестные K_B , ω_B и e_B . Можно рекомендовать следующую методику решения [49]. Задаемся некоторым значением K_B , по формулам (3.60) вычисляем значения e_R и ω_R и подставляем их в уравнение (3.59). Если правая часть уравнения не равна левой, задаемся новым значением K_B . Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока вычисленное значение времени полета не совпадает с заданным временем в пределах требуемой точности. После определения параметров орбиты встречи вычисление относительных координат и составляющих скоростей не представляет трудностей. Отметим только, что x_c/r_c находится из уравнения (3.59) при верхнем пределе u_S , соответствующих некоторому известному времени t_S . Затем используются формулы (3.32), (3.41), (3.42), (3.43) и (3.44).

Особый интерес представляет выбор закона наведения. В практических условиях осуществление встречи корабля со станцией осуществляется приложением к кораблю последовательной серии импульсов тяги, которые вызывают соответствующие приращения вектора относительной скорости.

В данном случае ограничимся рассмотрением двухимпульсного перехода, учитывая, что излагаемый метод допускает обобщение на любое число импульсов. Закон наведения формируется следующим образом. По результатам измерений l , φ и ψ , а также $\dot{l}$, $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ в некоторый момент времени t по формулам (3.46), (3.47) и (3.48) определяются относительные координаты $\frac{x}{r_c}$, $\frac{y}{r_c}$, z , из матричного уравнения (3.49) составляющие скорости $\frac{\dot{x}}{r_c}$, $\frac{\dot{y}}{r_c}$ и $\dot{z}$ в этот момент времени. После вычисления элементов

орбиты корабля с помощью выражения (3.55) находятся относительные координаты и вектор относительной скорости $V_{o.k}$ корабля, соответствующие эпохе. После этого определяются параметры орбиты, необходимые для выполнения встречи в течение заданного времени.

Обозначим вектор скорости для орбиты встречи в эпоху через $V_{o.в}$. Приращение скорости, требуемое для начала маневра встречи, представляет собой векторную разность между векторами скорости $\bar{V}_{o.k}$ и $\bar{V}_{o.в}$, вычисленными в эпоху для орбиты корабля и орбиты встречи со станцией, т. е.

$$\Delta \bar{V} = \bar{V}_{o.k} - \bar{V}_{o.в}.$$

Дифференцируя правые части уравнений (3.45), выражение для $V_{o.k}$ можно записать в проекциях на оси системы $OXYZ$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{o.k} = & (l_0 \cos \varphi_0 \cos \psi_0 - \dot{\psi}_0 l_0 \cos \varphi_0 \sin \psi_0 - \dot{\varphi}_0 l_0 \sin \varphi_0 \cos \psi_0) \bar{e}_x + \\ & + (\dot{l}_0 \cos \varphi_0 \sin \psi_0 + \dot{\varphi}_0 l_0 \cos \varphi_0 \cos \psi_0 - \dot{\psi}_0 l_0 \sin \varphi_0 \sin \psi_0) \bar{e}_y + \\ & + (\dot{l}_0 \sin \varphi_0 + \dot{\varphi}_0 l_0 \cos \varphi_0) \bar{e}_z. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Поскольку измерения l , φ и ψ , а также их производных, выполняются не в эпоху, то значения l_0 , φ_0 , ψ_0 и $\dot{l}_0$, $\dot{\varphi}_0$, $\dot{\psi}_0$, необходимые для вычисления $V_{o.k}$, определяются по известным относительным координатам и составляющим скорости в эпоху по формулам (3.50), (3.51), (3.52) и (3.53). Выражение для определения $\bar{V}_{o.в}$ совпадает по форме с выражением (3.61). Однако совокупность значений $l_{o.в}$, $\varphi_{o.в}$, $\psi_{o.в}$, $\dot{l}_{o.в}$, $\dot{\varphi}_{o.в}$, $\dot{\psi}_{o.в}$ для орбиты встречи в эпоху определяется непосредственными измерениями в данный момент, причем $l_0 = l_{o.в}$, $\varphi_0 = \varphi_{o.в}$, $\psi_0 = \psi_{o.в}$. Вектор относительной скорости в момент встречи определяется по методике, изложенной выше.

Проиллюстрируем изложенный метод на примере осуществления компланарной встречи со станцией, движущейся на круговой орбите. При такой встрече относительное наклонение $i = 0$. Кроме того, утрачивается смысл понятия восходящего и нисхо-

дящего узлов, что позволяет принять $\eta=0$, и $\Omega = a_{c,k} - 2\pi n$. Из выражения (3.31) при $i=0$ имеем

$$u = \frac{x}{r_c} + a_c - a_{c,k} + 2\pi n,$$

откуда

$$u_0 = \frac{x_0}{r_{c0}} - a_{c,k} + 2\pi n$$

в эпоху и

$$u_k = 2\pi n$$

в момент встречи. Здесь

$$a_{c,k} = \dot{a}_{c,k}(t_k - t_0) \text{ и } r_c = \text{const.}$$

Теперь не составляет труда записать уравнение времени для различных орбит. Во избежание повторений приведем это уравнение для эллиптической орбиты

$$(t_k - t_0) = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \frac{1}{1 - e^2} \left[- \frac{e \sin(u - \omega)}{1 + e \cos(u - \omega)} + \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \arctg \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{u - \omega}{2} \right) \right] \Bigg|_{u_0}^{u_k}, \quad (3.62)$$

где

$$u_0 = \frac{x_0}{r_c} - \dot{a}_c(t_k - t_0) + 2\pi n,$$

$$u_k = 2\pi n.$$

Аналогично тому, как было сделано ранее при определении орбиты встречи, находим

$$e \sin \omega = \frac{\left(\frac{p}{r_c + x_0} - 1 \right) - \left(\frac{p}{r_c} - 1 \right) \cos \left[\frac{x_0}{r_c} - \dot{a}_c(t_k - t_0) \right]}{\sin \left[\frac{x_0}{r_c} - \dot{a}_c(t_k - t_0) \right]}, \quad (3.63)$$

$$e \cos \omega = \frac{p}{r_c} - 1.$$

Совместное решение уравнений (3.62) и (3.63) относительно p , e и ω производится итерационным способом, о котором говорилось выше. Процедура вычисления относительных координат и составляющих скоростей также остается без изменений.

В соответствии с выражением (3.63) при

$$\frac{x_0}{r} - \dot{\alpha}_c(t_k - t_0) = m\pi$$

появляется неопределенность.

Рассмотрим эту неопределенность для случая, когда m — нечетное целое число, а станция обращается по эллиптической орбите

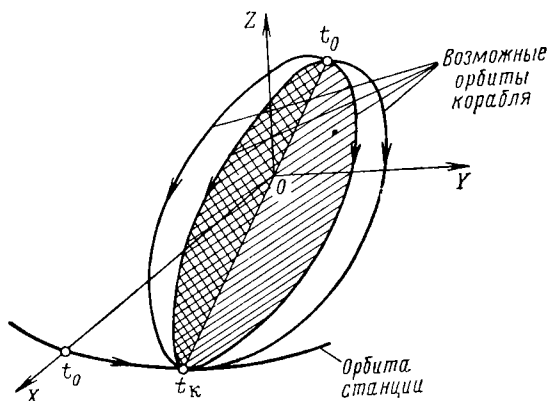


Рис. 3.23. Маневр встречи при $m=1$

(рис. 3.23). С учетом последнего равенства и выражений для u_0 и u_k после несложных преобразований находим

$$e \sin \omega = \frac{p \left(\frac{1}{r_{c0}} + \frac{1}{r_{c0} + z_0} \right) - 2}{\sin m\pi}, \quad (3.64a)$$

$$e \cos \omega = \frac{p}{r_{c.k}} - 1. \quad (3.64б)$$

Для того чтобы эксцентриситет e оставался конечным, числитель выражения (3.64a) должен быть равен нулю. Это позволяет определить фокальный параметр орбиты

$$p = \frac{2r_{c.k}(r_{c0} + z_0)}{r_{c.k} + r_{c0} + z_0}.$$

Подставляя это значение p в выражение (3.64б), получаем

$$e \cos \omega = \frac{r_{c0} + z_0 - r_{c.k}}{r_{c.k} + r_{c0} + z_0}. \quad (3.65)$$

Так как $p = K^2/\mu$ определено, то вычисление e и ω производится с помощью выражения (3.65) и уравнения времени (3.62). Верхний и нижний пределы в правой части уравнения времени

определяются значениями u_0 и u_k . После того как p , e и ω найдены, вычисляем x/r_c , а затем, учитывая, что $y/r_c = 0$, и

$$z = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)} - r_c.$$

Для составляющих скоростей получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{r_c} &= \frac{V \sqrt{\mu p}}{(r_c + z)^2} - \dot{r}_c + \frac{x}{r_c^2} \dot{r}_c, \\ \frac{\dot{y}}{r_c} &= 0, \\ \dot{z} &= e \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin(u - \omega) - \dot{r}_c. \end{aligned}$$

В общем случае выполнения маневров орбитального перехода получение аналитических выражений для сферических координат и составляющих скоростей в явном виде оказывается затруднительным.

§ 3.4. НАВЕДЕНИЕ НА КОНЕЧНОМ УЧАСТКЕ ВСТРЕЧИ

При сближении корабля с орбитальной станцией на конечном участке встречи могут применяться различные методы наведения; наиболее простые из них в смысле технической реализации

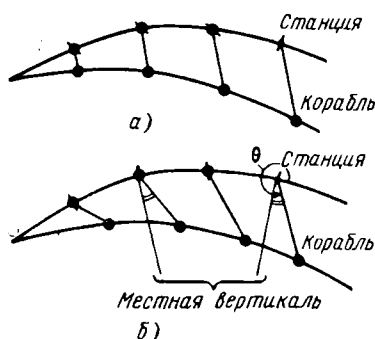


Рис. 3.24. Методы параллельного сближения:

а — инерциальное;
б — орбитальное

представляют собой разновидности метода пропорционального наведения*. Ниже рассматриваются два таких метода, которые получили название методов инерциального и орбитального параллельного сближения. Требуемый курс встречи в обоих методах обеспечивается стабилизацией фиксированного направления вектора дальности (линии визирования) между кораблем и станцией. Но если при инерциальном сближении для отсчета фиксированного направления в пространстве используется инер-

циальный базис, то при орбитальном сближении базисом отсчета служит местный горизонт (вертикаль). На рис. 3.24 показаны

* Сущность данного метода заключается в формировании такого управляющего воздействия, при котором угловая скорость вращения вектора скорости корабля пропорциональна угловой скорости вращения линии корабль—станция.

траектории сближения корабля со станцией для каждого метода параллельного сближения. При орбитальном сближении (см. рис. 3.24, б) линия визирования сохраняет неизменным угол с местной вертикалью. При выборе того или иного метода наведения важное значение приобретает как возможность его технической реализации, так и сравнение с другими по различным показателям (время сближения, приборное оборудование и т. д.).

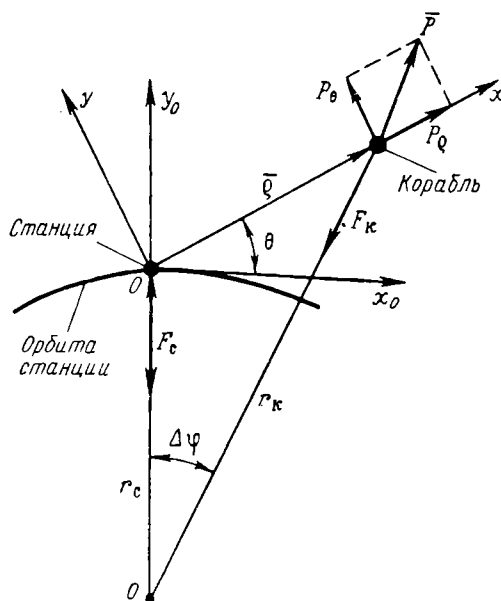


Рис. 3.25. Силы, действующие на корабль и станцию при их относительном движении

Особый интерес представляет сравнение по затратам энергии, необходимым для выполнения встречи. Для вывода уравнений относительного движения при допущениях, принятых в § 3.3, введем две подвижные системы координат с общим началом в центре масс станции: орбитальную $Ox_0y_0z_0$ и систему координат $Oxyz$, связанную с кораблем. Направление осей указанных систем координат, а также принятые обозначения параметров движения корабля и станции указаны на рис. 3.25. Угловое положение вектора дальности $\bar{\rho}$ относительно местного горизонта измеряется углом θ . Через P_θ и P_ϕ обозначены составляющие полного вектора тяги $\bar{P}$ на линию визирования (ось Ox) и нормаль к ней (ось Oy). Если $\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0$ и $\bar{i}_1, \bar{j}, \bar{k}$ — единичные векторы

осей систем $Ox_0y_0z_0$ и $Oxyz$, соответственно, причем $\bar{k} = \bar{k}_0$, то можно записать

$$\bar{r}_c = r_c \bar{j}_0,$$

$$\bar{q} = q \bar{i},$$

$$\bar{v} = v \bar{k}.$$

Векторное дифференциальное уравнение относительного движения корабля, учитывая, что $\bar{q} = (\bar{r}_k - \bar{r}_c)$, будет

$$m \frac{d^2 \bar{q}}{dt^2} = m \frac{d^2 (\bar{r}_k - \bar{r}_c)}{dt^2} = \Delta \bar{F} + \bar{P}, \quad (3.66)$$

где m — масса корабля;
 $\Delta \bar{F} = \bar{F}_k - \bar{F}_c$ — вектор гравитационной силы, действующей на корабль в его движении относительно станции.

В соответствии с принятыми обозначениями

$$\bar{F}_k = -\frac{\mu m}{r_k^3} \bar{r}_k, \quad \bar{F}_c = -\frac{\mu m}{r_c^3} \bar{r}_c$$

и, следовательно,

$$\Delta \bar{F} = -\frac{\mu m}{r_k^3} \bar{r}_k + \frac{\mu m}{r_c^3} \bar{r}_c.$$

Поскольку в дальнейшем потребуются значения проекций вектора $\Delta \bar{F}$ на оси Ox и Oy , из рис. 3.25 находим

$$\begin{aligned} \Delta F_x &= \frac{m\mu}{r_c^2} \sin \theta - \frac{m\mu}{r_k^2} \sin(\theta + \Delta\varphi), \\ \Delta F_y &= \frac{m\mu}{r_c^2} \cos \theta - \frac{m\mu}{r_k^2} \cos(\theta + \Delta\varphi), \end{aligned} \quad (3.67)$$

или

$$\begin{aligned} \Delta F_x &= \frac{m\mu}{r_c^2} \sin \theta - \frac{m\mu}{r_k^2} [\sin \theta \cos \Delta\varphi + \cos \theta \sin \Delta\varphi], \\ \Delta F_y &= \frac{m\mu}{r_c^2} \cos \theta - \frac{m\mu}{r_k^2} [\cos \theta \cos \Delta\varphi - \sin \theta \sin \Delta\varphi], \end{aligned}$$

где $\Delta\varphi$ — угол между векторами $\bar{r}_c$ и $\bar{r}_k$.

Подставляя в последние выражения значения

$$\sin \Delta\varphi = \frac{q \cos \theta}{r_k}, \quad \cos \Delta\varphi = \frac{r_c + q \sin \theta}{r_k},$$

которые легко определить из геометрического построения на рис. 3.25, получаем

$$\Delta F_x = m\mu \left[r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_k^3} \right) \sin \theta - \frac{q}{r^3} \right],$$

$$\Delta F_y = m\mu \left[r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_k^3} \right) \cos \theta \right].$$

Вектор полной тяги $\bar{P}$ задан своими составляющими на оси Ox и Oy , т. е.

$$\bar{P} = P_x \bar{i} + P_y \bar{j}. \quad (3.63)$$

Выражение для ускорения вектора дальности в уравнении (3.66) записано в орбитальной системе координат $Ox_0y_0z_0$. Перепишем его в системе координат $Oxyz$. Имея в виду, что

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{q}}{dt} + (\dot{\bar{v}} + \dot{\bar{\theta}}) \times \bar{q},$$

где $\dot{\bar{q}}$ — угловая скорость вектора $\bar{q}$ в орбитальной системе координат;

$\frac{\tilde{d}}{dt}$ — производная в системе $Oxyz$, представим

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \frac{d\bar{q}}{dt} \bar{i} + q(\dot{\bar{v}} + \dot{\bar{\theta}}) \bar{k} \times \bar{i} = \frac{d\bar{q}}{dt} \bar{i} + q(\dot{\bar{v}} + \dot{\bar{\theta}}) \bar{j}$$

и после дифференцирования по времени получаем

$$\frac{d^2\bar{q}}{dt^2} = \left[\frac{d^2\bar{q}}{dt^2} - q(\dot{\bar{v}} + \dot{\bar{\theta}})^2 \right] \bar{i} + \left[q(\ddot{\bar{v}} + \ddot{\bar{\theta}}) + 2 \frac{d\bar{q}}{dt} (\dot{\bar{v}} + \dot{\bar{\theta}}) \right] \bar{j}.$$

Для спутника, обращающегося по круговой орбите, $\dot{\bar{v}} = 0$ и

$$\frac{d^2\bar{q}}{dt^2} = \left[\frac{d^2\bar{q}}{dt^2} - q(\dot{\bar{\theta}})^2 \right] \bar{i} + \left[q \frac{d^2\bar{\theta}}{dt^2} + 2 \frac{d\bar{q}}{dt} \left(\dot{\bar{v}} + \dot{\bar{\theta}} \right) \right] \bar{j}.$$

В соответствии с полученным выражением и равенствами (3.67) и (3.68) имеем следующие скалярные уравнения относительного движения корабля:

$$\ddot{q} - q(\dot{\bar{v}} + \dot{\bar{\theta}})^2 = \frac{P_q}{m} + \mu r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_k^3} \right) \sin \theta - \frac{\mu q}{r_k^3},$$

$$q\ddot{\bar{\theta}} + 2\dot{q}(\dot{\bar{v}} + \dot{\bar{\theta}}) = \frac{P_{\dot{\theta}}}{m} + \mu r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_k^3} \right) \cos \theta, \quad (3.69)$$

или

$$\begin{aligned}\ddot{\varrho} - \varrho(\dot{\nu} + \dot{\theta})^2 &= a_0 + \mu r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_K^3} \right) \sin \theta - \frac{\mu \varrho}{r_K^3}, \\ \varrho \ddot{\theta} + 2\dot{\varrho}(\dot{\nu} + \dot{\theta}) &= a_\theta + \mu r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_K^3} \right) \cos \theta,\end{aligned}\quad (3.70)$$

где

$$a_0 = \frac{\dot{P}_0}{m}, \quad a_\theta = \frac{P_\theta}{m}.$$

Полученные уравнения содержат четыре неизвестные функции времени $\varrho(t)$, $\theta(t)$, $P_\varrho(t)$ и $P_\theta(t)$; поэтому найти их решение в общем случае движения корабля не представляется возможным. Применение того или иного метода наведения как раз и заключается в уменьшении числа неизвестных функций времени в уравнениях (3.69). В данном случае будем предполагать, что требуемая скорость радиального сближения ϱ корабля обеспечена и поэтому можно принять $P_\varrho = 0$ [10]. Это предположение означает, что курс встречи при параллельном сближении стабилизируется за счет регулирования угловой скорости линии визирования. Вообще говоря, для избежания жесткого столкновения корабля со станцией необходимо предусмотреть регулирование радиальной скорости сближения в функции дальности. Считается, что такое регулирование должно осуществляться в непосредственной близости корабля от станции.

Угловое положение линии визирования по отношению к ее положению в начальный момент времени остается неизменным либо в инерциальной, либо в орбитальной системах координат. Равенство нулю угловой скорости линии визирования в инерциальной системе координат определяет способ инерциального параллельного сближения. Рассмотрим этот способ более подробно. Положив

$$\dot{\vartheta} = \dot{\theta} + \nu,$$

найдем

$$\ddot{\vartheta} = \ddot{\theta}$$

и

$$\vartheta = \int_{t=0}^t \dot{\vartheta} dt + \nu t.$$

Учитывая, что

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \dot{\theta} dt,$$

выразим

$$\theta = \vartheta + \theta_0 - \nu t.$$

После подстановки значений для $\dot{\vartheta}$ и θ в уравнения (3.69), считая $P_{\varrho} = 0$, получаем

$$\begin{aligned}\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\vartheta}^2 &= \mu r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_k^3} \right) \sin(\theta_0 + \vartheta - \nu t) - \frac{\mu Q}{r_k^3}, \\ \varrho \ddot{\vartheta} + 2\dot{\varrho} \dot{\vartheta} &= \mu r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_k^3} \right) \cos(\theta_0 + \vartheta - \nu t) + \frac{P_{\theta}}{m}. \quad (3.71)\end{aligned}$$

Поскольку при инерциальном параллельном сближении $\dot{\vartheta} \equiv \ddot{\vartheta} = 0$, то дифференциальные уравнения относительного движения корабля при данном способе наведения приобретают вид

$$\begin{aligned}\ddot{\varrho} + \frac{\mu Q}{r_k^3} - \mu r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_k^3} \right) \sin(\theta_0 + \vartheta - \nu t) &= 0, \\ -\mu r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_k^3} \right) \cos(\theta_0 + \vartheta - \nu t) &= \frac{P_{\theta}}{m}. \quad (3.72)\end{aligned}$$

Полученная система уравнений может быть решена с помощью вычислительной машины. При этом решение первого уравнения определяет зависимость дальности от времени при сближении корабля со станцией вдоль линии визирования по инерции. Второе уравнение определяет величину тяги по нормали к линии визирования, необходимую для поддержания встречно-пересекающегося со станцией курса корабля. Для получения решений уравнений (3.72) в конечном виде линеаризируем эти уравнения, полагая

$$r_k - r_c \simeq \varrho \sin \theta$$

и

$$\frac{\varrho}{r_c} \sin \theta \ll 1.$$

Тогда приближенно можно принять

$$\begin{aligned}&\mu r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_k^3} \right) \sin \theta = \\ &= \mu r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_c^3 \left(1 + \frac{\varrho \sin \theta}{r_c} \right)^3} \right) \sin \theta \simeq \frac{3\mu Q}{r_c^3} \sin^2 \theta, \quad (3.73) \\ &\mu r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_k^3} \right) \cos \theta \simeq \frac{3\mu Q}{r_c^3} \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{\mu Q}{r_k^3} \simeq \frac{\mu Q}{r_c^3}.\end{aligned}$$

Учитывая значение для θ и $\nu^2 = \mu/r_c^3$, после подстановки приближенных выражений (3.73) в уравнения (3.72) имеем

$$\ddot{\varrho} - \nu^2 [3 \sin^2(\theta_0 + \vartheta - \nu t) - 1] \varrho = 0, \quad (3.74a)$$

$$-3\nu^2 [\sin(\theta_0 + \vartheta - \nu t) \cos(\theta_0 + \vartheta - \nu t)] \varrho = \frac{P_{\theta}}{m}. \quad (3.74b)$$

Исследования показывают, что результаты, полученные на основе линеаризованных и точных уравнений, различаются менее чем на 5%, если начальная дальность меньше 45 км и время сближения не больше одного орбитального периода [10]. Уравнения (3.74) допускают аналитическое решение в виде рядов. Действительно, подстановкой $\tau = \theta_0 - vt$ и заменой

$$\sin^2(\theta_0 - vt) = \frac{1 - \cos 2(\theta_0 - vt)}{2}$$

уравнение (3.74а) приводится к известному уравнению Матье

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} - (0,5 - 1,5 \cos 2\tau) q = 0,$$

решение которого может быть записано так:

$$q(\tau) = a e^{-\alpha \tau} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_{2n} e^{(m\pi - 2ni\tau)} + \\ + b e^{\alpha \tau} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_{2n} e^{(-m\pi + 2ni\tau)}.$$

Коэффициенты C_{2n} определяются из рекуррентных соотношений

$$[0,5 - (2n - i\alpha)^2] C_{2n} - 0,75(C_{2n+2} + C_{2n-2}) = 0$$

методом последовательных приближений.

После подстановки значений коэффициентов C_{2n} в уравнение (3.74а) и обратного перехода к действительному времени получаем следующие зависимости для дальности и скорости изменения дальности:

$$\dot{q}(t) = a a_1 e^{0,454 vt} + b b_1 e^{-0,454 vt}, \quad (3.75a)$$

$$\dot{q}(t) = a(0,454 v a_1 - a_2) e^{0,454 vt} - b(0,454 v b_1 - b_2) e^{-0,454 vt}, \quad (3.75б)$$

где

$$a_1 = 1 + 0,3204 \cos(2\theta_0 - 2vt - 0,4) + 0,0144 \cos(4\theta_0 - 4vt - 0,62) + \dots$$

$$b_1 = 1 + 0,3204 \cos(2\theta_0 - 2vt + 0,40) + 0,0144 \cos(4\theta_0 - 4vt + 0,62) + \dots$$

$$a_2 = 0,6408 \sin(2\theta_0 - 2vt - 0,4) + 0,0576 \sin(4\theta_0 - 4vt - 0,62) + \dots$$

$$b_2 = 0,6408 \sin(2\theta_0 - 2vt + 0,4) + 0,0576 \sin(4\theta_0 - 4vt + 0,62) + \dots$$

Здесь a_i и b_i ($i=1, 2$) — постоянные, зависящие от начальных условий.

Точность результатов вычислений по формулам (3.75) оказывается вполне приемлемой, если учитывать первые тригонометрические члены рядов, определяющих коэффициенты a_1 , a_2 , b_1 и b_2 .

Второе уравнение служит для нахождения значения потребной нормальной тяги или нормального ускорения. Проведение оценки, потребляемой при наведении энергии, связано с интегрированием нормального ускорения. Это делается подстановкой в уравнение (3.74б) выражения для дальности (3.75а) и последующим интегрированием во времени.

Орбитальное параллельное сближение характеризуется равенством нулю угловой скорости вращения линии визирования относительно местного горизонта ($\dot{\theta}=0$). Полагая в уравнении (3.69) $\dot{\theta}=0$, а также $P_\theta=0$, получаем следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{Q} - Q\dot{v}^2 + \frac{\mu Q}{r_K^3} - \mu r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_K^3} \right) \sin \theta &= 0, \\ 2\dot{Q}v - \mu r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_K^3} \right) \cos \theta &= \frac{P_\theta}{m}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Используя приведенную выше аппроксимацию, находим следующие выражения для линеаризованных уравнений:

$$\ddot{Q} - 3v^2 \sin \theta_0 Q = 0, \quad (3.77a)$$

$$2\dot{Q}v - 3v^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 Q = \frac{P_{\theta_0}}{m}. \quad (3.77б)$$

Временные зависимости для дальности и скорости изменения дальности можно получить из уравнения (3.77а), а нормальную тягу, необходимую для поддержания курса встречи, из уравнения (3.77б). Уравнения (3.77) являются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. Полагая при $t=0$ $Q=Q_0$, $\dot{Q}=\dot{Q}_0$, решение первого уравнения получим в виде

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 \cosh \beta t + \frac{\dot{Q}_0}{\beta} \sinh \beta t, \\ \dot{Q} &= Q_0 \beta \sinh \beta t + \dot{Q}_0 \cosh \beta t, \end{aligned} \quad (3.78)$$

где

$$\beta^2 = 3v^2 \sin^2 \theta_0.$$

В момент встречи $t=t_K$ дальность равна нулю, т. е.

$$Q(t_K) = Q_0 \cosh \beta t_K + \frac{\dot{Q}_0}{\beta} \sinh \beta t_K = 0, \quad (3.79a)$$

а скорость сближения будет

$$\dot{q}(t_k) = q_0 \beta \operatorname{sh} \beta t_k + \dot{q}_0 \operatorname{ch} \beta t_k. \quad (3.796)$$

Последнее выражение с помощью равенства (3.79) можно выразить через начальные значения дальности q_0 и скорости ее изменения $\dot{q}_0$ по формуле

$$\dot{q}_k = \dot{q}_0 \left[1 - \frac{(q_0 \beta)^2}{\dot{q}_0^2} \right]^{1/2}. \quad (3.80)$$

Подставляя значения для q и $\dot{q}$ согласно выражениям (3.78) уравнение (3.776), имеем

$$2[q_0 \beta \operatorname{sh} \beta t + \dot{q}_0 \operatorname{ch} \beta t] v - 3v^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 (q_0 \operatorname{ch} \beta t + \frac{\dot{q}_0}{\beta} \operatorname{sh} \beta t) = \frac{P_\theta}{m}.$$

Данное уравнение определяет нормальное ускорение, требуемое для поддержания курса в текущий момент времени. Для проведения оценки потребляемой при наведении энергии проинтегрируем это уравнение за время осуществления встречи:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_k} \frac{P_\theta}{m} dt &= 2v \left[q_0 \operatorname{ch} \beta t_k + \frac{\dot{q}_0}{\beta} \operatorname{sh} \beta t_k \right] - 2v q_0 - \\ &- \frac{3v^2}{\beta^2} \sin \theta_0 \cos \theta_0 [q_0 \beta \operatorname{sh} \beta t_k + \dot{q}_0 \operatorname{ch} \beta t_k] + \\ &+ \frac{3v^2}{\beta^2} \sin \theta_0 \cos \theta_0 \dot{q}_0. \end{aligned}$$

С учетом равенства (3.79) и значения β^2 получаем

$$\int_0^{t_k} \frac{P_\theta}{m} dt = \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} (\dot{q}_0 - \dot{q}_k) - 2v q_0. \quad (3.81)$$

Располагая уравнениями относительного движения корабля и их решениями для двух способов наведения, можно рассчитать потребные величины энергии и времени для выполнения встречи.

Энергия, требуемая для встречи, выражается через полный импульс приращения относительной скорости корабля. Этот импульс включает в себя следующие составляющие:

1) импульс скорости ΔV_1 , устанавливающий предписанную законом наведения скорость сближения корабля по линии визирования;

2) импульс скорости ΔV_2 , равный интегралу от ускорения силы тяги по нормали к линии визирования;

3) импульс скорости ΔV_3 , осуществляющий торможение корабля при подходе к станции.

Кроме того, возможны дополнительные затраты энергии, связанные с несовершенством системы управления при отработке команд наведения.

Первая составляющая импульса скорости ΔV_1 здесь не учитывается. Вторая и третья составляющие вычисляются по формуле

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_2 + \Delta V_3 = \int_0^{t_k} \frac{P_{\theta}}{m} dt + |\dot{q}_k|. \quad (3.82)$$

Предположение об идеальности системы управления исключает из рассмотрения дополнительные затраты энергии.

Правую часть формулы (3.82) удобно выразить в функции значений переменных q , $\dot{q}$ и θ после установления радиальной скорости сближения. Особенно наглядно такое представление формулы (3.82) для орбитального параллельного сближения, поскольку решения уравнений относительного движения в этом случае имеют конечные аналитические выражения. Разделим левую и правую части формулы (3.82) на $\dot{q}_0$ и, используя соотношения (3.80) и (3.81), представим ее в виде

$$\frac{\Delta V_{\Sigma}}{\dot{q}_0} = \left| \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \left[1 - \left(1 - \frac{3\dot{q}_0^2 v^2}{\dot{c}_0^2} \sin^2 \theta_0 \right)^{1/2} \right] \right| + \left| \left(1 - \frac{3\dot{q}_0 v^2}{\dot{c}_0^2} \sin \theta_0 \right)^{1/2} \right|.$$

Отсюда следует, что безразмерный импульс скорости $\frac{\Delta V_{\Sigma}}{\dot{q}_0}$ является функцией отношения $\frac{\dot{q}_0 v}{\dot{c}_0}$ и угла θ_0 . От этих же параметров зависит время сближения. Действительно, из равенства (3.79а) находим

$$\operatorname{th} \beta t_k = -\frac{\dot{q}_0^3}{\dot{c}_0},$$

откуда

$$t_k = \frac{1}{\beta} \operatorname{arc th} \left(-\frac{\dot{q}_0^3}{\dot{c}_0} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}v \sin \theta_0} \operatorname{arc th} \left(-\frac{3\dot{q}_0 v \sin \theta_0}{\dot{c}_0} \right).$$

На рис. 3.26 и 3.27 показаны графики импульсов скорости ΔV_{Σ} и времени t_k , требуемых для орбитального параллельного сближения, построенные в относительных безразмерных координатах. Аналогичные графики для инерциального параллельного сближения, построенные по результатам решения уравнений

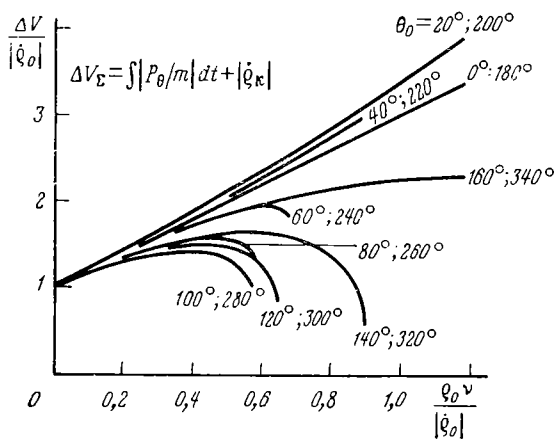


Рис. 3.26. Зависимость требуемого импульса скорости в зависимости от начальных условий для орбитального параллельного сближения

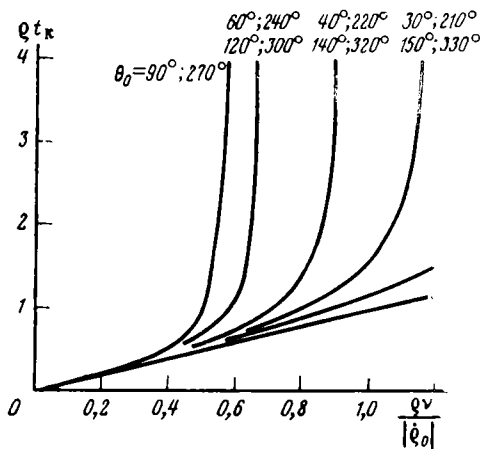


Рис. 3.27. Зависимость требуемого времени в функции начальных условий для орбитального параллельного сближения

(3.72) на вычислительной машине, показаны на рис. 3.28 и рис. 3.29.

Данные, используемые для построения графиков, определялись по начальной дальности $q_0 \leq 45$ км. Пользуясь этими графиками, можно сравнительно легко оценить затраты энергии при параллельном сближении в сравнении с другими методами осуществления встречи. Что же касается сравнения методов орби-

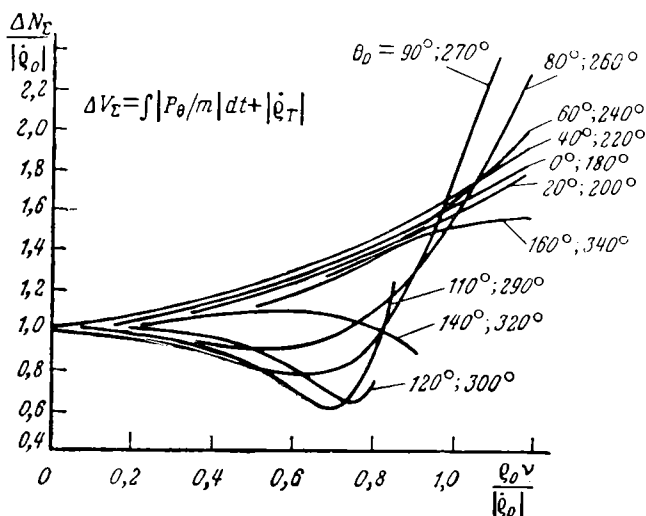


Рис. 3.28. Зависимость требуемого импульса скорости от начальных условий для параллельного сближения

тального и инерциального параллельного сближения, то его можно провести по графикам, приведенным на рис. 3.26 и рис. 3.28. Метод инерциального сближения является более экономичным, чем метод орбитального параллельного сближения. Это вытекает из того факта, что потребная величина нормальной тяги при инерциальном сближении полностью определяется разностной силой тяжести. В других случаях, в том числе и при орбитальном параллельном сближении, необходимы дополнительные затраты энергии на преодоление действия кориолисова ускорения. Следует иметь в виду, что важное значение при выборе того или иного метода наведения имеют так же располагаемые технические средства их реализации.

В качестве примера рассмотрим использование графиков, изображенных на рис. 3.28 и 3.29, на предварительной стадии проектирования системы управления сближением [10]. Допустим, что необходимо вычислить импульс скорости при инерциальном параллельном сближении, когда $q_0 = 30\,000$ м, $\theta_0 = 200^\circ$ (корабль

находится ниже и впереди станции), $v=0,001 \text{ рад/сек}$. Принимая отношение $\dot{\varrho}_0 v / \dot{\varrho}_0 = 1$, находим $\dot{\varrho}_0 = \dot{\varrho}_0 v = -30 \text{ м/сек}$, а из графика на рис. 3.29 $v t_K = 0,81$.

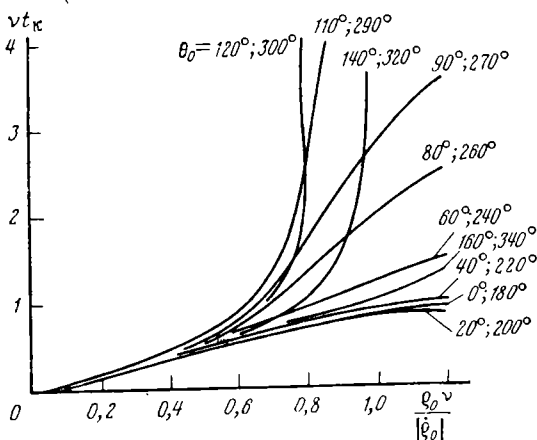


Рис. 3.29. Зависимость требуемого времени от начальных условий для параллельного сближения

Последнее равенство определяет время сближения

$$t_K = \frac{0,81}{v} = 810 \text{ сек} = 13,5 \text{ мин.}$$

В соответствии с графиком на рис. 3.28 получаем $\frac{\Delta V_\Sigma}{|\dot{\varrho}_0|} = 1,58$; откуда $\Delta V_\Sigma = 1,58 |\dot{\varrho}_0| = 48 \text{ м/сек}$.

Таким же образом проводится выбор ΔV_Σ при орбитальном параллельном сближении.

§ 3.5. РУЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОРАБЛЕМ ПРИ НАВЕДЕНИИ НА КОНЕЧНОМ УЧАСТКЕ

Управление встречей пилотируемого корабля со станцией на этапах непосредственного сближения (относительная дальность порядка 15—30 км) и стыковки может возлагаться на пилота-космонавта. Это объясняется исключительными способностями человека объемно видеть и лучше машины оценивать обстановку при непредусмотренных программой условиях полета. Ясное понимание возникшей ситуации в сочетании с приобретенными ранее знаниями и опытом позволяют космонавту на основе умозаключений принимать гибкие решения. Однако привлечение космонавта к участию в управлении полетом требует освобождения его от выполнения однообразных утомительных операций,

снижающих работоспособность и притупляющих правильное восприятие окружающей обстановки и приборной информации. Другими словами, при ручном управлении следует использовать такие методы сближения, которые обеспечивают максимальную надежность и могут быть легко осуществлены космонавтом. Применительно к космическим аппаратам это предполагает простоту приборного оборудования, необходимого для управления, и минимизацию топлива, расходуемого на выполнение маневров сближения.

Не затрагивая здесь всей обширной проблемы ручного управления, остановимся на одном частном вопросе использования навигационной информации для задания режимов ручного управления тягой двигателей корабля, отвечающих вполне определенным законам управления [10]. Последние реализуются в виде наглядной инструктивной индикации. В целях конкретизации постановки вопроса ограничимся рассмотрением

маневра компланарного сближения с опережением. Изображение на рис. 3.30 поясняет физическую сущность такого маневра, заключающегося в том, что управление относительной дальностью осуществляется торможением, в результате которого относительная скорость уменьшается до приемлемого конечного значения. Задача одновременного управления дальностью и относительной скоростью представляет собой задачу управления величиной и направлением ускорения корабля.

Решение этой задачи во многом определяется схемой компоновки двигательной системы на корабле. Для двигательных систем с регулируемой тягой рассмотрим следующие две схемы компоновки. В первой схеме на корабле устанавливается несколько реактивных двигателей, создающих тягу по ортогональным осям (рис. 3.31), где через P_0 обозначена тяга вдоль продольной оси корабля, а через P_θ тяга, нормальная к этой оси). Такую схему компоновки условимся называть в дальнейшем двухканальной. По второй схеме (рис. 3.32) все двигатели создают тягу вдоль продольной оси корабля. Одновременное создание ускорений корабля вдоль линии визирования и по нормали к ней обеспечивается ориентацией продольной оси под определенным углом γ к линии визирования. Эту схему будем называть одноканальной. В обеих рассмотренных схемах векторы

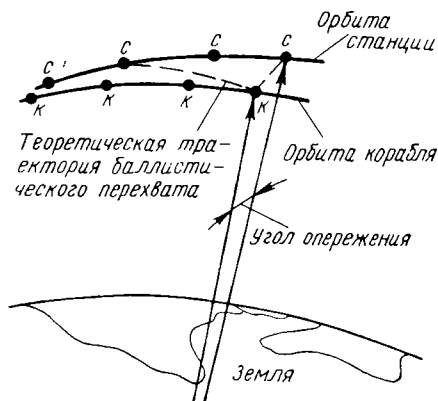


Рис. 3.30. Относительное расположение корабля и станции в момент встречи с опережением

тяги $\bar{P}_Q$ и $\bar{P}_\theta$ располагаются в плоскости орбиты, что требует ориентации корабля по каналу крена. Будем предполагать, что такая ориентация обеспечивается специальной системой, использующей, например, в качестве углового датчика крена инфракрасную вертикаль.

Компоновочные схемы двигательных систем, работающих в импульсном режиме, считаются аналогичными рассмотренным выше схемам двигателей с регулируемой непрерывной тягой. При разработке системы ручного управления сближением должны учитываться особенности принятой компоновочной схемы двигательной системы и режим ее работы.

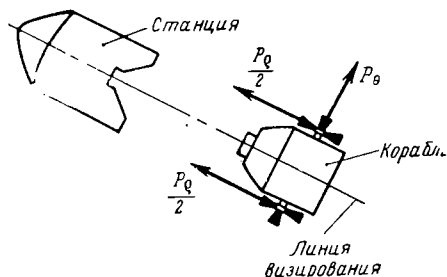


Рис. 3.31. Этап сближения по линии визирования

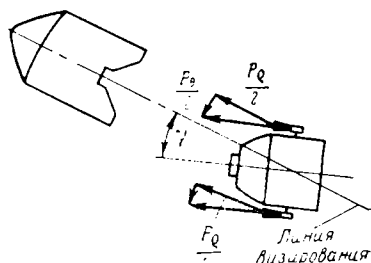


Рис. 3.32. Управление ориентацией корабля путем бокового смещения

Запасы топлива на борту корабля ограничены, поэтому основным критерием качества ручного управления тягой двигателей и ориентацией корабля является критерий минимума энергетических затрат. Реализация данного критерия не должна требовать от космонавта выполнения большого объема вычислений и использования сложных индикаторов. Рассмотрим для двухканальной и одноканальной схем возможные пути решения этой задачи при инерциальном способе управления сближением корабля и станции.

Перепишем уравнения (3.70) в виде

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}^2 + g_\theta + a_\theta, \quad (3.83a)$$

$$\dot{\theta} \ddot{\theta} = 2\dot{\theta} \dot{\theta} + g_\theta + a_\theta, \quad (3.83b)$$

где

$$g_\theta = \mu r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_k^3} \right) \sin \theta - \frac{\mu_Q}{r_k^3},$$

$$g_\theta = \mu r_c \left(\frac{1}{r_c^3} - \frac{1}{r_k^3} \right) \cos \theta.$$

В соответствии с приведенными уравнениями управление движением корабля заключается в таком изменении радиального a_Q и нормального a_θ ускорений, которое обеспечивает сближение

с минимальными затратами топлива. С этой целью получим аналитические зависимости ускорений a_q и $a_{\dot{q}}$ от параметров относительного движения корабля. Поскольку управление скоростью $\dot{q}$ корабля производится в зависимости от дальности q , то ускорение должно быть функцией $\dot{q}$ и q . Примем, что a_q зависит от рассогласования между действительной скоростью сближения $\dot{q}$ и ее требуемым значением $\dot{q}_T$, т. е. $a_q = f(\dot{q} - \dot{q}_T)$. Требуемое значение $\dot{q}_T$ задается в виде известной функции дальности q . Допустим, что $\dot{q}_T$ и q связаны следующей зависимостью:

$$\dot{q}_T = -Cq^\alpha, \quad (3.84)$$

$$\text{где } C = \left| \frac{\dot{q}_{0q}}{q_{0q}^\alpha} \right|;$$

q_{0q} и $\dot{q}_{0q}$ — значения дальности и скорости ее изменения в момент включения радиальной тяги;

α — постоянный параметр.

Предположим, что скорость сближения $\dot{q}_T$ достигается при условии, если возмущающие ускорения $q\dot{q}^2$ и g_q в правой части уравнения (3.83) равны нулю. Тогда

$$\dot{q}_T = \dot{q} = -Cq^\alpha$$

и потребное радиальное ускорение a_{q1} , которое надо придать кораблю, будет

$$a_{q1} = \ddot{q} = \alpha C^2 q^{2\alpha-1}.$$

Принимая $\alpha = 1/2$, получим

$$a_{q1} = \frac{C^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\dot{q}_{0q}^2}{q_{0q}}. \quad (3.85)$$

В этом случае под действием ускорения a_{q1} скорость корабля будет приближаться к нулю в зависимости от q по параболе. В действительности изменение $\dot{q}$ будет отличаться от этого закона, поскольку $q\dot{q}^2$ и g_q отличны от нуля. Для компенсации возмущающего действия этих ускорений в выражение радиального ускорения a_q должен входить член a_{q2} , определяемый по формуле

$$a_{q2} = k(\dot{q}_T - \dot{q}) = k(Cq^{1/2} - \dot{q}), \quad (3.86)$$

где k — постоянный коэффициент.

Таким образом, радиальное ускорение

$$a_q = a_{q1} + a_{q2} = \frac{\dot{q}_{0q}^2}{2q_{0q}} + k(Cq^{1/2} - \dot{q})$$

состоит из постоянного члена, не зависящего от текущих значений $\dot{q}$ и q , и переменного члена, пропорционального отклонению действительной величины $\dot{q}$ от требуемого значения.

Вследствие убывания возмущающих ускорений $\dot{q}\theta^2$ и g_θ при уменьшении дальности переменный член в выражении радиального ускорения также уменьшается.

Ускорение a_θ придается кораблю для сведения к нулю и поддержания на нулевом уровне угловой скорости вращения линии визирования θ . Необходимость в этом обусловлена двумя причинами. Во-первых, при $\dot{\theta}=0$ минимизируется величина центростремительного ускорения, вызываемая преждевременным уменьшением скорости $\dot{q}$, во-вторых, исключается вращение корабля вокруг станции по спирали, возникающее при уменьшении дальности согласно закону сохранения количества движения. Все это уменьшает объем маневрирования при разворотах корабля, необходимых для стабилизации вектора тяги по линии визирования. Кроме того, в случае использования на станции маяка-ответчика для радиолокатора, установленного на корабле, уменьшается потребная зона действия ответчика. Последнее приводит к увеличению коэффициента усиления антенного устройства.

Для нахождения функциональной зависимости a_θ от $\dot{\theta}$ пренебрежем вследствие малости составляющей градиента гравитационного ускорения в уравнении (3.83б). Это позволяет записать его в виде

$$q\ddot{\theta} + 2\dot{q}\dot{\theta} = a_\theta. \quad (3.87)$$

Умножая левую и правую части равенства на q , можно переписать данное уравнение так:

$$\frac{d(q^2\dot{\theta})}{dt} = a_\theta q,$$

откуда непосредственно следует

$$d(q^2\dot{\theta}) = a_\theta q dt,$$

и после интегрирования

$$q^2\dot{\theta} = q_0^2\dot{\theta}_0 + \int a_\theta q dt, \quad (3.88)$$

где q_0 и $\dot{\theta}_0$ — значения q и $\dot{\theta}$ в момент включения нормальной тяги.

Предположим, что величина a_θ является постоянной, а изменение дальности происходит при постоянном радиальном ускорении $\ddot{q} = a_q = a_{q1}$, которое определяется выражением (3.85). Тогда уменьшение дальности происходит в соответствии с тре-

буемым законом (3.84). Учитывая, что в данном случае $\alpha=1/2$, имеем

$$\varrho = \frac{\dot{\varrho}^2}{C^2}.$$

Выражая

$$dt = \frac{d\dot{\varrho}}{\dot{\varrho}} = \frac{2d\varrho}{C^2},$$

перепишем интеграл в правой части уравнения (3.88) в виде

$$a_{\theta} \int_0^t \varrho dt = a_{\theta} \frac{2}{C^4} \int_{\dot{\varrho}_{0\theta}}^{\dot{\varrho}} \dot{\varrho}^2 d\dot{\varrho} = \frac{2}{3} \frac{a_{\theta}}{C^4} (\dot{\varrho}^3 - \dot{\varrho}_{0\theta}^3).$$

Таким образом,

$$\varrho^2 \dot{\theta} = \varrho_{0\theta}^2 \dot{\theta}_{0\theta} + \frac{2}{3} \frac{a_{\theta}}{C^4} (\dot{\varrho}^3 - \dot{\varrho}_{0\theta}^3)$$

или, принимая

$$a_{\theta} = \eta \dot{\varrho}_{0\theta} \dot{\theta}_{0\theta},$$

где η — постоянный коэффициент,

$$\varrho^2 \dot{\theta} = \varrho_{0\theta}^2 \dot{\theta}_{0\theta} + \frac{2}{3} \frac{\eta}{C^4} \dot{\varrho}_{0\theta} \dot{\theta}_{0\theta} (\dot{\varrho}^3 - \dot{\varrho}_{0\theta}^3).$$

Учитывая, что

$$\dot{\varrho}^3 = C^3 \varrho^{3/2},$$

а

$$C = \left| \frac{\dot{\varrho}_{0\theta}}{\varrho_{0\theta}^{1/2}} \right|,$$

приведем выражение (3.88) к окончательному виду

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_{0\theta} \left(\frac{\varrho_{0\theta}}{\varrho} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{2}{3} \eta \left[\left(\frac{\varrho}{\varrho_{0\theta}} \right)^{3/2} - 1 \right] \right\}. \quad (3.89)$$

Отсюда можно найти теоретическое значение дальности ϱ^* , при которой угловая скорость $\dot{\theta}$ линии визирования становится равной нулю

$$\varrho^* = \varrho_{0\theta} \left(1 - \frac{3/2}{\eta} \right)^{3/2}. \quad (3.90)$$

Действительно, в случае когда $\eta=3/2$, то $\varrho^*=0$, поэтому принимаем $\eta > 3/2$.

На рис. 3.33 показана зависимость между q^* и η . Задавая дальность q^* , можно выбрать значение η из соотношения (3.90). Однако следует иметь в виду, что ускорение a_{η} , а следовательно, и сила тяги P_{η} , пропорциональны η . Поэтому чем меньше η , тем меньше требуемая тяга двигателя. Вместе с тем при заданном значении $q_{0\theta} \dot{\theta}_0$ от η зависит характеристическая скорость ΔV_{η} , связанная с управлением угловой скоростью $\dot{\theta}$. Зависимость характеристической скорости ΔV_{η} от η приведена на графике (рис. 3.34), из которого видно, что ΔV_{η} уменьшается при уве-

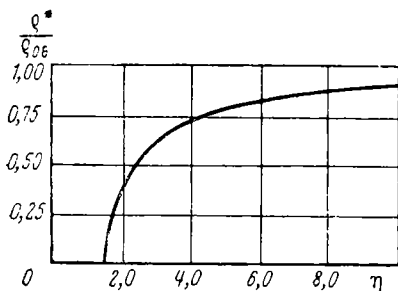


Рис. 3.33. Изменение закона наведения по дальности

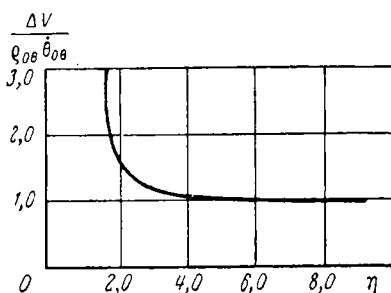


Рис. 3.34. Изменение закона наведения по скорости

личении η . Следовательно, с точки зрения экономии расхода топлива желательно величину η выбирать возможно большей. Компромисс между этими противоречивыми требованиями достигается при $\eta=2$. Обычно принимают $\eta=1,6$, что определяет минимальный уровень нормального ускорения [10]

$$a_{\theta} = 1,6 q_{0\theta} \dot{\theta}_{0\theta}, \quad (3.91)$$

при котором обеспечивается уменьшение $\dot{\theta}$ в предположении, что q уменьшается под действием постоянного радиального ускорения $a_q = a_{q1}$ в соответствии с выражением (3.84).

Если ускорение a_{θ} принимается переменным и задается выражением

$$a_{\theta} = \lambda \dot{q} \dot{\theta},$$

где λ — постоянный коэффициент, то в соответствии с уравнением (3.87) имеем

$$\ddot{q} \dot{\theta} = -2 \dot{q} \dot{\theta} + \lambda \dot{q} \ddot{\theta} = (\lambda - 2) \dot{q} \ddot{\theta}.$$

Отсюда находим

$$\frac{d\ddot{\theta}}{\ddot{\theta}} = (\lambda - 2) \frac{dq}{q}$$

и после интегрирования

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_{01} \left(\frac{q}{q_{01}} \right)^{\lambda-2}.$$

Из полученного выражения следует, что $\dot{\theta}$ уменьшается по мере уменьшения дальности $\left(\frac{q}{q_{01}} \leq 1 \right)$ при $\lambda > 2$. Принимая $\lambda = 4$, получаем, в частности,

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_{01} \left(\frac{q}{q_0} \right)^2,$$

что соответствует квадратичной зависимости между $\dot{\theta}$ и q . Величина ускорения при этом равна

$$a_{\theta} = 4\dot{q}\dot{\theta}. \quad (3.92)$$

При осуществлении сближения возможно придание кораблю вначале постоянного, а затем переменного ускорения a_{θ} . Постоянное ускорение находится по формуле (3.91), а переменное — по формуле (3.92). Переключение двигателя с одного режима создания тяги на другой режим происходит при выполнении равенства

$$4\dot{q}\dot{\theta} = 1,6\dot{q}_{01}\dot{\theta}_{01}. \quad (3.93)$$

Учитывая, что

$$\dot{q} = \frac{\dot{q}_{01}}{q_{01}^{1/2}} q^{1/2},$$

а $\dot{\theta}$ определяется выражением (3.89), из равенства (3.93) получаем

$$\left(\frac{q}{q_{01}} \right)^{3/2} = 0,1.$$

Отсюда дальность, при которой происходит переключение тяги, равна

$$q = 0,215 q_{01}.$$

На рис. 3.35 изображен профиль нормального ускорения с переключением режима.

Приведенные выше выкладки относились к двигателям с непрерывной тягой. Рассмотрим теперь использование импульсной тяги. В данном случае радиальное ускорение a_q также должно выражаться в зависимости от дальности и скорости ее изменения. Анализ этой зависимости удобно производить на фазовой плоскости с координатами q и $\dot{q}$.

Предположим, что к моменту включения импульсной схемы управления радиальным ускорением процесс гашения угловой скорости линии визирования в основном закончился (происходит параллельное сближение) и выполняются условия

$$\dot{q}\ddot{q} \ll \ddot{q}, \dot{q}^2 \ll a_q, g_q \ll a_q.$$

Тогда уравнение (3.83а) существенно упрощается, и его интегрирование при начальных условиях q_{0q} и $\dot{q}_{0q}$ дает следующие выражения:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \dot{q}_{0q} + a_q t, \\ q &= q_0 + \dot{q}_{0q} t + a_q \frac{t^2}{2}.\end{aligned}$$

Отсюда находим уравнение траектории на фазовой плоскости

$$q = q_0 + \frac{\dot{q} - \dot{q}_{0q}}{a_q} \dot{q}_{0q} + \frac{(\dot{q} - \dot{q}_{0q})^2}{2a_q}.$$

Анализ этого уравнения показывает, что фазовая траектория является параболой. В зависимости от знака начальной скорости $\dot{q}_{0q}$ и ускорения a_q имеют место три различные фазовые траектории (рис. 3.36).

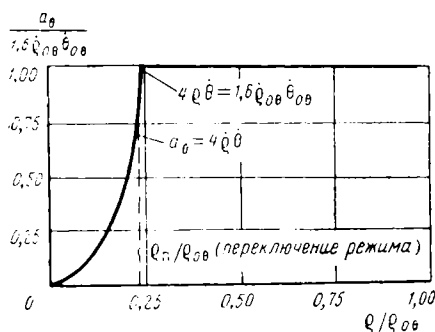


Рис. 3.35. Характер изменения тяги

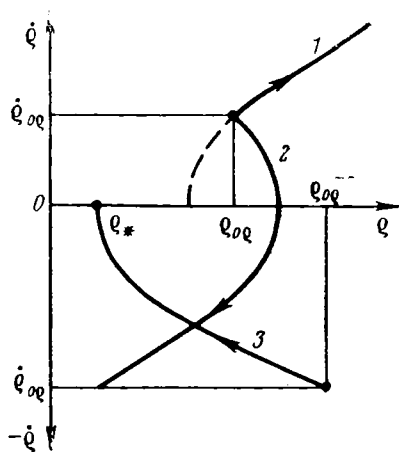


Рис. 3.36. Линии переключения на фазовой плоскости:

1, 3 — $a_q > 0$; 2 — $a_q < 0$

Выше было показано, что траектория вывода корабля выбирается с таким расчетом, чтобы он в момент выхода в точку встречи (начало конечного участка) сближался со станцией за счет разности их орбитальных скоростей. Следовательно, к началу управления сближением $\dot{q}_{0q} < 0$, а для уменьшения скоро-

сти сближения необходимо прикладывать тормозящую тягу ($a_q > 0$). Поэтому процесс сближения при включенной тяге на фазовой плоскости определяется траекторией 3. После выключения тяги сближение происходит с постоянной скоростью, достигнутой к моменту выключения, что соответствует на фазовой плоскости прямой, параллельной оси q .

Таким образом, процесс сближения в целом на фазовой плоскости представляет собой сопрягающуюся последовательность отрезков парабол и прямых линий, расположенных между ли-

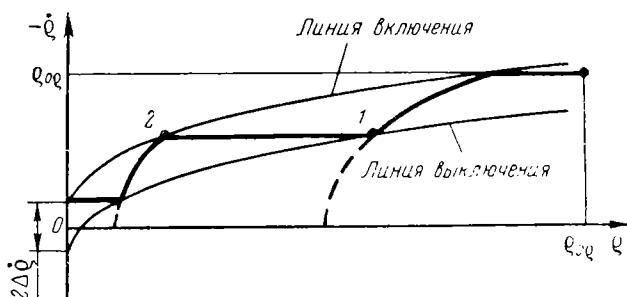


Рис. 3.37. Линии включения и выключения тяги

ниями переключений. Последние могут иметь различную форму и для каждой формы управление ускорением имеет свои особенности. Пусть линии переключений являются параболой, вершины которых сдвинуты относительно начала фазовой плоскости на равные приращения скорости $\Delta \dot{q}$, как показано на рис. 3.37. Верхняя парабола — это линия включения радиальной тяги. Уравнение этой линии имеет вид

$$(\dot{q} + \Delta \dot{q})^2 = 2a_{qe}q, \quad (3.94)$$

где a_{qe} — параметр параболы.

Нижняя парабола — линия выключения. Ее уравнение будет

$$(\dot{q} - \Delta \dot{q})^2 = 2a_{qe}q. \quad (3.95)$$

Покажем, что все параболические (активные) участки фазовых траекторий имеют одинаковую длительность и все пассивные участки фазовых траекторий также обладают постоянной длительностью. Для этого обозначим через q_* дальность, которая соответствует $\dot{q}=0$ при условии непрерывного действия тяги (см. рис. 3.36). Ее величина

$$q_* = q_0 - \frac{\dot{q}_{00}^2}{2a_q} \quad (3.96)$$

легко находится из уравнения параболы при $q=0$. Тогда уравнение траектории корабля на фазовой плоскости будет

$$\dot{q}^2 = 2a_q(q - q_*). \quad (3.97)$$

Отсюда находим

$$q = \frac{\dot{q}^2}{2a_q} + q_*.$$

В момент включения тяги

$$q_{\text{вк}} = \frac{\dot{q}_{\text{вк}}^2}{2a_q} + q_*.$$

С другой стороны, из уравнения линии включения (3.94) имеем

$$q_{\text{вк}} = \frac{(\dot{q}_{\text{вк}} + \Delta \dot{q})^2}{2a_{qc}}.$$

Приравнявая выражения для $q_{\text{вк}}$ и решая полученное уравнение относительно $\dot{q}_{\text{вк}}$, находим

$$\dot{q}_{\text{вк}} = \frac{1}{a_{qc} - a_q} \{ a_q \Delta \dot{q} \pm (a_q a_{qc})^{1/2} [\Delta \dot{q}^2 + 2q_*(a_q - a_{qc})]^{1/2} \}.$$

Скорость изменения дальности в момент выключения тяги $\dot{q}_{\text{вык}}$ находится аналогичным образом

$$\dot{q}_{\text{вык}} = \frac{1}{a_{qc} - a_q} \{ -a_q \Delta \dot{q} \pm (a_q a_{qc})^{1/2} [\Delta \dot{q}^2 + 2q_*(a_q - a_{qc})]^{1/2} \}.$$

Следовательно, уменьшение скорости $\delta \dot{q}$ на активном участке равно

$$\delta \dot{q} = \dot{q}_{\text{вык}} - \dot{q}_{\text{вк}} = \frac{2a_q \Delta \dot{q}}{(a_q - a_{qc})}. \quad (3.98)$$

Так как радиальное ускорение на активном участке $a_q = \text{const}$, то, зная $\delta \dot{q}$, определим время $t_{\text{вк}}$ движения корабля с включенной тягой

$$t_{\text{вк}} = \frac{|\delta \dot{q}|}{a_q} = \frac{2\Delta \dot{q}}{(a_q - a_{qc})}. \quad (3.99)$$

Найдем теперь изменение дальности за время движения корабля с выключенной тягой. Точка 1 на рис. 3.37 соответствует моменту выключения двигателя.

Из уравнения линии выключения (3.95) для этой точки имеем

$$Q_1 = \frac{(\dot{Q} - \Delta\dot{Q})^2}{2a_{qc}},$$

где

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1.$$

Точка 2 находится на линии включения тяги и поэтому

$$Q_2 = \frac{(\dot{Q} + \Delta\dot{Q})^2}{2a_{qc}},$$

где

$$\dot{Q} = \dot{Q}_2 = Q_1.$$

Изменение дальности δQ будет

$$\delta Q = Q_1 - Q_2 = \frac{(\dot{Q} + \Delta\dot{Q})^2}{2a_{qc}} - \frac{(\dot{Q} - \Delta\dot{Q})^2}{2a_{qc}} - \frac{2\dot{Q}\Delta\dot{Q}}{a_{qc}}. \quad (3.100)$$

Время движения корабля на пассивном участке равно

$$t_{\text{рык}} = \frac{\delta Q}{\dot{Q}} = \frac{2\Delta\dot{Q}}{a_{qc}}.$$

Из полученного выражения и формулы (3.99) видно, что $t_{\text{рык}}$ и $t_{\text{вык}}$ не зависят от координат точек на линиях переключения и определяются лишь постоянными параметрами $\Delta\dot{Q}$ и a_{qc} . Следовательно, их значения для всех участков одинаковы. Практически это означает, что рабочий цикл двигателя, создающего радиальное ускорение корабля, является постоянным.

Представляет интерес выяснить, каким образом производится выбор основных параметров импульсного управления. В момент первого включения радиальной тяги

$$(\dot{Q}_{02} + \Delta\dot{Q})^2 = 2a_{qc}Q_{02},$$

откуда находим

$$a_{qc} = \frac{(\dot{Q}_{02} + \Delta\dot{Q})^2}{2Q_{02}}.$$

Поскольку величина $\Delta\dot{Q}$ не должна превышать допускаемой скорости сближения $\Delta\dot{Q}_d$ при малых дальностях, то

$$\Delta\dot{Q} \leq \Delta\dot{Q}_d.$$

В свою очередь $\Delta\dot{Q}_d$ определяется как зона нечувствительности при измерении скорости сближения.

Сравнивая уравнения парабол (3.94) или (3.95) с уравнением (3.97), замечаем, что параметр a_{qc} парабол переключения можно рассматривать как среднее радиальное ускорение за все время процесса сближения. Следовательно, полное время сближения t_k приближенно может быть найдено из отношения начальной скорости к параметру парабол — линий переключения, т. е.

$$t_k = \frac{\dot{q}_{0q}}{a_{qc}}.$$

Время цикла работы двигателя равно

$$t_{ц} = t_{вк} + t_{вык} = \frac{2\Delta\dot{q}}{(a_q - a_{qc})} + \frac{2\Delta\dot{q}}{a_{qc}} = \frac{2a_q\Delta\dot{q}}{a_{qc}(a_q - a_{qc})}.$$

Следовательно, общее число N циклов работы двигателя будет

$$N = \frac{t_k}{t_{ц}} = \frac{\dot{q}_{0q}(a_q - a_{qc})}{2a_q\Delta\dot{q}}.$$

Немаловажное значение при ручном управлении имеет длительность периодов включения и выключения импульсов тяги. Малая длительность создает неудобства для космонавта, принуждая его к частому включению и выключению двигателей. Управление угловой скоростью линии визирования $\dot{\psi}$ можно осуществлять постоянным ускорением a_ψ , определяемым согласно формуле (3.91). Поскольку радиальная тяга по величине не регулируется, пользоваться выражением (3.89) для вычисления $\dot{\psi}$ затруднительно. Правда, из этого выражения можно получить приближенное значение для $\dot{\psi}$, предполагая, что радиальное движение характеризуется в среднем ускорением a_{qc} . Однако лучше производить вычисление $\dot{\psi}$ по фактической зависимости дальности от времени.

Рассмотрим теперь возможные способы приборной реализации найденных законов управления вначале для случая непрерывной тяги, а затем для импульсной. В двухканальной схеме операция управления заключается в следующем. Космонавт обеспечивает ориентацию аппарата таким образом, чтобы свести к нулю угол γ между линией визирования и вектором радиальной тяги. Измерение этого угла производится радиолокатором [10], одновременно осуществляется ориентация корабля по крену. По окончании процесса угловой ориентации космонавт устанавливает номинальный уровень радиального ускорения a_{q1}^* , вычисляемый при предварительном анализе рассеивания траектории

сближения. Затем сравнивается номинальное ускорение с действительным значением ускорения, вычисляемого по формуле

$$a_{q1} = \frac{\dot{q}^2}{2q}.$$

На индикаторе фиксируется отклонение a_{q1} от a_{q1}^* . Уменьшение радиальной скорости сближения осуществляется управлением величиной ускорения a_{q2} по величине рассогласования

$$Cq^{1/2} - \dot{q}.$$

Величина рассогласования фиксируется на специальном индикаторе, устанавливаемом на пульте управления. Кроме того, имеется индикатор для контроля отклонения действительного значения угловой скорости линии визирования от значения, вычисляемого по формуле (3.89). Используя этот индикатор, космонавт включает двигатель, создающий нормальное ускорение a_{η} [10]. К вспомогательным относятся индикаторы для фиксации дальности q , скорости $\dot{q}$ и угла γ отклонения продольной тяги от линии визирования.

Важным параметром для оценки двухканальной схемы является требуемый диапазон дросселирования двигателя. Относительная степень дросселирования определяется по формуле

$$\Delta\mu = \frac{a_{q2}}{a_{q1}^* + a_{q2}}.$$

Здесь ускорение a_{q2} принимается равным своему максимальному значению. При поддержании μ на достаточно низком уровне степень дросселирования не превышает 10% [39].

В одноканальной схеме управление радиальной тягой производится так же, как и в двухканальной. Поддержание номинальной величины a_{q1}^* осуществляется по рассогласованию между измеренной скоростью $\dot{q}$ и требуемым законом ее изменения $\dot{q}_T$. Что же касается направления вектора тяги (относительно линии визирования), то оно устанавливается в соответствии с выражением

$$\operatorname{tg} \gamma_T = \frac{a_{\eta}}{a_q}.$$

Для малых углов γ_T используется приближенное выражение

$$\gamma_T = \frac{a_{\eta}}{a_q}.$$

При известных a_q и a_{η} данное выражение определяет угол γ , который должен поддерживаться системой ориентации.

Управление величиной a_θ производится следующим образом. Вначале устанавливается постоянное ускорение, величина которого вычисляется по формуле (3.91). Затем при дальности $q=0,2155q_0$ принимается переменное ускорение, величина которого задается формулой (3.92).

В связи с трудностями измерений $\dot{\theta}$ за порогом чувствительности переменное ускорение $a_\theta = 4\dot{q}_0$ определяется в соответствии с теоретической зависимостью

$$a_\theta = 4\dot{q}_n \dot{\theta}_n \left(\frac{q}{q_n} \right)^{\frac{5}{2}},$$

где q_n , $\dot{q}_n$ и $\dot{\theta}_n$ — значения q , $\dot{q}$ и $\dot{\theta}$ в момент переключения режима управления.

Эту зависимость можно представить также в другой форме

$$a_\theta = 4\dot{q}\dot{\theta} = 1,6\dot{q}_0 \dot{\theta}_0 \left(\frac{q}{q_0 0,1255} \right)^{\frac{5}{2}}.$$

Целесообразность переключения режима управления a_θ становится понятной, если учесть, что это позволяет свести a_θ к нулю, приведя тем самым продольную ось корабля к линии визирования во время подхода к станции для стыковки. Кроме того, переход к переменному нормальному ускорению облегчает управление величиной θ при низких уровнях $\dot{\theta}$.

Требуемый диапазон дросселирования двигателя в одноканальной схеме значительно больше, чем в двухканальной. Это объясняется тем, что тяга должна регулироваться не только для компенсации возмущений a_{q1}^* , вызванных $q\dot{\theta}^2$ и $q\ddot{\theta}$, но также и для компенсации уменьшения вектора радиального ускорения вследствие приложения вектора тяги под углом γ_T к линии визирования. Относительная степень дросселирования определяется как

$$\Delta\mu = \frac{a_{q1}(1 - \cos \gamma)}{a_{q1} + a_{q2}} + \frac{a_{q2}}{(a_{q1} + a_{q2})}.$$

Если предположить, что a_{q2} составляет $\frac{1}{9}$ от a_{q1} , то при угле $\gamma_T = 45^\circ$, когда $a_\theta = a_\gamma$, требуемая суммарная степень дросселирования составляет уже 36%. Считается, что при использовании одноканальной схемы в состав приборного оборудования могут быть включены вспомогательные индикаторы дальности, скорости изменения дальности и угловой скорости линии визирования.

В импульсном режиме закон управления радиальным ускорением может быть реализован с помощью осциллографического индикатора фазовой плоскости $q\dot{\theta}$ с нанесенными на ней ли-

ниями переключения [39]. Такой индикатор указывает на необходимость переключения двигателя и воспроизводит в любой момент времени состояние по дальности и скорости изменения дальности. Применение осциллографического индикатора позволяет выполнять все операции управления по радиальному каналу, не прибегая к помощи счетнорешающих устройств.

Закон управления угловой скоростью линии визирования (управление ускорением a_θ) может быть таким же, как и в случае непрерывной тяги в одноканальной схеме. Единственная трудность связана с тем, что изменение характера радиального ускорения становится другим и уравнение (3.89) оказывается непригодным. Значение θ для индикации вычисляется по уравнению

$$\dot{\theta} = \frac{1}{q^2} [q_0^2 \dot{\theta}_0 + \int a_\theta q dt].$$

Аналогичные исследования по выбору законов управления могут быть проведены и в пространственном случае сближения корабля со станцией.

ГЛАВА IV

Маневрирование при полетах к Луне

§ 4.1. ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТОВ К ЛУНЕ

Луна является ближайшим к Земле небесным телом. Поэтому вполне естественно, что полеты к Луне с целью ее исследования начались вскоре после запуска первого искусственного спутника Земли. Необходимость выполнения маневров, их количество и качество (интенсивность и точность) определяется конечной целью полета космического аппарата к Луне. Поэтому прежде всего рассмотрим основные задачи полета к Луне и соответствующие траектории.

Первой задачей является полет с целью попадания на Луну. В этом случае достаточно, чтобы конечный участок траектории пересекал поверхность Луны. При этом космический аппарат осуществляет «жесткую посадку», сближаясь с поверхностью Луны со скоростью порядка $2,5 \text{ км/сек}$. Подобная задача решалась в полетах первой советской космической ракеты, доставившей на Луну вымпел с гербом Советского Союза, а также американских космических кораблей типа «Рейнджер».

Дальнейшим развитием этой задачи является полет на Луну с выполнением мягкой посадки на ее поверхность. Впервые эта задача решена советской автоматической станцией «Луна-9», совершившей 3 февраля 1966 г. мягкую посадку. Одновременно при этом выполнялись исследования лунной поверхности в районе посадки, результаты которых наряду с большим общенаучным значением сыграли значительную роль в последующих полетах к Луне.

Важнейшей задачей является также полет с целью облета Луны по незамкнутой селеноцентрической (относительно Луны) орбите. При этом возможны облеты как со стороны Луны, обращенной к Земле, так и с обратной стороны. Облет может быть однократным и многократным, на произвольном и заданном расстоянии (высоте) от поверхности Луны. Впервые облет Луны по незамкнутой селеноцентрической орбите был осуществлен в сентябре 1959 г. автоматической станцией «Луна-3». При этом

производилось фотографирование обратной стороны Луны. В результате были составлены первые карты невидимой с Земли части лунной поверхности.

Естественно, что требования к точности выдерживания заданной траектории различны при решении указанных выше задач облета. Решение задачи многократного облета Луны на заданном (сравнительно близком) расстоянии от ее поверхности требует значительно большей точности выдерживания траектории полета. Возможны варианты таких облетов с посадкой на Землю. В этом случае космический аппарат может быть пилотируемым. Такие облеты наряду с исследовательскими целями в ходе подготовки к полету человека на Луну могут применяться в будущем после освоения человеком Луны и создания на ней разного рода станций для решения задач снабжения. В этом случае необходимые грузы в специальной посадочной капсуле будут отделяться от космического аппарата в районе перигентра селеноцентрической орбиты и выполнять мягкую посадку, а сам аппарат возвращаться на Землю.

Наиболее сложным является полет космического аппарата для проведения длительных и всесторонних исследований Луны и последующего возвращения на Землю. Решение этой задачи предполагает выход космического аппарата на замкнутую селеноцентрическую орбиту (близкую к круговой), посадку на поверхность Луны, взлет и возвращение на Землю. Возможен также упрощенный вариант, без посадки на лунную поверхность. В этом случае решается задача длительной разведки лунной поверхности в процессе полета по замкнутой селеноцентрической орбите. Космический аппарат, предназначенный для этой цели, может быть пилотируемым и беспилотным. В последнем варианте посадка на Землю не является обязательной.

Считается, что в посадочном варианте посадку на поверхность Луны должен совершать не весь аппарат, а специальный лунный корабль, оснащенный помимо двигателей системы посадки стартовым ракетным двигателем для последующего взлета. Примерная схема такого полета, которая использовалась в полете корабля «Аполлон-11», показана на рис. 4.1. Лунный корабль отделяется от основной части космического аппарата, которую будем в дальнейшем называть базовым кораблем. Под действием тяги управляющего двигателя лунный корабль выполняет импульсный маневр схода с круговой селеноцентрической орбиты. В перигентре полученной переходной орбиты, расположенном в районе посадки, начинается тормозящий посадочный маневр, обеспечивающий уменьшение скорости лунного корабля к моменту его контакта с поверхностью Луны до безопасной величины. После выполнения программы научных исследований лунный корабль с помощью стартового ракетного двигателя выводится на орбиту базового корабля и встречается с ним на орбите. Затем космический аппарат стартует с круговой

селеноцентрической орбиты для возвращения на Землю. Такая схема позволяет уменьшить первоначальную стартовую массу (в момент старта с Земли) всего космического комплекса примерно в 2,5 раза по сравнению с тем, когда весь космический аппарат выполняет посадку на поверхность Луны, так как в последнем случае потребуется дополнительный расход топлива на

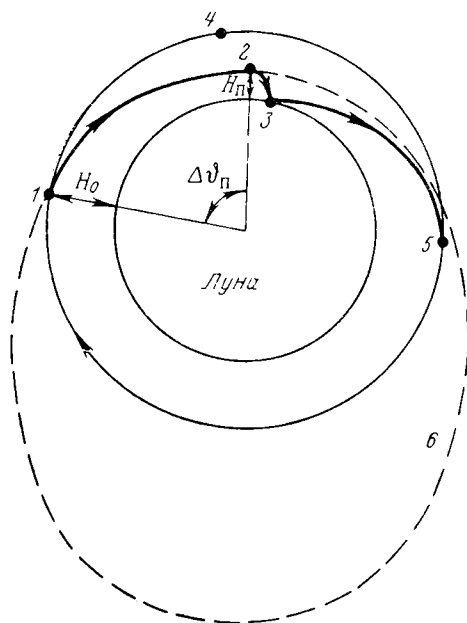


Рис. 4.1. Схема полета с посадкой на поверхность Луны:

1—точка схода лунного корабля с орбиты ожидания; 2—перигеи переходной орбиты снижения; 3—точка посадки на лунную поверхность; 4—положение базового корабля в момент посадки лунного корабля; 5—встреча лунного корабля с базовым на орбите ожидания; б—эллипс снижения

торможение при посадке и разгон при взлете массы базового корабля с ракетным двигателем для обратного полета к Земле. В результате значительно возрастает требуемая масса полезной нагрузки ракеты-носителя, осуществляющей выведение космического аппарата на траекторию полета к Луне. Это, в свою очередь, приводит к соответствующему увеличению массы ракеты-носителя.

С учетом вышеизложенного, используя понятие сферы действия Луны (см. § 1.3) по отношению к Земле, можно выделить следующие основные фазы полета:

- 1) полет по геоцентрической траектории;
- 2) полет по селеноцентрической траектории;
- 3) полет по геоцентрической траектории.

Первая и вторая фазы имеют место в любой за-

даче полета к Луне. При выполнении задач облета как по разомкнутой, так и по замкнутой орбитам используются все три фазы полета.

Первая фаза полета включает в себя:

— выведение космического аппарата со стартовым двигателем на промежуточную круговую орбиту спутника Земли;

— маневр старта космического аппарата с орбиты спутника Земли;

— полет по орбите (точнее орбитам) перелета к Луне, в процессе которого выполняется несколько корректирующих маневров.

В виде исключения при решении задачи попадания на Луну космический аппарат может непосредственно выводиться на орбиту перелета. Выполнение корректирующих маневров также не всегда обязательно.

Полет в сфере действия Луны (вторая фаза) всегда начинается с селеноцентрической гиперболы, так как входная скорость космического корабля при любой орбите перелета больше второй космической скорости. В этом нетрудно убедиться на примере орбиты перелета (рис. 4.2), соответствующей минимально возможной скорости входа в сферу действия Луны. Орбита представляет собой эллипс, который в перигее касается земной сферы, а в апогее — орбиты Луны, которую будем считать круговой с радиусом $r_L = 384\,400$ км.

Вход в сферу действия Луны достигается за счет того, что последняя догоняет космический аппарат, когда он находится в апогее орбиты перелета. Большая полуось такой орбиты будет

$$a = \frac{r_L + R}{2} \approx 3,78 \cdot 10^5 \text{ км.}$$

Тогда из равенства (1.20) находим скорость в апогее $V_a \approx 0,2$ км/сек. Так как в данном случае векторы скоростей Луны и космического аппарата коллинеарны, космический аппарат входит в сферу действия Луны со скоростью

$$V_{вх} = V_L - V_a = 0,8 \text{ км/сек.}$$

Учитывая, что вторая космическая скорость для поверхности Луны составляет 2,36 км/сек, а радиус Луны $R_L = 1740$ км, вторая космическая скорость на границе сферы действия будет $V_{II} \approx 2,36 \cdot 1740 / 66\,000 \approx 0,4$ км/сек. Следовательно, $V_{вх} > V_{II}$. Заметим, что рассмотренная схема перелета на практике реализована быть не может, так как космический аппарат войдет в сферу действия Луны раньше, чем достигнет апогея. При этом геоцентрическая скорость аппарата будет несколько больше, но будет направлена под значительным углом к вектору орбитальной скорости Луны и величина скорости входа будет примерно такой же.

Рассмотренная орбита перелета является энергетически наиболее выгодной, так как соответствует эллипсу Хомана. В этом ее основное достоинство. Однако подобная или близкая к ней

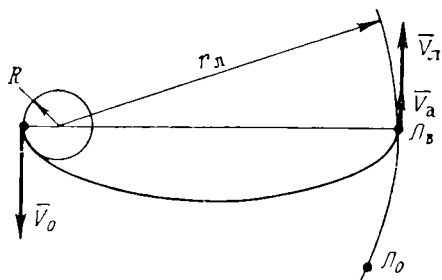


Рис. 4.2. Орбита перелета с минимальной энергией:

L_0 —положение Луны в момент старта космического аппарата; L_B —положение Луны в момент встречи с космическим аппаратом

орбита имеет ряд существенных недостатков. Во-первых, эта орбита находится в плоскости лунной орбиты. Угол наклона последней к плоскости экватора периодически изменяется; его максимальная величина около 28° . Следовательно, компланарный перелет возможен лишь в том случае, когда точка старта располагается в диапазоне широт, не превышающем 28° . Во-вторых, при полете по такой орбите космический аппарат длительное время движется вблизи сферы действия Луны и орбита перелета подвержена сильному возмущающему воздействию. Поэтому при решении задачи многократного облета Луны такая орбита является неустойчивой [17]. Кроме того, в данном случае для перелета потребуется сравнительно высокая точность выполнения маневра при старте с орбиты спутника. В этом нетрудно убедиться с помощью следующей несложной оценки.

Для захвата космического аппарата полем тяготения Луны и облета ее на произвольном расстоянии по гиперболической орбите необходимо, чтобы ошибка в радиусе апогея r_a не превышала радиус сферы действия Луны $R_L = 66\,000$ км. Учитывая, что $r_a \approx 384\,400$ км, получим максимальную относительную ошибку 0,171. На основании правила трех сигм допустимая среднеквадратическая ошибка будет $\sigma_d = 0,057$. Эта ошибка появляется в результате ошибок большой полуоси a_n и эксцентриситета e_n орбиты перелета, которые, в свою очередь, определяются ошибками начальных параметров (координат, скорости и ее направления). Полагая, что космический аппарат стартует с промежуточной орбиты спутника Земли, можно пренебречь ошибками координат, так как они могут быть вычислены с большой точностью. Для простоты ошибками в направлении вектора скорости также будем пренебрегать. Тогда на основании выражений (1.11) и (1.14) имеем

$$\begin{aligned}\delta\bar{a} &= b_{14}\delta\bar{V}_0, \\ \delta e &= b_{24}\delta\bar{V}_0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Здесь $\delta\bar{a}$ и $\delta\bar{V}_0$ — относительные ошибки большой полуоси и начальной скорости;
 δe — ошибка эксцентриситета.

$$b_{14} = \frac{2v_0^2}{2 - v_0^2}, \quad b_{24} = 2v_0^2.\tag{4.2}$$

где v_0 — отношение номинального значения начальной скорости V_0 к соответствующему значению первой космической скорости V_I на данной высоте.

Из выражений (4.1) следует, что коэффициент корреляции между случайными центрированными ошибками $\delta\bar{a}$ и δe равен единице.

Подставляя в уравнение (1.19) $\vartheta = \pi$, получим радиус в апогее орбиты перелета

$$r_a = a_n(1 + e_n), \quad (4.3)$$

где

$$e_n = \frac{r_L - R}{r_L + R} = 0,96 b.$$

Применяя метод линеаризации к равенству (4.3), получим выражение для среднеквадратической ошибки радиуса апогея

$$\sigma_{r_a}^2 = (1 + e)^2 \sigma_a^2 + 2(1 + e) \sigma_a \sigma_e + \sigma_e^2,$$

или с учетом выражений (4.1)

$$\sigma_{r_a}^2 = [(1 + e)^2 b_{14}^2 + 2(1 + e) b_{14} b_{24} + b_{24}^2] \sigma_V^2.$$

Полагая $\sigma_{r_a} = \sigma_d$, находим допустимую среднеквадратическую ошибку начальной скорости

$$\sigma_V^2 = \frac{\sigma_d^2}{(1 + e)^2 b_{14}^2 + 2(1 + e) b_{14} b_{24} + b_{24}^2}. \quad (4.4)$$

Производя необходимые расчеты по формулам (4.2), находим $b_{14} \approx 116$, $b_{24} \approx 4$. Подставляя эти значения, а также найденные выше величины e и σ_d в выражение (4.4), получим $\sigma_V \approx 0,7 \cdot 10^{-4}$. Так как в данном случае начальная скорость, которую нетрудно вычислить по формуле (1.20) после подстановки $a = a_n$ и $r \approx R$, составляет примерно 11 км/сек, то абсолютное значение среднеквадратической ошибки начальной скорости будет 0,77 м/сек, а максимальная ошибка не должна превышать 2,3 м/сек. Заметим, что эти требования к точности выдерживания начальной скорости получены при произвольной высоте облета. Если наложить соответствующие ограничения, которые в реальных условиях всегда имеют место, то указанные требования будут еще более жесткими.

С увеличением радиуса апогея орбиты перелета требования к точности выдерживания начальной скорости снижаются. По этой причине для простого попадания на Луну с использованием некорректируемой траектории полета рекомендуется [17] использовать параболические и даже гиперболические орбиты. При этом максимальная допустимая ошибка начальной скорости составляет 50 м/сек.

При решении задачи облета Луны необходимо обеспечить возвращение космического аппарата к Земле. Поэтому в подобных случаях применяются эллиптические орбиты, но с существенным превышением радиуса апогея над радиусом лунной орбиты. При этом, как правило, используются орбиты, имеющие значительный наклон к плоскости орбиты Луны. Характер получаемой при этом траектории показан на рис. 4.3.

Непосредственный облет Луны может осуществляться по одной из шести орбит, показанных на рис. 4.4*. Траектории I типа называются *охватывающими*. Для них характерны малая высота перигея и большой поворот вектора скорости на границе сферы действия Луны. Траектории II и III типа называются *прострельными* и характеризуются сравнительно небольшим поворотом вектора скорости, а также большой высотой перигея. Так как при облете основной целью является наибольшее сбли-

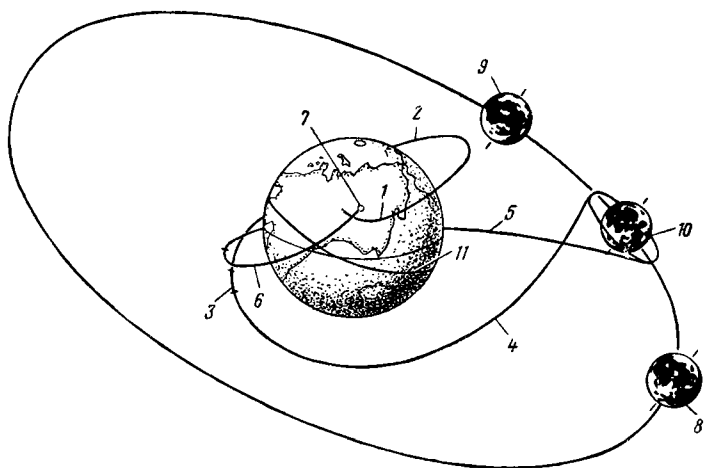


Рис. 4.3. Траектория облета Луны:

1—взлет; 2—орбита ожидания; 3—активный участок полета к Луне; 4—орбита перелета; 5—орбита обратного полета; 6—ход в атмосферу; 7—посадка; 8—положение Луны в момент старта; 9—положение Луны в момент посадки; 10—перигея селеноцентрической орбиты облета; 11—плоскость орбиты Луны

жение с Луной, охватывающие траектории более предпочтительны, однако при этом повышаются требования к параметрам (скорость и угол ее наклона к лунному горизонту) в точке входа в сферу действия Луны. Траектория 1б обеспечивает облет на нисходящей ветви эллипса и требует значительно большего времени полета.

Интересно отметить [17], что при существенном превышении апогея орбиты перелета относительно радиуса лунной орбиты начальные участки селеноцентрических траекторий облета близки к параллельным прямым (рис. 4.5). При этом геометрическое место возможных точек входа располагается на поверх-

* Изломы на рис. 4.4 отражают переход от геоцентрических координат к селеноцентрическим за счет векторного сложения входной геоцентрической скорости со скоростью Луны. В действительности траектория изломов не имеет, а происходит плавный переход от движения по геоцентрической к движению по селеноцентрической орбите.

ности, составляющей примерно половину сферы действия. Угол Φ поворота вектора селеноцентрической скорости зависит от величины l — расстояния от центра Луны до касательной к траектории в точке входа в сферу действия и величины скорости входа $|V_{вх}|$. Соответствующая зависимость представлена графиками на рис. 4.6.

При выборе орбиты перелета в задаче облета Луны по круговой селеноцентрической орбите необходимо учитывать такие

факторы, как выход на заданную высоту над поверхностью Луны и получение возможно меньшей скорости в перигеуме гиперболической орбиты. Последнее обеспечивает снижение расхода топлива на выполнение маневра орбитального перехода с гиперболической орбиты на круговую. Поэтому в указанных задачах также целесообразно использо-

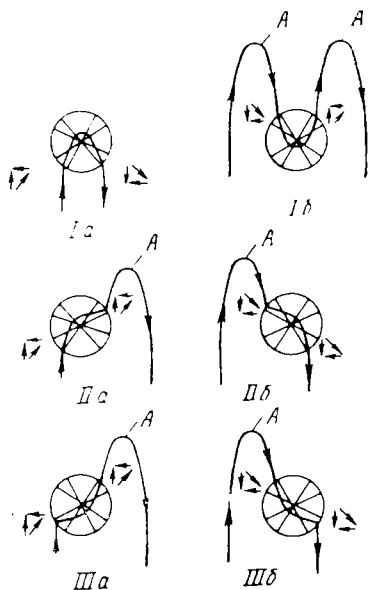


Рис. 4.4. Схемы возможных траекторий облета Луны:

4—апогей; I—охватывающие траектории; II и III—простральные траектории

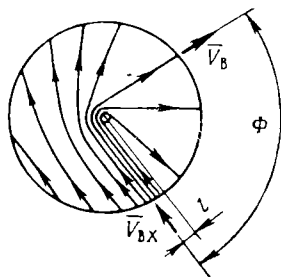


Рис. 4.5. Семейство траекторий облета

вать эллиптические траектории. Поскольку круговая орбита (а следовательно, и перигеум гиперболической орбиты) должна располагаться на небольшой высоте над лунной поверхностью, необходимо использовать охватывающие траектории. Примерная схема траектории с выходом на круговую селеноцентрическую орбиту и посадкой на поверхность Луны показана на рис. 4.7. Наклонение орбиты перелета в данном случае необходимо выбирать с таким расчетом, чтобы траектория не пересекала пояса радиации (или пересекала на возможно меньшем участке).

После выполнения необходимых исследований на поверхности Луны и перехода членов экспедиции в базовый корабль (в пилотируемом варианте) последний стартует с круговой

селеноцентрической орбиты облета и переходит на гиперболическую орбиту. Момент старта, а также величина и направление

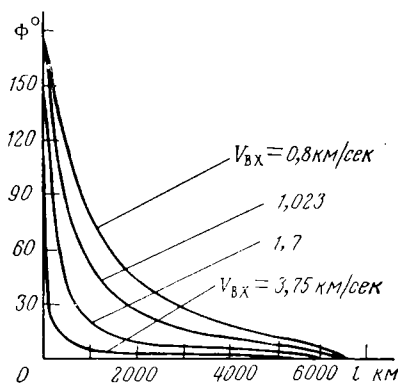


Рис. 4.6. Изменение угла поворота вектора селеноцентрической скорости

импульса выбираются с таким расчетом, чтобы обеспечить выход по гиперболической орбите в определенную точку сферы действия с требуемой селеноцентрической скоростью. При этом космический аппарат приобретает нужную выходную скорость, которая определяет орбиту обратного перелета к Земле. Определение указанных параметров производится в обратном порядке. Прежде всего, исходя из требований к посадке в заданный район земной поверхности, определяется положение и высота перигея орбиты перелета, ее

наклонение и долгота восходящего узла. Большая полуось и эксцентриситет этой орбиты могут быть приняты такими же, как и у орбиты перелета к Луне. После этого определяется точка

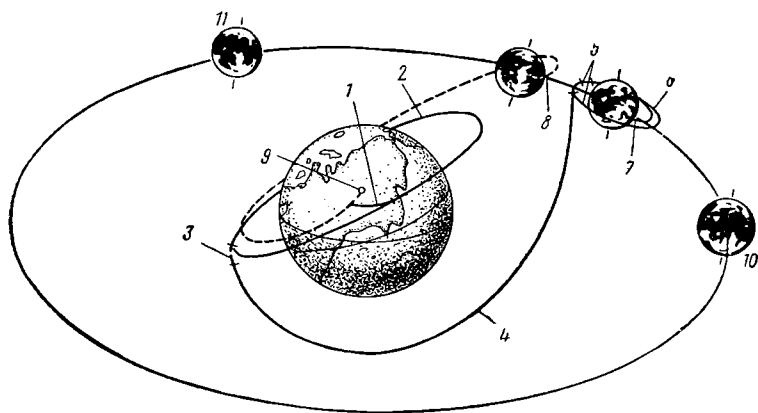


Рис. 4.7. Траектория полета с выходом на орбиту спутника Луны и посадкой ее на поверхность:

1—взлет; 2—орбита ожидания; 3—активный участок полета к Луне; 4—орбита перелета; 5—орбита спутника Луны; 6—перигей селеноцентрической орбиты; 7—сход с орбиты спутника и посадка; 8—старт с лунной поверхности; 9—посадка; 10—положение Луны в момент старта; 11—положение Луны в момент посадки

выхода космического аппарата из сферы действия Луны и требуемый вектор выходной скорости аналогично определению точки входа и вектора входной скорости. Зная селеноцентрические

координаты точки входа, а также вектор скорости космического аппарата в этой точке, нетрудно определить элементы гиперболической орбиты и необходимые условия старта с орбиты спутника Луны.

§ 4.2. ХАРАКТЕРИСТИКА МАНЕВРОВ ПРИ ПОЛЕТЕ К ЛУНЕ

При решении всех описанных выше задач полета к Луне, за исключением простого попадания с «жесткой» посадкой в произвольную точку лунной поверхности, космический аппарат выполняет различные маневры. Прежде всего это маневр старта с орбиты спутника Земли, который обеспечивает переход космического аппарата на орбиту перелета к Луне. После вывода



Рис. 4.8. Схема перелета к Луне:
 J_y — упрежденная точка; В — точка входа космического аппарата
 в сферу действия Луны

с помощью ракеты-носителя космического аппарата с ракетой-ускорителем на околокруговую орбиту* спутника Земли и уточнения элементов этой орбиты с помощью наземного измерительно-вычислительного комплекса производится окончательное определение момента включения двигателя ракеты-ускорителя. Последний выбирается из условия совпадения упрежденной точки на орбите Луны с плоскостью орбиты космического аппарата. Под упрежденной точкой понимается точка, в которой будет находиться Луна при подлете к ней (точнее при входе в ее сферу действия) космического аппарата (рис. 4.8).

Вектор импульса, создаваемого ракетой-ускорителем, должен удовлетворять следующему равенству:

$$J_p = \bar{V}_0 - \bar{V}_{оп}, \quad (4.5)$$

где $\bar{V}_0$ — вектор начальной скорости орбиты перелета;
 $\bar{V}_{оп}$ — вектор скорости в точке промежуточной орбиты, соответствующей включению двигателя ракеты-ускорителя.

* Например, в полете станции «Луна-9» использовалась орбита с высотой: в перигее 173 км и в апогее 224 км (эксцентриситет примерно 0,004) и наклонением 52° .

В первом приближении можно полагать, что скорость V_0 равна скорости $V_{п.п}$ в перигее орбиты перелета, а скорость $V_{оп}$ — первой космической скорости $V_{Iп}$ для средней высоты околокруговой промежуточной орбиты. Тогда векторы $\bar{V}_0$ и $\bar{V}_{оп}$ можно считать коллинеарными и равенство (4.5) аналогично записывается в скалярной форме.

Ошибки в величине и направлении разгоняющего импульса приводят к соответствующим ошибкам вектора начальной скорости. Вообще говоря, последние зависят также от ошибок в величине и направлении вектора $\bar{V}_{оп}$, а также от ошибок координат точки включения ракеты-ускорителя. Однако, учитывая, что эти параметры определяются достаточно точным наземным комплексом, ими можно пренебречь. Полагая ошибки: в величине импульса δJ_p и в направлении приложения вектора J_p по отношению к вектору $\bar{V}_{оп}$ в вертикальной плоскости α и в плоскости горизонта γ — малыми, можно получить следующие приближенные выражения для ошибок в величине и направлении начальной скорости орбиты перелета:

$$\delta V_0 = \delta J_p,$$

$$\delta \theta_0 = \frac{J_p}{V_0} \alpha,$$

$$\delta \beta_0 = \frac{J_p}{V_0} \gamma.$$

После подстановки равенства (4.5) в скалярной форме с учетом сделанного выше предположения относительно скоростей V_0 и $V_{оп}$ получим

$$\delta \bar{V}_0 = \delta \bar{J}_p, \quad \delta \theta_0 = \frac{v_0 - 1}{v_0} \alpha, \quad \delta \beta_0 = \frac{v_0 - 1}{v_0} \gamma,$$

где

$$\delta \bar{V} = \frac{\delta V}{V_0}, \quad \delta \bar{J} = \frac{\delta J}{V_0}, \quad v_0 = \frac{V_0}{V_{Iп}}.$$

Как показано в работе [2], при выводе космического аппарата в точку перигея орбиты ошибка $\delta \theta_0$ в первом приближении не приводит к ошибкам элементов орбиты. Поэтому указанной ошибкой будем пренебрегать. Выражения для среднеквадратических значений двух других ошибок (считаем их центрированными) примут вид

$$\sigma_V = \sigma_J, \quad \sigma_\beta = \frac{(v_0 - 1)}{v_0} \sigma_\gamma.$$

Используя полученные в работе [2] выражения для ошибок элементов орбиты и учитывая, что в данном случае (вывод в точку перигея) коэффициенты b_{14} и b_{24} определяются формулами (4.2),

получим следующие формулы для расчета среднеквадратических ошибок элементов орбиты перелета:

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \frac{2v_0}{2-v_0^2} \sigma_J, \\ \sigma_e &= 2v_0^2 \sigma_J, \\ \sigma_\omega &= \left| \frac{\operatorname{tg} \varphi_0 \sin \beta_0}{\cos^2 \beta_0 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0} \right| \frac{v_0-1}{v_0} \sigma_\gamma, \\ \sigma_i &= \left| \frac{\cos \varphi_0 \cos \beta_0}{\sqrt{1-\cos^2 \varphi_0 \sin^2 \beta_0}} \right| \frac{v_0-1}{v_0} \sigma_\gamma, \\ \sigma_\Omega &= \frac{|\sin \varphi_0|}{\cos^2 \beta_0 + \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \beta_0} \frac{v_0-1}{v_0} \sigma_\gamma.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Для орбит перелета $2-v_0^2 \ll 1$. Поэтому ошибка большой полуоси на один-два порядка больше ошибки эксцентриситета при одном и том же значении ошибки в величине разгоняющего импульса.

Оценим характер влияния ошибок элементов орбиты перелета на точку входа космического аппарата в сферу действия Луны (см. рис. 4.8). Ошибки большой полуоси, эксцентриситета и аргумента перигея приводят к смещению точки входа относительно заданной в плоскости расчетной орбиты. Ошибка наклона вызывает перемещение точки B по кривой, близкой к дуге окружности, центр которой находится на линии, соединяющей центр Земли с упрежденной точкой на орбите Луны. Вследствие ошибки в долготе восходящего узла точка B смещается в плоскости, параллельной экваториальной (приближенно можно считать эту плоскость параллельной плоскости лунной орбиты).

Используя выражения (4.6), можно оценить максимальное рассеивание. Рассеивание точки входа в плоскости орбиты перелета можно характеризовать ошибкой $\delta\varphi$ угла φ_B (рис. 4.9). Величина этого угла на основании теоремы синусов будет

$$\sin \varphi_B = \frac{r_B}{R_{*Л}} \sin v_B.$$

Отсюда *, представляя $\varphi_B = \varphi_{B0} + \delta\varphi$,

$$\cos \varphi_{B0} \delta\varphi = \frac{\sin \vartheta_{B0}}{R_{*Л}} \delta r_B + \frac{r_{B0}}{R_{*Л}} \cos \vartheta_{B0} \delta \vartheta. \quad (4.7)$$

Ошибка δr_B определяется дифференцированием выражения (1.9) с учетом равенства (1.13), которое в точке входа имеет вид

$$r_B = \frac{a_n (1 - e_n^2)}{1 + e_n \cos \vartheta_B}.$$

* Индексом «0» отмечены номинальные значения параметров.

В результате имеем

$$\delta r_n = r_n \delta \bar{a} - a_n \frac{2e_n + (e_n^2 + 1) \cos \vartheta_n}{(1 + e_n \cos \vartheta_n)^2} \delta e + \\ + r_n \frac{e_n \sin \vartheta_n}{1 + e_n \cos \vartheta_n} \delta \vartheta.$$

После подстановки этого соотношения и предыдущего равенства в выражение (4.7), учитывая, что $\delta\vartheta \cong \delta\omega$, находим

$$\delta\varphi = c_{1\varphi}\delta\bar{a} - c_{2\varphi}\delta e + c_{3\varphi}\delta\omega,$$

где

$$\begin{aligned} c_{1\varphi} &= \frac{r_{\text{B}0}}{R_{*J1}} \left(\frac{\sin \vartheta_{\text{B}0}}{\cos \varphi_0} \right); \\ c_{2\varphi} &= \frac{r_{\text{B}0}^2}{a_n R_{*J1}} \left(\frac{2e_n + (1 + e_n^2) \cos \vartheta_{\text{B}0}}{(1 - e_n^2)^2 \cos \varphi_0} \right) \sin \vartheta_{\text{B}0}; \\ c_{3\varphi} &= \frac{r_{\text{B}0}}{R_{*J1}} \left[\frac{r_{\text{B}0}}{a_n} \frac{e_n \sin^2 \vartheta_{\text{B}0}}{(1 - e_n^2) \cos \varphi_0} + \frac{\cos \vartheta_{\text{B}0}}{\cos \varphi_0} \right]. \end{aligned}$$

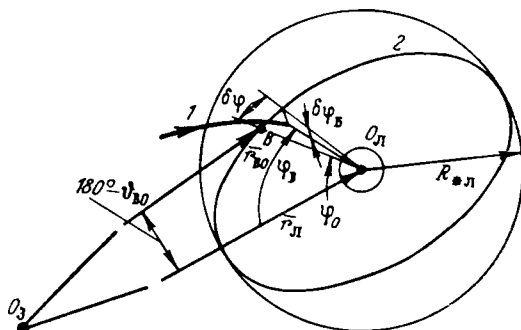


Рис. 4.9. Геометрия входа космического аппарата в сферу действия Луны:

1—орбита перелета; 2—сечение сферы действия
плоскостью расчетной орбиты перелета

Здесь $\cos \varphi_0$ на основании треугольника $O_3 BO_L$ (см. рис. 4.9) определяется формулой

$$\cos \varphi_0 = \frac{r_{\text{П}}^2 + R_{* \text{П}}^2 - r_{\text{В0}}^2}{2R_{* \text{П}}r_{\text{П}}}.$$

Так как случайные ошибки δa и δe имеют коэффициент корреляции, равный единице, а $\delta \omega$ можно считать независимой, то

выражение для среднеквадратической ошибки угла φ с учетом соответствующих формул (4.6) может быть записано в виде

$$\sigma_{\varphi} = \sqrt{4v_0^4 \left[\frac{c_{1\varphi}^2}{(2-v_0^2)^2} + \frac{c_{1\varphi}c_{2\varphi}}{2-v_0^2} + c_{2\varphi}^2 \right] \sigma_J^2 + \left(c_{3\varphi}b_{46} \frac{v_0-1}{v_0} \right)^2 \sigma_T^2}.$$

Ошибки наклона и долготы восходящего узла приводят к боковым смещениям $\delta\varphi_5 = \delta\varphi_{51}(\delta i) + \delta\varphi_{52}(\delta\Omega)$ точки B по направлению, перпендикулярному плоскости расчетной орбиты. Из приведенной выше качественной оценки влияния ошибки наклона орбиты перелета следует, что

$$\delta\varphi_{51} \simeq \delta i.$$

Ошибка $\delta\Omega$ приводит к отклонению точки B от расчетной на величину

$$\delta l_6 \simeq r_{*л} \delta\Omega,$$

в результате появляется угловая ошибка

$$\delta\varphi_{52} \simeq \frac{\delta l_6}{R_{*л}} = \frac{r_{*л}}{R_{*л}} \delta\Omega.$$

Так как $r_{*л}/R_{*л} \gg 1$, а δi и $\delta\Omega$ являются величинами примерно одного порядка, то ошибкой $\delta\varphi_{51}$ можно пренебречь. В результате с учетом соответствующего выражения (4.6) получим следующую приближенную формулу для оценки среднеквадратической величины бокового смещения:

$$\sigma_{\text{об}} = \frac{r_{*л}(v_0-1)}{R_{*л}v_0} \frac{|\sin \varphi_0|}{\cos^2 \beta_0 + \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \beta_0} \sigma_T.$$

Оценка рассеивания точки входа космического аппарата в сферу действия Луны позволяет сделать заключение о необходимости выполнения корректирующих маневров в процессе перелета для каждой конкретной задачи. Подобные маневры необходимы лишь в том случае, если максимальное отклонение точки входа от расчетной, характеризуемое тремя среднеквадратическими ошибками, превышает допустимое отклонение. Например, при полете станции «Луна-2», предназначенной для простого попадания на Луну, использовалась гиперболическая орбита перелета, которая значительно меньше, чем эллиптическая, чувствительна к ошибкам начальных параметров.

Кроме того, при этом допускаются сравнительно большие отклонения точки входа от расчетной, так как объектом попадания являлась Луна в целом. Поэтому в указанном полете необ-

ходимость в корректирующих маневрах отсутствовала. Другое дело — полет станции «Луна-9». Во-первых, для уменьшения скорости у поверхности Луны до величины около 2600 м/сек, которую должен был погасить тормозной двигатель системы посадки, для перелета использовалась эллиптическая орбита. Во-вторых, ставилась задача попадания в определенный ограниченный район лунной поверхности (равнинная часть Океана Бурь), что накладывало более жесткие требования на точность выдерживания расчетной точки входа в сферу действия Луны. Поэтому в процессе перелета выполнялся один корректирующий маневр.

Спустя примерно сутки после выведения автоматической станции «Луна-9» на орбиту перелета (в ночь с 31.01 на 1.02.66 г.) с помощью наземного измерительно-вычислительного комплекса было установлено, что станция движется по орбите, удаленной от центра Луны на расстояние около 10 000 км. На основании этих данных и расчетного положения точки входа в сферу действия была определена и передана на борт информация о величине и направлении корректирующего импульса, которая позволила осуществить настройку системы управления.

По радиокоманде с Земли была включена автоматическая программа выполнения маневра. Вначале станция с помощью специальной системы управления ориентировалась на Солнце. Затем при сохранении этой ориентации был осуществлен оптический поиск Луны с последующей ориентацией оси системы астроориентации в направлении на Луну. Корпус станции занимал такое положение, чтобы ось двигателя была направлена под нужным углом к оптической оси системы астроориентации, а следо вательно, и к скорости полета. После выполнения указанной ориентации (в 22 часа 29 мин) был включен двигатель. Величина корректирующего импульса составила 71,2 м/сек. При этом требовалась довольно высокая точность выдерживания заданной величины и направления скорости станции после приложения корректирующего импульса, так как ошибки в величине 0,1 м/сек или отклонение от требуемого направления скорости в плоскости, перпендикулярной направлению на Луну, на угол 1' приводят к отклонению вдоль лунной поверхности в 10—15 км.

При решении задачи облета Луны (рис. 4.10) с заданными значениями минимальной H_1 и максимальной H_2 высот над определенной точкой лунной поверхности возможно целое семейство селеноцентрических орбит облета в пределах области, ограниченной двумя предельными гиперболами вращения. Сечение этой области плоскостью, проходящей через центр Луны, показано на рис. 4.10. Внутренний гиперболоид соответствует скорости V_1 на высоте H_1 , а внешний — скорости $V_2 > V_1$ на высоте $H_2 > H_1$. В результате на сфере действия образуется полоса в виде кольца шириной

$$2\Delta\varphi = \vartheta_{1*} - \vartheta_{2*}.$$

Ось гиперboloидов и соответствующего кольца на сфере действия располагается под некоторым углом к линии Земля — Луна. Поэтому выход за пределы кольца возможен как за счет продольных $\delta\varphi$, так и боковых $\delta\varphi_0$ ошибок. Эквивалентная радиальная среднеквадратическая ошибка в предположении кругового рассеивания точки входа будет

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_\varphi^2 + \sigma_{\varphi_0}^2}.$$

Истинная аномалия ϑ_* точки гиперболической орбиты, в перигентре которой, расположенном на высоте H , космический

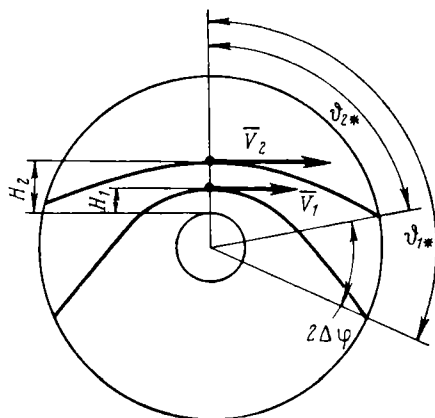


Рис. 4.10. Облет Луны в заданном диапазоне высот

аппарат имеет скорость V , может быть найдена следующим образом. Применяя уравнение (1.16) к точке входа и перигентру, а также выражение (1.34) к перигентру, имеем

$$r = R_{\text{Л}} + H = \frac{p}{1 + e},$$

$$R_{*\text{Л}} = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta_*},$$

$$V^2 = V_{\text{Л}}^2 R \left(\frac{2}{r} + \frac{e^2 - 1}{p} \right).$$

На основании трех приведенных равенств получим

$$\cos \vartheta_* = \frac{r^2 V^2 - R_{*\text{Л}} \mu_{\text{Л}}}{(r V^2 - \mu_{\text{Л}}) R_{*\text{Л}}},$$

или

$$\cos \vartheta_* = - \frac{R_{*\text{Л}} - 2v^2}{R_{*\text{Л}}(v^2 - 1)}. \quad (4.8)$$

Найденная зависимость ϑ_* от v для нескольких значений r представлена на рис. 4.11. Задаваясь конкретными значениями H_1 (или r_1), V_1 и H_2 (или r_2), V_2 можно по графикам или формуле (4.8) оценить значения ϑ_{1*} и ϑ_{2*} , а также соответствующей величины $\Delta\varphi$. Из графиков видно, что при жестких требованиях к высоте H (малое значение $H_2 - H_1$) $\Delta\varphi$ имеет очень малые значения. Это, в свою очередь, налагает жесткие требования на

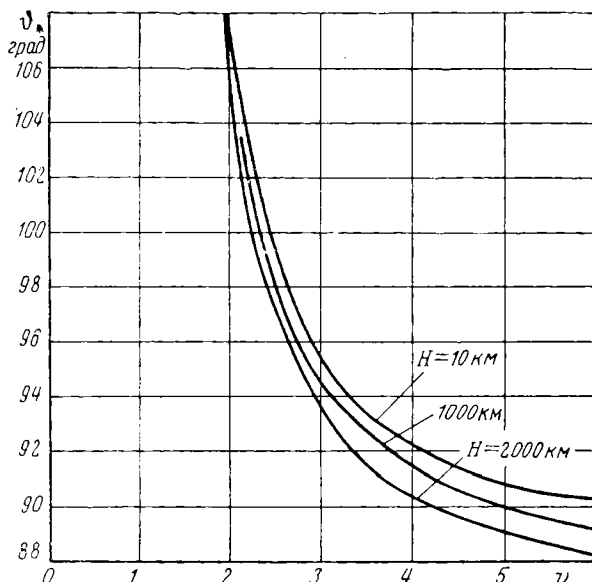


Рис. 4.11. Зависимости истинной аномалии точки входа в сферу действия от скорости

отклонения точки входа в сферу действия в плоскости орбиты. Если учесть радиус q_d участка лунной поверхности относительно расчетной точки, в пределах которого допускается смещение перигентра орбиты облета, то допустимое рассеивание точки входа будет

$$\Delta\varphi_d = \Delta\varphi + \frac{2q_d}{R_L}. \quad (4.9)$$

Следовательно, корректирующие маневры на участке перелета при облете Луны следует предусматривать при условии

$$3\varepsilon_p > \Delta\varphi + 2q_d/R_L.$$

При этом точка приложения (ее истинная аномалия) корректирующего импульса на расчетной орбите перелета может быть

выбрана заранее, до полета, после чего определяется оптимальный угол наклона импульса к вектору скорости в соответствии с равенством (2.83), так как в данном случае корректирующий маневр обеспечивает одноимпульсный орбитальный переход. Величина импульса определяется в полете в соответствии с имеющимся местом промахом относительно расчетной точки входа. Следовательно, величина корректирующего импульса в каждом конкретном полете является случайной.

Для того чтобы гарантировать успешное выполнение корректирующего маневра на борту аппарата, нужно иметь запас топлива, который может быть найден из формулы (2.76) после подстановки $J_{V_2} = I_{\max}$. Последний определяется в предположении, что промах равен $3\sigma_p$. Соответствующий запас топлива будем называть гарантийным.

В задаче выхода на орбиту спутника Луны (в том числе с последующей высадкой экспедиции на ее поверхность) допустимое рассеивание точки входа может быть выбрано на основе следующих соображений. Орбита спутника будет проходить через заданный район лунной поверхности радиусом Q_d при отклонении плоскости фактической орбиты от расчетной за пределами конусов (рис. 4.12) с углами при вершине $180^\circ - 2Q_d/R_R$. В результате на поверхности сферы действия образуется полоса с угловым размером $2Q_d/R_R$. Следовательно, в данном случае для успешного решения задачи необходимо выполнить условие

$$3\sigma_p \leq Q_d/R_R.$$

Сравнение этого неравенства с условием (4.9) показывает, что в данном случае требования к точности элементов орбиты являются более высокими. Кроме того, при выходе на заданную орбиту спутника Луны предъявляются довольно жесткие требования к точности поддержания скорости входа в сферу действия и ее наклона к горизонту. В противном случае получится большое рассеивание перицентра гиперболической орбиты по высоте, что приводит к большому диапазону высот орбиты спутника Луны. Поэтому необходимо перед входом в сферу действия выполнить дополнительный корректирующий маневр, обеспечивающий уменьшение ошибок величины скорости входа и ее наклона к горизонту.

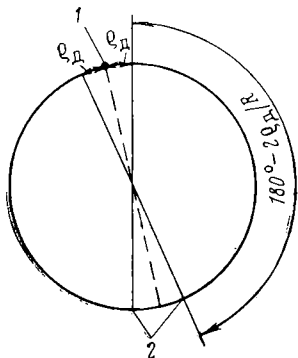


Рис. 4.12. Диапазон возможных орбит спутника Луны:

1—расчетная точка лунной поверхности, через которую должна проходить орбита спутника; 2—предельные положения плоскости орбиты спутника Луны

При выходе космического аппарата в перицентр гиперболической орбиты выполняется маневр орбитального перехода (на круговую орбиту). Предположим, что разброс величины скорости входа в сферу действия и ее наклон к горизонту наряду с рассеиванием точки входа приводит к появлению возможного семейства гиперболических орбит, ограниченных предельными гиперболами (см. рис. 4.10). Расчетная гипербола имеет перицентр, расположенный на высоте

$$H_n = \frac{H_1 + H_2}{2},$$

где H_n — номинальная высота.

Скорости в перицентрах предельных гипербол можно представить в виде

$$V_1 = V_n - \Delta V_m, \quad V_2 = V_n + \Delta V_m,$$

где V_n — номинальная скорость в перицентре гиперболической орбиты;

ΔV_m — максимальное отклонение скорости в перицентре от номинального значения.

В результате маневра скорость в перицентре должна быть уменьшена до значения первой космической скорости на высоте перицентра. Максимальная величина тормозящего импульса потребуются при движении по внешней гиперболе:

$$J_{\max} = V_n + \Delta V_m - \sqrt{\frac{\mu_L}{R_L + H_n + \Delta H_m}}.$$

Учитывая малость ΔH_m и линеаризуя последний член, находим

$$J_{\max} \simeq V_n - V_{1n} + \Delta V_m + \frac{\Delta H_m}{2(R_L + H_n)} V_{1n},$$

где

$$V_{1n} = \sqrt{\frac{\mu_L}{R_L + H_n}}.$$

Запасы топлива на борту космического аппарата должны обеспечить возможность создания указанного импульса. Разность $V_n - V_{1n}$ характеризует номинальное значение импульса, а остальные два члена — дополнительные запасы топлива, предназначенные для компенсации максимальных ошибок ΔH_m и ΔV_m . В описанном выше варианте посадки на лунную поверхность с орбиты спутника Луны в некоторой точке орбиты от базового корабля отделяется лунный корабль и выполняет посадочный маневр. В результате этого маневра лунный корабль переходит с круговой орбиты ожидания на эллиптическую орбиту снижения, перицентр которой находится над заданным районом

посадки. В качестве возможного варианта при выборе эллипса снижения рассмотрим случай высадки экспедиции на поверхность Луны. Исходя из требования наибольшей безопасности экспедиции, в этом случае эллипс снижения должен удовлетворять двум условиям:

1) он должен допускать в случае аварийной ситуации возможность выполнения в любой его точке активного маневра перехода лунного корабля на орбиту ожидания для встречи с базовым кораблем;

2) при отказе двигателя, предназначенного для конечного посадочного маневра, должна быть обеспечена возможность облета Луны с возвращением в исходную точку орбиты ожидания и встреча с базовым кораблем.

Для того чтобы выполнить второе условие, периоды обращения эллиптической орбиты снижения и круговой орбиты ожидания должны быть одинаковы. Следовательно, большая полуось эллипса должна удовлетворять равенству

$$a_c = R_R + H_o,$$

где H_o — высота орбиты ожидания.

Применяя к точке перигея орбиты снижения уравнение (1.19), имеем

$$R_d + H_n = a_c (1 - e_c) = (R_R + H_o)(1 - e_c),$$

откуда находим эксцентриситет

$$e_c = \frac{H_o - H_n}{R_R + H_o} \quad (4.10)$$

эллипса снижения.

Как показано в гл. II, большая полуось орбиты не меняется в том случае, если маневр выполняется под действием нормального импульса. При этом величина скорости не меняется, а изменяется угол ее наклона к местному лунному горизонту на угол θ_{v0} , определяемый равенством

$$\sin \frac{\theta_{v0}}{2} = \frac{J_N}{2V_1}. \quad (4.11)$$

В то же время на основании формулы (1.45) имеем

$$\sin \theta_{v0} = \frac{e_c \sin \theta_0}{\sqrt{1 + e_c^2 + 2e_c \cos \theta_0}}. \quad (4.12)$$

Таким образом, маневр можно оптимизировать выбором истинной аномалии θ_0 начальной точки орбиты снижения (точка 1 на рис. 4.1), при которой θ_{v0} , а следовательно, и J_N яв-

ляются минимальными. Экстремум правой части выражения (4.12) имеет место при выполнении уравнения

$$e_c + (1 + e_c^2) \cos \vartheta_{0.3} + e_c \cos^2 \vartheta_{0.3} = 0,$$

решение которого дает

$$\cos \vartheta_{0.3} = -e_c.$$

Нетрудно убедиться, что при этом имеет место минимум ϑ_{v0} . С учетом малости последнего получим

$$\vartheta_{v0 \min} \simeq e_c$$

и, используя выражение (4.11), находим минимальное значение потребного импульса

$$J_{N \min} \simeq e_c V_I.$$

Угловая дальность от точки начала снижения до перицентра $\Delta \vartheta_{\pi} = 2\pi - \vartheta_0$ будет $\Delta \vartheta_{\pi} = 90^\circ + \arcsin e_c$.

После подстановки выражения (4.10) последние формулы принимают вид

$$J_{N \min} \simeq \frac{H_0 - H_{\pi}}{R_{\pi} + H_0} V_I,$$

$$\Delta \vartheta_{\pi} = 90^\circ + \arcsin \frac{H_0 - H_{\pi}}{R_{\pi} + H_0}.$$

Высота H_{π} выбирается из следующих соображений. Максимальная высота лунных гор считается порядка 9,5 км. Если к этому добавить 6—7 км на коррекцию ошибок при посадке, то можно принять $H_{\pi} \simeq 16$ км. На рис. 4.13 приведены зависимости $J_{N \min}$ и $\Delta \vartheta_{\pi}$ от H_0 для нескольких значений H_{π} [68]. В рассматриваемом диапазоне высот орбиты ожидания угловая дальность снижения колеблется в пределах от $90^\circ 20'$ до $102^\circ 40'$, а потребный импульс от 36,7 м/сек до 324 м/сек. При $H_0 = 185$ км (высота, рассматриваемая в программе «Аполлон») и $H_{\pi} = 16$ км из приведенных графиков имеем

$$J_{N \min} = 141 \text{ м/сек}, \Delta \vartheta_{\pi} = 95^\circ 02'.$$

Активный маневр перехода на орбиту ожидания в аварийной ситуации должен выполняться с таким расчетом, чтобы апоцентр орбиты перехода касался орбиты ожидания. Лунный и базовый корабли должны приходиться в эту точку одновременно. Зависимость потребного импульса J_a от угловой дальности $\Delta \vartheta$ между точкой его приложения и точкой схода с орбиты ожидания показана на рис. 4.14 для $H_0 = 185$, $H_{\pi} = 16$ км.

При выходе лунного корабля в перицентр начинается посадочный маневр, который можно разделить на две фазы. На первой фазе осуществляется основное торможение корабля со сравнительно невысокими требованиями к конечным значениям вер-

тикальной и горизонтальной составляющих скорости. Далее начинается управление мягкой посадкой, в процессе которого осуществляется выбор наиболее благоприятного места прилуне-

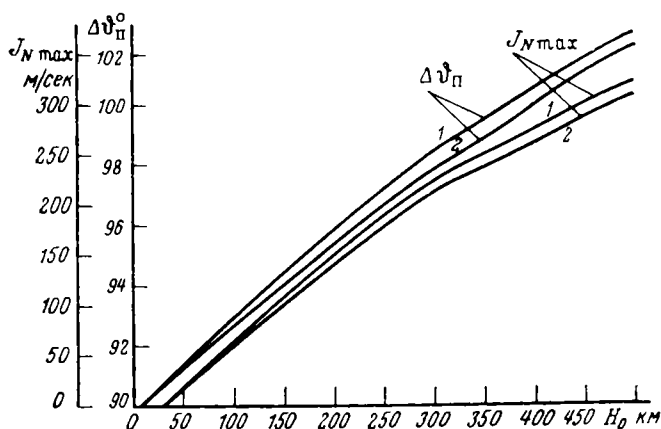


Рис. 4.13. Зависимость требуемого импульса при сходе с орбиты спутника Луны и угловой дальности орбиты снижения от высоты орбиты: 1— $H_{\text{п}}=10$ км; 2— $H_{\text{п}}=30$ км

ния и прецизионное торможение корабля. При этом скорость снижения уменьшается до безопасной величины при почти нулевой горизонтальной скорости. Аналогичные фазы можно рассматривать и при мягкой посадке автоматической станции, приближающейся к Луне по гиперболической орбите. Особенность здесь состоит в значительно большей начальной скорости (порядка 2600 м/сек) и более отвесном начальном снижении.

Проанализируем требования к точности выполнения тормозящего маневра, обеспечивающего мягкую посадку космического аппарата на лунную поверхность. При этом для простоты исследования предположим, что после выключения тормозного двигателя системы управления посадкой на высоте $H_{\text{п}}$ над поверхностью Луны аппарат совершает свободное падение по вертикали с начальной скоростью $V_{\text{п}}$. Изменением

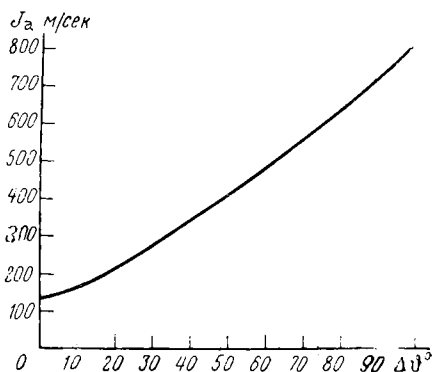


Рис. 4.14. Величина импульса, необходимая для аварийного перехода с орбиты снижения на орбиту спутника для встречи с базовым кораблем

величины ускорения поля тяготения Луны в процессе свободного падения будем пренебрегать ввиду малости H_n (несколько метров).

В процессе свободного падения до контакта с поверхностью Луны космический аппарат приобретает скорость

$$V_k^2 = 2g_R H_n + V_n^2, \quad (4.13)$$

где $g_R \approx 1,63 \text{ м/сек}^2$ — ускорение поля тяготения Луны на ее поверхности.

Величина скорости V_k не должна превышать некоторой допустимой величины. При выборе последней наряду с другими учитываются такие факторы, как допустимая для аппаратуры и экипажа перегрузка, возникающая в момент соприкосновения с лунной поверхностью, и возможности амортизационного устройства, обеспечивающего гашение ударного импульса. Параметры H_n , V_n , V_k являются случайными величинами, причем H_n имеет математическое ожидание H_0 , определяющее расчетную высоту точки выключения тормозного двигателя, а V_n является центрированной случайной величиной. Представим равенство (4.13) в виде

$$z = x + y,$$

где

$$z = V_k^2, \quad x = 2g_R H_n, \quad y = V_n^2.$$

Будем полагать, что величины H_n и V_n являются независимыми и подчиняются нормальному закону распределения. Из первого предположения следует, что числовые характеристики случайной величины вычисляются следующим образом:

— математическое ожидание

$$m_z = m_x + m_y,$$

— дисперсия

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2,$$

причем

$$m_x = 2g_R H_0, \quad \sigma_x = 2g_R \sigma_n,$$

где σ_n — среднеквадратическое отклонение H_n .

На основании зависимости $y = V_n^2$ имеем

$$P(Y < y) = \int_{-|V|}^{|V|} f_V(V_n) dH_n = 2 \int_0^{|V|} f_V(V_n) dV_n,$$

где

$$|V| = \sqrt{y}.$$

Дифференцируя интеграл по верхнему пределу, получим соотношение между законами распределения вероятностей величин y и V_n :

$$f(y) = 2f_V(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{f(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} \quad (y > 0)$$

и с учетом закона распределения V_n

$$f_V(V_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_V}} e^{-\frac{V_n^2}{2\sigma_V^2}},$$

где σ_V — среднее квадратическое отклонение V_n , получим

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_V}\sqrt{y}} e^{-\frac{y}{2\sigma_V^2}} \quad (y > 0).$$

Математическое ожидание

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy.$$

Так как $f(y) = 0$ при $y < 0$, в качестве нижнего предела можно принять нуль. Тогда после подстановки $f(y)$ и введения новой переменной интегрирования $u = \sqrt{y}$ получим несобственный интеграл табличного вида

$$m_y = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_V} \int_0^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2\sigma_V^2}} du = \sigma_V^2.$$

Дисперсия величины y

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 f(y) dy$$

с учетом предыдущего результата после аналогичных преобразований будет

$$\sigma_y^2 = 5\sigma_V^4.$$

В результате выражения для математического ожидания и среднее квадратическое отклонение величины z примут вид

$$m_z = z_{g_R} H_0 + \sigma_V^2, \quad (4.14)$$

$$\sigma_z = \sqrt{4g_R^2 \sigma_n^2 + 5\sigma_V^4}.$$

Следовательно, математическое ожидание скорости космического аппарата в момент соприкосновения с поверхностью Луны будет

$$V_{к.о} = \sqrt{2g_R H_0 + \sigma_V^2}.$$

Зависимость $V_{к.о}$ от H_0 для нескольких значений σ_V представлена графиками на рис. 4.15. Считается [111], что $V_{к.о}$ может быть принята примерно равной 6,1 м/сек. При этом возможны несколько расчетных точек выключения тормозного двигателя, характеризуемых высотой H_0 . Эти точки определяются пересечением графиков с прямой $V_{к.о} = 6,1$ м/сек. Например, при $\sigma_V \approx 3$ м/сек выключение двигателя может производиться на высоте $H_0 \approx 9$ м.

Оценим максимальную величину скорости при соприкосновении с лунной поверхностью. Используя правило трех сигм, на основании выражений (4.14) получим

$$V_{км} = \sqrt{2g_R H_0 + \sigma_V^2} + 3\sqrt{4g_R^2 \sigma_H^2 + 5\sigma_V^4}.$$

Если принять $H_0 \approx 9$ м, $\sigma_V \approx 3$ м/сек, то при среднеквадратической ошибке σ_H измерения высоты H_H в пределах от 0,5 до 2 м получим $V_{км} \approx 10$ м/сек.

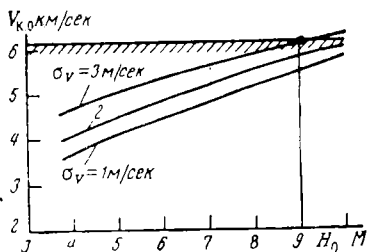


Рис. 4.15. Зависимость математического ожидания скорости в момент прилунения от математического ожидания высоты начала свободного падения

После посадки лунного корабля и выполнения намеченной программы научных исследований стартовый двигатель выводит корабль на орбиту ожидания. Затем решается задача встречи с базовым кораблем. Для того чтобы расход топлива при старте и в процессе маневра встречи был минимальным, необходимо обеспечить условие компланарности выхода лунного корабля для встречи с базовым кораблем.

Учитывая, что скорость вращения Луны вокруг своей оси $\omega_L \approx 13,2$ град/сутки, а период обращения спутника Луны в диапазоне высот 100—500 км находится в пределах от 2,2 до 4 час. Смещение между витками по лунной долготе будет, соответственно, от $1^\circ,1$ до 2° . Таким образом, смещение витков спутника Луны небольшое и при длительности экспедиции в несколько часов даже для полярных орбит отклонение от условий компланарности невелико. Эти отклонения будут еще меньше при небольших наклонениях орбиты к лунному экватору. При этом желательно, чтобы величина наклонения была близка к широте точки посадки. Если время пребывания

экспедиции на Луне измеряется сутками, возможны значительные отклонения от условий компланарности. В этом случае с учетом координат точки посадки наклонение и период обращения должны выбираться с таким расчетом, чтобы выполнялось условие (3.14) после подстановки в него $\omega_{\Sigma} = \omega_{\text{Л}}$ и параметров селеноцентрической орбиты ожидания для заданного числа витков n_6 базового корабля. В остальном операция встречи лунного корабля с базовым происходит аналогично встрече космического корабля со станцией на орбите спутника Земли.

После осуществления встречи и перехода экипажа лунного корабля на борт базового корабля осуществляется маневр старта последнего для возвращения на Землю. Скорость корабля доводится до величины, большей второй космической скорости на высоте орбиты ожидания, и по гиперболической орбите осуществляется выход из сферы действия Луны. На орбите обратного перелета (к Земле) выполняются корректирующие маневры, обеспечивающие выдерживание требуемых параметров (координат и вектора скорости) в точке входа в атмосферу Земли.

§ 4.3. МАНЕВРЫ ПОСТОЯННОГО ТОРМОЖЕНИЯ ПРИ СНИЖЕНИИ И ПОСАДКЕ

Для мягкой посадки космического аппарата на лунную поверхность предусматривается управление его движением на конечном участке. Под конечным участком обычно понимается траектория снижения аппарата от момента включения тормозного двигателя системы посадки до заключительной фазы прилунения, начинающейся при достижении аппаратом скорости порядка 20—25 м/сек.

В смысле технического решения возможны различные способы управления на конечном участке: одни — для беспилотных, другие — для пилотируемых аппаратов. Но во всех этих способах задача управления заключается в поддержании номинальной траектории снижения. Выбор последней производится решением дифференциальных уравнений движения аппарата из условия минимизации приращения характеристической скорости (расхода топлива), необходимого для снижения аппарата на лунную поверхность с нулевой скоростью. В большинстве случаев требуется посадка аппарата в заданную точку, тем самым граничные условия для нахождения номинальной оптимальной траектории определены однозначно. Однако выбранная таким образом траектория не всегда отвечает возможностям ее технической реализации. Поэтому в качестве номинальной принимается траектория с несколько большим приращением характеристической скорости, чем оптимальная, но более удобная в практическом отношении.

Рассмотрим снижение аппарата по траектории с гравитационным поворотом, которую и будем считать номинальной. Такая траектория получается при совмещении вектора тяги $\vec{P}$ тормозного двигателя в течение всего времени его работы с направлением, противоположным вектору скорости аппарата $\vec{V}$. При определенном выборе величины тяги процесс снижения аппарата заканчивается вертикальной посадкой с нулевой скоростью у поверхности Луны или на заданной высоте. При вычислении этой траектории используются две модели Луны: сферическая и плоская. Выбор той или иной модели производится в зависимости от начальной величины угла θ_{V0} и скорости V_0 в момент включения тормозной тяги. При малом угле θ_{V0} (порядка единиц градусов) и начальной скорости, превышающей скорость свободного падения*, снижение аппарата происходит по пологой траектории и за основу принимается сферическая модель Луны. При большом угле θ_{V0} , а также при малом угле, но начальной скорости, меньшей скорости свободного падения, задача снижения и мягкой посадки решается в предположении плоской поверхности Луны.

Первый случай характеризует снижение аппарата с промежуточной орбиты спутника Луны, второй — относится главным образом к непосредственному снижению аппарата со сверхкруговой (для Луны) скоростью (аппарат почти вертикально падает на поверхность Луны).

Для получения характеристик номинальной траектории снижения проведем исследование дифференциальных уравнений движения аппарата. Для сферической модели Луны используем уравнения (2.18)

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{v}{r^2} - a_r, \quad (4.15a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dK}{dt} = -a_\theta, \quad (4.15б)$$

где $K = r^2\dot{\theta}$ — удельный (на единицу массы) кинетический момент аппарата.

Здесь знак минус перед составляющими a_r и a_θ вектора кажущегося ускорения $\vec{a} = \vec{P}/m$ отражает направление действия тяги, противоположное скорости. Поскольку основной интерес представляет определение величины ускорения a , обеспечивающего снижение аппарата на поверхность Луны с нулевой скоростью, в зависимости от параметров траектории, преобразуем уравнения (4.15) в более удобную форму. Для этого введем в качестве

* Под скоростью свободного падения V_{0c} понимается скорость, вычисляемая по формуле $V_{0c} = \sqrt{2g_R H_0}$, где $g_R = 1,63 \text{ м/сек}^2$ — ускорение силы тяжести на поверхности Луны, H_0 — начальная высота аппарата.

новой независимой переменной вместо времени t длину дуги вдоль траектории S . В соответствии с определением скорости

$$V = \frac{dS}{dt}$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{dS} V, \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dS^2} V^2 + \frac{dr}{dS} \frac{dV}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Из построения на рис. 4.16 имеем

$$\left. \begin{aligned} V^2 &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2, \\ \sin \gamma &= \frac{\dot{r}}{V} = \frac{dr}{dS}, \\ \cos \gamma &= \frac{r\dot{\theta}}{V} = \frac{K}{rV}, \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

а также

$$a_r = a \sin \gamma = a \frac{dr}{dS}, \quad (4.18a)$$

$$a_\theta = a \cos \gamma = a \frac{K}{rV}. \quad (4.18b)$$

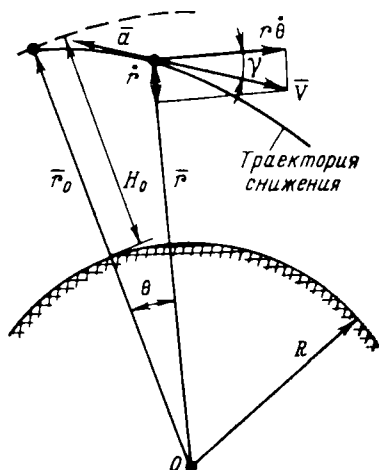


Рис. 4.16. Снижение аппарата с орбиты спутника Луны

Учитывая, что

$$\frac{dV}{dt} = -a - \frac{\mu}{r^2} \sin \gamma = -a - \frac{\mu}{r^2} \frac{dr}{dS},$$

получим следующее окончательное выражение для радиального ускорения аппарата:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{dS^2} V^2 - a \frac{dr}{dS} - \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{dr}{dS} \right)^2. \quad (4.19)$$

Умножая уравнение (4.15a) на r и используя равенства (4.17), (4.18) и (4.19), приведем его к виду

$$rV^2 \frac{d^2r}{dS^2} = \left[1 - \left(\frac{dr}{dS} \right)^2 \right] \left[V^2 - \frac{\mu}{r} \right],$$

или с учетом равенства (4.18a)

$$\frac{r}{\cos^2 \gamma} \frac{d^2r}{dS^2} = 1 - \frac{\mu}{rV^2}. \quad (4.20)$$

Уравнение (4.156) согласно равенству (4.186) будет

$$\frac{dK}{dS} = -a \frac{K}{V^2}. \quad (4.21)$$

Для интегрирования уравнений (4.20) и (4.21) необходимо выразить скорость аппарата в функции дуги траектории с учетом начальных и конечных условий.

Мгновенная скорость приращения энергии аппарата W на единицу его массы (назовем ее удельной энергией) равна

$$\frac{dW}{dt} = -aV,$$

или

$$\frac{dW}{dS} = -a.$$

Интегрируя последнее равенство, получаем

$$W = -aS + W_0,$$

где $W_0 = \frac{V_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0}$ — удельная энергия аппарата в момент включения тяги ($t=0$).

С другой стороны, текущее значение удельной энергии аппарата равно

$$W = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r},$$

так что

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -aS + \frac{V_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0}.$$

Следовательно,

$$V^2 = -2aS + V_0^2 + 2\mu \left[\frac{(r_0 - r)}{r_0 r} \right]. \quad (4.22)$$

Полученное выражение можно упростить, имея в виду, что

$$r_0 = R + H_0, \quad r = R + H,$$

где R — радиус Луны ($1,738 \cdot 10^3$ км);

H_0 и H — начальная (при $t=0$) и текущая высоты аппарата над поверхностью Луны, причем $H/R \ll 1$.

Ограничиваясь в (4.22) членами 1-го порядка малости, имеем

$$V^2 = -2aS + V_0^2 + 2g_R(H_0 - H), \quad (4.23)$$

где $g_R = \frac{\mu}{R^2}$ — ускорение силы тяжести на поверхности Луны.

Конечные условия вытекают из требования выполнения мягкой посадки при $S=S_K$ (полная длина дуги траектории)

$$H_K=0 \text{ или } (H_K=H_3=\text{const})$$

где H_3 — заданная высота;

$$V_K = 0.$$

Что же касается величины S_K , то она может быть определена при $H_K=0$ из выражения (4.23) по формуле

$$S_K = \frac{V_0^2 + 2g_R H_0}{2a}. \quad (4.24)$$

Для сферической модели Луны начальная скорость V_0 больше скорости свободного падения. Поэтому нет необходимости в представлении зависимости $H=f(S)$ в виде выражения, аналогичного (4.22) для V^2 . Достаточно ограничиться простым соотношением

$$H = H_0(1 - S/S_K),$$

удовлетворяющим начальным и конечным условиям. На рис. 4.17 изображена типичная траектория спуска аппарата с круговой промежуточной орбиты ($H_0 \cong 15$ км и $V_0^2 \bar{V}_{0c}^2 = 56$).

Эта траектория свидетельствует о справедливости упрощенного представления зависимости $H=f(S)$. Здесь $L_K = R\theta_K$ — продольная дальность полета аппарата вдоль поверхности Луны. Подставляя это значение для H в формулу (4.23) с учетом равенства (4.24), находим

$$V^2 = V_0^2(1 - S/S_K). \quad (4.25)$$

После подстановки равенства (4.25) в уравнения (4.20) и (4.21) имеем

$$\frac{r}{\cos^2 \gamma} \frac{d^2 r}{dS^2} = 1 - \frac{\mu}{rV_0^2(1 - S/S_K)}, \quad (4.26a)$$

$$\frac{dK}{dS} = -a \frac{K}{V_0^2(1 - S/S_K)}. \quad (4.26b)$$

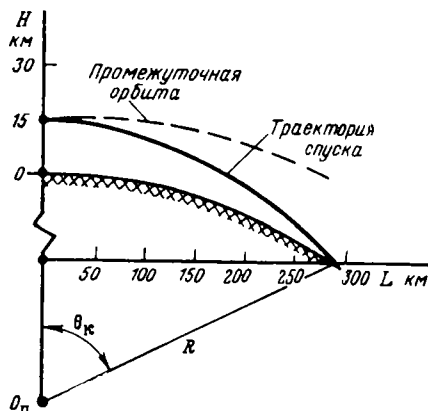


Рис. 4.17. Траектория снижения с круговой орбиты спутника Луны при $v_0=0$

Эти уравнения нелинейны и получить их точное аналитическое решение не удастся. Для их линеаризации воспользуемся следующими допущениями. Поскольку

$$V_0 > \sqrt{2g_R H_0},$$

производная dr/dS близка к своему начальному значению на большей части траектории и, следовательно, она может быть заменена в уравнении (4.25а) величиной $\left(\frac{dr}{dS}\right)_0$ или на основании равенства (4.18а) $\sin \gamma_0$. Это означает, что в уравнении (4.26а) можно принять $\cos \gamma = \cos \gamma_0$. Кроме того, для начальных высот $H \leq 60$ км изменение r составляет всего 3%. Поэтому в уравнении (4.26а) можно заменить r на R . Перепишем это уравнение с учетом принятых допущений

$$\frac{R}{\cos^2 \gamma_0} \frac{d^2 r}{dS^2} = 1 - \frac{g_R R}{V_0^2 (1 - S/S_K)}. \quad (4.27)$$

Двукратное интегрирование полученного уравнения при начальных условиях $S=0$ и $r=r_0$ дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \gamma_0} (r - S \sin \gamma_0) &= \frac{S^2}{2R} - \frac{g_R S_K}{V_0^2} S - \\ &- \frac{g_R S_K^2}{V_0^2} (1 - S/S_K) \ln(1 - S/S_K) + \frac{r_0}{\cos^2 \gamma_0}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

В момент посадки аппарата на поверхность Луны

$$r = r_0 - H_0, \quad S = S_K$$

и выражение (4.28) приобретает вид

$$\frac{1}{\cos^2 \gamma_0} [r_0 - H_0 - S_K \sin \gamma_0] = \frac{S_K^2}{2R} - \frac{g_R S_K^2}{V_0^2} + \frac{r_0}{\cos^2 \gamma_0},$$

или

$$S_K^2 \left[\frac{1}{2R} - \frac{g_R}{V_0^2} \right] + \frac{\sin \gamma_0}{\cos^2 \gamma_0} S_K + \frac{H_0}{\cos^2 \gamma_0} = 0.$$

Подставляя в последнее равенство значение для S_K согласно равенству (4.24), после несложных преобразований находим следующее квадратное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{g_R^2} + \sin \gamma_0 \left[\frac{V_0^2}{2H_0 g_R} + 1 \right] \frac{a}{g_R} - \frac{\cos^2 \gamma_0}{4V_0^2 H_0 g_R} [V_0^2 + 2g_R H_0]^2 \times \\ \times \left(1 - \frac{V_0^2}{2R g_R} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

относительно ускорения a , а точнее перегрузки a/g_R .

Из уравнения следует, что когда

$$V_0 < \sqrt{2g_R R}$$

существует один положительный корень. Таким образом, неопределенность в определении величины ускорения a , обеспечивающего мягкую посадку, не возникает. На рис. 4.18 дано сравнение результатов точного численного и приближенного решений уравнения (4.29) для случая снижения аппарата с промежуточ-

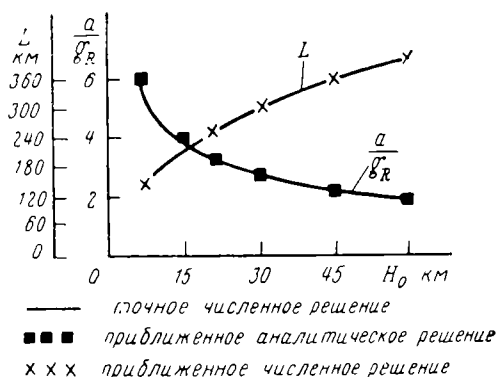


Рис. 4.18. Изменение перегрузки и дальности в зависимости от высоты круговой орбиты при снижении спутника Луны

ной орбиты с начальной круговой скоростью. Приведенные графики свидетельствуют о хорошем совпадении результатов.

Решение уравнения (4.26б) определяет дальность снижения и точку посадки на поверхности Луны. После интегрирования этого уравнения, принимая $K=K_0$ при $S=0$, находим

$$K = r^2 \frac{d\theta}{dt} = K_0 (1 - S/S_k)^{n_1},$$

где

$$n_1 = \frac{a S_k}{V_0^2},$$

или с учетом равенства (4.25)

$$r^2 \frac{d\theta}{dS} = \frac{K_0 (1 - S/S_k)^{n_1 - 1/2}}{V_0}. \quad (4.30)$$

При интегрировании этого уравнения полагаем $\theta=0$ при $S=0$ и $r=R$. В результате получим

$$r_0^2 \theta = - \frac{S_K K_0}{g_R H_0 + \frac{V_0^2}{2}} [(1 - S/S_K)^{n_2} - 1], \quad (4.31)$$

где

$$n_2 = \frac{g_R H_0}{V_0^2} + 1.$$

Отсюда подстановкой $K_0 = r_0 V_0 \cos \gamma_0$ и $S = S_K$ в соответствии с равенством (4.24) находим продольную дальность вдоль поверхности Луны до точки посадки:

$$L = R \theta_K = \frac{V_0^2}{2a} \cos \gamma_0 \left[\frac{V_0^2 + 2g_R H_0}{V_0^2 + g_R H_0} \right] \left(\frac{R}{r_0} \right). \quad (4.32)$$

На рис. 4.18 дано сравнение приближенного решения для дальности по уравнению (4.32) с точным решением уравнений сни-

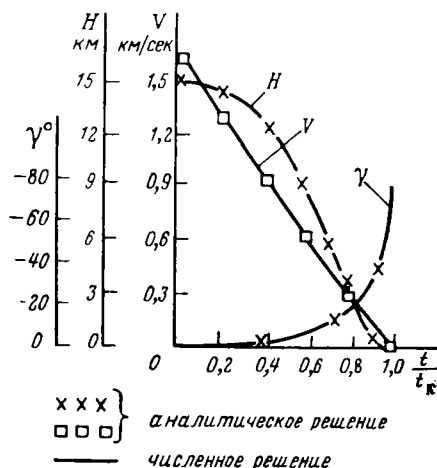


Рис. 4.19. Изменение высоты, скорости и угла наклона траектории в зависимости от времени $\left(\frac{t}{t_K}, t_K = 273 \text{ сек}\right)$ при снижении с круговой орбиты ($H_0 = 15 \text{ км}$)

жения на вычислительной машине. Как видно из графиков, оба решения практически совпадают [47]. Эту же цель сравнения преследуют графики на рис. 4.19, изображающие зависимости высоты, скорости и угла наклона траектории от времени для начальной высоты $H_0 = 15 \text{ км}$.

Время снижения не имеет существенного значения для управления движением аппарата, однако знание его бывает полезным, например при определении характеристической скорости. Из равенства (4.25) следует

$$V = \frac{dS}{dt} = V_0 (1 - S/S_K)^{1/2},$$

или

$$\frac{dS}{(1 - S/S_K)^{1/2}} = V_0 dt,$$

откуда после интегрирования (при $t=0$, $S=0$)

$$S = V_0 t - \frac{V_0^2 t^2}{4S_K}.$$

Так как в момент посадки на поверхность $t=t_K$, $S=S_K$. Из полученного соотношения находим

$$t_K = \frac{2S_K}{V_0}. \quad (4.33)$$

При снижении с промежуточных круговых орбит высотой 15—20 км ошибка в определении времени по этой формуле составляет 2—2,5%. Для получения большей точности надо подобрать лучшее приближение для $H=f(S)$ чем то, которое было принято. Характеристическая скорость, необходимая для снижения аппарата, находится путем умножения ускорения, создаваемого тягой, на время полета, т. е.

$$V_x = at_K = a \frac{2S_K}{V_0},$$

и после подстановки значения для S_K (4.24)

$$V_x = V_0 + \frac{2g_R H_0}{V_0}.$$

В случае плоской модели Луны определение номинальной траектории удобно производить в прямоугольной системе координат $Oxyz$ с началом на поверхности Луны. Направим ось Oy вдоль местной вертикали, а ось Ox совместим с плоскостью, образованной местной вертикалью и вектором скорости.

Уравнения движения аппарата в этой системе координат будут (рис. 4.20)

$$\ddot{y} = a_y - g, \quad (4.33a)$$

$$\ddot{x} = a_x, \quad (4.33b)$$

где

$$a_y = -a \frac{\dot{y}}{V} = -a \sin \gamma, \quad (4.34a)$$

$$a_x = -a \frac{\dot{x}}{V} = -a \cos \gamma. \quad (4.34b)$$

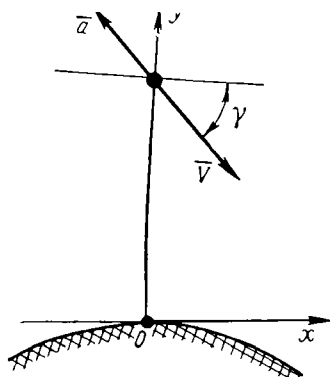


Рис. 4.20. Снижение аппарата при использовании плоской модели Луны

Ускорение силы тяжести g , входящее в уравнение (4.33a), принимается постоянным, равным g_R . Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} + \frac{g_R}{a} \left[1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4.35)$$

так как

$$V = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}.$$

С помощью подстановки $z = \dot{y}/\dot{x}$ нетрудно найти решение полученного уравнения

$$\dot{y} = \dot{x} \operatorname{sh} \ln(C \dot{x}^q) = \frac{C}{2} \dot{x}^{(1+q)} - \frac{1}{2C} \dot{x}^{(1-q)}, \quad (4.36)$$

где

$$q = \frac{g_R}{a}, \quad C = \lambda_V \dot{x}_0^{-q}, \quad \lambda_V = \frac{(\dot{y}_0 + V_0)}{\dot{x}_0}.$$

Обратим внимание, что с учетом решения (4.36) можно представить

$$V = \dot{x} \left[1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)^2 \right]^{1/2} = \dot{x} \operatorname{ch} \ln(C \dot{x}^q), \quad (4.37)$$

откуда

$$\frac{V}{x} = \operatorname{ch} \ln(C\dot{x}^0).$$

Тогда уравнение (4.336) переписывается так:

$$[\operatorname{ch} \ln(C\dot{x}^0)] d\dot{x} = -a dt,$$

или после подстановки выражения для C

$$\frac{1}{2} \left[\lambda_V \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right)^q + \frac{1}{\lambda_V} \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right)^{-q} \right] d\dot{x} = -a dt.$$

Интегрируя с учетом начального условия: $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$, находим

$$\frac{\dot{x}}{2} \left[\frac{\lambda_V}{1+q} \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right)^q + \frac{1}{\lambda_V(1-q)} \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right)^{-q} \right] - \frac{\dot{x}_0}{2} \left[\frac{\lambda_V}{(1+q)} + \frac{1}{\lambda_V(1-q)} \right] = -at. \quad (4.38)$$

Для установления связи между x и y с $\dot{x}$ представим уравнение (4.336) в виде

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{a}{V}$$

и

$$\frac{d\dot{x}}{dy} = -\frac{a\dot{x}}{V\dot{y}}.$$

Подставляя сюда выражения (4.37) и (4.36), находим

$$[\dot{x} \operatorname{ch} \ln(C\dot{x}^0)] d\dot{x} = -a dx \quad (4.39a)$$

и

$$\dot{x} [\operatorname{ch} \ln(C\dot{x}^0)] \operatorname{sh} \ln(C\dot{x}^0) d\dot{x} = -a dy. \quad (4.39b)$$

Интегрируя уравнения (4.39) при начальных условиях: $x_0 = 0$, $y_0 = H_0$, получим

$$-ax = \frac{\dot{x}^2}{2} \left[\frac{-\lambda_V \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right)^q}{(2+q)} + \frac{\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right)^{-q}}{\lambda_V(2-q)} \right] - \frac{\dot{x}_0^2}{2} \left[\frac{\lambda_V}{(2+q)} + \frac{1}{\lambda_V(2-q)} \right], \quad (4.40a)$$

$$\begin{aligned} -a(y - H_0) &= \frac{\dot{x}^2}{8} \left[\frac{-\lambda_V^2 \left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right)^{2q}}{1+q} - \frac{\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0} \right)^{-2q}}{\lambda_V^2(1-q)} \right] - \\ &\quad - \frac{\dot{x}_0^2}{8} \left[\frac{-\lambda_V^2}{(1+q)} - \frac{1}{\lambda_V^2(1-q)} \right]. \end{aligned} \quad (4.40b)$$

Уравнения (4.38), (4.40a) и (4.40b) полностью описывают траекторию снижения аппарата. Величина ускорения a , необходимая для достижения Луны с нулевой скоростью, определяется из

уравнения (4.40б). Полагая в этом уравнении $y=0$, $\dot{x}=0$, имеем

$$aH_0 = -\frac{\dot{x}_0^2}{8} \left[\frac{\lambda_V^2}{1+q} - \frac{1}{\lambda_V^2(1-q)} \right].$$

Учитывая, что $q=g_R/a$, преобразуем это равенство так:

$$\frac{a^2}{g_R^2} + \frac{\dot{x}_0^2}{8g_R H_0} \left(\lambda_V^2 - \frac{1}{\lambda_V^2} \right) \frac{a}{g_R} - \left[\left(\lambda_V^2 + \frac{1}{\lambda_V^2} \right) \frac{\dot{x}_0^2}{8g_R H_0} + 1 \right] = 0$$

и замечая, что

$$\lambda_V^2 - \frac{1}{\lambda_V^2} = \frac{(\dot{y}_0 + V_0)^4 - \dot{x}_0^4}{\dot{x}_0^2 (\dot{y}_0 + V_0)^2} = \frac{4V_0^2 \sin \gamma_0}{\dot{x}_0^2},$$

$$\lambda_V^2 + \frac{1}{\lambda_V^2} = \frac{(\dot{y}_0 + V_0)^4 + \dot{x}_0^4}{\dot{x}_0^2 (\dot{y}_0 + V_0)^2} = \frac{2V_0^2 (1 + \sin^2 \gamma_0)}{\dot{x}_0^2},$$

приходим к следующему квадратному уравнению:

$$\frac{a^2}{g_R^2} + \sin \gamma_0 \left[\frac{V_0^2}{2g_R H_0} \right] \frac{a}{g_R} - \left[\frac{V_0^2 (1 + \sin^2 \gamma_0)}{4g_R H_0} + 1 \right] = 0. \quad (4.41)$$

Данное уравнение также имеет только один положительный корень, поэтому неопределенность в выборе величины a отсутствует. Сравнение величины потребного ускорения в функции начальной скорости, вычисленного по формуле (4.41), с точным значением, полученным с помощью вычислительной машины, приведено на рис. 4.21 [47]. Здесь же даются результаты решения для сферической модели Луны, которые свидетельствуют о возможности перехода от одной модели к другой.

Формулу для вычисления координаты x_K точки посадки получим из выражения (4.40а), полагая $\dot{x}=0$:

$$x_K = \frac{V_0^2 \cos \gamma_0}{2} \left[\frac{1 + \sin \gamma_0}{2a + g_R} + \frac{1 - \sin \gamma_0}{2a - g_R} \right]. \quad (4.42)$$

Это же выражение определяет продольную дальность между моментами начала приложения тяги и посадки. Время снижения t_K находится из выражения (4.38) при $\dot{x}=0$

$$t_K = \frac{V_0}{2} \left[\frac{(1 + \sin \gamma_0)}{a + g_R} + \frac{(1 - \sin \gamma_0)}{a - g_R} \right]. \quad (4.43)$$

Характеристическая скорость, необходимая для снижения аппарата, вычисляется как произведение at_K .

Проведенное исследование дает представление о характеристиках снижения по номинальной траектории с гравитационным поворотом (снижение при постоянном замедлении). Эта траек-

тория обеспечивает мягкую посадку аппарата в его вертикальном или почти вертикальном положении. Она позволяет по известным параметрам (V , γ , H) предсказывать с помощью точных вычислений конечную точку посадки, а также возможные значения перегрузок. Для практических целей некоторые формулы можно упростить. Так, для плоской модели Луны для условий вертикального прилунения [47] формулы (4.41) и (4.42) приобретают вид

$$x_K \cong \frac{V^2 \sin \gamma (1 + \cos \gamma)}{2g_R (a - \varrho)},$$

$$\frac{a}{g_R} \cong 1 + \frac{V^2 (1 + \cos \gamma)^2}{8g_R H_0}.$$

Этими формулами можно пользоваться для углов $\gamma > 45^\circ$.

При переходе от плоской задачи к пространственной довольно несложно получить выражения для предсказания поперечной дальности z_K , аналогичные соотношениям (4.32) и (4.42).

Ошибки в ориентации тяги, погрешности систем наведения и управления приводят к отклонению действительной траектории от номинальной. Кроме того, изменение траектории снижения необходимо при несовпадении прогнозируемой и заданной точек посадки. И в том и в другом случае требуется коррекция действительной траектории. Такая коррекция может осуществляться отклонением тяги двигателя от

своего номинального ориентируемого положения, корректируемый спуск продолжается до тех пор, пока ошибки в продольной и боковой координатах точки посадки не станут равными нулю. После этого отклонение тяги устраняется и снижение аппарата осуществляется по номинальной траектории. В этой связи практический интерес представляют возмущения траектории, обусловленные постоянным смещением тяги двигателя от ориентированного положения в течение определенных интервалов времени.

На рис. 4.22 показаны отклонения по дальности при смещении тяги двигателя от номинального положения, противоположного направлению вектора скорости $\bar{V}$, на угол, равный 10° . На-

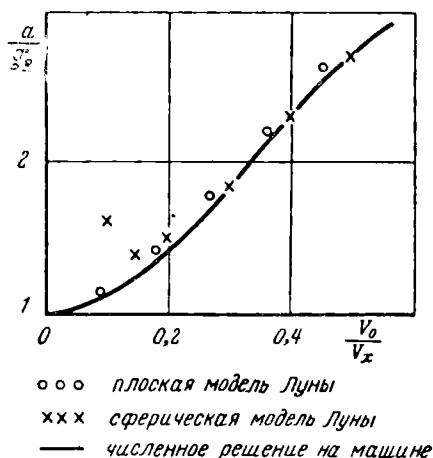


Рис. 4.21. Изменение перегрузки в функции начальной скорости ($H_0 = 15$ км, $\theta_0 = 0$)

чальные значения параметров снижения принимались равными: $h_0=9,8$ км, $V_0=670$ м/сек, $\gamma_0=7,3^\circ$, $\frac{a}{g_R}=385$. Из рисунка следует, что указанное смещение тяги двигателя (до $h \approx 6$ км) привело к изменению продольной дальности снижения примерно на 20%. При этом увеличение времени снижения и расхода топлива незначительно — 1136 кг/сек вместо 1110 кг/сек и 147,6 сек вместо 123,5 сек. Таким образом, смещение тяги двигателя позволяет осуществлять газореактивное управление траекторией снижения аппарата.

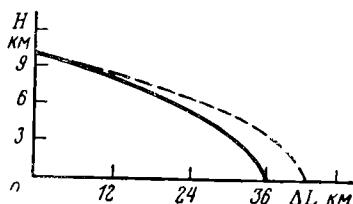


Рис. 4.22. Приращение продольной дальности при смещении тяги двигателя (пунктиром показана траектория со смещенной тягой)

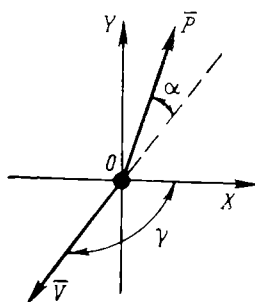


Рис. 4.23. Снижение со смещением тяги

Исследование свойств корректируемого снижения аппарата представляет значительные трудности. В первом приближении такое исследование удобно проводить на плоскости годографа скоростей. При отклонении тяги двигателя на угол α от направления, противоположного вектору скорости в плоскости тангажа (рис. 4.23), уравнения (4.23) переписываются в виде

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -a \sin(\gamma + \alpha) - g_R, \\ \ddot{x} &= -a \cos(\gamma + \alpha).\end{aligned}\quad (4.44)$$

Для удобства обозначим $\dot{x}=u$, а $\dot{y}=W$. Рассмотрим движение аппарата на плоскости $u-W$ (плоскость годографа), исключив из уравнений (4.44) время. Дифференциальное уравнение первого порядка, описывающее годограф траектории, получим делением первого уравнения на второе:

$$\frac{dW}{du} = \frac{\sin(\gamma + \alpha) + q}{\cos(\gamma + \alpha)}.\quad (4.45)$$

Угол α принимается постоянным. Учитывая равенство (4.34), представим последнее уравнение в виде

$$\frac{dW}{du} = \frac{W \cos \alpha + u \sin \alpha + qV}{u \cos \alpha - W \sin \alpha}.$$

При малых α ($\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$) имеем

$$\frac{dW}{du} = \frac{W + u + qV}{u - \alpha W}.$$

Эти уравнения эквивалентны уравнению (4.35), но представлены в форме, более удобной для анализа с помощью годографа. В случае снижения без отклонения тяги $\alpha=0$ и

$$\frac{dW}{du} = \frac{W + qV}{u}.$$

Как видно из построения на рис. 4.24, все траектории в плоскости годографа должны приближаться к конечному условию $V_K=0$ по касательной к отрицательной полуоси W ($\gamma_K = -90^\circ$), что соответствует вертикальной посадке. Пунктиром показаны прямые, характеризующие радиальное подобие траекторий данного семейства. Согласно этому подобию прямые пересекают траектории под одним и тем же углом.

При $\alpha \neq 0$ все траектории в плоскости годографа также проходят через начало координат. Однако конечный угол γ_K теперь уже не равен -90° , а зависит от угла α . При вычислении этого угла следует иметь в виду, что

$$\lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{dW}{du} \right) = \operatorname{tg} \gamma_K.$$

Подставляя это равенство в левую часть уравнения (4.45) и переходя в правой части к конечному значению $\gamma = \gamma_K$ с учетом малости угла α , получим уравнение

$$\operatorname{tg} \gamma_K = \frac{\operatorname{tg} \gamma_K + \alpha + q/\cos V_K}{1 - \alpha \operatorname{tg} \gamma_K}.$$

Отсюда находим

$$\cos \gamma_K = -\frac{\alpha}{q}. \quad (4.46)$$

Из этого равенства следует, что конечный угол отличается от -90° , что и показано на рис. 4.25.

Вообще говоря, снижение с отклоненной тягой может продолжаться теоретически с нулевой горизонтальной скоростью вплоть до мягкой посадки. При заданном угле отклонения α это

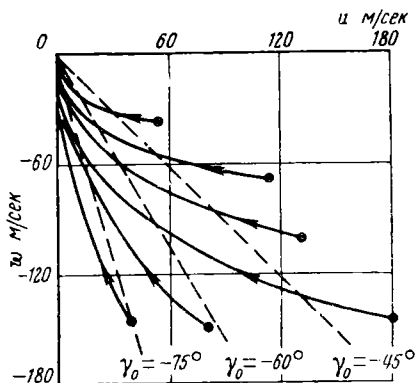


Рис. 4.24. Траектории снижения в плоскости годографа при $\alpha=0$ и $q=0,45$

будет означать максимальное смещение точки посадки по дальности. Однако в соответствии с равенством (4.46) конечный угол тангажа ϑ аппарата будет при этом

$$\vartheta_k = \alpha + \arccos \alpha / \varrho.$$

Не исключено, что величина этого угла окажется слишком большой для безопасной посадки. Эта опасность может быть уstra-

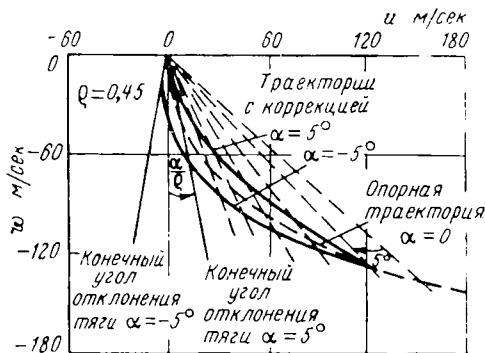


Рис. 4.25. Траектории снижения в плоскости годографа при $\alpha = \pm 5^\circ$ и $\varrho = 0,45$

нена, если в течение некоторого времени перед посадкой аппарат будет удерживаться над поверхностью Луны в висющем положении.

§ 4.4. УПРАВЛЕНИЕ МЯГКОЙ ПОСАДКОЙ

Осуществление мягкого контакта с лунной поверхностью требует достаточно точного регулирования величины скорости по мере снижения. Это может быть достигнуто специальной системой управления. Рассмотрим в качестве примера систему управления снижением и мягкой посадкой беспилотного аппарата, приближающегося к Луне со сверхкруговой скоростью, описанную в работе [107]. Для создания управляющих сил используется двигательная система, состоящая из основного тормозного двигателя на твердом топливе и трех верньерных двигателей на жидком топливе с регулируемой тягой [125].

Измерение высоты и скорости аппарата в связанной системе координат $Oxyz$ (ось Ox — курс, ось Oz — тангаж и Oy — рысканье) осуществляется с помощью высотомера и трех доплеровских локаторов, расположенных симметрично относительно оси аппарата (рис. 4.26).

В момент приближения к Луне со скоростью 2,5 км/сек, что соответствует высоте над лунной поверхностью ~ 90 км, с Земли передается команда на выполнение угловой ориентации аппа-

рата. Ориентация осуществляется по Солнцу и звездам, либо по Солнцу и Земле. Например, в полете советской автоматической станции «Луна-9» применялся последний способ ориентации*. В результате направление действия тяги основного двигателя совмещается с направлением, противоположным вектору скорости. На высоте около 75 км от лунной поверхности, определяемой радиовысотомером, включается основной двигатель. Сравнительно большая высота, наличие пламени и вибрации при работе основного двигателя создают трудности в измерении параметров траектории с необходимой точностью. Однако с помощью верньерных двигателей, включаемых несколько позднее, система управления обеспечивает выдерживание в момент выключения двигателя высоты и скорости в заданных пределах. Тем самым компенсируются возможные ошибки в величине тормозной тяги, а также в высоте и скорости в начальный момент торможения. После выключения тормозного двигателя и отделения его от аппарата тяга верньерных двигателей устанавливается равной величине, соответствующей ускорению силы тяжести на Луне. В результате аппарат снижается с постоянной скоростью, причем такое снижение происходит до выхода его на номинальную траекторию. В качестве номинальной принимается траектория постоянного торможения, подробно рассмотренная в § 4.3. Конечной точке траектории соответствуют значения $H=30,5$ м и $V_k=3,05$ м/сек, а ускорение вдоль всей траектории ($a-g_R$) = $2,7g_R$. На рис. 4.27 эта траектория представлена на фазовой плоскости с координатами H и $\dot{y}$ (вертикальная скорость снижения). Точка A соответствует моменту включения основного двигателя, а участок AB — снижению с постоянной скоростью. Как только данные измерения совпадают с данными высоты и скорости номинальной траектории (точка B), включается канал продольного управления, обеспечивающий последующее движение аппарата по этой траектории. Затем включается канал бокового управления, ликвидирующий гори-

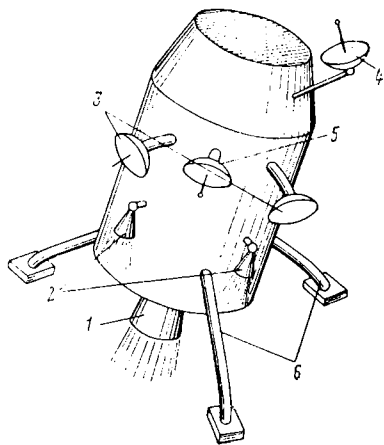


Рис. 4.26. Эскиз спускаемого аппарата

1—основной двигатель; 2—верньерные двигатели; 3—антенны доплеровских локаторов; 4—антенна радиолокатора для связи с Землей; 5—антенна радиовысотомера; 6—амортизирующее посадочное устройство

* Правда, № 37 (17354) от 6.02.1966 г.

зонтальную составляющую скорости полета и уменьшающий угол между осью аппарата и местной вертикалью. Это важно для нормальной работы доплеровского локатора [111] и [125].

При достижении аппаратом скорости около 3,05 м/сек, которой соответствует номинальная высота 30,5 м, канал бокового управления отключается. Тяга верньерных двигателей опять устанавливается на уровне, соответствующем ускорению g_R , и снижение аппарата происходит с постоянной скоростью. С этого

момента основная задача системы управления сводится к вычислению момента выключения верньерных двигателей при достижении высоты $H_{\text{к0}} = 9,15$ м.

Возможны следующие законы управления ускорением в вертикальной плоскости. При непрерывном управлении ускорением вдоль траектории принимается закон, описываемый выражением

$$a_z = \frac{1}{2} \frac{\dot{y}^2 - \dot{y}_k^2}{H - H_k} + g_R, \quad (4.47)$$

где a_z — заданное ускорение;

$\dot{y}$ и H — текущие значения скорости и высоты снижения, соответственно;

$\dot{y}_k$ и H_k — конечные значения скорости и высоты, равные 3,05 м/сек и 30,5 м.

Согласно данному закону управления при отклонении фактической траектории от номинальной тяга изменяется так, чтобы получить новую траекторию постоянного торможения, содержащую точку с координатами $\dot{y}_k$ и H_k .

Можно принять закон управления в виде соотношения

$$a_z = a + k_a (\dot{y} - \dot{y}_s), \quad (4.48)$$

где a — номинальное ускорение;

k_a — передаточный коэффициент, который может быть функцией высоты или времени;

$$\dot{y}_s = \sqrt{2(a - g_R)(H - H_k) + \dot{y}_k^2} \quad (4.49)$$

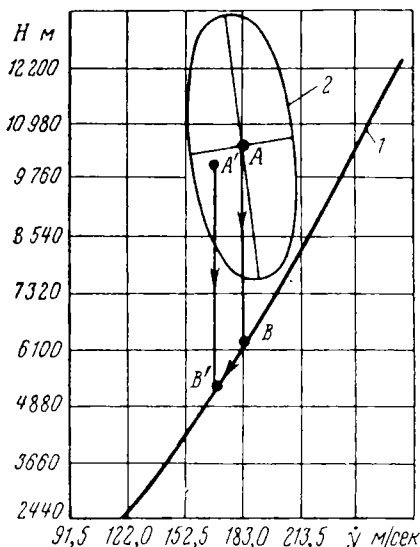


Рис. 4.27. Траектория снижения на фазовой плоскости:

1 — номинальная (опорная) траектория; 2 — эллипс рассеивания точки срабатывания основного двигателя (при вероятности 99,9%)

— заданная скорость снижения, соответствующая определенной высоте на номинальной фазовой траектории.

При этом законе управления происходит устранение отклонений фактической траектории от номинальной. В случае отсутствия возмущений оба рассмотренных закона идентичны, но при наличии возмущений несложно установить их различие. Более предпочтительным является второй закон управления, поскольку он обеспечивает большее соответствие между фактической и номинальной траекториями и дает меньшие колебания величины ускорения, особенно на заключительной фазе управления.

Учитывая, что на большей части участка работы верньерных двигателей положение аппарата почти вертикально, выражения (4.48) и (4.49) можно преобразовать введением вместо H наклонной дальности q , а вместо $\dot{y}$ — скорости V_y вдоль мгновенной оси тяги. Необходимость в таком преобразовании вызвана непосредственным использованием результатов измерений без сложных матричных преобразований. Итак, принятый закон управления перепишем в виде

$$a_3 = a + k_a (V_y - V_3),$$

где

$$V_3 = \sqrt{2(a - g_R)(q - H_K) + V_{yK}^2}.$$

Канал бокового или горизонтального управления ограничивает горизонтальную составляющую скорости снижения аппарата. Максимальная величина 3σ горизонтальной скорости в момент прилунения не должна превышать 3,05 м/сек [107]. Если проанализировать источники возникновения горизонтальной скорости (см. табл. 4.1), то становится понятным необходимость бокового управления.

Основные требования к каналу бокового управления можно сформулировать следующим образом:

1) устранение начальной ошибки в горизонтальной скорости, не меньшей, чем 30,5 м/сек;

2) обеспечение нормальной работы измерительных устройств (максимальный угол $\gamma_{\max}$ между тягой и вертикалью должен быть мал);

3) ограничение угловых ускорений и скоростей по величине до пренебрежимо малых значений;

Таблица 4.1

Источник ошибки	Максимальная ошибка 3σ м/сек
Ошибка системы слежения	12,8
Ошибка ориентации	25,3
Разброс полного импульса основного двигателя	12,5
Суммарная ошибка	31,1

4) ориентация аппарата перед посадкой с малым углом тангажа;

5) ограничение горизонтальной составляющей скорости в момент соприкосновения с поверхностью (не более $3,05 \text{ м/сек}$). Здесь также возможны различные законы управления.

При линейном законе управления углу между осью тяги аппарата и местной вертикалью в плоскости траектории придается определенное значение. Затем этот угол уменьшается с постоянной скоростью до нуля, вследствие чего боковая составляющая скорости также стремится к нулю. В скоростном законе угол между вектором скорости аппарата и направлением тяги α используется для выработки команд управления по тангажу и рысканию с тем, чтобы этот угол свести постепенно к нулю.

Линейный закон обеспечивает малость угла $\gamma_{\max}$, однако необходимость управления аппаратом в инерциальной системе координат усложняет измерительную и вычислительную аппаратуру. Скоростной закон не требует знания направления местной вертикали и положения аппарата. Одновременное управление по продольному и боковому каналам автоматически обеспечивает совмещение оси тяги с местной вертикалью. Достоинство скоростного закона управления состоит еще и в том, что все возмущения в параметрах траектории, текущие ошибки и ошибки начальных условий, которые могли бы остаться в инерциальной системе отсчета незамеченными, устраняются независимо от их происхождения. Единственным его недостатком является несколько большая величина угла $\gamma_{\max}$. Однако при соответствующем выборе передаточной функции системы управления скоростной закон управления в состоянии удовлетворить всем перечисленным выше требованиям.

Блок-схема контура управления на конечном участке снижения с указанием используемой информации и управляющих команд изображена на рис. 4.28. Обработка полученной информации определяет следующие параметры:

q — расстояние до лунной поверхности вдоль оси тяги;
 V_x, V_y, V_z — проекции скорости аппарата на оси крена, рыскания и тангажа, соответственно;
 a — ускорение, создаваемое тягой двигателей.

Вычислительное устройство системы выдает:

a_3 — величину заданного (требуемого) ускорения;
 ω_{3y} — величину требуемой угловой скорости относительно оси рыскания;
 ω_{3z} — величину требуемой угловой скорости относительно оси тангажа.

После сравнения заданного ускорения a_3 с измеренным a усиленный сигнал их разности посылается на управляющие клапаны верньерных двигателей для поддержания необходимой величины тяги. Заданные значения угловых скоростей ω_{3y} и ω_{3z} непосредственно подаются на позиционные гироскопы. Кроме

управляющих сигналов, вычислительное устройство вырабатывает и посылает команды на привод антенны радиолокатора, осуществляющей слежение за Землей во время маневров снижения и посадки.

Из приведенной блок-схемы следует, что каналы продольного и бокового управления представляют собой замкнутые динамические системы. Вследствие незначительного отличия траектории вертикального снижения от номинальной, а также малости угла отклонения углового положения аппарата от заданного взаимной связью каналов в первом приближении можно пренебречь.

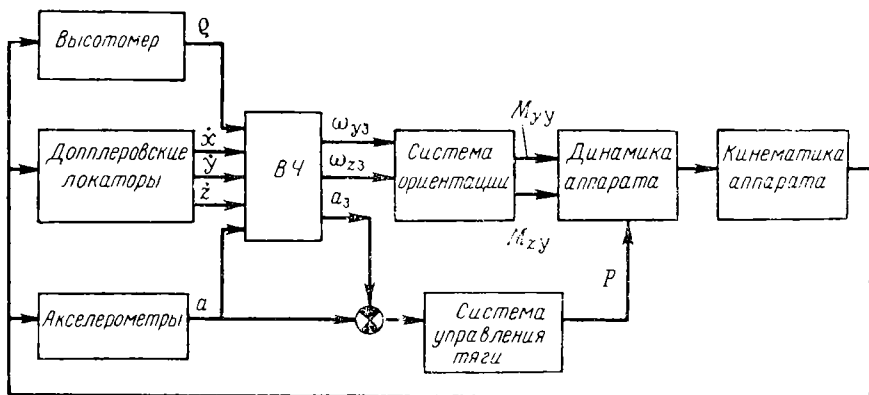


Рис. 4. 28. Блок-схема контура управления на конечном участке снижения

Это позволяет использовать уравнения возмущенного движения в отклонениях от номинальной траектории и рассматривать динамику процесса снижения по каналам управления отдельно. В качестве иллюстрации проведем краткое исследование продольного канала, ограничиваясь получением аналитических соотношений для оценки возможной погрешности системы. В основу исследования положим закон управления (4. 48), который в силу принятой зависимости текущей высоты H от заданной скорости $\dot{y}_a$ является нелинейным. Допущение о малости отклонений действительной траектории от номинальной позволяет линеаризовать данную зависимость и тем самым упростить синтез системы управления. Учитывая, что $\dot{y}_a$ соответствует значению скорости номинальной траектории на измеренной высоте h , можно записать:

$$\dot{y}_3 = \dot{y}_K + (a_N - g_R)\tau, \quad (4. 50)$$

где $\tau = t_0 - t$ — инверсное время, отсчитываемое от момента достижения аппаратом скорости $\dot{y}_K$.

Дифференцируя выражение (4.48) по высоте, получаем

$$\frac{d\dot{y}}{dh} = \frac{a_N - g_R}{\sqrt{2(a - g_R)(h - h_K) + y_K}} = \frac{a_N - g_R}{\dot{y}_K + (a_N - g_R)\tau}. \quad (4.51)$$

Обозначим:

$$\Delta\dot{y} = \dot{y} - \dot{y}_N, \quad \Delta h = h - h_N,$$

$$\Delta a = a - a_N, \quad \Delta\dot{y}_3 = \dot{y}_3(h) - \dot{y}_N,$$

где индекс «N» указывает на принадлежность параметра номинальной траектории. С учетом введенных обозначений на

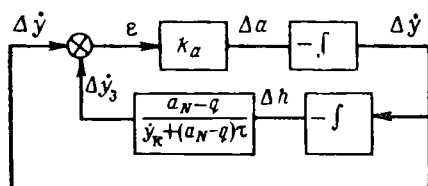


Рис. 4.29. Контур формирования сигнала в канале продольного управления

рис. 4.29 изображен контур формирования сигналов в линеаризованной системе управления в отклонениях.

Из выражения для ошибки системы по скорости $\varepsilon = \Delta\dot{y} - \Delta\dot{y}_3$ можно получить следующее дифференциальное уравнение для изменения этой ошибки в инверсном времени ($d\tau = -dt$):

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \dot{y} = \frac{d\Delta\dot{y}_3}{dh} \frac{dh}{d\tau} = \varepsilon \left[k_a - \frac{a_N - g_R}{\dot{y}_K + (a_N - g_R)\tau} \right], \quad (4.52)$$

так как

$$\frac{dh}{d\tau} = \Delta\dot{y} = k_a \varepsilon.$$

В общем случае коэффициент k_a является функцией времени, т. е. $k_a = f(t)$.

Для упрощения решения уравнения (4.52) положим $k_a = \text{const}$. Тогда, интегрируя уравнения (4.52), получаем

$$\frac{\varepsilon(\tau)}{\varepsilon(\tau_0)} = \frac{\dot{y}_K + (a_N - g_R)\tau_0}{\dot{y}_K + (a_N - g_R)\tau} e^{k_a(\tau - \tau_0)}.$$

На рис. 4.30 приведены графики изменения полученного отклонения в зависимости от τ_0 для постоянных значений k_a .

Из графиков видно, что величина начальной ошибки $\varepsilon(\tau_0)$ изменяется тем значительней, чем больше значение τ_0 . Любопытно, что при малых τ_0 ошибка по скорости возрастает. Данное

обстоятельство объясняется характером изменения траектории движения на начальном участке и не служит оценкой качества системы. Определенный интерес представляет анализ погрешности системы по высоте. Учитывая, что отключение управления (верньерных двигателей) происходит при равенстве измеренной скорости $\dot{y}$ заданной $\dot{y}_3$, выражение для ошибки по высоте можно представить следующим образом:

$$\varepsilon = -\frac{\partial h}{\partial y_3} (\Delta \dot{y} - \Delta \dot{y}_3) = -\frac{\dot{y}_3}{a_N - g_R} \varepsilon.$$

Подстановка выражения для ε в момент отключения управления ($\tau=0$) дает

$$\varepsilon = \varepsilon(\tau_0) e^{-k_a \tau_0}.$$

Таким образом, ошибка по высоте также убывает по экспоненциальному закону. Легко проверить, что при $\tau_0=50$ сек, $\varepsilon(\tau_0)=300$ м и $k_a=0,1$, конечная ошибка составляет ~ 2 м. При увеличении коэффициента k_a ошибка убывает до ничтожно малого значения.

Полученные результаты, естественно, подлежат проверке путем решения дифференциальных уравнений, описывающих динамику процесса, на вычислительной машине. Однако предварительный выбор параметров закона управления на начальной стадии проектирования системы, как это следует из приведенного исследования, целесообразно проводить на линеаризованной модели.

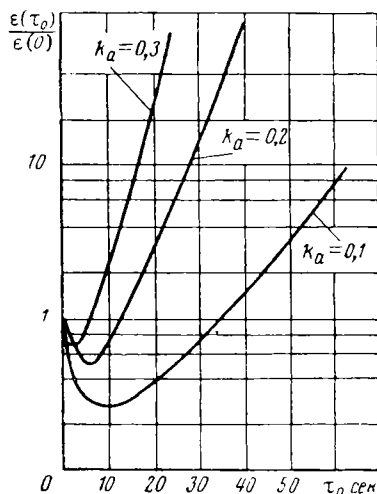


Рис. 4.30. Изменение относительной ошибки в зависимости от времени при различных значениях параметра k_a

ГЛАВА V

Маневрирование при межпланетных полетах

§ 5.1. ХАРАКТЕРИСТИКА ТРАЕКТОРИЙ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПОЛЕТОВ

Конечная цель межпланетных полетов — осуществление высадки экспедиции на поверхность той или иной планеты с последующим возвращением на Землю. Для решения этой задачи ввиду ее чрезвычайной технической сложности требуется большая программа экспериментальных полетов автоматических межпланетных станций. Первый этап этой программы — полеты автоматических станций в сторону планеты с преодолением сравнительно больших расстояний. Более сложные технические задачи решаются в полетах автоматических станций, предназначенных для облета планеты на относительно близком от нее расстоянии для изучения окружающего ее пространства, а также для попадания станции на поверхность планеты. Эти полеты призваны сыграть роль подготовительного этапа для создания искусственных спутников планет и высадки экспедиции на поверхность планеты.

Естественно, что первыми объектами межпланетных полетов являются ближайшие к Земле планеты — Марс и Венера. Первые полеты к этим планетам были осуществлены советскими автоматическими межпланетными станциями «Марс-1» и «Венера-1». Указанные космические аппараты были неманеврирующие. В полетах космических аппаратов «Маринер» и «Венера-3» выполнялись корректирующие маневры, поскольку при этом решались такие задачи, как облет Марса (станция «Маринер») на сравнительно близком расстоянии, а также попадание станции на поверхность Венеры (станция «Венера-3»). Еще более сложная программа маневров выполнялась космическим аппаратом «Венера-4», который впервые в мире осуществил плавный спуск в атмосфере Венеры. В полетах пилотируемых межпланетных кораблей потребуются выполнение целого ряда маневров: корректирующих маневров как при прямом, так и при обратном перелетах, маневров орбитального перехода с гипер-

болической орбиты облета на орбиту спутника планеты, посадочные маневры, маневры встречи на орбите спутника, маневры перехода на гиперболическую орбиту отлета от планеты, маневры входа в атмосферу Земли, снижения и посадки.

Основной участок межпланетной траектории — орбита перелета, как показано в § 1.3, определяется вектором выходной скорости. Поскольку наклонения планетных орбит к плоскости эклиптики, а также эксцентриситеты орбит малы, в первом при-

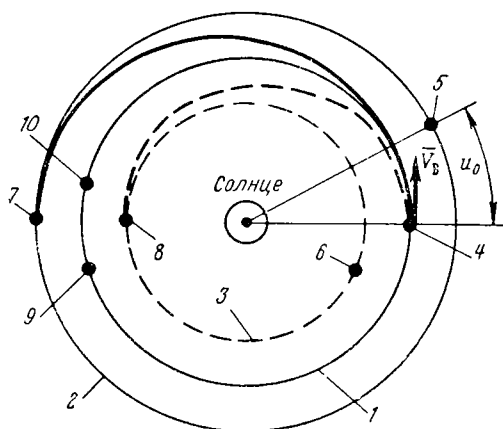


Рис. 5.1. Полуэллиптические орбиты перелета к планетам солнечной системы:

1—орбита Земли; 2—орбита внешней планеты; 3—орбита внутренней планеты; 4—положение Земли в момент выхода корабля из ее сферы действия; 5, 6—соответствующие положения внешней и внутренней планеты; 7, 8—точки встречи корабля с планетами; 9 и 10—положение Земли в момент встречи корабля с внешней и внутренней планетой, соответственно

ближении этот участок полета можно рассматривать как компланарный орбитальный переход между круговыми орбитами. Следовательно, оптимальной орбитой перелета является эллипс Хомана. Подобные орбиты известны также под названием *полуэллиптических*.

Основным требованием к орбите перелета является условие прибытия межпланетного корабля одновременно с планетой в точку их встречи (в общую точку орбит корабля и планеты). При этом перигелий полуэллиптической орбиты перелета к внешней планете (находится на большем, чем Земля, удалении от Солнца) располагается на орбите Земли (планеты отправления), а афелий — на орбите планеты прибытия (рис. 5.1). Если планета прибытия внутренняя (радиус ее орбиты меньше радиуса орбиты Земли), то на орбите Земли находится афелий, а на орбите планеты — перигелий орбиты перелета (соответствующие орбиты на рис. 5.1 показаны пунктиром). На основании

равенства (1.21) период обращения корабля определяется выражением

$$T_k = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{q_n + q_3}{2}\right)^3}{\mu}} = T_3 \frac{\sqrt{(1 + \tilde{q}_n)^3}}{2\sqrt{2}}, \quad (5.1)$$

где T_3 — период обращения Земли (равен одному тропическому* или звездному году);

$\tilde{q}_n = q_n/q_3$ — средний радиус орбиты планеты в астрономических единицах, который должен удовлетворять условию

$$\frac{T_k}{2} = \frac{\pi - u_0}{2\pi} T_n,$$

где T_n — период обращения планеты;

u_0 — ее угловое расстояние от Земли в момент выхода корабля из сферы действия последней.

Период обращения планеты на основании выражения (1.21) можно представить в виде

$$T_n = T_3 \tilde{q}_n^{3/2}. \quad (5.2)$$

После подстановки формулы (5.2) в приведенное выше равенство находим

$$u_0 = \pi \left[1 - \frac{(1 + \tilde{q}_n)^{3/2}}{2\sqrt{2}} \right].$$

Таким образом, перелет по полуэллиптической орбите возможен при вполне определенном положении планеты относительно Земли. Подставляя в найденную формулу значения $\tilde{q}_n$ из табл. 1.4, получим для Марса $u_0 \approx 44^\circ, 2$, а для Венеры $u_0 \approx -52^\circ, 6$. Подобные относительные положения Земли и планеты будут повторяться с периодом

$$T_* = \frac{2\pi}{\Delta v_*},$$

где

$$\Delta v_* = 2\pi \left| \frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_3} \right|.$$

С учетом формул (5.1) и (5.2) получим

$$T_* = T_3 \frac{\tilde{q}_n^{3/2}}{1 - \tilde{q}_n^{3/2}}.$$

* Тропическим годом называется промежуток времени между двумя последовательными прохождением центра Солнца через точку весеннего равноденствия в процессе его видимого движения по эклиптике на небесной сфере, он равен 365,2422 средних суток.

При полете к Марсу указанный перелет возможен примерно через 2,14 года, а к Венере — через 1,6 года.

При определении периодичности повторения условий перелета по полуэллиптическим орбитам не накладывались ограничения на положение Земли в момент выхода межпланетного корабля из ее сферы действия. Учитывая, что орбиты планет наклонены (хотя и на малые углы) к плоскости эклиптики, перелет по полуэллиптической орбите возможен лишь при опреде-

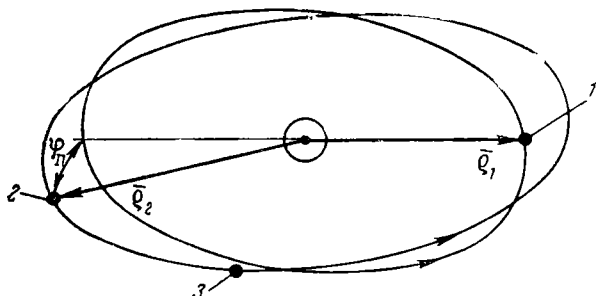


Рис. 5.2. Возможное положение Земли в момент выхода корабля из ее сферы действия:

1—восходящий узел орбиты планеты; 2—положение Земли в момент выхода корабля из ее сферы действия; 3—точка встречи корабля с планетой

ленных положениях Земли на своей орбите. В самом деле, если Земля находится на большом угловом удалении (близком к 90°) от восходящего узла орбиты планеты (рис. 5.2), то радиус-вектор $\underline{q}_1$ точки встречи корабля с планетой наклонен к плоскости эклиптики на угол, близкий к наклонению орбиты планеты. При этом полуэллиптическая орбита перелета, как видно из выражения (1.53), будет иметь довольно большое наклонение (близкое к 90°). Это возможно лишь при значительной геоцентрической скорости корабля на границе сферы действия Земли (много большей орбитальной скорости Земли). Значительно выгоднее в указанном случае осуществлять перелет по орбите с нулевым наклонением, осуществляя встречу с планетой в восходящем или нисходящем узле ее орбиты.

Следовательно, перелеты по полуэллиптическим орбитам возможны при небольших отклонениях векторов $\underline{q}_1$ и $\underline{q}_2$ от линии узлов планетной орбиты, когда орбита перелета имеет малое наклонение и перелет является практически компланарным относительно эклиптики. Предположим, что выход межпланетного корабля происходит вблизи восходящего узла планетной орбиты, а точка встречи с планетой находится вблизи нисходящего узла. Отклонение последней относительно нисходящего узла на небольшой угол $\Delta\mu$ приводит к ее подъему (или пони-

жению) относительно плоскости эклиптики на величину гелиоцентрической широты

$$\varphi_{\Pi} = \arcsin(\sin i_{\Pi} \sin \Delta u_{\Pi})$$

или

$$\varphi_{\Pi} \simeq i_{\Pi} \Delta u_{\Pi}. \quad (5.3)$$

Для перелета по полуэллиптической орбите точка выхода корабля из сферы действия Земли также должна иметь гелиоцентрическую широту, равную по величине $|\varphi_{\Pi}|$ и противоположную по знаку. Заметим, что в данном случае наклонение орбиты перелета (относительно эклиптики) равно $|\varphi_{\Pi}|$.

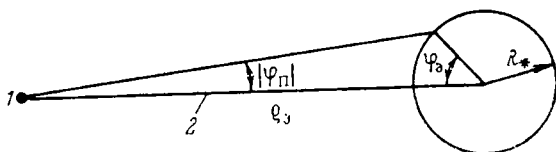


Рис. 5.3. К оценке гелиоцентрической широты корабля в точке выхода из сферы действия:

1—центр Солнца; 2—плоскости эклиптики

Вводя угол φ_0 наклона плоскости геоцентрической орбиты к эклиптике (рис. 5.3) и учитывая, что $R_* \ll q_3$, находим

$$|\varphi_{\Pi}| \simeq \frac{R_* \sin \varphi_0}{q_3},$$

или

$$|\varphi_{\Pi}|_{\max} \simeq \frac{R_*}{q_3}.$$

Подставляя эти соотношения в равенство (5.3), получим

$$|\Delta u_{\Pi}| \simeq \frac{R_* \sin \varphi_0}{q_3 i_{\Pi}},$$

или

$$|\Delta u_{\Pi}|_{\max} \simeq \frac{R_*}{q_3 i_{\Pi}}.$$

Из последней формулы после подстановки $R_* = 0,93 \cdot 10^6$ км, $q_3 \simeq 150 \cdot 10^6$ км и i_{Π} в соответствии с табл. 1.4 находим предельные отклонения точки встречи корабля с Марсом $|\Delta u_{\Pi}|_{\max} \simeq 7^\circ$ и с Венерой $|\Delta u_{\Pi}| \simeq 4^\circ$.

Таким образом, перелет по полуэллиптической орбите возможен при нахождении Земли в момент выхода корабля из ее сферы действия относительно восходящего узла орбиты планеты назначения в пределах

$$-|\Delta u_{\Pi}|_{\max} \leq \Delta u \leq |\Delta u_{\Pi}|_{\max}. \quad (5.4)$$

Оценим периодичность выполнения условия (5.4). Для этого предположим, что в момент $t=0$ Земля находится в восходящем узле орбиты планеты, а планета имеет аргумент широты u_{20} . В некоторый момент времени t аргументы широты Земли и планеты будут

$$u_1 = \frac{2\pi}{T_3} t,$$

$$u_2 = u_{20} + \frac{2\pi}{T_n} t.$$

Запишем моменты времени, в которые Земля (аргумент широты u_1) попадает в диапазон (5.4), в виде

$$t = nT_3 \pm \frac{|\Delta u_n|}{2\pi} T_3.$$

Подставляя это выражение в формулу для u_2 и принимая $u_2 = u_0 + 2k\pi$, имеем

$$u_0 + 2k\pi = u_{20} + 2\pi \frac{T_3}{T_n} n \pm \frac{T_3}{T_n} |\Delta u_n|.$$

Это уравнение определяет количество оборотов n Земли по орбите, через которые выполняется условие (5.4) при аргументе широты планеты $u_2 = u_0$. Первый раз указанные условия выполняются при n_1 — целом, определяемом формулой

$$n_1 = \frac{2k_1\pi + u_0 - u_{20} \pm \frac{T_3}{T_n} |\Delta u|}{2\pi \frac{T_3}{T_n}},$$

аналогично

$$n_2 = \frac{2k_2\pi + u_0 - u_{20} \mp \frac{T_3}{T_n} |\Delta u|}{2\pi \frac{T_3}{T_n}}.$$

Так как u_0 и u_{20} являются определенными величинами для заданного начального положения рассматриваемой планеты, а $|\Delta u_n|$ может в каждом конкретном случае изменяться от нуля до $|\Delta u_n|_{\max}$, периодичность повторения анализируемых условий соответствует

$$\Delta n = \Delta k \frac{T_n}{T_3} \mp \frac{|\Delta u_n|}{2\pi},$$

где Δn и Δk — целые числа.

При выполнении полетов к Марсу ($T_{\text{п}}/T_{\text{з}} \approx 1,88$) имеем

$$\Delta n = 1,88 \Delta k \mp \frac{|\Delta u_n|}{2\pi},$$

причем

$$0 \leq \frac{|\Delta u_n|}{2\pi} \leq 0,02.$$

Нетрудно убедиться в том, что наименьшее число Δn будет при $\Delta k=9$. При этом $\Delta n=17$. Учитывая, что аналогичные условия могли бы быть получены и для случая, когда Земля в момент выхода корабля из ее сферы действия находится вблизи нисходящего узла орбиты планеты, можно считать, что перелет к Марсу по полуэллиптической орбите возможен примерно с периодичностью 8,5 лет. По аналогии для Венеры ($T_{\text{п}}/T_{\text{з}} \approx 0,615$) имеем

$$\Delta n = 0,65 \Delta k \mp \frac{|\Delta u_n|}{2\pi},$$

где

$$0 \leq \frac{|\Delta u_n|}{2\pi} \leq 0,011.$$

Целое значение получим при $\Delta k=26$, тогда $\Delta n=16$. Следовательно, условия перелета по полуэллиптической орбите наступают примерно через восемь лет.

Возможность осуществления перелетов (частота их выполнения) может быть существенно увеличена за счет небольшого наклона геоцентрической скорости на границе сферы действия Земли, а следовательно, и выходной скорости, к плоскости эклиптики, а также за счет некоторого отклонения орбиты перелета от полуэллиптической и соответствующего увеличения $|\Delta u_n|$.

Необходимая величина выходной скорости на основании выражения (1.15) будет

$$V_{\text{в}} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{\varrho_{\text{з}}} - \frac{1}{a_{\text{п}}} \right)}.$$

Здесь $a_{\text{п}} = \frac{\varrho_{\text{з}} + \varrho_{\text{п}}}{2} = \varrho_{\text{з}} \frac{1 + \tilde{\varrho}_{\text{п}}}{2}$ — большая полуось орбиты перелета.

Следовательно,

$$V_{\text{в}} = V_{\text{з}} \sqrt{\frac{2\tilde{\varrho}_{\text{п}}}{1 + \tilde{\varrho}_{\text{п}}}}, \quad (5.5)$$

где $V_{\text{з}}$ — скорость орбитального движения Земли (по круговой орбите), равная 29,76 км/сек.

Очевидно, что при полете к внешним орбитам $V_B > V_3$, а при полете к внутренним планетам $V_B < V_3$. Это означает, что в первом случае вектор $\bar{V}_K$ направлен в ту же сторону, что и $\bar{V}_3$, а во втором — в противоположную сторону. Модуль этого вектора при перелете по полуэллиптической орбите будет

$$|V_K| = |V_B - V_3|. \quad (5.6)$$

Величина V_K определяет большую полуось геоцентрической орбиты, а при заданной высоте перигея также и эксцентриситет.

Проанализируем требования к элементам i , Ω , ω геоцентрической орбиты, которые обеспечивают перелет к планете назначения по полуэллиптической орбите. Как следует из вышеизложенного, в этом случае (см. рис. 5.3) плоскость геоцентрической орбиты наклонена к плоскости эклиптики на угол φ_3 , а вектор скорости $\bar{V}_K$ на границе сферы действия параллелен плоскости эклиптики. Введем единичный вектор $\bar{n}_0$ нормали к плоскости геоцентрической орбиты таким образом, чтобы наблюдаемое с его конца движение корабля происходило против часовой стрелки, и систему координат O_3xyz , ось O_3x которой совместим с направлением на Солнце, а ось O_3z направим перпендикулярно плоскости эклиптики в сторону северного полюса. Тогда на основании рис. 5.4, где сплошными линиями показаны гиперболы и векторы $\bar{n}_0$ и $\bar{V}_K$, характеризующие полет к внешним планетам, имеем

$$\bar{n}_0 = \pm \sin \varphi_3 \bar{i} \mp \cos \varphi_3 \bar{k}. \quad (5.7)$$

Единичный вектор перигея представляется в виде

$$\bar{e}_n = \cos \varphi_3 \sin \theta_a \bar{i} \pm \cos \theta_a \bar{j} + \sin \varphi_3 \sin \theta_a \bar{k}. \quad (5.8)$$

В выражениях (5.7) и (5.8) верхние знаки соответствуют полету к внешним планетам, а нижние — к внутренним. Приведенные векторы преобразуются к системе координат O_3XYZ (рис. 5.5) с помощью матрицы A_{0C} , которая может быть представлена в виде

$$A_{0C} = \begin{vmatrix} \cos u_C & -\sin u_C & 0 \\ \cos \gamma_3 \sin u_C & \cos \gamma_3 \cos u_C & -\sin \gamma_3 \\ \sin \gamma_3 \sin u_C & \sin \gamma_3 \cos u_C & \cos \gamma_3 \end{vmatrix}. \quad (5.9)$$

Здесь угол u_C может быть записан следующим образом:

$$u_C = \frac{2\pi}{T_3} (t - t_*),$$

где t_* — момент времени, в который направление на Солнце совпадает с направлением в точку весеннего равноденствия (21 марта каждого года).

Элементы, характеризующие пространственное положение орбиты, могут быть найдены с помощью следующих равенств:

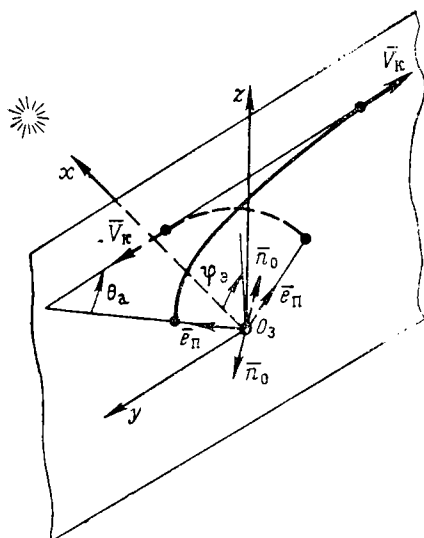


Рис. 5.4. К определению элементов геоцентрической орбиты

$$\begin{aligned}\cos i &= A_{0C} \bar{n}_0 \bar{e}_z, \\ \operatorname{tg} \Omega &= -\frac{A_{0C} \bar{n}_0 \bar{e}_x}{A_{0C} \bar{n}_0 \bar{e}_y}, \\ \cos \omega &= A_1^{-1} A_{0C} \bar{e}_n \bar{e}_{x0}.\end{aligned}$$

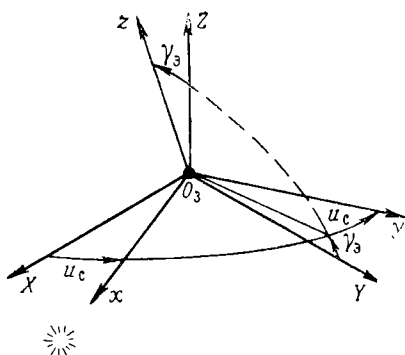


Рис. 5.5. Системы координат

Подставляя сюда выражения (5.7) и (5.8), а также осуществляя преобразования с помощью матриц A_1^{-1} и A_{0C} на основании выражений (1.35) и (5.9), получим

$$\cos i = \pm \cos \gamma_3 \cos \varphi_3 \mp \sin \gamma_3 \sin \varphi_3 \sin u_C, \quad (5.10)$$

$$\operatorname{tg} \Omega = -\frac{\sin \varphi_3 \cos u_C}{\cos \gamma_3 \sin \varphi_3 \sin u_C + \sin \gamma_3 \cos \varphi_3}, \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}\cos \omega &= (\cos \varphi_3 \sin \theta_a \cos u_C + \cos \theta_a \sin u_C) \cos \Omega + (\cos \gamma_3 \cos \varphi_3 \sin \theta_a \sin u_C - \cos \gamma_3 \cos \theta_a \cos u_C - \sin \gamma_3 \sin \varphi_3 \sin \theta_a) \sin \Omega.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\cos \Omega &= -\frac{A_{0C} \bar{n}_0 \bar{e}_Y}{\sqrt{(A_{0C} \bar{n}_0 \bar{e}_X)^2 + (A_{0C} \bar{n}_0 \bar{e}_Y)^2}} = \\ &= \mp \frac{\sin \gamma_3 \cos \varphi_3 + \cos \gamma_3 \sin \varphi_3 \sin u_C}{\Delta_n}, \\ \sin \Omega &= \frac{A_{0C} \bar{n}_0 \bar{e}_X}{\sqrt{(A_{0C} \bar{n}_0 \bar{e}_X)^2 + (A_{0C} \bar{n}_0 \bar{e}_Y)^2}} = \pm \frac{\sin \varphi_3 \cos u_C}{\Delta_n},\end{aligned}$$

где

$$\Delta_n = \sqrt{(\sin \varphi_3 \cos u_C)^2 + (\cos \gamma_3 \sin \varphi_3 \sin u_C + \sin \gamma_3 \cos \varphi_3)^2},$$

преобразуем выражение для $\cos \omega$ следующим образом:

$$\cos \omega = \mp \frac{1}{\Delta_n} [\cos \gamma_s \sin \varphi_s \cos \theta_a + (\sin \theta_a \cos u_c + \cos \varphi_s \cos \theta_a u_c) \sin \gamma_s].$$

Так как для гиперболы

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{e}, \quad (5.12)$$

то окончательно получим

$$\cos \omega = \pm \frac{1}{e \Delta_n} [\cos \gamma_s \sin \varphi_s + (V \overline{e^2 - 1}) \cos u_c + \cos \varphi_s \sin u_c \sin \gamma_s]. \quad (5.13)$$

Выражения (5.10), (5.11) и (5.12) определяют требуемые значения элементов орбиты, характеризующих ее положение в пространстве. Зависимость их от времени (от u_c) объясняет большие преимущества использования промежуточной орбиты спутника Земли для старта межпланетного корабля. В самом деле, предположим, что за счет ошибок на участке выведения наклонение и долготы восходящего узла отличаются от требуемых значений этих элементов для межпланетного полета в рассматриваемый момент времени. Тогда с учетом полученных значений i и Ω можно подобрать такой момент времени (u_c), при котором выполняются равенства (5.10) и (5.11). В соответствии с этим моментом времени по формуле (5.13) определяется значение ω , а следовательно, точка на промежуточной орбите, в которой нужно включить ракету-ускоритель для выполнения маневра старта с орбиты спутника и перехода на гиперболическую орбиту отлета с заданным положением перигея.

Как показано в гл. I, возможные значения наклонения орбиты ограничены по величине широтой точки старта. Следовательно, подставляя в выражение (5.10) вместо i широту φ_s точки старта, получим уравнение, определяющее возможный диапазон u_c (моментов выхода межпланетного корабля из сферы действия Земли), при которых орбита может иметь необходимый угол φ_s наклона к плоскости эклиптики. Пользуясь этим уравнением, можно для каждого значения φ_0 определить возможные значения φ_s , учитывая, что $|\sin u_c| \leq 1$. Так, например, $\varphi_s = 0$ для внешних и $\varphi_s = \pi$ для внутренних планет может быть получено при любых u_c . При этом наклонение орбиты $i = \gamma_s$. Следовательно, запуск возможен лишь из точек с широтой $|\varphi_0| \leq \gamma_s$. Реализация $\varphi_s = \pm \pi/2$ возможна при любых точках старта, так как при этом

$$\cos i = \sin \gamma_s \sin u_c$$

и требуемое наклонение находится в диапазоне

$$\pi/2 - \gamma_0 \leq i \leq \pi/2.$$

Правда, запуск с полюса $|\varphi_0 = \pi/2|$ возможен лишь в моменты, соответствующие $u_c = 0$ или π .

Потребные значения большой полуоси и эксцентриситета могут быть найдены на основании выражений (1.9) и (1.13) для перигея гиперболической орбиты

$$r_{\pi} = a_{\Gamma}(e_{\Gamma} - 1),$$

а также (1.32) — для точки выхода из сферы действия

$$V_{\kappa} = V_{IR} \sqrt{R \left(\frac{2}{R_*} + \frac{1}{a_{\Gamma}} \right)}. \quad (5.14)$$

В результате находим

$$a = \frac{R}{\tilde{V}_{\kappa}^2 - 2 \frac{R}{R_*}} \quad (5.15)$$

и

$$e = 1 + \frac{r_{\pi}}{R} \left(\tilde{V}_{\kappa}^2 - 2 \frac{R}{R_*} \right),$$

где

$$\tilde{V}_{\kappa} = V_{\kappa}/V_{IR}.$$

Зная величины a и e , можно определить требуемое значение начальной скорости межпланетного корабля в перигее гиперболической орбиты

$$V_0 = V_{IR} \sqrt{R \left(\frac{2}{r_{\pi}} + \frac{1}{a_{\Gamma}} \right)}. \quad (5.16)$$

Тогда необходимая величина импульса, создаваемого ракетой-ускорителем, будет

$$J_p = V_0 - V_{\pi},$$

где V_{π} — скорость полета корабля на промежуточной орбите (примерно равна первой космической, так как орбита близка к круговой).

Ошибки в величине и направлении разгоняющего импульса приводят к ошибкам скорости V_0 и ее направления относительно вектора $\vec{V}_{\pi}$, что, в свою очередь, приводит к ошибкам элементов гиперболической орбиты. Ошибки наклонения и долготы восходящего узла приводят к появлению ошибки $\delta\varphi_a$. Однако эта ошибка, как видно из анализа орбиты перелета, не оказывает на последнюю значительного влияния. Ошибки большой полуоси и эксцентриситета приводят к соответствующим ошибкам V_{κ} (а следовательно, и $\tilde{V}_{\kappa}$), а также угла θ_a .

На основании выражений (5.14) и (5.16) имеем

$$V_K^2 = V_0^2 - 2V_{IR}R \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{R_*} \right).$$

Пренебрегая ошибками в высоте перигея (старт с орбиты спутника), находим

$$\delta \tilde{V}_K = \left(\frac{V_0}{V_K} \right)^2 \delta \tilde{V}_0, \quad (5.17)$$

где

$$\left(\frac{V_0}{V_K} \right)^2 = \frac{2/r_n + 1/a_\Gamma}{2/R_* + 1/a_\Gamma}.$$

Ошибка в угле θ_a , определяющем направление вектора $\vec{V}_K$, может быть найдена из выражения (5.10)

$$\delta \theta_a = \frac{1}{e_\Gamma \sqrt{e_\Gamma^2 - 1}} \delta e.$$

Подставляя сюда ошибку δe на основании соответствующих равенств (4.1) и (4.2), получим

$$\delta \theta_a = \frac{2v_0^2}{e_\Gamma \sqrt{e_\Gamma^2 - 1}} \delta \tilde{V}_0. \quad (5.18)$$

Для вычисления ошибок $\delta \tilde{V}_K$ и $\delta \theta_a$ или соответствующих среднеквадратических ошибок σ_{V_K} и σ_{θ_a} необходимо предварительно найти требуемое значение конечной скорости на границе сферы, а также большую полуось и эксцентриситет орбиты при заданном r_n .

В случае полетов к Марсу и Венере после подстановки $\tilde{\theta}_n$ из табл. 1.4 в формулу (5.5) получим выходную скорость 32,8 и 27,3 км/сек, соответственно. Из выражения (5.6) следует, что величины конечной скорости будут 3,04 и 2,46 км/сек. Подставляя эти значения в формулы (5.15), находим значения большой полуоси и эксцентриситета, приведенные в табл. 5.1.

Полагая, что высота промежуточной орбиты $H_n = 200$ км, с учетом данных табл. 5.1 и на основании формул (5.16), (5.17) и (5.18) получим:

Таблица 5.1

Элемент орбиты	a_Γ	e_Γ
Планета назначения	км	
Марс	47700	1,138
Венера	76700	1,086

— при полете к Марсу

$$\delta \tilde{V}_K = 14,1 \delta \tilde{V}_0, \quad \delta \theta_a = 7,05 \delta \tilde{V}_0,$$

— при полете к Венере

$$\delta \tilde{V}_K = 20,9 \delta \tilde{V}_0, \quad \delta \theta_a = 9 \delta \tilde{V}_0.$$

Здесь $\delta \tilde{V}_0 = \delta J_p$ — относительная ошибка величины разгонного импульса.

Ошибки δV_K приводят к соответствующим ошибкам в величине выходной скорости. Учитывая малость угла $\delta \theta_a$ (см. рис. 5.4), имеем

$$\delta V_B \simeq \delta V_K,$$

или

$$\delta \tilde{V}_B = \frac{V_K}{V_B} \delta \tilde{V}_K.$$

После подстановки значений V_B и V_K получим:

— при полете к Марсу

$$\delta \tilde{V}_B = 1,3 \delta \tilde{V}_0, \quad (5.19)$$

— при полете к Венере

$$\delta \tilde{V}_B \simeq 1,9 \delta \tilde{V}_0.$$

Отклонение в направлении вектора выходной скорости, обусловленное ошибками $\delta \theta_a$ и $\delta \varphi_a$ (последняя является следствием ошибок δi и $\delta \Omega$), может быть представлено в виде двух составляющих: по перпендикуляру к плоскости эклиптики и вдоль радиуса-вектора Земли в момент выхода корабля из ее сферы действия. Первая составляющая приводит к ошибкам в наклоне и долготе восходящего узла орбиты перелета, а вторая — к ошибке в аргументе перигея и начальном значении истинной аномалии. Под действием всех рассмотренных ошибок в их совокупности может появиться промах траектории межпланетного корабля относительно планеты. Оценка максимальных значений указанных ошибок и соответствующей величины промаха определяет требования к возможным корректирующим маневрам орбиты перелета. Однако выполнение такой оценки в общем виде представляет определенные трудности в связи с тем, что ошибки в направлении вектора выходной скорости в зависимости от ошибок элементов геоцентрической орбиты выразить в аналитической форме не представляется возможным. Поэтому ее выполняют численными методами на вычислительных машинах.

Оценим влияние ошибок в величине выходной скорости при полетах к Марсу и Венере, определяемых выражениями (5.19), пренебрегая ошибками ее направления. Прежде всего отметим,

что относительная величина этих ошибок имеет тот же порядок, как и относительная ошибка начальной скорости. Следовательно, полет по геоцентрической орбите не приводит к значительному увеличению ошибки.

Требования к точности выдерживания начальной скорости (а следовательно, к величине разгонного импульса) при некорректируемом полете по полуэллиптической орбите могут быть определены с помощью формулы (4.4), которая в данном случае приобретает вид

$$\sigma_{V_n}^2 = \frac{\sigma_d^2}{(1+e_n)^2 b_{14}^2 + 2(1+e_n) b_{14} b_{24} + b_{24}^2}. \quad (5.20)$$

Учитывая, что в данном случае роль начальной скорости играет V_n , а первая космическая скорость равна V_3 , пользуясь выражениями (4.2) и (5.5), находим

$$b_{14} = 2\tilde{q}_n, \quad b_{24} = \frac{2\tilde{q}_n}{1+\tilde{q}_n}.$$

Так как эксцентриситет орбиты перелета будет

$$e = \pm \frac{q_n - q_3}{q_n + q_3} = \mp \frac{1 - \tilde{q}_n}{1 + \tilde{q}_n},$$

где верхний знак соответствует полету к внешней, а нижний — полету к внутренней планете, то формулу (5.20) можно представить в виде

$$\sigma_{V_n} = \frac{\sigma_d}{4\tilde{q}_n}$$

при полете к внешней планете и

$$\sigma_{V_n} = \frac{(1 - \tilde{q}_n)}{8\tilde{q}_n} \sigma_d$$

при полете к внутренней планете.

После подстановки в эти формулы выражений (5.19) и $\tilde{q}_n$ из табл. 1.4 получим выражения, определяющие требуемые значения среднеквадратических ошибок начальной скорости:

— при полете к Марсу

$$\sigma_{V0} \approx \frac{\sigma_d}{8},$$

— при полете к Венере

$$\sigma_{V0} \approx \frac{\sigma_d}{6,4}.$$

Если перед перелетом ставится задача входа в сферу действия планеты, то учитывая, что максимальная допустимая ошибка

при этом равна отношению $R_*/\varrho_{\text{п}}$ для данной планеты, на основании данных табл. 1.4 и 1.5 и правила трех сигм имеем для Марса $\sigma_{\text{д}} \approx 0,85 \cdot 10^{-3}$, а для Венеры $\sigma_{\text{д}} \approx 1,9 \cdot 10^{-3}$. В результате соответственно получим $\sigma_{v_0} = 0,106 \cdot 10^{-3}$ и $\sigma_{v_0} = 0,297 \cdot 10^{-3}$. С учетом начальных скоростей абсолютные значения этих ошибок будут 1,21 и 3,34 м/сек. Следовательно, при некорректируемом полете к Марсу требования к точности выдерживания начальной скорости примерно втрое выше аналогичных требований при полете к Венере. Дополнительные трудности полета к Марсу по полуэллиптической орбите обусловлены также тем, что встреча с планетой производится в афелии орбиты перелета. Поэтому межпланетный корабль длительное время движется вблизи планеты и его орбита сильно возмущается полем тяготения последней. При полете к Венере корабль догоняет планету в перигелии своей орбиты и последняя меньше возмущается полем тяготения планеты.

При решении задачи попадания в планету приближенное значение максимально допустимого промаха может быть оценено как отношение радиуса планеты к ее расстоянию от Солнца. Используя данные табл. 1.3 и 1.4, методом, аналогичным предыдущему, находим для Марса $\sigma_{\text{д}} \approx 1,47 \cdot 10^{-5}$ и для Венеры $\sigma_{\text{д}} \approx 5,7 \cdot 10^{-5}$. В этом случае соответственно получим $\sigma_{v_0} = 0,184 \cdot 10^{-5}$ и $\sigma_{v_0} = 0,89 \cdot 10^{-5}$. Абсолютные значения допустимых среднеквадратических ошибок соответственно будут 0,021 м/сек и 0,1 м/сек. Как видим, требования в данном случае отличаются от предыдущего (примерно в 5 раз). Кроме того, эти требования в обоих случаях настолько высоки, что решение такой задачи в некорректируемом полете практически исключено.

Следует отметить, что аналогично перелету к Луне, требования к точности вывода понижаются при использовании орбиты, радиус афелия которой больше радиуса внешней планеты. То же самое происходит, когда радиус в перигелии орбиты перелета меньше радиуса орбиты внутренней планеты. К тому же при этом, как отмечалось выше, увеличивается возможная частота полетов к данной планете.

После входа в сферу действия планеты назначения корабль совершает маневры, подобные рассмотренным выше маневрам космического аппарата, совершающего полет к Луне в сфере ее действия. Это маневр перехода на орбиту спутника, посадочные маневры, маневры взлета и встречи на орбите спутника. Затем следуют маневры старта с орбиты спутника планеты, корректирующие маневры на орбите перелета, маневры входа в атмосферу Земли и посадки на ее поверхность. Особенность маневров в сфере действия планеты состоит в том, что необходимо учитывать наличие атмосферы. В частности, атмосфера планеты может быть использована для торможения корабля при его переходе на орбиту спутника. Маневрирование при посадке во многом аналогично соответствующему этапу в сфере действия Земли.

Для наилучшего использования атмосферы планеты при выполнении последних маневров возможно использование так называемых «предвестников». Последние предназначены для того, чтобы до входа межпланетного корабля в атмосферу планеты произвести исследование ее плотности в районе полета корабля. Предвестники представляют собой [126] космические аппараты весом 8—9 кг, имеющие на борту акселерометр для измерения торможения атмосферы, передатчик с антенным устройством и двигатель. Предлагается за несколько тысяч километров от границы входа корабля в атмосферу планеты производить запуск с него нескольких таких «предвестников». Под действием импульсов различной величины «предвестники» начинают двигаться быстрее корабля и входят в атмосферу под различными углами примерно на 400 сек раньше корабля. Информация о плотности атмосферы, получаемая предвестниками, передается на борт корабля. Последующая обработка этой информации позволяет с большей точностью выполнить маневр входа корабля в атмосферу планеты. В результате можно существенно уменьшить затраты топлива на выполнение маневра перехода корабля с гиперболической орбиты на орбиту спутника планеты.

§ 5.2. МЕЖПЛАНЕТНЫЙ ПОЛЕТ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ

Одним из возможных средств управляемого полета космического аппарата в околосолнечном пространстве является солнечный парус. Величина тяги, создаваемой солнечным парусом, пропорциональна квадрату косинуса угла γ между нормалью к теневой поверхности паруса и направлением световых лучей, обратно пропорциональна квадрату расстояния q от аппарата до Солнца и может быть вычислена по формуле

$$P_c = P_3 \left(\frac{q_3}{q} \right)^2 S \cos^2 \gamma, \quad (5.21)$$

где $P_3 = 0,928 \cdot 10^{-4}$ дин/см² давление солнечной радиации на орбите Земли;

S — площадь паруса;

q_3 — расстояние от Солнца до орбиты Земли.

Направление тяги совпадает с нормалью к теневой поверхности паруса (рис. 5.6) и может изменяться в пределах $-\pi/2 \leq \gamma \leq \pi/2$. Задача управления тягой солнечного паруса состоит в требуемом изменении угла установки паруса (γ).

Характерной особенностью солнечного паруса является отсутствие весовых затрат, связанных с расходом рабочего тела. Вес двигательной установки включает в себя вес собственно паруса и элементов конструкции, обеспечивающих жесткость и управление. Однако считается, что вес указанных элементов мо-

жет быть сделан малым в сравнении с весом паруса. Последний вычисляется по формуле

$$G_{\pi} = g_0 \rho_{\pi} S \delta,$$

где ρ_{π} — массовая плотность материала паруса;
 δ — толщина паруса.

Отметим, что формула для вычисления P_c справедлива при коэффициенте отражения поверхности паруса равном единице. В противном случае необходимо пользоваться более точными формулами [14]. Обозначим ускорение аппарата, создаваемое парусом, через a_{π} , тогда

$$(m_0 + S \rho_{\pi} \delta) a_{\pi} = P_c S,$$

где m_0 — масса аппарата.

Отсюда получаем формулу для определения характеристик солнечного паруса

$$\frac{m_0}{S} = \frac{P}{a_{\pi}} - \rho_{\pi} \delta.$$

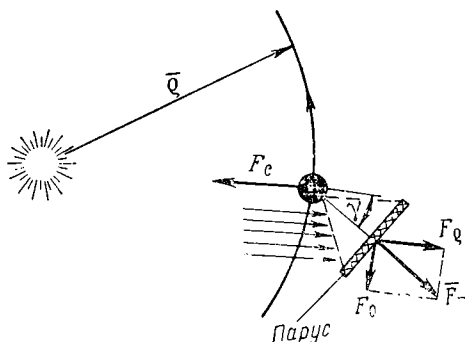


Рис. 5.6. Силы, действующие на парус

Легко подсчитать, что для аппарата с массой $m_0 = 50 \text{ кг}$ ($G \approx 500 \text{ кг}$) при $a_{\pi} = 0,2 \text{ см/сек}^2$ необхо-

димая площадь паруса будет $S = 2,10^9 \text{ см}^2$, что эквивалентно площади круга диаметром 500 м. Следовательно, реализуемые размеры паруса обеспечивают максимальное ускорение $a_{\pi} = 0,2 \dots 0,3 \text{ см/сек}^2$. Хотя тяга, создаваемая парусом реальных размеров, мала по абсолютной величине, однако прикладываемая к аппарату в течение длительного времени, она позволяет осуществлять межпланетные полеты. При этом неисчерпаемые запасы «топлива» не накладывают ограничений на число выполняемых маневров, которые могут производиться изменением угла установки (поверхности) паруса по отношению к солнечным лучам.

Рассмотрим движение космического аппарата с солнечным парусом на участке перелета, лежащем вне сферы действия планет, орбиты которых считаются компланарными и круговыми. Движение происходит в центральном гравитационном поле Солнца, причем поток солнечного света является плоскопараллельным и характеризуется постоянством интенсивности и направления. Действие на парус сил сопротивления космической среды приписывается пренебрежимо малым в сравнении с давлением солнечного света. Последнее допущение справедливо при достаточно большом удалении аппарата от планеты [29].

На рис. 5.6 показаны силы, действующие на аппарат. Выражение для гравитационной силы F_C запишем в виде

$$F_C = F_{C3} \left(\frac{\varrho_3}{\varrho} \right)^2, \quad (5.22)$$

где F_{C3} — гравитационная сила на орбите Земли.

В случае плоского движения составляющие вектора тяги солнечного паруса на радиус-вектор $\vec{\varrho}$ и перпендикуляр к этому вектору в соответствии с формулой (2.77) и построением на рис. 5.6 будут

$$\begin{aligned} P_{\varrho} &= P_0 S \cos^3 \gamma \left(\frac{\varrho_3}{\varrho} \right)^2, \\ P_{\theta} &= P_0 S \sin \gamma \cos^2 \gamma \left(\frac{\varrho_3}{\varrho} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Переписывая уравнения (2.7) в новых обозначениях, с учетом равенств (5.22) и (5.23) получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\varrho} &= -\varrho \dot{\theta}^2 = -(a_C - a_n \cos \gamma) \left(\frac{\varrho_3}{\varrho} \right)^2, \\ \frac{1}{\varrho} \frac{d}{dt} (\varrho^2 \dot{\theta}) &= -a_n \sin \gamma \cos^2 \gamma \left(\frac{\varrho_3}{\varrho} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где $a_C = \frac{F_{C3}}{m} = 0,592 \text{ см/сек}^2$ — гравитационное ускорение Солнца на орбите Земли;

$$a_n = \frac{P_0 S}{m}.$$

Обозначая $V_{\varrho} = \dot{\varrho}$, $V_{\theta} = \varrho \dot{\theta}$, перепишем уравнения (5.28) в форме, удобной для последующего решения:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\varrho} - \frac{V_{\theta}^2}{\varrho} &= -(a_C - a_n \cos^3 \gamma) \left(\frac{\varrho_3}{\varrho} \right)^2, \\ \dot{V}_{\theta} + \frac{V_{\theta} V_{\varrho}}{\varrho} &= -a_n \sin \gamma \cos^2 \gamma \left(\frac{\varrho_3}{\varrho} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Вследствие малости тяги паруса изменения радиальной скорости аппарата будет незначительным, поэтому рассмотрим вначале случаи, когда

$$\dot{V}_{\varrho} \ll \frac{V_{\theta}^2}{\varrho}. \quad (5.26)$$

Тогда первое уравнение системы (5.25) может быть приближенно записано в виде

$$\frac{V_{\theta}^2}{\varrho} = (a_c - a_n \cos^3 \gamma) \left(\frac{\varrho_3}{\varrho} \right)^2,$$

откуда

$$V_{\theta} = \varrho^{1/2} \varrho_3 (a_c - a_n \cos^3 \gamma)^{1/2}.$$

Позже будет указано значение a_n , при котором справедливо условие (5.26). Дифференцируя полученное выражение для V_{θ} по времени, считая угол установки паруса постоянным, получаем

$$\dot{V}_{\theta} = -\frac{1}{2} \varrho^{-3/2} \varrho_3 (a_c - a_n \cos^3 \gamma)^{1/2} V_{\theta}. \quad (5.27)$$

Подставляя это значение $\dot{V}_{\theta}$ во второе уравнение (5.25) и исключая V_{θ} , находим

$$V_{\varrho} = -\varrho^{-1/2} \varrho_3 \frac{2a_n \sin \gamma \cos^2 \gamma}{(a_c - a_n \cos^3 \gamma)^{1/2}}. \quad (5.28)$$

Так как $V_{\varrho} = \dot{\varrho}$, то из выражения (5.28) можно вычислить время полета аппарата между орбитами с радиусами ϱ_0 и ϱ :

$$t = \frac{1}{3} \frac{\varrho_0^{3/2}}{\varrho_3} \frac{-\varrho^{3/2}}{a_n^{1/2}} \frac{\left(\frac{a_c}{a_n} - \cos^3 \gamma \right)^{1/2}}{\sin \gamma \cos^2 \gamma}. \quad (5.29)$$

Полученные решения уравнений (5.25), справедливые при $\dot{V}_{\varrho} \ll \frac{V_{\theta}^2}{\varrho}$, позволяют определить траекторию движения аппарата. Действительно, находя отношение

$$\left| \frac{V_{\varrho}}{V_{\theta}} \right| = \frac{2 \sin \gamma \cos^2 \gamma}{\frac{a_c}{a_n} - \cos^3 \gamma} \operatorname{tg} \psi, \quad (5.30)$$

видим, что оно не зависит от ϱ .

Следовательно, траектория аппарата представляет собой логарифмическую спираль, причем угол спирали $\psi = \operatorname{arctg} \left| \frac{V_{\varrho}}{V_{\theta}} \right|$ является функцией отношения ускорений a_c/a_n и угла установки паруса γ .

Допустим, что планета назначения обращается по круговой орбите на расстоянии q от Солнца. Орбитальная скорость V_n для этой планеты определяется из очевидного равенства

$$\frac{V_n^2}{q} = a_c \left(\frac{q_3}{q} \right)^2,$$

или

$$V_n = a_c^{1/2} q^{-1/2} q_3.$$

Поскольку выражение для полной скорости аппарата

$$V = (V_q^2 + V_0^2)^{1/2}$$

известно, то можно найти отношение

$$\frac{V}{V_n} = \frac{(V_q^2 + V_0^2)^{1/2}}{V_n} = \left[1 - \frac{a_n}{a_c} \cos^3 \gamma + 4 \left(\frac{a_n}{a_c} \right)^2 \frac{\sin^2 \gamma \cos^4 \gamma}{1 - \frac{a_n}{a_c} \cos^3 \gamma} \right]^{1/2}, \quad (5.31)$$

которое также зависит от a_n/a_c и γ . Это означает, что для аппарата с определенным значением указанных параметров отношение V/V_n будет одним и тем же для всех планет солнечной системы.

Мощность N , сообщаемая аппарату тягой солнечного паруса, можно вычислить по формуле

$$N = \vec{P} \cdot \vec{V} = P_q V_q + P_0 V_0,$$

или после подстановки выражений для составляющих векторов тяги и скорости

$$N = m a_n \sin \gamma \cos^2 \gamma \frac{a_c - a_n \cos^2 \gamma}{(a_c - a_n \cos^3 \gamma)^{1/2}} \frac{q_3^2}{q^{5/2}}.$$

Знание мощности позволяет определить работу W , производимую парусом при переходе с одной орбиты радиуса q_0 на другую с радиусом q :

$$W = \int_{t_0}^t N dt = \frac{m q_3^2 (a_c - a_n \cos^3 \gamma)}{2} \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q} \right). \quad (5.32)$$

Оптимизация управления движением космического аппарата с солнечным парусом на межорбитальном участке полета заключается в выборе такого угла установки паруса γ , при котором переход от одной орбиты к другой осуществляется за минималь-

ное время. Обращаясь к уравнению (5.29), видим, что для этого необходимо найти минимум выражения

$$\frac{\left(\frac{a_c}{a_n} - \cos^3 \gamma\right)^{1/2}}{\sin \gamma \cos^2 \gamma},$$

который приводит к выбору угла установки паруса из равенства

$$(1 - 3/2 \sin^2 \gamma) (1 - \sin^2 \gamma)^{3/2} + 3a \sin^2 \gamma - a = 0,$$

где

$$a = \frac{a_c}{a_n}.$$

На рис. 5.7 показаны оптимальные значения угла γ для различных значений a . Здесь же изображено изменение угла спирали ψ траектории, вычисленного из уравнения (5.30) как функция a , для оптимальных углов установок паруса. Для оценки справедливости условия (5.26) продифференцируем по времени выражение (5.28)

$$\dot{V}_q = q^{-3/2} q^2 \frac{2a_n^2 \sin^2 \gamma \cos^4 \gamma}{a_c - a_n \cos^3 \gamma},$$

после чего найдем отношение

$$\frac{\dot{V}_q}{V_q^2} = - \frac{2a_n \sin^2 \gamma \cos^4 \gamma}{a_c - a_n \cos^3 \gamma}.$$

Графическое изображение этого отношения в функции a_n для оптимальных углов γ показано на рис. 5.8.

Из графика следует, что для значений $a_n \leq 0,25 \text{ см/сек}^2$ ускорение $\dot{V}_q$ численно составляет всего 10% от V_0/q . Следовательно, для указанных значений a_n произведенное упрощение уравнений (5.25) обосновано, а при $a_n > 0,25 \text{ см/сек}^2$ необходимо более точное их решение.

На рис. 5.8 показан также график изменения отношения V/V_n , вычисленный по формуле (5.31) в функции a_n для оптимальных углов γ . Видно, что при $a_n < 0,25 \text{ см/сек}^2$ разница между скоростями аппарата и планеты меньше 6%. Это означает, что аппарат движется немного медленнее, чем планета.

В качестве иллюстрации возможности использования солнечного паруса для межпланетных полетов рассмотрим полет с Земли на Венеру. На рис. 5.9 показана установка паруса в этом случае. Здесь угол γ считается положительным, поскольку этому углу соответствует согласно выражению (5.28) отрицательное значение радиальной скорости V_q , означающее движение аппарата по направлению к Солнцу. Трансверсальное уско-

рение $\dot{V}_\theta$ получим, подставляя в выражение (5.27) значение V_0 , определяемое по формуле (5.28):

$$\dot{V}_\theta = \left(\frac{q_3}{q} \right) a_n \sin \gamma \cos^2 \gamma.$$

При положительном угле γ величина данной скорости также положительна. Это свидетельствует об увеличении скорости аппарата по мере его приближения к Венере. Выражение (5.32) показывает, что при движении аппарата с орбиты радиуса q_3

к орбите меньшего радиуса q_B работа, производимая парусом, будет отрицательной. Следовательно, в процессе полета энергия

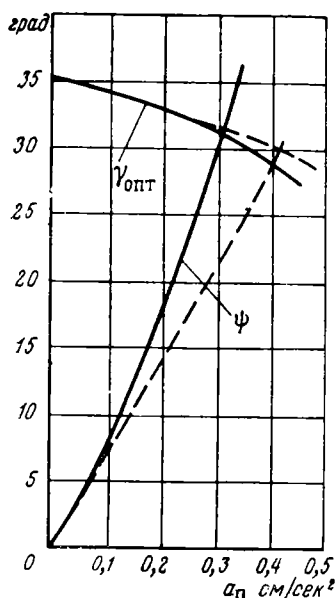


Рис. 5.7. Оптимальные значения углов установки паруса и значения угла спирали

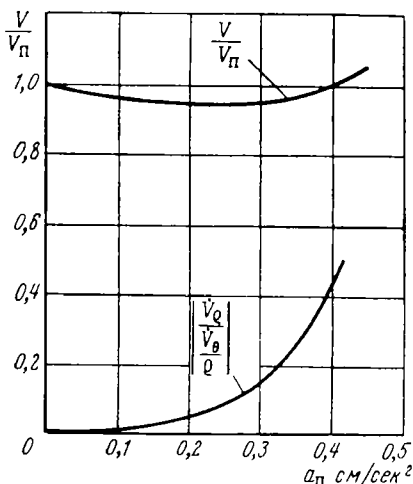


Рис. 5.8. Отношения скоростей и ускорений для оптимальных значений γ

отводится от аппарата и последний, приобретая скорость, теряет потенциальную энергию. Подставляя значения $q_3 = 14,95 \cdot 10^{13} \text{ см}$, $q_n = 1,081 \cdot 10^{13} \text{ см}$, $a_c = 0,592 \text{ см/сек}^2$ в выражение (5.29) и используя оптимальное значение γ для каждого значения a_n , вычислив время полета t как функцию a_n . Результаты вычислений показаны на рис. 5.10.

В настоящее время реально достижение значений a_n порядка $0,1$ — $0,2 \text{ см/сек}^2$. При $a_n = 0,2 \text{ см/сек}^2$ из графика на рис. 5.9 заключаем, что полет с Земли на Венеру займет 52 дня.

Плоскость орбиты Венеры наклонена к плоскости эклиптики под углом $3^\circ,394$. Поэтому, если аппарат не достигнет орбиты Венеры в момент пересечения указанных орбитальных плоскостей, то встреча аппарата с Венерой не состоится. Для осуществ-

вления встречи необходимо приложить к аппарату тягу, направленную перпендикулярно к плоскости эклиптики. Заметим, что приложение такой тяги к аппарату может быть обеспечено изменением ориентации солнечного паруса.

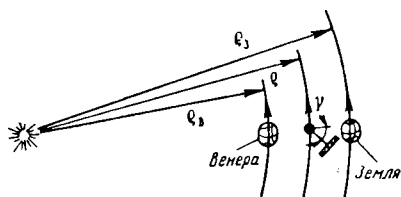


Рис. 5.9. Установка паруса при полете с Земли на Венеру

по мере приближения к Марсу. При $q_3 = 1,495 \cdot 10^{12}$ см, $q_M = 2,28 \cdot 10^{13}$ см и $a_c = 0,592$ см/сек² из выражения (5.29) можно найти оптимальное время полета к Марсу (см. рис. 5.10). Принимая $a_n = 0,2$ см/сек², из графика на рис. 5.10 находим, что время полета составляет 118 дней. Плоскость орбиты Марса наклонена к плоскости эклиптики на угол $1^\circ 85$. Поэтому выска-

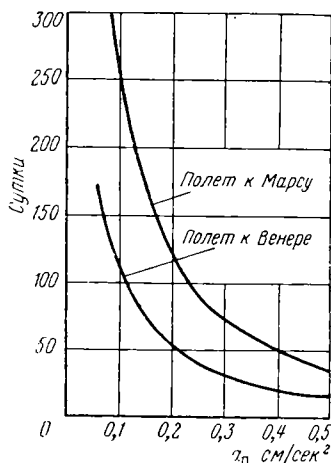


Рис. 5.10. Время полета при оптимальном угле установки паруса

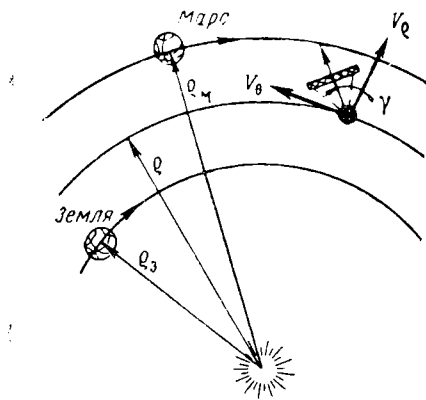


Рис. 5.11. Установка паруса при полете на Марс

занные выше соображения по поводу встречи аппарата с Венерой справедливы и в данном случае.

Проведенные исследования межпланетного полета аппарата с солнечным парусом не затрагивают вопросов выхода аппарата за пределы сферы гравитационного действия Земли. Если же предположить, что сначала аппарат выведен на орбиту спутника

Земли с высотой перигея порядка 2000 км, то для выхода его из поля притяжения Земли потребуется несколько недель. Однако и при учете этого времени использование солнечного паруса обеспечивает меньшее время полета на Марс по сравнению с полетом аппарата по переходному эллипсу (относительно Солнца), выполняемые с помощью тепловых двигательных установок.

В табл. 5.2 приведены данные для сравнения характеристик полета на Марс для реактивных двигателей на химическом топливе и солнечного паруса [29]. Время выхода аппарата из сферы притяжения Земли в последнем случае не учитывается.

Таблица 5.2

№ по пор.	Характеристики	Реактивный двигатель на химическом топливе	Солнечный парус
1	Отношение массы аппарата, покидающего круговую орбиту Земли, к массе аппарата, выходящего на круговую орбиту вокруг Марса	9	1
2	Отношение массы аппарата, покидающего круговую орбиту вокруг Земли, к массе аппарата, вновь возвращающегося на орбиту после полета к Марсу	73	1
3	Отношение массы аппарата, покидающего орбиту вокруг Земли, к массе полезной нагрузки	9	1,8
4	Время полета в днях	260	118
5	Время выхода из поля притяжения Земли	Малое	Несколько недель
6	Время выхода на круговую орбиту вокруг Марса	Малое	Несколько недель

Точное решение уравнений (5.25) при неизменном угле установки паруса может быть получено следующим образом [29]. Зададимся уравнением траектории полета в виде логарифмической спирали

$$\varrho = \varrho_3 e^{\theta \operatorname{tg} \psi}.$$

На рис. 5.12 показаны углы установки паруса и спирали.

Подставим значения q , $\dot{q} = q_3 \dot{\theta} \operatorname{tg} \psi e^{\theta \operatorname{tg} \psi}$, $\ddot{q} = q_3 \ddot{\theta} \operatorname{tg} \psi e^{\theta \operatorname{tg} \psi} + q_3 \dot{\theta}^2 \operatorname{tg}^2 \psi e^{\theta \operatorname{tg} \psi}$ в уравнения (5.24). После исключения из уравнений $\ddot{\theta}$ получим

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\cos^2 \psi}{q_3} e^{-3\theta \operatorname{tg} \psi} [a_c - a_n \cos^2 \gamma (\cos \gamma - \operatorname{tg} \psi \sin \gamma)], \quad (5.33)$$

откуда после дифференцирования имеем

$$\ddot{\theta} = -3/2 \dot{\theta}^2 \operatorname{tg} \psi. \quad (5.34)$$

Подставляя теперь равенства (5.33) и (5.34) в уравнения (5.24), находим

$$\frac{\sin \psi \cos \psi}{2} \left[\frac{a_c}{a_n} - \cos^2 \gamma (\cos \gamma - \operatorname{tg} \psi \sin \gamma) \right] = \sin \gamma \cos^2 \gamma,$$

или

$$\frac{\sin \psi \cos \psi}{2 + \sin^2 \psi} = \frac{\sin \gamma \cos^2 \gamma}{\frac{a_c}{a_n} - \cos^3 \gamma}. \quad (5.35)$$

На рис. 5.13 изображены кривые, полученные при решении соотношения (5.35) для ряда значений a_n . Эти кривые могут

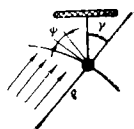


Рис. 5.12.
Углы спира-
ли и уста-
новки парус-
са

служить дополнением аналогичных кривых приближенного решения уравнений (5.24) при $\alpha > 0,25 \text{ см/сек}^2$ и значениях $\psi \neq \sin \psi \approx \operatorname{tg} \psi$. Определим точное время полета. На рис. 5.7 пунктиром показаны соответствующие кривые ψ и γ , обеспечивающие минимальное время полета. Однако, как отмечалось ранее, достижение значений $a_n \geq 0,3 \text{ см/сек}^2$ связано с техническими трудностями и поэтому подробно точное решение уравнения (5.25) здесь не анализируется.

Влияние солнечного паруса на изменение элементов орбиты аппарата легко проследить, полагая $\gamma = 0$. Уравнения движения (5.24) в этом случае переписуются в виде

$$\dot{V}_q - \frac{V_q^2}{q} = (a_n - a_c) \left(\frac{q_3}{q} \right)^2, \\ \frac{d}{dt} (q V_q) = 0.$$

Отсюда следует, что момент количества движения

$$q V_q = q_0 V_{q_0}$$

и полная энергия

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (V_0^2 + V_{\theta_0}^2) - (a_c - a_n) \frac{v_3^2}{\varrho} = \\ = \frac{1}{2} (V_{c0}^2 + V_{n0}^2) - (a_c - a_n) \frac{v_3^2}{\varrho_0}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

где индексом «0» отмечены значения параметров, соответствующие моменту времени $t=0$, остаются неизменными в процессе полета.

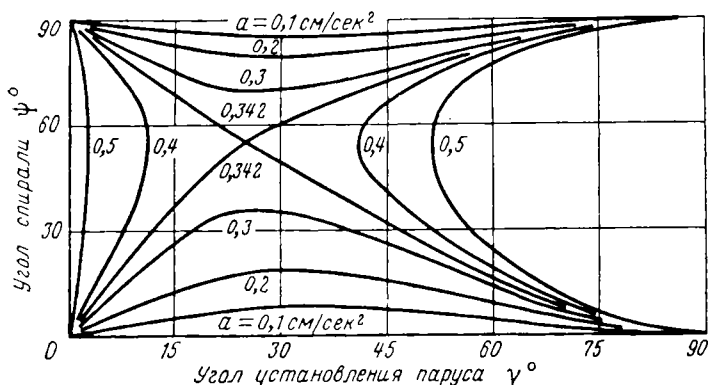


Рис. 5.13. Зависимость угла спирали от γ и a_n

Если положить, что при $t=0$ аппарат выведен на начальную круговую орбиту $\varrho = \varrho_0$, $\theta_0 = 0$ так, что $V_{\varrho_0} = V_0$, $V_{\theta_0} = \sqrt{\frac{g_0}{\varrho_0}}$, то имеем следующие выражения для эксцентриситета e и большой полуоси орбиты a последующего движения аппарата с солнечным парусом:

$$e = \frac{a_n}{a_c - a_n},$$

$$a = \frac{\varrho_0}{\left(2 - \frac{a_c}{a_n}\right)}.$$

Отсюда следует, что при $a_n < 0.5a_c$ траектория полета представляет собой эллипс, тогда как при $a_n = 0.5a_c$ движение будет происходить по параболе и при $a_n > 0.5a_c$ — по гиперболе. Время движения аппарата до радиуса ϱ_1 и полная скорость V_1 на этом радиусе могут быть вычислены по формуле (5.36).

Задача оптимизации движения аппарата с солнечным парусом заключается в нахождении такого закона изменения угла

установки паруса, при котором время выполнения маневра будет минимальным. При этом считается заданной величина a_n ускорения, создаваемая солнечным парусом, в начале движения. Различные способы решения этой задачи на примере полета с Земли на Марс изложены в работе [14]. Важно отметить, что результаты решений выявляют сильное влияние граничных условий по скорости на время перелета. Удовлетворить этим условиям при постоянном угле установки паруса затруднительно, что ограничивает область практического применения данного способа.

§ 5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТРАЕКТОРИЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

При осуществлении полета космического аппарата к Луне и планетам необходимо учитывать возможность появления отклонений параметров траектории от расчетных значений. Рассмотрим, например, задачу о выведении аппарата на орбиту около Марса после торможения в атмосфере Марса. Для выполнения этой задачи необходимо обеспечить попадание аппарата в сравнительно узкий «коридор входа», расположенный вблизи поверхности Марса, имеющий ширину порядка нескольких десятков километров (см. гл. VI). После старта с Земли и выхода на промежуточную орбиту спутника аппарат разгоняется до скорости, превышающей вторую космическую скорость. При этом, как показано в § 5.1, отклонение скорости полета от расчетной в конце участка разгона на величину 1 м/сек может приводить к промаху относительно планеты Марс порядка десятков и сотен тысяч километров. Следовательно, для обеспечения «прямого» попадания в заданный коридор входа в атмосферу Марса необходимо выдержать скорость в конце участка разгона с точностью порядка 1 мм/сек , что является чрезмерно жестким требованием к точности выведения аппарата. Помимо этого существуют и другие факторы, которые приводят к отклонению фактической межпланетной траектории от номинальной. При числовом расчете номинальной траектории трудно учесть влияние всех второстепенных факторов на движение аппарата (например, влияние притяжения отдаленных планет). К тому же некоторые астрономические и физические константы определены с недостаточной точностью, что приводит к существенным погрешностям при расчете траекторий.

Все эти обстоятельства вынуждают к проведению коррекций траектории полета, если требования к точности достаточно высоки. Коррекция траектории выполняется следующим путем. В процессе полета измеряются параметры траектории и вычисляются поправки к величине и направлению скорости, необходимые для выполнения поставленной задачи. Эти поправки вно-

сятся в результате включения корректирующих двигателей, установленных на борту аппарата.

Методы определения параметров траектории (местоположения и скорости) летательного аппарата в космическом пространстве можно условно разделить на три основные категории [59]:

- 1) использование пассивного электромагнитного излучения;
- 2) использование активного электромагнитного излучения;
- 3) использование инерциальной информации.

Системы измерений, связанные с пассивным электромагнитным излучением, используют природное излучение (световое,

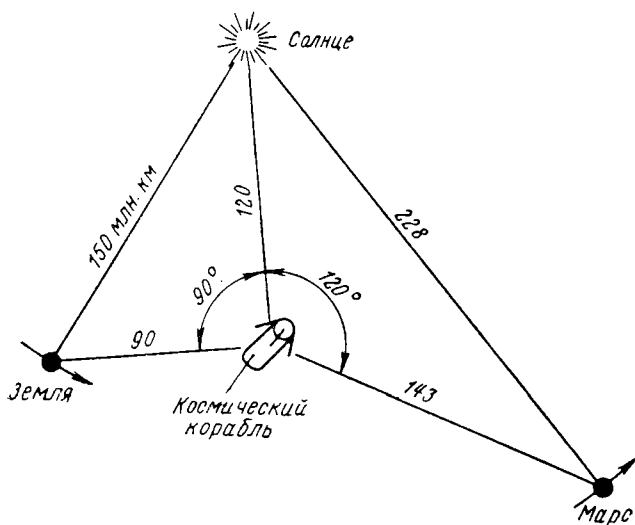


Рис. 5.14. Схема определения координат аппарата

инфракрасное) Солнца, звезд и планет. Эти системы основаны на измерении углов между направлениями на различные небесные тела, а также угловых размеров Солнца, Луны или планет.

Можно считать, что звезды представляют собой бесконечно удаленные тела, поэтому измерение углового расстояния между ними не дает полезной информации. Угол между направлениями на звезду и на близкое небесное тело (Солнце, Луна, планета) определяет коническую поверхность, на которой расположен в данный момент аппарат; угол между направлениями на две планеты определяет поверхность, образованную вращением дуги окружности; угол, стягиваемый диском небесного тела, определяет сферическую поверхность (расстояние до этого тела). Пересечение нескольких поверхностей (которых должно быть не менее трех) определяет местоположение аппарата. На рис. 5.14 приведена схема определения положения аппарата в плоскости эклиптики по измерению двух углов (плоский случай). Если число измеряемых параметров больше трех, то для отыскания

наиболее вероятного положения аппарата необходимо использовать метод наименьших квадратов с учетом сравнительной точности отдельных измерений.

В качестве примера можно указать работу [65], в которой для определения текущих координат аппарата фиксируются изображения планет Солнечной системы на небесной сфере. На рис. 5.15 изображены линии одинаковых среднеквадратичных по-

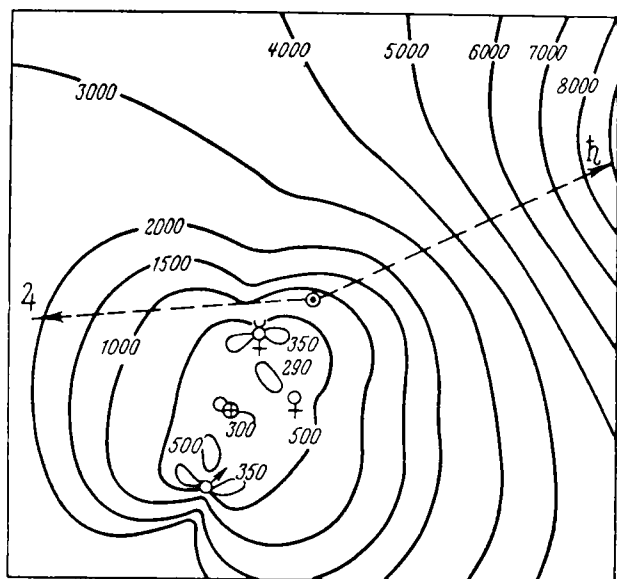


Рис. 5.15. Линии равных ошибок в плоскости эклиптики при наблюдении шести планет 19 мая 1969 г.

грешностей в определении координат аппарата $\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = \text{const}$ в плоскости эклиптики (в км) при условии, что среднеквадратичная погрешность фиксации каждой планеты на небесной сфере составляет 1 угловую секунду по широте и долготе. Координаты аппарата определяются счетно-решающим устройством при использовании данных об эфемеридах (угловых положениях) звезд и о движении планет. Скорость аппарата может быть определена путем дифференцирования значений координат. Если отдельные измерения имеют небольшую точность, то окончательные результаты должны быть получены на основании обработки и сглаживания большого количества измерений.

При использовании активных электромагнитных методов измерений излучение генерируется в самой системе. Основными элементами систем являются радиолокационные станции, размещенные на Земле, а также иногда небольшие радиомаяки или ретрансляционные станции, установленные на борту аппарата.

С помощью активных электромагнитных измерений можно получить различную информацию:

- 1) определять направление на источник излучения;
- 2) определять расстояние от станции до аппарата;
- 3) определять производную от этого расстояния — радиальную скорость.

При использовании радиомаяка, установленного на борту космического аппарата, воспринимаемое на Земле излучение ослабевает обратно пропорционально квадрату расстояния, тогда как при приеме отраженного сигнала оно ослабевает обратно пропорционально четвертой степени расстояния.

Измерение времени прохождения сигналом излучения расстояния между аппаратом и наблюдателем используется для определения расстояния до аппарата. Кодированный сигнал направляется к аппарату, воспринимается им и ретранслируется. Промежуток времени Δt между ушедшим и возвратившимся сигналом определяет расстояние от наблюдателя до аппарата

$$r \approx \frac{c \Delta t}{2}, \quad (5.37)$$

где c — скорость света.

Сигналы могут иметь или форму импульсов или синусоидальную форму, в последнем случае расстояние до аппарата пропорционально разности фазы излучаемого и возвращенного сигнала. Если измерение разности фазы осуществимо с точностью до части периода, то идеальное измерение расстояния осуществимо с точностью до длины волны (порядка нескольких десятков сантиметров) независимо от измеряемого расстояния.

Для определения радиальной скорости V_r измеряется доплеровский сдвиг частот излучаемого f_0 и воспринимаемого сигнала f :

$$\frac{f - f_0}{f_0} = \frac{\Delta f}{f_0} = -2 \frac{V_r}{c}. \quad (5.38)$$

Активные радиометоды наиболее эффективны в том случае, когда аппарат находится вблизи Земли, однако они могут применяться и для дальней радиосвязи — на расстояниях порядка десятков миллионов километров. Как правило, наиболее точно измеряются расстояния до аппарата и радиальная скорость. Поэтому для определения параметров пространственной траектории аппарата можно использовать систему трех локаторов, каждый из которых измеряет лишь указанные два параметра, и применять триангуляционную технику.

Инерциальные системы включают следующие основные элементы: устройство для стабилизации аппарата или приборов, акселерометры — чувствительные элементы для определения ускорений, интегрирующие устройства.

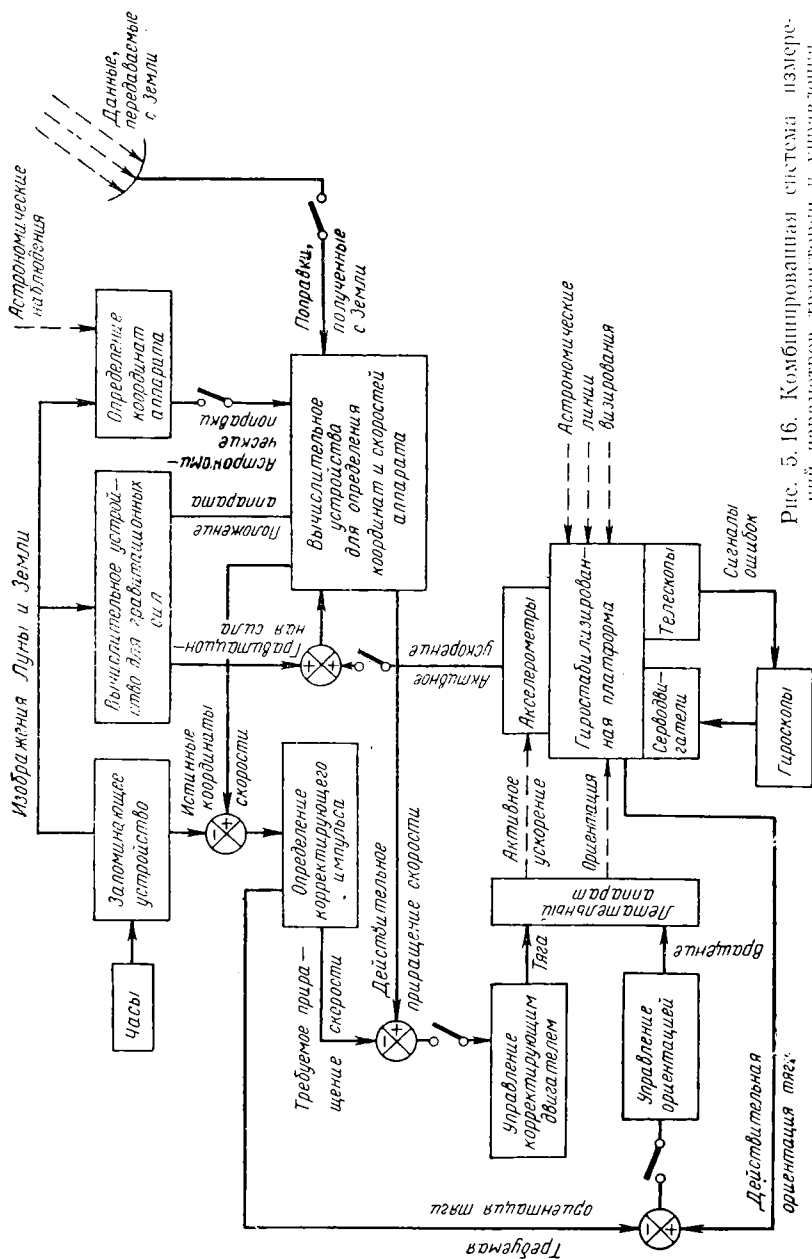


Рис. 5.16. Комбинированная система измерения параметров траектории и управления

Акселерометр измеряет силу, равную активному (негравитационному) ускорению аппарата, умноженному на калиброванную массу. Акселерометры устанавливаются по трем взаимно перпендикулярным осям на гиросtabilизированной платформе. Для вычисления истинной скорости аппарата к показаниям акселерометра вводится поправка на силы тяготения.

Инерциальные системы обладают тем преимуществом, что изменения параметров траектории измеряются ими непосредственно, без запаздывания. Только инерциальные системы позволяют мгновенно определять подходящий момент для выключения тяги. Инерциальная система является полностью автономной и не требует сложного комплекса вычислительной аппаратуры. С другой стороны, любой инерциальной системе свойственно накопление (рост по времени) ошибок, обусловленных дрейфом гироскопов, погрешностями в показаниях акселерометров и погрешностями интегрирования. Инерциальная система требует задания на входе начальных условий по скорости и положению и, как правило, периодического их уточнения.

Поэтому инерциальные системы выгодно использовать в течение сравнительно небольших промежутков времени при наличии значительных активных сил, действующих на аппарат. Такими участками траекторий космических аппаратов являются активный участок (участок выведения), а также участки, на которых выполняются корректирующие импульсные маневры. Схемы управления, в которых предполагается выполнение корректирующего маневра, включают в себя инерциальную систему, необходимую для измерения приложенного импульса и отсечки тяги корректирующего двигателя.

Поскольку указанные способы измерений дополняют друг друга, оптимальная система измерений должна быть комбинированной. Так, на участке выведения считается целесообразным применение инерциальных систем и радиосистем, на промежуточной фазе полета — применение оптических систем и радиосистем и на участке подлета к цели (планета назначения, Луна) — применение оптических систем, причем приложение корректирующих импульсов к аппарату должно контролироваться инерциальными системами. Примерная блок-схема комбинированной системы измерений изображена на рис. 5.16 [66].

§ 5.4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЛИЧИН КОРРЕКТИРУЮЩИХ ИМПУЛЬСОВ

Определение направления и величины потребного корректирующего импульса в общем случае требует решения нелинейных дифференциальных уравнений, которые связывают скорости и координаты аппарата со значениями конечных, корректируемых параметров (например, расстояние перицентра при полете аппарата к планете назначения). В общем случае решение этих урав-

нений является достаточно сложной задачей. Во избежание этих трудностей используется метод *дифференциальной коррекции* [97]. Задавая положение и скорость аппарата при движении по расчетной траектории в любой момент времени, можно вычислить номинальные результаты измерений, которые были бы получены при отсутствии отклонений параметров траектории. Эти результаты могут представлять собой углы между направлениями на различные небесные тела и вообще показания каких-либо приборов. Действительные результаты измерений отличаются от вычисленных заранее. Из сравнения двух величин находятся разности $\delta\epsilon_i$, и эти разности выражаются в виде разложений в ряд Тейлора по отклонениям параметров траектории $\delta x, \delta y, \delta z, \delta V_x, \delta V_y, \delta V_z$:

$$\delta\epsilon_i = g_1\delta x + g_2\delta y + g_3\delta z + g_4\delta V_x + g_5\delta V_y + g_6\delta V_z. \quad (5.39)$$

Уравнения типа (5.39) разрешаются относительно переменных $\delta x, \dots, \delta V_z$ и определяется влияние этих отклонений на ошибки в конечных параметрах. Наряду с этим вычисляется влияние возможных изменений скорости, вызванных приложением корректирующего импульса, на отклонения конечных параметров. В итоге компоненты потребного корректирующего импульса линейно выражаются через измеренные отклонения $\delta\epsilon_i$.

Естественно, что метод дифференциальной коррекции применим непосредственно на практике только при условии линейной зависимости между конечными параметрами и составляющими корректирующего импульса. Однако при предварительном исследовании задачи об оптимальном распределении корректирующих импульсов использование этого метода вполне оправдано.

Выпишем некоторые соотношения, необходимые для оценки количества топлива, затрачиваемого на коррекцию траектории. Будем считать, что используется метод дифференциальной коррекции. Пусть номинальная траектория характеризуется заранее вычисленной зависимостью от времени шести параметров — координат и составляющих скорости, т. е. вектор-функцией:

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ V_x(t) \\ V_y(t) \\ V_z(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть в процессе полета проводятся измерения некоторых параметров ϵ_i — углов, расстояний, скоростей, которые связаны

с компонентами вектора $\bar{r}(t)$ некоторыми соотношениями, причем номинальные значения параметров ε_i также вычислены заранее: $\varepsilon_i(t) = f_i[\bar{r}(t), t]$. Тогда для малых отклонений вектора $\bar{r}(t)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_i(t) &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial f_i}{\partial r_j} [\bar{r}(t), t] \delta r_j(t) = \\ &= g_1(t) \delta r_1 + g_2(t) \delta r_2 + g_3(t) \delta r_3 + g_4(t) \delta r_4 + \\ &+ g_5(t) \delta r_5 + g_6(t) \delta r_6 = \bar{g}^T(t) \delta \bar{r}(t), \end{aligned} \quad (5.40)$$

где δr_j — компоненты вектора $\delta \bar{r}$:

$$\delta r_1(t) = \delta x(t), \dots, \delta r_6(t) = \delta V_z(t),$$

$\bar{g}^T(t)$ — транспонированный вектор, или вектор-строка.

Поскольку величины $\delta r_i(t)$ не могут быть определены точно, они характеризуются своими *оценками* — математическими ожиданиями $\hat{\delta r}_i(t) = M[\delta r_i(t)]$ и математическими ожиданиями произведений

$$k_{ij}(t) = M[(\delta r_i(t) - \hat{\delta r}_i(t))(\delta r_j(t) - \hat{\delta r}_j(t))],$$

которые образуют симметричную матрицу шестого порядка $K(t) = \|k_{ij}(t)\|$ — так называемую *корреляционную матрицу*.

Система управления выводением космического аппарата обеспечивает сведение к нулю всех начальных отклонений $\delta r_i(t_0)$ с точностью до некоторых погрешностей, причем величины этих погрешностей определяют исходное значение корреляционной матрицы:

$$\begin{aligned} \hat{\delta \bar{r}}(t_0) &= 0 \\ K(t_0) &= \|k_{ij}(t_0)\| = \|M\{\delta r_i(t_0) \delta r_j(t_0)\}\|. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Рассмотрим, каким образом изменяются математическое ожидание вектора $\delta r(t)$ и его корреляционная матрица в процессе безатмосферного полета при отсутствии возмущающих сил.

Если измерения и коррекции отсутствуют, то истинный вектор отклонений $\delta \bar{r}(t)$ изменяется по закону

$$\delta \bar{r}(t_2) = \Lambda(t_2, t_1) \delta \bar{r}(t_1),$$

где матрица перехода $\Lambda(t_2, t_1)$ порядка 6×6 определяется с помощью метода Блисса (см. приложение I). Точно таким же образом изменяется и оценка вектора $\delta \bar{r}(t)$:

$$\hat{\delta \bar{r}}(t_2) = \Lambda(t_2, t_1) \hat{\delta \bar{r}}(t_1). \quad (5.42)$$

Корреляционная матрица $K(t)$ изменяется следующим образом:

$$K(t_2) = \Lambda(t_2, t_1) K(t_1) \Lambda^T(t_2, t_1). \quad (5.43)$$

Рассмотрим, как влияют на оценку $\hat{\delta r}(t)$ и корреляционную матрицу $K(t)$ измерения. Любую серию измерений можно представить в виде последовательных единичных измерений. Поэтому будем считать, что в момент времени t_* измерена величина $\varepsilon_i(t_*)$ и, следовательно, определено значение $\delta \varepsilon_i(t_*)$, поскольку номинальное значение $\varepsilon_{i \text{ ном}}(t_*)$ предполагается известным. Измерение проводится со среднеквадратичной ошибкой, равной $\sigma_i(t_*)$. Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда все ошибки измерения независимы.

Тогда после проведения этого измерения корреляционная матрица $K(t)$ изменяется следующим образом (см. приложение II):

$$K(t_*+0) = \left[K^{-1}(t_*-0) + \frac{1}{\sigma_i^2(t_*)} \bar{g}(t) \bar{g}^T(t) \right]^{-1}, \quad (5.44)$$

где t_*-0 и t_*+0 обозначают моменты до и после проведения измерений.

Оценка вектора $\delta \bar{r}$ изменяется после проведения измерения следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\delta r}(t_*+0) &= \hat{\delta r}(t_*-0) + \frac{K(t_*+0)}{\sigma_i^2} \bar{g} [\delta \varepsilon_i - \bar{g}^T \hat{\delta r}(t_*-0)] = \\ &= K(t_*+0) K^{-1}(t_*-0) \hat{\delta r}(t_*-0) + \frac{K(t_*+0) \bar{g}}{\sigma_i^2} \delta \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Если измерения проводятся достаточно часто, их можно считать практически непрерывными. В этом случае для обработки результатов измерений можно применять фильтр Винера—Калмана. Подробно эти вопросы рассматриваются в работе [83] и в книгах [6], [28].

При проведении импульсной коррекции траектории в момент t_{**} вариации скорости изменяются:

$$\hat{\delta r}(t_{**}+0) = \hat{\delta r}(t_{**}-0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Корреляционная матрица $K(t)$ изменяется в том случае, если существуют ошибки в обработке корректирующего импульса:

$$K(t_{**} + 0) = K(t_{**} - 0) + \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{K}_{\delta \Delta \bar{V}} \end{array} \right\|, \quad (5.47)$$

где $\tilde{K}_{\delta \Delta \bar{V}}$ — корреляционная матрица разброса скорости при обработке корректирующего импульса.

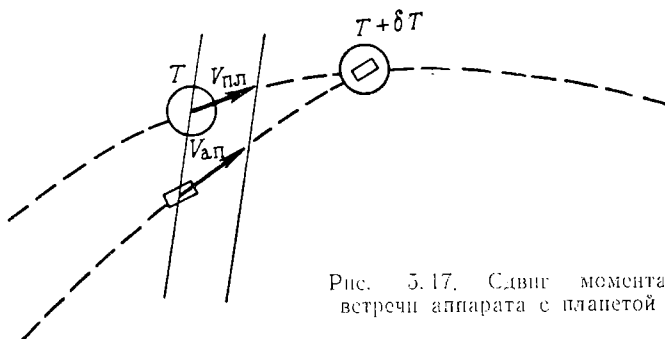


Рис. 5.17. Сдвиг момента встречи аппарата с планетой

Коррекция траектории проводится с целью компенсации конечных отклонений координат или линейных комбинаций координат и скоростей. Пусть, например, требуется, чтобы космический аппарат в определенный момент времени T попал в окрестность планеты назначения. Тогда условием выполнения поставленной задачи является малость трех величин

$$\delta x(T) \approx 0, \quad \delta y(T) \approx 0, \quad \delta z(T) \approx 0, \quad (5.48)$$

конечно, при условии, что при движении по номинальной траектории аппарат попадает в окрестность планеты. Если допускается, чтобы аппарат попал в окрестность планеты необязательно в заданный момент времени T (время прибытия строго не зафиксировано), то задачу можно считать выполненной, если в момент времени $t=T$ выполняются равенства:

$$\begin{aligned} \delta T &= \frac{\delta x(T)}{V_{x \text{ ап}}(T) - V_{x \text{ пл}}(T)} = \frac{\delta y(T)}{V_{y \text{ ап}}(T) - V_{y \text{ пл}}(T)} = \\ &= \frac{\delta z(T)}{V_{z \text{ ап}}(T) - V_{z \text{ пл}}(T)}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

где $V_{x \text{ ап}}, V_{y \text{ ап}}, V_{z \text{ ап}}, V_{x \text{ пл}}, V_{y \text{ пл}}, V_{z \text{ пл}}$ —

номинальные составляющие скорости аппарата и составляющие скорости планеты в момент T .

Тогда δT обозначает сдвиг по времени прибытия (рис. 5.17). Следовательно, в данном случае на компоненты вектора $\delta \bar{r}(T)$

накладываются уже не три, а два условия. В зависимости от числа наложенных конечных условий можно говорить об одно-, двух-, трехпараметрической коррекции и т. д.

Рассмотрим случай трехпараметрической коррекции. Будем определять составляющие корректирующего импульса из условия, что после проведения коррекции математические ожидания трех конечных параметров обращаются в нуль.

Пусть вектор отклонений конечных параметров определяется выражением

$$\delta \bar{b} = F \delta \bar{r}(T), \quad (5.50)$$

где F — матрица порядка 3×6 .

В частности, если вектор $\bar{b}$ представляет собой конечные отклонения координат

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \delta x(T) \\ \delta y(T) \\ \delta z(T) \end{pmatrix},$$

то

$$F = \begin{pmatrix} 100\,000 \\ 010\,000 \\ 001\,000 \end{pmatrix}.$$

Учитывая равенства (5.41) и (5.50), получим

$$\delta \bar{b} = F \Lambda(T, t) \delta \bar{r}(t). \quad (5.51)$$

Отсюда легко определить оценку вектора $\delta \bar{b}$

$$\widehat{\delta \bar{b}} = F \Lambda(T, t) \widehat{\delta \bar{r}}(t) = C(T, t) \widehat{\delta \bar{r}}(t), \quad (5.52)$$

где

$$C(T, t) = F \Lambda(T, t),$$

и корреляционную матрицу этого вектора

$$\begin{aligned} K_{\bar{b}} &= M[(\delta \bar{b} - \widehat{\delta \bar{b}})(\delta \bar{b} - \widehat{\delta \bar{b}})^T] = \\ &= F \Lambda(T, t) K(t) \Lambda^T(T, t) F^T = C(T, t) K(t) C^T(T, t). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Потребуем, чтобы корректирующий импульс, прилагаемый в момент t_{**} , скомпенсировал до нуля оценку вектора $\delta \vec{r}$. Учитывая выражение (5.46), получим соотношение

$$C(T, t) \hat{\delta \vec{r}}(t_{**} + 0) = \\ = C(T, t_{**}) \hat{\delta \vec{r}}(t_{**} - 0) + C(T, t_{**}) \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{vmatrix} = 0, \quad (5.54)$$

которое позволяет определить требуемое приращение вектора скорости при проведении коррекции. Для этого следует в соотношении (5.54) представить последний член в виде

$$C(T, t_{**}) \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{vmatrix} = \tilde{C}(T, t_{**}) \begin{vmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{vmatrix},$$

где матрица $\tilde{C}(T, t_{**})$ порядка 3×3 получена из матрицы $C(T, t_{**})$ порядка 3×6 вычеркиванием трех последних столбцов.

Если матрица $\tilde{C}(T, t_{**})$ невырождена, то разрешая соотношение (5.54) относительно вектора требуемого приращения скорости, получим

$$\begin{vmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{vmatrix} = [\tilde{C}(T, t_{**})]^{-1} C(T, t_{**}) \hat{\delta \vec{r}}(t_{**} - 0) = \\ = D(T, t_{**}) \hat{\delta \vec{r}}(t_{**} - 0), \quad (5.55)$$

где D — матрица порядка 3×6 .

Корреляционная матрица вектора приращения скорости определяется формулой

$$K_{\Delta \vec{V}} = D(T, t_{**}) K(t_{**} - 0) D^T(T, t_{**}) + \tilde{K}_{\Delta \vec{V}} \quad (5.56)$$

при условии, что ошибки в обработке корректирующего импульса не зависят от величины и направления импульса. Корреляцион-

ная матрица вектора $\delta\vec{b}$ после проведения коррекции определяется формулой

$$K_{\delta\vec{b}} = C(T, t_{**}) K(t_{**} - 0) C^T(T, t_{**}). \quad (5.57)$$

Формулы (5.56) и (5.57) представляют наибольший интерес при выборе числа и размещения корректирующих импульсов. Для того чтобы удовлетворить требованиям по точности выдерживания конечных параметров, необходимо, чтобы элементы матрицы (5.57) были достаточно малы. Естественно, что эти элементы уменьшаются по мере приближения аппарата к цели, поскольку по мере проведения измерений отклонения конечных параметров уточняются. Кроме того, ошибки в отработке корректирующих импульсов, как правило, оказывают меньшее влияние на разброс конечных параметров по мере приближения к цели. Но, с другой стороны, элементы матрицы (5.56) при этом возрастают, поскольку компенсация одних и тех же отклонений конечных параметров требует, как правило, больших приращений скорости по мере приближения к цели. В результате при выборе момента выполнения корректирующего импульса возникает противоречие — слишком поздняя коррекция траектории приводит к возрастанию потребных приращений скорости, слишком ранняя коррекция не обеспечивает нужной точности выдерживания конечных параметров. Это противоречие устраняется введением нескольких корректирующих импульсов, что позволяет при заданной точности коррекции конечных параметров уменьшить потребные приращения скорости, т. е. уменьшить запас топлива на проведение коррекции.

Метод дифференциальной коррекции применим при условии линейной зависимости между величиной возмущений и корректирующих импульсов и величиной конечного промаха. В то же время эта зависимость часто оказывается существенно нелинейной, например в задаче о попадании аппарата в заданный район небесного тела вследствие нелинейного влияния создаваемой им силы притяжения. Во избежание этих трудностей конечные параметры иногда преобразуются таким образом, чтобы обеспечить необходимую линейную зависимость. Этому способствует введение понятия картишной плоскости [85], [38], [100].

Предположим, что небесное тело не создает притяжения, и построим фиктивную невозмущенную траекторию полета аппарата относительно этого тела (рис. 5.18). Далее, проведем через центр небесного тела плоскость, перпендикулярную фиктивной скорости аппарата, и назовем ее картишной плоскостью. Тогда мерой промаха может служить положение точки пересечения возмущенной фиктивной траектории аппарата с картишной плоскостью (по-прежнему при условии, что небесное тело не создает силы притяжения). Указанная точка определяет в картишной плоскости «вектор промаха» $\delta\vec{b}$. Естественно, что истинная величина промаха не совпадает с длиной этого вектора, но может

быть определена с помощью нелинейных соотношений для кеплерова движения в поле притяжения небесного тела.

В соответствии с характером движения задачи об обеспечении коррекции траектории на участке перелета и на участке подлета к планете назначения часто рассматриваются порознь.

В первом случае обычная идеализация задачи заключается в замене планеты назначения точкой, движущейся по орбите

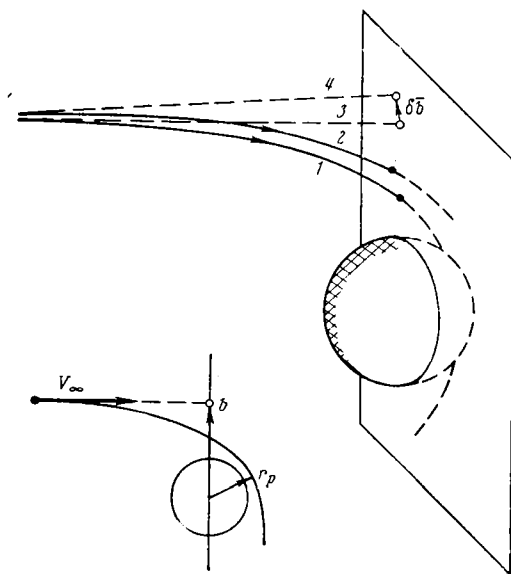


Рис. 5.18. Картинная плоскость:

1—истинная невозмущенная траектория; 2—истинная возмущенная траектория; 3—фигтивная невозмущенная траектория; 4—фигтивная возмущенная траектория

относительно Солнца и не создающей притяжения. Во втором случае важно обеспечить необходимый закон движения аппарата относительно планеты. В связи с этим наиболее удобно измерять именно параметры, характеризующие движение аппарата относительно планеты. Эта задача будет вкратце рассмотрена в § 5.6.

Для задач, связанных с коррекцией траектории, большой интерес представляет разработка оптимальных алгоритмов выполнения корректирующих импульсов, которые позволяют получить наименьший вероятный расход топлива на коррекцию при условии обеспечения необходимой точности конечных параметров. Подобные задачи особенно трудны, если учитываются погрешности в отработке импульсов и их влияние на точность прогноза промаха. Поэтому во многих работах этим влиянием пренебрегают, и тогда задача о выборе оптимального алгоритма

выполнения коррекции отделяется от задачи об обработке результатов измерений и определении закона изменения корреляционной матрицы для оценки конечного промаха.

Некоторые задачи о выборе оптимального состава измерений рассмотрены в работах [58], [71] и книге [6]. Проблема, в частности, сводится к тому, чтобы при ограниченном числе возможных оптических измерений выбрать небесные тела в качестве объектов наблюдения.

Наиболее простым алгоритмом выполнения коррекции представляется полная компенсация прогнозируемого промаха (оценки конечного промаха) каждым корректирующим импульсом. Однако, как показывают результаты анализа, полная компенсация прогнозируемого промаха не является оптимальным алгоритмом (см. ниже § 5.5).

Если спустя небольшое время после начала полета информация о прогнозируемом промахе становится достаточно точной для выполнения поставленной задачи, то ошибками измерений можно пренебречь и свести задачу об оптимальной коррекции к задаче о наиболее экономной компенсации известных начальных возмущений. Такая задача рассматривалась в работах А. К. Платонова (см. [37], [38]), а также в некоторых зарубежных работах [101].

Пусть, например, требуется обеспечить попадание аппарата в планету, допуская сдвиг по времени прибытия. Тогда выполнение задачи обеспечивается, если вариации координат в картинной плоскости δb_1 и δb_2 обращаются в нуль, поскольку вариация координаты, нормальной к картинной плоскости, в линейном приближении приводит лишь к изменению времени прибытия. В любой точке траектории можно выделить такое направление («нуль-направление»), что приращение скорости по этому направлению не изменяет координат b_1 и b_2 . Очевидно, что при оптимальной компенсации промаха импульсы должны располагаться в плоскости, перпендикулярной нуль-направлению, — «плоскости оптимальной коррекции». Можно отметить, что к концу траектории полета плоскость оптимальной коррекции стремится к картинной плоскости.

Эффективность коррекции в каждой точке траектории можно охарактеризовать влиянием совокупности возможных единичных импульсов (окружность $|\Delta \vec{V}| = 1$ в плоскости оптимальной коррекции) на параметры δb_1 и δb_2 . В картинной плоскости этой окружности соответствует эллипс, изменяющий свое положение в зависимости от предполагаемого времени выполнения импульса.

В работах [38] и [101] показано, что для нахождения оптимальных моментов проведения коррекций необходимо «обкатать» снаружи семейство эллипсов, соответствующих различным моментам времени, спрямляющими касательными с тем, чтобы получить выпуклую фигуру (рис. 5.19). Каждому сочетанию зна-

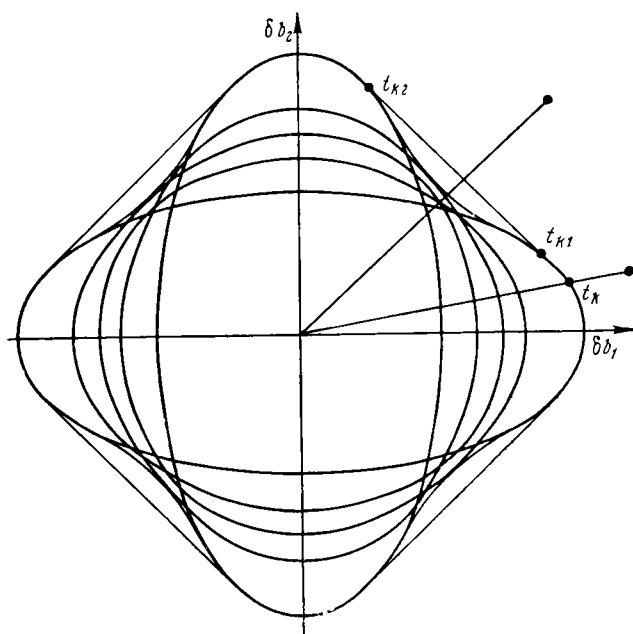


Рис. 5.19. Определение оптимальных точек приложения импульсов по фигуре влияния в картинной плоскости

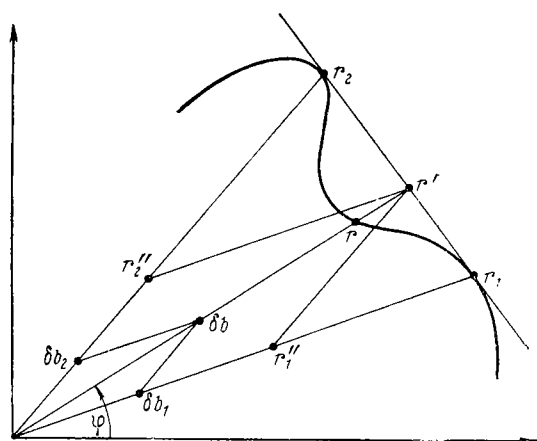


Рис. 5.20. Фигура влияния

чений δb_1 и δb_2 в картинной плоскости можно сопоставить вектор δb . Если этот вектор или его продолжение пересекает полученную фигуру на криволинейном участке (эллипс, соответствующий моменту t_k), то оптимальным является выполнение одного импульса в момент времени t_k . В противном случае оптимальным является выполнение двух импульсов в моменты времени t_{k1} и t_{k2} , соответствующие эллипсам, которых касается спрямляющий отрезок (рис. 5.19).

Оптимальность такого алгоритма следует из простых геометрических соображений. Пусть прогнозируемый вектор конечного промаха в картинной плоскости определяется полярными координатами $(\delta b, \varphi)$. Этот промах в принципе может быть скомпенсирован одним импульсом в любой точке траектории, если выбрать нужное направление импульса такое, чтобы соответствующая точка эллипса влияния имела координаты (r, φ) . При этом потребная величина импульса равна $\frac{\delta b}{r}$. Отсюда ясно, что оптимальной одноимпульсной коррекции соответствует точка с наибольшим r при заданном φ , т. е. точка огибающей семейства эллипсов.

Однако двухимпульсная коррекция в ряде случаев может оказаться более выгодной. Действительно, пусть огибающая эллипсов влияния не везде выпукла. Проведем спрямляющую касательную и сравним потребную величину одного корректирующего импульса $\frac{\delta b}{r}$ с суммой $\frac{\delta b_1}{r_1} + \frac{\delta b_2}{r_2}$, где r_1, r_2 — радиусы огибающей в точках касания; δb_1 и δb_2 — соответствующие величины компонент корректируемого вектора (см. рис. 5.20).

Продолжим радиус r до пересечения с касательной и обозначим его через r' , затем из полученной точки проведем прямые, параллельные лучам r_2 и r_1 , отсекающие на них отрезки r_1'' и r_2'' , соответственно. Из подобия треугольников следует соотношение:

$$\frac{r_1''}{r_1} = \frac{r_2 - r_2''}{r_2}, \text{ или } \frac{r_1''}{r_1} + \frac{r_2''}{r_2} = 1 = \frac{r'}{r}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{\delta b}{r'} = \frac{\delta b_1}{r_1''} = \frac{\delta b_2}{r_2''},$$

получим

$$\frac{\delta b_1}{r_1} + \frac{\delta b_2}{r_2} = \frac{\delta b}{r'} < \frac{\delta b}{r}.$$

Последнее неравенство показывает, что сумма двух импульсов оказывается меньше одного импульса.

Появление двух импульсов вместо одного объясняется немонотонным характером изменения функций влияния составляющих импульса на составляющие промаха в картинной плоскости.

В качестве примера можно рассмотреть траекторию перелета к некоторой планете, лежащую в плоскости эклиптики. Картина плоскость располагается нормально к плоскости эклиптики. Для компенсации составляющей промаха δb_1 , лежащей в плоскости эклиптики, выгоднее как можно раньше выполнить импульс, также лежащий в плоскости эклиптики. Однако ситуация изменяется, если рассматривать другую составляющую промаха δb_2 , нормальную к плоскости эклиптики. Если в начале траектории полета гелиоцентрический угол между аппаратом и точкой

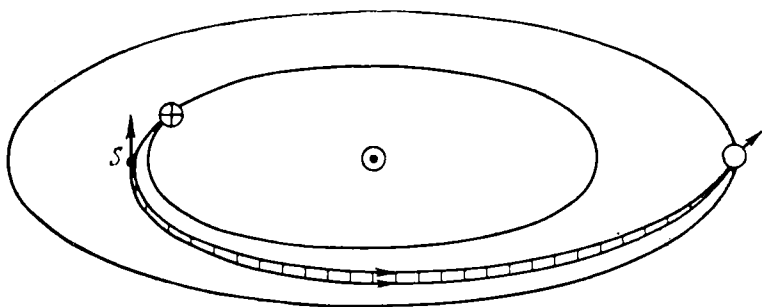


Рис. 5. 21. Поворот плоскости траектории при выполнении импульса, нормального к плоскости эклиптики

предполагаемой встречи аппарата с планетой близок к 180° , то коррекция в начале полета составляющей δb_2 нецелесообразна. Действительно, если указанный угол составляет в точности 180° , то коррекция составляющей δb_2 вообще невозможна — импульс, нормальный к плоскости эклиптики, приводит лишь к повороту плоскости траектории вокруг оси, проведенной через аппарат и Солнце, при этом предполагаемая точка встречи в линейном приближении не смещается (рис. 5. 21). В итоге, если значения δb_1 и δb_2 соизмеримы, оптимальными являются два импульса: один импульс в начале полета в основном компенсирует составляющую δb_1 , второй импульс примерно в середине полета в основном компенсирует составляющую δb_2 .

Аналогичная картина получается в случае трехпараметрической коррекции: эллипсы влияния заменяются эллипсоидами, касательные отрезки — касательными плоскостями, опирающимися на три точки и т. п. Вообще, как показано в работах [101], [37], при отсутствии ошибок измерений оптимальная m -параметрическая коррекция требует не более m импульсов.

§ 5.5. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ИМПУЛЬСОВ ПРИ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИИ

Задача о выборе оптимального алгоритма выполнения корректирующих импульсов становится существенно более слож-

ной, если начальные отклонения компонент вектора конечного промаха определены с большими ошибками, а необходимая точность в определении этих компонент достигается по мере проведения измерений лишь к концу траектории полета, где эффективность коррекции мала. Тогда, как будет показано ниже, число возможных корректирующих импульсов существенно возрастает и может значительно превышать число корректируемых конечных параметров.

В этом направлении ряд важных и интересных результатов получен в работах И. А. Богуславского [8], где показано, что при использовании различных критериев оптимизации в случае многопараметрической коррекции в пространстве корректируемых параметров существует «область нечувствительности», изменяющаяся по времени. Если оценка вектора конечного промаха находится в пределах этой области, то корректирующий импульс не выполняется. Однако определение закона изменения этой области в общем случае является очень сложной задачей. Поэтому ниже будет рассмотрен лишь случай однопараметрической коррекции с наиболее простым критерием оптимизации.

В этом случае в качестве конечного вектора $\vec{b}$ можно рассматривать концевой параметр, например, конечное значение некоторой координаты или конечное значение линейной комбинации координат и скоростей.

Наложим требование — после проведения всех корректирующих импульсов среднеквадратическое отклонение параметра δb не должно превышать допустимой величины σ_d :

$$\sqrt{M(\delta b^2)} \leq \sigma_d.$$

Наряду с этим условием следует наложить требование о возможно более экономном расходовании топлива. Будем считать, что коррекция осуществляется с помощью большой тяги — в этом случае расход топлива определяется суммой абсолютных величин приращений скорости при проведении отдельных корректирующих импульсов

$$J = \sum_{i=1}^m |\delta V_i|.$$

Естественно теперь поставить задачу о выборе такой стратегии управления, чтобы математическое ожидание расхода — суммарного импульса J

$$M[J] = M \left[\sum_{i=1}^m |\delta V_i| \right] = \sum_{i=1}^m M(|\delta V_i|)$$

достигало минимума и вместе с тем выполнялось указанное выше условие по точности управления.

Целью однопараметрической коррекции является компенсация отклонения одного единственного конечного параметра. Поэтому в каждый момент времени можно заранее определить наивыгоднейшее направление приложения импульса, которое позволяет получить максимальное приращение конечного параметра при заданной величине приращения скорости, т. е. выбрать такое направление, которое обеспечивает максимальное по абсолютной величине значение производной $\partial b / \partial V$.

Значения частных производных приращения конечного параметра по приращениям различных составляющих скорости $\frac{\partial b}{\partial V_x}$, $\frac{\partial b}{\partial V_y}$, $\frac{\partial b}{\partial V_z}$ определяются по методу Блисса (см. приложение 1). Легко видеть, что

$$\left| \frac{\partial b}{\partial V} \right|_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial V_x} \right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial V_y} \right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial V_z} \right)^2}.$$

Оптимальное направление $\vec{n}$ совпадает с направлением $\text{grad}_V b$, т. е. определяется по направляющим косинусам

$$\cos(\vec{n}, x) = \frac{\frac{\partial b}{\partial V_x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial V_x} \right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial V_y} \right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial V_z} \right)^2}},$$

$$\cos(\vec{n}, y) = \frac{\frac{\partial b}{\partial V_y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial V_x} \right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial V_y} \right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial V_z} \right)^2}}.$$

Точность прогноза конечного параметра δb определяется величиной $\Sigma = \sigma_b^2 = M[(\delta b - \hat{\delta b})^2]$, которая заменяет матрицу K_b , если конечной вектор является скалярной величиной. Будем считать, что влиянием ошибок в отработке корректирующих импульсов можно пренебречь. Тогда по мере накопления информации о движении аппарата (по мере проведения новых измерений) величина σ_b убывает. Закон убывания этой величины можно определить, используя соотношения (5.44) и (5.53) (а также приложение II). Характер изменения величин σ_b и $\frac{\partial b}{\partial V}$ при движении вдоль траектории полностью определяет задачу об осуществлении однопараметрической коррекции. Как правило, величина $\frac{\partial b}{\partial V}$, которую можно назвать *эффективностью управления*, убывает по мере движения аппарата.

Типичная зависимость эффективности управления $\frac{\partial b}{\partial V}$ от величины σ_b при движении по траектории приведена на рис. 5.22. Скачкообразные изменения величины σ_b соответствуют моментам проведения измерений. Если измерения проводятся достаточно часто, то эту зависимость можно считать непрерывной (рис. 5.23). Начальное значение величины $\sigma_b = \sigma_0$ определяется через исходный разброс параметров траектории с помощью соотношения (5.41). Конечное значение $\sigma(T)$ определяет предельно достижимую точность прогноза отклонения конечного параметра.

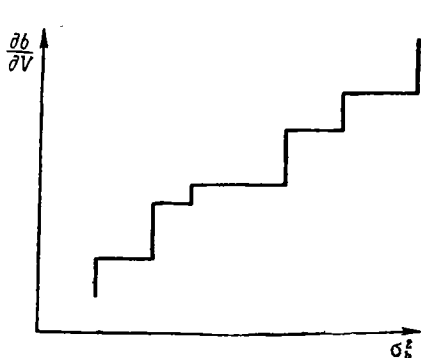


Рис. 5.22. Типичная зависимость эффективности управления от дисперсии конечного промаха при дискретных измерениях

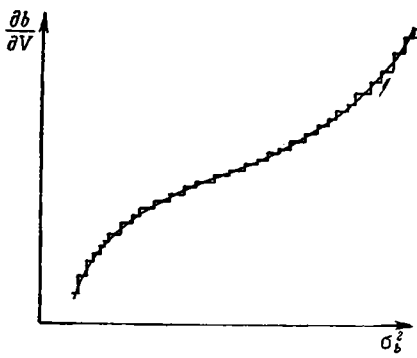


Рис. 5.23. Замена дискретных измерений непрерывными

Если конечной параметр представляет собой комбинацию координат в конечный момент времени, значение $\frac{\partial b}{\partial V}(T)$ обращается в нуль, так как с помощью корректирующего импульса можно мгновенно изменять только скорость аппарата, но не его координаты.

Отметим, что допустимое значение σ_d , определяющее требования к точности управления, не должно быть меньше значения $\sigma(T)$, иначе задача становится неразрешимой.

Изучение зависимости $\frac{\partial b}{\partial V}(\sigma_b)$ в ряде случаев позволяет сразу сделать некоторые общие выводы об алгоритме выполнения коррекции. Так, например, если функция $\partial b/\partial V$ вначале возрастает, то выполнение корректирующих импульсов на этом участке явно бессмысленно: лучше отложить проведение коррекций до тех пор, пока эффективность управления не возрастет и вместе с тем не повысится точность прогноза.

Обозначим функцию $\frac{1}{\partial b / \partial V}$ через f и назовем ее *функцией удельных затрат*, отклонение δb обозначим через z . Критерий оптимального решения запишется в следующем виде:

$$M_{tm}(z^2) \leq \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha}^2, \quad (5.58)$$

$$\min M[J] = \min M \left[\sum_{i=1}^m |\delta \bar{V}_i| \right], \quad (5.59)$$

$$\delta \bar{V}_i = \delta \bar{V}_i(\hat{z}_i).$$

Последнее соотношение свидетельствует о том, что корректирующие импульсы определяются текущими оценками конечного промаха. В дальнейшем σV_i будем обозначать V_i .

Символ M_{tm} обозначает апостериорное математическое ожидание, вычисленное после выполнения коррекций в момент времени t_m . Символ M обозначает априорное математическое ожидание, вычисленное до выполнения коррекции. К моменту t_m в каждом конкретном случае величина расхода оказывается вполне определенной, отличной от средней величины. Считается, что дискретная совокупность точек (в том числе и последняя точка t_m), в которых возможно выполнение корректирующих импульсов, задана.

Пусть в момент t_k оценка конечного промаха равна $\hat{z}_k$. Тогда можно рассматривать оценку $\hat{z}$, которая будет получена в момент времени t_{k+1} , как случайную гауссовскую величину с математическим ожиданием, равным $\hat{z}_k$, и с дисперсией, равной $\Sigma_k - \Sigma_{k+1}$ (см. приложение II). Если в точке t_k выполняется корректирующий импульс величиной V_k , то математическое ожидание оценки изменяется на величину V_k/f_k , а дисперсия сохраняется.

Этому соответствует следующее выражение для условной плотности вероятности распределения оценки $\hat{z}_{k+1}$ по результатам измерений, проведенных к моменту времени t_k :

$$p(\hat{z}_{k+1}/t_k) = \frac{1}{1^{2\pi} \sqrt{\Sigma_k - \Sigma_{k+1}}} e^{-\frac{(\hat{z}_{k+1} - \hat{z}_k - \frac{V_k}{f_k})^2}{2(\Sigma_k - \Sigma_{k+1})}}. \quad (5.60)$$

Соотношение (5.60) является исходным для построения оптимального алгоритма коррекции, который заключается в следующем. В каждой точке заранее определяется *зона нечувствительности*. Если прогнозируемый промах находится в пределах зоны нечувствительности, то корректирующий импульс не выпол-

няется. Размеры зоны нечувствительности находятся с помощью рекуррентных соотношений начиная с последней точки, при использовании метода динамического программирования.

Обозначим размеры зоны нечувствительности в i -й точке интервалом $[-z_i, z_i]$, кроме того, введем обозначение

$$\tilde{z}_i = \sqrt{\Sigma_i - \Sigma_{i+1}}.$$

Тогда для последней m -й точки

$$z_m = \sqrt{\Sigma_\lambda - \Sigma_m}. \quad (5.61)$$

Действительно, в последней точке t_m нецелесообразно тратить топливо, если $|\hat{z}_m| \leq \sqrt{\Sigma_\lambda - \Sigma_m}$, поскольку условие точности выполнено:

$$M_{tm}(z^2) = \hat{z}_m^2 + \Sigma_m \leq \Sigma_\lambda.$$

Если же $|\hat{z}_m| > \sqrt{\Sigma_\lambda - \Sigma_m}$, то прогнозируемый промах следует скомпенсировать до ближайшей границы зоны $|\hat{z}| = \sqrt{\Sigma_\lambda - \Sigma_m}$, при этом $M_{tm}(z^2) = \Sigma_\lambda$.

Рассмотрим $m-1$ -ную точку. Пусть оценка конечного промаха составляет $\hat{z}_{m-1}$. Если выполнить корректирующий импульс величиной V_{m-1} , то он изменит оценку до величины $\hat{z}_{m-1} + \frac{V_{m-1}}{f_{m-1}}$, а величина импульса, выполняемого в последней точке, будет зависеть от оценки конечного промаха, полученной к моменту t_m . В итоге суммарный ожидаемый расход определяется суммой

$$g_{m-1} = |V_{m-1}| + \int_{-\infty}^{\infty} p(\hat{z}_m | t_{m-1}) |V_m(\hat{z}_m)| d\hat{z}_m, \quad (5.62)$$

где в соответствии с формулой (5.60)

$$p(\hat{z}_m | t_{m-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Sigma_{m-1} - \Sigma_m)}} e^{-\frac{(\hat{z}_m - \hat{z}_{m-1} - \frac{V_{m-1}}{f_{m-1}})^2}{2(\Sigma_{m-1} - \Sigma_m)}},$$

а зависимость $|V_m(\hat{z}_m)|$ определяется правилом:

$$\begin{aligned} |V_m| &= \left(|\hat{z}_m| - \sqrt{\Sigma_\lambda - \Sigma_m} \right) f_m \quad \text{при } |\hat{z}_m| > \sqrt{\Sigma_\lambda - \Sigma_m}, \\ |V_m| &= 0 \quad \text{при } |\hat{z}_m| \leq \sqrt{\Sigma_\lambda - \Sigma_m}. \end{aligned}$$

Минимизируя сумму (5.62) по величине V_{m-1} , получим

$$\begin{aligned} \text{что } V_{m-1} &= 0 \text{ при } |\hat{z}_{m-1}| \leq z_{m-1}; \\ V_{m-1} &= -f_{m-1} \operatorname{sign} \hat{z}_{m-1} (|\hat{z}_{m-1}| - z_{m-1}), \\ \text{при } |\hat{z}_{m-1}| &> z_{m-1}, \end{aligned}$$

причем размеры зоны нечувствительности определяются из соотношения

$$\frac{f_{m-1}}{f_m} = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{z_{m-1} + z_m}{\tilde{\sigma}_{m-1}} \right) - \Phi \left(\frac{z_{m-1} - z_m}{\tilde{\sigma}_{m-1}} \right) \right],$$

где

$$\Phi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

В общем случае для последовательного определения размеров зоны нечувствительности z_{i-1} при переходе от i -й точки к $i-1$ -й можно использовать следующее соотношение:

$$f_{i-1} = \frac{1}{V\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}_{i-1}} \int_{-\infty}^{\infty} g'_i(u) e^{-\frac{[u-z_{i-1}]^2}{2\tilde{\sigma}_{i-1}^2}} du \quad (5.63)$$

Здесь функция $g_i(u)$ определяет математическое ожидание суммарного приращения скорости при i -й, $i+1$ -й... и m -й коррекциях при условии, что прогнозируемый промах в i -й момент времени равен u .

Четная функция $g_{i-1}(\hat{z}_{i-1})$ определяется с помощью рекуррентных соотношений (для простоты положим $\hat{z}_{i-1}^{\wedge} > 0$): при $\hat{z}_{i-1}^{\wedge} > z_{i-1}$:

$$\begin{aligned} g_{i-1}(\hat{z}_{i-1}) &= f_{i-1}(\hat{z}_{i-1} - z_{i-1}) + \\ &+ \frac{1}{V\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}_{i-1}} \int_{-\infty}^{\infty} g_i(u) e^{-\frac{(u-z_{i-1})^2}{2\tilde{\sigma}_{i-1}^2}} du, \end{aligned} \quad (5.64)$$

при $\hat{z}_{i-1}^{\wedge} < z_{i-1}$:

$$g_{i-1}(\hat{z}_{i-1}) = \frac{1}{V\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}_{i-1}} \int_{-\infty}^{\infty} g_i(u) e^{-\frac{(u-\hat{z}_{i-1})^2}{2\tilde{\sigma}_{i-1}^2}} du. \quad (5.65)$$

В точке $t=t_m$:

$$g_m(\hat{z}_m) = 0 \text{ при } \hat{z}_m < z_m, \quad (5.66)$$

$$g_m(\hat{z}_m) = f_m(\hat{z}_m - z_m) \text{ при } \hat{z}_m > z_m. \quad (5.67)$$

Если $\sum_d = \sum_m$ и для соседних точек $\frac{f_l}{f_{l-1}} \gg 1$, то

$$z_{l-1} \approx \tilde{g}_{l-1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{f_{l-1}}{f_l}. \quad (5.68)$$

Размеры зоны нечувствительности конечны для всех точек, в которых $\hat{f}_i < \hat{f}_{i+1}$.

Если измерения выполняются непрерывно и коррекции допустимы на всей траектории, то зависимость $z_i = z_i(\hat{\Sigma}_i)$ переходит в непрерывную кривую $z_*(\hat{\Sigma})$, а функция $g_i(\hat{z}_i)$ становится функцией двух переменных $g(\hat{z}, \hat{\Sigma})$. Рассматривая бесконечно малые приращения $d\hat{\Sigma}$, можно показать, что выписанные соотношения для функций $g(\hat{z}, \hat{\Sigma})$ и $z_*(\hat{\Sigma})$ переходят в уравнение Беллмана следующего вида (рассматриваем только значения $z > 0$ и учитываем, что функция $g(\hat{z}, \hat{\Sigma})$ — четная по $\hat{z}$):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \hat{z}^2} = \frac{\partial g}{\partial \hat{\Sigma}} \quad (5.69)$$

при $\hat{z} < z_*(\hat{\Sigma})$ взамен (5.65);

$$g(\hat{z}, \hat{\Sigma}) = g(z_*, \hat{\Sigma}) + f(\hat{\Sigma})(\hat{z} - z_*) \quad (5.70)$$

при $\hat{z} \geq z_*(\hat{\Sigma})$ взамен (5.64);

$$\frac{\partial g}{\partial \hat{z}}(z_* - 0, \hat{\Sigma}) = f(\hat{\Sigma}), \quad (5.71)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \hat{z}^2}(z_* - 0, \hat{\Sigma}) = 0 \quad (5.72)$$

взамен (5.63);

$$g(\hat{z}, \hat{\Sigma}_m) = 0 \text{ при } \hat{z} < z_m;$$

$$g(\hat{z}, \hat{\Sigma}_m) = f_m(\hat{z} - z_m) \text{ при } \hat{z} \geq z_m.$$

Как видно, для решения внутренней задачи — определения функции $g(\hat{z}, \hat{\Sigma})$ при $\hat{z} < z_*$ краевые условия (5.71) и (5.72)

являются избыточными, однако само положение границы $z_*(\Sigma)$ изменяется по неизвестному закону, подлежащему определению, что замыкает задачу.

Результаты расчетов, полученные С. В. Петуховым, приводятся на рис. 5.24 и 5.25.

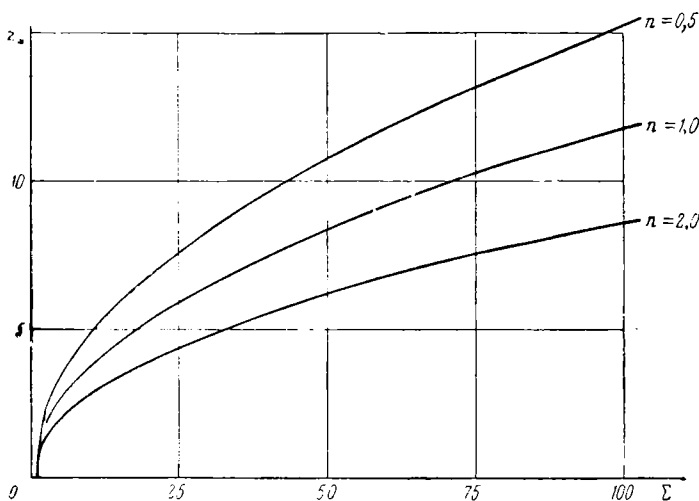


Рис. 5.24. Зависимость зоны нечувствительности от дисперсии конечного промаха

В качестве типичной зависимости $f(\Sigma)$, отражающей увеличение удельных затрат на коррекцию по мере уточнения прогнозируемого промаха, была выбрана функция

$$f(\Sigma) = \frac{c}{\Sigma^{n/2}} \quad (n > 0), \quad (5.73)$$

при условии $\Sigma_m = \Sigma_d = 1$.

При проведении расчетов по формулам (5.63) и (5.65) использовался шаг дискретности $\frac{\Sigma_i}{\Sigma_{i+1}} = 1,05$. Как видно из рис. 5.24, при достаточно больших значениях $\Sigma/\Sigma_d = \bar{\Sigma}$

$$z_*(\Sigma) \approx a \sqrt{\Sigma - \Sigma_d} \approx a \sqrt{\bar{\Sigma}},$$

где $\alpha = 1,53; 1,19$ и $0,88$ при $n=0,5, 1$ и 2 , соответственно. В общем случае значения $z_*(\bar{\Sigma})$ при больших $\bar{\Sigma}$ можно определять по приближенной формуле

$$z_*(\bar{\Sigma}) \approx 1.1 + 1.3 \sqrt{-\frac{f}{2df/d\bar{\Sigma}}}.$$

Значения функций $g\bar{\Sigma}_0 = \frac{g(0, \bar{\Sigma}_0)}{c \sum_{\lambda} \frac{1-n}{2}}$, определяющие математическое ожидание расхода топлива на коррекцию при априорной оценке промаха, равной нулю, приведены на рис. 5.25.

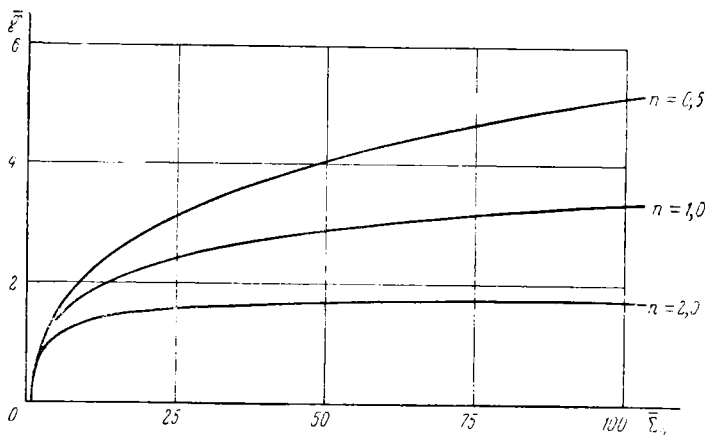


Рис. 5.25. Зависимость расхода от начальной дисперсии конечного промаха

Приведем результаты решения сформулированной выше задачи о наиболее экономном осуществлении коррекции **без** учета погрешностей исполнения импульсов в предположении, что величина корректирующего импульса линейно зависит от величины прогнозируемого промаха (линейная оптимальная коррекция). При такой постановке задачи удастся получить решение в простой и наглядной форме [54]. Критерии оптимизации оставим прежними за тем исключением, что в условии точности математическое ожидание $M(z^2)$ является априорным — определяется не как оценка величины z^2 , вычисляемая после проведения всех коррекций, а как среднее значение z^2 после проведения коррекций. Эти величины совпадают лишь при условии, если $\sigma_d = \sigma(t_m)$, когда после проведения всех коррекций оценка $\hat{z}$ обращается в нуль [102], [55]. Построим систему координат, в которой по оси абсцисс отложена величина $\Sigma = \sigma^2$, а по оси ординат — величина $F = f^2$. Рассмотрим вначале случай, когда измерения проводятся

в дискретные моменты времени. Тогда типичная зависимость $F(\Sigma)$ имеет вид, изображенный на рис. 5.26, поскольку, как правило, удельные затраты на осуществление коррекции увеличиваются по мере приближения к концу траектории. Будем считать, что исходное математическое ожидание отклонения концевого параметра равно нулю.

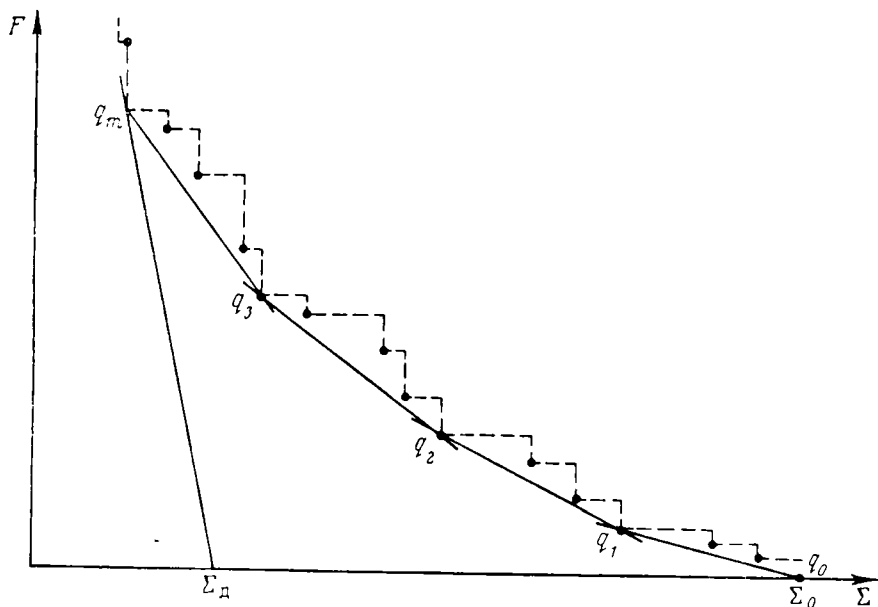


Рис. 5.26. Геометрическое определение точек приложения импульсов при линейной оптимальной коррекции (дискретные измерения)

Нанесем в плоскости (Σ, F) две дополнительные точки — нулевую точку $q_0(\Sigma_0, 0)$ и точку допустимой точности $q_d(\Sigma_d, 0)$.

Проведем из точки q_d радиус-вектор в отрицательном направлении по оси абсцисс и начнем поворачивать его вокруг этой точки по часовой стрелке до тех пор, пока он не коснется некоторой точки q_m ломаной линии, соответствующей рассматриваемой траектории. Для этой точки выполняется неравенство $\Sigma_m \leq \Sigma_d$, так как условие разрешимости задачи заключается в том, чтобы, по крайней мере, в последней точке выполнялось неравенство $\Sigma(T) \leq \Sigma_d$.

Далее, аналогично предыдущему, проведем радиус-вектор из точки q_0 в отрицательном направлении по оси абсцисс и начнем поворачивать его вокруг точки q_0 до тех пор, пока он не коснется некоторой точки q_1 , далее переносим центр вращения в точку q_1 и продолжаем вращать радиус-вектор до достижения следующей точки q_2 и т. д. В результате получается вогнутая

ломаная линия, проходящая через некоторые из точек исходной ступенчатой ломаной линии. Те точки траектории, которые не попали на полученную ломаную линию, следует отбросить, проведение корректирующих импульсов в этих точках нецелесообразно.

Следует подчеркнуть, что этот результат относится только к линейной оптимальной коррекции. Как было отмечено выше, при нелинейной оптимальной коррекции выполнение импульсов возможно во всех точках t , в которых $f(t) < f(t + \Delta t)$ для любых $\Delta t > 0$.

Оптимальная линейная стратегия заключается в том, чтобы в точках $q_1, \dots, q_m$ последовательно выполнять корректирующие импульсы таким образом, чтобы компенсировать в каждой из этих точек q_i некоторую p_i часть прогнозируемого отклонения конечного вектора. Значения коэффициентов компенсации p_i определяются формулами

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = 1 - \sqrt{\frac{F_1(\Sigma_1 - \Sigma_2)}{(F_2 - F_1)(\Sigma_0 - \Sigma_1)}}, \\ p_i = 1 - \sqrt{\frac{(F_i - F_{i-1})(\Sigma_i - \Sigma_{i+1})}{(F_{i+1} - F_i)(\Sigma_{i-1} - \Sigma_i)}}, \\ (i = 2, \dots, m-1) \\ p_m = 1 - \sqrt{\frac{(P_m - F_{m-1})(\Sigma_g - \Sigma_m)}{F_m(\Sigma_{m-1} - \Sigma_m)}}. \end{array} \right. \quad (5.74)$$

Доказательство оптимальности такого алгоритма приведено в работе [54].

Нетрудно убедиться, что все подкоренные выражения положительны и не превышают единицы. Это следует из самого способа построения ломаной линии. Как видно, для всех коэффициентов компенсации p_i выполняются неравенства

$$0 < p_i \leq 1.$$

Конечно, следует помнить, что прогнозируемое отклонение конечного параметра изменяется при движении вдоль траектории даже при отсутствии коррекций, поскольку в соответствии с формулами (5.45), (5.52) каждое новое измерение изменяет прогноз этого отклонения. Поэтому не исключена возможность того, что при выполнении двух соседних импульсов конечной параметр получит приращение различных знаков, т. е. окажется, что часть топлива была израсходована напрасно. Смысл от введения неполной компенсации отклонения конечного параметра и заключается в том, чтобы уменьшить вероятность таких напрасных затрат топлива.

Математические ожидания расхода при выполнении отдельных импульсов определяются формулами

$$\left\{ \begin{aligned} M(|V_1|) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\sqrt{F_1(\Sigma_0 - \Sigma_1)} - \frac{F_1}{\sqrt{F_2 - F_1}} \sqrt{\Sigma_1 - \Sigma_2} \right], \\ M(|V_i|) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{F_i}{\sqrt{F_i - F_{i-1}}} \sqrt{\Sigma_{i-1} - \Sigma_i} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{F_i}{\sqrt{F_{i+1} - F_i}} \sqrt{\Sigma_i - \Sigma_{i+1}} \right], \\ &\quad i=2, \dots, m-1 \\ M(|V_m|) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{F_m}{\sqrt{F_m - F_{m-1}}} \sqrt{\Sigma_{m-1} - \Sigma_m} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{F_m(\Sigma_g - \Sigma_m)} \right]. \end{aligned} \right. \quad (5.75)$$

Математическое ожидание суммарного расхода определяется выражением

$$\begin{aligned} M(\Sigma |V_i|) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \sqrt{F_1(\Sigma_0 - \Sigma_1)} + \right. \\ &+ \sqrt{(F_2 - F_1)(\Sigma_1 - \Sigma_2)} + \dots + \sqrt{(F_m - F_{m-1})(\Sigma_{m-1} - \Sigma_m)} - \\ &\quad \left. - \sqrt{F_m(\Sigma_g - \Sigma_m)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Это же выражение может быть представлено в более компактной форме

$$M(\Sigma |V_i|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\tilde{F}(\Sigma)} \sqrt{-\frac{dF}{d\Sigma}} d\Sigma, \quad (5.77)$$

где $\tilde{F}(\Sigma)$ — есть ломаная линия, изображенная на рис. 5.26.

В случае непрерывных измерений кривая $F(\Sigma)$, соответствующая движению по рассматриваемой траектории, также является непрерывной. При этом оптимальным является непрерывное приложение корректирующей тяги на некоторых участках траектории. Для того чтобы выделить эти участки, проделаем процедуру, аналогичную описанной выше.

Отметим конечную точку $q_d(\Sigma_d, 0)$, проведем из нее влево радиус-вектор и будем вращать по часовой стрелке до тех пор, пока не достигнем кривой $F(\Sigma)$ в точке q_k . Эта точка может быть либо точкой касания, либо последней точкой кривой. После этого

проводим из точки $q_0(\Sigma_0, 0)$ радиус-вектор и поворачиваем его по часовой стрелке до касания с кривой $F(\Sigma)$ в точке q_1 . Далее радиус-вектор обкатывает кривую $F(\Sigma)$, продолжая вращаться по часовой стрелке, до достижения точки q_k . Если $F''(\Sigma) > 0$, то таким образом обкатывается вся кривая от точки q_1 до точки q_k , в противном случае возможны «перескоки» радиуса-вектора с одной точки на другую $q_- \rightarrow q_+$ (рис. 5.27). На участках обкатки оптимальной является непрерывная коррекция; на участках кривой $F(\Sigma)$, которые не обкатываются, проведение коррек-

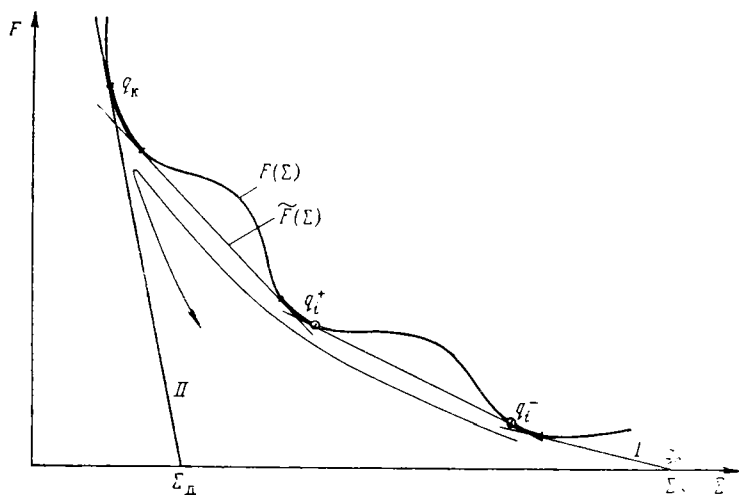


Рис. 5.27. Геометрическое определение точек приложения импульсов при линейной оптимальной коррекции (непрерывное измерение)

ций нецелесообразно. Естественно, что каждому бесконечно малому импульсу соответствует и бесконечно малое значение коэффициента компенсации. Это можно видеть из формулы (5.73), полагая, что точки q_{i-1} , q_i и q_{i+1} неограниченно сближаются. Приложение одного импульса конечной величины возможно в том случае, когда точка q_k является последней точкой кривой и кривая $F(\Sigma)$ образует в этой точке конечный угол с радиусом-вектором, проведенным в точку q_d . В частности, во многих случаях допустимое значение σ_d задается равным конечному значению $\sigma(T)$. Тогда математическое ожидание последнего импульса, сообщаемого в конечной точке траектории, в соответствии с (5.75) равно

$$M(|V_k|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} F(\Sigma_k) \sqrt{-\frac{1}{\frac{dF}{d\Sigma}(\Sigma_k)}}. \quad (5.78)$$

Математическое ожидание расхода по-прежнему определяется формулой (5.77), которая справедлива как для случая дискретной, так и непрерывной коррекции. Кривая $\bar{F}(\Sigma)$ образована из кривой $F(\Sigma)$ добавлением отрезков касательных и лучей I и II.

Рассмотрим снова в качестве примера зависимость (5.73). Пусть заданы начальное значение σ_0 и допустимое значение σ_d . Вычислим минимум математического ожидания, используя приведенные выше формулы.

Рассмотрим задачу в двух вариантах:

а) управление допустимо и при $\sigma < \sigma_d$, конечное значение $\sigma(T) = 0$;

б) управление допустимо только при $\sigma \geq \sigma_d$, конечное значение $\sigma(T) = \sigma_d$.

Применим приведенные выше формулы. В данном случае

$$F = \frac{c^2}{\Sigma^n}, \quad f = -\frac{c}{\sigma^n}.$$

а) определяем Σ_1 из условия, что луч, проведенный из точки $q_0(\Sigma_0, 0)$, касается кривой $F = \frac{c^2}{\Sigma^n}$ в точке $q_1(\Sigma_1, F_1)$:

$$\Sigma_1 = \frac{n}{1+n} \Sigma_0. \quad (5.79)$$

Аналогично

$$\Sigma_k = \frac{n}{1+n} \Sigma_d.$$

Тогда в соответствии с (5.77) имеем

$$\begin{aligned} \min M \left(\sum |V_i| \right) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_{\Sigma_k}^{\Sigma_1} \sqrt{\frac{nc^2}{\Sigma^{n+1}}} d\Sigma + \right. \\ &+ \sqrt{\frac{c^2}{\Sigma_1^n} (\Sigma_0 - \Sigma_1)} - \sqrt{\frac{c^2}{\Sigma_k^n} (\Sigma_d - \Sigma_k)} = \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{\frac{2}{\pi}} c \ln \frac{\Sigma_0}{\Sigma_d} = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_d} \text{ при } n=1, \\ &\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^{n/2} (n-1)} c \left[\frac{1}{\sigma_d^{n-1}} - \frac{1}{\sigma_0^{n-1}} \right] \text{ при } n \neq 1. \end{aligned} \right. \quad (5.80) \end{aligned}$$

Наиболее реален случай $\sigma_0 \gg \sigma_d$, тогда, как видно из формулы (5.80), при $n > 1$ расход ресурсов определяется в основном тре-

буемой точностью (σ_d), при $n < 1$ — начальным разбросом (σ_0), а при $n = 1$ — отношением σ_0/σ_d . Это объясняется перераспределением затрат на коррекцию вдоль траектории — при $n > 1$ основным является расход на конечном участке траектории, а при $n < 1$ — расход на компенсацию начальных отклонений. Коррекция выполняется непрерывно на участке от Σ_1 до Σ_k ;

б) значение Σ_1 определяется так же, как и ранее, но $\Sigma_k = \Sigma_1$. Тогда при $\Sigma_n < \frac{n}{n+1} \Sigma_0$

$$M\left(\sum |V_i|\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \int_{\Sigma_n}^{\Sigma_1} \sqrt{\frac{nc^2}{\Sigma^{n+1}}} d\Sigma + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{c^2}{\Sigma_1^n} (\Sigma_0 - \Sigma_1)} \right\} = \\ = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \left(2 \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1} + 1 - \ln 2 \right) & \text{при } n = 1, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \left[\frac{2\sqrt{n}}{n-1} \cdot \frac{1}{\sigma_d^{n-1}} - \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^{n/2}(n-1)} \cdot \frac{1}{\sigma_0^{n-1}} \right] & \text{при } n \neq 1. \end{cases} \quad (5.81)$$

При $\Sigma_n > \frac{n}{n+1} \Sigma_0$ оптимальное управление сводится к приложению одного единственного импульса в точке Σ_d с математическим ожиданием расхода, равным

$$M(|V_k|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_d^2} - 1} \frac{1}{\sigma_d^{n-1}}. \quad (5.82)$$

Сравнивая формулы (5.80), (5.81) и (5.82), можно убедиться, насколько увеличивается расход ресурсов в случае б по сравнению со случаем а. При больших значениях σ_0/σ_d продление управления за точку Σ_d (случай а) позволяет уменьшить математическое ожидание расхода в отношении $\frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{n+1}{2}}$, если $n > 1$, и практически не дает никакой экономии при $n \leq 1$.

Рассмотрим, наконец, наиболее простой алгоритм проведения коррекции, когда каждый импульс компенсирует полностью математическое ожидание отклонения конечного параметра (все коэффициенты компенсации равны 1).

Тогда можно показать, что математическое ожидание импульса составляет величину

$$M(|V_i|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{F_i(\sum_{i-1} - \sum_i)}, \quad (5.83)$$

а математическое ожидание суммарного расхода определяется выражением

$$M(\sum |V_i|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^m \sqrt{F_i(\sum_{i-1} - \sum_i)}. \quad (5.84)$$

Последней точкой проведения коррекции в этом случае является точка $\Sigma = \Sigma_d$, при этом среднеквадратическое отклонение конечного параметра будет равно σ_d .

При использовании такого алгоритма оптимальное число импульсов всегда оказывается конечным, независимо от того, проводятся ли измерения дискретно или непрерывно.

Выражение (5.84) можно минимизировать путем выбора подходящих моментов проведения коррекций, следуя процедуре динамического программирования. Предположим, что все точки приложения импульсов, кроме $m-1$ -й, предпоследней, фиксированы. Тогда выбор предпоследней точки влияет только на два последних слагаемых в сумме (5.84). Естественно, что в оптимальном случае эта точка должна быть выбрана таким образом, чтобы сумма

$$\sqrt{F_{m-1}(\sum_{m-2} - \sum_{m-1})} + \sqrt{F_m(\sum_{m-1} - \sum_m)}$$

достигала минимума.

Отсюда, считая, что $F = \frac{c^2}{\sum^n}$, найдем

$$\frac{\sum_{m-2}}{\sum_{m-1}} = \frac{1}{2n^2} [\alpha(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4n^2}) - 2n(1-n)],$$

где

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\sum_{m-1}}{\sum_m}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\frac{\sum_{m-1}}{\sum_m} - 1}}.$$

Если $n=1$, то

$$\frac{\sum_{m-2}}{\sum_{m-1}} = \frac{\sum_{m-1}}{\sum_m}.$$

Аналогичным путем, варьируя m —2-ю точку и т. д., находим, что

$$\frac{\Sigma_{m-1}}{\Sigma_m} = \frac{\Sigma_{m-2}}{\Sigma_{m-1}} = \dots = \frac{\Sigma_0}{\Sigma_1} = \chi^2. \quad (5.85)$$

При этом

$$M(\Sigma |V_i|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} mc \sqrt{\chi^2 - 1}, \quad (5.86)$$

где

$$\chi = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_m} \right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (5.87)$$

Считая, что m может быть нецелым числом, минимизируя (5.86) по m при условии (5.87), получим, что $\chi_{\text{опт}}$ определяется из соотношения

$$\chi_{\text{опт}}^2 (1 - \ln \chi_{\text{опт}}) = 1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \chi_{\text{опт}} &\approx 2,22, \\ m_{\text{опт}} &= \frac{\ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1}}{\ln \chi_{\text{опт}}} \approx 1,25 \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1}, \end{aligned} \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} M(\Sigma |V_i|) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \frac{\sqrt{\chi_{\text{опт}}^2 - 1}}{\ln \chi_{\text{опт}}} \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1} = \\ &= 2,5 \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1}. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Таким образом, математические ожидания всех импульсов оказываются одинаковыми, а значение $\chi_{\text{опт}} = \frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}$ не зависит от величины $\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$.

В действительности m может быть только целым числом, которое следует выбирать при помощи формулы (5.88), например, брать ближайшее целое число, при этом расход может незначительно увеличиться.

Если $n \neq 1$, то оптимальные значения $\chi_{i \text{ опт}} = \frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}$ в общем случае оказываются неравными, но при не слишком малых $\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$ они стремятся к постоянной величине (рис. 5.28), определяемой из соотношения

$$\frac{\chi_{\text{опт}}^{n-1} - 1}{n - 1} = \frac{\chi_{\text{опт}}^2 - 1}{\chi_{\text{опт}}^2}. \quad (5.90)$$

Как видно, при увеличении n импульсы учащаются. Оптимальное число импульсов определяется соотношением

$$m_{\text{опт}} \approx \frac{\ln \frac{\sigma_0}{\sigma_d}}{\ln \chi_{\text{опт}}}.$$

Математическое ожидание суммарного расхода определяется по формуле

$$M(\sum |V_i|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot c \frac{\sqrt{\chi_{\text{опт}}^2 - 1}}{1 - \chi_{\text{опт}}^{1-n}} \left(\frac{1}{\sigma_d^{n-1}} - \frac{1}{\sigma_0^{n-1}} \right). \quad (5.91)$$

Сравнивая результаты для оптимальной коррекции, линейной оптимальной коррекции и полной коррекции при $n=0,5 \div 2$, по-

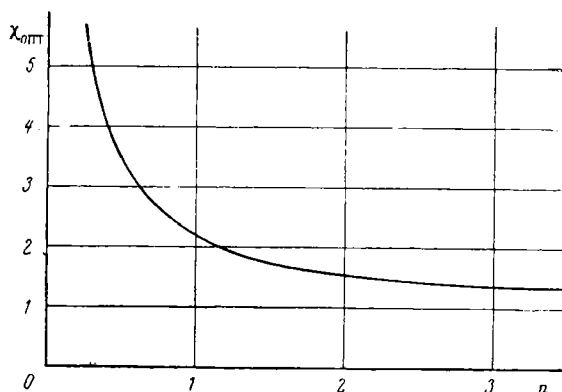


Рис. 5.28. Зависимость частоты распределения импульсов при полной коррекции от параметра n

лучим, что упрощение алгоритма приводит к увеличению расхода на 13—17% и 28—37% соответственно, причем различие увеличивается с увеличением показателя степени n , а характер зависимости расхода от $\bar{\Sigma}_0$ в точности сохраняется, в чем легко убедиться, сравнивая рис. 5.25, формулы (5.81), (5.89) и (5.91).

В ряде случаев наибольший интерес представляет не определение математического ожидания расхода топлива, а определение гарантийного запаса топлива, соответствующего некоторому достаточно высокому уровню вероятности P . Задача о минимизации расхода топлива, соответствующего некоторому уровню вероятности, является довольно сложной, поскольку для ее точного решения необходимо определить распределение вероятно-

стей суммарного расхода. Рассмотрим более простую задачу о минимизации выражения

$$M\left(\sum |V_i|\right) + p \sigma_{\Sigma | V_i|}, \quad (5.92)$$

где p — положительная константа, в предположении о том, что каждый корректирующий импульс полностью компенсирует математическое ожидание отклонения конечного параметра.

В этих условиях можно показать [54], что величины отдельных импульсов независимы и, следовательно, дисперсия суммы импульсов равна сумме дисперсий импульсов. Кривая распределения расхода при отдельном импульсе представляет собой правую ветвь гауссовой кривой, откуда нетрудно показать, что дисперсия расхода связана с математическим ожиданием расхода следующим соотношением:

$$\sigma_{|V_i|}^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) M^2(|V_i|).$$

Следовательно, задача сводится к минимизации суммы

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \sum_{i=1}^m \sqrt{F_i (\sum_{i=1}^m - \sum_i)} + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1} \cdot p \sqrt{\sum_{i=1}^m F_i (\sum_{i=1}^m - \sum_i)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Рассматривая пример, когда $f = \frac{c}{\sigma}$, получим следующий результат: математические ожидания всех импульсов, а следовательно, и дисперсии всех импульсов, оказываются одинаковыми, значение $\chi_{\text{опт}} = \frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}$ зависит от значения $\frac{\sigma_0}{\sigma_d}$ и определяется при решении уравнения (рис. 5.29)

$$\frac{1}{\ln \chi_{\text{опт}}} - \frac{\chi_{\text{опт}}^2}{\chi_{\text{опт}}^2 - 1} = B \sqrt{\ln \chi_{\text{опт}}} \left[\frac{\chi_{\text{опт}}^2}{\chi_{\text{опт}}^2 - 1} - \frac{1}{2 \ln \chi_{\text{опт}}} \right], \quad (5.94)$$

где

$$B = \frac{p \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}}{\sqrt{\ln \frac{\sigma_0}{\sigma_d}}},$$

т. е. с увеличением p и уменьшением $\frac{\sigma_0}{\sigma_d}$ значение $\chi_{\text{опт}}$ убывает.

При этом

$$m_{\text{опт}} = \frac{\ln \frac{\sigma_0}{\sigma_d}}{\ln \chi_{\text{опт}}},$$

$$M(\sum |V_i|) + p \sigma_{\Sigma | V_i|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \left[\frac{\ln \frac{\sigma_0}{\sigma_d}}{\ln \chi_{\text{опт}}} + \right. \\ \left. + p \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1} \sqrt{\frac{\ln \frac{\sigma_0}{\sigma_d}}{\ln \chi_{\text{опт}}}} \right] \sqrt{\chi_{\text{опт}}^2 - 1}.$$

Вообще говоря, во всех случаях минимизация выражения (5.92) приводит к увеличению оптимального числа импульсов по сравнению с минимизацией математического ожидания расхода.

Если число независимых импульсов не слишком мало и их математические ожидания соизмеримы, то в соответствии с предельными теоремами теории вероятностей распределение их суммы близко к нормальному закону. При этом значение $p=2,8$ соответствует значению вероятности $P=0,9973$, фигурирующему в «правиле трех сигм» [11]. Если же в другом предельном случае один импульс является преобладающим (как правило, первый или последний), то распределение суммы импульсов близко к распределению одного импульса. Тогда уровню вероятности $P=0,9973$ примерно соответствует величина

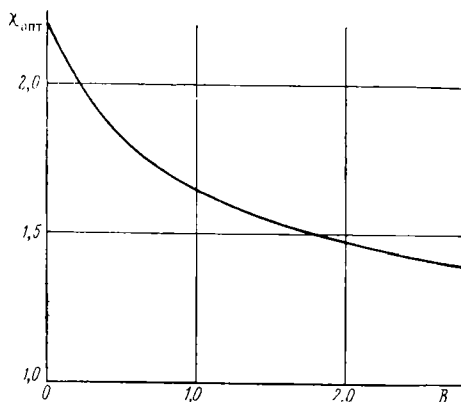


Рис. 5.29. Зависимость частоты распределения импульсов при полной коррекции от параметра B , $n=1$

$$M(\sum |V_i|) + \frac{3 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}} \sigma_{\Sigma | V_i|},$$

т. е. $p \approx 3,7$.

Но, как видно из рис. 5.29, изменение p в небольших пределах мало сказывается на выборе числа и размещения импульсов,

поэтому, выбирая $p=3,0 \div 3,5$ и минимизируя выражение (5.92), можно считать, что тем самым минимизируется величина расхода при значении вероятности $P=0,9973$.

§ 5.6. КОРРЕКЦИЯ ТРАЕКТОРИИ НА КОНЕЧНОМ УЧАСТКЕ ПОДЛЕТА К ПЛАНЕТЕ НАЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим конечный участок подлета космического летательного аппарата к планете назначения, предполагая, что движение является кеплеровым.

Основным требованием, предъявляемым к системе управления полетом на этом участке, как правило, является выдерживание заданной высоты перицентра (рис. 5.30). Точность выдер-

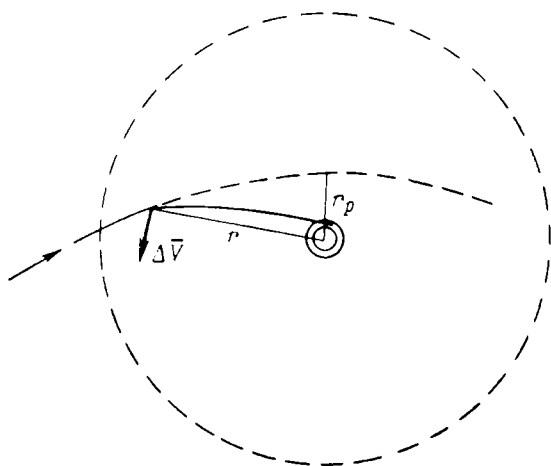


Рис. 5.30. Коррекция траектории подлета аппарата к планете с помощью трансверсального импульса

живания перицентра должна быть особенно высокой, если предусматривается вход в атмосферу планеты. В этом случае под перицентром понимается фиктивный перицентр траектории, вычисленной без учета влияния атмосферы, а допустимый диапазон разброса перицентра называется *коридором входа в атмосферу* (см. гл. VI).

Наряду с радиусом фиктивного перицентра r_p условия входа в атмосферу характеризуются скоростью в перицентре V_p (которая практически не отличается от скорости входа в атмосферу).

Рассмотрим отклонения значений r_p и V_p от номинальных и изобразим на рис. 5.31 границы коридора в плоскости $(\bar{V}_p = \frac{V_p}{V_{p \text{ ном}}}, \bar{r}_p = \frac{r_p}{r_{p \text{ ном}}})$ для некоторого типичного случая

(вход в атмосферу Земли со второй космической скоростью при аэродинамическом качестве, равном 1, и предельно допустимой перегрузке, равной 10). Как видно, границы коридора очень слабо наклонены к оси абсцисс. Отсюда следует, что при относительных ошибках $\Delta \bar{V}_p$ и $\Delta \bar{r}_p$ одного порядка решающую роль играет отклонение высоты фиктивного перицентра $\Delta \bar{r}_p$, и поэтому в первом приближении можно ограничиться рассмотрением задачи об однопараметрической коррекции, когда корректируется только радиус фиктивного перицентра.

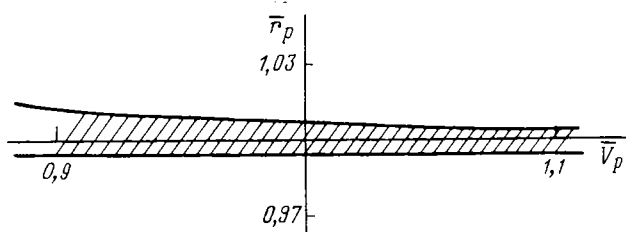


Рис. 5.31. Границы коридора входа в атмосферу Земли
 $n_{\max}=10$; $K=1,0$; $\bar{V}_0=1,4$

Ограничимся плоской задачей. Тогда корректирующие импульсы прикладываются в плоскости траектории, а их направления следует определять из условия максимальной эффективности управления: $\max \left| \frac{\partial r_p}{\partial V} \right|$.

Запишем два интеграла кеплерова движения:

$$\begin{cases} V_\theta r = V_p r_p, \\ \frac{V_\theta^2}{2} + \frac{V_r^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{V_p^2}{2} - \frac{\mu}{r_p}, \end{cases} \quad (5.95)$$

где μ — гравитационная константа планеты;
 V_θ и V_r — тангенциальная и радиальная составляющие скорости.

Отсюда получим, что в линейном приближении

$$\frac{\partial r_p}{\partial V_\theta} = \frac{r_p}{V_p} \frac{\bar{r} - \frac{1}{\bar{r}}}{1 - \bar{V}_{kp}^2}, \quad (5.96)$$

$$\frac{\partial r}{\partial V_r} = \frac{r}{V_p} \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\bar{r}}\right) \left(1 - 2\bar{V}_{kp}^2 + \frac{1}{\bar{r}}\right)}}{1 - \bar{V}_{kp}^2}. \quad (5.97)$$

Здесь

$$\bar{r} = \frac{r}{r_p}, \quad \bar{V}_{кр} = \frac{V_{кр}}{V_p} -$$

отношение круговой скорости в перицентре к скорости в перицентре (например, для второй космической скорости $\bar{V}_{кр}^2 = 1/2$). Следовательно, оптимальный корректирующий импульс должен быть направлен к местному горизонту под углом

$$\varphi_{опт} = \arctg \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\bar{r}}\right) \left(1 - 2\bar{V}_{кр}^2 + \frac{1}{\bar{r}}\right)}}{\bar{r} - \frac{1}{r}}.$$

При этом

$$\left| \frac{\partial r_p}{\partial V} \right|_{\max} = \frac{r_p}{V_p} \frac{\sqrt{(\bar{r} - 1) \left(\bar{r} + 1 - \frac{2\bar{V}_{кр}^2}{\bar{r}} \right)}}{1 - \bar{V}_{кр}^2}. \quad (5.98)$$

На большей части траектории подлета к планете (при $\bar{r} > 3$) угол $\varphi_{опт}$ мал, поэтому корректирующие импульсы можно прилагать в трансверсальном направлении [81], при этом эффективность управления определяется формулой (5.96).

Найдем оптимальное распределение корректирующих импульсов при подлете аппарата к планете назначения, считая, что каждый корректирующий импульс обеспечивает полную компенсацию прогнозируемого отклонения высоты перицентра.

Далее, будем считать, что прогнозируемое отклонение определяется в результате проведения серий измерений, причем среднеквадратическая ошибка σ_{rp} в определении δr_p изменяется по гипотетическому закону

$$\sigma_{rp}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tilde{\sigma}_{rpi}^2}}. \quad (5.99)$$

Здесь σ_0^2 — априорная дисперсия величины δr_p , а значения σ_{rpi} соответствуют ошибке определения величины δr_p в i -й серии измерений. Формула (5.99) справедлива, если ошибки измерений в различных сериях измерений независимы. Если измерения проводятся достаточно часто через малые промежутки Δr , то формулу (5.99) можно представить в виде

$$\sigma_{rp}^2 \approx \frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \int_r^{r_0} \frac{1}{\tilde{\sigma}_{rp}^2(r)} \frac{dr}{\Delta r}}. \quad (5.100)$$

Очевидно, что ошибки прогноза $\tilde{\sigma}_{rp}$ убывают по мере приближения аппарата к планете назначения. В качестве модельных зависимостей $\tilde{\sigma}_{rp}(r)$ были выбраны зависимости $\tilde{\sigma}_{rp} = c/r^n$, где $n=0,5; 1$ и 2 , c — некоторая константа. Задавая значения σ_0 , σ_d , Δr_p и c , можно с помощью (5.100) найти величину r_k , при которой $\sigma_{rp}^2(r_k) = \sigma_d^2$. Это значение r_k определяет точку приложения последнего импульса. Для нахождения оптимального числа и оптимального размещения импульсов можно воспользоваться методом динамического программирования, подобно тому, как это делалось ранее при рассмотрении модельной задачи $\dot{f} = c/\sigma^n$.

Условие минимизации математического ожидания расхода по i -му импульсу можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \left\{ \sqrt{F(r_i) [\sum(r_{i-1}) - \sum(r_i)]} + \right. \\ \left. + \sqrt{F(r_{i+1}) [\sum(r_i) - \sum(r_{i+1})]} \right\} = 0. \quad (5.101)$$

В данном случае

$$F(r) = \frac{1}{\left(\frac{\partial r_p}{\partial V_0} \right)^2}, \quad \sum(r) = \sigma_{rp}^2.$$

Разрешая соотношение (5.101) (для этого достаточно решить биквадратное уравнение), можно определить $\sum(r_{i-1})$ в зависимости от значений $F(r_i)$, $F(r_{i+1})$, $F'(r_i)$,

$$\sum(r_i), \sum(r_{i+1}), \sum'(r_i), \text{ т. е.}$$

определить зависимость $r_{i-1}(r_i, r_{i+1})$.

Последняя точка коррекции r_k фиксирована благодаря условию $\sigma_{rp}(r_k) = \sigma_d$. Задаем произвольно r_{k-1} и, используя соотношение (5.101), последовательно определяем значения r_{k-2} , r_{k-3} и т. д. Задавая различные r_{k-1} , выбираем из них такие, чтобы через некоторое число шагов мы получили $r_{k-m} = r_0$ — начальную точку (в рассматриваемом случае принято, что $\bar{r}_0 = 100$).

Результаты этих расчетов приведены в табл. 5.3—5.5 для случаев $n=0,5; 1$ и 2 , $m=2, 3$ и 4 . Значения $\varphi = \frac{M(\sum |V_i|) r_p}{\sigma_0 V_p}$

выражены в долях скорости в периферии, которая принята равной второй космической скорости.

Таблица 5.3
n=0,5

r_m		1,20			2,00			5,00		
σ_0/σ_n		40	400	4000	40	400	4000	40	400	4000
m=2	r_1	21,58	56,42	85,45	42,57	77,20	93,95	63,40	88,82	97,41
	r_2	1,20	1,20	1,20	2,00	2,00	2,00	5,00	5,00	5,00
	φ_1	0,0185	0,0071	0,0047	0,0094	0,0052	0,0043	0,0063	0,0045	0,0041
	φ_2	0,0373	0,0070	0,0014	0,0125	0,0025	0,0005	0,0049	0,0010	0,0002
	φ	0,0558	0,0141	0,0051	0,0219	0,0077	0,0048	0,0112	0,0055	0,0043
m=3	r_1	53,23	89,33	98,48	73,51	94,99	99,18	84,18	97,02	99,46
	r_2	3,37	6,47	12,76	11,34	20,43	32,88	26,24	40,20	54,82
	r_3	1,20	1,20	1,20	2,00	2,00	2,00	5,00	5,00	5,00
	φ_1	0,0075	0,0045	0,0041	0,0054	0,0042	0,0040	0,0047	0,0041	0,0040
	φ_2	0,0077	0,0010	0,0001	0,0029	0,0004	0,0001	0,0015	0,0002	0,00005
	φ_3	0,0150	0,0021	0,0003	0,0059	0,0008	0,0001	0,0023	0,0003	0,00005
	φ	0,0302	0,0076	0,0045	0,0142	0,0054	0,0042	0,0085	0,0046	0,0041
m=4	r_1	73,06	95,40	99,28	83,93	97,13	99,49	88,78	97,83	99,58
	r_2	11,65	24,84	42,97	29,05	48,52	65,70	47,19	65,46	79,07
	r_3	2,07	2,48	3,02	6,17	8,03	10,24	15,86	19,79	24,00
	r_4	1,20	1,20	1,20	2,00	2,00	2,00	5,00	5,00	5,00
	φ_1	0,0054	0,0042	0,0040	0,0047	0,0041	0,0040	0,0044	0,0041	0,0040
	φ_2	0,0030	0,0004	0,00005	0,0015	0,0002	0,00002	0,0010	0,0002	0,00003
	φ_3	0,0060	0,0007	0,0001	0,0022	0,0003	0,00003	0,0010	0,0001	0,00003
	φ_4	0,0102	0,0012	0,00015	0,0042	0,0005	0,00005	0,0016	0,0002	0,00003
	φ	0,0246	0,0065	0,0043	0,0126	0,0051	0,0041	0,0080	0,0046	0,0041

Таблица 5.4
n=1

r_m		1,20			2,00			5,00		
σ_0/σ_n		40	400	4000	40	400	4000	40	400	4000
m=2	r_1	9,10	31,88	68,59	23,41	58,80	86,92	47,76	80,97	95,18
	r_2	1,20	1,20	1,20	2,00	2,00	2,00	5,00	5,00	5,00

$\bar{r}_m$		1,20			2,00			5,00		
σ_0/σ_n		40	400	4000	40	400	4000	40	400	4000
$m=2$	φ_1	0,0443	0,0125	0,0038	0,0165	0,0068	0,0046	0,0083	0,0049	0,0042
	φ_2	0,0730	0,0167	0,0036	0,0272	0,0055	0,0012	0,0083	0,0019	0,0004
	φ	0,1173	0,0292	0,0094	0,0417	0,0123	0,0058	0,0167	0,0068	0,0046
$m=3$	$\bar{r}_1$	26,27	71,92	94,77	48,78	86,83	97,74	71,35	93,99	98,93
	$\bar{r}_2$	2,79	4,88	8,86	8,20	14,92	25,00	21,04	33,74	48,26
	$\bar{r}_3$	1,20	1,20	1,20	2,00	2,00	2,00	5,00	5,00	5,00
	φ_1	0,0151	0,0055	0,0042	0,0081	0,0046	0,0041	0,0055	0,0042	0,0040
	φ_2	0,0211	0,0031	0,0005	0,0079	0,0012	0,0002	0,0030	0,0005	0,0001
	φ_3	0,0317	0,0049	0,0007	0,0122	0,0018	0,0002	0,0042	0,0006	0,0001
	φ	0,0679	0,0135	0,0054	0,0282	0,0076	0,0045	0,0127	0,0053	0,0042
$m=4$	$\bar{r}_1$	43,07	86,00	97,79	63,74	92,46	98,69	79,10	95,74	99,19
	$\bar{r}_2$	7,50	17,27	33,35	19,59	37,45	57,05	38,21	57,91	73,84
	$\bar{r}_3$	1,97	2,45	3,06	5,29	7,11	9,18	13,92	17,80	21,91
	$\bar{r}_4$	1,20	1,20	1,20	2,00	2,00	2,00	5,00	5,00	5,00
	φ_1	0,0091	0,0046	0,0041	0,0061	0,0043	0,0041	0,0049	0,0042	0,0040
	φ_2	0,0099	0,0013	0,0002	0,0043	0,0006	0,0001	0,0020	0,0003	0,00005
	φ_3	0,0152	0,0019	0,0002	0,0059	0,0007	0,0001	0,0021	0,0002	0,00002
	φ_4	0,0220	0,0028	0,0003	0,0087	0,0011	0,0001	0,0030	0,0004	0,00003
	φ	0,0562	0,0106	0,0048	0,0250	0,0068	0,0044	0,0120	0,0051	0,0041
а) φ_{min}		0,0424	0,0082	0,0045	0,0186	0,0059	0,0042	0,0103	0,0048	0,0041
б) φ_{min}		0,0365	0,0076	0,0044	0,0145	0,0055	0,0041	0,0072	0,0045	0,0040

Таблица 5.5

 $n=2$

$\bar{r}_m$		1,2			2,0			5,0		
σ_0/σ_n		40	400	4000	40	400	4000	40	400	4000
$m=2$	$\bar{r}_1$	3,14	7,14	17,54	6,93	16,73	40,22	18,86	43,82	78,20
	$\bar{r}_2$	1,20	1,20	1,20	2,00	2,00	2,00	5,00	5,00	5,00

$\bar{r}_m$		1,2			2,0			5,0		
σ_0/σ_d		40	400	4000	40	400	4000	40	400	4000
$m=2$	φ_1	0,1407	0,0569	0,0228	0,0580	0,0239	0,0099	0,0209	0,0091	0,0051
	φ_2	0,1112	0,0394	0,0152	0,0418	0,0161	0,0062	0,0148	0,0056	0,0018
	φ	0,2519	0,0963	0,0380	0,0998	0,0400	0,0161	0,0357	0,0147	0,0069
$m=3$	$\bar{r}_1$	5,33	16,64	50,19	10,85	33,03	75,49	45,52	68,29	93,16
	$\bar{r}_2$	2,02	3,39	6,31	4,41	8,34	15,03	13,11	21,65	33,05
	$\bar{r}_3$	1,20	1,20	1,20	2,00	2,00	2,00	5,00	5,00	5,00
	φ_1	0,0756	0,0238	0,0079	0,0353	0,0117	0,0053	0,0085	0,0058	0,0043
	φ_2	0,0586	0,0165	0,0047	0,0277	0,0081	0,0020	0,0057	0,0027	0,0005
	φ_3	0,0530	0,0126	0,0033	0,0207	0,0056	0,0014	0,0039	0,0019	0,0004
	φ	0,1862	0,0529	0,0159	0,0837	0,0254	0,0087	0,0181	0,0104	0,0052
$m=4$	$\bar{r}_1$	6,96	24,22	68,33	15,60	43,59	84,61	54,11	75,94	95,15
	$\bar{r}_2$	3,12	7,66	18,76	6,59	16,44	33,80	25,45	36,24	56,36
	$\bar{r}_3$	1,68	2,36	3,61	3,44	5,60	8,50	11,42	14,10	18,76
	$\bar{r}_4$	1,20	1,20	1,20	2,00	2,00	2,00	5,00	5,00	5,00
	φ_1	0,0550	0,0161	0,0058	0,0269	0,0088	0,0047	0,0070	0,0051	0,0042
	φ_2	0,0448	0,0116	0,0027	0,0234	0,0061	0,0013	0,0046	0,0021	0,0004
	φ_3	0,0355	0,0081	0,0018	0,0174	0,0042	0,0008	0,0032	0,0014	0,0002
	φ_4	0,0357	0,0070	0,0014	0,0134	0,0030	0,0006	0,0023	0,0010	0,0001
	φ	0,1709	0,0438	0,0118	0,0811	0,0222	0,0074	0,0171	0,0096	0,0049

Безразмерную функцию φ удобно представить в виде

$$\varphi = \varphi \left(n, \frac{\sigma_0}{\sigma_d}, \frac{r_m}{r_p} \right),$$

т. е. результат зависит от начального разброса σ_0 , требуемой точности выдерживания радиуса фиктивного перигея σ_d и точности измерений (от этого зависит r_m — расстояние, при котором достигается требуемая точность, $\sigma_{rp}(r_m) = \sigma_d$).

Как видно, при больших $\frac{\sigma_0}{\sigma_d}$ основная часть расхода приходится на первый импульс. Оптимальное число импульсов оказы-

вается достаточно большим, особенно при $n=0,5$ и при больших $\frac{\sigma_0}{\sigma_d}$, но, как видно, минимум является очень пологим, так что при $m>3$ уменьшения расходов практически не происходит.

Для того чтобы установить, в какой мере выбранная стратегия управления близка к линейной оптимальной, вычислим теоретический минимум математического ожидания расхода по формуле (5.77) для двух случаев.

а) управление заканчивается при $\bar{r}=\bar{r}_m$,

б) управление возможно и при $\bar{r}<\bar{r}_m$ (отметим, что в этом случае управление заканчивается при $\bar{r}_m>\bar{r}>1$).

Результаты расчета приведены в нижней части табл. 5.4. Как видно, дискретная коррекция с полной компенсацией промаха приводит к некоторому увеличению расходов (до 30%). В тех случаях, когда преобладающим является первый импульс, это увеличение менее значительно.

Для пересчета результатов при изменении скорости в периферии необходимо умножить абсолютное значение расхода на коэффициент $\left(\frac{1}{\bar{V}_{кр}} - \bar{V}_{кр}\right)\sqrt{2}$, а относительное значение (выраженное в долях скорости в периферии) на $2(1-\bar{V}_{кр}^2)$.

Для приближенной оценки гарантийных запасов на коррекцию можно вычислить выражение

$$M\left(\sum |V_i|\right) + p\sigma_{\Sigma | V_i|},$$

где

$$\sigma_{\Sigma | V_i|} = \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1} \sqrt{\sum_{i=1}^m M^2(|V_i|)},$$

а значение p выбирается в зависимости от требуемого уровня вероятности и характера распределения величин отдельных импульсов. Для $P=0,9973$ следует выбрать $p=3-3,5$.

ГЛАВА VI

Траектории входа в атмосферу

§ 6.1. ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ОСУЩЕСТВЛЕНИЕМ ВХОДА В АТМОСФЕРУ

При запуске летательного аппарата в космическое пространство главной целью является получение необходимой научной информации и передача этой информации на Землю. На первом этапе развития космической техники единственным средством передачи информации являлась радио- и телеметрическая связь, устанавливаемая между космическим летательным аппаратом и Землей. Однако наибольший интерес представляет непосредственное изучение показаний приборов, фотографий, имеющихся на борту аппарата. Такая возможность появляется, если аппарат удастся возвратить на Землю. Наконец, появление пилотируемых космических аппаратов привело к тому, что возвращение аппарата или его части на Землю стало обязательным условием.

Наибольшие трудности, связанные с осуществлением входа космического летательного аппарата в атмосферу, обусловлены большими аэродинамическими нагрузками, действующими на конструкцию аппарата или на его экипаж, а также интенсивным нагреванием поверхности аппарата.

Степень воздействия перегрузки на организм человека определяется целым рядом факторов — величиной перегрузки, длительностью ее действия, направлением перегрузки по отношению к человеческому телу, частотой изменения перегрузки (при знакопеременных перегрузках), позой и костюмом человека, наконец, длительностью пребывания человека в состоянии невесомости в период, предшествующий действию перегрузок. Для ориентировочной оценки степени воздействия перегрузки часто ограничиваются одним критерием — максимальной перегрузкой, достигаемой на траектории входа в атмосферу. При этом в большинстве случаев в качестве предела выносливости человека принимается значение максимальной перегрузки от 5 до 15.

Тепловые потоки, поступающие на поверхность аппарата, могут достигать очень больших значений — порядка 10^2 — 10^4 ккал/м²сек.

Наконец, весьма актуальной является задача обеспечения посадки летательного аппарата в заданный район поверхности Земли или другой планеты. Эта задача будет рассмотрена в следующей главе.

Летательные аппараты, предназначенные для входа в атмосферу, составляют довольно широкий класс. Сюда в первую очередь относятся гиперзвуковые планеры и искусственные спутники; скорость входа в атмосферу этих аппаратов не превышает круговой скорости.

Наиболее интересной и трудной задачей является обеспечение входа в атмосферу и безопасной посадки межпланетных или лунных кораблей; скорость входа в атмосферу этих аппаратов близка ко второй космической скорости или превышает ее.

В настоящей главе будут рассмотрены основные свойства траекторий входа в атмосферу аппаратов описанных выше типов. В первую очередь будут рассмотрены траектории баллистических аппаратов, у которых подъемная сила равна нулю и затем более широкий класс траекторий аппаратов с подъемной силой. В отличие от самолетов, космические аппараты при полете в атмосфере, как правило, не используют силы тяги.

Будем считать, что управление траекторией полета отсутствует, если не предусматривается специальной схемы для регулирования величины подъемной силы или сопротивления аппарата при полете в атмосфере. Таким образом, аппарат с постоянным углом атаки и нулевым углом крена будет считаться неуправляемым, хотя даже при использовании нерегулируемой подъемной силы требуется применить какой-нибудь метод стабилизации аппарата по крену, так что движение нельзя считать полностью неуправляемым.

Основное внимание будет уделено аналитическим методам исследования траекторий, которые позволяют получить наиболее общие и наглядные результаты.

Главной задачей данной и следующей главы является анализ динамики полета космического летательного аппарата, тепловой режим на траекториях входа в атмосферу будет рассмотрен в очень ограниченном объеме.

Для проведения грубой сравнительной оценки тепловых режимов на различных траекториях входа в атмосферу используются простые приближенные формулы для конвективных удельных тепловых потоков, поступающих к носовой части аппарата, причем считается, что носовая часть имеет сферическую форму.

Если пограничный слой является ламинарным, то тепловой поток достигает максимального значения в критической точке (передней точке полусферы, рис. 6.1). При больших числах M

величина конвективного теплового потока в критической точке может быть выражена приближенной формулой

$$q_{к.л} = Cq^{0.5} V l r_1^{-0.5}, \quad (6.1)$$

где $l = 3,1 \div 3,25$.

Для сравнительного анализа будет использоваться формула для теплового потока при входе в атмосферу Земли, взятая из [84].

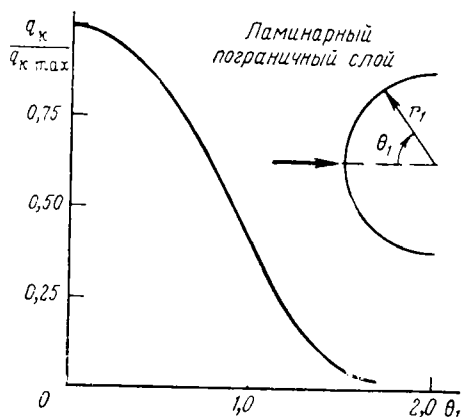
$$q_{к.л} = 3,4 \cdot 10^4 \frac{1}{\sqrt{r_1}} \sqrt{\frac{q}{q(0)}} \left(\frac{V}{V_{кр}} \right)^{3,25} \text{ ккал/м}^2\text{сек}, \quad (6.2)$$

где $q(0)$ — плотность атмосферы на уровне моря;

$V_{кр}$ — круговая скорость, принятая равной 7850 м/сек;

r_1 — радиус носовой части в м.

Для определения теплового потока в других точках носовой



полусферы достаточно умножить выражение (6.2) на $(\cos \theta_1)^{3/2}$, где θ_1 — угловая координата точки.

Если пограничный слой является турбулентным, то конвективный удельный тепловой поток достигает максимума в сечении, где происходит переход через скорость звука — примерно при $\theta_1 = 40^\circ$ (рис. 6.2). При аналогичных допущениях выражение для теплового потока определяется формулой

Рис. 6.1. Распределение конвективного теплового потока на сферической носовой части, ламинарный пограничный слой

$$q_{к.т} = Cq^{0.8} V l r_1^{-0.2}, \quad (6.3)$$

где $l = 3,19 \div 3,5$.

Для сравнительного анализа будет использоваться формула из [99]

$$q_{к.т} = 3 \cdot 10^5 \frac{1}{r_1^{0.2}} \left(\frac{q}{q_\theta} \right)^{0.8} \left(\frac{V}{V_{кр}} \right)^{3,19} \text{ ккал/м}^2\text{сек}. \quad (6.4)$$

Существование ламинарного или пограничного слоя зависит от числа Re. Если в окрестности критической точки пограничный слой является ламинарным, а затем переходит в турбулентный, то возможны два местных максимума конвективного теплового потока. Радиационный тепловой поток от нагретой поверхности аппарата определяется формулой

$$q_{ра} = \varepsilon \sigma T_w^4 \text{ ккал/м}^2\text{сек}, \quad (6.5)$$

где ϵ — степень черноты; σ — постоянная Стефана—Больцмана; T_w — температура поверхности.

Если внешняя поверхность аппарата прогревается достаточно быстро, то радиационный тепловой поток от поверхности аппарата почти уравнивает конвективный тепловой поток q_k , т. е. реализуется квазистационарный тепловой режим. При

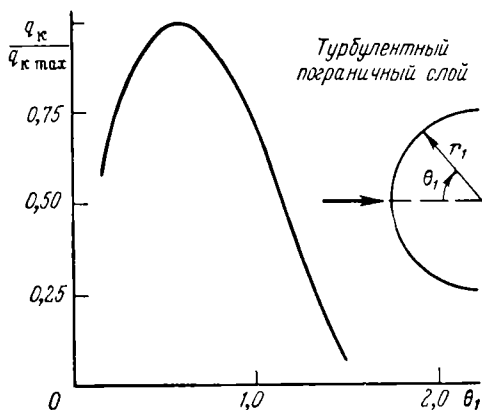


Рис. 6.2. Распределение конвективного теплового потока на сферической носовой части, турбулентный пограничный слой

этом равновесная температура поверхности определяется из соотношения

$$T_w \approx \sqrt[4]{\frac{q_k}{\epsilon \sigma}}. \quad (6.6)$$

Максимальная равновесная температура, которая определяется значением максимального конвективного теплового потока, является одним из критериев, определяющих тепловой режим.

В качестве другого простого критерия часто используют значение суммарного теплового потока, поступающего на единицу поверхности аппарата за время снижения:

$$Q_k = \int_{t_0}^t q_k dt. \quad (6.7)$$

При скоростях входа в атмосферу, существенно превышающих круговую скорость, заметную роль начинает играть радиационный тепловой поток от воздуха, нагретого за скачком уплотнения, поступающий к поверхности аппарата. Влияние этого типа теплопередачи будет кратко рассмотрено в § 6.6.

§ 6.2. ВЫВОД ПРИБЛИЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Если траектория полета космического аппарата завершается входом в атмосферу, то ее удобно разделить на несколько характерных участков. Прежде всего — это участок полета в разреженных слоях атмосферы, где аэродинамические силы малы по сравнению с гравитационными. Для расчета движения на этом участке можно взять за основу кеплеровы траектории. Наибольший интерес представляет основной участок траектории входа в атмосферу, который включает в себя гашение скорости до сравнительно малых значений.

Наконец, следует заключительный, предпосадочный участок. На предпосадочном участке движение аппарата переходит в режим планирования, если аппарат обладает подъемной силой. При этом аэродинамические силы стремятся уравновесить силу тяжести, что приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}\theta &\approx -\arctg \frac{c_x}{c_y}, \\ n_x &\approx -\sin \theta \approx \frac{c_x}{\sqrt{c_y^2 + c_x^2}}.\end{aligned}\quad (6.8)$$

Здесь θ — местный угол наклона траектории;

n_x — продольная перегрузка;

c_y и c_x — коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления.

На этом участке возможно использование специальных средств смягчения удара при посадке: парашютов, двигательных систем.

Для того чтобы провести более четкое разграничение между участками, будем считать критерием основного участка траектории выполнение неравенства

$$\frac{c_x S q}{m} \gg g |\sin \theta|,$$

$$\text{или } n_x \gg |\sin \theta|. \quad (6.9)$$

Здесь S и m — характерная площадь и масса аппарата;

$q = \rho V^2/2$ — скоростной напор;

g — ускорение силы тяжести.

Условие это означает, что сила сопротивления намного превышает проекцию силы тяжести на направление полета.

Легко видеть, что это неравенство не выполняется как при полете в разреженных слоях атмосферы, так и на предпосадочном участке.

Хотя численный расчет траекторий входа в атмосферу не представляет особых затруднений, построение аналитических или полуаналитических решений оказывается полезным по целому ряду соображений. Такие решения позволяют выявить

основные факторы, влияющие на характер траектории входа в атмосферу, наглядно определяют структуру траекторий различного типа, позволяют быстро проводить сравнительный анализ аэродинамических нагрузок и тепловых режимов.

Существует несколько форм записи приближенных уравнений движения при входе в атмосферу, отличающихся в зависимости от сделанных допущений. Наиболее известной является форма записи, предложенная Д. Р. Чепменом [68]. Здесь будет использоваться другое уравнение, варианты которого рассматривались в работах [93], [74], [52].

Для приведения уравнений движения аппарата на основном участке траектории входа в атмосферу к простейшему виду предполагаем, что:

1) планета имеет идеальную сферическую форму, а поле тяготения является центральным;

2) экваториальная скорость вращения планеты и окружающей ее атмосферы мала по сравнению со скоростью движения аппарата;

3) высота, на которой начинается основной участок траектории входа в атмосферу, мала по сравнению с радиусом планеты, т. е.

$$H \ll r.$$

Отсюда следует, что

$$g = g(0) \cdot \left(\frac{r}{r+H} \right)^2 \approx \text{const},$$

$$r + H \approx \text{const},$$

$$V_{\text{кр}} = \sqrt{(r+H)g} \approx \text{const};$$

4) температура атмосферы постоянна, откуда следует экспоненциальная зависимость плотности от высоты

$$\varrho(H) \approx \varrho(0) e^{-\lambda H}, \quad (6.10)$$

где λ — логарифмический градиент плотности.

Если аэродинамические коэффициенты зависят от числа Маха, то можно считать, что они зависят только от скорости, поскольку скорость звука, пропорциональную корню из температуры, следует считать постоянной;

5) угол наклона траектории мал: $|\theta| \ll 1$, так что $\sin \theta \approx \theta$ и $\cos \theta \approx 1$;

6) для основного участка траектории входа в атмосферу характерно следующее неравенство:

$$|\theta| \ll n_x; \quad (6.11)$$

7) при рассмотрении входа в атмосферу со скоростью, близкой к круговой, принимаются предельные начальные условия:

$$\varrho_0 = 0, \quad V_0 = V_{\text{кр}}.$$

Допущение 4 для атмосферы Земли не является достаточно обоснованным, поскольку даже в диапазоне высот от 20 до 80 км значения температуры колеблются в пределах $\pm 20\%$.

Как будет показано ниже, введение этого допущения может в отдельных случаях вносить погрешность порядка $\pm 20\%$ в определение максимальной перегрузки, однако эта погрешность может быть скорректирована.

Допущение 5 оправдано тем, что приемлемые значения максимальной перегрузки получаются лишь на траекториях с малыми углами наклона.

Неравенство (6.11) характерно для основного участка траектории входа в атмосферу. Оно равносильно допущению о малом влиянии гравитационных сил на изменение скорости.

Допущение 7 оправдано тем, что плотность на основном участке траектории, где достигаются максимальные значения перегрузок и тепловых потоков, во много раз превосходит плотность в начале основного участка. Это допущение противоречит допущению 6, поэтому, строго говоря, решение для начального участка траектории входа в атмосферу не является правильным, однако истинное решение, как правило, очень быстро стремится к решению с предельным начальным условием $q_0 = 0$.

С учетом только допущений 1 и 2 уравнения движения записываются следующим образом:

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{c_x(M) S_0(H) V^2}{2m} - g(H) \sin \theta, \quad (6.12)$$

$$V \frac{d\theta}{dt} = \frac{c_y(M) S_0(H) V^2}{2m} - \cos \theta \left(g(H) - \frac{V^2}{r+H} \right), \quad (6.13)$$

где $M = \frac{V}{a(H)}$ — число Маха;

$a(H)$ — скорость звука.

Кинематические соотношения имеют вид

$$\frac{dH}{dt} = V \sin \theta, \quad (6.14)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{V r \cos \theta}{r+H}, \quad (6.15)$$

где L — дальность полета.

Вводя допущения 3—6 и исключая время из уравнений (6.12), (6.13) и (6.14), получим:

$$\frac{dH}{dV} = - \frac{\theta}{\frac{c_x S_0}{2m} V e^{-\lambda H}},$$

$$V \frac{d\theta}{dV} = - \frac{c_y}{c_x} + \frac{g - \frac{V^2}{r}}{\frac{c_x S_0}{2m} V e^{-\lambda H}}.$$

Далее, делая замену переменных и исключая θ , получим одно уравнение второго порядка, которое в случае $c_x = \text{const}$ записывается в следующем виде:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -V\bar{r\lambda} \frac{c_y}{c_x} + \frac{e^{2x} - 1}{y}. \quad (6.16)$$

Здесь

$$x = \ln \frac{V_{\text{кр}}}{V} = \ln \frac{1}{\bar{V}}, \quad (6.17)$$

$$\bar{V} = e^{-x}, \quad (6.18)$$

$$y = \frac{c_x S}{2m} \sqrt{\frac{r}{\lambda}} Q. \quad (6.19)$$

Остальные параметры траектории определяются из соотношений:

$$\theta = -\frac{1}{V\bar{r\lambda}} \frac{dy}{dx}, \quad (6.20)$$

$$n = V\bar{r\lambda} \sqrt{1 + \left(\frac{c_y}{c_x}\right)^2} y e^{-2x}, \quad (6.21)$$

$$n_x = V\bar{r\lambda} y e^{-2x},$$

$$t = \frac{1}{V\bar{g\lambda}} \int_{x_0}^x \frac{e^x dx}{y}, \quad (6.22)$$

$$L = \sqrt{\frac{r}{\lambda}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{y}. \quad (6.23)$$

Уравнение (6.16) имеет простой физический смысл. Отдельные члены этого уравнения эквивалентны членам уравнения (6.13):

$$\begin{aligned} y'' &\sim V \frac{d\theta}{dt}, \\ -V\bar{r\lambda} \frac{c_y}{c_x} &\sim \frac{c_y S Q V^2}{2m}, \\ &\sim \frac{e^{2x}}{y} - g \cos \theta, \\ -\frac{1}{y} &\sim \cos \theta \frac{V^2}{r + H}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Из соотношения (6.20) следует, что участкам траектории при $\theta = \text{const}$ соответствуют прямолинейные участки зависимости $y(x)$.

В случае снижения на Землю можно считать, что

$$\lambda \approx \frac{1}{7000} \text{ 1/м}, \quad V_{\text{кр}} \approx 7850 \text{ м/сек}, \quad \sqrt{g\lambda} \approx 30,$$

$$\frac{1}{\sqrt{g\lambda}} \approx 26,5 \text{ сек}, \quad \sqrt{\frac{r}{\lambda}} \approx 212 \text{ км}, \quad y \approx 1,3 \cdot 10^5 \sigma_x \left(\frac{q}{q(0)} \right),$$

где $\sigma_x = c_x S/m$ — баллистический коэффициент, масса m выражена в кг, S — в м^2 .

Использование уравнения (6.16) удобно еще и тем, что позволяет результаты расчета, полученные при исследовании входа в атмосферу Земли, легко пересчитать на случай входа в атмосферу другой планеты. Этот вопрос подробно рассмотрен в [68] и др. В дальнейшем все результаты будут относиться к случаю входа в атмосферу Земли.

§ 6.3. БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ ВХОДА В АТМОСФЕРУ

Простейшей траекторией входа в атмосферу является баллистическая. Такой способ снижения обладает тем преимуществом, что не требует стабилизации движения аппарата около центра масс (короткопериодического движения). Поэтому в качестве первых аппаратов, возвращаемых в атмосферу, использовались именно баллистические аппараты шарообразной формы («Восток») и капсульной формы («Меркурий»).

В случае $c_y = 0$, $c_x = \text{const}$ уравнение движения (6.16) принимает вид

$$y'' = \frac{e^{2x} - 1}{y}. \quad (6.25)$$

Рассмотрим траекторию входа в атмосферу с круговой скоростью и нулевым углом входа — этот случай соответствует снижению спутника с околокруговой орбиты, эволюционирующей под действием сил сопротивления [93].

Тогда начальные условия $V_0 = V_{\text{кр}}$, $\theta_0 = 0$, $q_0 \approx 0$ можно записать в следующем виде:

$$y_0(0) = 0, \quad y'_0(0) = 0. \quad (6.26)$$

Уравнение (6.25) обладает особенностью в точке $x=0$. Для того чтобы выяснить структуру решения, разложим функцию $e^{2x}-1$ в ряд Тейлора:

$$e^{2x} - 1 = 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots$$

В окрестности точки $x=0$ достаточно удержать лишь первый член выпясанного ряда. Но тогда уравнение (6.25) переходит в так называемое уравнение Эмдена—Фаулера: $yy''=2x$, которое имеет решение $y = \sqrt{\frac{8}{3}} x^{3/2}$, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Поэтому ищем решение уравнения (6.25) в виде

$$y = \sqrt{\frac{8}{3}} x^{3/2} (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots). \quad (6.27)$$

Используя выпясанное разложение функции $e^{2x}-1$ в ряд и приравнивая одинаковые степени x , последовательно определяем коэффициенты: $a_1=1/6$, $a_2=1/24$, $a_3 \approx 0,0099$, $a_4 \approx 0,0021$ и т. д.

Для определения максимальных значений перегрузки и тепловых потоков вполне достаточно ограничиться тремя членами ряда (с ошибкой менее 1%).

Так, максимальное значение перегрузки можно определить, приравнивая нулю производную от выражения

$$n_x = \sqrt{r\lambda} y e^{-2x} = \sqrt{r\lambda} \sqrt{\frac{8}{3}} \left(x^{3/2} + \frac{x}{6}^{5/2} + \frac{x^{7/2}}{24} \right) e^{-2x}.$$

Отсюда найдем, что $x(n_{x\max}) = 0,835$ или $\bar{V}(n_{x\max}) = e^{-0,835} = 0,434$,

$$y(n_{x\max}) = 1,45, \quad n_{x\max} = 0,277 \sqrt{r\lambda}.$$

Для Земли можно считать

$$\bar{V}(n_{x\max}) = 6550 \text{ м/сек}, \quad n_{\max} = 8,33,$$

$$\frac{q}{q(0)}(n_{x\max}) \approx \frac{1,11 \cdot 10^{-5}}{\sigma_x}.$$

Аналогичным путем можно определить максимальные значения тепловых потоков, а также значения скоростей, при которых они достигаются. Для этого необходимо переписать формулы (6.2) и (6.4) в обозначениях x и y

$$q_{к.л} \approx \frac{85 y^{0,5} e^{-3,25x}}{r_1^{0,5} \sigma_x^{0,5}} \text{ ккал/м}^2 \text{ сек}, \quad (6.28)$$

$$q_{к.т} \approx \frac{25 y^{0,8} e^{-3,19x}}{r_1^{0,2} \sigma_x^{0,8}} \text{ ккал/м}^2 \text{ сек}. \quad (6.29)$$

Подставляя в (6.28) и (6.29) приближенное выражение для $y(x)$, дифференцируя по x и приравнивая производную нулю,

находим точки, в которых тепловые потоки достигают максимума:

$$\begin{aligned}\bar{V}(q_{\kappa, \lambda \max}) &= 0,789, \\ q_{\kappa, \lambda \max} &= \frac{17,4}{\sqrt{r_1 \sigma_x}} \text{ ккал/м}^2 \text{сек}, \\ \bar{V}(q_{\kappa, \tau \max}) &= 0,670, \\ q_{\kappa, \tau \max} &= \frac{3,65}{r_1^{0,2} \sigma_x^{0,8}} \text{ ккал/м}^2 \text{сек}.\end{aligned}$$

Рассмотрим решение уравнения (6.25) с начальными условиями

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = C_1 > 0,$$

где $C_1 = -\sqrt{r \lambda \theta_0}$, θ_0 — угол входа в атмосферу.

Если величина C_1 мала ($C_1 < 0,7$), то траектория близка к рассмотренной выше, ее можно искать, вводя поправки к решению (6.27) (подробнее см. [52]).

При больших C_1 решение можно искать в виде ряда по степеням x :

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots \quad (6.30)$$

Так же, как и ранее, используем разложение функции $e^{2x} - 1$ в ряд Тейлора и последовательно определяем коэффициенты:

$$\begin{aligned}C_2 &= \frac{1}{C_1}, \quad C_3 = \left(1 - \frac{1}{C_1^2}\right) \frac{1}{3C_1}, \\ C_4 &= \left(1 - \frac{2}{C_1^2} + \frac{2}{C_1^4}\right) \frac{1}{9C_1}, \\ C_5 &= \left(3 - \frac{10}{C_1^2} + \frac{17}{C_1^4} - \frac{14}{C_1^6}\right) \frac{1}{90C_1} \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Это разложение можно использовать для построения решения и определения максимальных перегрузок и тепловых потоков при не слишком малых углах входа ($C_1 > 1$).

Так как $C_2 = 1/C_1$, то при увеличении C_1 (увеличение угла входа по абсолютной величине) кривизна траектории уменьшается и она приближается к спиральной $\eta = \text{const}$.

При достаточно больших углах входа в атмосферу $C_1 > 3$ (для Земли $|\theta_0| > 6^\circ$) можно с достаточной степенью точности принять, что на основном участке траектории входа в атмосферу $y \approx C_1 x$, т. е. $\theta = \text{const}$. Последний случай подробно рассмотрен в целом ряде работ ([57] и др.).

Запишем некоторые результаты, заменяя θ на $\sin \theta$ (при больших углах входа это различие становится существенным).

Так, перегрузка определяется формулой

$$n_v = \left[\frac{r\bar{\lambda}}{2e} y e^{-2x} - \left[\frac{r\bar{\lambda}}{2e} C_1 x e^{-2x} - r\bar{\lambda} |\sin \theta| x e^{-x} \right] \right]$$

Отсюда $x(n_{x \max}) = 0,5$ или $\bar{V}(n_{v \max}) = 0,605$,

$$n_{x \max} = \frac{r\bar{\lambda}}{2e} |\sin \theta| \approx 170 |\sin \theta| \quad (6.31)$$

(для Земли).

Аналогично определяются максимальные тепловые потоки. Рассматривая выражения (6.28) и (6.29), подставляя $y = \frac{1}{V} \frac{r\bar{\lambda}}{2e} |\sin \theta| x$ и находя максимумы этих выражений, получим

$$q_{к.л \max} \approx \frac{110 \sqrt{\frac{r\bar{\lambda}}{2e}} |\sin \theta|}{\frac{1}{2} \frac{r\bar{\lambda}}{2e} |\sin \theta|} \text{ ккал/м}^2 \text{сек}, \quad (6.32)$$

$$q_{к.т \max} \approx \frac{5^{0,5} |\sin \theta|^{0,5}}{\frac{1}{2} \frac{r\bar{\lambda}}{2e} |\sin \theta|^{0,5}} \text{ ккал/м}^2 \text{сек}. \quad (6.33)$$

Здесь следует сделать замечание о величине угла входа в атмосферу, измеряемого на *границе атмосферы*. Граница атмосферы есть понятие условное, высота расположения этой границы зависит от баллистического коэффициента. Пусть неопределенность расположения границы атмосферы характеризуется не слишком большим перепадом высоты $H_2 - H_1 = \Delta H$. Тогда, используя соотношение для кеплеровской траектории, получим

$$\theta_2 - \theta_1 \approx \left\{ \frac{V_{кр}^2}{V_1^2} - 1 \right\} \frac{\Delta H}{r_1 \operatorname{tg} \theta_1}. \quad (6.34)$$

Выберем характерное значение $\Delta H = 15 \text{ км}$, такое, чтобы плотность атмосферы изменялась в 10 раз (в соответствии с возможной вариацией баллистического параметра). Тогда

$$\frac{\Delta \theta}{\theta_1} \approx \frac{7,8}{6_1^2 [z p a \partial]} \left(\frac{V_{кр}^2}{V_1^2} - 1 \right).$$

Как видно из этой формулы, неопределенность в задании угла входа становится очень малой при скорости входа, близкой к круговой, если углы входа не слишком малы. Решения могут быть получены и путем численного интегрирования уравнения (6.25). Результаты расчетов приведены на рис. 6.3—6.7, на рис. 6.3 для сравнения приведены также аналитические решения. При больших x можно считать, что $e^{2x} - 1 \approx e^{2x}$. Уравнение $yy'' = e^{2x}$ имеет частное решение $y = e^x$. Результаты расчетов свидетельствуют о том, что при больших x решения приближаются к e^x (см. рис. 6.3), т. е. $q \sim 1/V$.

Используя полученные решения, можно проверить, насколько выполняются введенные выше допущения.

Эта проверка показывает, что допущения 5 и 6 нарушаются при больших x ($x > 2,5$ или $\bar{V} < 0,1$), а допущение 6 нарушается еще и при малых x ($x < 0,1$ или $\bar{V} > 0,99$).

Таким образом, полученные решения справедливы лишь в диапазоне $0,99 > \bar{V} > 0,1$. Кроме того, представляет интерес вы

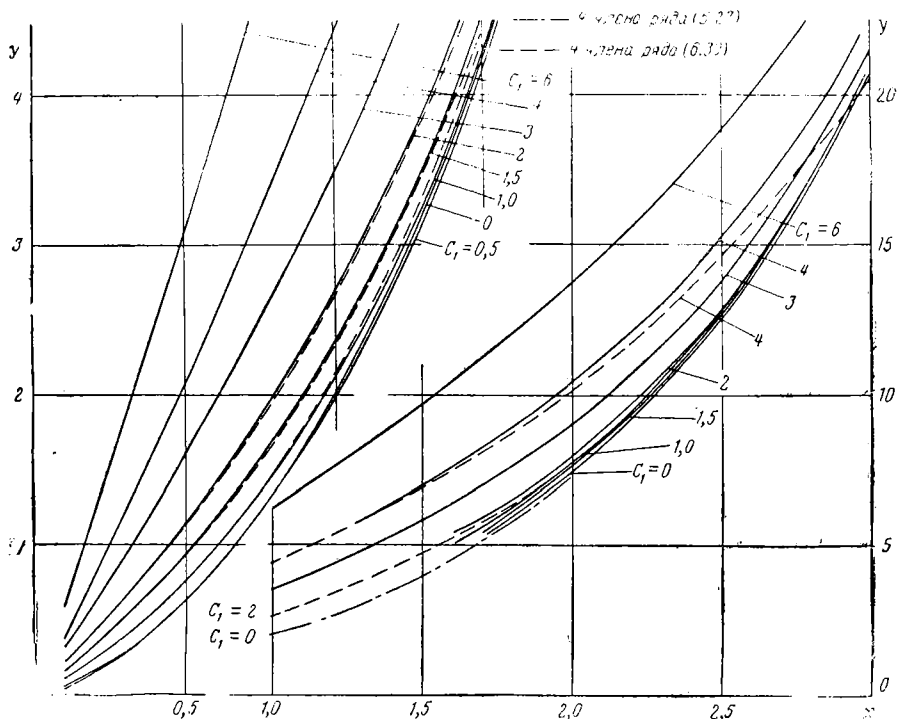


Рис. 6.3. Изменение плотности на баллистических траекториях входа в атмосферу

яснить, в какой степени отклонения траектории, вызванные влиянием каких-либо возмущений, влияют на дальнейшую форму траекторий. Для этого можно задать некоторое малое отклонение $\delta y(x)$ и проследить за дальнейшим поведением этого отклонения, используя линеаризованное уравнение в вариациях

$$\delta y'' + \frac{e^{2x} - 1}{y^2(x)} \delta y = 0. \quad (6.35)$$

Анализ этого уравнения показывает, что отклонения δy являются знакопеременными функциями и возрастают по амплитуде с ростом x (по мере уменьшения скорости), однако отношение

$\delta y/y \sim \delta q/q \sim \delta H$ всегда стремится к нулю. Поэтому в плоскости (H, V) траектории являются устойчивыми.

Выражения для дальности и времени представляют собой интегралы, которые расходятся, если в качестве функции $y(x)$ взять предельное решение и начать интегрировать от $x=0$.

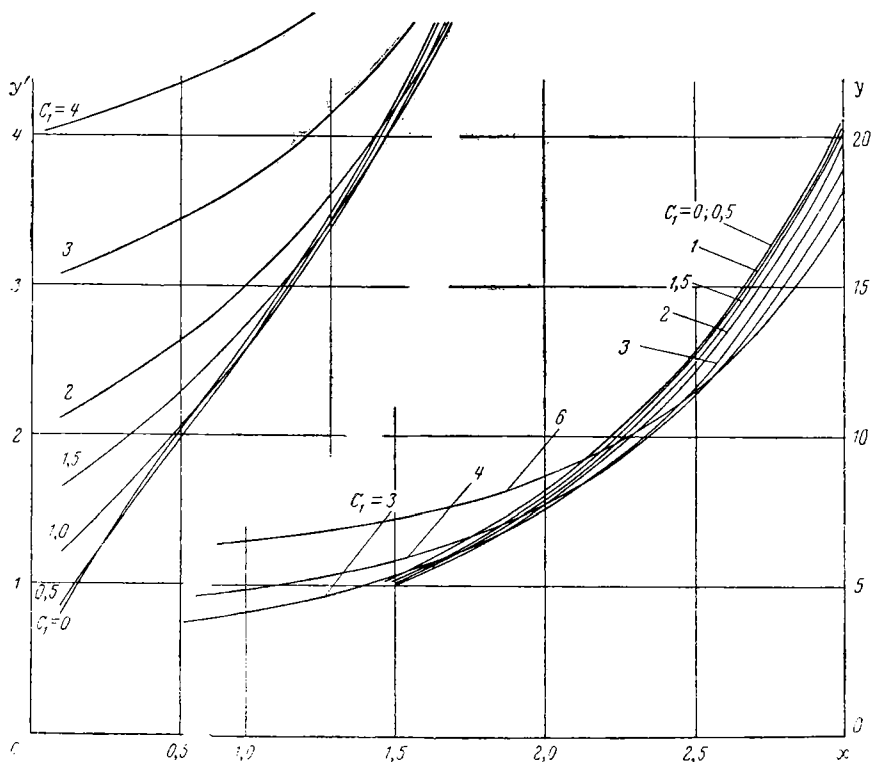


Рис. 6.4. Изменение угла наклона траектории на баллистических траекториях входа в атмосферу

Действительно, во-первых, спутник движется в пустоте неопределенно долгое время и, во-вторых, как уже говорилось выше, решение в окрестности $x=0, y=0$ несправедливо. Поэтому интегралы, определяющие время и дальность (рис. 6.8 и 6.9), вычислены при начальном значении $x_0=0,01$ ($\bar{V}_0 \approx 0,99$), дальность и время полета на предыдущем участке следует вычислять с помощью другого метода, например, рассматривая движение, близкое к кеплерову. Рис. 6.9 позволяет, кроме того, получить представление о возрастании рассеивания точки посадки, вызванного возможными отклонениями угла входа, по мере уменьшения угла входа.

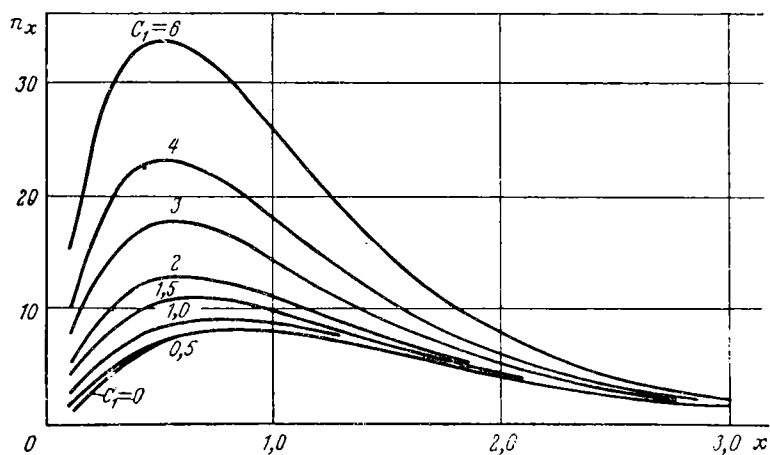


Рис. 6.5. Изменение перегрузки на баллистических траекториях входа в атмосферу

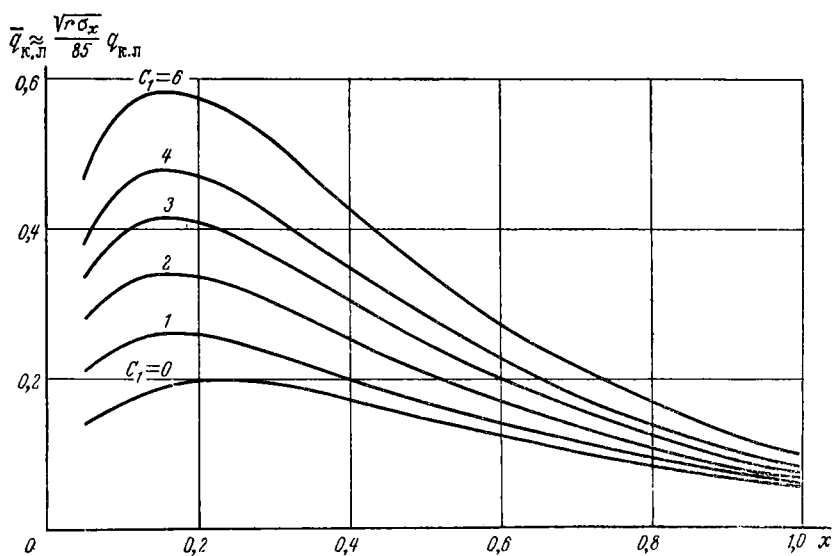


Рис. 6.6. Изменение конвективного теплового потока на баллистических траекториях входа в атмосферу (ламинарный пограничный слой)

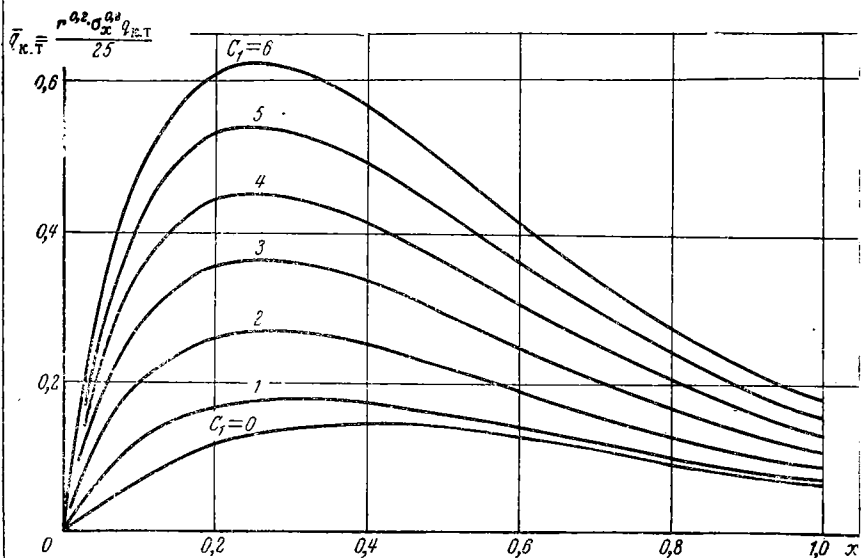


Рис. 6.7. Изменение конвективного теплового потока на баллистических траекториях входа в атмосферу (турбулентный пограничный слой)

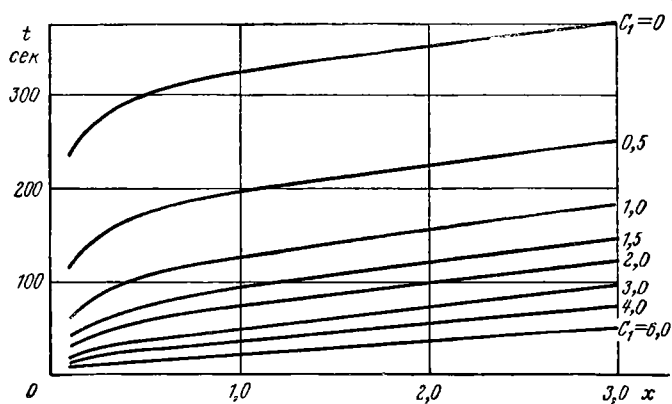


Рис. 6.8. Изменение времени на баллистических траекториях входа в атмосферу

Приведенные результаты позволяют выбирать оптимальный угол входа в атмосферу при баллистическом спуске. Для того чтобы обеспечить при снижении на Землю перегрузку, меньшую 10, необходимо, чтобы угол входа по абсолютной величине не превышал 2° (см. рис. 6.5). Но и при отсутствии человека на борту аппарата увеличение угла входа невыгодно в виду существенного увеличения тормозного импульса, который сооб-

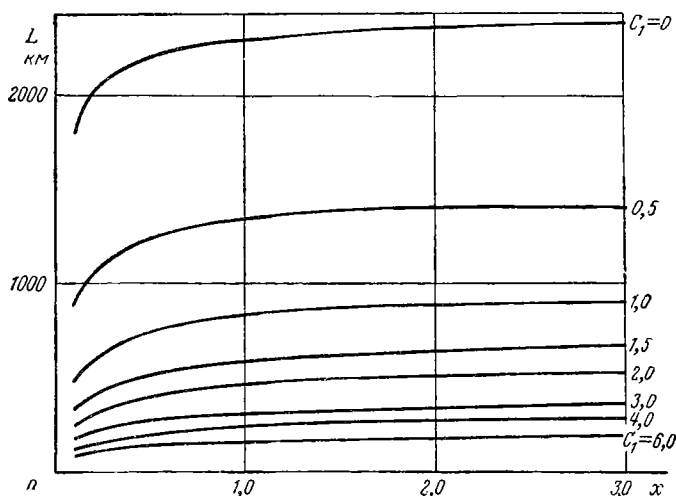


Рис. 6.9. Изменение дальности на баллистических траекториях входа в атмосферу

щается спутнику на орбите. С другой стороны, слишком малый угол входа в атмосферу нежелателен вследствие увеличения рассеивания точки посадки при неуправляемом баллистическом спуске. В итоге в качестве оптимального угла входа рекомендуется $\theta_0 = -1^\circ \div -2^\circ$ (см. напр. [68]).

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что максимальное значение перегрузки не зависит от величины баллистического коэффициента аппарата $\sigma_n = c_n S/m$. Однако такой вывод получен в предположении, что температура атмосферы постоянна. В действительности, если использовать стандартную зависимость температуры от высоты, можно выделить зоны с повышенной и пониженной температурой. В то же время местные значения логарифмического градиента плотности $\lambda = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dH}$ определяются местным значением температуры и местной производной изменения температуры с высотой (что легко усмотреть из уравнения гидростатики). Зависимость $\lambda(H)$ приведена на рис. 6.10.

Исходя из этой зависимости, можно уточнить значения перегрузок, если подставлять в формулу местное значение λ , взятое для высоты, которая на 5—10 км превышает высоту, соответствующую максимальной перегрузке. Но эта высота зависит от значения баллистического коэффициента, поскольку в соответствии с (6.19)

$$Q(n_{x \max}) \sim \frac{1}{\sigma_x}$$

В результате максимальная перегрузка варьируется в зависимости от σ_x в пределах $\pm 20\%$ при больших углах входа, когда $n_x \sim \lambda$, и в пределах $\pm 10\%$ при малом угле входа, когда $n_x \sim \sqrt{\lambda}$.

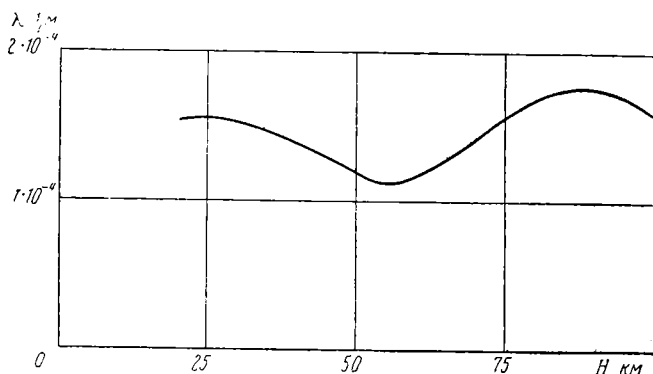


Рис. 6.10. Зависимость логарифмического градиента плотности от высоты

Тепловые потоки достигают максимальных значений при большей скорости, чем перегрузки. Как видно из формул (6.32) и (6.33), тепловые потоки уменьшаются с ростом баллистического коэффициента σ_x и радиуса носовой части r_1 . Максимальные значения теплового потока зависят от угла входа в более слабой степени, чем максимальные перегрузки. Это можно усмотреть из формул (6.31), (6.32) и (6.33).

При оценке полного количества тепла, поступающего внутрь аппарата, необходимо учитывать излучение тепла с поверхности аппарата (см. [64], [76], [109]). Можно отметить следующую интересную особенность: при заданных параметрах аппарата минимум полного количества тепла достигается на наиболее пологой траектории или на наиболее круглой траектории, определяемой допустимым значением максимальной перегрузки [52]. Первый случай соответствует относительно большим значениям излучаемого теплового потока, при этом значительная доля конвективного тепла, поступающего в критическую точку, излучается аппаратом. Во втором случае основной эффект в уменьшении

полного количества тепла связан с уменьшением времени спуска, несмотря на увеличение максимальных значений теплового потока.

Для того чтобы проиллюстрировать последний случай, рассмотрим спиральную траекторию входа в атмосферу Земли:

$$y = \sqrt{r\lambda} |\sin \theta| x. \quad (6.36)$$

Тогда, используя формулы (6.28) и (6.29), получим, соответственно:

$$Q_{к.л} = \int q_{к.л} dt \approx \frac{2270}{r_1^{0,5} C_1^{0,5} \sigma_x^{0,5}} \int \frac{\bar{e}^{-2,25x} dx}{\sqrt{x}} = \frac{490}{|\sin \theta|^{0,5} \sigma_x^{0,5} r_1^{0,5}} \text{ ккал/м}^2, \quad (6.37)$$

$$Q_{к.т} = \int q_{к.т} dt \approx \frac{207}{|\sin \theta|^{0,2} \sigma_x^{0,8} r_1^{0,2}} \text{ ккал/м}^2. \quad (6.38)$$

Как видно, полное количество тепла убывает по мере увеличения угла входа по абсолютной величине.

В случае $c_x = c_{x0} \bar{V}^n$ уравнение движения можно привести к виду [52]

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{c_y}{c_{x0}} \sqrt{r\lambda} + \frac{x^{\frac{2}{n}} - 1}{y}, \quad (6.39)$$

где

$$y = n \frac{c_{x0} S}{2m} \sqrt{\frac{r}{\lambda}} Q, \quad x = \frac{1}{\bar{V}^n},$$

$$\theta = -\frac{1}{\sqrt{r\lambda}} \frac{dy}{dx}, \quad n_x = \sqrt{r\lambda} \frac{y}{n} x^{-\frac{n+2}{n}}.$$

Для баллистических траекторий ($c_y = 0$) уравнение (6.39) принимает вид

$$y'' = \frac{x^2 - 1}{y}, \quad (6.40)$$

где

$$\alpha = \frac{2}{n}.$$

Вначале рассмотрим случай входа в атмосферу с нулевым углом наклона траектории:

$$y(1) = y'(1) = 0.$$

По аналогии с ранее исследованным случаем $c_x = \text{const}$ разлагаем правую часть уравнения (6.40) в степенной ряд по $x-1$ и ищем решение в виде ряда по степеням $(x-1)^{1/2}$

$$y = \sqrt{\frac{4\alpha}{3}} (x-1)^{3/2} [1 + \beta_1(x-1) + \beta_2(x-1)^2 + \dots].$$

Если α — нецелое число, то радиус сходимости полученного ряда не превышает 1. Однако для целых α ($n=2, 1, 2/3, 1/2 \dots$) правая часть уравнения (6.40) содержит конечное число степеней $(x-1)$ и ряд (6.41) сходится в достаточно большом диапазоне.

Рассмотрим два примера:

а) $n=1, \alpha=2$

$$y'' = \frac{x^2 - 1}{y},$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{12}, \quad \beta_2 = -\frac{5}{19.96},$$

б) $n=2, \alpha=1$

$$y'' = \frac{x-1}{y}.$$

Решение имеет вид $y = \sqrt{\frac{4}{3}} (x-1)^{3/2}$, т. е.

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = 0.$$

Некоторые результаты расчета, выполненного при помощи разложений в ряды, как при отрицательных, так и при положительных n , приведены на рис. 6.11, откуда видно, что максимальное значение перегрузки монотонно уменьшается с увеличением n . При достаточно больших углах входа перегрузка выражается в виде

$$n_{x \max} = r\lambda |\sin \theta| \left(\frac{(x-1)x^{\frac{n+2}{n}}}{n} \right). \quad (6.41)$$

Максимальное значение достигается при $\bar{V} = \left(\frac{2}{n+2} \right)^{\frac{1}{n}}$ и равно

$$n_{x \max} = \frac{r\lambda |\sin \theta|}{2} \left(\frac{2}{n+2} \right)^{\frac{n+2}{n}}. \quad (6.42)$$

(формула, полученная В. Я. Нейландом).

Существуют проекты аппаратов, для которых предусматривается непрерывное регулирование сопротивления путем свертывания и разворачивания тормозящих поверхностей, выдвижения щитков, игл (рис. 6.12).

Закон изменения сопротивления следует выбрать таким, чтобы при заданном отношении $\frac{(c_x S)_{\min}}{(c_x S)_{\max}}$ свести максимальное значение перегрузки к минимуму. Оптимальным оказывается следующий закон регулирования: вначале выдерживается максимальное значение $c_x S$, а затем параметр $c_x S$ изменяется таким образом, чтобы перегрузка сохраняла постоянное значение.

Расчет первого участка ($c_x S = \text{const}$) проводится с использованием степенного ряда (6.27) или (6.30).

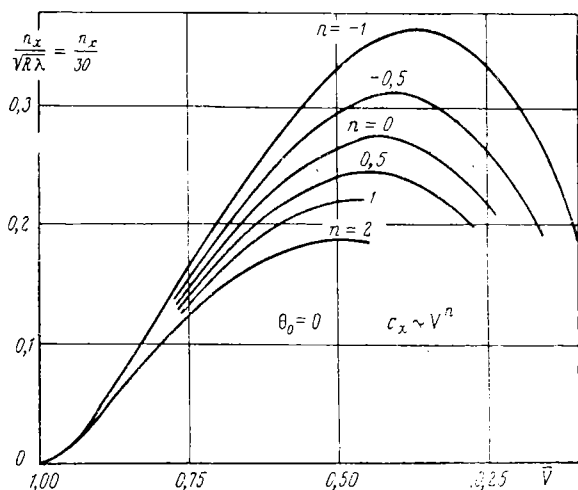


Рис. 6.11. Изменение перегрузки на баллистических траекториях входа в атмосферу в случае переменного коэффициента сопротивления, $c_x \sim V^n$, $\theta_0 = 0$

Для расчета второго участка ($n_x = \text{const}$) можно использовать аналитическое решение [74], [52]:

$$H = H(t_1) + \frac{r}{4n_x^2} \left\{ \frac{(\xi_1 - \xi)^2}{2} - \xi \ln \frac{\xi}{\xi_1} + (\xi - \xi_1)(1 - 2n_x \xi(t_1)) \right\}, \quad (6.43)$$

где $\xi = \bar{V}^2$, t_1 — момент начала уменьшения параметра $c_x S$, $\xi_1 = \bar{V}^2(t_1)$. Отношение $\frac{c_x S}{c_x S(t_1)}$ изменяется при этом по закону:

$$\frac{c_x S}{c_x S(t_1)} = \frac{\xi_1}{\xi} e^{\sqrt{\frac{\lambda}{r}} [H - H(t_1)]}. \quad (6.44)$$

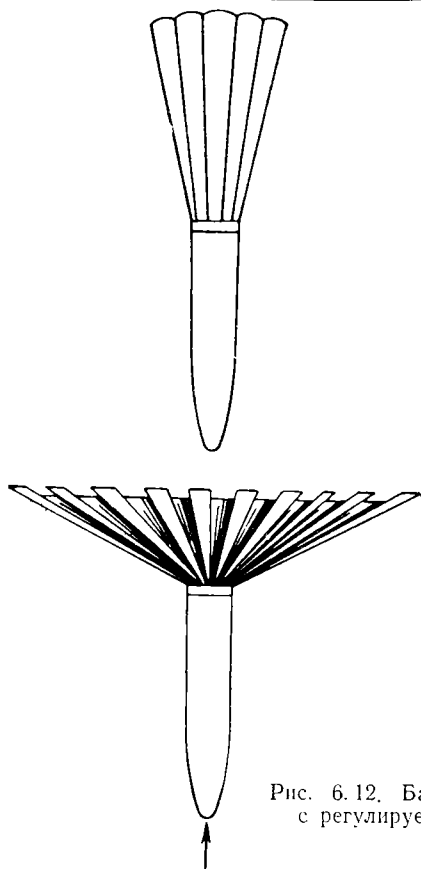


Рис. 6.12. Баллистический аппарат с регулируемым сопротивлением

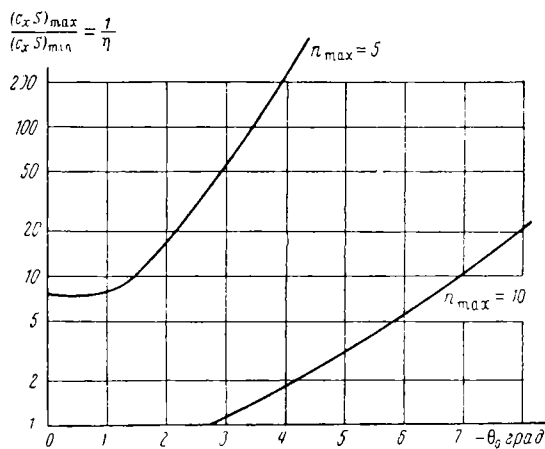


Рис. 6.13. Диапазон изменения сопротивления, необходимый для получения максимальной перегрузки, равной 5

Некоторые результаты расчета приведены на рис. 6.13. Показано, в каких пределах необходимо изменять значение $c_x S$ при различных углах входа в атмосферу, чтобы максимальная перегрузка не превышала 5 или 10.

§ 6.4. ТРАЕКТОРИИ ВХОДА В АТМОСФЕРУ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ С ПОДЪЕМНОЙ СИЛОЙ

Как уже отмечалось выше, при спуске с орбиты ИСЗ в атмосферу баллистического летательного аппарата с постоянным коэффициентом сопротивления максимальная перегрузка оказывается во всех случаях не менее 8.

Существенное уменьшение максимальной перегрузки путем регулирования сопротивления баллистического аппарата может быть достигнуто только при наличии очень большого диапазона непрерывного изменения сопротивления.

Эффективным средством уменьшения максимальных перегрузок при входе в атмосферу и управления дальностью полета является использование подъемной силы.

Выпишем снова уравнение движения (6.16) при $c_x = \text{const}$:

$$y'' = -K \frac{e^{2x} - 1}{y}, \quad (6.45)$$

где через K обозначена величина $\sqrt{r/\lambda} \frac{c_y}{c_x} \approx 30 \frac{c_y}{c_x}$, и рассмотрим случай входа в атмосферу аппарата, обладающего малым аэродинамическим качеством. Итак, пусть K имеет порядок нескольких единиц и угол входа в атмосферу близок к нулю: $y'(0) = 0$, $y(0) = 3$.

Решение уравнения (6.45) строится в виде ряда по степеням x^2 :

$$y = \frac{8}{3} x^3 - \frac{4K}{11} x^2 + \sqrt{\frac{8}{3}} \left(\frac{1}{6} + \frac{K^2}{121} \right) x^{5/2} + \left(\frac{8K}{27 \cdot 11} + \frac{16K^3}{9 \cdot 1331} \right) x^3 + \\ + \sqrt{\frac{8}{3}} \left(\frac{1}{24} + \frac{13K^2}{6 \cdot 19 \cdot 121} + \frac{41K^4}{38 \cdot 114} \right) x^{7/2}. \quad (6.46)$$

При $|K| < 3$ (для Земли $-0,1 < \frac{c_y}{c_x} < 0,1$) выписанные члены ряда с достаточной точностью представляют решение в диапазоне скоростей, где перегрузка и тепловые потоки достигают максимальных значений.

При углах входа, отличных от нуля, расчеты траекторий аппаратов с малым аэродинамическим качеством выполнены на вычислительной машине. Некоторые из результатов расчета представлены на рис. 6.14 и 6.15.

Как видно, наличие даже относительно малой подъемной силы позволяет существенно уменьшить максимальную перегрузку. Максимальные тепловые потоки также уменьшаются однако в меньшей степени, чем перегрузка. Малое аэродинамическое качество можно получить при использовании аппаратов, форма которых мало отличается от аппаратов баллистического

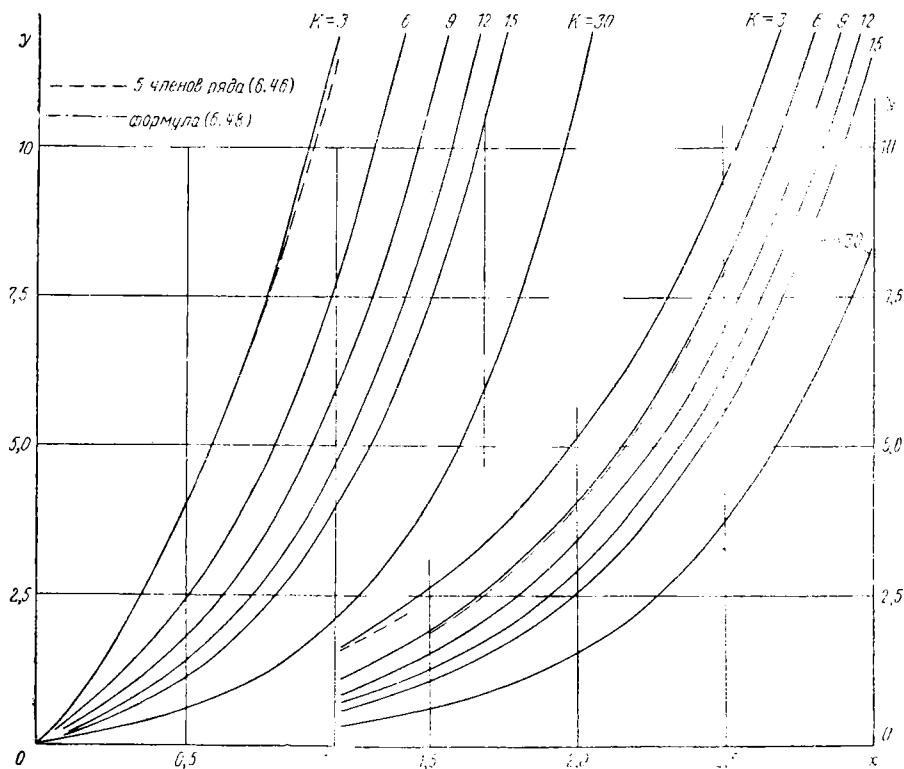


Рис. 6.14. Изменение плотности на траекториях входа в атмосферу при различных значениях аэродинамического качества, $\theta_{кр} = 0$

типа: эти аппараты могут иметь лобовую поверхность с большим радиусом кривизны, что позволяет уменьшить тепловые потоки, поступающие в критическую точку аппарата.

В частности, малое аэродинамическое качество может быть получено на теле вращения, центр тяжести которого смещен относительно оси симметрии. Аэродинамические характеристики одного из таких аппаратов (типа американского аппарата «Аполлон») приведены на рис. 6.16. Положительная подъемная сила получается при отрицательном угле атаки. Основной составляющей подъемной силы является осевая сила — давление на лобовую поверхность аппарата.

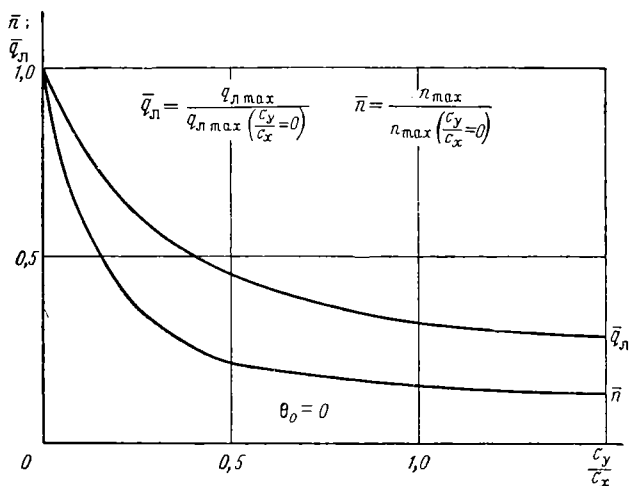


Рис. 6.15. Изменение максимальной перегрузки и максимального теплового потока в зависимости от аэродинамического качества

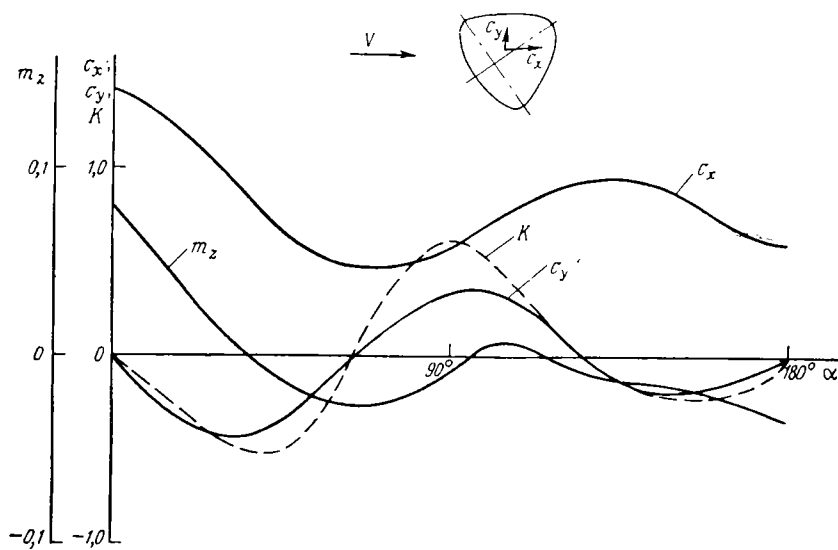


Рис. 6.16. Аэродинамические характеристики спускаемой капсулы типа «Аполлон»

Если угол входа аппарата в атмосферу мал, а аэродинамическое качество велико, то реализуется так называемая траектория квазистационарного планирования [75]. На этой траектории член y'' в уравнении (6.45) имеет относительно малую величину и можно считать, что

$$y_{пл} \approx \frac{e^{2x} - 1}{K}. \quad (6.47)$$

В данном случае подъемная сила приблизительно уравнивает разность между силой веса и центробежной силой — это значит, что в уравнении (6.13) производную $\frac{d\theta}{dt}$ можно считать

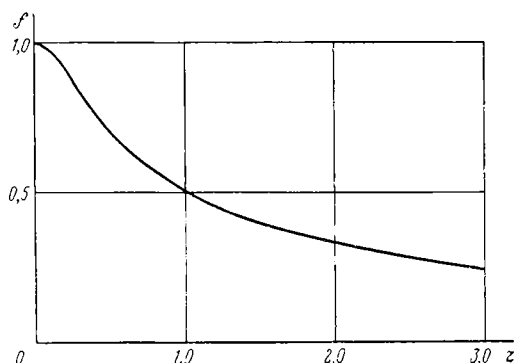


Рис. 6.17. Функция $f(z)$, уточняющая решение для траектории квазистационарного планирования

относительно малой величиной. Отметим, что условие относительной малости производной $\frac{d\theta}{dt}$ (или y'') не эквивалентно допущению $\theta = \text{const}$: это условие означает, что угол наклона траектории изменяется медленно.

Допущение о малости члена y'' нарушается при малых $\bar{V}$, уточненное решение можно приближенно представить в виде [52]

$$y \approx \frac{e^{2x} - 1}{K} f\left(\frac{e^x}{K}\right). \quad (6.48)$$

Функция $f(z)$ приведена на рис. 6.17. Как видно, она близка к единице лишь при $z < 0,1$ или в случае спуска на Землю при $\frac{c_y}{c_x} \bar{V} > 0,3$.

Эта функция может быть аппроксимирована полуэмпирической формулой $f(z) \approx \frac{1}{1 + z(1 - e^{-4z})}$.

Представление решения в таком виде позволяет судить об отклонении истинной траектории от траектории квазистационарного планирования и об уменьшении максимальной перегрузки по сравнению со значением

$$n_{\max}(\bar{V}=0) = \sqrt{1 + \left(\frac{c_x}{c_y}\right)^2}, \quad (6.49)$$

вычисленным для траектории (6.47).

Формула (6.48) позволяет анализировать траектории при $K \geq 6 \left(\frac{c_y}{c_x} \geq 0,2 \right)$. При $K \geq 30$ можно считать справедливой формулу (6.47). Таким образом, формулы (6.46), (6.47) и (6.48) позволяют охватить весь диапазон значений аэродинамического качества при малых углах входа в атмосферу (см. рис. 6.14).

Выражения для дальности и времени полета по траектории планирования имеют вид

$$L = \frac{r}{2} \frac{c_y}{c_x} \ln \frac{1 - \bar{V}^2}{1 - \bar{V}_0^2}, \quad (6.50)$$

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{c_y}{c_x} \ln \frac{(1 - \bar{V}^2)(1 + \bar{V}_0^2)}{(1 + \bar{V}^2)(1 - \bar{V}_0^2)}. \quad (6.51)$$

Малые отклонения от траектории квазистационарного планирования $\delta y = y - y_{пл}$ определяются уравнением (6.35)

$$\delta y'' + \frac{e^{2x} - 1}{y_{пл}^2} \delta y = 0,$$

или

$$\delta y'' + \frac{K^2}{e^{2x} - 1} \delta y = 0. \quad (6.52)$$

Приближенное решение этого уравнения может быть получено с помощью метода ВКБ (см. приложение III)

$$\begin{aligned} \delta y &\approx \frac{\sqrt{\omega(x_0)}}{\sqrt{\omega(x)}} \delta y_0 \cos \int_{x_0}^x \omega(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\omega(x) \omega(x_0)}} \delta y'_0 \sin \int_{x_0}^x \omega(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (6.53)$$

где

$$\omega(x) = \frac{K}{\sqrt{e^{2x} - 1}}.$$

Отсюда видно, что амплитуда δy возрастает с ростом x (уменьшением скорости) как $\sqrt[4]{e^{2x}-1}$, но отношение $\delta y/y$, пропорциональное δ/I , убывает как $(e^x-1)^{-\frac{3}{4}}$. Таким образом, траектория является устойчивой в плоскости (V, H) .

Число полных колебаний n на траектории спуска с орбиты составляет около $\frac{1}{4}K$ (для Земли $\frac{1}{4}K \approx 7,5 \frac{c_y}{c_x}$), так как

$$n = \frac{\int_0^\infty \omega(x) dx}{2\pi} = \frac{K \arccos e^{-x}}{2\pi} = \frac{K}{4}. \quad (6.54)$$

Если начальный угол наклона траектории не слишком мал, то решение уравнения (6.45) можно строить в виде ряда по целым степеням x

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + \dots, \quad (6.55)$$

где

$$C_2 = \left(\frac{1}{C_1} - \frac{K}{2} \right), \quad C_3 = \frac{1}{2C_1} \left(\frac{K}{2C_1} + 1 - \frac{1}{C_1^2} \right), \\ C_4 = \frac{1}{12C_1} \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{3C_1} \left(\frac{K}{2C_1} + 1 - \frac{1}{C_1^2} \right) \left(\frac{8}{C_1} - 3K \right) \right].$$

Радиус сходимости этого ряда невелик. Определить с его помощью максимальные значения перегрузок удастся только при очень малых K и больших C_1 .

При больших положительных значениях аэродинамического качества появляется тенденция к рикошетированию аппарата от плотных слоев атмосферы. Это значит, что в некоторой точке траектории, которая будет обозначаться индексом m , аппарат достигает минимальной высоты и начинает набирать высоту. Такое «рикошетирование» реализуется при $K > 9$, $C_1 \geq 1$ (для Земли — при $\frac{c_y}{c_x} \geq 0,3$, $|\epsilon_0| > 2^\circ$). Ряд (6.55) может быть использован для определения траектории на участке первого снижения до момента достижения минимума высоты.

При $K \gg 1$, $K \gg 1/C_1$ для расчета этого участка достаточно ограничиться членами

$$y \approx C_1 x - \frac{Kx^2}{2}, \quad (6.56)$$

отсюда

$$\ln \frac{1}{V_m} \approx X_m \approx \frac{C_1}{K}, \quad y_m \approx \frac{C_1^2}{2K} \text{ п т. д.}$$

Более точные результаты могут быть получены при использовании четырех членов ряда, они приводятся на рис. 6.18 и 6.19. Максимальное значение перегрузки на участке первого

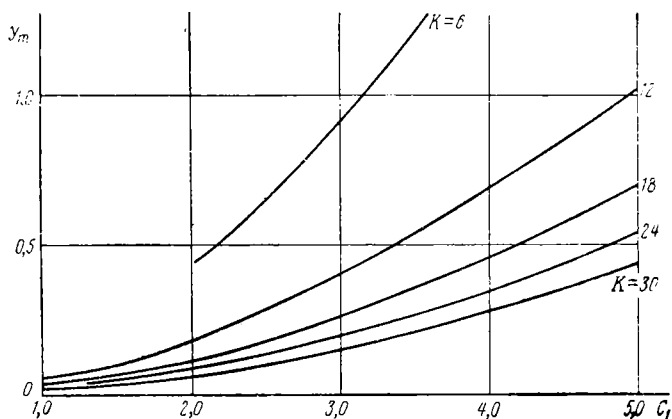


Рис. 6.18. Зависимость максимальной плотности, достигаемой при первом снижении в атмосферу, от угла входа и аэродинамического качества

снижения достигается в точке, предшествующей точке $H_{\min}$, при больших K можно приближенно считать, что максимальная перегрузка достигается в точке $H_{\min}$.

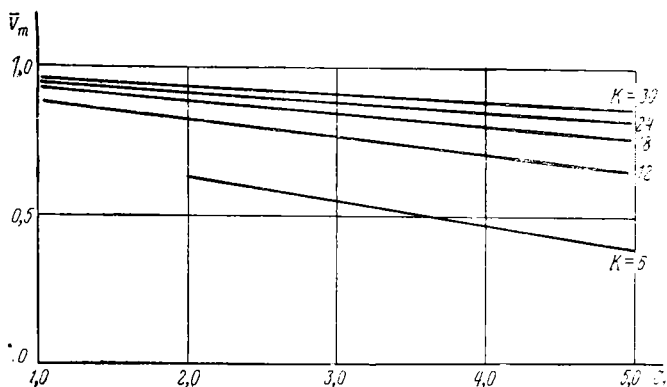


Рис. 6.19. Зависимость скорости в момент достижения минимальной высоты при первом снижении в атмосферу от угла входа и аэродинамического качества

Для вычисления дальности и времени полета на участке первого снижения следует зафиксировать для начального отсчета

некоторую высоту (или плотность ρ_0) и подставить разложение для y (6.55) в интегралы (6.22) и (6.23), считая, что

$$x_0 = \frac{y_1}{C_1} = \frac{c_x S}{2m\lambda |\theta_0|} \rho_0.$$

Для случая $K \gg 1$, $K \gg 1/C_1$, когда справедлива формула (6.56), можно получить

$$L_m \approx \frac{1}{\lambda |\theta_0|} \ln \frac{4\theta_0^2 \lambda m}{c_y S \rho_0}, \quad (6.57)$$

$$t_m \approx \frac{L_m}{V_0} \approx \frac{1}{\lambda |\theta_0| V r g} \ln \frac{4\theta_0^2 \lambda m}{c_y S \rho_0}, \quad (6.58)$$

где L_m и t_m обозначают, соответственно, дальность и время от момента прохождения высоты с плотностью ρ_0 до момента достижения минимума высоты.

Одной из наиболее распространенных схем управления траекторией входа в атмосферу является следующая: после достижения аппаратом минимальной высоты при первом снижении в атмосферу коэффициент подъемной силы изменяется так, чтобы реализовался горизонтальный полет [80].

На участке горизонтального полета $y = \text{const}$, поэтому из уравнения (6.45) следует, что

$$c_y = \frac{2G}{\rho S} \left(\frac{1}{V^2} - \frac{1}{V_{kp}^2} \right).$$

Как видно, при уменьшении скорости на горизонтальном участке полета значение c_y возрастает, пока не становится равным предполагаемому $c_{y \max}$ в момент времени t_p . При достижении скорости $\bar{V}_p = \frac{1}{\sqrt{1 + Ky_m}}$ аппарат снова начинает снижаться, двигаясь по траектории, близкой к траектории планирования (рис. 6.20). При больших C_1 и K

$$\bar{V}_p \approx \frac{1}{\sqrt{1 + C_1^2/2}}.$$

Дальность и время полета на горизонтальном участке вычисляются по формулам

$$L = \sqrt{\frac{r}{\lambda}} \frac{x_p - x_m}{y_m} = \sqrt{\frac{r}{\lambda}} \frac{\ln \frac{\bar{V}_m}{\bar{V}_p}}{y_m}, \quad (6.59)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{g\lambda}} \frac{\frac{1}{\bar{V}_p} - \frac{1}{\bar{V}_m}}{y_m}. \quad (6.60)$$

Последние формулы справедливы при условии, что c_x не зависит от c_H .

Построим зависимость максимальных значений перегрузки от угла входа в атмосферу и аэродинамического качества для траекторий с горизонтальным участком полета.

На участке первого снижения в атмосфере (до достижения точки $H_{\min}$) перегрузка вначале возрастает, а затем начинает убывать (поскольку максимум перегрузки достигается раньше, чем точка $H_{\min}$) и продолжает убывать на горизонтальном участке полета. Далее, на последнем участке при $x > x_p$, перегрузка или убывает (если x_p велико) или возрастает, достигая максимума, соответствующего траектории планирования (см. рис. 6.20).

Отсюда можно сделать вывод, что в некотором диапазоне малых углов входа $0 < C_1 < 1,5$ ($0 < |\vartheta_0| < 3^\circ$ для Земли) максимальная перегрузка практически не изменяется и равна максимальной перегрузке для траектории квазистационарного планирования. При больших углах входа максимальная перегрузка достигается при первом снижении в атмосферу и может быть определена с помощью разложений (6.55).

В итоге зависимость максимальной перегрузки от аэродинамического качества и угла входа приобретает вид, показанный на рис. 6.21.

Как видно, при больших углах входа эффект уменьшения мак-

симальной перегрузки при использовании положительной подъемной силы становится менее ощутимым, чем при малых углах входа (в относительном смысле).

В том случае, когда подъемная сила не регулируется и параметры C_1 и K не очень малы, аппарат, снизившись до высоты $H_{\min}(y_m)$, рикошетирует, после чего начинается следующий этап снижения и т. д. Траекторию такого типа часто называют *траекторией с отражениями* [75], [92]. При этом в плоскости (H, V) происходят колебания относительно траектории квазистационарного планирования.

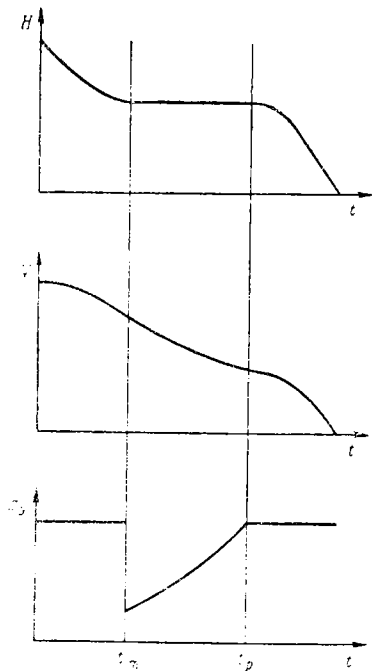


Рис. 6.20. Изменение высоты, скорости и коэффициента подъемной силы на траектории спуска, включающей горизонтальный участок

Если отклонения от траектории планирования малы, то для получения решения можно использовать линейное уравнение в вариациях, см. (6.52). Если же колебания относительно траектории квазистационарного планирования велики, то следует рассмотреть исходное нелинейное уравнение

$$y'' = -K + \frac{e^{2x} - 1}{y} = F(x, y). \quad (6.61)$$

Выписать решение этого уравнения не удастся. Однако при больших K частота колебаний велика и становится возможным

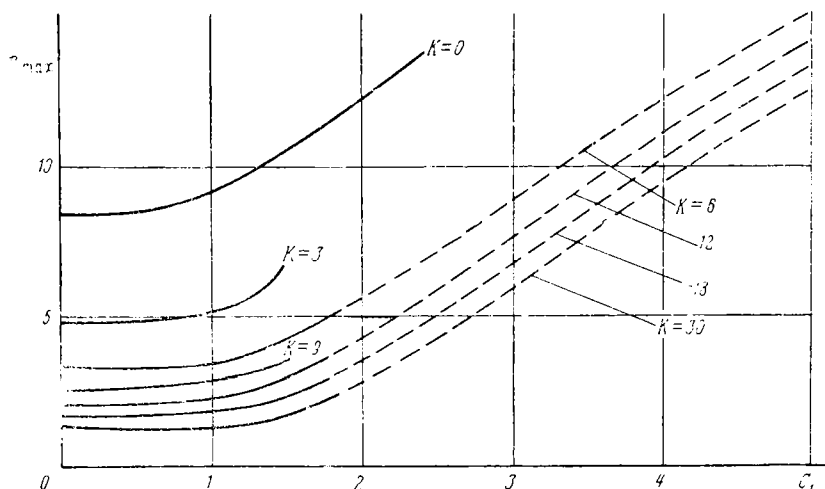


Рис. 6.21. Зависимость максимальной перегрузки от угла входа в атмосферу и аэродинамического качества

применение метода усреднения для определения огибающих амплитудных значений $y_{\min}(x)$ и $y_{\max}(x)$ [12], [52], [53]. Для быстрых нестационарных колебаний вида (6.61) справедливо правило сохранения адиабатического инварианта [26]:

$$\oint \left(\frac{dy}{dx} \right) dy \approx \text{const}, \quad (6.62)$$

где интеграл берется по периоду колебаний.

Здесь функция dy/dx определяется при решении уравнения (6.61), в котором x считается параметром — постоянной величиной:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2 \int_{y_{\min}}^y F(x, y) dy}.$$

Тогда условие (6.62) можно переписать в форме

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \sqrt{\int_{y_{\min}}^y F(x, v) dv} dy = \text{const}, \quad (6.63)$$

а связь между $y_{\min}$ и $y_{\max}$ имеет вид

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} F(x, y) dy = 0 \quad (6.64)$$

(поскольку $dy/dx=0$ при $y_{\min}$ и $y_{\max}$).

Соотношения (6.63) и (6.64) являются уравнениями для определения зависимостей $y_{\min}(x)$ и $y_{\max}(x)$. Применяя эти соотношения к уравнению (6.45), можно получить следующую формулу:

$$h\left(\frac{y_{\max}K}{e^{2x}-1}\right) \frac{(e^{2x}-1)^{3/2}}{K} = \text{const}. \quad (6.65)$$

Формула (6.65) справедлива и в том случае, когда K — переменная, медленно изменяющаяся положительная величина. Аргумент функции h представляет собой отношение максимальной (амплитудной) плотности к плотности для траектории планирования

$$h(u) = \int_{u_{\min}}^u \sqrt{u - z + \ln \frac{z}{u}} dz,$$

где $u_{\min}$ и u связаны формулой

$$u - u_{\min} + \ln \frac{u_{\min}}{u} = 0,$$

$$u = \frac{y_{\max}K}{e^{2x}-1} > 1.$$

Функции $h(u)$ и $u_{\min}(u)$ приведены на рис. 6.22. Соотношение (6.65) несправедливо в окрестности ($\bar{V}=1$), но его можно применять при $x \geq x_m$.

Выбирая x_m за начальный момент, получим

$$\begin{aligned} h\left(\frac{y_{\max}K}{e^{2x}-1}\right) \frac{(e^{2x}-1)^{3/2}}{K} &= \\ &= h\left(\frac{y_m K(x_m)}{e^{2x_m}-1}\right) \frac{(e^{2x_m}-1)^{3/2}}{K(x_m)}. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Исходные значения x_m и y_m , как показано ранее, определяются с помощью рис. 6.18 и 6.19.

Анализируя соотношение (6.66), можно сделать следующие выводы.

1. При «глубоких» отражениях, когда выполняется условие

$$u \gg 1, y_{\max} \approx \text{const}, \text{ а } y_{\min} \sim e^{-u},$$

что приводит к схеме, рассмотренной в [75]: минимальная высота, достигаемая в процессе рикошетирований, почти не изменяется, а максимальная высота уменьшается при уменьшении скорости.

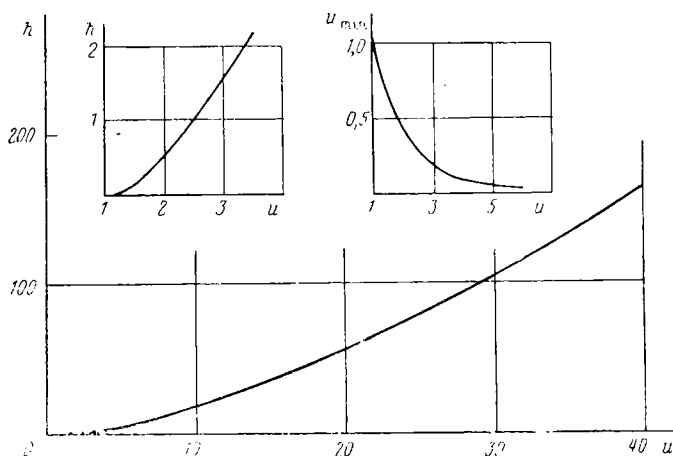


Рис. 6.22. Безразмерные функции $h(u)$, $u_{\min}(u)$, определяющие изменение амплитудных значений плотности в процессе спуска по траектории с отражениями

2. По мере торможения аппарата его колебания становятся все более слабыми и траектория с отражениями переходит в траекторию квазистационарного планирования.

3. Число полных колебаний на траектории с отражениями не превышает $K/4$ (для Земли $7,5 \frac{c_y}{c_x}$), это число уменьшается при увеличении «глубины» колебаний. Движение аппарата по траектории с отражениями для случая $K=60$, $C_1=1$ показано на рис. 6.23.

Как видно, на начальном участке ($\bar{V} > 0,5$) применимо «амплитудное» решение (6.66), а на конечном участке, где траектория переходит к квазистационарному планированию, — уточненное решение (6.48).

Вычисление дальности и времени полета дает следующие результаты:

$$L \approx \sqrt{\frac{r}{\lambda}} \int_{x_0}^{\infty} \frac{K}{e^{2x} - 1} dx + r \frac{\theta_0 \bar{V}_0^2}{1 - \bar{V}_0^2} + 0\left(\frac{1}{K}\right), \quad (6.67)$$

$$t \approx \frac{1}{\sqrt{g\lambda}} \int_{x_0}^{\infty} \frac{K e^x}{e^{2x} - 1} dx + \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{\theta_0 \bar{V}_0^2}{1 - \bar{V}_0^2} + 0\left(\frac{1}{K}\right). \quad (6.68)$$

Первые члены в правых частях (6.67), (6.68) соответствуют траектории планирования, а вторые — пропорциональны на-

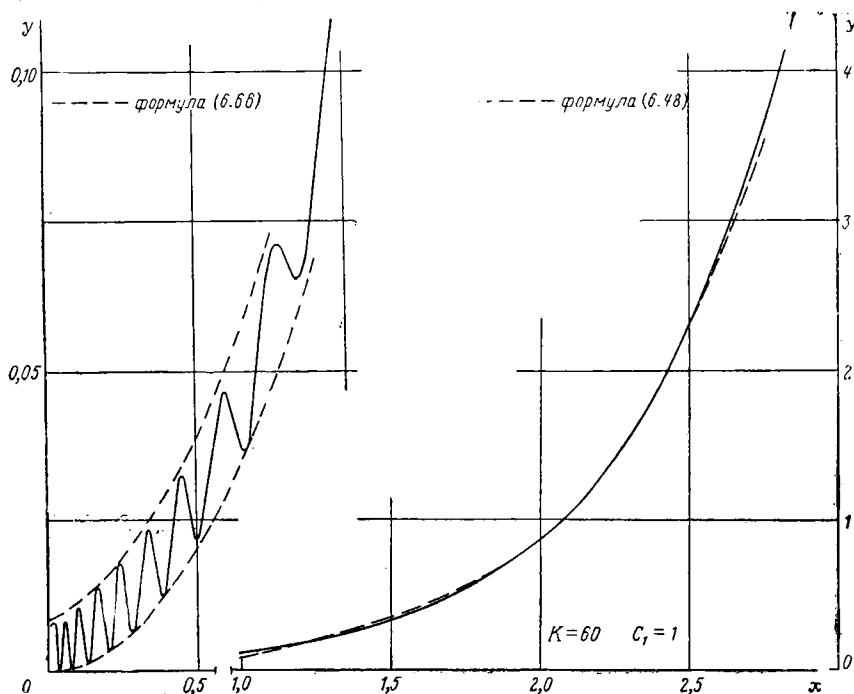


Рис. 6.23. Изменение плотности в процессе спуска по траектории с отражениями

начальному углу наклона траектории. Начальная высота при больших K мало влияет на дальность и продолжительность полета.

Заметим, что траектории с отражениями, как правило, являются менее выгодными, чем траектории с горизонтальным участком. Действительно, на горизонтальном участке перегрузка убывает, в то время как на траектории с отражениями пик пере-

грузки на одном из повторных погружений в атмосферу может превзойти первое максимальное значение.

Кроме того, на траекториях с отражениями возрастают время и дальность полета, что вызывает увеличение рассеивания точки посадки и полного количества тепла, поступающего к аппарату.

Представляет интерес обратная задача — по заданной траектории в плоскости (H, V) найти нужный закон изменения аэродинамических сил. Такая задача решается точно, если коэффициент c_x не зависит от c_y . Решение имеет особенно простой вид, если справедливы перечисленные выше предположения. Итак, пусть траектория задана в плоскости (H, V) — это эквивалентно заданию зависимости $y(x)$. Но тогда достаточно обратиться к уравнению (6.45) и получить

$$c_y = \frac{c_x}{\sqrt{r\lambda}} \left\{ \frac{e^{2x} - 1}{y(x)} - \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right\}. \quad (6.69)$$

Если, например, требуется выдержать траекторию, на которой $q^K V^l = \text{const}$, то это равносильно условию

$$y = C e^{\frac{l}{K} x}.$$

Подобный участок траектории может соответствовать постоянному значению перегрузки или конвективного теплового потока. Отсюда следует, что

$$c_y = \frac{c_x}{\sqrt{r\lambda}} \left\{ \frac{e^{2x} - 1}{C e^{\frac{l}{K} x}} - \left(\frac{l}{K} \right)^2 C e^{\frac{l}{K} x} \right\}.$$

В случае $l/K > 0$ максимальный потребный коэффициент подъемной силы c_y достигается при значении $\bar{V} = \bar{V}_*$, которое определяется при решении уравнения

$$\left(2 - \frac{l}{K} \right) \left(\frac{1}{\bar{V}_*^2} \right) + \frac{l}{K} = \left(\frac{l}{K} \right)^3 C^2 \left(\frac{1}{\bar{V}_*^2} \right)^{\left(\frac{l}{K} \right)}.$$

Для траектории с постоянной продольной перегрузкой ($K=1$, $l=2$, $n_x = \text{const}$) нетрудно получить

$$\bar{V}_*^2 = \frac{2n_x}{\sqrt{r\lambda}},$$

$$\left(\frac{c_y}{c_x} \right)_{\max} = \frac{1}{n_x} - \frac{4}{\sqrt{r\lambda}}.$$

§ 6.5. ТРАЕКТОРИИ ВХОДА В АТМОСФЕРУ СО СКОРОСТЯМИ, БОЛЬШИМИ КРУГОВОЙ СКОРОСТИ

При входе в атмосферу Земли аппарата, возвращающегося от Луны или из межпланетного пространства, трудности существенно усугубляются, поскольку скорость входа в атмосферу увеличивается в 1,4—3 раза. Естественно, что из-за увеличения скорости входа значения перегрузок и, в особенности, тепловых потоков заметно возрастают. Задача обеспечения точной посадки приобретает очень важную роль. Даже небольшие возмущения могут привести к такому значительному отклонению траектории полета от номинальной, что аппарат будет испытывать недопустимо большие перегрузки в атмосфере или наоборот — не сможет погасить скорость при полете в атмосфере до нужной величины, вторично выйдет за пределы атмосферы и удалится в космическое пространство.

В качестве одного из способов решения проблемы входа в атмосферу со сверхкруговой скоростью естественно использовать тягу для уменьшения скорости от сверхкруговой до круговой. Однако этот способ требует очень больших весовых затрат — особенно при применении двигателей большой тяги и, следовательно, практически неприемлем. Поэтому рассматривается только аэродинамический способ торможения аппаратов.

В качестве начальных условий для траектории входа в атмосферу с круговой скоростью используются значения скорости входа и угла входа на «границе атмосферы», т. е. на некоторой высоте порядка 80—100 км. Однако, если скорость входа в атмосферу существенно отличается от круговой, понятие «угла входа» становится неопределенным [см. (6.34)], поскольку расположение границы атмосферы зависит от физических параметров аппарата.

Наиболее удобным параметром, характеризующим условия входа в атмосферу со сверхкруговой скоростью, является параметр фиктивного или условного перицентра, предложенный Чепменом [67] (для Земли — параметр фиктивного перигея):

$$y_p = \frac{c_x S}{2m} \sqrt{\frac{r}{\lambda}} q_p. \quad (6.70)$$

Здесь q_p — плотность на высоте перигея H_p фиктивной кеплеровой траектории, по которой двигался бы аппарат при отсутствии атмосферы (рис. 6.24).

Рассмотрим соотношения, связывающие начальные условия при входе в атмосферу с высотой фиктивного перигея для полных траекторий:

$$\begin{cases} \bar{V}_p \approx \bar{V}_0 \end{cases} \quad (6.71)$$

$$\begin{cases} \frac{H_0 - H_p}{r} \approx \frac{\bar{V}_0^2 \theta_0^2}{2(\bar{V}^2 - 1)}. \end{cases} \quad (6.72)$$

Легко показать, что эти соотношения эквивалентны соотношению

$$y'_0 = \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{\bar{V}_0^2}\right) \ln \frac{y_p}{y_0}} \quad (6.73)$$

при $x=x_0$. Здесь $y_0 > 0$ можно считать бесконечно малой величиной (пропорциональной плотности на границе атмосферы).

Как видно, при $\bar{V}_0 \neq 1$ и $y_0 \rightarrow 0$ можно получить, что $y'_0 \rightarrow \infty$. Следовательно, в окрестности точки $x=x_0$ построить решение y в виде ряда по степеням $x-x_0$ не удастся.

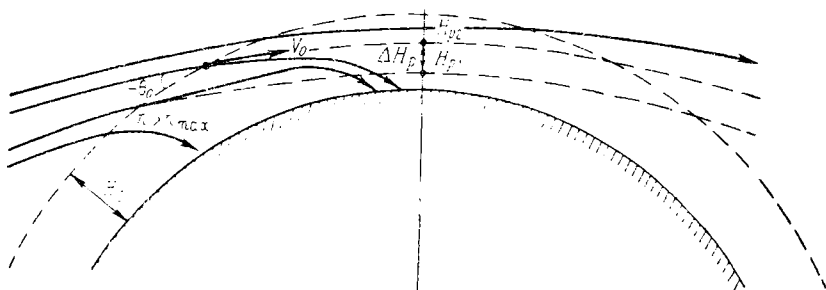


Рис. 6.24. Определение границ коридора входа в атмосферу

Однако, используя уравнение (6.45), можно получить некоторые приближенные соотношения для определения наиболее важных параметров [90], [52].

Из уравнения (6.45) или (6.13) видно, что при $\bar{V} > 1$ и неотрицательном аэродинамическом качестве выполняется неравенство $y'' < 0$, т. е. угол наклона траектории возрастает и при некотором значении $\bar{V}_m$ может обратиться в нуль ($H=H_{\min}$). Это происходит в том случае, когда траектория является сравнительно пологой с умеренным значением максимальной перегрузки, т. е. как раз в том случае, который представляет наибольший практический интерес. При этом значение скорости $\bar{V}_m$ оказывается ненамного меньшим значения $\bar{V}_0$.

Умножая уравнения (6.45) на y' и интегрируя, получим для $K = \text{const}$

$$\frac{y'^2}{2} \Big|_{x_0}^x = -Ky \Big|_{x_0}^x + \int_{y_0}^y \frac{e^{2x_m} - 1}{y} dy + \int_{y_0}^y \frac{e^{2x} - e^{2x_0}}{y} dy. \quad (6.74)$$

Учитывая начальные условия (6.73), получим для $x=x_m$, $y=y_m$

$$(1 - e^{2x_0}) \ln \frac{y_m}{y_p} + Ky_m = \int_0^{y_m} \frac{e^{2x} - e^{2x_0}}{y} dy. \quad (6.75)$$

Последний член в соотношении (6.75) сравнительно мал, поскольку при $y \rightarrow 0$ $\frac{e^{2x} - e^{2x_0}}{y} \rightarrow 0$.

Вычислим его приближенно, считая, что

$$e^{2x} - e^{2x_0} \approx 2e^{2x_0}(x - x_0)$$

и

$$y' \approx \sqrt{2(1 - e^{2x_0}) \ln \frac{y_m}{y} + 2K(y_m - y)},$$

так как по предположению x_m мало отличается от x_0 . Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^{y_m} \frac{e^{2x} - e^{2x_0}}{y} dy \approx \sqrt{\frac{2}{1 - e^{2x_0}}} e^{2x_0} y_m f_1(\eta),$$

где

$$f_1(\eta) = \int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{z} dz}{\sqrt{\ln \frac{1}{z} + \eta(1 - z)}} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{1 + \frac{\pi}{6} \eta}}, \quad \eta = \frac{K y_m}{1 - \frac{1}{\bar{V}_0^2}}$$

$$\text{т. е. } (1 - e^{2x_0}) \ln \frac{y_m}{y_p} + K y_m = \sqrt{\frac{2}{1 - e^{2x_0}}} e^{2x_0} y_m f_1(\eta). \quad (6.76)$$

Аналогично получим, что соотношение, связывающее x_m и x_0 ($\bar{V}_m$ и $\bar{V}_0$), имеет вид

$$\ln \bar{V}_m - \ln \bar{V}_0 = - \frac{y_m}{\sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{\bar{V}_0^2}\right)}} f_2(\eta), \quad (6.77)$$

где

$$f_2(\eta) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\ln \frac{1}{z} + \eta(1 - z)}} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1 + \frac{\pi}{4} \eta}}.$$

Таким образом, соотношения (6.76) и (6.77) приближенно определяют в неявном виде связь между парами значений $(y_p, \bar{V}_0)$ и $(y_m, \bar{V}_m)$. Максимальная перегрузка достигается при некотором значении x , ненамного отличающемся от x_m , так что

$$n_{x \max} \approx n_x(x_m).$$

Для обоснования использования приближенных формул (6.76), (6.77) и (6.78) рассмотрим два предельных случая $K=0$ и $Ky_m \gg 1$. В первом случае использование указанных формул равносильно учету двух первых членов в разложениях:

$$\frac{y_m}{y_p} = (1 + \alpha_1 y_p + \dots),$$

$$\frac{\bar{V}_m}{\bar{V}_0} = (1 + \beta_1 y_p + \dots).$$

Во втором случае учет правых частей в уравнениях (6.76) и (6.77) равносильно учету поправок порядка $\frac{1}{K\sqrt{Ky_m}}$ и $\sqrt{\frac{y_m}{K}}$, соответственно. Следовательно, при увеличении K эти поправки уменьшаются и наибольшую роль из них играет поправка в определении $\bar{V}_m$.

Наиболее важной характеристикой, которая определяется при анализе траекторий входа в атмосферу со сверхкруговой скоростью, является ширина *коридора входа в атмосферу* — понятие, введенное Чепменом [67]. Если высота фиктивного перигея траектории окажется меньше некоторого значения H_{p1} , или, другими словами, траектория является слишком крутой, то перегрузка, действующая на аппарат, превысит допустимые пределы. Использование положительной подъемной силы позволяет уменьшать величину H_{p1} — таким образом, каждому сочетанию значений $\bar{V}_0$, $\frac{c_y}{c_x}$ и $\sigma_x = \frac{c_x S}{m}$ соответствует свое значение H_{p1} . Назовем его *нижней границей коридора входа*. С другой стороны, если высота фиктивного перигея окажется больше некоторого значения H_{p2} или траектория является слишком пологой, то аппарат не сможет при своем погружении в атмосферу погасить скорость до значения круговой скорости и, выйдя из плотных слоев атмосферы, удалится на значительное расстояние от планеты, что в большинстве случаев является недопустимым. В таких случаях говорят, что аппарат «не захватывается» атмосферой, а значение H_{p2} называют *верхней границей коридора входа*, или границей захвата. Вообще говоря, дать строгое определение границе захвата не удастся, она соответствует резкому возрастанию высоты и дальности полета. Иногда в качестве условного определения границы захвата задают некоторое значение высоты, достигаемое при вылете из атмосферы (100—200 км). Естественно, что использование отрицательной подъемной силы позволяет увеличить значение H_{p2} . Таким образом, величина H_{p2} , так же как и величина H_{p1} , зависит от значений $\bar{V}_0$, $\frac{c_y}{c_x}$ и $\sigma_x = \frac{c_x S}{m}$, если считать, что знак аэродинамической подъемной силы можно изменять по желанию в зависимости от высоты фик-

тивного перигея. Разность $H_{p2} - H_{p1}$ называют *шириной коридора входа* в атмосферу (см. рис. 6.24) — эта разность определяет требования, которые предъявляются к точности выдерживания траектории приближения к планете.

Интересно отметить, что при экспоненциальной зависимости плотности от высоты ширина коридора входа не зависит от величины баллистического параметра. Определим ширину коридора входа в атмосферу, используя выведенные приближенные формулы при условии, что аэродинамическое качество не слишком мало. Тогда нижнюю границу коридора можно найти с помощью соотношений (6.76) и (6.77), пренебрегая поправкой $f_1(\eta)$ и считая, что максимальное значение перегрузки практически достигается при $\bar{V} = \bar{V}_m$:

$$y_{p1} \approx y_m e^{\frac{K \cdot y_m}{1 - 1/\bar{V}_0^2}} \quad (6.78)$$

$$n_{\max} \approx \sqrt{r\lambda} \sqrt{1 + \left(\frac{c_y}{c_x}\right)^2 \bar{V}_m^2} y_m \quad (6.79)$$

$$\bar{V}_m \approx \bar{V}_0 e^{-\frac{\bar{V}_0^{\pi} y_m}{\sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{\bar{V}_0^2}\right) + \frac{\pi K y_m}{2}}}} \quad (6.80)$$

При больших значениях K (порядка 10 и выше) показатель экспоненты в (6.80) оказывается малой величиной.

Тогда в нулевом приближении можно положить $\bar{V}_m \approx \bar{V}_0$ и вычислить с помощью (6.79) и (6.78) нулевое приближение для y_m и y_{p1} , после этого, подставляя найденное значение y_m в (6.80), определим первое приближение для $\bar{V}_m$, а затем — для y_m и y_{p1} и т. д. Ограничиваясь первым приближением, можно выписать формулу

$$y_{p1} \approx \frac{n_{\max}}{\sqrt{r\lambda} \sqrt{1 + \left(\frac{c_y}{c_x}\right)^2 \bar{V}_0^2}} e^{\mu + \sqrt{2\pi} \frac{1 + \mu}{\sqrt{1 + \frac{\pi\mu}{4}}}} \quad (6.81)$$

где

$$\mu = \frac{n_{\max}}{(\bar{V}_0^2 - 1) \sqrt{1 + \left(\frac{c_x}{c_y}\right)^2}}, \quad (6.82)$$

$$v = \frac{n_{\max}}{\bar{V}_0 \sqrt{\bar{V}_0^2 - 1} \sqrt{r\lambda} \sqrt{1 + \left(\frac{cy}{cx}\right)^2}}. \quad (6.83)$$

Задавая параметр $c_x S/m$, можно по значению y_{p1} определить $Q(H_1)$, а следовательно, и высоту H_{p1} для нижней границы коридора входа.

Верхняя граница коридора (значение y_{p2}) определяется из условий захвата аппарата атмосферой: это значит, что при полете с отрицательной подъемной силой в момент вылета из атмосферы ($y=0$) скорость равна круговой скорости ($x=0$). В том случае, когда располагаемое отрицательное аэродинамическое качество не слишком мало, значение y_{p2} определяется сравнительно простым путем: можно показать, что при этом $\bar{V}_m$ мало отличается от $\bar{V}_0$, а отрицательная подъемная сила при $\bar{V} = \bar{V}_m$ должна уравнивать разность между центробежной силой и силой веса.

Тогда, используя соотношение (6.78) и (6.79), получим

$$y_{p2} \approx \frac{1 - \frac{1}{\bar{V}_0^2}}{|K|e}. \quad (6.84)$$

Формулы (6.81) и (6.84) позволяют определить ширину коридора входа в атмосферу

$$\begin{aligned} \Delta H_p = H_{p2} - H_{p1} &= \frac{1}{\lambda} \ln \frac{Q_{p1}}{Q_{p2}} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_{p1}}{y_{p2}} \approx \\ &\approx \frac{1}{\lambda} \left\{ \mu + \ln \mu + 1 + \sqrt{2\pi} \frac{1 + \mu}{\sqrt{1 + \frac{\pi}{4} \mu}} v \right\}, \end{aligned} \quad (6.85)$$

где μ и v определяются формулами (6.82) и (6.83).

Сравнение результатов расчета по формуле (6.85) с результатами численного интегрирования [67] приведено в табл. 6.1. Как видно, формула (6.85) дает вполне удовлетворительную точность.

При увеличении $\frac{cy}{cx}$ до 2 и выше $v \rightarrow 0$,

$\mu \rightarrow \frac{n_{\max}}{\bar{V}_0^2 - 1}$, тогда

$$\Delta H_p \Big|_{\frac{cy}{cx} \sim} \approx \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{n_{\max}}{\bar{V}_0^2 - 1} + \ln \frac{n_{\max}}{\bar{V}_0^2 - 1} + 1 \right\}. \quad (6.86)$$

При уменьшении μ до значений, меньших 1, коридор входа очень быстро исчезает, изменяясь от $2/\lambda$ до нуля, так как при $\mu < 1$

Таблица 6.1

$n_{\max}$	$\bar{V}_0=1,2$		$\bar{V}_0=1,6$		$\bar{V}_0=2,0$		c_{μ}/c_x
	[67]	формула (6.85)	[67]	формула (6.85)	[67]	формула (6.85)	
5	37,2	41	12,3	12,7	2,8	4,5	0,25
10	84,3	77,6	26,6	25,8	12,3	14	
20	190	156	53,5	49,3	27,8	27,4	
5	84	85	29,7	30,5	16,5	17,4	1,0
10	163	163,1	54,5	54,6	31	31,9	
20	337,5	324,4	102,3	100,2	56,8	57,2	
5	100	104,5	34,9	37,8	19,4	22	4,0
10	185,6	192,6	62	65,5	35,6	37,7	
20	369	379	114,8	117,3	65,1	67,9	

условие компенсации разности между центробежной силой и силой веса при движении вдоль границы захвата приводит к появлению перегрузки, превышающей допустимое значение.

§ 6.6. ПЕРСПЕКТИВЫ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ВХОДА В АТМОСФЕРУ С ОЧЕНЬ БОЛЬШОЙ СКОРОСТЬЮ

Вход в атмосферу с круговой скоростью или второй космической скоростью может быть обеспечен при использовании аппаратов затупленной формы. Подъемная сила у такого аппарата или отсутствует или мала.

Баллистические аппараты оказываются пригодными для осуществления спуска с орбиты, если вход в атмосферу происходит с достаточно малым углом, с тем, чтобы не допустить появления чрезмерно больших перегрузок. При входе в атмосферу со второй космической скоростью (возвращение от Луны) малое аэродинамическое качество (порядка 0,5) оказывается достаточным, для того чтобы осуществить безопасную посадку аппарата путем изменения угла крена при условии попадания в заданный коридор входа шириной порядка 50 км.

Однако компоновки баллистического и полубаллистического типа оказываются непригодными для применения их при космических полетах к планетам Солнечной системы. Действительно, как показано в целом ряде исследований, см., например, [98], выполнение перелета между планетами за сравнительно ограниченное время приводит как к увеличению стартового веса аппарата, так и к увеличению скорости, с которой аппарат приближается к планете назначения (рис. 6.25). Попытка уменьшить скорость до круговой скорости с помощью тормозных двигателей приво-

дит к большому увеличению потребного веса, особенно при использовании двигателей большой тяги. Поэтому крайне желательно осуществить это торможение с помощью аэродинамических сил. Таким образом, возникает задача об обеспечении входа в атмосферу со скоростью, значительно превышающей круговую скорость данной планеты (в 1,6—3 раза).

Наряду с этим может оказаться, что отклонения параметров траектории при входе в атмосферу существенно превышают аналогичные отклонения для случая возвращения аппарата от Луны, особенно при подлете к «чужой» планете, когда трудно рассчитывать на информацию, получаемую с Земли. Кроме того, разброс параметров атмосферы чужой планеты приводит к дополнительному увеличению потребной ширины коридора входа.

В итоге возникает необходимость обеспечить управление аппаратом при сравнительно больших отклонениях высоты фиктивного перигея и при большой скорости входа в атмосферу.

Наиболее эффективным средством увеличения коридора входа в атмосферу является увеличение аэродинамического качества. Однако на основании формулы (6.85) можно сделать вывод, что увеличение аэродинамического качества позволяет расширить коридор входа лишь до определенного предела. Этот вывод лишь частично правилен, поскольку формула (6.85) справедлива только для аппаратов с постоянным значением аэродинамического качества (с постоянным углом атаки). В действительности коридор входа в атмосферу можно расширить, если допустить возможность регулирования угла атаки в процессе полета.

Одной из основных аэродинамических характеристик аппарата является поляра — кривая, по которой можно определить, какие значения коэффициента сопротивления c_x и коэффициента подъемной силы c_y соответствуют каждому значению угла атаки (рис. 6.26). Тогда можно поставить задачу о выборе оптимальных законов изменения угла атаки аппарата с тем, чтобы в ма-

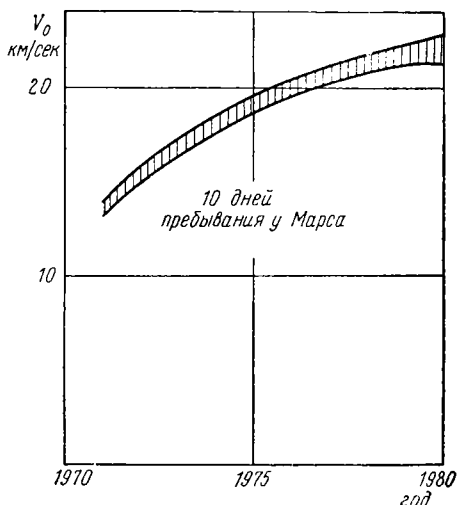


Рис. 6.25. Изменение скорости входа в атмосферу Земли после возвращения от Марса в зависимости от года экспедиции

ксимальной степени расширить коридор входа в атмосферу — получить возможно большее значение H_{p2} и возможно меньшее значение H_{p1} [42]. Приближенное решение этой задачи имеет следующий вид. При движении вдоль нижней границы коридора



Рис. 6.26. Изменение угла атаки при полете аппарата вдоль нижней и верхней границ коридора

входа вначале выдерживается максимальное положительное значение коэффициента подъемной силы, а затем после достижения максимальной перегрузки угол атаки изменяется таким образом, чтобы суммарная перегрузка сохраняла постоянное значение. При этом точка поляр $c_{y \max}$ переходит к точке $(c_y=0, c_{x \min})$ (см. рис. 6.26). Угол наклона траектории обращается в нуль при достижении этой последней точки $c_y=0, c_{x \min}$. При движении вдоль верхней границы коридора необходимо выдерживать постоянный угол атаки, соответствующий максимальному отрицательному коэффициенту подъемной силы или соответствующий

максимальному положительному значению c_y при угле крена $\gamma=180^\circ$. В этих условиях приближенная формула для оценки ширины коридора входа приобретает следующий вид:

$$\Delta H_p \approx \frac{1}{\lambda} \left[1 + \ln \left(\frac{n_{\max}}{\bar{V}_0^2 - 1} \frac{c_{y \max}}{c_{x \min}} \right) + \frac{n_{\max}}{\bar{V}_0^2 - 1} \int_0^{c_{y \max}} \frac{dc_y}{\sqrt{c_y^2 + c_x^2}} \right]. \quad (6.87)$$

Изменение угла атаки при движении вдоль нижней границы коридора в диапазоне от $\alpha(c_{y \max})$ до $\alpha=0$ ($c_y=0, c_{x \min}$) может оказаться трудноосуществимым. Поэтому представляет интерес рассмотреть случай, когда диапазон изменения угла атаки ограничен: $\alpha > \alpha_*$ ($c_y > 0, c_x > c_{x \min}$). В последнем случае формула (6.87) несколько видоизменяется:

$$\Delta H_p^e \approx \frac{1}{\lambda} \left\{ 1 + \ln \left(\frac{n_{\max} c_{y \max}}{(\bar{V}_0^2 - 1) \sqrt{c_x^2(\alpha_*) + c_y^2(\alpha_*)}} \right) + \frac{n_{\max}}{\bar{V}_0^2 - 1} \left(\frac{c_y(\alpha_*)}{\sqrt{c_x^2(\alpha_*) + c_y^2(\alpha_*)}} + \int_{c_y(\alpha_*)}^{c_{y \max}} \frac{dc_y}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}} \right) \right\}. \quad (6.88)$$

Формулы эти выведены в предположении, что скорость в момент достижения максимальной высоты мало отличается от скорости входа ($\bar{V}_m \approx \bar{V}_0$), при аналогичных предположениях формулу (6.85) следует видоизменить — опустить последний член. Рассматривая гипотетическое семейство поляр, изображенное на рис. 6.27 и используя формулу (6.87) и видоизмененную формулу (6.85), можно получить представление о том, в какой степени регулирование угла атаки позволяет расширить коридор

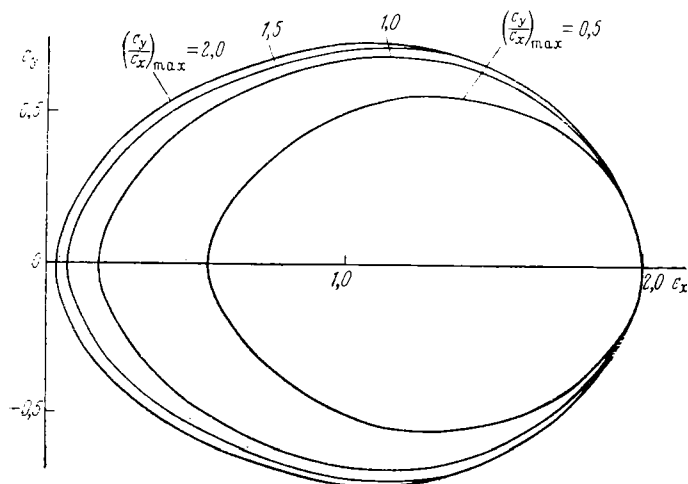


Рис. 6.27. Типичные гиперзвуковые поляры летательных аппаратов

входа в атмосферу (рис. 6.28). Как видно, для типичных зависимостей $c_y(c_x)$ и при $c_y/c_x > 1$ коридор входа продолжает неограниченно расширяться по мере увеличения аэродинамического качества. При значениях аэродинамического качества, меньших 0,5, регулирование угла атаки не позволяет получить заметного увеличения ширины коридора входа.

В действительности этот выигрыш оказывается еще более значительным, если учесть отличие скорости входа в атмосферу от скорости, достигаемой при $H = H_{\min}$, $\theta = 0$, поскольку при регулировании угла атаки участок, предшествующий точке $\theta = 0$, «растягивается». Формула (6.87) дает лишь приближенную оценку для ширины коридора входа в атмосферу, заниженную в среднем на 20%.

Описанный способ регулирования угла атаки при полете вблизи нижней границы коридора имеет свой недостаток — уменьшение максимальной перегрузки достигается здесь путем уменьшения коэффициента $c_R = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$, при этом аппарат

«проваливается» до меньших высот, в результате чего увеличиваются тепловые потоки, поступающие на поверхность аппарата. Поэтому уменьшение максимальной перегрузки с помощью описанного способа влечет за собой ухудшение теплового режима на траектории входа в атмосферу.

В этой связи полезно рассмотреть, как влияет на ширину коридора входа и на максимальные значения плотности умень-

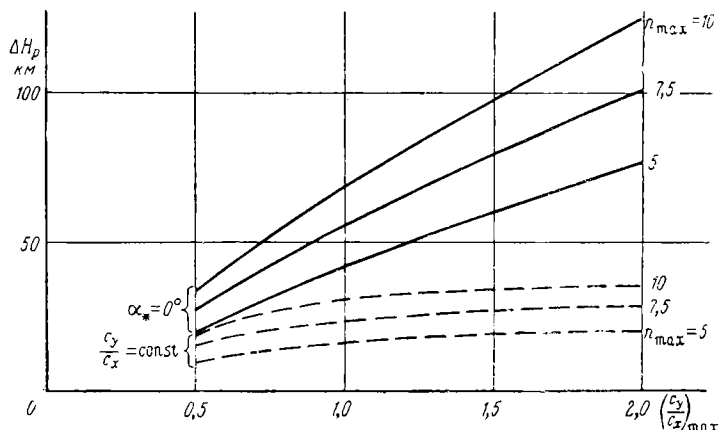


Рис. 6.28. Зависимость ширины коридора входа от максимального аэродинамического качества и максимальной перегрузки для аппаратов с регулируемым и нерегулируемым углом атаки, $\bar{V}_0 = 2$

шение диапазона регулирования угла атаки. Вычислим приближенные значения

$$\bar{q}_m = \frac{q_m r S}{m} = \frac{2n_{\max}}{\bar{V}_0^2 c_R (a_*)},$$

пропорциональные максимальной плотности, и ширину коридора входа при различных значениях α_* (рис. 6.29 и 6.30). Сопоставляя эти рисунки, можно видеть, что в случае $\frac{c_y}{c_x} = 2$ при уменьшении диапазона регулирования угла атаки примерно на одну четверть ширина коридора уменьшается примерно на 30%, но зато максимальная плотность уменьшается в 4,5 раза. Регулирование угла атаки в процессе полета связано с серьезными трудностями ввиду необходимости создания больших управляющих моментов. Применение струйных органов управления для этой цели крайне невыгодно ввиду больших расходов рабочего вещества. Единственным реальным средством изменения угла атаки, по-видимому, можно считать применение аэродинамических управляющих поверхностей — рулей, но для этого необходимо решить задачу об обеспечении теплозащиты этих поверхностей.

На основании формулы (6.87) можно сделать вывод, что при больших скоростях входа в атмосферу для расширения коридора входа необходимо использовать аэродинамические формы, имеющие сравнительно большие значения c_y и c_x при больших углах атаки и малые значения c_y и c_x при малых углах атаки. Это приводит к конфигурациям самолетного типа с хорошо обтекаемой носовой частью, имеющей малый радиус затупления.

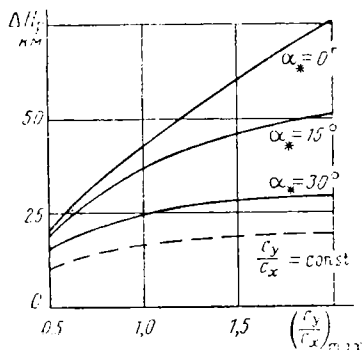


Рис. 6.29. Зависимость ширины коридора входа от максимального аэродинамического качества и предельного угла атаки α_* для аппаратов с регулируемым углом атаки, $n_{\max}=5$, $\bar{V}_0=2$

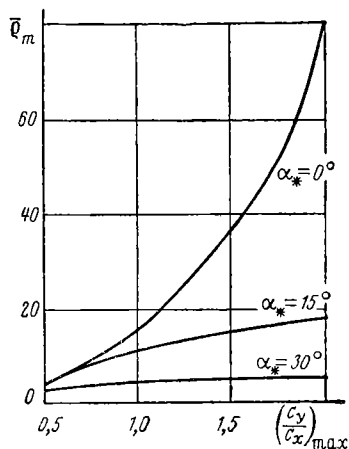


Рис. 6.30. Зависимость максимальной плотности от максимального аэродинамического качества и предельного угла атаки α_* для аппаратов с регулируемым углом атаки, $n=5$, $\bar{V}_0=2$

Этот вывод подтверждается, если принять во внимание повышение роли радиационных потоков, поступающих к аппарату при больших скоростях полета в атмосфере. При обтекании аппарата гиперзвуковым потоком на головной части образуется мощный скачок уплотнения, за которым газ имеет увеличенную плотность, температуру и давление. Радиационный тепловой поток в соответствии с формулой Стефана—Больцмана пропорционален четвертой степени температуры газа, а температура газа быстро растет при увеличении скорости полета. В результате радиационный тепловой поток от газа, нагретого за скачком уплотнения, пропорционален скорости полета в высокой степени. В то же время суммарная интенсивность излучения возрастает с увеличением толщины сжатого слоя, которая, в свою очередь, увеличивается при увеличении размеров аппарата. Приближенные формулы и оценки величины радиационного теплового потока приведены в целом ряде работ [109], [33], [7]. Радиационный

тепловой поток, поступающий в критическую точку носовой части, чаще всего аппроксимируется формулами типа

$$q_R \approx f(r_1) \varrho^k g(V), \quad (6.89)$$

где $k=1,5 \div 1,8$; $f(r_1) \approx r_1$ или во всяком случае увеличивается с ростом r_1 ; $g(V)$ — функция скорости, которая очень быстро увеличивается с ростом скорости, например, $g(V) \sim V^l$, где $l=10-20$.

Учет радиационных тепловых потоков важен при выборе оптимальной формы аппарата, предназначенного для входа в атмосферу. Роль радиационного теплового потока существенно возрастает с увеличением скорости входа в атмосферу, особенно на траекториях, расположенных вблизи нижней границы коридора. При больших скоростях входа в атмосферу предпочтение следует отдать аппаратам хорошо обтекаемой формы с малым радиусом затупления носовой части. Таким образом, требования к выбору оптимальной формы аппарата при больших скоростях входа в атмосферу как для обеспечения максимальной ширины коридора входа, так и для уменьшения аэродинамического нагрева во многом совпадают.

ГЛАВА VII

Управление космическим аппаратом при входе в атмосферу

§ 7.1. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ТРАЕКТОРИЯМИ ВХОДА В АТМОСФЕРУ

Рассмотрим наиболее характерные задачи, связанные с управлением космическими летательными аппаратами при входе в атмосферу. Здесь и в дальнейшем будет предполагаться, что управление полетом осуществляется только путем регулирования аэродинамических сил, действующих на аппарат.

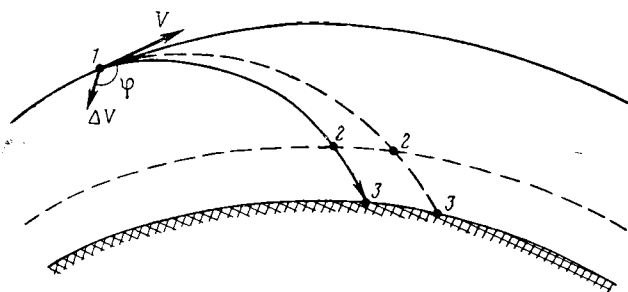


Рис. 7.1. Спуск аппарата с околокруговой орбиты

1. Наиболее простой задачей является обеспечение посадки аппарата в заданный район поверхности Земли или планеты при спуске с околокруговой орбиты. Отклонения точки посадки вызываются отклонением траектории полета на безатмосферном участке полета (1.2) от момента выполнения тормозного импульса до входа в атмосферу и на атмосферном участке полета (2.3) — от входа в атмосферу до посадки (рис. 7.1).

Здесь представляет интерес вопрос о выборе оптимального направления тормозного импульса. Рассеивание на атмосферном участке спуска как при отсутствии, так и при наличии управления существенно уменьшается с увеличением угла входа в атмосферу (по абсолютной величине). Но увеличение угла

входа в атмосферу влечет за собой увеличение тормозного импульса, а следовательно, увеличение потребного веса топлива. Если исходная орбита является круговой, то при заданной величине тормозного импульса максимальный угол входа, как правило, достигается при трансверсальном приложении импульса ($\varphi = 180^\circ$). С другой стороны, желательно по возможности уменьшить отклонение по дальности, накопленное на безатмосферном участке полета, которое вызывается, в первую очередь, неточной обработкой тормозного импульса. Разброс величины тормозного импульса можно свести к минимуму, производя отсечку тормоз-

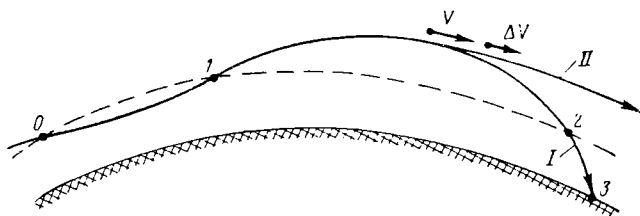


Рис. 7. 2. Вход в атмосферу со сверхкруговой скоростью:
I—посадка на большем расстоянии от точки входа; II—выход на околокруговую орбиту

ного двигателя при достижении заданного приращения скорости ΔV . Влияние ошибок в ориентации тормозного импульса можно свести к минимуму, если выбрать направление импульса к горизонту φ из условия $\frac{\partial L_{12}}{\partial \varphi} = 0$. Такое оптимальное значение φ определяется с помощью соотношения [91]

$$\frac{\Delta V}{V_1} \frac{r_1}{H_1 - H_2} = \frac{\frac{9}{4} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 1}{\cos \varphi (3 \sin^2 \varphi - 4)}. \quad (7.1)$$

При этом угол входа незначительно уменьшается по абсолютной величине по сравнению со случаем, когда тот же тормозной импульс является трансверсальным ($\varphi = 180^\circ$).

2. Гораздо более сложной задачей является обеспечение точной посадки аппарата, входящего в атмосферу Земли со второй космической или большей скоростью. Особенно трудной эта задача является в том случае, когда заданный район посадки удален на большое расстояние от точки входа в атмосферу. Последняя точка не может задаваться произвольно, а определяется условиями возвращения аппарата от Луны или планеты [35]. Тогда траектория входа в атмосферу разделяется на 3 характерных участка — участок первого погружения в атмосферу (0—1), участок вылета в разреженные слои атмосферы (1—2) и участок второго погружения в атмосферу (2—3) (рис. 7. 2). Наибольшие трудности возникают при управлении полетом на первом участке.

Здесь, как будет показано ниже, неуправляемое движение является неустойчивым, поэтому к системе управления должны предъявляться особенно жесткие требования. Участок вылета из атмосферы имеет значительную протяженность, если требуемая дальность от точки входа в атмосферу до точки посадки велика, при этом скорость вылета из атмосферы приближается к круговой скорости. Дальность участка вылета из атмосферы можно определить по формуле, справедливой для кеплерова движения:

$$L_{12} = 2r \arctg \frac{\bar{V}_1^2 \operatorname{tg} \theta_1}{(1 - \bar{V}_1^2) + \operatorname{tg}^2 \theta_1}, \quad (7.2)$$

где $\bar{V}_1 = \frac{V_1}{V_{кр1}}$; $V_{кр1}$ — круговая скорость, вычисленная для точки вылета из атмосферы. Дальность L_{12} увеличивается при приближении скорости вылета к круговой скорости и при увеличении угла наклона траектории при вылете из атмосферы (до определенных пределов). Одной и той же дальности L_{12} могут соответствовать различные сочетания V_1 и θ_1 , причем рассеивание по дальности, накапливаемое на участке вылета, оказывается большим для сочетаний больших значений V_1 и меньших значений θ_1 . В этом нетрудно убедиться, выписывая «производные рассеивания»:

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial \bar{V}_1} = 4r \frac{\bar{V}_1 \operatorname{tg} \theta_1}{(1 - \bar{V}_1^2)^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_1}, \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial \theta_1} = 2r \frac{(1 - \bar{V}_1^2) - \operatorname{tg}^2 \theta_1}{(1 - \bar{V}_1^2)^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_1}. \quad (7.4)$$

Результаты расчета по формулам (7.2), (7.3) и (7.4) приведены на рис. 7.3, 7.4 и 7.5. Как видно, при $\theta_1 = 3^\circ$, $L_{12} = 10\,000$ км отклонение скорости $\bar{V}_1$ на 0,001 (около 8 м/сек) приводит к отклонению дальности точки вторичного входа в атмосферу на 300 км, а отклонение угла наклона траектории на $0,1^\circ$ — к отклонению дальности на 180 км.

Следовательно, для уменьшения рассеивания желательно, чтобы траектория имела возможно больший угол наклона в точке вылета из атмосферы. Величина этого угла ограничивается запасом аэродинамического качества аппарата, а также допустимым пределом максимальной перегрузки, поскольку при увеличении угла θ_1 аппарат должен совершать более глубокое погружение в атмосферу на первом участке.

На промежуточном участке полета управление аппаратом невозможно, поэтому накопленное отклонение по дальности может быть скомпенсировано только на участке второго погружения в атмосферу.

В связи с этим часто используется понятие *области возможного маневра* для участка второго погружения в атмосферу. Под

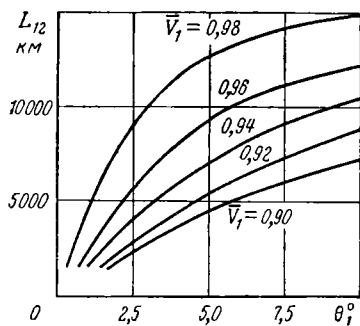


Рис. 7.3. Зависимость дальности безатмосферного участка траектории от скорости и угла наклона траектории при вылете из атмосферы

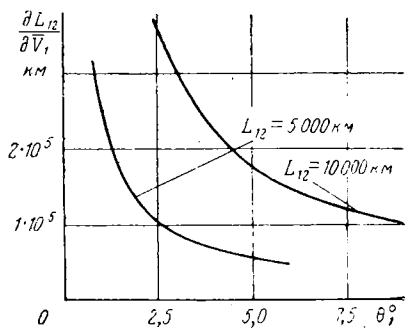


Рис. 7.4. Производная отклонения конечной дальности по отклонению скорости при вылете из атмосферы

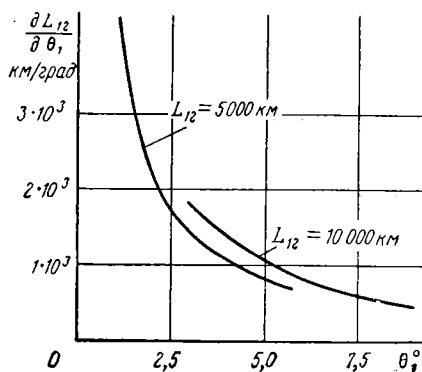


Рис. 7.5. Производная отклонения конечной дальности по отклонению угла наклона траектории при вылете из атмосферы

этой областью подразумевается область точек посадки, которые могут быть достигнуты при различных значениях угла крена или угла атаки.

Так, если рассматривается изменение угла крена γ , то максимальная дальность $L_{\max}$ достигается при $\gamma=0$, минимальная дальность — при $\gamma=180^\circ$, а максимальная боковая дальность $l_{\max}$ при $\gamma=30 \div 50^\circ$. Естественно, что на траектории полета при постоянном $|\gamma| > 90^\circ$, когда $c_y \cos \gamma < 0$, максимальная перегрузка может превысить допустимый предел. Поэтому минимальная дальность $L_{\min}$ ограничивается траекторией, на которой перегрузка равна предельно допустимому значению. В итоге область возможного маневра имеет вид «калошеобразной» кривой

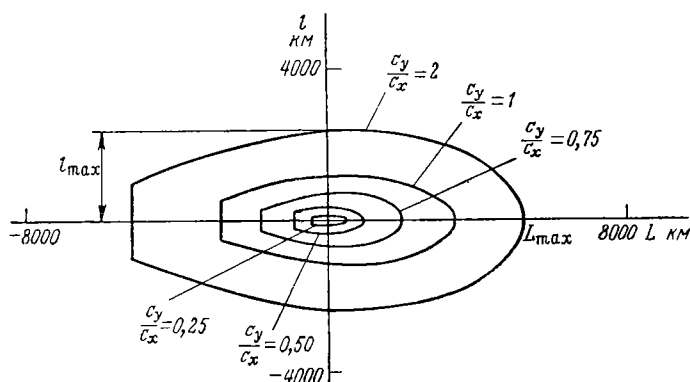


Рис. 7.6. Области возможного маневра при различных значениях аэродинамического качества

(рис. 7.6). Размеры этой области определяют маневренные возможности аппарата при втором погружении в атмосферу. Если в номинальном случае траектория нацелена в центр области возможного маневра, то на участке второго погружения в атмосферу имеется возможность уменьшить накопленное отклонение по дальности не более чем на величину $\Delta L = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{2}$, а накопленное боковое отклонение — не более чем на величину $l_{\max}$. Значения ΔL и $l_{\max}$ и выражения (7.3) и (7.4) определяют требования к максимально допустимым ошибкам ΔV_1 и $\Delta \theta_1$ в конце участка первого погружения в атмосферу. Это обстоятельство иллюстрируется рис. 7.7 [107]. Как видно, если система управления на участке первого погружения в атмосферу обеспечивает выдерживание параметров V_1 и θ_1 с ошибками, не превосходящими ± 10 м/сек и $\pm 0,25^\circ$ соответственно, то для компенсации накопленных отклонений по дальности на участке второго погружения в атмосферу необходимо, чтобы максимальное аэродинамическое качество было не менее 0,4.

3. Существует еще одна задача, представляющая большой практический интерес. Взаимное расположение точки входа в атмосферу и заданного района посадки может быть таким, что прямая посадка аппарата в этот район оказывается невозможной. Тогда на первом этапе аппарат при своем погружении в атмосферу гасит скорость с помощью аэродинамического торможения примерно до значения круговой скорости, затем вылетает из атмосферы и с помощью разгонного импульса переходит на околопланетную орбиту — круговую или эллиптическую (см. рис. 7.2). После этого можно подождать, пока вследствие вра-

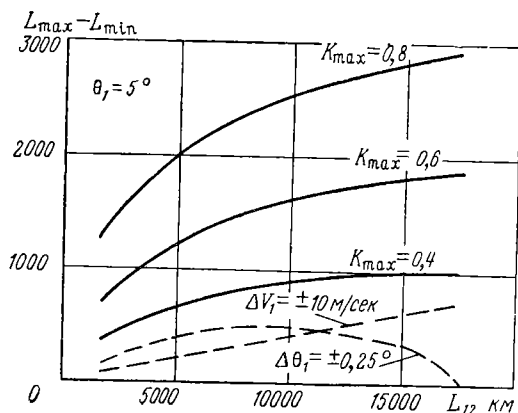


Рис. 7.7. Длина области возможного маневра при различных значениях аэродинамического качества и дальности безатмосферного участка полета

щения планеты требуемый район посадки не окажется в наиболее удобном месте по отношению к полученной орбите и осуществить спуск с орбиты, т. е. свести задачу к задаче 1. В другом варианте спуск на поверхность планеты может и не потребоваться, если предполагается создание временного или постоянного спутника какой-нибудь планеты Солнечной системы. Здесь, так же как и в предыдущем случае, основной целью является возможно более точное выдерживание параметров траектории в момент вылета из атмосферы — V_1 и θ_1 .

Интересно отметить, что для минимизации величины разгонного импульса желательно иметь как можно более пологую траекторию при вылете из атмосферы, т. е. возможно меньшее значение угла θ_1 ([20], [50]).

Для данной задачи характерна своеобразная зависимость ширины коридора входа от скорости входа. Здесь под верхней и нижней границей коридора подразумеваются крайние значения высоты фиктивного перигея, при которых еще возможен выход на траекторию вылета из атмосферы с заданным апогеем.

Этот коридор достигает максимальной ширины при промежуточных значениях скорости входа в атмосферу и убывает как при

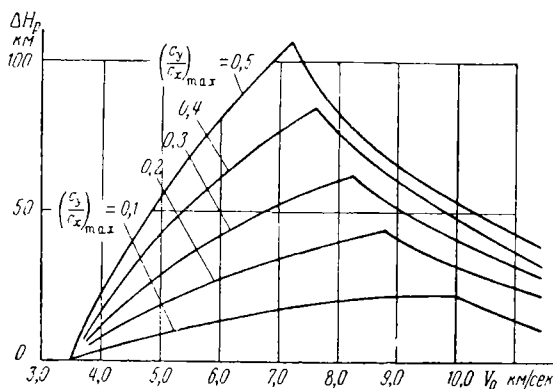


Рис. 7.8. Ширина коридора входа в атмосферу Марса (выведение аппарата на околокруговую орбиту после торможения в атмосфере Марса)

увеличении, так и при уменьшении скорости входа. Для иллюстрации на рис. 7.8, взятом из [108], приведены результаты расчета, относящиеся к случаю входа в атмосферу Марса.

§ 7.2. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ НЕУПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ

Для траекторий входа в атмосферу характерно изменение условий полета в очень большом диапазоне. При этом для анализа устойчивости движения необходимо исследовать нелинейную систему дифференциальных уравнений. Даже в простейшем случае, когда отклонения параметров траектории можно считать малыми, задача сводится к исследованию системы линейных уравнений с переменными коэффициентами. Применение обычных критериев устойчивости к такой системе уравнений (метод «замораживания коэффициентов») не всегда приводит к правильным результатам не только в количественном, но и в качественном отношении. Поэтому для суждения об устойчивости решений желательно, как минимум, применение метода ВКБ (см. приложение III). Кроме того, следует отчетливо уяснить, какие параметры траектории являются наиболее важными для рассматриваемой задачи и исследовать поведение именно этих параметров.

В качестве таких параметров рассмотрим высоту и скорость полета, т. е. попытаемся определить устойчивость траектории в плоскости (V, H) .

Для этого сначала запишем уравнение движения аппарата в вариациях (6.35):

$$\delta y'' + \frac{e^{2x} - 1}{y^2(x)} \delta y = 0. \quad (7.5)$$

Здесь функция $y(x)$ соответствует некоторой «номинальной» — невозмущенной траектории, а вариация $\delta y(x)$ является малым отклонением от этой траектории. Выше, в гл. VI на ряде примеров было показано, что при скорости полета, меньшей круговой, решение этого уравнения $\delta y(x)$ имеет колебательный характер, причем частота колебаний возрастает с увеличением аэродинамического качества, а амплитуда δy возрастает по мере уменьшения высоты. Из этого, однако, не следует делать вывода о неустойчивости движения. Действительно, если рассмотреть отклонение высоты $\delta H(x)$, которое совпадает с $\delta H(V)$, и учесть характер зависимости плотности от высоты $\rho \approx \rho_0 e^{-\lambda H}$, то оказывается, что вариация высоты $\delta H = \frac{1}{\lambda} \frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{1}{\lambda} \frac{\delta y}{y}$ убывает по амплитуде. В этом смысле движение при скорости, меньшей круговой, устойчиво, что облегчает задачу об управлении дальностью.

Рассмотрим теперь случай движения со скоростью, большей круговой ($x < 0$). Тогда $\frac{e^{2x} - 1}{y^2(x)} = -a^2(x) < 0$ и решение уравнения (7.5) по методу ВКБ дает следующий результат (см. приложение III):

$$\begin{cases} \delta y \approx \frac{1}{\sqrt{a(x)}} \left[C_1 e^{\int_{x_0}^x a(x) dx} + C_2 e^{-\int_{x_0}^x a(x) dx} \right], \\ \delta y' \approx \sqrt{a(x)} \left[C_1 e^{\int_{x_0}^x a(x) dx} - C_2 e^{-\int_{x_0}^x a(x) dx} \right]. \end{cases} \quad (7.6)$$

Как видно, решения имеют аperiодический характер из-за наличия возрастающих членов, пропорциональных $e^{\int a(x) dx}$.

Рассмотрим, так же как и в предыдущем случае закон изменения вариации высоты, пропорциональной $\frac{\delta y}{y}$, и определим производную этой величины по x :

$$\delta H' = \left(\frac{\delta y}{y} \right)' = \frac{y \delta y' - y' \delta y}{y^2}.$$

Вариации высоты убывают по абсолютной величине, если выполняется условие

$$\frac{(\delta H)'}{\delta H} = \frac{\left(\frac{\delta y}{y}\right)'}{\left(\frac{\delta y}{y}\right)} < 0,$$

которое можно привести к виду

$$\sqrt{1 - e^{2x}} - y' < 0,$$

или

$$\sqrt{1 - \frac{1}{V^2}} + V r \lambda \theta < 0. \quad (7.7)$$

При скорости, большей круговой, это условие выполняется лишь для траекторий с монотонным уменьшением высоты, которые оказываются неприемлемыми, если заданная дальность от точки входа в атмосферу до точки посадки велика.

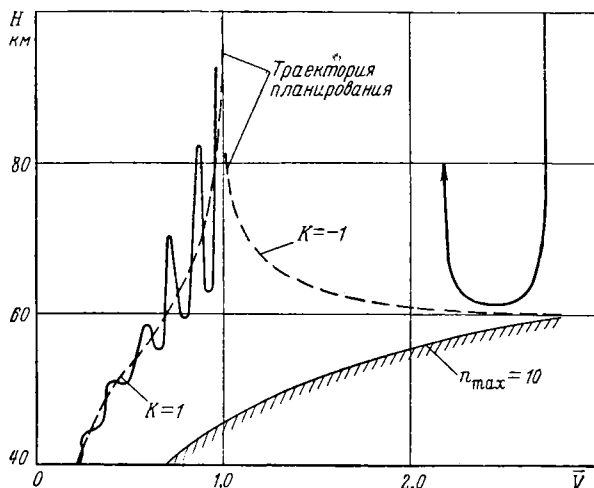


Рис. 7.9. Характер возмущенного движения относительно траектории квазистационарного планирования при сверхкруговой и докруговой скоростях

Различия между характером движения с докруговой и сверхкруговой скоростью иллюстрируются рис. 7.9, где изображены траектории квазистационарного планирования аппарата с положительным аэродинамическим качеством — при докруговой скорости полета — и аппарата с отрицательным аэродинамическим качеством — при скорости полета, превышающей круговую. Как видно, отклонения высоты $\Delta H(V)$ при скорости, большей круговой, очень быстро возрастают.

Управление траекторией полета осуществляется регулированием аэродинамических сил, действующих на аппарат. Можно выделить три основных способа изменения аэродинамических сил. Первый способ сводится к изменению сопротивления баллистического летательного аппарата путем разворачивания и свертывания тормозящих поверхностей, выдвижения щитков и т. д. Второй способ, наиболее распространенный в авиационной технике,—это изменение угла атаки аппарата. Третий способ заключается в изменении угла крена при постоянном угле атаки, под

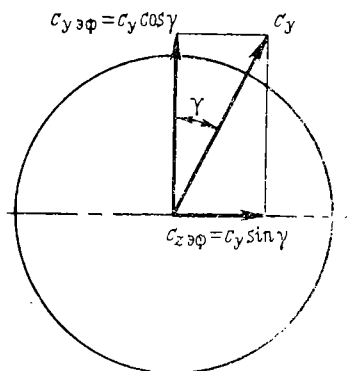


Рис. 7.10. Изменение эффективной подъемной силы путем поворотов аппарата по крену

изменением крена подразумеваются повороты аппарата относительно вектора скорости. При этом изменяется эффективная подъемная сила — проекция подъемной силы на вертикальную плоскость (рис. 7.10):

$$c_{yэф} = c_y \cos \gamma.$$

Этот способ наиболее удобен, поскольку он не изменяет картины обтекания аппарата и требует очень малых управляющих моментов. Поэтому большинство схем, рассмотренных в литературе, основано именно на управлении, связанном с изменением угла крена. Рассмотрим его более подробно. Предполо-

жим, что управление осуществляется путем изменения угла крена или эффективной подъемной силы в зависимости от рассогласований между измеряемыми параметрами траектории и программными значениями этих параметров при условии, что программы задаются в функции от скорости.

Так как коэффициент сопротивления при изменении угла крена не изменяется, можно использовать уравнение в вариациях:

$$\delta y'' + \frac{e^{2x} - 1}{y^2(x)} \delta y = -\sqrt{r\lambda} \delta \left(\frac{c_{yэф}}{c_x} \right), \quad (7.8)$$

где $\delta \left(\frac{c_{yэф}}{c_x} \right)$ — изменение эффективного аэродинамического качества в процессе управления.

Поскольку в задачах 1 и 2 (§ 7.1) конечной целью управления является обеспечение посадки аппарата в заданный район, естественно предположить, что подъемная сила должна зависеть

от изменения дальности. Выражение для рассогласования дальности можно получить, записывая уравнение (6.23) в вариациях:

$$\frac{d\delta L}{dx} = -\sqrt{\frac{r}{\lambda}} \frac{\delta y}{y^2(x)}. \quad (7.9)$$

Кроме того, как видно из самой структуры уравнения (7.8), для обеспечения устойчивого процесса управления желательно ввести в закон изменения подъемной силы сигналы от рассогласований δy и $\delta y'$.

Таким образом,

$$\delta \left(\frac{c_{y\text{эф}}}{c_x} \right) = k_0 \delta y + k_1 \delta y' - k_L \delta L, \quad (7.10)$$

где k_0, k_1, k_L — передаточные коэффициенты.

Рассмотрим уравнение

$$\delta y'' + (\sqrt{r\lambda} k_1) \delta y' + \left(\frac{e^{2x} - 1}{y^2(x)} + k_0 \sqrt{r\lambda} \right) \delta y = (\sqrt{r\lambda} k_L) \delta L \quad (7.11)$$

совместно с уравнением (7.9). Как видно, главным условием эффективности управления является условие, чтобы коэффициент k_0 был положителен и не слишком мал, поскольку при скорости полета, превышающей круговую, член $\frac{e^{2x} - 1}{y^2(x)}$ меньше нуля.

Будем считать, что этот коэффициент достаточно велик, а коэффициенты k_1 и k_L малы. Тогда, используя метод ВКБ (см. приложение III), можно получить приближенное решение системы уравнений (7.11) и (7.9) в явном виде

$$\begin{aligned} \delta y \approx & \frac{c_1}{\sqrt{\omega}} e^{\int_{x_0}^x a dx} \sin \int_{x_0}^x \omega dx + \\ & + \frac{c_2}{\sqrt{\omega}} e^{\int_{x_0}^x a dx} \cos \int_{x_0}^x \omega dx - c_3 \frac{\sqrt{r\lambda} k_L}{\omega^2} e^{\int_{x_0}^x \omega dx}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \delta y' \approx & c_1 \sqrt{\omega} e^{\int_{x_0}^x a dx} \cos \int_{x_0}^x \omega dx - \\ & - c_2 \sqrt{\omega} e^{\int_{x_0}^x a dx} \sin \int_{x_0}^x \omega dx, \end{aligned}$$

$$\delta L \approx \frac{c_1 \sqrt{\frac{r}{\lambda}}}{\omega \sqrt{\omega y^2(x)}} e^{\int_{x_0}^x a dx} \cos \int_{x_0}^x \omega dx -$$

$$- \frac{c_2 \sqrt{\frac{r}{\lambda}}}{\omega \sqrt{\omega y^2(x)}} e^{\int_{x_0}^x a dx} \sin \int_{x_0}^x \omega dx + c_3 e^{\int_{x_0}^x b dx},$$

$$\delta H = \frac{1}{\lambda} \frac{\delta y}{y}.$$

Здесь

$$\omega^2 = k_0 \sqrt{r\lambda} + \frac{e^{2x} - 1}{y^2(x)},$$

$$a = -\frac{1}{2} \left[\sqrt{r\lambda} k_1 - \frac{rk_L}{\omega^2 y^2(x)} \right],$$

$$b = -\frac{rk_L}{\omega^2 y^2(x)},$$

c_1, c_2, c_3 — константы.

На основании этих формул можно сделать вывод, что для обеспечения эффективного управления необходимо выполнение условий: $a < 0$ и $b < 0$, которые сводятся к неравенствам:

$$k_L > 0$$

$$\sqrt{\frac{\lambda}{r}} k_1 \omega^2 y^2(x) > k_L.$$

Как видно, на величину k_L накладываются существенные ограничения, заметное возрастание k_L допустимо лишь на конечном участке полета, где член $y^2(x)$ достигает больших значений. Таким образом, для обеспечения эффективного управления аппаратом на всех режимах полета требуется информация о рассогласованиях δy , $\delta y'$ и δL . Для задачи 3 достаточно ограничиться сигналами δy и $\delta y'$.

Рассмотрим, каким образом эта информация может быть получена. Как известно, на участке входа в атмосферу перед аппаратом образуется слой ионизированного газа, который препятствует поддержанию радиосвязи между аппаратом и Землей, а также выполнению радиолокационных измерений. Поэтому большинство проектов, относящихся к системам управления при входе в атмосферу, основано на использовании автономных систем, связанных с измерением и интегрированием перегрузок. Наиболее простым вариантом является использование акселе-

рометра, измеряющего продольную перегрузку. Измерение перегрузки n_x позволяет сформировать сигнал $n_x - n_{x \text{ ном}}(V)$, который в соответствии с формулой (6.21) равен

$$\begin{aligned} n_x - n_{x \text{ ном}}(V) &= \delta n_x(V) = \\ &= \delta(\sqrt{r\lambda} y e^{-2x}) = \sqrt{r\lambda} e^{-2x} \delta y. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Определяя производную от этого сигнала по времени с помощью дифференцирующего устройства, можно получить сигнал

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\delta n_x(V)] &= \sqrt{r\lambda} \frac{d}{dt} (e^{-2x} \delta y) = \\ &= \sqrt{r\lambda} \frac{dx}{dt} (e^{-2x} \delta y)' = \lambda \sqrt{r\lambda} e^{-3x} (\delta y' - 2\delta y). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Таким образом, комбинация рассогласований $\delta n_x(V)$ и $\frac{d}{dt} [\delta n_x(V)]$ позволяет получить комбинацию сигналов δy и $\delta y'$. Рассогласование по дальности определяется с помощью формулы (7.9).

Преобразуя эту формулу, получим

$$\begin{aligned} \delta L &= -\sqrt{\frac{r}{\lambda}} \int_{x_0}^x \frac{e^x}{y^2} \delta y dx = \\ &= -\sqrt{\frac{r}{\lambda}} \int_{t_0}^t \frac{e^x}{y^2} \frac{dx}{dt} \delta y dt = -\sqrt{r\lambda} \int_{t_0}^t \frac{\delta n_x(V)}{n_x} dt. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Следовательно, сигнал рассогласования по дальности может быть получен путем интегрирования сигнала $\delta n_x(V)$ по времени с весом $1/n_x$.

Наконец, в качестве аргумента программы вместо скорости можно использовать *кажущуюся скорость* — интеграл от продольной перегрузки.

В действительности кажущаяся скорость не является однозначно связанной с истинной скоростью полета, так как

$$V = V_0 - g \int n_x dt - g \int \sin \theta dt. \quad (7.16)$$

Поэтому вариации члена $g \int \sin \theta dt$ могут оказать некоторое влияние на точность определения скорости.

Аналогичная картина наблюдается при измерении дальности полета. Точная формула для дальности имеет вид

$$L = \int_{t_0}^t V \cos \theta \left(\frac{r}{r+H} \right) dt. \quad (7.17)$$

Формула для вариации дальности (7.15) не учитывает влияния члена $\cos \theta \left(\frac{r}{r+H} \right)$, а также начальных ошибок в скорости и дальности δV_0 и δL_0 .

При рассмотрении описанной схемы может возникнуть сомнение в том, достаточно ли обеспечить сведение к нулю вариации $\delta L(V)$ вместо того, чтобы сводить к нулю «геометрическую» вариацию $\delta H(L)$. Однако, если вспомнить, что траектории спуска в диапазоне докруговых скоростей обладают устойчивостью в плоскости (H, V) , т. е. $\delta H(V) \rightarrow 0$ при $V \rightarrow 0$, то становится ясно, что эти задачи почти эквивалентны.

Другой способ измерения параметров траектории аппарата предусматривает использование гироинерциальной платформы, с помощью которой можно с большой точностью определять координаты и скорости аппарата, H, L, V_y, V_x , конечно, при условии обеспечения высокой точности измерения и интегрирования перегрузок и малых ошибок в начальных условиях. При этом по аналогии с описанной выше схемой в качестве аргумента программы можно использовать вместо интеграла от перегрузки горизонтальную составляющую скорости V_x .

Соответствие между ролью отдельных сигналов в обеих схемах управления может быть установлено следующим образом [106].

1. Производная от рассогласования перегрузки — рассогласование вертикальной скорости V_y .
2. Рассогласование перегрузки — рассогласование высоты H .
3. Интеграл от перегрузки — горизонтальная скорость V_x .
4. Интеграл от рассогласования перегрузки с весом $1/n_x$ — рассогласование дальности.

Номинальные программы изменения параметров траектории могут быть заданы и в функции от времени. Рассмотрение процессов управления приводит в этом случае к использованию четырех сигналов:

$$\dot{\delta n}_x(t), \delta n_x(t), \int_0^t \delta n_x dt \text{ и } \int_0^t \int_0^\tau \delta n_x d\tau dt$$

для схемы с использованием акселерометра, или четырех сигналов:

$$\delta V_y(t), \delta H(t), \delta V_x(t), \delta L(t)$$

для схемы с использованием гироинерциальной платформы.

§ 7.3. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Следуя Р. Уингрову [106], автору широко известных работ, посвященных анализу динамики входа в атмосферу, системы управления можно разделить на два основных класса. Наиболее

простые системы управления основываются на отслеживании номинальной траектории. Более сложные системы управления не связаны с заранее выбранной номинальной траекторией, в них используется прогнозирование оставшегося отрезка траектории до точки посадки на основании информации о текущих координатах и составляющих скорости аппарата. Большое развитие получили также системы, в которых отслеживание номинальной траектории осуществляется на основе линейного прогноза отклонений конечной дальности. Такие системы являются, по существу, промежуточными между двумя классами и поэтому будут рассмотрены особо.

Системы управления с отслеживанием номинальной траектории применимы в тех случаях, когда отклонения от программной траектории не слишком велики.

Рассмотрим один из возможных вариантов такой системы управления [105], близкий к описанному в предыдущем параграфе. В этом варианте закон изменения аэродинамического качества имеет следующий вид:

$$\Delta \frac{c_y}{c_x} = -k_1 \Delta V_y + k_2 \Delta n_x - k_3 \Delta L, \quad (7.18)$$

$$\Delta \frac{c_y}{c_x} = \frac{c_y}{c_x} - \left(\frac{c_y}{c_x} \right)_{\text{НОМ}}, \quad \Delta V_y = V_y - V_{y \text{ НОМ}},$$

где

$$\Delta n_x = n_x - n_{x \text{ НОМ}}, \quad \Delta L = L - L_{\text{НОМ}},$$

причем все номинальные значения заданы в зависимости от горизонтальной скорости V_x . Номинальное аэродинамическое качество определяется законом $\left(\frac{c_y}{c_x} \right)_{\text{НОМ}} = -k_1 V_{y \text{ НОМ}}$, т. е.

$$\frac{c_y}{c_x} = -k_1 V_y + k_2 \Delta n_x - k_3 \Delta L. \quad (7.19)$$

Номинальный угол входа в атмосферу выбран равным $-6,5^\circ$. Коэффициент сопротивления сохраняет постоянное значение, а регулирование эффективной подъемной силы обеспечивается изменением угла крена. Если потребное значение эффективного аэродинамического качества, определяемое по формуле (7.19), превышает по абсолютной величине 0,5, то используется граничное значение $\frac{c_{y \text{ эф}}}{c_x} = 0,5$ или $-0,5$. Можно отметить, что такой закон управления эквивалентен использованию следующих сигналов в уравнении (7.8):

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{c_{y \text{ эф}}}{c_x} \right) = & k_1 \sqrt{\frac{g}{\lambda}} e^{-x} \delta y' + \\ & + k_2 \sqrt{r \lambda} e^{-2x} \delta y + k_3 \sqrt{\frac{r}{\lambda}} \int_{x_0}^x \frac{\delta y}{y^2} dx, \end{aligned} \quad (7.20)$$

что гарантирует, при условии правильного выбора коэффициентов, устойчивость процесса управления. Для того чтобы более четко определить роль каждого из сигналов, в работе [105] приведены результаты расчетов с использованием всех сигналов управления, а также с использованием лишь части этих сигналов.

Если в систему управления включен только один сигнал рассогласования перегрузки ($k_2 = +0,33$), то управляемое движение в плоскости (V, H) имеет колебательный характер, причем коле-

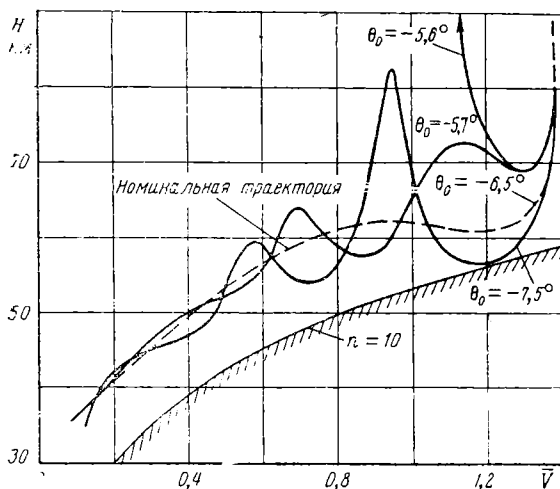


Рис. 7.11. Возмущенное управляемое движение аппарата при входе в атмосферу $\Delta \frac{c_y}{c_x} = 0,33 \Delta n_x$

бания затухают только при малых докруговых скоростях (рис. 7.11).

В том случае, когда в систему включен только сигнал рассогласования вертикальной скорости ($k_1 = -0,0033 \frac{сек}{м}$), процесс является аperiodически неустойчивым при скорости, превышающей круговую, и становится устойчивым лишь при докруговых скоростях (рис. 7.12). При этом накопленные отклонения дальности оказываются очень большими.

Процесс управления становится устойчивым только при включении в систему управления обоих сигналов (рис. 7.13). В этом случае удастся осуществить посадку аппарата, не превышая предельного значения перегрузки, почти для всего диапазона углов входа в атмосферу, попадающих в пределы теоретического коридора входа в атмосферу для $\left| \frac{c_y}{c_x} \right| < 0,5$ (рис. 7.14).

Исключение составляют лишь траектории, примыкающие к верхней границе коридора.

Сигнал рассогласования по дальности включается в систему управления для приведения аппарата в заданный район. Передаточный коэффициент k_3 следует выбирать из условий компромисса между требованиями достаточной эффективности управления дальностью и устойчивости процесса управления. Таким требованиям удовлетворяет значение $k_3 = 0,0005$ 1/км. Если увеличить значение k_3 до 0,0038 1/км, то нарушение устойчивости

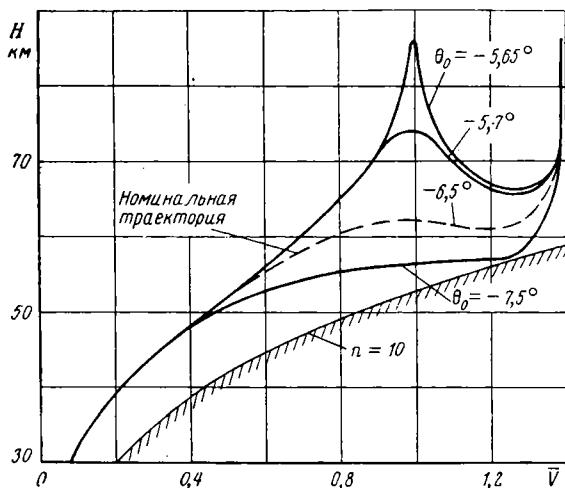


Рис. 7.12. Возмущенное управляемое движение аппарата при входе в атмосферу: $c_y/c_x = -0,0033V_y$

процесса управления может привести к вылету аппарата за пределы атмосферы (рис. 7.15). Возможен и такой вариант управления, когда на участке движения со скоростью, большей круговой, коэффициент k_3 мал или равен нулю, а на участке движения со скоростью, меньшей круговой, этот коэффициент увеличивается.

Эти результаты расчета согласуются с результатами исследования устойчивости процесса управления, о которых говорилось в предыдущем параграфе. Описанная система управления обеспечивает посадку аппарата в заданный район и в ряде аварийных ситуаций, когда скорость входа существенно отличается от номинальной (рис. 7.16).

Управление боковой дальностью представляет более простую задачу. Оно может осуществляться изменением знака угла крена. При этом, если повороты по крену выполняются достаточно быстро, управление боковой дальностью не влияет на управле-

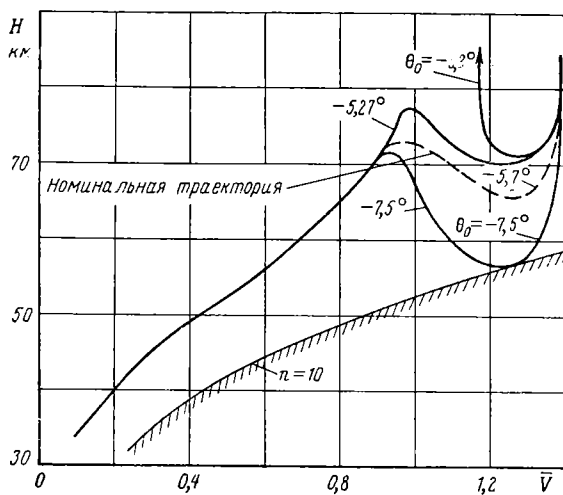


Рис. 7.13. Возмущенное управляемое движение аппарата при входе в атмосферу: $c_y/c_x = 0,33\Delta n_x - 0,0033V_y$

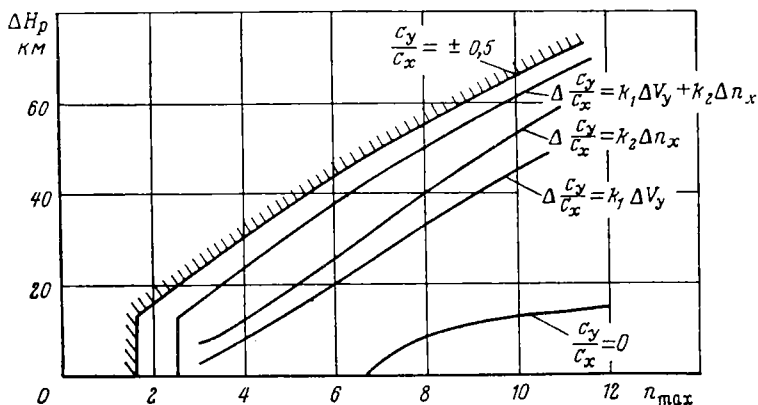


Рис. 7.14. Уменьшение оперативного коридора входа в атмосферу по сравнению с теоретическим при различных законах управления

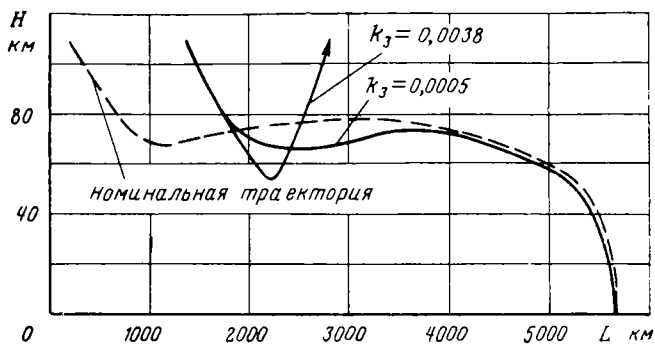


Рис. 7.15. Нарушение устойчивости движения при чрезмерном увеличении передаточного коэффициента k_3

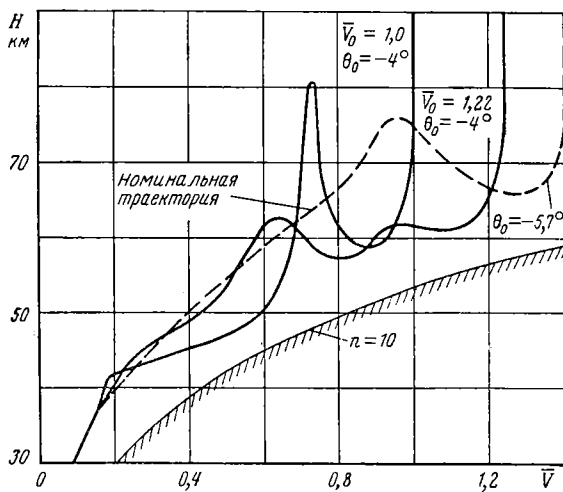


Рис. 7.16. Возмущенное управляемое движение в аварийных ситуациях — при большом отличии скорости входа в атмосферу от номинальной

ние продольной дальностью, поскольку эффективная подъемная сила, пропорциональная $\cos \gamma$, не изменяется при изменении знака угла крена. При разумно выбранном законе управления боковой дальностью число таких поворотов не превышает 4—6 на всей траектории спуска. Структура систем управления, основанных на отслеживании номинальной траектории, может иметь различные формы в зависимости от характера рассматриваемой задачи, в частности, от диапазона скоростей входа в атмосферу (см., например, [95], [72], [94] и др.).

Так, система управления, основанная на отслеживании номинальной программы, может быть сделана достаточно гибкой, если номинальная траектория выбирается не заранее, а определяется с помощью бортовой вычислительной машины незадолго до входа в атмосферу [94]. При этом удастся более точно учесть истинные параметры исходной траектории и взаимное расположение этой траектории и заданного места посадки. Кроме того, с помощью бортовой вычислительной машины можно подобрать оптимальные передаточные коэффициенты в законе управления применительно к выбранной номинальной траектории.

Системы управления, основанные на прогнозировании точки посадки, являются более сложными, так как требуют наличия на борту аппарата быстродействующих вычислительных машин. Эти системы управления рассчитаны на следующую последовательность операций. На основании результатов измерений вычисляются значения координат и составляющих скорости аппарата. Затем задаются различные значения угла крена или угла атаки и с помощью бортового вычислительного устройства проводятся расчеты траектории до места посадки. В результате проведения этих расчетов удается с какой-то степенью точности определить те значения угла крена γ или угла атаки α («падающий» угол атаки), при которых расчетное место посадки совпадает с заданным. С учетом этого на последующем участке полета выставляются некоторые значения угла крена или угла атаки и продолжается процесс проведения измерений, который позволяет снова определить координаты и составляющие скорости аппарата, и так далее.

Очевидно, что вычислительные устройства, используемые в системе управления, должны обладать достаточным быстродействием, так как возникает необходимость за короткое время провести целую серию расчетов траекторий.

Такие системы, несмотря на свою относительную сложность, имеют ряд несомненных преимуществ. Во-первых, отклонения параметров траектории от номинальных могут быть достаточно велики, — это не приводит к ухудшению точности управления. Во-вторых, при выборе оставшегося отрезка траектории с помощью прогнозирования можно учесть ограничения, наложенные на величину максимальной перегрузки, максимального теплового потока, суммарного теплового потока и т. д.

В-третьих, такая схема обеспечивает управление как продольной, так и боковой дальностью полета с учетом их взаимного влияния. Наконец, при управлении аппаратом путем прогнозирования точки посадки можно каждый раз при выборе оставшегося отрезка траектории требовать минимизации какого-нибудь критерия, т. е. по сути дела решать вариационную задачу и получать оптимальное по этому критерию управление.

Системы управления с прогнозированием, как правило, включают в себя навигационный блок, блок прогнозирования конечного промаха и блок собственно управления, определяющий требуемое изменение аэродинамических сил в зависимости от результатов прогноза.

Методы прогнозирования расчета траекторий до точки посадки могут быть разделены на три типа.

Во-первых, расчет траекторий может выполняться с помощью точных уравнений движения, что требует максимального быстрого действия бортовых вычислительных машин.

Во-вторых, для расчета траекторий могут быть использованы аналитические решения, связывающие между собой изменения различных параметров траекторий. При своей относительной простоте этот метод имеет тот недостаток, что траектории должны принадлежать к определенному ограниченному типу, для которого справедливо аналитическое решение, и, кроме того, точность аналитических решений может оказаться недостаточно высокой.

Наконец, возможен промежуточный метод расчета, основанный на использовании полуаналитических методов. В этом случае прогнозирование траектории может осуществляться путем проведения расчетов по приближенным уравнениям движения, например по уравнениям, приведенным в [68], что позволяет существенно ускорить расчет.

Можно назвать несколько примеров, когда для расчета траектории достаточно использовать аналитические формулы. Некоторые из них могут быть получены из решений, приведенных в предыдущей главе, в том числе из решений обратной задачи (§ 6.4).

Если полет происходит на постоянной высоте $H = \text{const}$, то дальность определяется формулой

$$L \approx r \frac{\bar{V}^2}{n_{x_0}} \ln \frac{\bar{V}_0}{\bar{V}},$$

а закон изменения продольной перегрузки по скорости имеет вид

$$n_x = n_{x_0} \left(\frac{\bar{V}}{\bar{V}_0} \right)^2,$$

где n_{x_0} и $\bar{V}_0$ — значения перегрузки и скорости в начале горизонтального участка.

Для траектории с постоянной продольной перегрузкой $n_x = \text{const}$ зависимость дальности от скорости имеет вид

$$L = \frac{r}{2} \frac{\bar{V}_0^2 - \bar{V}^2}{n_x}.$$

При полете с постоянным углом наклона траектории ($\theta = \text{const}$) выполняются соотношения

$$n_x = n_{x_0} \left(\frac{\bar{V}}{\bar{V}_0} \right)^2 + r \lambda \bar{V}^2 \sin \theta \ln \left(\frac{\bar{V}}{\bar{V}_0} \right),$$

$$L = -\frac{c \operatorname{tg} \theta}{\lambda} \ln \left[\frac{n_x}{n_{x_0}} \left(\frac{\bar{V}}{\bar{V}_0} \right)^2 \right].$$

Наконец, для траектории квазистационарного планирования $c_y/c_x = \text{const}$ справедливы приближенные соотношения

$$n_x \approx \frac{c_x}{c_y} (1 - \bar{V}^2),$$

$$L \approx \frac{r}{2} \frac{c_y}{c_x} \ln \frac{1 - \bar{V}^2}{1 - \bar{V}_0^2}.$$

Необходимо отметить, что все упомянутые выше решения справедливы только для аппаратов, у которых коэффициент сопротивления не зависит от эффективной подъемной силы. Это условие выполняется, если регулирование подъемной силы осуществляется изменением угла крена.

Траектория может состоять из нескольких участков, для каждого из которых справедливы различные аналитические формулы. Пример такой траектории изображен на рис. 7.17, [69]. Вначале располагается участок первого снижения — до достижения минимальной высоты, затем следует участок полета с отрицательным аэродинамическим качеством — квазистационарное планирование при скорости, большей круговой, затем полет происходит на постоянной высоте и, наконец, заключительный участок представляет собой квазистационарное планирование с положительным аэродинамическим качеством при скорости, меньшей круговой. Следует отметить, что промежуточные участки полета (например, переход с траектории горизонтального полета на траекторию квазистационарного планирования), не охватываются приведенными выше формулами.

Если траектория включает участок вылета в разреженные слои атмосферы, то возможно применение решений для кеплеровых траекторий.

При выборе метода прогнозирования на основе компромисса между требованиями к точности управления и требованиями к памяти и быстродействию ЦВМ необходимо учитывать сле-

дующее соображение. Возмущения, действующие на аппарат в процессе полета (например, отклонение плотности атмосферы), являются случайными функциями, поэтому прогнозируемое место посадки определяется с точностью до некоторого средне-квадратичного отклонения σ_L , которое убывает по мере движения аппарата. Если ошибка прогнозирования ΔL_k , обусловленная неточным расчетом траектории, не превышает σ_L , она не оказывает существенного влияния на точность управления. Следова-

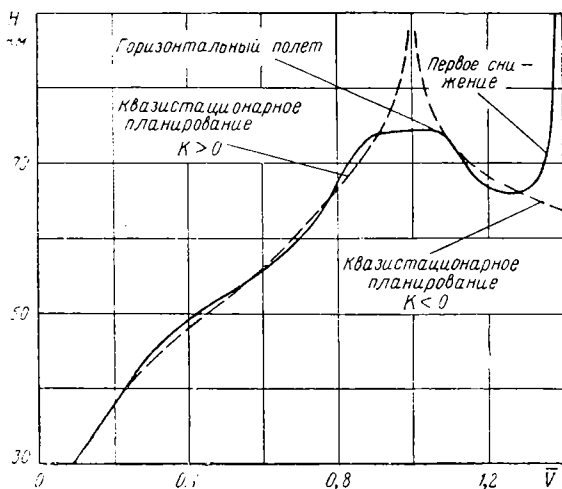


Рис. 7.17. Разделение траектории входа в атмосферу на участки

тельно, рациональным условием выбора допустимой ошибки прогнозирования является соотношение

$$\Delta L_k = \frac{\sigma_L}{2}. \quad (7.21)$$

Управление является эффективным, если суммарная ошибка прогноза может быть компенсирована путем изменения аэродинамических сил, действующих на аппарат (изменения угла атаки или угла крена). Обычно условие эффективности нарушается лишь в окрестности конца траектории. Та часть прогнозируемого промаха, которая остается некомпенсированной к концу процесса управления, называется динамической ошибкой управления.

Другая составляющая промаха, обусловленная неточностью определения координат и составляющих скорости аппарата, называется навигационной ошибкой. В простейшем варианте

координаты аппарата могут быть определены при решении уравнения

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{a} + \bar{g}(\bar{r}), \quad (7.22)$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор в инерциальной системе координат;
 $\bar{a}$ — вектор аэродинамических ускорений (измеряемых);
 $\bar{g}$ — вектор гравитационных ускорений (вычисляемых).

Навигационные ошибки появляются вследствие неточного знания начальных условий, неточного измерения и интегрирования ускорений и т. п. Требования к точности интегрирования уравнения типа (7.22) оказываются весьма жесткими, в отличие от требований к точности прогнозирования, поскольку навигационная ошибка не уточняется в процессе полета, а наоборот, имеет тенденцию к накоплению.

Во многих случаях динамические и навигационные ошибки управления удобно рассматривать по отдельности.

Одна из возможных схем управления, основанных на прогнозировании точки посадки, описана в [60]. Аэродинамическое качество аппарата составляет 0,5. Эффективная подъемная сила регулируется изменением угла крена. Рассматриваются траектории возвращения от Луны, при этом скорость входа в атмосферу составляет около 11 км/сек. В зависимости от даты старта потребная дальность траектории входа в атмосферу изменяется от 4600 до 20 700 км, причем в случае большой дальности полета траектория включает участок вылета в разреженные слои атмосферы. Нижняя граница коридора определяется максимальным значением перегрузки или условием достижения заданной точки посадки. Верхняя граница коридора определяется условием, чтобы высота, достигаемая при вылете аппарата из атмосферы, не превышала 750 км (вследствие радиационной опасности). Траектории, расположенные вблизи верхней границы коридора, оказываются в большей степени чувствительны к влиянию возмущений; кроме того, на этих траекториях возрастает суммарное количество конвективного тепла, поступающего к аппарату. Поэтому ширина «оперативного» коридора входа в атмосферу уменьшается по сравнению с теоретически достижимой величиной (рис. 7.18). Информация о положении и скорости аппарата получается с помощью гироинерциальной платформы, установленной на аппарате.

Для прогнозирования дальности до точки посадки используется приближенное дифференциальное уравнение Чепмена [68], а на участке вылета из атмосферы используются соотношения для кеплеровых траекторий.

Угол крена выставляется в зависимости от рассогласования между требуемой и прогнозируемой дальностью полета. При проведении расчетов на бортовой ЦВМ прогнозируется не только конечная дальность, но также максимальная перегрузка

и максимальная высота вылета. Если вычисленные значения превосходят допустимые пределы ($n_{\max}=10$, $H_{\max}=750$ км), то угол крена изменяется в нужную сторону. Управление боковым движением осуществлялось с помощью поворотов по крену (изменений знака угла крена). Моменты выполнения поворотов определялись следующим образом. Через определенные промежутки времени прогнозируется боковое смещение точки посадки $l_{\text{пр}}$, которое было бы получено при отсутствии боковой аэродинамической силы (это смещение зависит только от текущего бокового смещения и угла курса). Кроме того, на основании предварительных расчетов определяется величина $l(\bar{V})$ —

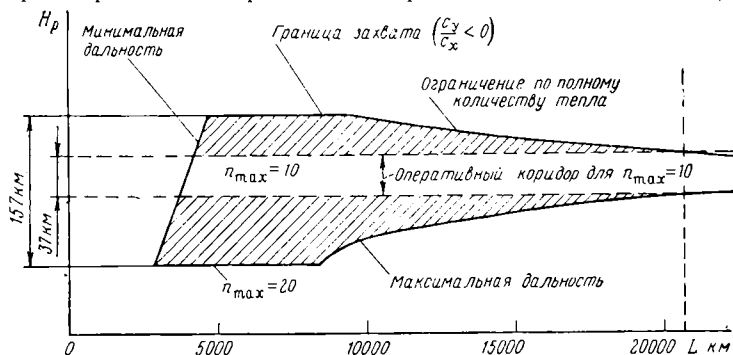


Рис. 7.18. Оперативный коридор входа в атмосферу

боковое смещение точки посадки, которое может быть получено при номинальном угле крена при условии, что текущее боковое смещение и угол курса равны нулю. В те моменты, когда выполняется равенство

$$l_{\text{пр}} = \frac{1}{2} l(\bar{V}), \quad (7.23)$$

происходит изменение знака угла крена. В качестве примера приводится рис. 7.19, иллюстрирующий характер управления боковым движением.

Некоторые результаты расчетов по определению динамических ошибок, полученные по описанной выше схеме, приведены в табл. 7.1, взятой из [60].

Отметим, что в некоторых схемах управления, основанных на прогнозировании точки посадки, предусматривается ряд дополнительных мероприятий, направленных на улучшение качества управления. Так, для учета отклонения плотности атмосферы от номинальной, наряду с определением координат и скоростей аппарата, учитываются результаты измерения продольной перегрузки. Отсюда, зная скорость, высоту и баллистический коэффициент аппарата, можно определить истинную плотность атмосферы и осуществлять прогнозирование с учетом этой по-

правки [35], [73]. При этом эффективность управления повышается по сравнению со случаем, когда в расчет принимается только геометрическая высота (рис. 7.20).

В заключение следует отметить, что значение угла крена γ_b или угла атаки α_b , выставяемого после проведения очередного «сеанса прогнозирования», отличается от прогнозируемого значения γ_n или α_n , которое удовлетворяет требованию о приведении аппарата в заданную точку. Для того чтобы сохранить на

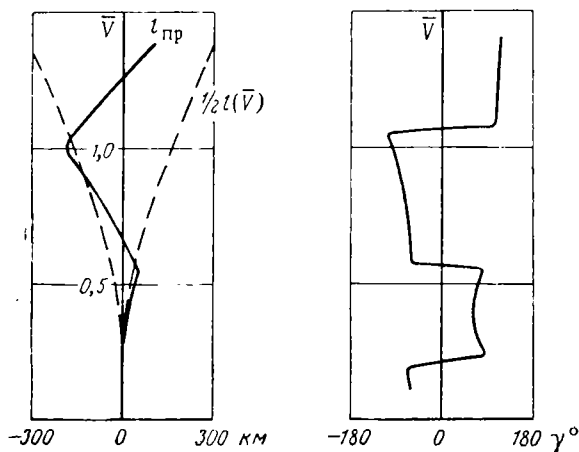


Рис. 7.19. Управление боковой дальностью изменением знака угла крена

оставшейся части траектории большой запас по изменению управляющего воздействия, можно выбирать значение γ_b или α_b , например, следующим образом:

$$\frac{c_y}{c_x}(\alpha_b) = \left(\frac{c_y}{c_x}\right)_{cr} + k \left[\frac{c_y}{c_x}(\alpha_n) - \left(\frac{c_y}{c_x}\right)_{cr} \right], \quad (7.24)$$

где $\left(\frac{c_y}{c_x}\right)_{cr}$ — аэродинамическое качество, соответствующее середине области возможного маневра; k — коэффициент перекомпенсации, больший 1 (рис. 7.21).

Как правило, отрезок времени, через который требуется осуществление повторного прогнозирования, составляет от нескольких секунд до десятков секунд.

Метод управления с использованием *функций влияния* является промежуточным между методом отслеживания номинальной траектории и методом прогнозирования точки посадки. Сущность его сводится к оптимизации передаточных коэффициентов в схеме с отслеживанием номинальной траектории.

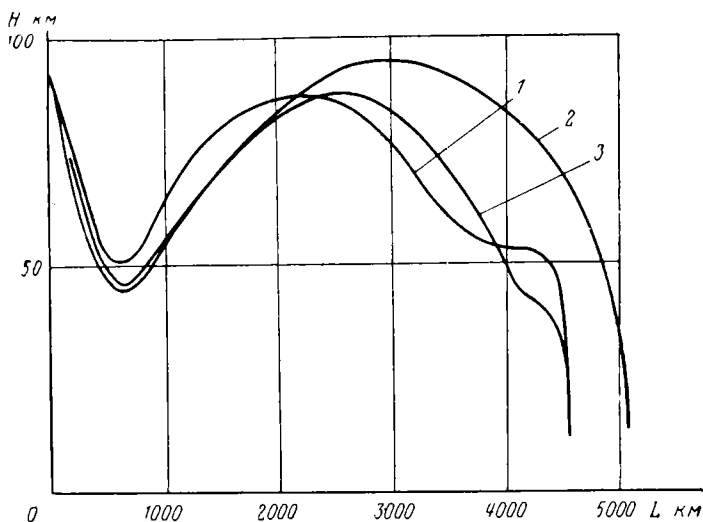


Рис. 7.20. Управление траекторией входа в атмосферу с учетом вычисленной поправки на отклонение плотности атмосферы: 1— $q=q_{ст}$; 2— $q=1/2 q_{ст}$ при $H>30$ км; 3— $q=1/2 q_{ст}$ при $H>30$ км с учетом поправки

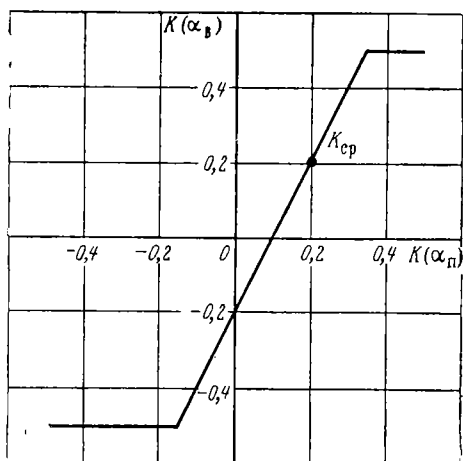


Рис. 7.21. Использование коэффициента перекомпенсации $k=2$

Запишем уравнения движения космического аппарата в векторной форме

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{F}(\bar{x}, \alpha), \quad (7.25)$$

где $\bar{x}$ — вектор, составленный из координат и компонент скорости;

α — скалярное управляющее воздействие (например, угол атаки);

$\bar{F}$ — вектор-функция координат, скоростей и управляющего воздействия;

t — время, дальность, скорость или какой-либо другой параметр траектории, выбранный в качестве аргумента.

Пусть имеется некоторая номинальная траектория — это значит, что заданы номинальные зависимости $\alpha_{\text{ном}}(t)$ и $\bar{x}_{\text{ном}}(t)$, удовлетворяющие уравнению (7.25). Пусть начальные условия, заданные при $t=t_0$, отличаются от номинальных: $\bar{x}(t_0) \neq \bar{x}_{\text{ном}}(t_0)$. Будем считать для простоты, что целью управления является возможно более точное выдерживание первой составляющей вектора $\bar{x}$ — значения x_1 в момент окончания процесса управления T .

Считая, что закон изменения управляющего воздействия $\alpha(t)$ отличается от номинальной зависимости $\alpha_{\text{ном}}(t)$, и обозначая

$$\bar{x}(t) - \bar{x}_{\text{ном}}(t) = \delta\bar{x}(t), \quad \alpha(t) - \alpha_{\text{ном}}(t) = \delta\alpha(t),$$

запишем линеаризованное уравнение в вариациях

$$\frac{d\delta\bar{x}}{dt} = A(t)\delta\bar{x}(t) + \bar{b}(t)\delta\alpha(t), \quad (7.26)$$

где квадратная матрица $A(t)$ составлена из частных производных $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} [\bar{x}_{\text{ном}}(t), \alpha_{\text{ном}}(t)]$, а вектор $\bar{b}(t)$ составлен из производных

$$\frac{\partial F_i}{\partial \alpha} [\bar{x}_{\text{ном}}(t), \alpha_{\text{ном}}(t)].$$

Если начальные условия отличаются от номинальных, то

$$\delta\bar{x}(t_0) = \bar{x}(t_0) - \bar{x}_{\text{ном}}(t_0) \neq 0.$$

Используя метод сопряженных уравнений Блесса (см. приложение I), можно показать, что вариация определяется формулой

$$\delta x_1(T) = \int_{t_0}^T [\bar{\lambda}^{(1)T}(T, \tau) \bar{b}(\tau)] \delta\alpha(\tau) d\tau + \bar{\lambda}^{(1)T}(T, t_0) \delta\bar{x}(t_0), \quad (7.27)$$

где $\bar{\lambda}^{(1)}(T, t_0)$ — вектор функций влияния, определяемых при решении системы сопряженных уравнений.

Управление с использованием коэффициентов влияния в своем простейшем виде основано на использовании соотношения (7.27). Если при известном начальном отклонении вектора $\delta \bar{x}(t_0)$ считать, что на оставшемся интервале времени отклонение $\delta \alpha(t)$ постоянно, то его можно определить с помощью формулы (7.27) из условия $\delta x_1(T) = 0$

$$\delta \alpha(t > t_0) = - \frac{\bar{\lambda}^{(1)T}(T, t_0) \delta \bar{x}(t_0)}{\int_{t_0}^T [\bar{\lambda}^{(1)T}(T, \tau) \bar{b}(\tau)] d\tau} = \bar{h}^T(T, t_0) \delta \bar{x}(t_0). \quad (7.28)$$

Предполагается, что в процессе управления проводятся повторные измерения всех составляющих вектора $\bar{x}$. Тогда в соответствии с (7.27) необходимо заменить вектор-функцию $\bar{h}^T(T, t_0)$ на $\bar{h}^T(T, t)$ и осуществлять управление по закону

$$\delta \alpha = \bar{h}^T(T, t) \delta \bar{x}(t) = \bar{h}^T(t) \delta \bar{x}(t). \quad (7.29)$$

Составляющие вектора $\bar{h}^T(t)$ — функции $h_1(t)$, $h_2(t)$ вычисляются предварительно. В ряде случаев эти составляющие могут быть определены аналитически. Так, например, в [76] рассмотрена система управления траекторией квазистационарного планирования. Предполагается, что измеряются значения высоты H , угла наклона траектории θ , дальности L и скорости V , которая является аргументом системы уравнений в вариациях.

Основное соотношение, аналогичное соотношению (7.27), записывается в следующем виде:

$$\delta L(V_{\text{кон}}) = \lambda_1 \delta H + \lambda_2 \delta \theta + \lambda_3 \delta L + \mu \delta \left(\frac{c_y}{c_x} \right), \quad (7.30)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{2c_x}{c_y(1 - \bar{V}^2)}, \quad \lambda_2 = \frac{r\bar{V}^2}{1 - \bar{V}^2}, \quad \lambda_3 = 1, \\ \mu = \frac{r}{2} \ln \left(\frac{1 - \bar{V}^2}{1 - \bar{V}_{\text{кон}}^2} \right).$$

Если приравнять вариацию $\delta L(V_{\text{кон}})$ нулю, то закон управления приобретает вид

$$\delta \left(\frac{c_y}{c_x} \right) = - \frac{\lambda_1}{\mu} \delta H - \frac{\lambda_2}{\mu} \delta \theta - \frac{\lambda_3}{\mu} \delta L.$$

Такой метод управления с использованием коэффициента влияния эквивалентен методу прогнозирования точки посадки в случае малых отклонений параметров траектории от номинальных при условии, что $\gamma_{\text{в}} = \gamma_{\text{п}}$ (или $\alpha_{\text{в}} = \alpha_{\text{п}}$). Описанный алгоритм большей частью не является удовлетворительным, так как не учитывает влияния ряда факторов: неточного определения текущих параметров траектории, наличия дополнительных возмущений,

таких, например, как возможные отклонения аэродинамических характеристик аппарата, отклонения плотности атмосферы. Поэтому большое распространение получили различные модификации этого метода. Простейшей модификацией является введение коэффициента перекompенсации $k > 1$ в законе (7.28)

$$\delta \alpha = k \bar{h}^T(t) \delta \bar{x}(t). \quad (7.31)$$

Если выбрать коэффициент k очень большим, то система управления приближается к релейной, так как диапазон изменения угла атаки ограничен. Влияние постоянного коэффициента пере-

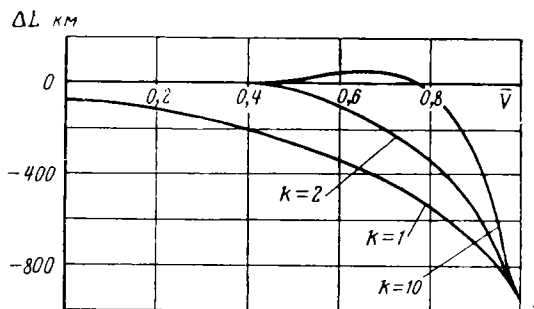


Рис. 7.22. Влияние величины коэффициента перекompенсации на характер управляемого движения

компенсации, большего 1, на характер процесса управления показано на рис. 7.22. Как видно, при $k=1$ система управления неполностью компенсирует начальное отклонение по дальности, но при увеличении k до 2 обеспечивает удовлетворительную точность управления.

В ряде работ переменные коэффициенты перекompенсации подбираются эмпирическим путем, причем законы изменения этих коэффициентов оказываются различными для различных сигналов управления. Для примера можно привести рис. 7.23 из работы [89], где показаны коэффициенты перекompенсации k_1 и k_2 , подобранные для закона управления

$$\delta \left(\frac{c_y}{c_x} \right) = k_1 h_1(V) \delta V_y(V) + k_2 h_2(V) \delta n_x(V) + h_3(V) \delta L(V). \quad (7.32)$$

Как видно, значения коэффициентов перекompенсации зависят от требуемой дальности атмосферного участка траектории и скачком изменяются при переходе от сверхкруговой скорости (первое погружение в атмосферу) к докруговой скорости (второе погружение в атмосферу).

Одной из интересных модификаций схемы управления с использованием коэффициентов влияния является так называемый

метод λ -матричного управления [61], [62], который основан на выборе переменных передаточных коэффициентов из условий наиболее экономного использования управляющего воздействия. В простейшем случае закон отклонения управляющего воздействия подбирается таким образом, чтобы скомпенсировать влияние измеренных отклонений параметров траектории и, вместе с тем, обеспечить минимум интеграла от квадрата отклонения управляющего воздействия (угла крена или угла атаки).

Системы управления, рассчитанные на решение задачи 3 (см. § 7.1) — вывод аппарата на стационарную орбиту около планеты после торможения в атмосфере, могут быть основаны на любом из трех перечисленных принципов. В [108] рассматривается система управления аппаратом, входящим в атмосферу Марса со скоростью, в 3—4 раза превышающей местную круговую скорость.

Задача заключается в том, чтобы вывести аппарат, подлетающий к Марсу, на орбиту спутника Марса. Торможение аппарата до местной круговой скорости может быть выполнено и с помощью тормозных двигателей. Однако, даже с учетом весовых затрат, необходимых для обеспечения теплозащиты аппарата, атмосферное торможение, позволяет получить большую экономию стартового веса, если используется двигатель большой тяги.

Одним из наиболее важных возмущений в случае входа в атмосферу «чужой» планеты является отклонение плотности атмосферы. Система управления способна скомпенсировать влияние довольно больших отклонений плотности атмосферы — так, при отклонении логарифмического градиента плотности

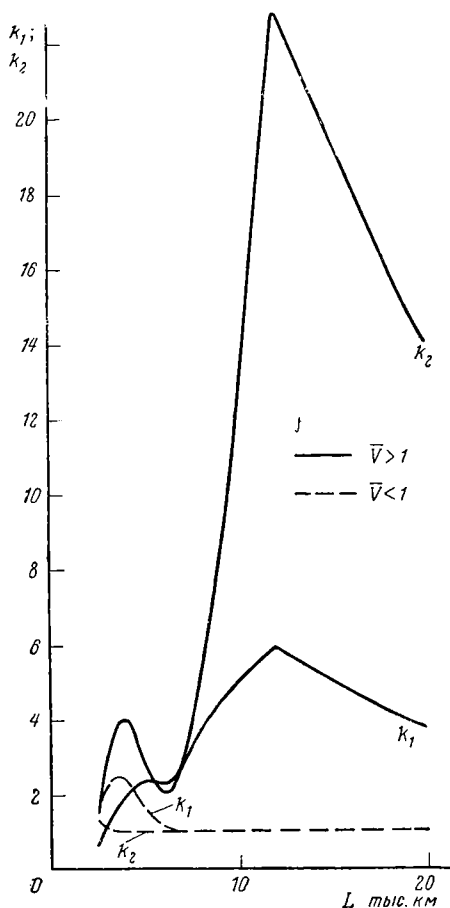


Рис. 7.23. Зависимость коэффициентов перекомпенсации от дальности траектории входа в атмосферу

атмосферы Марса $\Delta\lambda/\lambda = \pm 0,25$ отклонение высоты апогея траектории вылета из атмосферы составляет лишь ± 10 км.

При торможении аппарата в атмосфере имеется возможность изменить плоскость орбиты по отношению к исходной плоскости орбиты. Если регулирование подъемной силы осуществляется путем изменения угла крена, то изменение плоскости орбиты характеризуется углом $\Delta\psi$, который приближенно равен:

$$\Delta\psi = \int_{V_{\text{кон}}}^{V_{\text{нач}}} \frac{c_y}{c_x} \sin \gamma \frac{dV}{V}. \quad (7.33)$$

Траектория входа в атмосферу Земли завершается предпосадочным участком, на котором могут применяться вспомогательные посадочные устройства: парашюты, паропланеры, роторные устройства, тормозные двигатели мягкой посадки. Посадку самолетного типа могут осуществлять аппараты с большим аэродинамическим качеством — порядка 5 и выше. Вопросы управления аппаратом на этом участке рассматриваются в работах [63], [79] и др.

§ 7.4. РУЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ВХОДЕ В АТМОСФЕРУ

Как правило, при проектировании систем управления космическими летательными аппаратами стремятся к возможно более полной автоматизации процессов управления полетом, чтобы в максимальной степени облегчить поставленные перед космонавтом задачи и предотвратить возможность ошибок пилотирования. Кроме того, человек, находящийся на борту аппарата, может выполнять целый ряд операций, дополняя автоматическую систему управления. К ним, в первую очередь, относится контроль над работой автоматических систем управления, всесторонняя оценка поступающей информации, опознавание аварийных ситуаций, отбрасывание ложной или сомнительной информации. Если самочувствие человека удовлетворительно, он может взять на себя и основные задачи по управлению аппаратом, причем человек иногда оказывается в состоянии выполнить эти задачи и при выходе из строя некоторых элементов системы управления.

Работа человека осложняется при воздействии аэродинамических перегрузок в процессе управления аппаратом. Степень воздействия перегрузки на организм человека зависит от величины, направления и времени действия перегрузки (рис. 7.24), [77].

Результаты исследования возможности человека осуществлять управление полетом аппарата на участке входа в атмосферу приведены в [107] и [108].

При проведении экспериментов использовался комплекс, включающий центрифугу, с помощью которой моделировались перегрузки, действующие на пилота, и быстродействующую вычислительную машину, на которой были запрограммированы уравнения управляемого движения аппарата. Предполагалось, что пилот имеет возможность с помощью струйных органов управлять поворотами аппарата относительно трех различных осей. Управление движением крена осуществлялось в двух ва-

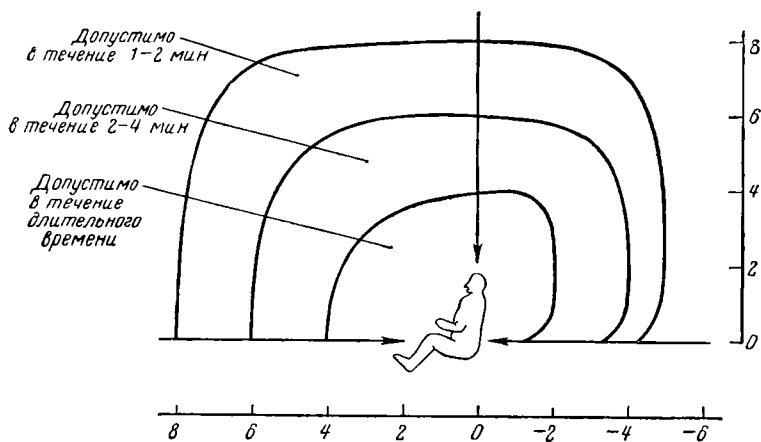


Рис. 7.24. Влияние направления и времени действия перегрузки на чувствительность пилота

риантах. В первом варианте отклонение ручки управления вызывало появление углового ускорения по крену, равного 10 град/сек^2 . Во втором варианте отклонение ручки приводило к появлению угловой скорости крена, пропорциональной отклонению ручки, с ошибкой, не превосходящей в среднем 1 град/сек , что обеспечивалось специальной замкнутой системой регулирования. Максимально возможная угловая скорость, достигаемая при максимальном отклонении ручки, составляла 20 град/сек . Для управления движением тангажа и рыскания достаточно лишь обеспечить демпфирование — создать реакцию системы управления на угловые скорости, поскольку устойчивый аппарат имеет достаточную аэродинамическую статическую устойчивость по тангажу и рысканию. Это демпфирование может осуществляться с помощью автоматической системы или пилотом.

Испытания проводились для двух случаев.

1. Работа пилота облегчена в максимальной степени, если управление креном осуществляется по второму варианту, а демпфирование колебаний тангажа и рыскания выполняется автоматической системой. В этом случае, по сути дела, управление

короткопериодическим движением аппарата происходит автоматически.

2. Более трудные задачи стоят перед пилотом, если управление креном осуществляется по первому варианту, а демпфирование движений тангажа и рыскания должен выполнять пилот, так как в этом случае допустимо лишь небольшое запаздывание.

Пилот располагается в кабине, на приборную доску которой выведены индикаторы следующих параметров:

- 1) угла крена;
- 2) производной угла рыскания;
- 3) производной угла тангажа;
- 4) отклонения угла крена;
- 5) производной от перегрузки;
- 6) перегрузки;
- 7) скорости;
- 8) прогнозируемого бокового отклонения точки посадки;
- 9) дальности;
- 10) времени.

Участие пилота в управлении космическим летательным аппаратом на траектории входа в атмосферу может предусматриваться при различных методах управления как в схеме с отслеживанием номинальной траектории, так и в схеме с прогнозированием точки посадки.

Простейшей задачей, которая может стоять перед пилотом, является управление полетом в аварийной ситуации, когда условия входа существенно отличаются от расчетных или автоматическая система управления выходит из строя. Тогда перед пилотом ставится ограниченная задача — обеспечить захват атмосферой и безопасную посадку аппарата, не превышая предельно допустимой перегрузки. Простейшим способом выполнения этой задачи является выход на траекторию с постоянной перегрузкой. Пилот способен выполнить эту задачу, имея в распоряжении лишь грубый датчик угла крена и акселерометр. Конечно, при этом не выполняется условие посадки аппарата в заданный район.

Следует отметить, что для полной характеристики систем ручного управления необходимо оценивать не только качество работы этих систем, но и степень трудности осуществления управления. Для оценки степени трудности используется специальная десятибалльная шкала, разработанная Купером [70]. Пилоты, проходящие испытания, оценивают степень трудности на основании своих субъективных ощущений, причем результаты опроса пилотов осредняются. Считается, что оценка, не превосходящая 3,5, указывает на то, что выполнение необходимых операций не вызывает затруднений и возможно в нормальных условиях. Оценка от 3,5 до 6,5 указывает на то, что выполнение операций связано с определенными трудностями и возможно лишь в аварийных ситуациях. Оценка более 6,5 указывает, что

на выполнение предусмотренных операций практически рассчитывать нельзя.

Результаты испытаний показали, что наиболее приемлемым значением постоянной перегрузки, которую может отслеживать пилот, является 3. При этом амплитуда отклонений от заданной перегрузки составляет около 0,2, а оценка по шкале трудности равняется в среднем 3,5. Эти испытания проводились как в статических условиях при остановленной центрифуге, так и в условиях воздействия перегрузок. Оценка трудности выполнения за-

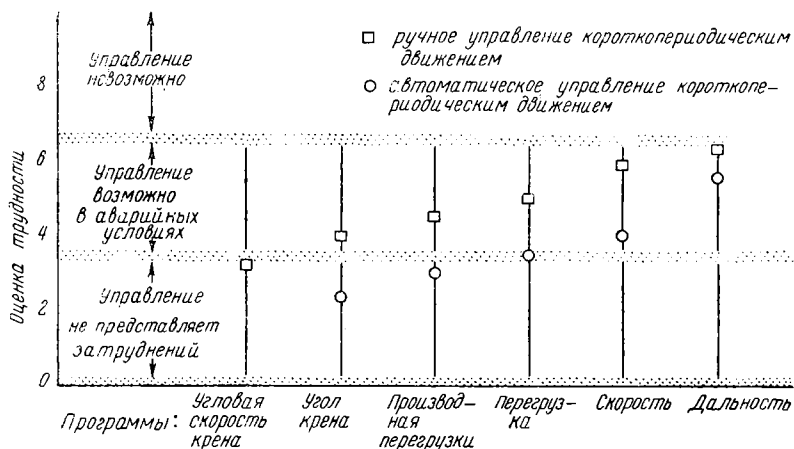


Рис. 7.25. Оценка различных вариантов системы ручного управления при входе в атмосферу по шкале Купера

дания при воздействии перегрузок увеличивалась весьма незначительно, не более, чем на 0,5, если значение перегрузки не превосходило 6.

Более сложные задачи стоят перед пилотом в том случае, когда требуется осуществить посадку аппарата в заданный район. Исследования возможностей пилота по управлению дальностью точки посадки проводились при различных способах задания программы управления.

Результаты этих исследований схематически изображены на рис. 7.25. Пилот, отклоняя ручки, включает и выключает струйные органы управления, создающие момент крена. Угол крена пропорционален двойному интегралу от момента крена. Вертикальная скорость определяется интегралом от эффективной подъемной силы, зависящей от угла крена. Высота определяется интегралом от вертикальной скорости, скорость — интегралом от перегрузки, зависящей от высоты полета. Наконец, дальность определяется интегралом от скорости (рис. 7.26). Таким образом, процесс управления описывается системой шестого порядка. Результаты экспериментов показывают, что задачи, поставлен-

ные перед пилотом, упрощаются при переходе от отслеживания программы изменения дальности к отслеживанию программы изменения высших производных дальности (скорости, перегрузки и т. д.). Это следует из понижения оценок степени трудности. На рис. 7.25 каждому варианту соответствуют две оценки — для случаев, когда управление короткопериодическим движением аппарата осуществляется автоматически и вручную (они были описаны выше). Ошибки управления также убывают при задании программы изменения высших производных дальности.

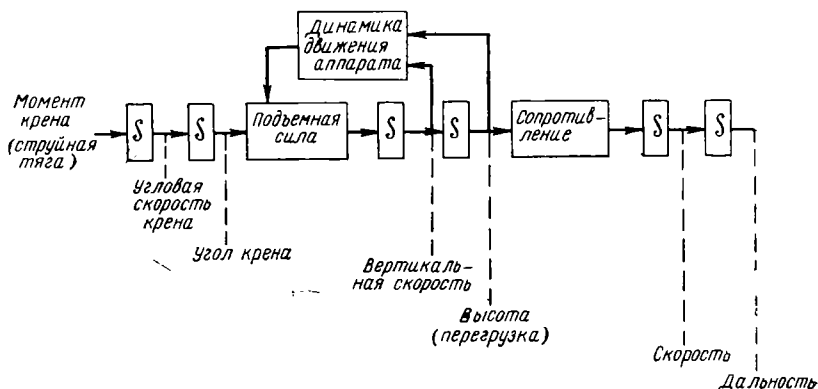


Рис. 7.26. Связь между параметрами углового и траекторного движения аппарата и управляющим моментом

На пилота можно возложить также и контроль над возможностью вылета аппарата из плотных слоев атмосферы. Граница захвата может быть аппроксимирована уравнением

$$n_x = k_V (V - V_{кр}) - k_n \dot{n}_x. \quad (7.34)$$

Если при функционировании ручной или автоматической системы аппарат приближается к границе, описываемой соотношением (7.34), загорается предупредительная лампочка, пилот отключает автоматическую систему управления и выставляет угол крена, равный 180° , после чего управляет аппаратом в зависимости от конкретных обстоятельств.

Подробное описание системы ручного управления, связанной с прогнозированием дальности, приведено в [104]. Скорость входа в атмосферу принята равной второй космической скорости. Аппарат имеет возможность изменять угол атаки таким образом, что аэродинамическое качество изменяется от 0 до 0,5, а также изменять угол крена. Бортовая вычислительная машина прогно-

зирует положение точки посадки с помощью приближенных уравнений Чепмена при следующих значениях параметров.

1. $\frac{c_y}{c_x} = 0,5$, $\gamma = 0$ (максимальная дальность полета $L_{\max}$).
2. $\frac{c_y}{c_x} = 0$, $\gamma = 0$ (минимальная дальность полета $L_{\min}$).
3. $\frac{c_y}{c_x} = 0,5$, $\gamma = 45^\circ$ (максимальная боковая дальность $l_{\max}$).
4. Значения $\frac{c_y}{c_x}$ и γ являются постоянными, равными текущим значениям.

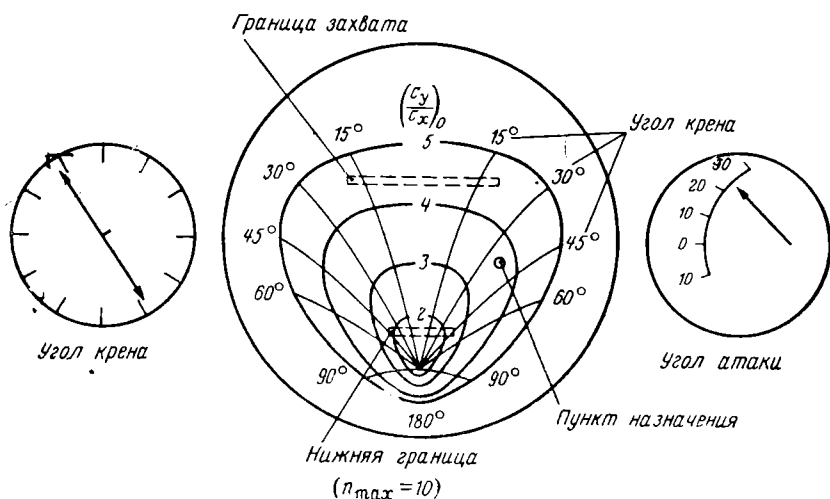


Рис. 7.27. Индикаторы, используемые при ручном управлении аппаратом на участке входа в атмосферу

Индикатор, который используется пилотом, представляет собой экран диаметром в 12 см, на котором прогнозируемая точка посадки имеет координаты

$$y = \frac{L - L_{\min}}{L_{\max} - L_{\min}}, \quad x = \frac{l}{l_{\max}}.$$

Кроме того, бортовая вычислительная машина определяет значения c_y/c_x , при которых достигается предельно допустимая перегрузка и максимальная допустимая высота вылета аппарата из атмосферы. Эти значения также выводятся на экран индикатора (рис. 7.27).

Имея в распоряжении эту информацию, пилот может осуществлять посадку в заданную точку, не нарушая ограничений по максимальной величине перегрузки и максимальной высоте вылета.

Интересно отметить некоторые особенности, связанные с управлением космическим летательным аппаратом при входе в атмосферу Земли или планеты со скоростью, существенно (в 2—3 раза) превышающей круговую. Как уже говорилось выше, коридор входа в атмосферу сужается с ростом скорости входа в атмосферу. При движении вдоль верхней границы коридора необходимо использовать отрицательную подъемную силу вплоть до достижения круговой скорости полета. При движении вдоль нижней границы коридора необходимо вначале использо-

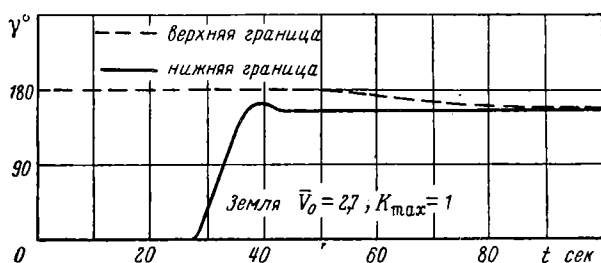


Рис. 7.28. Изменение угла крена аппарата при полете вдоль нижней и верхней границ коридора в случае входа в атмосферу Земли с большой скоростью

вать положительную подъемную силу, а затем во избежание вылета из атмосферы изменить знак эффективной подъемной силы (рис. 7.28). При полете с большой сверхкруговой скоростью возмущенное движение является неустойчивым и случайные отклонения возрастают очень быстро. Поэтому большую роль приобретает скорость выполнения операций управления аппаратом. Если управление сводится к изменению угла крена, то угловые скорости и угловые ускорения крена должны быть достаточно велики — так, угловая скорость крена должна быть не менее 10—20 град/сек, а угловое ускорение — не менее 2—5 град/сек². В противном случае при полете вдоль нижней или верхней границы коридора не удастся достаточно быстро выставить нужный угол крена и аппарат может вылететь из плотных слоев атмосферы с большой скоростью, либо наоборот, перегрузка может превысить предельно допустимое значение. То же относится к времени упреждения при выполнении поворотов по крену. Так, если полет происходит вдоль нижней границы коридора входа в атмосферу, то выполнение поворота по крену от 0 до 180° должно происходить в строго определенный момент времени. Задержка этого момента приводит к вылету аппарата из атмосферы, а слишком ранняя перекладка по крену вызывает увеличение перегрузки свыше допустимых пределов (рис. 7.29). Поскольку человек обладает определенным запаздыванием при выполнении сложных операций управления аппаратом, он ока-

зывается не в состоянии осуществлять управление аппаратом при полете вблизи границ коридора. В итоге оперативный коридор входа в атмосферу для аппаратов, управляемых вручную,

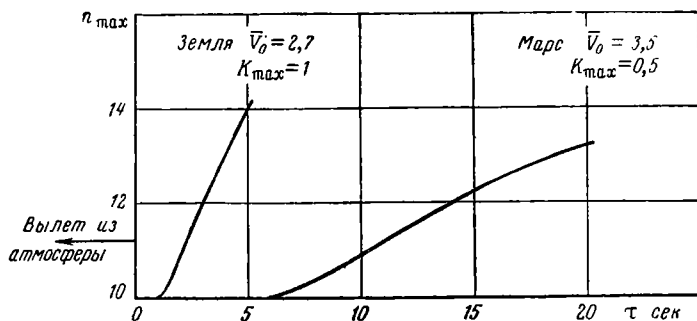


Рис. 7.29. Влияние запаздывания в отработке поворота по крену на максимальное значение перегрузки:

τ — опережение при выполнении поворота при полете вдоль нижней границы

оказывается заметно суженным по сравнению с теоретическим коридором входа и при скоростях входа в атмосферу порядка 20 км/сек исчезает. Это иллюстрируется рис. 7.30, взятым из

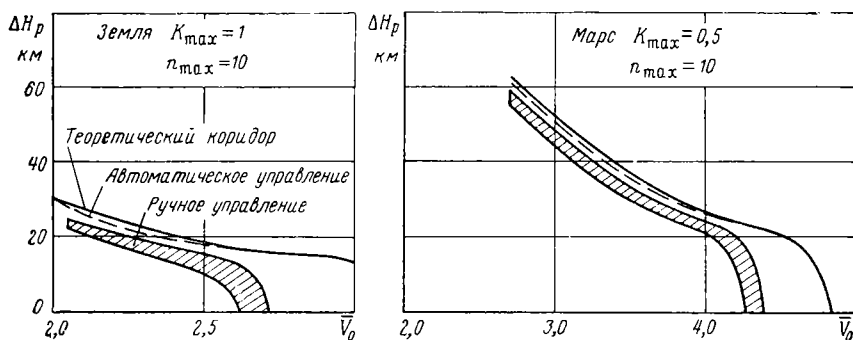


Рис. 7.30. Уменьшение оперативного коридора входа по сравнению с теоретическим коридором входа при автоматическом и ручном управлении аппаратом на участке входа в атмосферу

[107]; границы оперативного коридора входа в атмосферу при ручном управлении оказываются несколько «размытыми», поскольку у различных пилотов способность к быстрому выполнению операций проявлялась по-разному.

Таблица 7.1

Угол входа <i>град</i>	Дальность до места посадки <i>км</i>		Макси- мальные перегрузки	Q для кри- тической точки <i>ккал/м²</i>	Высота апогея при вылете из атмосферы <i>км</i>	Конечная ошибка в дальности в <i>км</i>		Количество поворотов по крену
	про-ольная	боко- вая				продольная	боко- вая	
-7,5	20800	0	9,9	148	630	-0,7	2,5	2
-7,5	14800	0	9,9	151	372	-0,1	-1,3	4
-7,5	9250	0	9,9	151	204	-0,3	0,9	3
-7,5	2780	0	10,0	151	—	19,5	-8,3	4
-7,5	14800	740	10,0	154	369	-0,6	-208	0
-7,5	9250	370	10,0	152	202	0	0,7	4
-7,5	9250	740	10,0	161	182	0,4	0,3	5
-6,0	20800	0	6,3	170	404	-0,2	5,1	5
-6,0	14800	0	6,4	179	243	-0,6	-2,1	5
-6,0	9250	0	6,6	166	165	-0,6	4,1	6
-6,0	14800	370	6,6	168	160	-0,2	5,5	4
-4,65	3700	185	8,8	214	—	-3,7	10,2	1

МЕТОД БЛИССА

Метод Блисса широко используется для определения функций влияния, связанных с системой линейных дифференциальных уравнений [48].

Рассмотрим систему уравнений в векторной форме

$$\frac{d\bar{x}}{dt} - A(t)\bar{x} = \bar{\varphi}, \quad (I.1)$$

где $\bar{x}$ и $A(t)$ — вектор и квадратная матрица n -го порядка;

$\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ — вектор правых частей.

Запишем сопряженную систему уравнений

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} + A^T(t)\bar{\lambda} = 0, \quad (I.2)$$

где $\bar{\lambda}$ — также вектор n -го порядка;

$A^T(t)$ — матрица, транспонированная к $A(t)$.

Транспонируем систему уравнений (I.2)

$$\frac{d\bar{\lambda}^T}{dt} + (A^T(t)\bar{\lambda})^T = \frac{d\bar{\lambda}^T}{dt} + \bar{\lambda}^T A(t) = 0. \quad (I.3)$$

Умножим уравнение (I.1) на $\bar{\lambda}^T$ слева, а уравнение (I.3) — на $\bar{x}$ справа и сложим полученные уравнения. В результате получим

$$\bar{\lambda}^T \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{d\bar{\lambda}^T}{dt} \bar{x} = \frac{d}{dt} (\bar{\lambda}^T \bar{x}) = \bar{\lambda}^T \bar{\varphi}, \quad (I.4)$$

или в скалярной форме

$$\frac{d}{dt} (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = (\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_n \varphi_n).$$

Если нас интересует значение $x_1(T)$, то уравнение (I.2) следует решать для $t \leq T$ при начальных условиях:

$$\bar{\lambda}^{(1)}(T) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (\text{I.5})$$

Интегрируя (I.4) по t от t_0 до T , получим

$$\begin{aligned} x_1(T) &= \lambda_1^{(1)}(t_0) x_1(t_0) + \dots + \lambda_n^{(1)}(t_0) x_n(t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^T [\lambda_1^{(1)}(t) \varphi_1(t) + \dots + \lambda_n^{(1)}(t) \varphi_n(t)] dt = \\ &= \bar{\lambda}^{(1)T} x(t_0) + \int_{t_0}^T [\bar{\lambda}^{(1)T}(t) \bar{\varphi}(t)] dt. \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

Таким образом, решение системы уравнений (I.2) при начальных условиях (I.5) дает возможность определить функции влияния начальных отклонений и правых частей в (I.1) на величину $x_1(T)$. Аналогичным образом можно определить функции влияния $\bar{\lambda}^{(2)}(t), \dots, \bar{\lambda}^{(n)}(t)$ для величин $x_2(T), \dots, x_n(T)$. Для этого необходимо соответствующим образом видоизменять начальные условия (I.5).

Объединяя векторы $\bar{\lambda}^{(1)}(t), \dots, \bar{\lambda}^{(n)}(t)$ в матрицу и транспонировав полученную матрицу, можно определить матрицу перехода порядка $n \times n$:

$$\begin{aligned} \Lambda(T, t) &= [\bar{\lambda}^{(1)}, \bar{\lambda}^{(2)} \dots \bar{\lambda}^{(n)}]^T = \\ &= \begin{vmatrix} \bar{\lambda}^{(1)T} \\ \bar{\lambda}^{(2)T} \\ \dots \\ \bar{\lambda}^{(n)T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1^{(1)} & \lambda_2^{(1)} & \dots & \lambda_n^{(1)} \\ \lambda_1^{(2)} & \lambda_2^{(2)} & \dots & \lambda_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{(n)} & \lambda_2^{(n)} & \dots & \lambda_n^{(n)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ОЦЕНОК И КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ В РЕЗУЛЬТАТЕ ПРОВЕДЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Приведем краткий приближенный вывод формулы, описывающей изменение оценки вектора состояния $\delta \bar{r}$ и корреляционной матрицы вектора состояния в результате проведения совокупности измерений.

Пусть исходная оценка вектора $\delta\bar{r}$ в момент времени $t_* = 0$ составляет

$$\widehat{\delta r}(t_* - 0) = \widehat{\delta r}_-, \quad (\text{II. 1})$$

а корреляционная матрица равна

$$K(t_* - 0) = M \left[\left(\widehat{\delta r}_- - \bar{\delta r} \right) \left(\widehat{\delta r}_- - \bar{\delta r} \right)^T \right] = K_-. \quad (\text{II. 2})$$

В момент времени t_* измеряется вектор (совокупность измерений)

$$\bar{\delta \varepsilon} = G \bar{\delta r} + \bar{\delta \varepsilon}, \quad (\text{II. 3})$$

где G — некоторая матрица;

$\bar{\delta \varepsilon}$ — вектор ошибок измерений, которые имеют нулевые математические ожидания и образуют корреляционную матрицу

$$M \left[\bar{\delta \varepsilon} \bar{\delta \varepsilon}^T \right] = R. \quad (\text{II. 4})$$

Будем считать, что ошибки измерений коррелированы между собой, но некоррелированы с ошибками ранее проведенных измерений. Отметим, что в частном случае, когда ошибки измерений отдельных компонент вектора $\delta\bar{e}$ некоррелированы между собой, матрица R является диагональной.

В результате оценки и корреляционная матрица вектора $\delta\bar{r}$ изменяются: $\widehat{\delta r}_- \rightarrow \widehat{\delta r}_+$, $K_- \rightarrow K_+$. Очевидно, что мерой несогласованности прежней оценки $\widehat{\delta r}_-$ и результатов измерений является величина $\bar{\delta \varepsilon} - G \widehat{\delta r}_-$, поэтому ищем новую оценку в виде

$$\widehat{\delta r}_+ = \widehat{\delta r}_- + L \left(\bar{\delta \varepsilon} - G \widehat{\delta r}_- \right), \quad (\text{II. 5})$$

где L — неизвестная пока матрица. Определим эту матрицу из условия, что скалярная величина

$$\Phi = M \left[\left(\widehat{\delta r}_+ - \bar{\delta r} \right)^T B \left(\widehat{\delta r}_+ - \bar{\delta r} \right) \right] \quad (\text{II. 6})$$

достигала минимума.

Здесь B — любая положительно определенная симметричная неособенная матрица. Например, если B — единичная матрица, то Φ представляет собой сумму дисперсий координат:

$$\Phi = \sum_{i=1}^6 M \left[\left(\widehat{\delta r}_{i+} - \bar{\delta r}_i \right)^2 \right].$$

Нетрудно видеть, что

$$\Phi = \text{tr}(BK_+), \quad (\text{II. 7})$$

где tr — «след» квадратной матрицы, сумма диагональных членов.

Подберем матрицу L так, чтобы величина Φ достигала экстремума

$$\delta\Phi = \delta \text{tr}(BK_+) = \text{tr}(B\delta K_+) = 0, \quad (\text{II. 8})$$

но

$$\begin{aligned} K_+ &= M \left[\left(\hat{\delta r}_+ - \bar{\delta r} \right) \left(\hat{\delta r}_+ - \bar{\delta r} \right)^T \right] = \\ &= (I - LG) K_- (I - G^T L^T) + LRL^T, \end{aligned} \quad (\text{II. 9})$$

где I — единичная матрица, так как в соответствии с (II.3) и (II.5)

$$\hat{\delta r}_+ - \bar{\delta r} = (I - LG) \left(\hat{\delta r}_- - \bar{\delta r} \right) + L\tilde{\delta z}.$$

Отсюда вариация матрицы K_+ , обусловленная вариацией матрицы L , составляет

$$\begin{aligned} \delta K_+ &= \delta L \left[-GK_- (I - G^T L^T) + RL^T \right] + \\ &+ \left[-(I - LG)K + G^T + LR \right] \delta L^T = \delta LA + (\delta L \cdot A)^T, \end{aligned} \quad (\text{II. 10})$$

где $A = -GK_- (I - G^T L^T) + RL^T$,

т. е.

$$\delta\Phi = \text{tr} \{ B[\delta LA + (\delta LA)^T] \}. \quad (\text{II. 11})$$

Легко проверить, что для любых квадратных матриц выполняются соотношения:

$$\text{tr}(A_i A_j) = \text{tr}(A_j A_i),$$

$$\text{tr} A_k = \text{tr} A_k^T.$$

Поэтому

$$\text{tr} [B(\delta LA)^T] + \text{tr} [(\delta LA)B] = \delta\Phi = 2\text{tr}(B\delta LA). \quad (\text{II. 12})$$

Для выполнения условия $\delta\Phi = 0$ необходимо, чтобы все элементы матрицы A равнялись нулю. Предположим противное, пусть некоторый элемент $a_{ij} \neq 0$. Тогда подберем матрицу $\bar{A}$, все элементы которой равны нулю, кроме элемента $\bar{a}_{ji}$, равного 1. Легко видеть, что $\text{tr}(\bar{A}A) = a_{ij}$. С другой стороны, по-

сколькx вариация δL является произвольной, определим ее из соотношения

$$B\delta L = \varepsilon \tilde{A} \quad (\text{II. 13})$$

(ε — некоторая бесконечно малая величина).

Соотношение (II. 13) разрешимо относительно δL , так как матрица B — неособенная:

$$\delta L = B^{-1} \varepsilon \tilde{A}. \quad (\text{II. 14})$$

В итоге получим

$$\delta \Phi = 2\varepsilon a_{ij} \neq 0,$$

что приводит к противоречию. Следовательно,

$$A = -GK_-(I - G^T L^T) + R L^T = 0, \quad (\text{II. 15})$$

или

$$\begin{cases} L^T = (R + GK_- G^T)^{-1} GK_-, \\ L = K_- G^T (R + GK_- G^T)^{-1} \end{cases} \quad (\text{II. 16})$$

(независимо от конкретного вида матрицы B !).

Подставляя это выражение в (II. 9), найдем, что

$$K_+ = K_- - K_- G^T (R + GK_- G^T)^{-1} GK_-. \quad (\text{II. 17})$$

Если матрицы K_- и R_- — неособенные, это выражение можно привести к виду

$$K_+ = (G^T R^{-1} G + K_-^{-1})^{-1}. \quad (\text{II. 18})$$

В частном случае, когда измеряется одна величина, вектор $\delta \bar{\varepsilon}$ переходит в скаляр $\delta \varepsilon_i$, матрица G переходит в вектор-строку $\bar{g}^T$, матрица R переходит в скаляр σ_i^2 . Легко видеть, что формулы (II. 5), (II. 16) и (II. 18) переходят при этом в формулы (5. 44) и (5. 45).

Как видно, при выводе формул не использовалось допущение о гауссовском распределении случайных величин, однако формула для изменения оценки произвольно задавалась в виде линейной функции результатов измерений. Те же формулы можно получить, исходя из принципа максимума правдоподобия (см., например, [28]), если считать распределения всех случайных величин гауссовскими. В общем случае при негауссовском распределении оценка $\delta \hat{\bar{r}}$, полученная исходя из принципа максимума правдоподобия, является нелинейной функцией результатов измерений.

Определим корреляционную матрицу приращения оценки $\widehat{\delta r}_+ - \widehat{\delta r}_-$. Для этого прежде всего запишем

$$\delta \bar{z} - G \delta \widehat{r}_- = \widetilde{\delta z} + G (\delta \bar{r} - \delta \widehat{r}_-),$$

откуда вследствие независимости векторов $\widetilde{\delta z}$ и $\delta \bar{r} - \delta \widehat{r}_-$ следует, что

$$M \left[(\delta \bar{z} - G \delta \widehat{r}_-) (\delta \bar{z} - G \delta \widehat{r}_-)^T \right] = R + G K_- G^T. \quad (\text{II. 19})$$

Тогда на основании соотношений (II. 5) и (II. 17) получим

$$\begin{aligned} M \left[\left(\widehat{\delta r}_+ - \widehat{\delta r}_- \right) \left(\widehat{\delta r}_+ - \widehat{\delta r}_- \right)^T \right] &= L (R + G K_- G^T) L^T = \\ &= K_- G^T (R + G K_- G^T)^{-1} G K_- = K_- - K_+. \end{aligned} \quad (\text{II. 20})$$

Аналогичным путем можно доказать, что приращение оценки некоррелировано с предыдущей оценкой

$$M \left[\left(\widehat{\delta r}_+ - \widehat{\delta r}_- \right) \widehat{\delta r}_-^T \right] = 0. \quad (\text{II. 21})$$

Рассмотрим статистический характер изменения оценки вектора конечного промаха при проведении измерений, считая, что управление отсутствует, а возмущения сводятся к разбросу начальных условий. Тогда, учитывая, что $\delta \bar{b} = C(T, t) \delta \bar{r}$, где $C(T, t) = F \Lambda(T, t)$ (см. 5.52), получим

$$K_b = M \left[(\delta \widehat{b} - \delta \bar{b}) (\delta \widehat{b} - \delta \bar{b})^T \right] = C K C^T,$$

$$\widehat{\delta b} = C \delta \widehat{r}.$$

Нетрудно видеть, что на интервалах, где измерения отсутствуют

$$K_b = \text{const}, \quad \delta \widehat{b} = \text{const}$$

в силу свойства переходной матрицы

$$\Lambda(T, t_2) \Lambda(t_2, t_1) = \Lambda(T, t_1).$$

Далее, из соотношений (II. 20) и (II. 21) следует, что

$$M \left[(\delta \widehat{b}_+ - \delta \widehat{b}_-) (\delta \widehat{b}_+ - \delta \widehat{b}_-)^T \right] = K_b - K_{b+}, \quad (\text{II. 22})$$

$$M \left[(\delta \widehat{b}_+ - \delta \widehat{b}_-) \delta \widehat{b}_-^T \right] = 0. \quad (\text{II. 23})$$

В итоге изменение оценки конечного промаха по мере проведения измерений сводится к прибавлению независимых друг от

друга случайных приращений с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, равными $K_{b-} - K_{b+}$. Управление (выполнение корректирующих импульсов) изменяет оценку конечного промаха, но не изменяет корреляционной матрицы этой оценки, если ошибками управления (погрешности выполнения корректирующих импульсов) можно пренебречь.

При выводе указанных формул были для простоты использованы допущения о независимости ошибок измерений, проведенных в разные моменты времени, и об отсутствии непрерывно действующих возмущений. Однако можно показать (см. [54]), что формулы II. 22 и II. 23 остаются справедливыми и при отсутствии этих допущений.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Метод ВКБ (метод Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна [46]) применяется для приближенного построения решений системы линейных дифференциальных уравнений с медленно изменяющимися коэффициентами.

Большая часть исследований, посвященных применению этого метода (иногда его называют также асимптотическим методом), относится к уравнению второго порядка. Приведем метод построения асимптотических решений для системы произвольного порядка в форме, предложенной А. И. Курьяновым.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau)\bar{x}. \quad (\text{III. 1})$$

Здесь $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор; $A(\tau)$ — матрица порядка $n \times n$, составленная из коэффициентов $a_{ij}(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$, где ε — параметр малости, обозначающий, что коэффициенты a_{ij} изменяются медленно.

Если коэффициенты матрицы A являются постоянными величинами, то решением системы (III. 1) является линейная комбинация

$$\bar{x} = C_1 \bar{p}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n \bar{p}^{(n)} e^{\lambda_n t}, \quad (\text{III. 2})$$

где λ_i — корни уравнения;
 $|\lambda I - A| = 0$ — (I — единичная матрица; (III. 3)

C_i — постоянные величины, определяемые из начальных условий;

$\bar{p}^{(i)}$ — собственные векторы — решения уравнений

$$\lambda_i \bar{p}^{(i)} = A \bar{p}^{(i)}. \quad (\text{III. 4})$$

Ограничимся случаем, когда все корни различны.

По аналогии с (III. 2) ищем решение системы (III. 1) с медленно изменяющимися коэффициентами в виде линейной комбинации решений, порождаемых различными корнями уравнения

$$|\lambda(\tau) I - A(\tau)| = 0. \quad (\text{III. 5})$$

Будем считать, что все корни $\lambda_1(\tau) \dots \lambda_n(\tau)$ остаются различными в рассматриваемом диапазоне изменения τ .

Итак, рассмотрим любой из корней уравнения (III. 5) $\lambda(\tau)$ и будем искать порождаемое им решение в виде

$$\bar{x} = \{\bar{p}_0(\tau) + \varepsilon \bar{p}_1(\tau) + \dots\} e^{\int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau} \quad (\text{III. 6})$$

Тогда

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \{\lambda(\tau) \bar{p}_0(\tau) + \varepsilon [\bar{p}_0'(\tau) + \lambda \bar{p}_1(\tau)] + \dots\} e^{\int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau} \quad (\text{III. 7})$$

(штрих обозначает дифференцирование по τ).

Подставляя (III. 6) и (III. 7) в систему (III. 1) и выделяя члены нулевого порядка малости, получим

$$\lambda(\tau) \bar{p}_0(\tau) = A(\tau) \bar{p}_0(\tau). \quad (\text{III. 8})$$

Поскольку $\lambda(\tau)$ является корнем уравнения (III. 5), однородное уравнение (III. 8) имеет решение [25], если компоненты вектора $\bar{p}_0$ пропорциональны минорам $\Delta_i(\tau)$ какой-нибудь строки определителя $|\lambda(\tau) I - A(\tau)|$ — они известны с точностью до неопределенного пока множителя $C(\tau)$:

$$\bar{p}_0(\tau) = C(\tau) \begin{pmatrix} \Delta_1(\tau) \\ \vdots \\ \Delta_n(\tau) \end{pmatrix}. \quad (\text{III. 9})$$

Для того чтобы определить функцию $C(\tau)$, выделим в уравнении (III. 1), в которое подставлены выражения (III. 6) и (III. 7), члены первого порядка, пропорциональные ε ,

$$\lambda \bar{p}_1(\tau) - A(\tau) \bar{p}_1(\tau) = -\bar{p}_0'(\tau). \quad (\text{III. 10})$$

Поскольку определитель (III. 5) равен нулю, неоднородное уравнение (III. 10) имеет решение для $\bar{p}_1$ только в том случае, когда правая часть (III. 10) совместна с однородным уравнением [25]. Условие совместности можно получить, заменяя в определителе (III. 5) любой из столбцов вектором $\bar{p}_0'(\tau)$ и приравнявая нулю измененный определитель. Но, поскольку

$$\bar{p}_0'(\tau) = C'(\tau) \begin{pmatrix} \Delta_1(\tau) \\ \vdots \\ \Delta_n(\tau) \end{pmatrix} + C(\tau) \begin{pmatrix} \Delta_1'(\tau) \\ \vdots \\ \Delta_n'(\tau) \end{pmatrix}, \quad (\text{III. 11})$$

условие совместности приводит к дифференциальному уравнению вида

$$a(\tau)C'(\tau) + b(\tau)C(\tau) = 0 \quad (\text{III. 12})$$

с решением

$$C(\tau) = C(\tau_0) e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{b(\tau)}{a(\tau)} d\tau}, \quad (\text{III. 13})$$

что позволяет определить вектор $\bar{p}_0(\tau)$.

Описанная процедура применяется поочередно для построения всех решений, порождаемых различными корнями уравнения (III. 5). Если в какой-либо точке два корня уравнения (III. 5) совпадают или становятся очень близки, то построенные решения перестают быть справедливыми. Кроме того, следует помнить, что приближенные решения справедливы лишь в случае медленного изменения коэффициентов матрицы A .

Рассмотрим простейший пример

$$\frac{d^2x}{dt^2} - a(\tau)x = 0, \quad (\text{III. 14})$$

или

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a(\tau) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix},$$

где

$$y = \frac{dx}{dt}.$$

Корнями характеристического уравнения являются $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a(\tau)}$. Рассмотрим корень $\lambda_1 = \sqrt{a(\tau)}$. Матрица $(\lambda_1 I - A)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} \sqrt{a(\tau)} & -1 \\ -a(\tau) & \sqrt{a(\tau)} \end{vmatrix}. \quad (\text{III. 15})$$

Найдем вектор $\bar{p}_0$, вычисляя миноры определителя этой матрицы для элементов второй строки:

$$\bar{p}_0(\tau) = C(\tau) \begin{vmatrix} 1 \\ \sqrt{a(\tau)} \end{vmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{p}'_0(\tau) &= C'(\tau) \begin{vmatrix} 1 \\ \sqrt{a(\tau)} \end{vmatrix} + \\ &+ C(\tau) \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{a'(\tau)}{2\sqrt{a(\tau)}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C'(\tau) \sqrt{a(\tau)} + C(\tau) \frac{a'(\tau)}{2\sqrt{a(\tau)}} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Заменяя вектором $\bar{p}_0'(\tau)$ первый столбец матрицы (III.15) и приравняв определитель полученной матрицы нулю, получим

$$\begin{vmatrix} C'(\tau) & -1 \\ C'(\tau)\sqrt{a(\tau)} + C(\tau)\frac{a'(\tau)}{2\sqrt{a(\tau)}} & \sqrt{a(\tau)} \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{III. 16})$$

откуда следует, что

$$C(\tau) = \frac{C_1}{\sqrt[4]{a(\tau)}}.$$

Таким образом, решение порождаемое первым корнем, записывается в виде

$$x_1 \approx \frac{C_1}{\sqrt[4]{a(\tau)}} e^{\int_{t_0}^t \sqrt{a(\tau)} dt},$$

$$y_1 \approx C_1 \sqrt[4]{a(\tau)} e^{\int_{t_0}^t \sqrt{a(\tau)} dt}.$$

Аналогично решение, порождаемое корнем $\lambda_2 = -\sqrt{a(\tau)}$, имеет вид

$$x_2 = \frac{C_2}{\sqrt[4]{a(\tau)}} e^{-\int_{t_0}^t \sqrt{a(\tau)} dt},$$

$$y_2 = C_2 \sqrt[4]{a(\tau)} e^{\int_{t_0}^t \sqrt{a(\tau)} dt}.$$

Константы C_1 и C_2 определяются из начальных условий. Если $a(\tau) < 0$, то общее решение удобнее представить через линейные комбинации комплексных решений $\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[4]{-a(\tau)}} \left[C_1 \sin \int_{t_0}^t \sqrt{-a(\tau)} dt + C_2 \cos \int_{t_0}^t \sqrt{-a(\tau)} dt \right], \\ y = \sqrt[4]{-a(\tau)} \left[C_1 \sin \int_{t_0}^t \sqrt{-a(\tau)} dt - C_2 \cos \int_{t_0}^t \sqrt{-a(\tau)} dt \right]. \end{cases} \quad (\text{III. 17})$$

Выписанные решения несправедливы, если функция $a(\tau)$ переходит через нуль.

Условие применимости полученных решений имеет вид [46]

$$\left| \frac{5}{16} \frac{\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2}{a^3} - \frac{d^2a}{4a^2 d\tau^2} \right| \ll 1.$$

Литература

1. Александров С. Г., Федоров Р. Е., Советские спутники и космические ракеты, изд-во АН СССР, 1959.
2. Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г., Управление космическим летательным аппаратом, изд-во «Машиностроение», 1964.
3. Бебенин Г. Г., Ориентация и управление полетом. Справочник по космонавтике, Воениздат, 1966.
4. Белецкий В. В., О траекториях космических полетов с постоянным вектором реактивного ускорения, «Космические исследования», 1964, т. II, вып. 3.
5. Белецкий В. В., Егоров В. А., Разгон космического аппарата сферой действия планеты, «Космические исследования», 1964, т. II, вып. 3.
6. Беттин Р., Наведение в космосе, изд-во «Машиностроение», 1966.
7. Биберман Л. М., и др., Радиационный нагрев при гиперзвуковом обтекании, «Космические исследования», 1964, т. I, вып. 3.
8. Богуславский И. А., О статически оптимальной импульсной коррекции космического полета, «Кибернетика», 1966, № 1.
9. Боднер В. А., Теория автоматического управления полетом, Физматгиз, 1964.
10. Борн Д. С., Критерии качества ручного управления орбитальной встречей, «Вопросы ракетной техники», 1965, № 9.
11. Вентцель Е. С., Теория вероятностей, Физматгиз, 1960.
12. Волосов В. М., Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанные с усреднением, «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1963, т. III, № 1.
13. Воробьев Л. М., Навигация космических кораблей, Воениздат, 1964.
14. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В., Механика космического полета с малой тягой, Физматгиз, 1966.
15. Дубошин Г. Н., Небесная механика, Физматгиз, 1963.
16. Евтушенко Ю. Г., Влияние касательного ускорения на движение спутника, «Прикладная математика и механика», 1966, т. 30, № 1.
17. Егоров В. А., Пространственная задача достижения Луны, изд-во «Наука», 1965.
18. Жуков А. Н., Лебедев В. Н., Вариационная задача о перелете между геоцентрическими круговыми орбитами с помощью солнечного паруса. «Космические исследования», 1964, т. II, вып. 1.
19. Иванов Ю. Н., Токарев В. В., Шалаев Ю. В., Оптимальные траектории и оптимальные параметры космических аппаратов с двигателями ограниченной мощности, «Космические исследования», 1964, т. I, вып. 3.
20. Ильин В. А., Переход космического аппарата, тормозящегося в атмосфере, на орбиту искусственного спутника, «Инженерный журнал АН СССР», 1963, вып. 2.

21. Карымов А. А., Определение сил и моментов сил светового давления, действующих на тело при движении в космическом пространстве, ПММ, 1962, т. 26, № 5.
22. Кротов В. Ф., Основная задача вариационного исчисления на совокупности разрывных функций, Доклады АН СССР, 1961, т. 137, № 1.
23. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, Изд-во АН СССР, 1937.
24. Кузмак Г. Е., Исследование оптимальных многоимпульсных перелетов между близкими квазикруговыми некомпланарными орбитами, «Космические исследования», 1967, т. 5, вып. 5 и 6.
25. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, Гостехиздат, 1965.
26. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, Физматгиз, 1958.
27. Лебедев В. Н., Расчет движения космического аппарата с малой тягой, изд-во ВЦ АН СССР, 1968.
28. Ли Р., Оптимальные оценки, определение характеристик и управление, изд-во «Наука», 1966.
29. Лондон Г., Некоторые точные решения уравнений движения космического корабля с солнечным парусом, Сб. переводов «Механика», № 1 (65), 1961.
30. Лох У., Динамика и термодинамика спуска в атмосфере планет, изд-во «Мир», 1968.
31. Лурье А. И., Аналитическая механика, Физматгиз, 1962.
32. Лурье А. И., Черемисин М. К., Движение материальной точки в поле центральной силы тяготения при наличии малой трансверсальной тяги, Сб. «Искусственные спутники Земли», № 16, 1963.
33. Нейланд В. Я., Снигирев Ю. И., Тепловой режим летательного аппарата при скоростях входа в атмосферу Земли, близких к 15 км/сек, «Космические исследования», 1967, т. V, вып. 2.
34. Охоцимский Д. Е., Исследование движения в центральном поле под действием постоянного касательного ускорения, «Космические исследования», 1964, т. II, вып. 6.
35. Охоцимский Д. Е. и др., Оптимальное управление при входе в атмосферу, «Космические исследования», 1969, т. IV, вып. 1.
36. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М., Таратынова Г. П., Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты, «Успехи физических наук», 1957, т. 63, вып. 1а.
37. Платонов А. К., Исследование свойств корректирующих маневров в межпланетных полетах, «Космические исследования», 1966, т. VI, вып. 5.
38. Платонов А. К., Дашков А. А., Кубасов В. Н., Доклад на I симпозиуме ИФАК «Автоматическое управление в мирном использовании космического пространства», Ставангер, 1965.
39. Пономарев В. М., Теория управления движением космических аппаратов, Физматгиз, 1965.
40. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Мищенко Е. Ф., Гамкрелидзе Р. В., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.
41. Румянцев В. В., Об устойчивости стационарных движений, ПММ, 1966, т. 30, № 5.
42. Смольяков Э. Р., Оптимизация коридора входа в атмосферу, «Космические исследования», 1968, т. VI, вып. 1.
43. Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937.
44. Уколов И. С., Тюлин Е. А., Митрошин Э. И., Управление космическим летательным аппаратом на участке входа в атмосферу с помощью систем переменной структуры, «Космические исследования», 1967, т. V, вып. 6.
45. Феоодосьев В. И., Синярев В. Г., Введение в ракетную технику, Оборонгиз, 1960.
46. Хединг Д., Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ), Изд-во «Мир», 1965.
47. Цитрон С., Данин С., Мейссингер Г., Метод наведения на ко-

печном участке для посадки на Луну, Ракетная техника и космонавтика (русский перевод), изд-во «Мир», № 3, 1964.

48. Цянь-Сюэ-Сэнь, Техническая кибернетика, ИЛ, 1956.

49. Шварцбейн, Джерстен, Смит, Точное аналитическое решение уравнений задачи встречи, Вопросы ракетной техники, 1965, № 6.

50. Шиллов А. А., О некоторых особенностях одноимпульсного перехода космического аппарата на новую орбиту, «Инженерный журнал АН СССР», 1964, № 4.

51. Эрик К., Космический полет, т. 1, Физматгиз, 1963.

52. Ярошевский В. А., Приближенный расчет траекторий входа в атмосферу, «Космические исследования», 1964, т. II, вып. 4 и 5.

53. Ярошевский В. А., Применение асимптотического метода к некоторым задачам динамики летательных аппаратов, «Инженерный журнал АН СССР», 1962, т. II, вып. 2.

54. Ярошевский В. А., Синтез статистически оптимальных линейных систем управления конечным параметром, Труды ЦАГИ, 1968, вып. 1090.

55. Ярошевский В. А., Парышева Г. В., Оптимальное распределение корректирующих импульсов при однопараметрической коррекции, «Космические исследования», 1965, т. III, вып. 6.

56. Космические траектории, Сб. переводов, ИЛ, 1963.

57. Allen A., Eggers A., A study of the motion and aerodynamic heating of ballistic missiles entering the earth's atmosphere at high hypersonic speeds, NACA Report, 1958, No. 1381.

58. Battin R., A comparison of fixed and variable time of arrival navigation for interplanetary flight, „Proceedings of the 5-th Symposium on ballistic missile and space technology”, 1960, vol. III.

59. Ch. Bock, Ch. Mundo, Guidance techniques for interplanetary travel, ARS J., 1959, No. 12.

60. Bryant J., Frank M., An automatic long range guidance system for a vehicle entering at parabolic velocity, IAS Paper 62—87, 1962.

61. Bryson A., Denham W., Guidance scheme for supercircular re-entry of a lifting vehicle, ARS J., 1962, No. 6.

62. Bryson A., Denham W., Multivariable terminal control for minimum mean square deviation from a nominal path, „Proceedings of the IAS Symposium on vehicle systems optimisation”, 1961.

63. Campbell J., Low-speed aerodynamic research related to the landing of space vehicles, „Aerodynamics of space vehicles”, 1962.

64. Carlson R., Swenson B., Maneuvering flight within earth—entry corridors at hypersonic speeds, AIAA, Paper. 65—19.

65. Carroll J., Lillestrand R., Error contours in interplanetary navigation, „Navigation”, 1964, vol. 11, No. 2.

66. Cashmore D., The role of inertial equipment, Journal of the British interplanetary Society, 1961, No. 4.

67. Chapman D., An analysis of the corridor and guidance requirements for supercircular entry into planetary atmospheres, NASA TR, 1959, No. R-55.

68. Chapman D., An approximate analytical method for studying entry into planetary atmospheres, NASA TR, 1959, No. R-11.

69. Chapman P. W., Moonan P. I., Analysis and evaluation of a proposed method for inertial reentry guidance of a deep space vehicle, Proc. IRE, National Aerospace Electronics Conference, Dayton, Ohio, May 14—16, 1962.

70. Cooper G., Understanding and interpreting pilot opinion, Aerospace, Engineer, Revu, March 1957, vol. 16, No. 3.

71. Denham W., Speyer J., Optimal measurement and velocity correction programs for midcourse guidance, AIAA J., 1964, No. 5.

72. Detra R., Kantrowitz A., Riddell F., Rose P., The drag brake manned satellite system, X-th International Astronautical Congress, 1959.

73. Dow P., Fields D., Scammel F., Automatic reentry guidance at escape velocity, „Guidance and control. Progress in astronautics and rocketry 1961”, 1962, vol. 8.

74. Eggers A., The possibility of a safe landing, „Space Technology”, 1959.
75. Eggers A., Allen H., Neice S., A comparative analysis of the performance of long-range hypervelocity vehicles, NACA Report, 1958, No. 1382.
76. Eggers A., Cohen N., Progress and problems in atmosphere entry, XVI-th IAF International Congress, 1965.
77. Eggleston J., Cheatham D., Piloted entries into earth's atmosphere, IAS, Paper № 59—98, 1959.
78. Ferri A., Feldman L., Daskin W., The use of lift for reentry from satellite trajectories, Jet propulsion, 1957, No. 11.
79. Friedenthal M., Control of reentry from orbit, „Transactions of the 7-th Symposium on ballistic missile and space technology”, 1962, vol. 2.
80. Calman B., Some fundamental considerations for lifting vehicles in return from satellite orbit, Planetary and Space Sciences, 1961, vol. 4.
81. Harry D., Friedlander A., An analysis of errors and requirements of an optical guidance technique for approaches to atmospheric entry with interplanetary vehicles, NASA TR, 1961, No. R-102.
82. Irwing I. H., Low thrust flight: variable exhaust velocity in gravitational fields Space Technology, 1959, vol. 10, No. 4.
83. Kalman R., Bucy R., New results in linear filtering and prediction theory, Journal of Basic Engineering, 1961, vol. 83, series D, No. 1.
84. Kemp N., Riddell F., Heat transfer to satellite vehicles reentry the atmosphere, Jet Propulsion, 1957, No. 2.
85. Kizner W., A method of describing miss distances for lunar and interplanetary trajectories, „Planetary and Space Sciences”, 1961, vol. 7.
86. Lass H., Lorell I., Low acceleration take-off from a satellite orbit, Journal of American Rockets Society, 1961, 31, No. 1.
87. Lawden D., Fundamentals of space navigation, Journal of the British Interplanetary Society, 1954, No. 2.
88. Lawden D. J., Optimal programming of rocket thrust direction, Astronaut. Acta 1955, vol. 1, No. 1.
89. Lessing U., Tunnel P., Coate R., Lunar landing and long-range earth re-entry guidance by application of perturbation theory, Journal of Spacecraft and Rockets, 1964, vol. 1, No. 2.
90. Levine P., Analysis of planetary entry problems associated with manned space vehicles, IAS Paper No. 62—162, 1962.
91. Low G., Nearly circular transfer trajectories for descending satellites, NASA TR, 1959, No. R-3.
92. Nonweiler T., The skip rocket, Aeronautics, 1958, No. 5.
93. Nonweiler T., The motion of an earth satellite on re-entry to the atmosphere, Astronautica Acta, 1959, No. 1.
94. Perlmutter L., Carter J., Reference trajectory re-entry guidance without pre-launch data storage, AIAA, Paper No. 65—48.
95. Reismann H., Pistiner J., Design and evaluation of a re-entry guidance system, Astronautica Acta, 1960, No. 2—3.
96. Rider L., Low thrust correction of orbital orientation, Journal of American Rockets Society, 1960, vol. 30, No. 7.
97. H. Safren, Differential correction method of interplanetary navigation, „Proceedings of the national Specialists Meeting on Guidance of Aerospace Vehicles”, 1960.
98. Shapland D., Price D., Hearne L., A configuration for re-entry from Mars missions using aerobraking, AIAA Paper No. 64—480, 1964.
99. Sibulkin M., Heat transfer near the forward stagnation point of a body of revolution, JAS, 1952, No. 8.
100. Skidmore L., Penzo P., Monte Carlo Simulation of the midcourse guidance for lunar flight, IAS Paper, No. 12, 1962.
101. Stern R., Potter J., Optimisation of midcourse velocity corrections, International Federation of Automatic Control Symposium in the Peaceful Uses of Space, 1965.
102. Striebel C., Breakwell J., IAS Preprint, 1963, No. 63—80.

103. Tsien H. S., „Take off from satellite orbit”, Journal of Amer Rockets Society, 1953, vol. 23, No. 4.
 104. Wingrove R., Coate R., Piloted simulation studies of re-entry guidance and control at parabolic velocities, IAS Paper No. 61—195, 1961.
 105. Wingrove R., Coate R., Lift control during atmosphere entry from supercircular velocity, Proceedings of the national meeting on manned space flight, 1962.
 106. Wingrove R. C., A survey of atmosphere reentry guidance and control methods, IAS, Paper, No. 63—86, 1963.
 107. Wingrove R. C., Guidance and control in supercircular atmosphere entry, International Federation of Automatic Control, Symposium in the Peaceful Uses of Space, 1965.
 108. Wingrove R. C., Trajectory control problems in the planetary entry of manned vehicles. Proceedings of AIAA Entry Technology Conference, AIAA, CP-9, 1964.
 109. Wingrove R. C., An analysis of minimum heat trajectories for entry at hyperbolic speeds. AIAA Paper, No. 67—59, 1959.
 110. Zee C. H., Low constant tangential thrust spiral trajectories AIAA, 1963, vol. 1, No. 7.
 111. AIAA J., 1964, vol. 34, No. 3; 1963, vol. 33, No. 1, No. 7.
 112. AIAA J., 1964, vol. 34, No. 6.
 113. ARS J., 1959, vol. 29, No. 6, No. 12.
 114. ARS Journal, 1960, vol. 30, No. 10.
 115. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 1.
 116. ARS Journal, 1962, vol. 32, No. 1, No. 6.
 117. Astronautica acta, 1959, vol. 5, No. 1; 1960, vol. 6, No. 2—3.
 118. Astronautica acta, 1961, vol. 7, No. 5—6.
 119. Astronautics Journal, 1962, vol. 67, No. 5.
 120. Astronautics, 1961, No. 4; 1962, No. 11, No. 12.
 121. Astronautics and Aerospace Engineering, 1963, vol. 1, No. 1, No. 2.
 122. Aviation Week and Space Technology, 1963, vol. 79, No. 8.
 123. Doc-Air-Espace, 1963, No. 80.
 124. Planetary and Space Sciences, 1961, vol. 4.
 125. Progress Astronautics and Rocketry, 1962, vol. 8.
 126. Journal Spacecraft and Rocket, 1964, vol. 1, No. 5.
 127. Journal of the British interplanetary Society, 1961, No. 4.
 128. Space Aeronautics, 1963, vol. 40, No. 2.
 129. Space Aeronautics, 1964, vol. 42, No. 4.
 130. Translations ASME of Heat Transfer, 1959, vol. 81, No. 3.
-

Оглавление

	Стр.
Предисловие	3
Введение	5
Глава I. Космический полет и задачи управления	9
§ 1.1. Законы орбитального движения	9
§ 1.2. Орбитальное движение в поле земного тяготения	21
§ 1.3. Орбитальное движение в солнечной системе	30
Глава II. Основы орбитального маневрирования	42
§ 2.1. Виды орбитальных маневров	42
§ 2.2. Маневры под действием импульсной тяги	55
§ 2.3. Импульсные маневры орбитального перехода	72
§ 2.4. Маневры под действием непрерывной тяги	90
Глава III. Маневрирование при встрече	109
§ 3.1. Встреча космических аппаратов на орбите	109
§ 3.2. Маневры, обеспечивающие выход корабля на орбиту встречи	119
§ 3.3. Маневры орбитального перехода при решении задачи встречи	144
§ 3.4. Наведение на конечном участке встречи	164
§ 3.5. Ручное управление кораблем при наведении на конечном участке	176
Глава IV. Маневрирование при полетах к Луне	192
§ 4.1. Траектории полетов к Луне	192
§ 4.2. Характеристика маневров при полете к Луне	207
§ 4.3. Маневры постоянного торможения при снижении и посадке	217
§ 4.4. Управление мягкой посадкой	232
Глава V. Маневрирование при межпланетных полетах	240
§ 5.1. Характеристика траекторий межпланетных полетов	240
§ 5.2. Межпланетный полет космического аппарата с солнечным парусом	255
§ 5.3. Определение параметров траектории космических аппаратов	266
§ 5.4. Применение метода дифференциальной коррекции для определения величин корректирующих импульсов	271
§ 5.5. Оптимальное распределение корректирующих импульсов при однопараметрической коррекции	283
§ 5.6. Коррекция траектории на конечном участке полета к планете назначения	304
Глава VI. Траектории входа в атмосферу	312
§ 6.1. Основные проблемы, связанные с осуществлением входа в атмосферу	312
§ 6.2. Вывод приближенного уравнения движения	316
§ 6.3. Баллистические траектории входа в атмосферу	320
§ 6.4. Траектории входа в атмосферу летательных аппаратов с подъемной силой	334
§ 6.5. Траектории входа в атмосферу со скоростями, большими круговой скорости	348
§ 6.6. Перспективы осуществления входа в атмосферу с очень большой скоростью	354
Глава VII. Управление космическим аппаратом при входе в атмосферу	361
§ 7.1. Основные задачи управления траекториями входа в атмосферу	361
§ 7.2. Оценка устойчивости неуправляемого движения в атмосфере и определение информации, необходимой для управления	367
§ 7.3. Классификация систем управления	374
§ 7.4. Ручное управление при входе в атмосферу	392
Приложения	
I. Метод Блисса	401
II. Формулы для измерения оценок и корреляционных матриц в результате проведения измерений	402
III. Построение асимптотических решений линейной системы дифференциальных уравнений с медленно изменяющимися коэффициентами	407
Литература	411

