



А.Б. БАКУШИНСКИЙ
А.В. ГОНЧАРСКИЙ

Некорректные задачи

Численные методы
и приложения

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

А.Б. БАКУШИНСКИЙ
А.В. ГОНЧАРСКИЙ

Некорректные задачи

Численные методы и приложения

Допущено Государственным комитетом СССР по народному образованию
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся
по специальности «Прикладная математика».

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

1989

ББК 22.19
Б 19
УДК 518.517.948+518.519.34

Рецензенты:

кафедра высшей математики МИРЭА,
профессор Ю. П. Пытьев

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета*

Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.

Б 19 Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. — 199 с.: ил. 28.

ISBN 5—211—00332—2.

Учебное пособие, написанное на основе курса лекций, читаемых авторами на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ, посвящено современной теории решения некорректных задач. Особое внимание уделено итерационным алгоритмам решения нелинейных некорректных задач. Подробно рассмотрены прикладные задачи: некорректные задачи математического программирования, нелинейные задачи гравиразведки, некорректные задачи обработки изображений. Большинство приведенных результатов в учебной литературе излагается впервые.

Для студентов вузов, обучающихся по специальности «Прикладная математика».

Б 1602120000(4309000000)—148 82—89
077(02)—89

ББК 22.19

ISBN 5—211—00332—2

© Бакушинский А. Б.,
Гончарский А. В.,
1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ВВЕДЕНИЕ	6
Глава I	
ОБЩИЕ ВОПРОСЫ РЕГУЛЯРИЗИРУЕМОСТИ	
§ 1. Определение регуляризирующего алгоритма (РА)	10
§ 2. Общие теоремы о регуляризируемости и принципы конструирования регуляризирующих алгоритмов	13
§ 3. Оценки погрешности приближения при решении некорректных задач	20
§ 4. Сравнение РА. Понятие оптимального метода	23
Глава II	
РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ НА КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ	
§ 1. Нормальная разрешимость операторных уравнений	27
§ 2. Теоремы об устойчивости обратных отображений	28
§ 3. Квазирешение некорректной задачи	31
§ 4. Свойства δ -квазирешений на множествах специальной структуры	37
Глава III	
СХЕМА ТИХОНОВА В ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ	
§ 1. РА в схеме Тихонова с априорным выбором параметра регуляризации	42
§ 2. Выбор параметра регуляризации по обобщенной невязке	45
§ 3. Применение схемы Тихонова к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода	54
§ 4. Схема Тихонова для нелинейных операторных уравнений	58
Глава IV	
ОБЩИЕ СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ РА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ	
§ 1. Общая схема построения РА для линейных задач с вполне непрерывным оператором	64
§ 2. Построение аппроксимирующих семейств и РА в общем случае	67
§ 3. Оценки погрешности при решении линейных некорректных задач. Оптимальные алгоритмы	78
§ 4. Регуляризация при возмущении оператора	86
§ 5. Построение линейных аппроксимирующих семейств и РА в банаховом пространстве	98
§ 6. Стохастические помехи. Аппроксимация и регуляризация решений линейных задач в условиях стохастических помех	105

Глава V

ИТЕРАТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ. ПРИНЦИП ИТЕРАТИВНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

§ 1. Вариационные неравенства как способ формулировки нелинейных задач	111
§ 2. Эквивалентные преобразования вариационных неравенств	114
§ 3. Аппроксимация Браудера—Тихонова решений вариационных неравенств	118
§ 4. Принцип итеративной регуляризации	122
§ 5. Итеративная регуляризация на основе методов нулевого порядка	123
§ 6. Итеративная регуляризация на основе методов первого порядка (регуляризированный метод Ньютона)	130
§ 7. РА для решения вариационных неравенств	134
§ 8. Оценки скорости сходимости методов итеративной регуляризации	139

Глава VI

ИТЕРАТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТИПИЧНЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Алгоритмы минимизации выпуклых функционалов. Решение нелинейных уравнений	142
§ 2. Алгоритмы минимизации квадратичных функционалов. Нелинейные процессы решения линейных задач	145
§ 3. Алгоритмы итеративного решения общих задач математического программирования	149
§ 4. Алгоритмы нахождения седловых точек и точек равновесия в играх	154

Глава VII

ПРИМЕНЕНИЕ РА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Корректность задач реконструктивной обработки фото- и телеизображений	160
§ 2. Математические проблемы реконструктивной обработки фото- и телеизображений	161
§ 3. Псевдоитерационные РА для решения задач реконструктивной обработки смазанных и дефокусированных изображений	170
§ 4. Задачи реконструктивной рентгеновской томографии	177
§ 5. Рентгеновская томография в случае неполного задания диапазона углов	179
§ 6. Томографические методы в инженерной сейсмике	184
§ 7. Обратные задачи гравиметрии	189
§ 8. Задачи линейного программирования	191

<i>Литература</i>	194
-----------------------------	-----

ПРЕДИСЛОВИЕ

Несмотря на обилие публикаций, посвященных проблемам исследования и приближенного решения так называемых «некорректных задач», пока еще не было книги, с помощью которой можно познакомиться со всеми важнейшими результатами, полученными в настоящее время в численных методах их решения и представленными с неких единых позиций. Существующие монографии посвящены в основном изложению работ их авторов и поэтому поневоле содержат только фрагменты современной теории. Многие важные результаты вообще не нашли отражение в литературе, доступной широкому кругу читателей.

Предлагаемая книга призвана восполнить этот пробел. Она содержит как материал, уже излагавшийся в монографиях (в частности, классическую вариационную схему Тихонова), так и результаты, известные лишь по журнальным публикациям. В целом она призвана дать с единых позиций достаточно полную картину современного состояния теории численного решения некорректных задач. Эффективность алгоритмов демонстрируется на реальных задачах (или, по крайней мере, на модельных примерах), чтобы дать возможность читателю самому убедиться в работоспособности того или иного метода.

На изложение материала в книге большое влияние оказало многолетнее научное общение с А. Н. Тихоновым, а также многочисленные обсуждения затрагиваемых вопросов с коллегами на семинарах физического факультета и факультета ВМК МГУ.

Колоссальные и все возрастающие возможности современной вычислительной техники (ЭВМ) стимулируют постоянное расширение областей человеческой деятельности, в которых используются математические модели. Часть моделей такова, что классическая вычислительная математика позволяет без особого труда выписать алгоритмы приближенного решения возникающих математических задач. При этом зачастую удается ответить на вопрос о сходимости предлагаемого алгоритма и даваемой им погрешности. Конечно, возникают дополнительные проблемы реализации алгоритма на том или ином типе ЭВМ, погрешностей округления, представления данных и результатов и т. п. Проблемы такого типа обычно успешно решаются, особенно если учесть, что технические возможности современных ЭВМ расширяются очень быстро. Однако весьма часто имеющаяся у исследователя информация позволяет записать лишь такую формальную модель, для которой при традиционных подходах нет и не может быть обоснованных вычислительных алгоритмов.

Дело в том, что обычно подобные модели приводят к некорректной задаче, для которой нет теорем о существовании решения в каком-либо естественном функциональном пространстве и, самое главное, нет устойчивости решения (понимаемого в классическом смысле) от входных параметров задачи. Последнее обстоятельство, конечно, очень существенно, так как практически идеально точных параметров модели мы никогда не знаем.

Теория решения некорректных задач — новое направление вычислительной математики, которое начало оформляться в большую самостоятельную область науки после выхода в свет работ А. Н. Тихонова [95—99]. В этих работах было введено в научный обиход основополагающее понятие регуляризирующего алгоритма. Сформулируем его в случае, когда исследуемая математическая модель имеет вид операторного уравнения $Az = u$, оператор A действует из метрического пространства Z в метрическое пространство U . Нестандартность ситуации заключается в том, что непрерывной обратимости A (локально или в целом) не предполагается. Сделаем предположение о том, что при знании «точных» $\bar{y}$ и A

упомянутое уравнение имеет «точное» решение $\bar{z}$, которое и интересует исследователя.

Отвлечемся для простоты от возможных погрешностей задания A . Пусть вместо $\bar{u}$ известно его приближение $u_\delta \in U$, $\rho(u_\delta, \bar{u}) \leq \delta$, δ — число, характеризующее погрешность задания u_δ . Весьма естественно, что численный метод решения операторного уравнения удовлетворял следующему основному требованию: чем точнее задано приближение к $\bar{u}$ (чем меньше δ), тем точнее можно, пользуясь этим методом, найти $\bar{z}$. Такое требование и положено в основу формального определения регуляризирующего алгоритма.

Регуляризирующим алгоритмом (РА) называется оператор R , который каждой паре (u_δ, δ) ставит в соответствие элемент $z_\delta \in Z$, причем $z_\delta \rightarrow \bar{z}$ в метрике Z при $\delta \rightarrow 0$. Ясно, что $R(u_\delta, \delta)$ имеет смысл считать приближенным решением задачи при заданном наборе входных данных.

Это определение и его прямые обобщения легли в основу современных теорий и практики приближенного решения некорректных задач.

Удалось классифицировать некорректные задачи на регуляризируемые, для которых в принципе существуют РА, и нерегуляризируемые. Кроме того, созданы общие принципы конструирования РА для широких классов моделей. В процессе исследования обнаружилось, в частности, что многие классические схемы, например итерационные методы для решения линейных операторных уравнений, могут быть успешно использованы и при решении некорректных задач, точнее, для построения РА для них. Процесс должен быть дополнен только правилом окончания (остановки) в зависимости от величины погрешности входных данных задачи. Существенные результаты получены и в проблеме конструирования РА для нелинейных моделей (задач). Например, предложен и обоснован принцип интеративной регуляризации конструирования РА путем выполнения некоторых итерационных схем вычислений, формально мало отличающихся от классических итерационных методов.

К настоящему времени опубликовано несколько монографий, посвященных некорректным задачам (например, [64, 78, 102]). Однако все они содержат лишь фрагменты теории РА (как правило, изучается лишь классическая вариационная схема А. Н. Тихонова построения РА). Многие важные общие вопросы и новые схемы построения РА лишь упоминаются со ссылками на журнальные публикации.

Неослабевающий интерес к теории и практике приближенного решения некорректных задач побудил авторов попытаться с единых позиций изложить все главные результаты, полученные к настоящему времени по проблеме существования и конструирования РА, в предлагаемой вниманию читателя книге.

В гл. I приводятся и обсуждаются основные используемые в дальнейшем определения и доказываются основные теоремы о регуляризируемости и существовании оценок погрешности в некор-

ректных задачах. В частности, впервые в учебной литературе приводится доказательство известной теоремы о необходимых и достаточных условиях регуляризируемости отображения [38].

Гл. II и III содержат более известный материал о регулярируемости на компактных множествах и общей схеме построения РА, предложенной А. Н. Тихоновым [96—97, 103].

В гл. IV описывается общая схема, впервые предложенная в [5], получения линейных РА для линейных задач (решение линейных уравнений, вычисление значений линейного неограниченного оператора) в гильбертовом и банаховом пространствах. Изучаются свойства аппроксимаций и РА, получаемых по этой схеме. В частности, показано, как соотносятся классические итерационные методы решения линейных операторных уравнений и некоторые из РА, получаемые по этой схеме. Отдельный параграф главы посвящен регуляризации линейных задач в условиях статистических помех. Мы касаемся этой проблематики очень бегло, рассматривая в основном те вопросы, которые для своего решения не требуют выхода за общие «детерминистские» рамки книги. Полное описание современного состояния проблемы стохастических помех в некорректных (линейных) задачах можно найти в [110].

В гл. V, VI развивается принцип итеративной регуляризации [13] построения РА для класса нелинейных моделей, описываемых вариационными неравенствами. В частности, сюда входят все задачи выпуклой оптимизации. В рамках этого принципа впервые удалось показать, как конструировать сильно сходящиеся итерационные процессы и РА на их основе для решения общей бесконечномерной задачи выпуклой оптимизации. В качестве конкретного примера приведена общая задача линейного программирования, для которой этим путем можно получить большое число конкретных итерационных методов, устойчивых в смысле теории регуляризации.

Заключительная VII глава книги посвящена конкретным приложениям и численной реализации некоторых из описанных в гл. II—VI регуляризирующих алгоритмов. При отборе материала мы руководствовались желанием продемонстрировать возможности РА при численном решении весьма широкого спектра проблем от задач, описываемых линейными интегральными уравнениями, до задач линейного программирования. Сравнительно большое внимание уделяется показу возможностей РА в решении задач реставрации изображений и реконструктивной томографии, что объясняется важностью этих задач для нужд современной техники и собственными научными интересами авторов.

Приведенные в книге утверждения (теоремы, леммы и т. п.), как правило, снабжены подробными доказательствами. Более специальные утверждения, также некоторые функционально-аналитические факты приводятся без доказательства. В таких случаях даются ссылки на литературу, где вопрос излагается подробнее.

Книга вполне доступна читателю, владеющему основными понятиями функционального анализа (например, в объеме книги

[74]). Ввиду того, что книга представляет собой учебное пособие, мы сочли возможным не всегда указывать авторов конкретных утверждений. По той же причине список цитируемой литературы не претендует на полноту и в основном содержит работы, непосредственно использованные при написании книги. В настоящее время общий объем публикаций по проблемам решения некорректных задач значительно превышает 1000 названий. Наиболее полную библиографию (463 названия) можно найти в [72].

Общие вопросы регуляризуемости

§ 1. Определение регуляризирующего алгоритма (РА)

Любая математическая модель связывает определенным образом две совокупности объектов. Объектами первого типа являются характеристики модели, объектами второго типа — характеристики изучаемого объекта, которые можно зафиксировать в физическом эксперименте. Спецификой задач обработки данных эксперимента является то, что последние заданы с ошибкой. Считаем, что объекты второго типа принадлежат некоторому функциональному пространству X , а объекты первого типа — пространству Y .

Математическая модель порождает некоторое соответствие $y = G(x)$ между входными данными x и характеристиками модели y . Вычисление характеристик модели y по приближенно заданной входной информации x и является целью математического моделирования.

Часто пользуются другой терминологией. Пусть z — характеристики модели, а u — характеристики наблюдаемого явления. Связь между z и u осуществляется соотношением $Az = u$. Оператор A предполагается заданным. Задача заключается в том, чтобы по заданному приближенному элементу u найти приближенное значение элемента z . Возникающие при этом трудности связаны с тем, что:

- 1) оператор $G = A^{-1}$, вообще говоря, явно не задан;
- 2) область определения оператора $G = A^{-1}$ не совпадает, вообще говоря, со всем пространством;
- 3) оператор A^{-1} , определенный на области своего определения, разрывен.

Принципиальные трудности в задачах, рассматриваемых в книге, связаны с решением проблем 2) и 3). Поэтому условно считаем, что отображение $y = G(x)$ задано, но не на всем X , а на множестве $D_G \subset X$, причем отображение G разрывно на D_G .

Соответствие G может быть и точно-множественным отображением. В частности, уравнение $Az = u$ может при заданном u иметь несколько решений. Поэтому, вообще говоря, $G = A^{-1}$ — точно-множественное отображение.

В принципе теорию регуляризуемости можно строить сразу для многозначных отображений G . Однако часто естественным образом выделяется однозначное сечение G_0 отображения G , свя-

занного с моделью. Для этого сечения и ведутся все рассуждения. Поэтому при изложении в этой главе общих проблем регулярируемости мы ограничимся рассмотрением случая однозначных G , чего вполне достаточно для дальнейшего.

Определение 1. Математическая модель называется абсолютно корректной на D_G , если связанное с ней отображение G продолжается на все X непрерывно на D_G . Если G относительно непрерывно на подмножестве $D \subseteq D_G$, то модель называется условно корректной на D .

Приведенное определение корректности в случае, когда $G = A^{-1}$, шире классического адамаровского, так как в последнем требуется еще и полнота $D \subseteq D_G$. Кроме того, обычно (но не обязательно) $D \subseteq D_G$ само должно быть линейным нормированным пространством.

Пример 1. Рассмотрим задачу решения линейного алгебраического уравнения

$$Az = u, \quad z \in E_m, \quad u \in E_n,$$

E_m, E_n — евклидовы пространства соответствующих размерностей.

Считаем входными данными (с ошибками измерения) только вектор u . Пусть отображение $G(u)$ ставит в соответствие u решение этого линейного уравнения в смысле метода наименьших квадратов z , обладающее минимальной нормой. Отображение G всюду определено в E_n и непрерывно, т. е. такая модель абсолютно корректна. Если же входными данными считать элементы матрицы A , то отображение $G(A, u)$ уже не будет непрерывным по A , если близость матриц оценивать, например, в обычной операторной норме [16]. Следовательно, эта модель некорректна по отношению к возмущению матрицы (см. гл. III).

Пример 2. Рассмотрим операторное уравнение

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U,$$

где Z, U — линейные нормированные пространства, а A — вполне непрерывный оператор из Z в U . Обратное отображение $G = A^{-1}$ можно определить лишь на $D_G = AZ$, которое в случае бесконечной размерности пространств не совпадает с U . Хорошо известно, что обратное отображение $G = A^{-1}$ неограничено на $D_G = AZ$, т. е. задача некорректна на AZ . Если же в Z априори выделить компактное множество $M \subset Z$, то отображение $G = A^{-1}$, определенное на $D = AM \subset D_G$, относительно непрерывно, т. е. задача условно корректна на $D = AM \subset D_G$.

В рамках вычислительной математики важно уметь находить элемент $G(x)$ по приближенным данным об x . При этом элемент $G(x)$ допускается также находить приближенно. Естественно считать $\tilde{y}$ приближенным значением $G(x)$, если $\rho_r(G(x), \tilde{y})$ «мало».

Понятие «приближенные данные об x » нуждается в более тщательном определении. Приближенными данными об x счита-

ем пару (x_δ, δ) такую, что $\rho_Y(x, x_\delta) \leq \delta$. При этом элемент x_δ не обязательно принадлежит множеству D_G . Теория регуляризации основана на априорном предположении о том, что такая пара задана.

Конечно, весьма желательно получить в качестве приближенного значения $G(x)$ пару $(y_\varepsilon, \varepsilon)$, где $\rho_Y(G(x), y_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Оказывается, что для большого класса отображений это принципиально невозможно. Обычно для решения задачи приближенного нахождения $G(x)$ строятся некоторые аппроксимирующие отображения $R(x, \delta)$ ($R_\delta(x)$), явно заданные на всем X .

Для некорректных моделей (разрывных отображений G) особую роль играет аппроксимация в смысле определения регуляризуемости G по Тихонову [96, 97]. Пусть есть какое-либо отображение G , определенное на некотором подмножестве $D(G) \subseteq X$ метрического пространства X и действующее в метрическое пространство Y , причем $G(D(G)) \subseteq Y$. Определим погрешность решения задачи вычисления $G(x)$ при фиксированном $\delta > 0$ и заданном априори R_δ :

$$\Delta(R_\delta, \delta, x) = \sup_{\rho(x, x_\delta) \leq \delta} \rho_Y(R_\delta(x_\delta), G(x)).$$

Определение 2 [96, 38]. Функция G называется регуляризуемой на D_G в X (или на непустом подмножестве $D \subseteq D_G$), если существует отображение $R_\delta(\cdot)$ (или, что то же самое, $R(\cdot, \delta)$), действующее из прямого произведения $X \otimes R_1^+ \rightarrow Y$, такое, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta(R_\delta, \delta, x) = 0 \quad \forall x \in D_G \quad (\forall x \in D). \quad (1.1)$$

Оператор $R_\delta(x)$ называется регуляризирующим алгоритмом (РА) или регуляризирующим оператором для вычисления $G(x)$. Обращаем внимание на то, что от $R_\delta(x)$ не требуется непрерывности.

Если R_δ — РА для $G(\cdot)$, то естественно $R_\delta(x_\delta)$ объявить приближенным решением задачи вычисления $G(x)$ по данным (x_δ, δ) . В теории регуляризации существенно, что приближение к $G(x)$ строится с использованием именно пары (x_δ, δ) . Использовать для аппроксимации $G(x)$ тройку (x_δ, δ, x) мы не можем, так как точное значение аргумента x нам неизвестно. Можно ли построить РА, используя только значение x_δ ?

Пусть x_δ — произвольный элемент из δ -окрестности x , т. е. $\rho(x_\delta, x) \leq \delta$. Можно ли построить функцию $R(x_\delta)$, зависящую только от x_δ и явно не зависящую от δ , чтобы выполнялось соотношение (1.1)? Оказывается, что так можно регуляризовать только корректные на D задачи. Справедлива

Теорема 1.1 [22]. *Отображение G регуляризуемо на $D(D_G)$ семейством $R_\delta = R(\cdot, \delta) \equiv R(\cdot)$, $0 < \delta \leq \delta_0$ тогда и только тогда, когда оно продолжается на все X так, что продолжение непрерывно на $D(D_G)$ в X .*

Доказательство. Для доказательства достаточности можно взять $R(\cdot) = \bar{G}$, $\bar{G}$ — непрерывное на $D(D_G)$ продолжение G . При доказательстве необходимости отображение $R(\cdot)$ является искомым продолжением.

Таким образом, (x_δ, δ) — минимальная информация, при которой можно говорить о приближенном нахождении G в смысле определения 2.

К сожалению, в общем случае невозможно оценить меру близости $R_\delta(x_\delta)$ к $G(x)$ без дополнительной информации об x . Это характерная особенность некорректных задач (см. § 3). В общем случае РА гарантирует лишь асимптотическую сходимость приближенного решения к точному при $\delta \rightarrow 0$.

§ 2. Общие теоремы о регуляризуемости и принципы конструирования регуляризирующих алгоритмов

Постараемся ответить на вопрос о том, насколько широк класс регуляризуемых отображений G . Почти очевидно, что он непустой. Непосредственно из определения видно, что регуляризуемы все отображения G , порожденные корректными моделями (в частности, просто непрерывными на D функциями $G(x)$). В этом случае можно положить $R_\delta \equiv G \forall \delta$. В силу непрерывности G справедливо соотношение (1.1). Если G — отображение, порожденное корректной математической моделью, то на том факте, что $G(x_\delta)$ — приближенное значение $G(x)$ при $\rho(x_\delta, x) \leq \delta$, по существу и основана вся классическая вычислительная математика.

Выведем непосредственное следствие из определения 2, позволяющее утверждать, что класс нерегуляризуемых отображений пуст.

Теорема 1.2 [38]. Пусть G отображает $D_G \subseteq X$ на Y , т. е. $G(D_G) \equiv Y$, X, Y — метрические пространства. Если функция G регуляризуема на D_G , а N — всюду плотное множество в X , то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R_{1/n}(N) \quad \text{всюду плотно в } Y.$$

Доказательство. Пусть $y \in Y$ и $x \in G^{-1}(y)$. Так как N плотно в X , то $\exists x_n \in N$ такая, что $\rho(x_n, x) \leq 1/n$. По определению 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_Y(R_{1/n}(x_n), y) = 0.$$

Другими словами, мы нашли последовательность точек $R_{1/n}(x_n)|_1^\infty \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{1/n}(N)$, которая сходится к y . В силу произвола выбора y отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие 1. Если G отображает D_G на Y , G регуляризуемо на D_G и X сепарабельно, то и Y сепарабельно.

Это утверждение следует из теоремы 1.2, если в качестве N взять счетное всюду плотное множество в X .

Пользуясь следствием, легко привести примеры нерегуляризуемых отображений.

Пример 1. Пусть $X=l^\infty$ и $Y=l^2$ (пространства ограниченных и квадратично суммируемых последовательностей соответственно; норма элемента $x=(x_1, \dots, x_n, \dots)$ в l^∞ записывается в виде $\|x\|_x = \sup_n |x_n|$).

Линейный оператор A из l^∞ в l^2 действует по формуле

$$A(x_1, \dots, x_n, \dots) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots, \frac{1}{n}x_n, \dots\right).$$

Легко видеть, что $\ker A=0$ и существует обратное отображение $G=A^{-1}$ из l^2 на l^∞ . В силу следствия 1 оно нерегуляризуемо на $D_G \subset l^2$, так как l^∞ — несепарабельное банахово пространство [74], l^2 — сепарабельное.

Пример 2. Пусть A — линейный взаимнооднозначный оператор, действующий из V_a^b в L_2 , V_a^b — пространство функций ограниченной вариации. Отображение A^{-1} не может быть регуляризуемо на $AV_a^b \subset L_2$, так как V_a^b несепарабельно [74], в то время как L_2 сепарабельно.

Мы уже отмечали, что непрерывные отображения G регуляризуемы. Замечательно, что регуляризуемы и некоторые разрывные отображения, в частности все отображения, являющиеся поточечными пределами непрерывных отображений. Следовательно, возможно в указанном выше смысле приближенное решение и некорректных задач.

Теорема 1.3 [38]. *Если функция $G:X \rightarrow V$ является поточечным пределом на множестве $D \subseteq X$ непрерывных на X функций G_n , то она регуляризуема на D .*

Доказательство. Пусть G_n — заданная аппроксимирующая последовательность. Определим семейство покрытий Π_n пространства X открытыми множествами следующим образом:

Π_1 состоит из всех открытых множеств $U \subseteq X$ диаметром ≤ 1 таких, что $d\{G_1(u)\} \leq 1$;

Π_2 состоит из всех открытых множеств $U \subseteq X$ диаметром $\leq 1/2$ таких, что $d\{G_1(u)\} \leq 1/2$, $d\{G_2(u)\} \leq 1/2$;

Π_n состоит из всех открытых множеств $U \subseteq X$ диаметром $\leq 1/n$ таких, что $d\{G_1(u)\} \leq 1/n, \dots, d\{G_n(u)\} \leq 1/n$.

В силу непрерывности каждой G_n любая точка $x \in X$ принадлежит каждому Π_n .

Построим теперь регуляризующее семейство $R_\delta(x)$. Зафиксируем точку x и число $\delta > 0$. При малом $\delta \leq \delta_0$ $\exists n=n(\delta, x)$ такое, что найдется множество $U \subset \Pi_{n(\delta, x)}$, $S(x, \delta) \subset U^*$. Пусть $\bar{n}(\delta, x)$ —

*) Здесь $S(x, \delta)$ — шар радиусом δ с центром в точке x .

наибольший номер, для которого выполнено последнее условие. Положим

$$R_{\delta}(x) = \begin{cases} G_{\bar{n}(\delta, x)}(x), & \bar{n} < \infty, \\ G_1(x), & \bar{n} \neq 1, 2, \dots \end{cases}$$

Ясно, что при достаточно малом $\delta < \delta_0$ требуемый $\bar{n}$ найдется.

Покажем, что так определенное семейство $R_{\delta}(x)$ регуляризует G на множестве $D \subset D_G \subseteq X$. Пусть x — некоторая точка из D . В силу неравенства треугольника

$$\begin{aligned} \sup_{\rho(x', \bar{x}) \leq \delta} \rho(R_{\delta}(x'), G(\bar{x})) &\leq \rho(G_{\bar{n}(\delta, \bar{x})}(\bar{x}), G(\bar{x})) + \\ &+ \sup_{\rho(x', \bar{x}) \leq \delta} \rho(G_{\bar{n}}(x'), G_{\bar{n}}(\bar{x})) \leq \rho(G_{\bar{n}}(\bar{x}), G(\bar{x})) + 1/\bar{n}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\bar{n} = \bar{n}(\delta, \bar{x}) \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$. Действительно, так как каждый шар $S(x', \delta)$ содержит точку $\bar{x}$, то при $\delta \rightarrow 0$ он попадает в произвольную окрестность точки $\bar{x}$, следовательно, какой бы номер N мы ни взяли при достаточно малом δ , $S(\bar{x}, \delta)$ попадет в какое-то открытое множество покрытия Π_N . Значит, $\bar{n}(\delta, \bar{x}) \geq N$. Утверждение теоремы следует теперь из неравенства (1.2).

В одном важном частном случае условие непрерывной аппроксимации является также необходимым для регуляризируемости отображения G .

Теорема 1.4 [38]. *Если пространство Y сепарабельно и является выпуклым подмножеством линейного нормированного пространства, а G регуляризируемо (на D_G), то G является поточечным пределом последовательности непрерывных на X отображений G_n .*

Доказательство. Утверждение теоремы было бы тривиальным, если бы упомянутый в условии теоремы РА был непрерывным. Оказывается, что такой РА можно построить.

Лемма (1.1). *В условиях теоремы существует РА такой, что каждое R_{δ} принимает лишь конечное число значений в Y .*

Доказательство леммы 1.1. Всякое сепарабельное метрическое пространство Y гомеоморфно некоторому вполне ограниченному метрическому пространству Y' (т. е. такому, в котором при каждом δ существует конечная δ -сеть) [1]. Пусть l — упомянутый гомеоморфизм. Функция lG очевидно регуляризируема, и если R_{δ} регуляризует отображение G , то семейство lR_{δ} — регуляризующий алгоритм для lG . Пусть $L_{\delta}(\delta > 0)$ — отображение $Y' \rightarrow Y'$, ставящее произвольному элементу $y' \in Y'$ одну из ближайших точек δ -сети Y' . Используя неравенство треугольника, легко проверить, что $L_{\delta}lR_{\delta}$ также является регуляризующим алгоритмом для lG . Семейство $l^{-1}L_{\delta}lR_{\delta}$ — РА, существование которого утверждается в лемме 1.1.

Замечание. Ясно, что количество значений, которое принимает R_{δ} в лемме 1.1, зависит от δ .

Лемма 1.2. В условиях теоремы (11.4) существует РА, в котором каждое R_δ — непрерывная функция на X .

Доказательство леммы 1.2. Пусть $\bar{R}_\delta$ — РА для G , принимающий при каждом $\delta > 0$ конечное число значений $y_1, \dots, y_{k(\delta)}$. Такой РА существует в силу леммы 1.1. Зафиксируем $\delta^* > 0$. Пусть для простоты изложения $k(\delta^*) = 2$. Пусть такая $R_{\delta^*}^{-1}(y_1) = A_1$ — полный прообраз точки y_1 .

Рассмотрим $O(A_1)$ — множество (открытое) всех точек, удаленных от A_1 не более чем на $\delta^*/8$. Если $R_{\delta^*}^{-1}(y_2) \subset O(A_1)$, то построение множеств A_i заканчивается. В противном случае полагаем $A_2 = R_{\delta^*}^{-1}(y_2) \setminus O(A_1)$ и строим аналогично предыдущему $O(A_2)$. Очевидно, что

$$O(A_1) \cup O(A_2) \ni X, \quad \rho(A_1; A_2) \geq \delta^*/8. \quad (1.3)$$

Возьмем $\delta^*/4$ -окрестности множеств A_1 и A_2 и построим функции

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & \rho(x, A_i) \geq \delta^*/4, \\ 1 - \rho(x, A_i) / \frac{\delta^*}{4}, & \rho(x, A_i) < \delta^*/4. \end{cases}$$

Заметим, что для $x \in X$

$$1/2 < \sum_{i=1}^p f_i(x) < p \quad (1.4)$$

(p — число построенных множеств A_i , в данном случае $p \leq 2$). Левое неравенство в (1.4) следует из того, что в силу (1.3) по крайней мере для одного i имеем $\rho(x, A_i) < \delta^*/8$. Соответственно значение функции $f_i \geq 1 - \frac{\delta^*/8}{\delta^*/4} = 1/2$. Построим теперь непрерывные (очевидно) функции

$$R_{\delta^*/8}(x) = \frac{f_1}{f_1} y_1 = y_1,$$

если множество $A_2 = \emptyset$, и

$$R_{\delta^*/8}(x) = \frac{\sum_{i=1}^2 y_i f_i(x)}{\sum_{i=1}^2 f_i(x)} \quad (1.5)$$

в противном случае. Аналогично строятся $R_{\delta^*/8}(x)$, когда $\bar{R}_\delta$ принимает более чем два значения.

В силу предположений об Y (линейность, выпуклость) $R_{\delta^*/8}(x) \in Y$ и определена корректно.

Покажем, что выражение (1.5) действительно определяет РА для отображения G . Пусть $\bar{x} \in D_G$ фиксирована. Так как $\bar{R}_\delta$ — РА для G , то $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon, \bar{x})$ такое, что

$$\|R_\delta(x') - G(\bar{x})\| \leq \varepsilon \quad (1.6)$$

при $\rho(x', \bar{x}) < \delta$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $\bar{R}_{\delta(\varepsilon, \bar{x})}(x)$ принимает для простоты два значения y_1 и y_2 и построены два множества A_1 и A_2 . Если, например,

$$\|y_1 - G(\bar{x})\| \geq \varepsilon, \quad (1.7)$$

то $f_1(x') = 0$ для всех x' , принадлежащих окрестности точки $\bar{x}$. Действительно, в этом случае

$$\bar{R}_{\delta(\varepsilon, \bar{x})}^{-1}(y_1) \cap \{\rho(x', \bar{x}) \leq \delta(\varepsilon, \bar{x})\} = \emptyset.$$

Следовательно, $A_1 \cap \{\rho(x', \bar{x}) \leq \delta(\varepsilon, \bar{x})\} = \emptyset$. Поэтому $O(A_1) \cap \{\rho(x', \bar{x}) \leq \delta(\varepsilon, \bar{x})/8\} = \emptyset$, а значит, $f_1(x') = 0$. Неравенство (1.7) не может выполняться одновременно для всех y_i , участвующих в построении (1.5), так как справедливо (1.3), $A_i \subseteq \bar{R}_\delta^{-1}(y_i)$ по построению и в случае выполнения (1.7) одновременно для всех индексов i , участвующих в построении (1.5), $\bar{x} \notin X$. Таким образом, если выполнено неравенство (1.7), то

$$R_{\delta(\varepsilon, \bar{x})/8}(x') = y_2, \text{ если } \rho(x', \bar{x}) \leq \delta/8.$$

Если же выполнены неравенства

$$\|y_1 - G(\bar{x})\| \leq \varepsilon, \quad \|y_2 - G(\bar{x})\| \leq \varepsilon,$$

то в силу (1.5)

$$\|R_{\delta(\varepsilon, \bar{x})/8}(x') - G(\bar{x})\| \leq \varepsilon, \quad \rho(x', \bar{x}) \leq \delta(\varepsilon, \bar{x})/8.$$

Значит, $R_{\delta/8}(x)$ — действительно искомый РА для G .

Доказательство теоремы (1.4) теперь очевидно. Пусть $\delta_n \rightarrow 0$ — некоторая последовательность положительных чисел. Семейство непрерывных отображений $G_n \equiv R_{\delta_n/8}$ поточечно аппроксимирует G на D_G .

Итак, доказан следующий критерий регуляризируемости [38].

Теорема 1.5. *Отображение G из X в сепарабельное линейное нормированное пространство Y регуляризируемо на $D \subseteq D_G \subseteq X$ тогда и только тогда, когда оно является поточечным пределом на D последовательности непрерывных на X отображений G_n .*

Для большинства вычислительных приложений достаточно считать X, Y линейными нормированными сепарабельными или даже гильбертовыми сепарабельными пространствами. Доказанная теорема охватывает этот случай полностью.

Однако можно доказать и более общий критерий регуляризируемости в метрических пространствах.

Определение 3. Функция G из $X \rightarrow Y$ (X, Y — метрические пространства) называется B -измеримой функцией первого класса, если прообраз каждого открытого множества в Y есть множество типа F_σ , т. е. представимо в виде не более чем счетной суммы замкнутых множеств.

Теорема 1.6 [18]. Для того чтобы функция G из $D_G \subseteq X$ в Y — сепарабельное пространство была регуляризируема на $D \subseteq D_G \subseteq X$, необходимо и достаточно, чтобы сужение G на D было B -измеримой функцией первого класса.

Таким образом, регуляризируемость функции на D из X (или D_G) в Y зависит только от ее «устройства» на этом подмножестве.

Мы не приводим доказательство этой теоремы. Заметим только, что оно следует из теоремы 1.5 и существования некоторых стандартных гомеоморфизмов.

Пример. Функция Дирихле из $[0, 1]$ в $[0, 1]$ нерегуляризируема на $[0, 1]$ по теореме 1.4, так как в теории функций действительно переменного доказывается, что она не является поточечным пределом последовательности непрерывных функций. Однако она очевидно регуляризируема на подмножестве $[0, 1]$, состоящем из рациональных чисел (соответствующий РА имеет вид $R_\delta \equiv 0$).

Теорема 1.3 показывает тесную связь между задачей построения РА и задачей построения аппроксимируемого семейства непрерывных отображений для G . В дальнейшем понимаем под аппроксимирующим семейством не только семейство $G_n(x)$, у которого индекс n пробегает целые положительные значения и $n \rightarrow \infty$, но и более общее семейство $\{G_\alpha(x)\}$, где α пробегает некоторое упорядоченное бесконечное числовое множество и

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \rho(G_\alpha(x), G(x)) = 0 \quad \forall x \in D_G. \quad (1.8)$$

Построение семейства R_α со свойством (1.8) — классическая задача вычислительной математики.

В классической вычислительной математике рассматриваются различные классы непрерывных отображений G , порожденных математическим моделированием (решение дифференциальных, интегральных, алгебраических и других уравнений). Построение тем или иным способом аппроксимирующей последовательности (1.8) для них обычно эквивалентно созданию приближенного метода вычисления $G(x)$.

Действительно, пусть $\{\alpha\}$ — множество положительных чисел и $\alpha_0 = 0$. Так как G_α непрерывны, то заведомо справедливо соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(G_\alpha(x'), G(x)) = 0, \quad \rho(x', x) \leq \delta \quad (1.9)$$

вне зависимости от того, непрерывно G или нет. Однако для непрерывных отображений G предельные переходы в (1.9) можно переставить

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho(G_\alpha(x'), G(x)) = 0. \quad (1.10)$$

Соотношение (1.10) в какой-то мере оправдывает весьма часто применяемую в классической вычислительной математике схему вычислений, когда при известных приближенных данных x' : $\rho(x', x) \leq \delta$ вычисляют $G_\alpha(x')$ с возможно малым α , например ведут итерационный процесс до получения итерации с максимально возможным (в пределах времени, которым располагают) номером. Если абстрагироваться от накопления в процессе таких действий вычислительных погрешностей, то этот способ действий оправдывается тем, что $G_{\alpha_{\min}}(x')$ «близко» к $G(x)$, а $G(x')$ в силу непрерывности G «близко» к $G(x)$.

Часто соотношение (1.10) для непрерывного G можно еще усилить до предельного соотношения

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} \rho(G_\alpha(x'), G(x)) = 0 \quad (1.11)$$

или даже оценить погрешность в (1.11) сверху функцией $\varphi(\alpha, \delta)$, стремящейся к 0 при $\alpha, \delta \rightarrow 0$. Если выполнено (1.11), то для вычисления $G(x)$ можно построить РА, выбирая $\alpha(\delta)$ любым способом, лишь бы было выполнено (1.11), например $\alpha = \delta$. Если известно $\varphi(\alpha, \delta)$, то выбор можно сделать из условия

$$\alpha(\delta) = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \varphi(\alpha, \delta).$$

Итак, путь от построения семейства (1.8) до получения приближенного в том или ином смысле значения $G(x)$ для непрерывных отображений в основном ясен и, как правило, изучается в классической вычислительной математике (например, в разностных методах решения дифференциальных уравнений в обычных и частных производных).

Оказывается, что можно построить достаточно эффективно аппроксимирующие последовательности непрерывных отображений для весьма широких классов разрывных отображений, т. е. построить аппроксимации решений и некорректных задач.

После того как аппроксимирующее семейство построено, можно, опираясь на теорему 1.3, утверждать и регуляризируемость отображения G . Естественный путь перехода от G_α к R_δ (от G_n к R_δ) состоит в указании функции $\alpha(x', \delta)$ ($n(x', \delta)$) такой, чтобы семейство $G_{\alpha(x', \delta)}(x') \equiv R_\delta(x')$ ($G_{n(x', \delta)}(x') \equiv R_\delta(x')$) удовлетворяло определению РА (1.1). Этот путь реализован в доказательстве теоремы 1.3. Однако предложенная в ней схема на практике неосуществима. Поэтому обычно используют другие способы выбора параметра $\alpha(x', \delta)$ (в итеративных схемах — $n(x', \delta)$).

При обосновании таких способов нужно тщательно следить за тем, чтобы α или n зависели только от $\bar{x}'$, δ и не привлекалась дополнительная информация об x . Если такая информация привлекается (явно или неявно), то можно говорить только о построении РА на некотором подмножестве $D \subseteq D_G$, выделяемом использованной информацией. Следует особо отметить, что существует

широкий класс отображений и аппроксимаций, для которых легко указать функцию $\alpha(x', \delta)$ ($n(x', \delta)$), не зависящую от x' .

Теорема 1.7. Пусть отображение $G(x)$ таково, что его можно аппроксимировать на D_G отображениями $G_\alpha(x)$, удовлетворяющими в X условию Липшица с константой L_α , т. е. $\forall x, x_1 \in X$ $\rho(G_\alpha(x), G_\alpha(x_1)) \leq L_\alpha \rho(x, x_1)$. Тогда можно выбрать $\alpha = \alpha(\delta)$ (независимо от x') так, чтобы $G_{\alpha(\delta)}(x)$ было РА для $G(x)$ на D_G .

Доказательство. Пусть x — произвольный фиксированный элемент из D_G , $\rho(x', x) \leq \delta$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho(G_\alpha(x'), G(x)) &\leq \rho(G_\alpha(x'), G_\alpha(x)) + \\ &+ \rho(G_\alpha(x), G(x)) \leq L_\alpha \delta + \rho(G_\alpha(x), G(x)). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Достаточно выбрать $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ так, чтобы

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} L_{\alpha(\delta)} \delta = 0. \quad (1.13)$$

Из (1.13) следует, что $R_\delta \equiv G_{\alpha(\delta)}(x)$ и есть РА для G на D_G .

Аналогичные рассуждения проходят, если каждое G_α удовлетворяет условию Липшица $L_\alpha(S)$ в некотором открытом шаре $S(0, \rho)$, содержащем δ_0 -окрестность D_G (или его подмножества D). В этом случае, выбирая $\alpha(\delta)$ так, чтобы выполнялось (1.13), построим РА вида $G_{\alpha(\delta)}(\cdot)$ на множестве D (или всем D_G).

Забегаю вперед, скажем, что условиям теоремы 1.7 удовлетворяют отображения, порожденные линейными операторными уравнениями в паре произвольных гильбертовых пространств $G(x) = A^{-1}x$, если $\text{Ker } A = 0$, или $G(x) = A_0^{-1}x$, где A_0^{-1} — подходящее сечение многозначного отображения A^{-1} в общем случае, нелинейные отображения, связанные с решениями монотонных вариационных неравенств, в частности задач выпуклой оптимизации и некоторые другие. Именно таким путем (построение аппроксимаций и применение теоремы (1.7)) были получены А. Н. Тихоновым первые конкретные регуляризующие алгоритмы.

§ 3. Оценки погрешности приближения при решении некорректных задач

Теория регуляризации вызвала к жизни новое определение погрешности приближенного решения в точке: если вычисление значений отображения G ведется с помощью какого-либо регуляризующего алгоритма, то величину Δ в определении 1 называют погрешностью, даваемой РА в точке x .

Если отображение G регуляризуемо на $D(D_G)$, то погрешность стремится к 0 при $\delta \rightarrow 0$ в каждой точке x из $D(D_G)$.

Как и в классической теории оценок погрешности, в теории РА изучается поведение $\Delta(\delta, x)$ как функции δ и нахождение для нее различных мажорант с целью определить порядок ее убывания при $\delta \rightarrow 0$. Наиболее простой, но вместе с тем характерный результат о поведении погрешности состоит в том, что, вооб-

ще говоря, не существует равномерной по всем x из D_G оценки Δ , если задача вычисления $G(x)$ некорректна.

Теорема 1.8. Если функция $G(x)$ регуляризируема на D отображениями R_δ и существует равномерная на D оценка погрешности Δ ($R_\delta, \delta, x \leq \varphi(\delta)$), $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi(\delta) = 0$, то сужение $G|_D$ равномерно непрерывно на D .

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in D$, $\rho(x_1, x_2) \leq \delta$. В силу неравенства треугольника $\rho(G(x_1), G(x_2)) \leq \rho(R_\delta(x_1), G(x_1)) + \rho(R_\delta(x_1), G(x_2)) \leq 2\varphi(\delta)$. Это и означает равномерную непрерывность $G|_D$.

Следствие 1. Пусть отображение $G=A^{-1}$ — обратный оператор к инъективному линейному вполне непрерывному оператору, действующему в гильбертовом пространстве H . В гл. III показано, что это отображение регуляризируемо на всем множестве определения A^{-1} , притом непрерывными отображениями $R_\delta(x)$. Однако оператор A^{-1} не является равномерно непрерывным на области своего определения, и поэтому равномерной оценки погрешности такого РА на всем $D_{A^{-1}}$ заведомо не существует.

Выясним теперь вопрос о том, какие линейные функционалы от решения некорректного уравнения могут быть приближенно вычислены с равномерной относительно входных данных оценкой ошибок, зависящей от погрешности δ входных данных.

Следствие 2. Пусть A — линейный непрерывный оператор в банаховом пространстве B такой, что A^{-1} существует и плотно определен, а l — линейный непрерывный функционал в B . Рассмотрим отображение $G(u) = l(A^{-1}u)$.

Регуляризирующий алгоритм вычисления $G(u)$ с равномерной оценкой погрешности (на всем $D_{A^{-1}}$) существует тогда и только тогда, когда $l \in D_{A^*-1}$, т. е. разрешимо уравнение $A^*q = l$.

Действительно, если $l \in D_{A^*-1}$, то $G(u) = l(A^{-1}u) = q(u)$, где q — линейный непрерывный функционал. Такое отображение, разумеется, регуляризируемо равномерно на $D_{A^{-1}}$ (и даже на всем B), $R_\delta(u) \equiv q(u)$. Обратно, если существует $R_\delta(u)$ с требуемыми свойствами, то $l(A^{-1}u)|_{D_{A^{-1}}}$ равномерно непрерывен на $D_{A^{-1}}$ в силу теоремы 1.8. Легко показать, что в этом случае линейный функционал $l(A^{-1}u)$ продолжается до линейного непрерывного функционала в B . По определению сопряженного оператора $l \in D_{A^*-1}$.

Это следствие полностью описывает класс линейных функционалов, вычисление значений которых на решении некорректного операторного уравнения представляет собой (абсолютно) корректную задачу.

Характеризация множеств, на которых возможна равномерная оценка погрешности, представляет большой интерес как с практической, так и с теоретической точки зрения. Известные в настоя-

шее время результаты носят не совсем законченный характер. Видимо, можно утверждать, что множество равномерной оценки погрешности достаточно «тощее». Иллюстрацией этого не очень точного утверждения служит

Теорема 1.9. Пусть G — линейное отображение, являющееся обратным к линейному уплотнению в банаховом пространстве, и G неограничено на области своего определения D_G , тогда D , на котором возможна оценка погрешности, — множество первой категории в X , т. е. является счетной суммой нигде не плотных множеств.

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

Интересен вопрос о том, насколько допустимо расширение условий этой теоремы (нелинейные отображения и более общие пространства).

Множество равномерной оценки, вообще говоря, зависит от X , G и R_δ .

Для более специальных задач возможны эффективное (через оператор задачи) описание множества равномерной сходимости в (1.1) и получение равномерных оценок погрешности на нем. Примеры представлены в гл. III—VI.

До сих пор речь шла об оценках погрешности в (1.1) сверху. Оказывается, что существуют универсальные, зависящие только от рассматриваемого отображения и не зависящие от конкретного РА равномерные оценки этой погрешности снизу [39, 64].

Теорема 1.10. Пусть множество $E \subseteq D_G \subseteq X$ состоит более чем из одной точки и найдутся по крайней мере две точки $x_1, x_2 \in E$ такие, что $\rho(x_1, x_2) \leq \delta$. Тогда

$$\sup_{x \in E} \Delta(R_\delta, \delta, x) \geq \frac{1}{2} \omega(\delta, G, E), \quad (1.14)$$

где

$$\omega(\delta, G, E) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in E \\ \rho(x_1, x_2) \leq \delta}} \rho(G(x_1), G(x_2)).$$

(Величина ω в правой части (1.14) не зависит от конкретного и называется модулем непрерывности отображения G на E .)

Доказательство.

Пусть $x_1, x_2 \in E$, $\rho(x_1, x_2) \leq \delta$.

Тогда

$$\Delta(R_\delta, \delta, x_1) \geq \rho(R_\delta(x_1), G(x_1)),$$

$$\Delta(R_\delta, \delta, x_2) \geq \rho(R_\delta(x_2), G(x_2)).$$

Применяя неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned} \Delta(R_\delta, \delta, x_1) + \Delta(R_\delta, \delta, x_2) &\geq \rho(R_\delta(x_1), G(x_1)) + \rho(R_\delta(x_2), G(x_2)) \geq \\ &\geq \rho(G(x_1), G(x_2)). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Из (1.15) имеем

$$2 \sup \Delta(R_\delta, \delta, x) \geq \rho(G(x_1), G(x_2)),$$

где x_1 и x_2 — выбранные нами точки из E . Замечая, что эти точки могут быть произвольными, лишь бы расстояние между ними было меньше δ , получаем неравенство (1.14).

Заметим, что в доказанной теореме нигде не использовалось то обстоятельство, что R_δ — РА для G . В качестве R_δ при фиксированном δ можно было взять любое отображение $R: X \rightarrow Y$, определенное на всем X .

§ 4. Сравнение РА. Понятие оптимального метода

Величина $\sup_{x \in E} \Delta(R_\delta, \delta, x)$ или в более общем виде $\sup_{x \in E} \Delta(R, \delta, x)$, где R — произвольное отображение $X \rightarrow Y$, дает возможность сравнивать алгоритмы по погрешности на множестве E (при фиксированном $\delta = \delta_0$).

Алгоритм $R_\delta^{(1)} \geq R_\delta^{(2)}$ на E при $\delta = \delta_0$, если

$$\sup_E \Delta(R_\delta^{(1)}, \delta, x) \leq \sup_E \Delta(R_\delta^{(2)}, \delta, x).$$

Определение 4. Алгоритм $\bar{R}_\delta$ называется оптимальным на E при $\delta = \delta_0$, если

$$\sup_{x \in E} \Delta(\bar{R}_\delta, \delta, x) = \inf_{R: X \rightarrow Y} \sup_{x \in E} \Delta(R, \delta, x). \quad (1.16)$$

Метод $\bar{R}_\delta$, оптимальный в смысле (1.16) $\forall \delta$, называется оптимальным.

Если интересоваться поведением погрешности при $\delta \rightarrow 0$ как функции δ , то становится оправданным следующее

Определение 5. Алгоритм $\bar{R}(x, \delta)$ называется оптимальным по порядку на E , если $\forall \delta, 0 < \delta \leq \delta_0$,

$$\sup_{x \in E} \Delta(\bar{R}_\delta, \delta, x) \leq k \inf_{R: X \rightarrow Y} \sup_{x \in E} \Delta(R, \delta, x), \quad (1.17)$$

$k \geq 1$ — постоянная, не зависящая от δ .

Основная идея построения оптимальных по порядку и оптимальных методов заключается в том, чтобы сначала получить возможно более точные оценки снизу для правой части (1.16), затем попытаться построить методы, для которых полученная оценка или непосредственно является оценкой сверху (такой метод оптимален), или отличается от нее на мультипликативную постоянную (не зависящую от δ) (такой метод оптимален по порядку).

Оказывается, что оценка снизу, даваемая теоремой 1.10, во многих случаях достаточна для получения алгоритмов, оптимальных по порядку.

Пусть, как и раньше, E — подмножество метрического пространства X и $E \subset D_G$. Рассмотрим следующий метод вычисления $G(x)$ [39]. Для любого $x \in X$

$$\bar{R}_\delta(x) = G(P_\delta x), \quad (1.18)$$

где

$$P_\delta(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in E, \\ \text{элемент } x^* \in E \cap S(x, \delta), & \text{если } x \notin E, E \cap S(x, \delta) \neq \emptyset, \\ \text{элемент } x_0, & \text{если } x \notin E, E \cap S(x, \delta) = \emptyset. \end{cases}$$

Пусть $\omega(\delta, x)$ — локальный модуль непрерывности $G|_E$ в точке $x \in E$.

Л е м м а 1.3. *Справедлива оценка*

$$\Delta(\hat{R}_\delta, \delta, x) \leq \omega(2\delta, x) \quad \forall x \in E. \quad (1.19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\Delta(\hat{R}_\delta, \delta, x) = \sup_{\substack{\rho(\tilde{x}, x) \leq \delta \\ \tilde{x} \in X}} \rho(\hat{R}_\delta(\tilde{x}), G(x)) = \sup_{\substack{\rho(\tilde{x}, x) \leq \delta \\ \tilde{x} \in X}} \rho(G(P_\delta(\tilde{x})), G(x)).$$

В силу (1.18)

$$\rho(P_\delta(\tilde{x}), x) \leq \rho(P_\delta(\tilde{x}), \tilde{x}) + \delta \leq 2\delta.$$

Поэтому

$$\sup_{\rho(\tilde{x}, x) \leq \delta} \rho(G(P_\delta(\tilde{x})), G(x)) \leq \sup_{\substack{x' \in E \\ \rho(x', x) \leq 2\delta}} \rho(G(x'), G(x)) = \omega(2\delta, x).$$

Взяв теперь $\sup$ от обеих частей неравенства (1.19), получим

$$\sup_{x \in E} \Delta(\hat{R}_\delta, \delta, x) \leq \omega(2\delta, G, E). \quad (1.20)$$

Неравенства (1.20) и (1.14) несопоставимы, так как мы, вообще говоря, не знаем, как связаны между собой значения $\omega(2\delta, G, E)$ и $\omega(\delta, G, E)$.

Описанный выше метод (1.18) заведомо оптимален по порядку для тех отображений G и множеств E , где $\exists k \geq 1$ такое, что

$$\omega(2\delta, G, E) \leq k\omega(\delta, G, E). \quad (1.21)$$

Можно по крайней мере утверждать, что класс $\{G, E\}$, для которого выполнено (1.21), не пуст.

Пример. Пусть $X=Y=B$ — банаховы пространства, A — линейный инъективный оператор в B , отображение $G=A^{-1}$, множество $E=A(S)$, где $S=\{x: \|x\| \leq 1\}$. Имеем

$$\omega(2\delta, G, E) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in E \\ \|x_1 - x_2\| \leq 2\delta}} \|A^{-1}(x_1 - x_2)\| = \sup_{\substack{v_1, v_2 \in S \\ \|Av_1 - Av_2\| \leq 2\delta}} \|v_1 - v_2\|. \quad (1.22)$$

Пусть v_1 и v_2 — произвольные элементы из S и

$$\|Av_1 - Av_2\| \leq 2\delta.$$

Тогда

$$\|v_1 - v_2\| = 2\|v_1/2 - v_2/2\| = 2\|w_1 - w_2\|,$$

поскольку $w_1, w_2 \in S$ и $\|Aw_1 - Aw_2\| \leq \delta$.

Окончательно для любой пары v_1, v_2 , участвующей в (1.22), справедливо неравенство

$$\|v_1 - v_2\| \leq 2\omega(\delta, G, E).$$

Следовательно, в рассматриваемом примере справедливо неравенство (1.21) с $k=2$. То, что E — образ единичного шара, не очень существенно. Использовано только то обстоятельство, что S вместе с элементом ω содержит и элемент $\omega/2$. В частности, вместо S можно взять множество $L(S)$, где $L(S)$ — образ шара при линейном отображении L .

Сконструированный выше оптимальный по порядку метод (1.18), вообще говоря, не является РА для отображения G даже на E . В связи с этим возникает вопрос о том, можно ли найти оптимальные и оптимальные по порядку методы среди регуляризирующих алгоритмов. В общем случае ответ на этот вопрос неизвестен. Разумеется, когда $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta, G, E) = 0$, отображение

(1.18) — РА для G на E . Ряд результатов по поводу построения оптимальных по порядку алгоритмов можно найти в [14]. Так, показано, что тихоновские РА оптимальны по порядку.

В заключение этого параграфа коротко остановимся на проблеме построения оптимальных методов. Оценка снизу (1.14) слишком груба для конструирования таких методов. В более специальных случаях ее удается уточнить и на базе этой уточненной оценки требуемые методы построить. В настоящее время оптимальные методы разработаны только для линейных задач в гильбертовых пространствах. Примеры методов даны в гл. IV. Пока только приведем нужную нам в дальнейшем оценку погрешности снизу, уточняющую (1.14) [94].

Теорема 1.11. Пусть Z, U — гильбертовы пространства, оператор $G = A^{-1}$ — обратный к линейному ограниченному оператору A , определенному на Z . Множество $E = A(M)$ — образ при отображении A центрально-симметричного множества $M \subseteq Z$. Тогда для любого отображения $P: U \rightarrow Z$

$$\sup_{z \in E} \Delta(P, \delta, z) \geq \omega_1(\delta, M),$$

здесь

$$\omega_1(\delta, M) = \sup_{\substack{z \in M \\ \|Az\| \leq \delta}} \|z\|.$$

Доказательство можно найти в [78].

Регуляризирующие алгоритмы на компактных множествах

Теперь перейдем к конструированию РА для решения некорректных задач. Типичной некорректной задачей является операторное уравнение первого рода:

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U. \quad (2.1)$$

Здесь Z, U — банаховы пространства, а A — непрерывное инъективное отображение Z в U . В этой главе рассматривается случай, когда из априорных соображений удастся выделить некоторое множество $M \subset Z$ (множество корректности), содержащее элемент $\bar{z}$ — точное решение задачи такое, что обратный оператор A^{-1} , определенный на $AM \subset U$, является непрерывным. В этом случае приближенное решение к $\bar{z}$ может быть легко построено. Заметим, что за приближенное решение нельзя принять элемент $A^{-1}u_\delta$, так как, вообще говоря, он может и не принадлежать множеству AM .

Впервые идея приближенного решения некорректных задач на специальных множествах была выдвинута А. Н. Тихоновым в 1943 г. [95], где было сформулировано понятие задачи, корректной по Тихонову. Задача называется условно корректной, если выполнены следующие требования [95, 69]:

- 1) априори известно, что решение задачи (2.1) существует и принадлежит заданному множеству M ;
- 2) оператор A взаимнооднозначно отображает M на AM ;
- 3) оператор A^{-1} непрерывен на $AM \subset U$.

Это определение, по сути, повторяет определение 1 гл. I.

В отличие от абсолютно корректных (корректных по Адамару) задач в задачах условно корректных: а) снимается требование на разрешимость задачи во всем пространстве; б) условие непрерывности A^{-1} на всем пространстве заменяется условием непрерывности A^{-1} на образе множества корректности.

Если связать понятия условно корректной задачи и регуляризируемости (см. § 1 гл. I), то основной результат гл. II — доказательство регуляризируемости отображения $G = A^{-1}$ на множестве $AM \subset U$. Для условно корректных задач регуляризатор $R_\delta(\cdot)$ на M можно выбрать зависящим только от аргумента u_δ , $R_\delta(\cdot) =$

$=R(\cdot)$. Кроме этого выделение множества корректности позволяет не только построить PA , но и получить равномерную оценку погрешности приближения на множестве M .

§ 1. Нормальная разрешимость операторных уравнений

В этом параграфе устанавливается связь между устройством области значений оператора $AZ=R(A)$ и устойчивостью задачи (2.1), точнее, выясняется вопрос о том, когда множество условной корректности M совпадает со всем пространством Z .

Рассмотрим простейшую ситуацию — случай линейного инъективного оператора A ; Z, U — банаховы пространства.

Определение 1. Графиком оператора A с областью определения $D(A) \subset Z$ называется совокупность пар $\{z, Az\}$, где $z \in D(A)$.

График оператора является подмножеством прямой суммы пространств Z и U .

Определение 2. Линейный оператор A называется замкнутым, если его график замкнут в прямой сумме пространств Z и U .

Замкнутость оператора означает, что если $z_n \in D(A)$, $z_n \rightarrow z$, а $Az_n \rightarrow u$, то $z \in D(A)$ и $u = Az$. Ясно, что при $D(A) = Z$ и линейности и ограниченности оператора A этот оператор замкнут. Нетрудно убедиться в том, что замкнутость оператора A влечет за собой замкнутость оператора A^{-1} . На самом деле график оператора A^{-1} можно записать в виде $\{Az, z\}$, $z \in D(A)$, т. е. он получается из графика оператора A перестановкой z и Az , а значит, является замкнутым множеством в прямой сумме Z и U . Справедлива

Лемма 2.1. *Если линейный оператор A непрерывен и замкнут, то область определения $D(A)$ — замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть z — предельная точка $D(A)$: $z_n \rightarrow z$, где $z_n \in D(A)$. Последовательность Az_n фундаментальна в U , так как

$$\|Az_n - Az_m\|_U \leq \|A\| \|z_n - z_m\|_Z.$$

Из полноты U следует, что $Az_n \rightarrow f$, $f \in U$. Остается воспользоваться замкнутостью оператора A . Справедлива

Теорема 2.1. *Пусть A — линейный непрерывный инъективный оператор с $D(A) = Z$ и $R(A) \subseteq U$, где Z и U — банаховы пространства. Для того чтобы обратный оператор из $R(A)$ в Z был ограничен ($\|A^{-1}\| < +\infty$), необходимо и достаточно, чтобы $\overline{R(A)} = R(A)$.*

Доказательство. Необходимость. Учитывая, что оператор A непрерывен, а $D(A) = Z$, получаем, что A — замкнутый оператор. Тогда A^{-1} также замкнут и по условию теоремы непрерывен. По предыдущей лемме $\overline{R(A)} = R(A)$.

Достаточность. Если $\overline{R(A)} = R(A)$, то линейный оператор A взаимнооднозначно и непрерывно отображает банахово пространство Z на банахово пространство $R(A)$. По теореме Банаха [74] оператор A^{-1} непрерывен, а следовательно, ограничен, т. е. $\|A^{-1}\| < +\infty$.

Таким образом, для линейного взаимнооднозначного непрерывного отображения устойчивость и разрешимость задачи тесно связаны. В частности, для некорректных задач, когда A^{-1} неограничен на области определения, множество $R(A)$ не является замкнутым и, следовательно, уравнение (2.1) не может быть разрешимо на всем пространстве U . Так, например, обычное интегральное уравнение Фредгольма первого рода с замкнутым ядром, интегрируемым с квадратом (оператор действует из L_2 в L_2), заведомо неразрешимо во всем пространстве, так как оператор прямой задачи вполне непрерывен и не имеет непрерывного обратного.

Таким образом, для некорректных задач, где A^{-1} неограничен на области определения, характерно нарушение сразу двух условий корректности по Адамару (разрешимости и непрерывности обратного оператора).

Нормально разрешимые уравнения ($R(A)$ замкнуто) могут приводить к некорректным задачам в U только за счет того, что $R(A) = \overline{R(A)} \neq U$. В этом случае приближенно заданный элемент $u_\delta \in U$ такой, что $\|u_\delta - \tilde{u}\|_U \leq \delta$, может не принадлежать $R(A)$. Однако $G = A^{-1}$ регуляризируемо в U на $R(A)$, причем регуляризующий алгоритм можно построить, например, следующим образом. Пусть P_δ — оператор, который ставит в соответствие любому элементу $u_\delta \in U$ из δ -окрестности $\tilde{u}$ произвольный элемент $u'_\delta \in R(A)$ такой, что $\|u'_\delta - u_\delta\|_U \leq \delta$. Тогда $G = A^{-1}P_\delta$ — РА для задачи (2.1).

§ 2. Теоремы об устойчивости обратных отображений

В этом параграфе решается вопрос о типичной структуре множества корректности в том случае, когда оно не совпадает со всем Z .

В качестве множества корректности $M \subset Z$ может быть взят любой компакт из Z . Основанием для этого является следующая хорошо известная лемма [95].

Лемма 2.2. Пусть Z, U — банаховы пространства, а оператор A отображает компакт $M \subset Z$ на $AM \subset U$ непрерывно и взаимнооднозначно. Тогда обратный оператор A^{-1} непрерывен на AM .

Приведем ряд примеров компактных множеств в банаховых пространствах.

Пример 1. Любое ограниченное замкнутое множество в конечномерном пространстве — компакт. Несмотря на тривиальность

этого примера, до появления современного мощного аппарата регуляризации большинство методов приближенного решения некорректных задач базировалось на следующем приеме. Искомые функции параметризовались конечным числом параметров, исходя из априорных представлений о решении задачи. Если область изменения параметров ограничена, то таким образом определенное множество корректности компактно в Z .

Пример 2. Пусть S — сфера рефлексивного пространства V , а B — линейный вполне непрерывный оператор из V в Z . Тогда в качестве компакта можно взять образ сферы при действии оператора B , т. е. $M = BS$.

Пример 3. При решении операторных уравнений типа (2.1), где неизвестной является функция $z(t)$, $t \in [a, b]$, в ряде задач существует априорная информация о характере искомого решения такая, как ограниченность функции $z(t)$, ее монотонность, выпуклость и т. п. Рассмотрим множество ограниченных невозрастающих функций $Z_{\downarrow c}$ таких, что $z(t) \in Z_{\downarrow c}$, если $0 \leq z(t) \leq c$, $z(t_1) \leq z(t_2)$, $t_1 \leq t_2$, $t, t_1, t_2 \in [a, b]$. Множество $Z_{\downarrow c}$ является компактом в L_p ($p > 1$). На самом деле, по теореме Хелли о выборе [67] из любой последовательности элементов $z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t), \dots$ всегда можно выбрать подпоследовательность $z_{n'}(t)$, сходящуюся всюду к некоторой функции $z(t) \in Z_{\downarrow c}$. Последнее утверждение и равномерная ограниченность последовательности функций дают сходимость в L_p .

Пример 4. Аналогично примеру 2 множество Z_c' выпуклых вверх функций таких, что $0 \leq z(t) \leq c \quad \forall t \in [a, b]$, является компактом в L_p ($p > 1$).

Таким образом, компактные множества могут служить примерами множеств корректности в задаче (2.1) с непрерывным (не обязательно линейным) оператором.

Для линейных непрерывных операторов множество корректности M можно решить до алгебраической суммы $M = K + \mathcal{L}$, где K — компактное множество, а $\mathcal{L}$ — конечномерное подпространство банахова пространства Z .

Справедлива

Теорема 2.2 [64]. Пусть A — линейный непрерывный взаимнооднозначный оператор, действующий из Z в U , где Z и U — банаховы пространства. Если множество $M \subset Z$ имеет вид $M = K + \mathcal{L}$, $K \cap \mathcal{L} = \emptyset$, где K — компакт, а $\mathcal{L}$ — конечномерное подпространство, то оператор A^{-1} непрерывен на $AM \subset U$.

Доказательство. Из взаимнооднозначности отображения и условия $K \cap \mathcal{L} = \emptyset$ следует, что $AK \cap A\mathcal{L} = \emptyset$. Следовательно, на AK определен обратный оператор A_1^{-1} , а на $A\mathcal{L}$ — оператор A_2^{-1} , причем $A^{-1}u = A_1^{-1}v + A_2^{-1}w$, $v \in AK$, $w \in A\mathcal{L}$. Оператор A_2^{-1} конечномерен и поэтому непрерывен. Оператор A_1^{-1} непрерывен по лемме 2.2. Остается отметить, что сходимость $u_n \rightarrow u$ влечет за собой сходимость $v_n \rightarrow v$, $w_n \rightarrow w$. Откуда следует непрерывность оператора A^{-1} на AM .

Приведем примеры множества корректности M , представимого в виде алгебраической суммы компактного множества и конечномерного подпространства.

Пример 1. Пусть M — множество непрерывно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ таких, что $\int_0^1 [\varphi'(x)]^2 dx \leq 1$. Нетрудно убедиться, что

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \left| \int_0^x \varphi'(s) ds \right| \leq \left[\int_0^1 (\varphi'(x))^2 dx \right]^{1/2} \leq 1,$$

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \left\{ \int_{x_1}^{x_2} [\varphi'(x)]^2 dx \right\}^{1/2} |x_2 - x_1| \leq |x_2 - x_1|.$$

Возьмем множество $K \subset M$ как множество функций $\widehat{\varphi}(x)$, для которых $\widehat{\varphi}(0) = 0$. По теореме Арцелла множество K — компакт в $C[0, 1]$. Множество M состоит из функций $\varphi(x)$ вида $\varphi(x) = \widehat{\varphi}(x) + c$ и представимо в виде $M = K + \mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ — одномерное подпространство.

Пример 2. Рассмотрим в L_p ($p > 1$) множество функций, вариация которых не превосходит заданной константы c . Обозначим это множество V_c . Пусть $\overset{0}{V}_c \subset V_c$ содержит те функции $\widehat{\varphi}(x)$ из V_c , у которых $\widehat{\varphi}(0) = 0$. Множество $\overset{0}{V}_c$ является компактом в L_p . Последнее утверждение — следствие равномерной ограниченности функций из $\overset{0}{V}_c$ и теоремы Хелли [67]. Теперь V_c представимо в виде $V_c = K + \mathcal{L}$, где $K = \overset{0}{V}_c$, а $\mathcal{L}$ — одномерное подпространство.

В определенном смысле требование к множеству корректности $M = K + \mathcal{L}$, где K — компакт, а $\mathcal{L}$ — конечномерное подпространство, нельзя ослабить.

Определение 2. Множество $M \subset Z$ называется ограниченно компактным, если каждое его ограниченное подмножество компактно. Ясно, что множество M , представленное в виде $M = K + \mathcal{L}$, где K — компакт, а $\mathcal{L}$ — конечномерное подпространство, ограниченно компактно. Для линейных вполне непрерывных операторов ограниченная компактность M является необходимым условием непрерывности A^{-1} на AM . Справедлива

Теорема 2.3 [64]. Пусть M — выпуклое замкнутое подмножество рефлексивного пространства Z , A — линейный взаимнооднозначный вполне непрерывный оператор, действующий из Z в U . Для того чтобы оператор A^{-1} был непрерывен на $AM \subset U$, необходимо, чтобы M было ограниченно компактно.

Доказательство. Предположим противное: найдется ограниченная и некомпактная последовательность $\{z_n\} \in M$, т. е. существует подпоследовательность $\{z_{n'}\}$, не сходящаяся сильно. Вви-

ду рефлексивности M можно считать, что подпоследовательность $z_{n'} \xrightarrow{\text{сл}} z^*$ при $n' \rightarrow \infty$. Поскольку множество M выпукло и замкнуто, то оно и слабо замкнуто. Отсюда $z^* \in M$. По условию теоремы оператор A вполне непрерывен, значит, последовательность $u_{n'} = Az_{n'}$ сильно в U сходится к $Az^* = u^*$. Таким образом, последовательность $u_{n'} \rightarrow u^*$ и, следовательно, по условию теоремы последовательность $A^{-1}u_{n'} = z_{n'}$ сходится. Но мы предположили, что $z_{n'}$ не является сходящейся. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 3. Квазирешение некорректной задачи

В предыдущем параграфе был приведен ряд теорем, гарантирующих непрерывность обратного оператора A^{-1} на множестве корректности M . Полученные результаты позволяют строить РА для решения некорректной задачи (2.1) на M . Конечно, сам оператор A^{-1} еще не порождает РА хотя бы потому, что в условно некорректной задаче оператор A^{-1} определен не на всем U . Существует простой и достаточно общий метод построения РА для условно корректных задач — метод квазирешений. По сути дела он состоит в построении продолжения отображения A^{-1} с множества AM на все U такое, что построенное продолжение непрерывно во всех точках AM .

Пусть в уравнении (2.1) A — непрерывный оператор, действующий из банахова пространства Z в банахово U , а M — множество корректности.

Определение 3 [62—64]. Квазирешением уравнения (2.1) на M называется любой элемент $z_\delta^* \in M$, минимизирующий невязку

$$\|Az_\delta^* - u_\delta\|_U = \min_{z \in M} \|Az - u_\delta\|_U.$$

В силу непрерывности оператора A функционал $g(z) = \|Az - u_\delta\|_U$ непрерывен.

Пусть сначала множество корректности M — компакт в Z . Тогда функционал $g(z)$ достигает на M точной нижней грани для любого фиксированного элемента $u_\delta \in U$. Следовательно, квазирешение существует и для любого элемента $u_\delta \in U$ такого, что $\|u_\delta - \bar{u}\|_U \leq \delta$. Считаем, что отображение $A: M \rightarrow U$ взаимнооднозначно и элементу $\bar{u} \in AM$ соответствует элемент $\bar{z} \in M$. Обозначим z_δ^* произвольный элемент из множества квазирешений. Таким образом, задано правило $z_\delta^* = R_\delta(u)$, причем оператор $R_\delta(\cdot)$ определен на всем пространстве. Ясно, что

$$\|Az_\delta^* - u_\delta\|_U \leq \|A\bar{z} - u_\delta\|_U + \|Az_\delta^* - u_\delta\|_U \leq 2\delta.$$

Поскольку $z_\delta^*, \bar{z} \in M$, а оператор A^{-1} непрерывен из $AM \subset U$ в Z , то $\|z_\delta^* - \bar{z}\|_Z \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, т. е. отображение $R_\delta(u)$ — РА для A^{-1} на M .

Оператор $R_\delta(u)$ на самом деле зависит лишь от аргумента u , т. е. $R_\delta(u) \equiv R(u)$. Это согласуется с теоремой 1.1. В ее условиях для существования РА вида $R(\cdot)$ требуется, чтобы A^{-1} , определенный на AM , можно было продолжить на все пространство так, чтобы на AM продолжение было непрерывно. Построенный РА $R(\cdot)$ играет роль такого продолжения.

Представляет интерес вопрос о единственности квазиразрешения. Ответ на него можно получить, используя известную теорему о единственности точки экстремума строго выпуклого функционала в банаховых пространствах.

Определение 4. Функционал $g(z)$, определенный на выпуклом множестве Q банахова пространства Z , называется строго выпуклым, если для любого $\lambda \in (0, 1)$ и для любых $z_1 \neq z_2$, $z_1, z_2 \in Q$ выполняется неравенство

$$g(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) < \lambda g(z_1) + (1-\lambda)g(z_2). \quad (2.2)$$

(Если в определении знак $<$ заменить на $\leq$ и $\lambda \in [0, 1]$, то получим определение выпуклого на $Q \subset Z$ функционала.)

Определение 5. Банахово пространство называется строго выпуклым (строго нормированным), если равенство $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ возможно только при $y = \lambda x$, где λ — вещественное число.

Заметим, что в строго выпуклом банаховом пространстве функционал $\|x\|$ не является строго выпуклым. На самом деле, если $x_2 = \alpha x_1$ (α — вещественный параметр), то для $\lambda \in (0, 1)$

$$\|\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1\| = \lambda\|x_2\| + (1-\lambda)\|x_1\|.$$

Однако функционал $\|x\|^2$ строго выпуклый.

Лемма 2.3. В строго выпуклом пространстве функционал $\|x\|^2$ является строго выпуклым.

Доказательство. Пусть это не так и существуют α^* ($\alpha^* \in (0, 1)$), x, y ($x \neq y$) такие, что

$$\|\alpha^*x + (1-\alpha^*)y\|^2 = \alpha^*\|x\|^2 + (1-\alpha^*)\|y\|^2. \quad (2.3)$$

Тогда в силу неравенства треугольника и (2.3)

$$\alpha^*\|x\|^2 + (1-\alpha^*)\|y\|^2 \leq (\alpha^*\|x\| + (1-\alpha^*)\|y\|)^2. \quad (2.4)$$

Предположим, что, например, $x \neq 0$ и x и y не пропорциональны. В силу строгой выпуклости пространства неравенство (2.4) строгое:

$$\begin{aligned} \alpha^*\|x\|^2 + (1-\alpha^*)\|y\|^2 &< \alpha^{*2}\|x\|^2 + 2\alpha^*(1-\alpha^*)\|x\| \cdot \|y\| + \\ &+ (1-\alpha^*)^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(\alpha^* - \alpha^{*2})(\|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2) < 0. \quad (2.5)$$

Но $\alpha^* \in (0, 1)$, стало быть, неравенство (2.5) противоречиво и x ,

y обязаны быть пропорциональными: $x = \lambda y$, $\lambda \neq 0$. Из неравенства (2.3) получаем

$$[\alpha^* \lambda + (1 - \alpha^*)]^2 = \alpha^* \lambda^2 + (1 - \alpha^*).$$

Отсюда следует, что $\lambda = 1$, или $x = y$, вопреки первоначальному предположению. Если же $x = 0$, то это противоречит условию $\alpha^* \neq 0$, $\alpha^* \neq 1$.

Как известно, пример строго нормированных банаховых пространств — пространства l_p , L_p при $p > 1$, а l_1 , L_1 , $C[a, b]$ не являются таковыми. Любое гильбертово пространство строго нормировано. Для строго выпуклых функционалов справедлива следующая теорема о достижимости экстремальных точек в банаховом пространстве [31].

Теорема 2.4. Строго выпуклый непрерывный функционал $g(z)$, определенный на выпуклом компактном замкнутом множестве банахова пространства $M \subset Z$, достигает своей точной нижней грани в единственной точке $z^ \in M$.*

Условия на множество M можно ослабить, накладывая дополнительные ограничения на пространство.

Теорема 2.5 [31]. Строго выпуклый непрерывный функционал $g(z)$, определенный на выпуклом ограниченном замкнутом множестве M рефлексивного банахова пространства, достигает своей точной нижней грани в единственной точке $z^ \in M$.*

Вернемся теперь к задаче отыскания квазирешения для уравнения (2.1). Очевидно, что задачу определения квазирешения на множестве M можно переформулировать как эквивалентную ей задачу поиска элемента z^* , на котором функционал $\|Az - u_0\|_U^2$ достигает точной нижней грани (отличие от определения состоит в том, что функционал $\|Az - u_0\|_U$ заменяется на $\|Az - u_0\|^2$). Если пространство строго нормировано, а линейный оператор A взаимнооднозначно отображает M на $AM \subset U$, то функционал $\|Az - u_0\|_U^2$ является строго выпуклым функционалом для $\forall u_0 \in U$. Поэтому справедлива следующая теорема о единственности квазирешения.

Теорема 2.6. Пусть A — линейный непрерывный и взаимнооднозначный оператор, множество M — выпуклый компакт в Z , а U — строго выпуклое банахово пространство. Тогда для любого $u \in U$ квазирешение уравнения (2.1) существует, единственно и непрерывно зависит от u .

Доказательство. По условиям теоремы $g(z) = \|Az - u\|_U^2$ для любого фиксированного u — строго выпуклый функционал, определенный на замкнутом выпуклом компактном множестве $M \subset Z$. Непрерывность функционала $g(z)$ является тривиальным следствием непрерывности оператора A . Поэтому по теореме 2.4 функционал $g(z)$ достигает точной нижней грани на M в единственной точке. Таким образом, квазирешение определено и единственно для любого $u \in U$.

Непрерывная зависимость квазирешения от u — тривиальное следствие компактности множества M и непрерывности оператора A^{-1} на множестве $AM \subset U$.

З а м е ч а н и е. Если множество корректности M расширить до $M = K + \mathcal{L}$, где K — компакт в Z , а $\mathcal{L}$ — конечномерное подпространство, то, усиливая требования на пространство U , можно доказать аналог теоремы 2.6. Все утверждения теоремы 2.6 останутся справедливыми, если U строго выпукло и обладает свойством Ефимова—Стечкина (т. е. рефлексивно, и из слабой сходимости $u_n \xrightarrow{\text{сл}} u$ и сходимости норм $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$ следует сильная сходимость $u_n \rightarrow u$ при $n \rightarrow \infty$).

Для приближенного отыскания квазирешений на множестве корректности $M \subset Z$ можно применять известные методы минимизации функционалов. Эти методы наиболее исследованы, если функционал $g(z) = \|Az - u_\delta\|_U^2$ строго выпуклый (что имеет место, например, если оператор A линейен и пространство U гильбертово), а M — выпуклый компакт в Z . В этом случае отыскание квазирешения — задача выпуклого программирования. Используя различные итерационные методы минимизации (проекции сопряженных градиентов, наискорейшего спуска, методы второго порядка и т. п.), можно получить последовательность z_n , минимизирующую функционал $g(z)$ на M . Так как множество M — компакт, то последовательность z_n сходится к единственной точке минимума $g(z)$ на M (в случае инъективного оператора A), т. е. к квазирешению уравнения (2.1). Все эти вопросы касаются классических, хорошо изученных экстремальных задач. Существует обширная литература по этому поводу [35, 36, 88]. Мы не будем подробно обсуждать подобные алгоритмы.

В настоящее время использование дополнительной информации об искомом решении в случае, когда этой информации достаточно, чтобы сделать задачу условно корректной по Тихонову, позволило создать комплексы эффективных алгоритмов решения широкого круга обратных задач математической физики [104].

Поскольку итерационные алгоритмы в задачах с ограничениями обычно не решают задачу минимизации функционала за конечное (известное) число шагов, то задачу отыскания квазирешения приходится решать приближенно. Поэтому при построении реальных вычислительных алгоритмов, основанных на идее квазирешения, сам метод квазирешений несколько модифицируют.

Суть такой модификации в следующем. Рассмотрим некорректную задачу (2.1). Пусть Z , U — произвольные банаховы пространства, а A — непрерывное взаимнооднозначное отображение компакта $M \subset Z$ на $AM \subset U$. Вместо точного значения $\bar{u} = A\bar{z}$ известно его приближение — элемент $u_\delta \in U$ такой, что $\|u_\delta - \bar{u}\|_U \leq \delta$. Вместо квазирешения предлагается следующий РА: заданной паре (u_δ, δ) ставится в соответствие произвольный элемент $z_\delta \in M$

такой, что $\|Az_\delta - u_\delta\|_U \leq \delta$. Ясно, что этот элемент существует, так как $\|A\bar{z} - u_\delta\|_U \leq \delta$, $\bar{z} \in M$. Ясно, что $\|Az_\delta - A\bar{z}\|_U \leq 2\delta$. Поскольку $\bar{z}, z_\delta \in M$, а M — компакт в Z , то $z_\delta \xrightarrow{Z} \bar{z}$ при $\delta \rightarrow 0$, т. е. предложенный алгоритм регуляризирующий. Его можно назвать алгоритмом δ -квазирешения.

При использовании такого РА снимаются проблемы, связанные с единственностью квазирешения и невозможностью его точного отыскания. Для нахождения приближенного решения в этом случае используются те же итерационные алгоритмы минимизации функционала $g(z) = \|Az - u_\delta\|_U^2$, при помощи которых строится итерационная последовательность z_n , минимизирующая $g(z)$ на M . Минимизацию $g(z)$ на M достаточно проводить до уровня погрешности δ^2 . Правда, в предлагаемом РА в отличие от квазирешения используется уже вся информация о приближении: $u_\delta \in U$ и величина δ .

Решение задачи на компакте привлекательно еще и тем, что вместе с приближенным элементом $z_\delta \in M$ можно получить оценку точности приближения z_δ к $\bar{z}$ в метрике Z (через характеристики A и M).

Если пользоваться методом квазирешений или описанной его модификацией, то можно оценить погрешность приближений. Действительно, если $A\bar{z} = \bar{u}$ и $\|\bar{u} - u_\delta\|_U \leq \delta$, а z_δ выбрано из множества $M \cap \{z : \|Az - u_\delta\|_U \leq \delta\}$, то

$$\|Az_\delta - A\bar{z}\|_U \leq \|Az_\delta - u_\delta\|_U + \|u_\delta - \bar{u}\|_U \leq 2\delta.$$

Поэтому в обозначениях гл. I

$$\|z_\delta - \bar{z}\|_Z \leq \omega(2\delta, A^{-1}, AM) = \varphi(\delta), \quad (2.6)$$

здесь $\omega(2\delta, A^{-1}, AM)$ — модуль непрерывности оператора A^{-1} на множестве AM . Более того,

$$\sup_{\bar{z} \in M} \|z_\delta - \bar{z}\|_Z \leq \varphi(\delta).$$

Сопоставляя (2.6) с неравенством (1.14), мы видим, что описанные методы квазиоптимальны на AM , если для модуля непрерывности A^{-1} на AM выполнено соотношение (1.21).

Задача оценки сверху модуля непрерывности обратных операторов на различных компактных множествах достаточно хорошо изучена. Наиболее подробные результаты получены, когда компакт M является образом сферы $S = \{v \in V : \|v\| \leq c\}$ рефлексивно-го пространства V . Образование сферы $S \subset V$ в пространство Z осуществляется при помощи линейного вполне непрерывного оператора B , т. е. $M = BS$. В этом случае заведомо выполняется (1.21) и методы типа квазирешений квазиоптимальны на AM [64].

До сих пор рассматривался случай, когда оператор A задан точно. Пусть в задаче (2.1) приближенно заданы элемент $\bar{u}$ и

оператор A , т. е. задано семейство непрерывных операторов A_h таких, что

$$\|A_h z - Az\|_U \leq \psi(h, \|z\|).$$

Здесь $\psi(h, y)$ — функция, непрерывная по совокупности аргументов при $h \geq 0$ и $y \geq 0$, монотонно неубывающая по второму аргументу, неотрицательная и такая, что $\psi(h, y) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ равномерно по y , принадлежащему некоторому отрезку $[0, c_0]$. Если A и A_h — линейные операторы, то $\|A_h z - Az\|_U \leq h\|z\|$, т. е. $\psi(h, \|z\|) = h\|z\|$.

Пусть априори известно, что решение $\bar{z}$ (2.1) принадлежит компакту $M \subset Z$, а оператор A взаимнооднозначно отображает M на $AM \subset U$. Обозначим $\eta = (\delta, h)$. Определим M_η как множество векторов $z \in M$ таких, что

$$\|A_h z - u_\delta\|_U \leq \psi(h, \|z\|) + \delta.$$

Множество M_η для $\eta > 0$ не пусто, так как содержит элемент $\bar{z} \in M$. Поскольку M — компакт в нормированном пространстве, то существует константа c_0 такая, что

$$\sup_{z \in M} \|z\| \leq c_0.$$

Пусть z_η — произвольный элемент из M_η . Тогда

$$\begin{aligned} \|Az_\eta - A\bar{z}\|_U &\leq \|Az_\eta - A_h z_\eta\|_U + \|A_h z_\eta - u_\delta\|_U + \\ &+ \|u_\delta - \bar{u}\|_U \leq 2(\psi(h, c_0) + \delta) \rightarrow 0, \delta, h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В силу свойств функции $\psi(h, y)$ и непрерывности оператора A^{-1} на множестве AM имеем $z_\eta \rightarrow \bar{z}$ при $\eta \rightarrow 0$. Таким образом, за приближенное решение может быть принят любой элемент z_η из множества M_η . Итак, на компактных множествах задача построения приближенного решения в условиях приближенно заданного оператора решается полностью аналогично случаю, когда оператор известен точно.

Представляет интерес случай, когда априорной информации достаточно лишь для того, чтобы множество M было компактно в слабой топологии. Хорошо известно, например, что в рефлексивном пространстве всякий шар слабо компактен. Используя аналогичную технику, можно построить приближенное решение, сходящееся к точному в слабой топологии. Слабая топология, вообще говоря, не метризуема во всем пространстве. Однако если использовать специальную конструкцию приближений, то для них можно указать и некоторые оценки погрешности.

Изложим идею построения таких приближений в простейшем варианте линейного непрерывного оператора $L_2[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$. Пусть априори известно, что точное решение задачи $\bar{z}(t) \in C[0, 1]$ и $|\bar{z}(t)| \leq R \forall t \in [0, 1]$. Перейдем к конечномерным аналогам функций. Пусть $v(t)$ — непрерывная функция. Разобьем сегмент $[0, 1]$ на N равных частей. Обозначим v_{iN} среднее значе-

ние функции $v(t)$ на интервале $(i-1/N, i/N)$, $i=1, 2, \dots, N$. Назовем конечномерным аналогом функции $v(t)$ кусочно-постоянную функцию

$$v_N(t) = \begin{cases} v_{1N}, & 0 < t < 1/N, \\ v_{2N}, & \frac{1}{N} < t < 2/N, \\ \dots & \dots \\ v_{NN}, & \frac{N-1}{N} < t < 1. \end{cases}$$

Приближенное решение (вернее, его конечномерный аналог) $z_N^\delta(t)$ ищем в виде

$$z_N^\delta(t) = \sum_i (u_\delta, \psi_{iN}^\delta) \frac{e_{iN}(t)}{N},$$

где

$$e_{iN}(t) = \begin{cases} N, & t \in (i/N, i+1/N), \\ 0, & t \notin (i/N, i+1/N). \end{cases}$$

Функции $\psi_{iN}^\delta(t)$ находятся как решения задач

$$\|A^* \psi_{iN}^\delta - e_{iN}\| = \min_{\|v\| \leq 1/\sqrt{\delta}} \|Av - e_{iN}\|.$$

Справедлива

Теорема 2.7 [40]. Пусть априори известно, что $|z(t)| \leq R$ $\forall t \in [0, 1]$. Тогда для конечномерного аналога приближенного решения $z_N^\delta(t)$ и конечномерного аналога точного решения $\bar{z}_N(t)$ справедлива следующая оценка точности:

$$\max_{t \in [0, 1]} |z_N^\delta(t) - \bar{z}_N(t)| \leq \sqrt{\delta} + R \max_{1 \leq i \leq N} \|A^* \psi_{iN}^\delta - e_{iN}\| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Таким образом, информация о принадлежности решения слабую компакту позволяет не только построить приближенное решение задачи в слабой топологии, но и дать количественную оценку погрешности приближения для конечномерных аналогов решений. Тем не менее нужно понимать, что для «существенно» некорректных задач (A^{-1} неограничен на области определения) полученная при фиксированном δ оценка, вообще говоря, стремится к ∞ при $N \rightarrow \infty$!

§ 4. Свойства δ -квазирешений на множествах специальной структуры

В алгоритме квазирешений и его модификации (δ -квазирешения) сходимость приближений z_δ на множестве корректности M к точному решению $\bar{z}$ сильная в Z . Однако при помощи техники компактного вложения в ряде случаев удастся получить более тонкие

результаты. Обычно это удается сделать, когда есть дополнительная априорная информация о точном решении. Несколько примеров таких результатов приводится в этом параграфе.

Рассмотрим операторное уравнение (2.1). Пусть априори известно, что точное решение некорректной задачи (2.1) $\bar{z}$ принадлежит множеству монотонных ограниченных функций: $Z\downarrow_C \subset L_p$ ($p > 1$). Пусть также $Z = L_p$, а оператор A взаимнооднозначно отображает $Z\downarrow_C$ на $AZ\downarrow_C \subset U$. Как обычно, u_δ обозначим приближенное значение элемента $\bar{u}$, $\|u_\delta - \bar{u}\|_U \leq \delta$, $Z\downarrow_C(\delta)$ — множество функций $z(s)$ из $Z\downarrow_C$ таких, что $\|Az - u_\delta\|_U \leq \delta$. Так как $Z\downarrow_C$ компактен в L_p , то при любом выборе элементов $z_\delta \in Z\downarrow_C(\delta)$ имеет место сходимость $z_\delta \xrightarrow{L_p} \bar{z}$ при $\delta \rightarrow 0$.

Однако если относительно точного решения есть дополнительная информация, например о непрерывности $\bar{z}(s)$ на $[a, b]$, то можно усилить результат. При этом приближенные решения, как и раньше, принадлежат $Z\downarrow_C$, т. е. могут быть разрывны.

Теорема 2.8. Пусть $\bar{z}(s) \in C[a, b] \cap Z\downarrow_C$, а $[\gamma, \sigma]$ — произвольный сегмент из интервала (a, b) . Пусть также $z_{\delta_n} \in Z\downarrow_C(\delta_n)$ и $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $z_{\delta_n}(s) \xrightarrow{C[\gamma, \sigma]} \bar{z}(s)$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Покажем сначала, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $z_{\delta_n}(s)$ сходится к $\bar{z}(s)$ и в каждой точке $s \in (a, b)$. Выберем из $z_{\delta_n}(s)$ подпоследовательность $z_{\delta_{n'}}(s)$, сходящуюся в каждой точке $s \in (a, b)$ к некоторой функции $\bar{\bar{z}}(s) \in Z\downarrow_C$. Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|A\bar{\bar{z}} - A\bar{z}\|_U &\leq \|A\bar{\bar{z}} - Az_{\delta_{n'}}\|_U + \|Az_{\delta_{n'}} - u_{\delta_{n'}}\|_U + \\ &+ \|u_{\delta_{n'}} - \bar{u}\|_U \leq \varepsilon_{n'} + 2\delta_{n'}, \end{aligned}$$

причем $\varepsilon_{n'} \rightarrow 0$ при $n' \rightarrow \infty$ в силу непрерывности оператора A из L_p в U . Отсюда $\bar{\bar{z}} \xrightarrow{L_p} \bar{z}$.

Поскольку $\bar{\bar{z}}(s)$ монотонна, а $\bar{z}(s)$ монотонна и непрерывна, то $\bar{\bar{z}}(s) \equiv \bar{z}(s) \quad \forall s \in (a, b)$. Таким образом, в каждой внутренней точке сегмента $[a, b]$ $\bar{z}(s) = \bar{\bar{z}}(s)$. Поскольку из последовательности $z_{\delta_n}(s)$ всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность и сходятся они к одному и тому же элементу $\bar{z}(s)$, то сама последовательность $z_{\delta_n}(s)$ сходится к $\bar{z}(s)$ в каждой точке интервала (a, b) .

Покажем теперь, что последовательность $z_{\delta_n}(s)$ сходится к $\bar{z}(s)$ равномерно на любом замкнутом сегменте $[\gamma, \sigma] \subset (a, b)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из равномерной непрерывности $\bar{z}(s)$ на сегменте $[\gamma, \sigma]$ следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых $t_1, t_2 \in [\gamma, \sigma]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\bar{z}(t_1) - \bar{z}(t_2)| < \varepsilon/4$. Разобьем отрезок $[\gamma,$

$\sigma]$ точками $\gamma = t_1 < t_2 < \dots < t_m = \sigma$ таким образом, чтобы $|t_{i+1} - t_i| < \delta(\varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Выберем $N(\varepsilon)$ так, чтобы для любых $n > N(\varepsilon)$ в любой точке разбиения t_i , $i = 1, 2, \dots, m$, выполнялось неравенство

$$|z_{\delta_n}(t_i) - \bar{z}(t_i)| < \varepsilon/4.$$

Тогда из монотонности $\bar{z}(t)$, $z_{\delta_n}(t)$ следует, что для любой точки $t \in [\gamma, \sigma]$

$$|z_{\delta_n}(t) - \bar{z}(t)| < \varepsilon$$

при $n > N(\varepsilon)$.

З а м е ч а н и е 1. Еще раз подчеркнем тот факт, что элементы множества $Z \downarrow_C$ не являются непрерывными функциями. Тем не менее $\sup_{t \in [\gamma, \sigma]} |z_{\delta_n}(t) - \bar{z}(t)| \rightarrow 0$ при $\delta_n \rightarrow 0$.

З а м е ч а н и е 2. Ясно, что множество $Z \downarrow_C$ не является компактом $C[a, b]$, т. е. полученный результат не укладывается в стандартную схему. Тем не менее он получен благодаря схеме компактного вложения (теорема о выборе Хелли) и дополнительной информации о точном решении задачи.

З а м е ч а н и е 3. Результаты легко переносятся на случай, когда $\bar{z}(t)$ — кусочно-непрерывная монотонная функция. В этом случае сходимость последовательности приближений к точному решению задачи равномерна на каждом замкнутом сегменте $[\gamma, \sigma]$, не содержащем точек a , b и точек разрыва $\bar{z}(s)$.

Таким образом, в случае, когда априори известно, что точное решение $\bar{z}(s)$ — монотонная ограниченная функция, то за приближенное решение можно принять любой элемент $z_0 \in Z \downarrow_C(\delta)$. При этом имеет место сходимость не только в L_p (где множество $Z \downarrow_C$ компактно), но и равномерная сходимость к такому решению в указанном выше смысле.

Аналогичную теорему можно доказать, когда априори известно, что точное решение задачи $\bar{z}(s) \in \widehat{Z}_C$, т. е. является выпуклой вверх функцией. Более того, в этом случае имеет место не только сходимость самих приближений, но и в определенном смысле сходимость их производных.

Приведем пример еще одного результата, не укладывающегося в общую схему, для случая, когда точное решение — выпуклая (для определенности вверх) неотрицательная функция.

Пусть точное решение некорректной задачи (2.1) — выпуклая вверх неотрицательная функция. Множество таких функций обозначим $\widehat{Z}$. Множество функций из $\widehat{Z}$, удовлетворяющих неравенству $\|Az - u_0\|_U \leq \delta$, обозначим $\widehat{Z}(\delta)$. Пусть z_{δ_n} — произвольный элемент из $\widehat{Z}(\delta_n)$. Покажем, что если оператор A линеен и взаимнооднозначен из L_p в U , то последовательность функций z_{δ_n} при $\delta_n \rightarrow 0$ равномерно ограничена сверху. Из этого резуль-

тата следует, что при поиске приближенного решения некорректной задачи (2.1) на множестве выпуклых функций не нужно знать константу, ограничивающую сверху точное решение.

Легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 2.4. Пусть $z(s) \in \widehat{Z}$ и $z(s^*) = z\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 2$. Тогда $z(s) \leq 4$ для любых $s \in [a, b]$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует $s^{**} \in [a, b]$ такая, что $z(s^{**}) < 4$. Для определенности $s^{**} < \frac{a+b}{2}$. Значение $z(s)$ в точке $s^* = \frac{a+b}{2}$ больше или равно соответствующему значению ординаты точки прямой, соединяющей точки $\{b, z(b)\}$ и $\{s^{**}, z(s^{**})\}$. Поскольку $z(b) \geq 0$, то $z\left(\frac{a+b}{2}\right) > 2$. Полученное противоречие доказывает лемму 2.4.

Лемму 2.4 можно переформулировать.

Лемма 2.5. Пусть $z(s) \in \widehat{Z}$ и существует точка $s^{**} \in [a, b]$ такая, что $z(s^{**}) > 4$. Тогда $z(s^*) = z\left(\frac{a+b}{2}\right) > 2$.

Предположим для определенности, что точное решение задачи (2.1) $\bar{z}(s) \in \widehat{Z}$ и $\bar{z}(s) \leq 1$ для $s \in [a, b]$.

Справедлива

Теорема 2.9. Пусть z_{δ_n} — произвольный элемент $\widehat{Z}(\delta_n)$. Тогда существует такая константа $c > 0$, что для всех $s \in [a, b]$ выполнено неравенство $z_{\delta_n}(s) \leq c$, $n = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Заметим, что в силу линейности оператора A множество $Z(\delta_n)$ выпукло и, следовательно, выпукло множество значений функций $z(s)$ из $\widehat{Z}(\delta_n)$ в каждой точке $s \in (a, b)$, в том числе и при $s = s^* = \frac{a+b}{2}$. Предположим противное утверждению теоремы. Тогда существует последовательность функций $z_{\delta_{n'}}(s)$ из $\widehat{Z}(\delta_{n'})$ и такая последовательность точек $s_{n'} \in [a, b]$, что $z_{\delta_{n'}}(s_{n'}) > n'$. По лемме 2.5 $z_{\delta_{n'}}(s^*) > 2$ при $n' > 4$.

Заметим, что $\bar{z}(s) \in \widehat{Z}(\delta_{n'})$ для любого n' и $\bar{z}(s^*) \leq 1$. Поскольку множество значений функций $z(s)$ из $\widehat{Z}(\delta_{n'})$ в точке s^* выпукло, то для каждого n' существует элемент $z_{n'}^0(s) \in \widehat{Z}(\delta_{n'})$ такой, что $z_{n'}^0(s^*) = 2$. Согласно лемме 2.4 все функции $z_{n'}^0(s)$ равномерно ограничены и по теореме Хелли о выборе существуют подпоследовательность $z_{n''}^0$ и функция $\bar{z}(s) \in \widehat{Z}$ такие, что в каждой точке $s \in [a, b]$ $\lim_{n'' \rightarrow \infty} z_{n''}^0(s) = \bar{z}(s)$. В силу непрерывности опе-

ратора A имеем $\|A\bar{z} - A\bar{z}\|_U = 0$, откуда $\bar{z} \stackrel{Lp}{=} \bar{z}$. С другой стороны, $\bar{z}(s^*) = 2$, а $\bar{z}(s^*) \leq 1$. Поскольку обе функции непрерывны в точке s^* , то $z \neq \bar{z}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 1. Таким образом, в случае, когда точное решение $\bar{z}(s)$ — выпуклая вверх неотрицательная функция, для построения приближенного решения нег необходимости знать константу, ограничивающую точное решение сверху. За приближенное решение можно принять любой элемент из множества $\widehat{Z}(\delta)$. Заметим, что множество $\widehat{Z}$ в этом случае неограничено и некомпактно.

З а м е ч а н и е 2. Для простоты изложения мы рассматривали задачи, где искомой функцией является одномерная функция $z(s)$. Однако теоремы о выборе справедливы и для случая, например, выпуклых тел в пространстве R^m . Поэтому результаты этого параграфа легко переносятся и на многомерный случай.

Схема Тихонова в задаче построения Регуляризирующих алгоритмов

В этой главе описывается наиболее известная схема построения конкретных регуляризирующих алгоритмов. От нее и начался, по существу, современный этап развития численных методов решения некорректно поставленных задач. Рассматриваемые ниже конструкции в линейном случае непосредственно приводят к легко реализуемым на ЭВМ численным алгоритмам, широко используемым на практике. В случае нелинейных задач схема Тихонова также служит идейной основой построения эффективных численных алгоритмов.

§ 1. РА в схеме Тихонова с априорным выбором параметра регуляризации

Пусть Z и U — гильбертовы пространства, $D \subset Z$ — замкнутое выпуклое множество априорных ограничений такое, что $0 \in D$ (в частности, если рассматривается задача без ограничений, то $D = Z$), A и A_h — линейные ограниченные операторы, действующие из Z в U , причем $\|A_h - A\| \leq h$, $h > 0$. Таким образом, входными данными являются пара (A_h, u_0) и вектор погрешности $\eta = (\delta, h)$. Требуется построить приближенное решение уравнения

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U, \quad (3.1)$$

принадлежащее множеству D , по заданному набору данных $\{A_h, u_0, \eta\}$. Пусть, как обычно, $\bar{z}$ — точное решение (3.1), соответствующее правой части $\bar{u}$. Введем в рассмотрение функционал

$$M^\alpha[z] = \|A_h z - u_0\|_{U^2}^2 + \alpha \|z\|_{Z^2}^2 \quad (3.2)$$

($\alpha > 0$ — параметр регуляризации) и рассмотрим экстремальную задачу (здесь и далее в экстремальных задачах ищется элемент, на котором достигается минимум функционала. Разрешимость такой задачи везде исследуется отдельно): найти

$$\operatorname{argmin}_{z \in D} M^\alpha[z]. \quad (3.3)$$

Имеет место

Лемма 3.1. Для любых $\alpha > 0$, $u_\delta \in U$ и линейного ограниченного оператора A задача (3.3) разрешима, имеет единственное решение $z_\eta^\alpha \in D$, причем

$$\|z_\eta^\alpha\|_Z \leq \|u_\delta\|_U / \sqrt{\alpha}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Функционал $M^\alpha[z]$ сильно выпуклый, поскольку по определению он является суммой выпуклого функционала $\|A_h z - u_\delta\|_U^2$ и сильно выпуклого функционала $\alpha \|z\|_Z^2$. Сильно выпуклый функционал $M^\alpha[z]$ достигает минимума на любом выпуклом замкнутом (не обязательно ограниченном) множестве $D \subset Z$ в единственной точке z_η^α .

Оценка (3.4) следует из того, что поскольку $0 \in D$, то

$$\min_{z \in D} M^\alpha[z] \leq M^\alpha[0].$$

Лемма 1.1 доказана.

З а м е ч а н и е. Напомним, что необходимым и достаточным условием того, что элемент $z_\eta^\alpha \in D$ есть точка минимума функционала $M^\alpha[z]$ на D , является условие

$$(\text{grad } M^\alpha[z_\eta^\alpha], z_\eta^\alpha - z) \leq 0 \quad (3.5)$$

для любого элемента $z \in D$. Если z_η^α — внутренняя точка D , то это утверждение принимает вид $\text{grad } M^\alpha[z_\eta^\alpha] = 0$ или

$$A_h^* A_h z_\eta^\alpha + \alpha z_\eta^\alpha = A_h^* u_\delta. \quad (3.6)$$

Последнее уравнение дает экстремаль функционала Тихонова в случае, например, если $D = Z$. Тогда оператор $R_\alpha = (A_h^* A_h + \alpha E)^{-1} A_h^*$. При наличии ограничений, когда задача решается на $D \neq Z$, минимум функционала Тихонова может достигаться на границе D . В этом случае R_α — оператор, который паре (A_h, u_δ) ставит в соответствие элемент z_η^α , на котором функционал Тихонова достигает минимума. Следующая теорема решает вопрос об аппроксимирующих и регуляризующих свойствах оператора R_α на $AD \subset U$.

Теорема 3.1. Пусть A — взаимнооднозначный оператор, а $\bar{z} \in D$ — решение задачи (3.1). Тогда, если $\alpha(\eta) \rightarrow 0$ так, что $\frac{h^2 + \delta^2}{\alpha(\eta)} \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$, то $z_\eta^{\alpha(\eta)} \xrightarrow{Z} \bar{z}$.

Доказательство. Возьмем последовательность $\eta_n \rightarrow 0 + 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для каждого η_n предполагаем заданной пару A_{h_n} и u_{δ_n} такую, что $\|A_{h_n} - A\| \leq h_n$, $\|u_{\delta_n} - \bar{u}\|_U \leq \delta_n$. Тогда

$$\begin{aligned} M^{\alpha(\eta_n)}[z_{\eta_n}^{\alpha(\eta_n)}] &= \min_{z \in D} M^{\alpha(\eta_n)}[z] \leq M^{\alpha(\eta_n)}[\bar{z}] \leq (h \|\bar{z}\|_Z + \delta)^2 + \\ &+ \alpha(\eta_n) \|z\|_Z^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что

$$\|z_{\eta_n}^{\alpha(\eta_n)}\|_Z^2 \leq \frac{(h_n \|\bar{z}\|_Z + \delta_n)^2}{\alpha(\eta_n)} + \|\bar{z}\|_Z^2. \quad (3.8)$$

В силу условий теоремы существует константа c , не зависящая от n и такая, что

$$(h_n \|\bar{z}\|_Z + \delta_n^2) / \alpha(\eta_n) \leq c.$$

Используя слабую компактность шара в гильбертовом пространстве, из последовательности $z_{\eta_n}^{\alpha(\eta_n)}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой точке $z^* \in D$ (поскольку D слабо замкнуто). Не ограничивая общности, считаем, что вся последовательность $z_{\eta_n}^{\alpha(\eta_n)}$ слабо сходится к z^* при $n \rightarrow \infty$. Используя полунепрерывность снизу нормы (функционал $f(z)$ называется полунепрерывным снизу (слабо полунепрерывным снизу), если из сходимости $z_n \xrightarrow{Z} z_0$ ($z_n \xrightarrow{c\Gamma} z_0$) следует $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \geq f(z_0)$), условие теоремы и неравенство (3.8), легко получить, что

$$\|z^*\|_Z \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_{\eta_n}^{\alpha(\eta_n)}\| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\bar{z}_{\eta_n}^{\alpha(\eta_n)}\|_Z \leq \|\bar{z}\|_Z. \quad (3.9)$$

Рассмотрим теперь неравенство

$$\begin{aligned} & \|Az_{\eta_n}^{\alpha(\eta_n)} - A\bar{z}\|_U \leq \|Az_{\eta_n}^{\alpha(\eta_n)} - A_{h_n}z_{\eta_n}^{\alpha(\eta_n)}\|_U + \\ & + \|A_{h_n}z_{\eta_n}^{\alpha(\eta_n)} - u_{\delta_n}\| + \|u_{\delta_n} - \bar{u}\|_U \leq h_n \|z_{\eta_n}^{\alpha(\eta_n)}\| + \|A_{h_n}z_{\eta_n}^{\alpha(\eta_n)} - u_{\delta_n}\|_U + \\ & + \delta_n \leq h_n (c + \|\bar{z}\|_Z^2)^{1/2} + \{(h_n \|\bar{z}\|_Z + \delta_n)^2 + \alpha(\eta_n) \|\bar{z}\|_Z^2\}^{1/2} + \delta_n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Переходя к пределу в (3.10) при $n \rightarrow \infty$, используя условие $\alpha(\eta_n) \rightarrow 0$ и слабую полунепрерывность снизу функционала $\|Az - A\bar{z}\|_U$, получим $\|Az^* - A\bar{z}\|_U = 0$, т. е. $z^* = \bar{z}$ в силу взаимнооднозначности A . Из (3.9) следует $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_{\eta_n}^{\alpha(\eta_n)}\|_Z = \|z\|_Z$. Так как гильбертово пространство обладает H -свойством (из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_{\eta_n}^{\alpha(\eta_n)} = \bar{z}.$$

Полученное утверждение доказывает теорему.

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема утверждает регуляризиримость любой линейной задачи, когда Z — гильбертово пространство. При доказательстве использовалось лишь два существенных свойства пространства:

а) строгая нормированность (утверждение о единственности z_n^α) и рефлексивность;

б) H -свойство (если последовательность $z_n \xrightarrow{сл} z^*$ и $\|z_n\|_Z \rightarrow \|z^*\|_Z$, то $z_n \xrightarrow{Z} z^*$).

Следует отметить, что если Z — произвольное банахово пространство, то в Z всегда можно ввести эквивалентную норму так, что пространство Z в новой нормировке строго нормированное и обладает H -свойством [74, 104]. Поэтому теорема 3.1 остается справедливой для любого рефлексивного пространства Z . Следовательно, доказана регуляризуемость произвольного линейного отображения, когда Z — рефлексивное пространство. (В функционале (3.2) $\|z\|_Z$ заменяется на новую (эквивалентную) норму.)

З а м е ч а н и е. Пусть A не является взаимоднозначным оператором. Определим нормальное решение $\bar{z}$ уравнения (3.1) на множестве D , соответствующее правой части $\bar{u}=A\bar{z}\in U$ как решение экстремальной задачи

$$\bar{z} = \arg \min \|z\|^2, \quad z \in \{z \in D : Az = \bar{u}\}.$$

Множество $\{z \in D : Az = \bar{u}\}$ выпукло и замкнуто, функционал $f(z) = \|z\|_Z^2$ сильно выпуклый, следовательно, нормальное решение $\bar{z} \in D$ существует и единственно. Если в формулировке теоремы 3.1 отказаться от требования взаимоднозначности оператора A , то ее утверждение остается в силе, если считать, что $\bar{z}$ — нормальное решение уравнения (3.1).

Таким образом, и в этом случае $z_n^{\alpha(\eta)} \xrightarrow{Z} \bar{z}$ при $\eta \rightarrow 0$, где $\bar{z}$ — решение уравнения (3.1) с минимальной нормой.

§ 2. Выбор параметра регуляризации по обобщенной невязке

В этом параграфе обсуждается другой способ выбора параметра регуляризации α — так называемый принцип обобщенной невязки. Пусть, как и раньше, Z, U — гильбертовы пространства, а A — линейное непрерывное инъективное отображение $D \subset Z$ на $AD \subset U$. Считаем приближенно заданным как элемент u , так и оператор A .

Определим меру несовместимости уравнения (3.1) с приближенными данными на множестве $D \subset Z$ как

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) = \inf_{z \in D} \|A_h z - u_\delta\|_U.$$

Очевидно, что $\mu_\eta(u_\delta, A_h) = 0$, если $u_\delta \in \overline{A_h D}$ (черта означает замыкание по норме соответствующего пространства).

Л е м м а 3.2. Пусть $\bar{z} \in D$. Зададимся последовательностью $\eta_n \rightarrow 0$. Тогда $\mu_{\eta_n}(A_{h_n}, u_{\delta_n}) \rightarrow 0$ при $\eta_n \rightarrow 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из очевидного неравенства

$$\mu_{\eta_n}(A_{h_n}, u_{\delta_n}) = \inf_{z \in D} \|A_{h_n} z - u_{\delta_n}\|_U \leq \|A_{h_n} \bar{z} - u_{\delta_n}\|_U \leq \delta_n + h \|\bar{z}\|_Z.$$

В дальнейшем предполагается, что мера несовместности вычисляется с погрешностью $\kappa > 0$ т. е. вместо $\mu_\eta(A_h, u_\delta)$ известна $\mu_\eta^*(A_h, u_\delta)$ такая, что

$$\mu_\eta(A_h, u_\delta) \leq \mu_\eta^*(A_h, u_\delta) \leq \mu_\eta(A_h, u_\delta) + \kappa.$$

Погрешность определения меры несовместности κ считаем согласованной с погрешностью задания исходных данных η таким образом, что $\kappa = \kappa(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$ (например, $\kappa(\eta) = \delta + h$).

Введем в рассмотрение функцию, называемую обобщенной невязкой:

$$\rho_\eta^*(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|_{U^2}^2 - (\delta + h \|z_\eta^\alpha\|_Z)^2 - \mu_\eta^*(A_h, u_\delta)^2. \quad (3.11)$$

Сформулируем так называемый обобщенный принцип невязки для выбора параметра регуляризации [43–46]. Пусть условие

$$\|u_\delta\|_{U^2}^2 > \delta^2 + \mu_\eta^*(A_h, u_\delta)^2 \quad (3.12)$$

не выполнено, тогда в качестве приближенного решения уравнения (3.1) выберем $z_\eta = 0$. Если же условие (3.12) выполнено, то, как показано ниже, обобщенная невязка имеет положительный корень $\alpha^*(\eta)$ т. е.

$$\|A_h z_\eta^{\alpha^*(\eta)} - u_\delta\|_{U^2}^2 = (\delta + h \|z_\eta^{\alpha^*(\eta)}\|_Z)^2 + \mu_\eta^*(A_h, u_\delta)^2. \quad (3.13)$$

Положим в этом случае приближенное решение (3.1) $z_\eta = z_\eta^{\alpha^*(\eta)}$. Ниже показано, что для инъективного оператора выбор параметра регуляризации по принципу обобщенной невязки порождает регуляризирующий алгоритм, т. е. элемент $z_\eta^{\alpha^*(\eta)}$ (параметр $\alpha(\eta)$ выбран по критерию (3.13)) при $\eta \rightarrow 0$ стремится в норме Z к $\bar{z}$.

Докажем предварительно ряд лемм о свойствах обобщенной невязки и функционала Тихонова.

Введем в рассмотрение следующие функции параметра α , определенные при $\alpha > 0$:

$$\varphi_\eta(\alpha) = M^\alpha [z_\eta^\alpha] = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|_{U^2}^2 + \alpha \|z_\eta^\alpha\|_Z^2, \quad (3.14)$$

$$\gamma_\eta(\alpha) = \|z_\eta^\alpha\|_Z^2, \quad (3.15)$$

$$\beta_\eta(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|_{U^2}^2. \quad (3.16)$$

Справедлива

Л е м м а 3.3. $\varphi_\eta(\alpha)$, $\gamma_\eta(\alpha)$, $\beta_\eta(\alpha)$ как функции параметра α обладают следующими свойствами:

- 1) они непрерывны при $\alpha > 0$;
- 2) функция $\varphi_\eta(\alpha)$ вогнута, дифференцируема и $\varphi'_\eta(\alpha) = \gamma_\eta(\alpha)$;
- 3) функция $\gamma_\eta(\alpha)$ монотонно не возрастает, а функции $\varphi_\eta(\alpha)$, $\beta_\eta(\alpha)$ монотонно не убывают при $\alpha > 0$, причем на интервале $(0, \alpha_0)$ таком, что $z_\eta^{\alpha_0} \neq 0$ функция $\varphi_\eta(\alpha)$ строго монотонна;
- 4) справедливы предельные соотношения

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \gamma_\eta(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \gamma_\eta(\alpha) = 0,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi_{\eta}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \beta_{\eta}(\alpha) = \|u_{\delta}\|_U^2,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \alpha \gamma_{\eta}(\alpha) = 0,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \varphi_{\eta}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \beta_{\eta}(\alpha) = \mu_{\eta}(A_h, u_{\delta})^2.$$

Доказательство. Докажем утверждения 2) и 3). Зафиксируем $0 < \alpha' < \alpha$ и вычтем из очевидного неравенства

$$\varphi_{\eta}(\alpha) = \|A_h z_{\eta}^{\alpha} - u_{\delta}\|_U^2 + \alpha \|z_{\eta}^{\alpha}\|_Z^2 \leq \|A_h z_{\eta}^{\alpha'} - u_{\delta}\|_U^2 + \alpha \|z_{\eta}^{\alpha'}\|_Z^2$$

выражение для $\varphi_{\eta}(\alpha')$. Получим

$$\varphi_{\eta}(\alpha) - \varphi_{\eta}(\alpha') \leq (\alpha - \alpha') \|z_{\eta}^{\alpha'}\|_Z^2. \quad (3.17)$$

Аналогично $\varphi_{\eta}(\alpha') - \varphi_{\eta}(\alpha) \leq (\alpha' - \alpha) \|z_{\eta}^{\alpha}\|_Z^2$.

Из последних двух неравенств следует

$$\|z_{\eta}^{\alpha}\|_Z^2 \leq \frac{\varphi_{\eta}(\alpha) - \varphi_{\eta}(\alpha')}{\alpha - \alpha'} \leq \|z_{\eta}^{\alpha'}\|_Z^2. \quad (3.18)$$

Поскольку $\|z_{\eta}^{\alpha}\|_Z \geq 0$, то $\varphi_{\eta}(\alpha)$ монотонно не убывает, а если $\|z_{\eta}^{\alpha}\| \neq 0$ на интервале $(0, \alpha_0)$, то $\varphi_{\eta}(\alpha)$ монотонно возрастает на этом интервале. Из (3.18) следует также, что если $0 < \alpha' < \alpha$, то $\|z_{\eta}^{\alpha}\|_Z^2 \leq \|z_{\eta}^{\alpha'}\|_Z^2$, т. е. функция $\gamma_{\eta}(\alpha)$ не возрастает.

Из неравенства (3.4) следует, что если фиксировать α_0 , $0 < \alpha_0 < \alpha' < \alpha$, то

$$\|z_{\eta}^{\alpha'}\|_Z \leq \frac{\|u_{\delta}\|}{\sqrt{\alpha_0}}.$$

Из последнего неравенства и (3.17) следует непрерывность $\varphi_{\eta}(\alpha)$ для любого $\alpha > 0$.

Далее из (3.4) следует $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \gamma_{\eta}(\alpha) = 0$. Отсюда в силу непрерывности оператора A_h

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \beta_{\eta}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|A_h z_{\eta}^{\alpha} - u_{\delta}\|_U^2 = \|u_{\delta}\|_U^2.$$

Поскольку $M^{\alpha}[z_{\eta}^{\alpha}] \leq M^{\alpha}[0] = \|u_{\delta}\|_U^2$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \gamma_{\eta}(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi_{\eta}(\alpha) = \|u_{\delta}\|_U^2.$$

Покажем теперь, что невязка $\beta_{\eta}(\alpha)$ монотонно не убывает. Для этого достаточно заметить, что при $0 < \alpha' < \alpha$

$$\begin{aligned} \|A_h z_{\eta}^{\alpha'} - u_{\delta}\|_U^2 + \alpha' \|z_{\eta}^{\alpha'}\|_Z^2 &\leq \|A_h z_{\eta}^{\alpha} - u_{\delta}\|_U^2 + \alpha' \|z_{\eta}^{\alpha}\|_Z^2 \leq \\ &\leq \|A_h z_{\eta}^{\alpha} - u_{\delta}\|_U^2 + \alpha' \|A_h z_{\eta}^{\alpha'}\|_Z^2. \end{aligned}$$

Второе из этих неравенств является следствием невозрастания функции $\gamma_{\eta}(\alpha)$.

Для доказательства непрерывности $\gamma_\eta(\alpha)$ воспользуемся условием

$$(\text{grad } M^\alpha [z^\alpha], z - z_\eta^\alpha) \geq 0 \quad \forall z \in D,$$

или

$$\begin{aligned} (A_\eta^* A_\eta z_\eta^\alpha + \alpha z_\eta^\alpha - A_h^* u_\delta, z - z_\eta^\alpha) &\geq 0, \\ (A_h^* A_h z_\eta^{\alpha'} + \alpha' z_\eta^{\alpha'} - A_h^* u_\delta, z - z_\eta^{\alpha'}) &\geq 0. \end{aligned}$$

Выберем в первом из этих неравенств $z = z_\eta^{\alpha'}$, а во втором — $z = z_\eta^\alpha$ и сложим их. Получим

$$(A_h^* A_h (z_\eta^\alpha - z_\eta^{\alpha'}) + \alpha z_\eta^\alpha - \alpha' z_\eta^{\alpha'}, z_\eta^\alpha - z_\eta^{\alpha'}) \geq 0,$$

или

$$(A_h^* A_h (z_\eta^\alpha - z_\eta^{\alpha'}) + \alpha z_\eta^\alpha - \alpha' z_\eta^{\alpha'} + \alpha z_\eta^{\alpha'} - \alpha' z_\eta^{\alpha'}, z_\eta^\alpha - z_\eta^{\alpha'}) \leq 0,$$

или

$$\|A_h (z_\eta^\alpha - z_\eta^{\alpha'})\|_U^2 + \alpha \|z_\eta^\alpha - z_\eta^{\alpha'}\|_Z^2 \leq (\alpha' - \alpha) (z_\eta^{\alpha'}, z_\eta^\alpha - z_\eta^{\alpha'}).$$

Отсюда с учетом (3.4)

$$|\|z_\eta^{\alpha'}\|_Z - \|z_\eta^\alpha\|_Z| \leq \|z_\eta^\alpha - z_\eta^{\alpha'}\|_Z \leq \frac{|\alpha' - \alpha|}{\alpha} \|z_\eta^{\alpha'}\|_Z \leq \frac{\|u_\delta\|}{\alpha^{3/2}} |\alpha' - \alpha|,$$

т. е. $\gamma_\eta(\alpha)$ непрерывна (даже удовлетворяет условию Липшица). Непрерывность функции $\beta_\eta(\alpha)$ следует из непрерывности $\varphi_\eta(\alpha)$ и $\gamma_\eta(\alpha)$.

Из неравенства (3.18) и непрерывности $\gamma_\eta(\alpha)$ следует, что $\varphi_\eta(\alpha)$ дифференцируема для любого $\alpha > 0$, причем $\varphi'_\eta(\alpha) = \gamma_\eta(\alpha)$. Таким образом, функция $\varphi_\eta(\alpha)$ вогнута, так как ее производная $\gamma_\eta(\alpha)$ монотонно не возрастает.

В силу того что $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|z_\eta^\alpha\|_Z = 0$ и $\|z_\eta^\alpha\|_Z$ не возрастает при увеличении α , легко видеть, что если при некотором $\alpha_0 \in (0, +\infty)$ $z_\eta^{\alpha_0} = 0$, то $z_\eta^\alpha = 0$ и при всех $\alpha > \alpha_0$. Если при $\alpha_0 > 0$, $z_\eta^{\alpha_0} \neq 0$, то $z_\eta^\alpha \neq 0$ для всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$.

Рассмотрим теперь поведение функций $\varphi_\eta(\alpha)$, $\gamma_\eta(\alpha)$ и $\beta_\eta(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0+0$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $z^\varepsilon \in D$ такое, что

$$\mu_\eta(A_h, u_\delta) \leq \|A_h z^\varepsilon - u_\delta\|_U \leq \mu_\eta(A_h, u_\delta) + \varepsilon.$$

Очевидно неравенство

$$\beta_\eta(\alpha) \leq \varphi_\eta(\alpha) \leq \|A_h z^\varepsilon - u_\delta\|_U^2 + \alpha \|z^\varepsilon\|_Z^2,$$

из которого следует, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta_\eta(\alpha) \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_\eta(\alpha) \leq (\mu_\eta(A_h, u_\delta) + \varepsilon)^2.$$

Но

$$\beta_{\eta}(\alpha) \geq \inf_{z \in D} \|A_h z - u_{\delta}\|_U^2 = \mu_{\eta}(A_h, u_{\delta})^2.$$

Отсюда

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta_{\eta}(\alpha) \geq \mu_{\eta}^2(A_h, u_{\delta}).$$

Теперь ввиду произвольности ε получим

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta_{\eta}(\alpha) = \mu_{\eta}^2(A_h, u_{\delta}),$$

а также, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \|z_{\eta}^{\alpha}\|_Z^2 = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_{\eta}(\alpha) = \mu_{\eta}(A_h, u_{\delta})^2.$$

Лемма 3.3 доказана.

С л е д с т в и е 1. Обобщенная невязка

$$\rho_{\eta}^*(\alpha) = \beta_{\eta}(\alpha) - (\delta + h \sqrt{\gamma_{\eta}(\alpha)})^2 - \mu_{\eta}(A_h, u_{\delta})^2$$

обладает следующими свойствами:

- 1) $\rho_{\eta}^*(\alpha)$ непрерывна и монотонно не убывает при $\alpha > 0$;
- 2) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \rho_{\eta}^*(\alpha) = \|u_{\delta}\|_U^2 - \delta^2 - \mu_{\eta}^2(A_h, u_{\delta})^2$;
- 3) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho_{\eta}^*(\alpha) \leq -\delta^2$;
- 4) если выполнено условие (3.12), то найдется α^* такое, что

$$\rho_{\eta}^*(\alpha^*) = 0. \quad (3.19)$$

Доказательство пп. 1), 2), 3), 4) легко следует из свойств функций $\beta_{\eta}(\alpha)$ и $\gamma_{\eta}(\alpha)$ и неравенства (3.12).

З а м е ч а н и е. Вообще говоря, в силу того что функция $\rho_{\eta}^*(\alpha)$ может не обладать свойством строгой монотонности, α^* может определяться неоднозначно. Однако можно показать, что элемент $z_{\eta}^{\alpha^*}$, взятый для произвольного α^* из указанного интервала, один и тот же [16].

З а м е ч а н и е. Свойства функции $\tilde{\rho}_{\eta}(\alpha) = \beta_{\eta}(\alpha) - (\delta + h \sqrt{\gamma_{\eta}(\alpha)})^2$ могут быть легко получены аналогичным образом, однако, как отмечалось, корень уравнения $\tilde{\rho}_{\eta}(\alpha) = 0$ может не существовать при $\alpha > 0$.

Переходим к доказательству основной теоремы, гарантирующей то, что принцип обобщенной невязки дает регуляризирующий алгоритм.

Т е о р е м а 3.2. Пусть A — взаимнооднозначный оператор, $\bar{y} = A\bar{z}$, $\bar{z} \in D$. Пусть такая $\|A_h - A\| \leq h$, $\|u_{\delta} - u\| \leq \delta$. Тогда $\lim_{\eta \rightarrow 0} z_{\eta} = \bar{z}$,

где z_{η} выбирается согласно обобщенному принципу невязки. Если A не является взаимнооднозначным ($\text{Ker } A \neq 0$), то утверждение теоремы остается справедливым, если считать $\bar{z}$ нормальным решением уравнения (3.1).

Доказательство. Если $\bar{z}=0$, то $\|u_0\|_U \leq \delta$ и условие (3.12) не выполнено. Тогда и $z_\eta=0$. Тем самым теорема в этом случае доказана.

Пусть теперь $\bar{z} \neq 0$. Поскольку $\mu_\eta^*(A_h, u_\delta)^2 + \delta^2 \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$ (см. лемму 3.2 и определение μ_η^* и κ), а $\|u_\delta\|_U \rightarrow \|\bar{u}\|_U$, то условие (3.12) выполнено, по крайней мере, для достаточно малых η . Схема доказательства теоремы 3.2 в этом случае не отличается от схемы доказательства теоремы 3.1. Пусть $\eta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а α_k^* — корень уравнения (3.19) при фиксированных u_{δ_k}, A_{h_k} таких, что $\|\bar{u} - u_{\delta_k}\|_U \leq \delta$, $\|A_{h_k} - A\| \leq h_k$. В силу экстремальных свойств $z_{\eta_k}^* \in D$ получим

$$\|A_{h_k} z_{\eta_k}^* - u_{\delta_k}\|_U^2 + \alpha_k^* \|z_{\eta_k}^*\|_Z^2 \leq \|A_{h_k} \bar{z} - u_{\delta_k}\|_U^2 + \alpha_k^* \|\bar{z}\|_Z^2.$$

Учитывая обобщенный принцип невязки (3.13), имеем

$$\begin{aligned} (\delta_k + h_k \|z_{\eta_k}^*\|_Z)^2 + \alpha_k^* \|z_{\eta_k}^*\|_Z^2 &\leq (\delta_k + h_k \|z_{\eta_k}^*\|_Z)^2 + \\ &+ \alpha_k^* \|z_{\eta_k}^*\|_Z^2 + \mu_{\eta_k}^*(u_{\delta_k}, A_{h_k})^2 \leq (\delta_k + h_k \|\bar{z}\|_Z)^2 + \alpha_k^* \|\bar{z}\|_Z^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(\|z_{\eta_k}^*\|_Z) \leq f(\|\bar{z}\|_Z).$$

где $f(x) = (A+Bx)^2 + Cx^2$, $A, B \geq 0$; $C > 0$. Функция $f(x)$ строго монотонна при $x > 0$, а следовательно,

$$\|z_{\eta_k}^*\|_Z \leq \|\bar{z}\|_Z.$$

Считая далее, как и при доказательстве теоремы 3.1, что $z_{\eta_k}^* \xrightarrow{\text{с.п.}} z^* \in D$, получим неравенство

$$\|z^*\|_Z \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{\eta_k}^*\|_Z \leq \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{\eta_k}^*\|_Z} \leq \|\bar{z}\|_Z,$$

аналогичное (3.10).

Для того чтобы завершить доказательство, как и в теореме 3.1, осталось доказать, что $z^* = \bar{z}$. Это следует из неравенства

$$\begin{aligned} \|Az_{\eta_k}^* - A\bar{z}\|_U &\leq h_k \|z_{\eta_k}^*\|_Z + \{(\delta_k + h_k \|z_{\eta_k}^*\|_Z)^2 + \mu_{\eta_k}^*(A_{h_k}, u_{\delta_k})^2\}^{1/2} + \delta_k \leq \\ &\leq h_k \|\bar{z}\|_Z + \{(\delta_k + h_k \|\bar{z}\|_Z)^2 + \mu_{\eta_k}^*(A_{h_k}, u_{\delta_k})^2\}^{1/2} + \delta_k \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\eta_k \rightarrow 0$. Теорема 3.2 доказана.

З а м е ч а н и е. Для того чтобы лучше понять смысл выбора параметра регуляризации в соответствии с обобщенным принципом невязки, рассмотрим следующую экстремальную задачу с ограничениями:

$$z = \operatorname{argmin}_{z \in D_\eta} \|z\|_Z^2, \quad (3.20)$$

$$D_\eta = \{z : z \in D : \|A_h z - u_\delta\|_{U^2} \leq (\delta + h \cdot \|z\|_Z)^2 + \mu_\eta^*(A_h, u_\delta)^2\}.$$

Можно показать, что экстремальная задача с ограничениями (3.20) и тихоновская схема с выбором параметра α по принципу обобщенной невязки эквивалентны [16].

З а м е ч а н и е. В формулировке обобщенного принципа невязки можно положить $\mu_\eta^*(A_h, u_\delta) = 0$ даже в том случае, когда $u_\delta \notin \overline{A_h D}$. Определим обобщенную невязку

$$\tilde{\rho}_\eta(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|_{U^2}^2 - (\delta + h \|z_\eta^\alpha\|_Z)^2.$$

Условие (3.12) заменится на условие

$$\|u_\delta\|_U > \delta.$$

Сформулируем теперь модифицированный обобщенный принцип невязки в следующем виде:

1) если условие $\|u_\delta\|_U > \delta$ не выполнено, то полагаем приближенное решение уравнений (3.1) $z_\eta = 0$;

2) при выполнении условия $\|u_\delta\|_U > \delta$:

а) если найдется $\alpha^* > 0$ — корень функции $\tilde{\rho}_\eta(\alpha) = 0$, то в качестве решения возьмем $z_\eta^{\alpha^*(\eta)}$;

б) если функция $\tilde{\rho}_\eta(\alpha) > 0$ для всех $\alpha > 0$, то положим приближенное значение равным $z_\eta = \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} z_\eta^\alpha$.

Теорема 3.3. Если A — взаимоднозначный оператор, то сформулированный выше алгоритм — регуляризирующий. Если A не является взаимоднозначным, то имеет место сходимость регуляризированных приближенных решений $z_\eta^{\alpha^*(\eta)}$ к нормальному решению уравнения (3.4) на множестве D .

З а м е ч а н и е. Отметим, что в отличие от алгоритма, обоснованного в теореме 3.2, такая модификация обобщенного принципа невязки не требует вычисления $\mu_\eta^*(A_h, u_\delta)$. Однако в этом случае приходится преодолевать трудности, связанные с возможностью отсутствия корня у невязки.

З а м е ч а н и е. Поскольку в любом рефлексивном пространстве может быть введена эквивалентная норма так, что пространство станет равномерно выпуклым, а следовательно, строго нормированным и с H -свойством, то схема принципа обобщенной невязки переносится на рефлексивные пространства.

З а м е ч а н и е. РА с выбором параметра регуляризации по схеме, аналогичной принципу обобщенной невязки, оптимален по

порядку на компакте, являющемся образом шара рефлексивного пространства при вполне непрерывном отображении.

Остановимся на дополнительных свойствах, которыми обладают функции $\beta_\eta(\alpha)$, $\gamma_\eta(\alpha)$, $\varphi_\eta(\alpha)$ и обобщенная невязка $\rho_\eta(\alpha)$, когда задача решается без ограничений, т. е. $D=Z$. В этом случае экстремаль функционала может быть найдена как решение уравнения Эйлера (3.3), а именно

$$z_\eta^\alpha = R_\alpha u_\delta = R_\eta^\alpha A_h^* u_\delta = (A_h^* A_h + \alpha E)^{-1} A_h^* u_\delta. \quad (3.21)$$

Лемма 3.4. *Оператор R_η^α обладает следующими свойствами:*

- 1) *если $D(A_h) = Z$, то $D(R_\eta^\alpha) = Z$;*
- 2) $\|R_\eta^\alpha\| \leq 1/\alpha$;
- 3) R_η^α *положительно определен;*
- 4) R_η^α *непрерывно зависит от α ($\alpha > 0$) в операторной топологии.*

Лемма 3.4. гарантирует разрешимость и единственность решения уравнения Эйлера (3.6) для любого $\alpha > 0$. Покажем, какие дополнительные свойства приобретают в этом случае функции $\rho_\eta^*(\alpha)$, $\varphi_\eta(\alpha)$, $\beta_\eta(\alpha)$, $\gamma_\eta(\alpha)$.

Лемма 3.5. *Пусть $D=Z$. Тогда функции $\varphi_\eta(\alpha)$, $\gamma_\eta(\alpha)$, $\beta_\eta(\alpha)$, $\rho_\eta^*(\alpha)$ кроме свойств, перечисленных в лемме 3.3 и ее следствиях, обладают следующими свойствами:*

- 1) *они непрерывно дифференцируемы при $\alpha > 0$ ($\rho_\eta^*(\alpha)$ — при условии, что $z_\eta^\alpha \neq 0$), причем*

$$\begin{aligned} \gamma_\eta'(\alpha) &= -((A_h^* A_h + \alpha E)^{-1} z_\eta^\alpha, z_\eta^\alpha), \\ \beta_\eta'(\alpha) &= -\alpha \gamma_\eta'(\alpha), \quad \varphi_\eta''(\alpha) = \gamma_\eta'(\alpha), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\rho_\eta^*(\alpha) = -\gamma_\eta'(\alpha) [\alpha + h^2 + h\delta/\sqrt{\gamma_\eta(\alpha)}];$$

- 2) *функции $\varphi_\eta(\alpha)$, $\gamma_\eta(\alpha)$, $\beta_\eta(\alpha)$, $\rho_\eta^*(\alpha)$ на интервале $(0, \alpha_0]$ таковы, что $z_\eta^{\alpha_0} \neq 0$, строго монотонны, причем достаточным условием строгой монотонности функций при всех $\alpha > 0$ является условие (3.12);*

- 3) *функция $B_\eta(\lambda) = \beta_\eta(1/\lambda)$ выпукла по λ при $\lambda > 0$.*

Доказательство. Для доказательства п. 1) утверждения леммы 3.5 заметим, что из п. 2) леммы 3.3 следует, что достаточно доказать формулу (3.22). Зафиксируем $\alpha > 0$ и рассмотрим приращения $\Delta\alpha$ такие, что $\alpha + \Delta\alpha > 0$. Обозначим $\Delta z_\eta^\alpha = z_\eta^{\alpha + \Delta\alpha} - z_\eta^\alpha$. По свойству 4) леммы 3.4 $\|\Delta z_\eta^\alpha\|_Z \rightarrow 0$ при $\Delta\alpha \rightarrow 0$. Запишем уравнение Эйлера, соответствующие α и $\alpha + \Delta\alpha$:

$$A_h^* A_h z_\eta^\alpha + \alpha z_\eta^\alpha = A_h^* u_\delta,$$

$$A_h^* A_h (z_\eta^\alpha + \Delta z_\eta^\alpha) + (\alpha + \Delta\alpha) (z_\eta^\alpha + \Delta z_\eta^\alpha) = A_h^* u_\delta.$$

Вычитая эти равенства, получим

$$\Delta z_\eta^\alpha = -\Delta\alpha (A_h^* A_h + (\alpha + \Delta\alpha) E)^{-1} z_\eta^\alpha.$$

Рассмотрим теперь разностное отношение

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{\eta}(\alpha + \Delta\alpha) - \gamma_{\eta}(\alpha)}{\Delta\alpha} &= \frac{(z_{\eta}^{\alpha} + \Delta z_{\eta}^{\alpha}, z_{\eta}^{\alpha} + \Delta z_{\eta}^{\alpha}) - (z_{\eta}^{\alpha}, z_{\eta}^{\alpha})}{\Delta\alpha} = \\ &= \frac{2(\Delta z_{\eta}^{\alpha}, z_{\eta}^{\alpha}) + (\Delta z_{\eta}^{\alpha}, \Delta z_{\eta}^{\alpha})}{\Delta\alpha} = -\frac{2\Delta\alpha}{\alpha} ((A_h^* A_h + (\alpha + \Delta\alpha) E)^{-1} z_{\eta}^{\alpha}, z_{\eta}^{\alpha}) / \Delta\alpha + \\ &\quad + \frac{(\Delta\alpha)^2}{\alpha} - \| (A_h^* A_h + (\alpha + \Delta\alpha) E)^{-1} z_{\eta}^{\alpha} \|^2, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\Delta \| z_{\eta}^{\alpha} \|}{\Delta\alpha} \rightarrow -2 ((A_h^* A_h + \alpha E)^{-1} z_{\eta}^{\alpha}, z_{\eta}^{\alpha}), \quad \Delta\alpha \rightarrow 0.$$

При этом мы воспользовались непрерывностью R_{η}^{α} по α и ограниченностью R_{η}^{α} как линейного оператора из Z в Z . Формула (3.22) доказана.

Так как R_{η}^{α} — положительно определенный оператор (лемма 3.4), то $\gamma_{\eta}'(\alpha) < 0$ для любого $\alpha \in (0, \alpha_0]$, где $z_{\eta}^{\alpha} \neq 0$, т. е. $\gamma_{\eta}(\alpha)$ (а также $\beta_{\eta}(\alpha)$, $\varphi_{\eta}(\alpha)$, $\rho_{\eta}^*(\alpha)$) строго монотонны на интервале $(0, \alpha_0]$. Для завершения доказательства п. 2) заметим, что поскольку U — гильбертово пространство, то оно представимо в виде прямой суммы двух ортогональных подпространств:

$$U = \overline{A_h z} \oplus \text{Ker } A_h^*.$$

Поэтому u_{δ} однозначно представимо в виде $u_{\delta} = v_{\delta} + w_{\delta}$, $v_{\delta} \in \text{Ker } A_h^*$, $w_{\delta} \in \overline{A_h z}$, причем

$$\mu_{\eta}^*(A_h, u_{\delta})^2 = \inf_{z \in Z} \| A_h z - u_{\delta} \|_U^2 = \| v_{\delta} \|_U^2.$$

Если $z_{\eta}^{\alpha} = 0$, то из уравнения Эйлера следует, что $A_h^* u_{\delta} = 0$, т. е. $u_{\delta} \in \text{Ker } A_h^*$; $u_{\delta} = v_{\delta}$. Следовательно, если выполнено условие (3.12) $\| u_{\delta} \|_U^2 > \delta^2 + \mu_{\eta}^*(A_h, u_{\delta})^2 = \delta^2 + \| v_{\delta} \|_U^2$, то z_{η}^{α} не может равняться нулю ни при каких $\alpha > 0$.

П. 3) доказывается с помощью замены переменной $\alpha = 1/\lambda$ и непосредственным вычислением второй производной функции $\beta_{\eta}(1/\lambda)$ способом, аналогичным вычислению первой производной $\gamma_{\eta}(\alpha)$. Лемма 3.5 доказана.

Следствие 1. Если $D = Z$, значение $\alpha = \alpha^*$, определяемое согласно обобщенному принципу невязки $\rho_{\eta}^*(\alpha) = 0$, единственно.

З а м е ч а н и е. В последних двух параграфах этой главы были обсуждены два наиболее употребимых способа выбора параметра регуляризации: априорный способ выбора $\alpha = \alpha(\eta)$ и алгоритм выбора по принципу невязки. В литературе встречаются и другие способы выбора параметра регуляризации. Широкую известность

приобрел так называемый квазиоптимальный выбор параметра регуляризации.

Следуя [103], квазиоптимальный выбор параметра регуляризации назовем значение α , определяемое условием

$$\alpha_{k0} = \operatorname{argmin}_{0 < \alpha < \alpha_0} \mu(\alpha),$$

где

$$\mu(\alpha) = \alpha \left\| \frac{\partial z_\eta}{\partial \alpha} \right\|_Z.$$

В такой формулировке для определения параметра регуляризации $\alpha = \alpha_{k0}$ не нужно знать погрешности η , т. е. регуляризирующий алгоритм $R_\eta(\cdot)$, построенный на основе указанного выбора параметра регуляризации, является функцией только аргумента $R_\eta(\cdot) = R(\cdot)$. В этом случае работает теорема 1.1 и область применимости подобных алгоритмов ограничивается, по сути, лишь корректными задачами. Так, если оператор A^{-1} неограничен на образе $AZ \subset U$, то алгоритмы типа квазиоптимального выбора не порождают регуляризирующих алгоритмов.

Когда оператор A задан точно для конечномерных задач: $A: R^n \rightarrow R^m$, алгоритм квазиоптимального выбора удастся обосновать. Однако если в последней задаче отыскания нормального решения вырожденной системы линейных алгебраических уравнений матрица известна с ошибкой, регуляризаторы типа квазиоптимального $R_\eta(\cdot) = R(\cdot)$, невозможно построить даже в конечномерном случае. На самом деле, нетрудно убедиться в том, что оператор G , ставящий в соответствие паре (A, u) нормальное решение, не является относительно непрерывным по первому аргументу. Достаточно рассмотреть операторное уравнение с $A: R^{(2)} \rightarrow R^{(2)}$ следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и возмущенную задачу

$$\begin{pmatrix} 1 & h \\ h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По теореме 1.1 отображение G не может быть регуляризуемо таким способом на пространстве матриц с равномерной операторной топологией.

§ 3. Применение схемы Тихонова к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода

Интегральное уравнение Фредгольма первого рода — наиболее известный и распространенный объект приложения алгоритмов регуляризации, в частности и описанной выше схемы Тихонова. В этом параграфе мы коротко остановимся на конкретизации упомянутой схемы для решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

Прежде всего отметим, что при численной реализации схемы нам потребуется умение вычислять интегралы от функции одного или нескольких переменных или даже решать дифференциальные уравнения. При этом обычно используются приближенные методы. Вообще говоря, возможность их применения в схеме регуляризации требует некоторого дополнительного исследования. Мы не будем рассматривать этот вопрос, так как возникающие здесь трудности носят в основном технический характер. Теоретические рассмотрения и большой практический опыт позволяют с уверенностью утверждать, что если погрешность аппроксимации на один-два порядка меньше погрешностей в операторе и правой части (R, δ) , то они практически не влияют на окончательные результаты.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Az \int_a^b K(x, s) z(s) ds = u(x), \quad x \in [c, d]. \quad (3.23)$$

Пусть $K(x, s)$ — действительная, непрерывная на $\Pi = \{a \leq s \leq b, c \leq x \leq d\}$ функция. Взаимооднозначный оператор A действует из L_2 в L_2 . Вместо $K(x, s)$ известно ее приближенное значение — непрерывная функция

$$K_h(x, s) \parallel K_h(x, s) - K(x, s) \parallel_{L_2(\Pi)} \leq h.$$

Экстремаль функционала Тихонова $M^\alpha[z]$ при каждом фиксированном $\alpha > 0$ находим, решая уравнение

$$A_h^* A_h z + \alpha E = A^* u_\delta.$$

Оператор $A_h^* : L_2 \rightarrow L_2$, сопряженный к A_h , определен формулой

$$A_h^* u = \int_c^d K_h(x, s) u(x) dx. \quad (3.24)$$

Аппроксимируя в (3.24) интегралы, например, по формуле прямоугольников или Симпсона нетрудно выписать конечномерную задачу для определения значений $z(s)$ в узлах сетки по s .

Построенная схема теоретически гарантирует сходимость последовательности приближений $z_\eta(s)$ к $\bar{z}(s)$ при $\eta \rightarrow 0$ в L_2 . Если о точном решении задачи $\bar{z}(s)$ известно, что оно представляет собой гладкую функцию, целесообразно в качестве пространства Z в исходной задаче (3.22) взять одно из пространств Соболева W_2^l . Так, если

$$\int_a^b [\bar{z}^2(s) + [\bar{z}'(s)]^2] ds < +\infty,$$

то естественно положить $Z = W_2^1$. При этом общая схема гарантирует сходимость $z_\eta \xrightarrow{W_2^1} \bar{z}$ и согласно теоремам вложения W_2^1 в $C[a, b]$ $z_\eta \xrightarrow{C[a, b]} \bar{z}$ при $\eta \rightarrow 0$.

Вид уравнения (3.23) для экстремали функционала Тихонова останется тем же. Но теперь оператор A_h действует из W_2^1 в L_2 , а A_h^* определен на L_2 и действует в W_2^1 .

С целью вычисления оператора A_h^* остановимся более подробно на структуре пространства Соболева W_2^1 . Рассмотрим в прямом произведении $L_2[a, b] \times L_2[c, d] = L_2$ множество пар функций (φ, φ') , где φ имеет непрерывную производную на $[a, b]$. Это множество образует линейное многообразие в L_2 . Замыкание этого многообразия и является пространством W_2^1 *). Элементы пространства обозначим $\{\varphi, \varphi'\} = \Phi$, причем норма $\|\Phi\|_{W_2^1} = \|\varphi\|_{L_2}^2 + \|\varphi'\|_{L_2}^2$. Рассмотрим линейный оператор A , действующий из W_2^1 в L_2 следующим образом:

$$A\varphi = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds, \quad c \leq x \leq d,$$

$K(x, s)$ — непрерывная в Π функция. Интегральный оператор A из W_2^1 в L_2 ограничен, причем

$$\|A\|_{W_2^1 \rightarrow L_2} \leq \|A\|_{L_2 \rightarrow L_2}.$$

По определению сопряженного оператора A^*y — такой элемент $z \in W_2^1$, что для любого $\Phi \in W_2^1$

$$\left(\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds, y(x) \right)_{L_2[c, d]} = (\Phi, z)_{W_2^1} = (\varphi, z)_{L_2[a, b]}^2 + (\varphi', z')_{L_2[a, b]}.$$

Очевидно, что

$$\left(\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds, y(x) \right)_{L_2[c, d]} = \left(\varphi, \int_c^d K(x, s) y(x) dx \right)_{L_2[a, b]}.$$

Рассмотрим элемент $z(s) \in W_2^1$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$-z''(s) + z(s) = \int_c^d K(x, s) y(x) dx, \quad z'(a) = z'(b). \quad (3.25)$$

* Это одно из возможных определений.

Задача (3.25) для любого $y(x) \in L_2[c, d]$ однозначно разрешима, и ее решение записывается через функцию $G(\xi, \tau)$:

$$z(s) = \int_a^b G(\xi, \tau) \int_c^d K(x, \tau) y(x) dx d\tau.$$

Подставив $z(s)$ в тождество, определяющее A^* , нетрудно убедиться в том, что формула

$$A_y^+ = \left\{ \int_a^b G(\xi, \tau) \int_c^d K(x, \tau) y(x) dx d\tau, \int_a^b G'_\xi(\xi, \tau) \int_c^d K(x, \tau) y(x) dx d\tau \right\}$$

определяет сопряженный оператор на всем $L_2[c, d]$.

Учитывая приведенную формулу, не составит труда выписать уравнение (3.24) в конкретном виде. Это будет пара интегральных уравнений второго рода для z и z' соответственно. Приведем только уравнение для z (второе получается из него дифференцированием):

$$\begin{aligned} \alpha z(\xi) + \int_a^b G(\xi, \tau) \int_c^d K_h(x, \tau) \int_a^b K_h(x, s) z(s) ds dx d\tau = \\ = \int_a^b G(\xi, \tau) \int_c^d K_h(x, \tau) u_\delta(x) dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Его можно переписать в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} -\alpha z'(\tau) + \alpha z(\tau) + \int_c^d K_h(x, \tau) \int_a^b K_h(x, s) z(s) ds dx = \\ = \int_c^d K_h(x, s) u_\delta(x) dx, \quad z'(a) = 0, \quad z'(b) = 0. \end{aligned}$$

Остановимся подробнее на численных аспектах выбора параметра регуляризации в схеме обобщенной невязки. Если задача решается с точно заданным оператором ($h=0$), то выбор параметра невязки осуществляется по критерию $\beta(\alpha) = \|Az_\delta^\alpha - u_\delta\|_{U^2} = \delta^2$. Функция $\sigma(\lambda) = \beta(1/\lambda)$ выпукла по λ в области $\lambda > 0$, и для отыскания корня уравнения $\beta(\alpha) = \delta^2$ можно использовать высокоэффективные алгоритмы, например метод Ньютона.

Для численной реализации подобных алгоритмов желательно иметь оценку сверху для корня уравнения $\beta(\alpha) = \delta^2$, т. е. такое значение $\alpha = \alpha^*$, что $\beta(\alpha^*) > \delta^2$. Эта оценка достаточно просто вычисляется [16]. Если взять $\alpha^* = \|A\|c\delta/(\|u_\delta - c\delta)$, где $c > 1$ — произвольная константа, то $\beta(\alpha^*) > c\delta^2$. Выпуклость $\beta(1/\lambda)$ гарантирует сходимость итерационных процессов типа метода Ньютона с любого начального приближения.

Если $h \neq 0$, то функция $\rho_n^*(\alpha)$, вообще говоря, не обладает выпуклостью, а алгоритмы типа метода Ньютона могут не обеспечить сходимость к корню уравнения $\rho_n^*(\alpha)$. Однако поскольку функция $\rho_n^*(\alpha)$ строго монотонна по α в области $\alpha > 0$ и дифференцируема, то численное решение задачи определения параметра невязки в схеме обобщенной невязки не составляет проблемы.

Описанную выше схему наиболее естественно применять в случае, когда задача решается без ограничений, так как для отыскания экстремали функционала Тихонова можно использовать мощный аппарат линейной алгебры.

Если уравнение (3.23) решается с ограничениями (например, ставится условие неотрицательности искомой функции), задачу отыскания экстремали функционала Тихонова можно решать лишь итерационными методами. Задача определения корня уравнения (3.19) также требует организации итерационного процесса. Поэтому возникает заманчивая возможность решать эти две задачи с помощью одного итерационного метода. Такие процессы описаны в гл. V, VI.

§ 4. Схема Тихонова для нелинейных операторных уравнений

Схему Тихонова можно перенести и на нелинейные операторные уравнения. Однако в этом случае она дает РА для отображения A^{-1} уже не на всей области определения оператора A^{-1} , а на его подмножестве.

1. Регуляризирующие алгоритмы для нелинейных операторных уравнений можно строить с использованием схемы компактного вложения. Рассмотрим уравнение

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U. \quad (3.27)$$

Пространства Z и U — нормированные, а оператор $A: Z \rightarrow U$ взаимнооднозначный и непрерывный. Возмущенные операторы A_h также считаем непрерывными. Кроме того, $\|A_h z - Az\|_U \leq \psi(h, \|z\|_Z)$, где $\psi(h, y)$ — непрерывная по совокупности аргументов при $h \geq 0, y \geq 0$ функция, монотонно неубывающая по первому аргументу, неотрицательная и такая, что $\psi(h, y) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ равномерно по y на любом сегменте $0 \leq y \leq c$. В случае линейных операторов A и A_h $\psi(h, y) = hy$.

Пусть V — взаимнооднозначный оператор, действующий из гильбертова пространства X в Z . Пусть V усиленно непрерывен (т. е. переводит слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся). Например, если X компактно вложено в Z , то V может быть оператором вложения. Пусть $D \subset X$ — замкнутое выпуклое множество ограничений задачи. Предполагаем, что $\bar{z}$ — точное решение, $\bar{z} \in VD \subset Z$. Это и есть дополнительное ограничение на $D_{A^{-1}}: \bar{u} = AV\bar{x}$. Таким образом, приходим к задаче

$$AVx = u, \quad AV: X \rightarrow U, \quad x \in D, \quad (3.28)$$

причем вместо $\bar{u}$ и A заданы их приближения. Оператор новой задачи AV вполне непрерывен и взаимнооднозначен.

Рассмотрим экстремальную задачу: найти

$$\operatorname{argmin}_{x \in X_\eta} \|x\|_X, \quad (3.29)$$

где $X_\eta = \{x \in D : \|A_h Vx - u_\delta\|_U \leq \delta + \psi(h, \|Vx\|)\}$. Очевидно, что множество X_η не пусто, так как содержит по крайней мере точку $\bar{x}$ такую, что $\bar{z} = V\bar{x}$. Следовательно, задача (3.29) эквивалентна задаче

$$\operatorname{argmin}_{x \in X_\eta \cap S(0, \rho)} \|x\|_X, \quad (3.30)$$

где $S(0, \rho)$ — замкнутый шар в пространстве X с центром в нуле и радиусом $R = \|\bar{x}\|_X$. Для того чтобы доказать разрешимость задачи (3.30), а стало быть, и задачи (3.29), достаточно убедиться в том, что $X_\eta \cap S(0, R)$ — слабый компакт в X , а далее воспользоваться тем, что выпуклый непрерывный функционал $f(x) = \|x\|_X$ в гильбертовом пространстве X слабо полунепрерывен снизу.

Лемма 3.6. *Множество $X_\eta \cap S(0, R)$ — слабый компакт в X .*

Доказательство. Так как $D \cap S(0, R)$ не пусто и ограничено, а пространство X гильбертово, то $D \cap S(0, R)$ и, следовательно, $X_\eta \cap S(0, R)$ слабо компактны. Докажем, что $X_\eta \cap S(0, R)$ слабо замкнуто. Пусть последовательность $x_n \in X_\eta \cap S(0, R)$, слабо сходится к $x^* \in X$. Так как $X_\eta \cap S(0, R) \subset D \cap S(0, R)$, а $D \cap S(0, R)$ выпукло и замкнуто, то $x^* \in D \cap S(0, R)$. Из неравенства

$$\begin{aligned} \|A_h Vx - u_\delta\|_U &= \|A_h Vx^* - A_h Vx_n + A_h Vx_n - u_\delta\|_U \leq \\ &\leq \delta + \psi(h, \|Vx_n\|) + \|A_h Vx^* - A_h Vx_n\|, \end{aligned}$$

используя усиленную непрерывность операторов V и $A_h V$ и непрерывность $\psi(h, y)$ по второму аргументу, получим после перехода к пределу неравенство

$$\|A_h Vx^* - u_\delta\|_U \leq \delta + \psi(h, \|Vx^*\|_Z),$$

т. е. $x^* \in X_\eta \cap S(0, R)$. Лемма 3.6 доказана.

Таким образом, для любых $\delta, h > 0$ задача (3.29) разрешима. Пусть x_η — произвольный элемент из множества решений задачи (3.29), $\eta_n = (\delta_n, h_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть также, как обычно, A_{h_n}, u_{δ_n} — приближения для $A, \bar{u}$ для каждого η_n . Справедлива теорема гарантирующая, что задача (3.29) дает нам ПА (т. е. A^{-1} регуляризируем на $AVD \subset U$).

Теорема 3.3. *Последовательность $x_n = x_{\eta_n}$ сходится к $\bar{x} \in D$ в норме пространства X .*

Доказательство. Так как для любого $\eta_n > 0$ $\|x_n\|_X \leq \|\bar{x}\|_X$, а пространство X гильбертово, то из последовательности

x_n можно выделить подпоследовательность $x_{n'}$, слабо сходящуюся к $x^* \in D \cap S(0, \|\bar{x}\|_X)$. При этом

$$\begin{aligned} \|AVx_{n'} - \bar{u}\|_U &\leq \|A_{h_{n'}}Vx_{n'} - u_{\delta_{n'}}\|_U + \|AVx_{n'} - A_{h_{n'}}Vx_{n'}\|_U + \\ &+ \|u_{\delta_{n'}} - \bar{u}\|_U \leq 2(\delta_{n'} + \psi(h_{n'}, \|Vx_{n'}\|_Z)). \end{aligned}$$

Так как последовательность $x_{n'}$ слабо сходится, то последовательность $Vx_{n'}$ ограничена: $\|Vx_{n'}\|_Z \leq c$. Переходя к пределу при $n' \rightarrow \infty$ и пользуясь свойствами функции AV и усиленной непрерывностью оператора AV , получим

$$\|AVx^* - \bar{u}\|_U = 0.$$

В силу взаимной однозначности оператора AV $x^* = \bar{x}$.

Далее так как $\|x\|_X$ слабо полунепрерывна снизу, то

$$\|x^*\|_X \leq \varliminf_{n' \rightarrow \infty} \|x_{n'}\|_X \leq \overline{\lim_{n' \rightarrow \infty}} \|x_{n'}\|_X \leq \|\bar{x}\|_X,$$

т. е.

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \|x_{n'}\|_X = \|\bar{x}\|_X.$$

Поскольку X гильбертово пространство, то $x_{n'} \xrightarrow{X} \bar{x}$ при $n' \rightarrow \infty$ по норме пространства X . Так как это верно для любой подпоследовательности $x_{n'}$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$. Теорема 3.3 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Поскольку V усиленно непрерывен то $z_n = Vx_n$ сходятся к $\bar{z}$ — решению уравнения (3.27) по норме пространства Z .

З а м е ч а н и е 2. Пусть оператор AV не является взаимнооднозначным и $\bar{X} \subset D$ — множество решений уравнения $AVx = \bar{u}$. Из доказательства теоремы 3.3 следует, что алгоритм отыскания приближенного решения как решения экстремальной задачи (3.29) обеспечивает сходимость последовательности регуляризованных приближений к нормальному решению.

Отметим, что в описанной постановке, если отказаться от требования $\|u_\delta - \bar{u}\|_U \leq \delta$, $\bar{u} \in AVD$, задача (3.29) не является, вообще говоря, разрешимой, поскольку множество X_η может быть пустым.

2. Для построения приближенных решений некорректно поставленной задачи в случае нелинейного оператора, так же как и в § 1, может быть использован и функционал Тихонова $M^\alpha[z]$ в схеме с компактным вложением. Для упрощения считаем оператор A известным точно и предположения п. 1 выполненными.

Пусть

$$M^\alpha[x] = \|AVx - u_\delta\|_U^2 + \alpha \|x\|_X^2. \quad (3.31)$$

Справедлива лемма, гарантирующая существование экстремали функционала Тихонова.

Л е м м а 3.7. Для любого $u_\delta \in U$ и $\alpha > 0$ задача

$$\operatorname{argmin}_{x \in D} M^\alpha [x]$$

разрешима, т. е. множество экстремалей X_δ^α не пусто.

Доказательство этой леммы в идейном плане повторяет доказательство леммы 3.6, и мы не будем его приводить.

Схема компактного вложения позволяет построить РА с априорным выбором параметра регуляризации α . Справедлива

Теорема 3.4. Пусть параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ выбран так, что $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, причем $\delta^2/\alpha(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Пусть $x_\delta^{\alpha(\delta)}$ — произвольный элемент из множества экстремалей X_δ^α при $\alpha = \alpha(\delta)$. Тогда $x_\delta^{\alpha(\delta)} \xrightarrow{X} \bar{x}$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. Пусть $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку

$$M^{\alpha(\delta_n)} [x_{\delta_n}^{\alpha(\delta_n)}] \leq M^{\alpha(\delta_n)} [\bar{x}],$$

то выполнены соотношения

$$\|x_{\delta_n}^{\alpha(\delta_n)}\|_{\bar{X}}^2 \leq \|\bar{x}\|_{\bar{X}}^2 + \delta_n^2/\alpha(\delta_n) \quad (3.32)$$

и

$$\|AVx_{\delta_n}^{\alpha(\delta_n)} - u_{\delta_n}\|_U^2 \leq \delta_n^2 + \alpha(\delta_n) \|\bar{x}\|_{\bar{X}}^2. \quad (3.33)$$

Стало быть, последовательность $x_{\delta_n}^{\alpha(\delta_n)}$ слабо компактна. Не ограничивая общности, можно считать, что она слабо сходится к некоторому элементу $x^* \in D$ (D в силу условий теоремы слабо замкнуто). Так как оператор AV вполне непрерывен, то, используя (3.33), нетрудно убедиться, что $\|AVx^* - \bar{u}\|_U = 0$, или $x^* = \bar{x}$. Остается заметить, что в гильбертовом пространстве условие (3.32) вместе со слабой сходимостью $x_{\delta_n}^{\alpha(\delta_n)}$ к $\bar{x}$ дает сильную сходимость $x_{\delta_n}^{\alpha(\delta_n)} \xrightarrow{X} \bar{x}$ при $n \rightarrow \infty$.

3. Рассмотрим вопрос о возможности выбора параметра регуляризации в схеме Тихонова по невязке. Выясним, какие из свойств функций $\beta_\delta(\alpha)$, $\varphi_\delta(\alpha)$, $\gamma_\delta(\alpha)$ сохраняются для нелинейных задач.

Пусть дана задача (3.27), причем операторы A и V пространства Z , X , V удовлетворяют условиям, перечисленным выше. О множестве $D \subset X$ дополнительно предположим, что $0 \in D$.

Меру несовместности уравнения (3.17) на множестве D определим как

$$\mu_\delta(A, y_\delta) = \inf_{x \in D} \|AVx - u_\delta\|_U.$$

Как и в § 1, считаем, что нам известно приближение $\mu_\delta^*(A, u_\delta)$ меры несовместности μ_δ с точностью $\kappa > 0$, а точность κ согласована с δ таким образом, что $\kappa = \kappa(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Пусть Q — оператор выбора $QX_\delta^\alpha = x_\delta^\alpha \in X_\delta^\alpha$, сопоставляющий множеству экстремалей X_δ^α фиксированный элемент $x_\delta^\alpha \in X_\delta^\alpha$. Рассмотрим вспомогательные функции

$$\varphi_\delta(\alpha) = \|AVx_\delta^\alpha - u_\delta\|_{U^2}^2 + \alpha \|x_\delta^\alpha\|_{X^2}^2,$$

$$\gamma_\delta(\alpha) = \|x_\delta^\alpha\|_{X^2}^2,$$

$$\beta_\delta(\alpha) = \|Ax_\delta^\alpha - u_\delta\|_{U^2}^2.$$

Справедлива

Лемма 3.8. *Функции $\varphi_\delta(\alpha)$, $\gamma_\delta(\alpha)$ и $\beta_\delta(\alpha)$ обладают следующими свойствами:*

- 1) *функция $\varphi_\delta(\alpha)$ непрерывна и вогнута при $\alpha > 0$;*
- 2) *функция $\gamma_\delta(\alpha)$ монотонно не возрастает, а $\varphi_\delta(\alpha)$ и $\beta_\delta(\alpha)$ монотонно не убывают при $\alpha > 0$, причем на интервале $(0, \alpha_0)$ таком, что $x_\delta^\alpha \neq 0$ для любого $\alpha \in (0, \alpha_0)$, функция $\varphi_\delta(\alpha)$ строго монотонна;*

3) *справедливы соотношения*

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \gamma_\delta(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \gamma_\delta(\alpha) = 0,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi_\delta(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \beta_\delta(\alpha) = \|u_\delta\|_{U^2}^2,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \alpha \gamma_\delta(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \varphi_\delta(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \beta_\delta(\alpha) = \mu_\delta(A, u_\delta)^2.$$

Доказательство леммы 3.8 ничем не отличается от доказательства соответствующих пунктов в лемме 3.3.

Следующий пример [47] свидетельствует о том, что в нелинейных задачах даже при отсутствии ограничений целый ряд свойств (непрерывность, строгая монотонность) таких функций, например невязки, не имеют места. Считаем оператор A заданным точно. В качестве пространств Z и U выберем $Z = U = R$ — пространство действительных чисел с естественной нормой $\|z\|_Z = |z|$. Пусть α_0 — положительный числовой параметр, а $\bar{z}$ и $\bar{u} > 0$ — фиксированные элементы из R , связанные соотношением $\bar{z} = \bar{u}\alpha_0^{-1/2}$.

Рассмотрим нелинейный оператор $A: Z \rightarrow U$, который задается следующим образом:

$$Az = \begin{cases} 2\bar{u}, & z \leq 0, \\ (\bar{u}^2 - \alpha_0 z^2)^{1/2}, & 0 < z \leq \bar{z}, \\ (\alpha_0 z^2 - \bar{u}^2)^{1/2} + \bar{u}, & z > \bar{z}. \end{cases}$$

Легко видеть, что $u = \bar{u}$ соответствует единственное решение $z \in R$.

Пусть δ — любое число, удовлетворяющее условию

$$0 < \delta < \delta_0 = \|\bar{u}\|_R.$$

Считаем, что каждому значению погрешности δ соответствует элемент $u_\delta = \bar{u} \in U$. Рассмотрим функционал

$$M^\alpha[z] = \|Az - u_\delta\|_{R^2}^2 + \alpha \|z\|_{R^2}^2.$$

В нашем случае экстремаль функционала определяется соотношениями

$$z_0^\alpha = \begin{cases} \bar{z}, & 0 < \alpha < \alpha_0, \\ z^*, & \alpha = \alpha_0, \\ 0, & \alpha > \alpha_0. \end{cases}$$

Здесь z^* — любое число из отрезка $[0, \bar{z}]$. Вычисляя невязку, получим

$$\beta_\delta(\alpha) = \|Az_0^\alpha - u_\delta\|_R^2 = \begin{cases} 0, & 0 < \alpha < \alpha_0, \\ \|\bar{u}\|^2, & \alpha > \alpha_0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что выбор параметра регуляризации по принципу невязки из равенства

$$\beta_\delta(\alpha) = \|Az_0^\alpha - u_\delta\|_R^2 = \delta^2$$

невозможен, каково бы ни было $\delta > 0$ из интервала $(0, \delta_0)$.

Этот простой пример показывает, что в случае нелинейных задач принципа невязки в обычной форме $\beta_\delta(\alpha) = \delta^2$ неприменим!

З а м е ч а н и е. Как следует из приведенного выше примера, для нелинейного операторного уравнения невязка $\beta_\delta(\alpha)$ может быть разрывной функцией и корень уравнения $\beta_\delta(\alpha) = \delta^2$ может не существовать. Существует так называемый альтернативный способ выбора параметра регуляризации, в котором, если уравнение $\beta_\delta(\alpha) = \delta^2$ неразрешимо, выбираем значение параметра регуляризации α левее точки разрыва, используя значение непрерывного функционала $\varphi_\delta(\alpha)$.

З а м е ч а н и е. В одном частном случае алгоритм выбора параметра регуляризации по невязке дает регуляризирующий алгоритм и для нелинейных задач.

Пусть дано операторное уравнение

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U$$

с произвольным непрерывным взаимнооднозначным монотонным оператором $A: Z \rightarrow Z$, Z — гильбертово пространство; определение монотонного оператора дано в гл. V.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$Az + \alpha z = u_\delta, \quad u_\delta \in U. \quad (3.34)$$

Можно показать, что решение задачи (3.34) Z_δ^α существует и единственно. Кроме того, если выбрать параметр $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия $\beta_\delta(\alpha) = \|Az_\delta^\alpha - u_\delta\|_U^2 = c\delta^2$ ($c > 1$ — фиксированная константа), то $z_\delta^{\alpha(\delta)} \xrightarrow{Z} \bar{z}$ при $\delta \rightarrow 0$. Другими словами, для монотонных операторов принцип невязки дает регуляризирующий алгоритм [3, 2].

Общие способы построения линейных РА для линейных задач в гильбертовом пространстве

Рассматривая линейные некорректные задачи в гильбертовом пространстве, мы имеем в виду две задачи.

Задача 1. Решение операторного уравнения

$$Az = u, z \in Z, u \in U \quad (4.1)$$

с замкнутым и, вообще говоря, необратимым оператором. Область определения оператора A D_A плотна в Z .

Задача 2. Вычисление значений замкнутого неограниченного оператора

$$\mathfrak{U} : Z \rightarrow U \quad (4.2)$$

с плотной областью определения $D_{\mathfrak{U}} \in Z$.

Эти две задачи тесно взаимосвязаны. Первая задача при надлежащем определении обратного оператора A^{-1} может быть формально сведена ко второй. Однако такая операция не всегда целесообразна по целому ряду причин. Аппроксимирующие семейства K_{α} удобно строить для каждой задачи отдельно. Например, задача вычисления производной от функции (задача 2) может быть сведена к задаче решения интегрального уравнения первого рода (задача 1), но построение регуляризатора для задачи дифференцирования, конечно, не требует такого перехода. Поэтому мы не рассматриваем формальные схемы, в которых эти задачи объединены, а обсуждаем их отдельно.

§ 1. Общая схема построения РА для линейных задач с вполне непрерывным оператором

Пусть в задаче 1 оператор A вполне непрерывен и Z, U — гильбертовы сепарабельные пространства.

Обозначим $S(A^*A)$ спектр оператора A^*A , состоящий из собственных значений оператора A^*A и точки 0, причем $\lambda=0$ может и не быть собственным значением A^*A . В силу положительности A^*A $S(A^*A)$ лежит на положительной части вещественной оси и состоит из не более чем счетного числа точек λ_i . Пусть e_i — собственные векторы оператора A^*A , соответствующие собственному

значению λ_i . Совокупность $\{e_i\}$ образует ортонормированную систему в Z . Определим функцию от оператора A^*A . Пусть $\chi(\lambda)$ — некоторая комплекснозначная ограниченная функция, определенная при $\lambda \in S(A^*A)$. Оператор $\chi(A^*A)$ определяется так:

$$\chi(A^*A)f = \sum_{\lambda_i \neq 0} \chi(\lambda_i)(f, e_i)e_i + \sum_{e_i \in \text{Ker}(A^*A)} \chi(0)(f, e_i)e_i. \quad (4.3)$$

В (4.3) выделено отдельно суммирование по собственным векторам, соответствующим $\text{Ker} A^*A$ (если таковые имеются). Формула (4.3) определяет линейный ограниченный оператор. Его норма вычисляется по формуле

$$\|\chi(A^*A)\| = \sup_{\lambda \in S(A^*A)} |\chi(\lambda)|.$$

Для того чтобы приближенно решать задачу (4.1), мы согласно общей концепции (см. гл. I) должны построить семейство ограниченных операторов K_α , которые поточечно аппроксимировали бы отображение $G = A^{-1}$, связанное с задачей (4.1). Вообще говоря, отображение A^{-1} многозначное, так как мы не предполагаем, что $\text{Ker} A = \emptyset$. В дальнейших рассуждениях (если специально не оговорено иное) под $G = A^{-1}$ понимаем однозначное сечение упомянутого многозначного отображения $Gu = \arg \min_{Az=u} \|z\|$. Такое Gu на-

зывается также нормальным решением уравнения (4.1). Нетрудно показать, что нормальное решение уравнения (4.1) — элемент $A^{-1}u$, ортогональный ядру A^*A или A . Нужное семейство аппроксимирующих отображений строим следующим образом [5].

Пусть $\theta(\lambda, \alpha)$ — комплекснозначная функция. Относительно $\theta(\lambda, \alpha)$ предполагаем, что:

- 1) $\sup_{\lambda \in S(A^*A)} |\theta(\lambda, \alpha)| \sqrt{\lambda} = K_\alpha < \infty, \quad \alpha > 0;$
- 2) $\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \lambda \neq 0, \lambda \in S(A^*A)}} \theta(\lambda, \alpha) \lambda = 1;$
- 3) $\sup_{\substack{\lambda, \alpha \\ \lambda \in S(A^*A), \alpha > 0}} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda| < \infty.$

Примером такой функции может служить

$$\theta(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\lambda + \alpha}.$$

В этом случае выполнены все условия на θ , причем

$$K_\alpha = \sup_{\lambda \in S(A^*A)} \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \alpha} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Приведем другой пример:

$$\theta(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \lambda > \alpha, \\ 0, & 0 \leq \lambda \leq \alpha. \end{cases}$$

Очевидно, что $K_\alpha \leq 1/\sqrt{\alpha}$ и $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \theta\lambda = 1$ для любого $\lambda > 0$.

Используя формулу (4.3), можно образовать оператор $\theta(A^*A, \alpha)$. Теперь определим семейство операторов R_α , действующих из U в Z :

$$R_\alpha u = \theta(A^*A, \alpha) = \sum_{\lambda_i \neq 0} \theta(\lambda_i, \alpha) (A^*u, e_i) e_i. \quad (4.5)$$

В формуле (4.5) отсутствует сумма по собственным векторам, соответствующим $\lambda=0$. Так как если $e_i \in \text{Ker } A^*A$, то и $Ae_i = 0$. Заметим, что поскольку $\text{Ker } A^*A$ — подпространство, то каждый элемент $z \in Z$ можно представить в виде $z = \hat{z} + \hat{\hat{z}}$, где $\hat{\hat{z}} \in \text{Ker } A^*A$. Для того чтобы R_α аппроксимировало Gu , необходимо и достаточно, чтобы $\forall \hat{z}, \hat{z} \perp \text{Ker } A^*A$, выполнялось соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha A\hat{z} - \hat{z}\|_Z = 0.$$

Теорема 4.1. Семейство R_α , порожденное функцией (4.5) со свойствами (4.4), является аппроксимирующим для задачи (4.1).

Доказательство. Докажем предварительно, что R_α — ограниченный оператор из U в Z и $\|R_\alpha\| \leq K_\alpha$. (Нетрудно убедиться в том, что K_α не оценка, а точное значение нормы R_α , т. е. $\|R_\alpha\| = K_\alpha$.) Имеем

$$\begin{aligned} \|R_\alpha u\|_Z^2 &= \sum_{\lambda_i \neq 0} |\theta(\lambda_i, \alpha)|^2 |(A^*u, e_i)|^2 \leq \\ &\leq \sum_{\lambda_i \neq 0} |\theta(\lambda_i, \alpha)|^2 \lambda_i |(u, e'_i)|^2 \leq K_\alpha^2 \|u\|^2, \quad e'_i = \frac{Ae_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что $(e'_i, e'_j) = 0$, $i \neq j$.

$$\|Ae_i\| = (e_i, A^*Ae_i) = \lambda_i.$$

Возьмем произвольный элемент $\hat{z}$, $\hat{z} \perp \text{Ker } A^*A$. Учитывая, что $\hat{z} \perp \text{Ker } A^*A$, имеем

$$R_\alpha A\hat{z} - \hat{z} = \sum_{\lambda_i \neq 0} (\theta(\lambda_i, \alpha) \lambda_i - 1) (\hat{z}, e_i) e_i.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|R_\alpha \widehat{Az} - \widehat{z}\|_Z &= \sum |\varphi(\lambda_i, \alpha) - 1|^2 |\widehat{z}, e_i|^2 \leq \\ &\leq \sum_{\lambda_i \geq \varepsilon_1} |\varphi(\lambda_i, \alpha) - 1|^2 |\widehat{z}, e_i|^2 + c \sum_{\lambda_i < \varepsilon_1} |\widehat{z}, e_i|^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$c = \sup_{\lambda, \alpha} |\theta(\lambda_i, \alpha) \lambda_i - 1|^2.$$

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Выберем $\varepsilon_1(\varepsilon)$ так, чтобы второе слагаемое в (4.6) было меньше $\varepsilon/2$. Выбирая теперь α достаточно малым, можно добиться, чтобы и первое слагаемое в (4.6) оказалось меньше $\varepsilon/2$. В силу произвольности ε

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha \widehat{Az} - \widehat{z}\| = 0.$$

Пусть $\widehat{z}$ — нормальное решение уравнения $Az = u$. Справедлива

Теорема 4.2. Пусть $\alpha = \alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ так, что $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta K_{\alpha(\delta)} = 0$.

Тогда операторное семейство $R_{\alpha(\delta)}$ порождает РА для решения задачи (4.1), т. е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|u_\delta - u\| \leq \delta} \|R_{\alpha(\delta)} u_\delta - \widehat{z}\| = 0.$$

Доказательство теоремы 4.2 следует из аппроксимирующих свойств семейства R_α и оценки $\|R_\alpha\| \leq K_\alpha$ (см. теорему 1.7 гл. I).

§ 2. Построение аппроксимирующих семейств и РА в общем случае

В этом параграфе описывается конструкция аппроксимирующих семейств и РА для задач 1 и 2 в общей постановке [4—6]. При этом мы ограничимся, как и в § 1, рассмотрением только линейных аппроксимаций и РА, что естественно ввиду линейности первоначальных задач.

Так как отображение G , связанное с задачей 1, вообще говоря, многозначно (не предполагается, что $\text{Ker} A = \emptyset$), то следует уточнить, что в этом случае понимается под аппроксимирующим семейством.

Пусть для определенности параметр α аппроксимирующего семейства R_α пробегает интервал положительной полуоси и изучается аппроксимация при $\alpha \rightarrow 0$. Тогда естественно, чтобы конструируемое семейство линейных непрерывных операторов R_α обладало таким свойством: если $u \in R(A)$, то $R_\alpha u \rightarrow \widehat{z}$ при $\alpha \rightarrow 0$, где $\widehat{z}$ —

какое-либо решение уравнения (4.1). Иначе это можно сформулировать так:

$$\forall z \in D_A \quad \exists \hat{z}, \quad A\hat{z} = Az = u,$$

такое, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha A z - \hat{z}\| = 0. \quad (4.7)$$

Если для рассматриваемого семейства R_α условие (4.7) выполняется, то такое семейство назовем *аппроксимирующим* для задачи 1. Каждое аппроксимирующее семейство (4.7) естественным образом определяет однозначное отображение, связанное с задачей 1:

$$Gu = \lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha u, \quad u \in R(A).$$

В случае задачи 2 отображение $G = \mathfrak{U}$, поэтому здесь пригоден ранее введенное определение аппроксимирующего семейства (формула (1.8) гл. 1).

Если аппроксимации R_α построены, то в силу линейности и непрерывности они удовлетворяют условию Липшица (с постоянной $\|R_\alpha\|$). Следовательно, по теореме 1.7 с их помощью можно (для отображения $G = \lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha$) строить РА вида $R_{\alpha(\delta)}$, выбирая $\alpha(\delta)$ независимо от самого u_δ (или z_δ в случае задачи 2).

Поскольку R_α линейны, то теорема 1.7 гл. 1 может быть усилена: для конкретного семейства R_α могут быть указаны необходимые и достаточные условия на функцию $\alpha(\delta)$ такие, чтобы $R_{\alpha(\delta)}$ было РА для отображения G , связанного или с задачей 1, или с задачей 2. Приведем соответствующее утверждение, например, для задачи 2.

Теорема 4.3. Пусть R_α аппроксимирует $\mathfrak{U}$ на $D_{\mathfrak{U}}$. Для того чтобы в задаче 2 семейство $R_{\alpha(\delta)}$ порождало РА, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|R_{\alpha(\delta)}\| \delta = 0, \quad (4.8)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|R_{\alpha(\delta)} z - \mathfrak{U} z\| = 0 \quad \forall z \in D_{\mathfrak{U}}. \quad (4.9)$$

Доказательство. Пусть z_δ произвольный элемент из $S(z, \delta)$. Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\|R_\alpha(z_\delta - z)\| - \|(R_\alpha - \mathfrak{U})z\|\| &\leq \|R_\alpha z_\delta - \mathfrak{U} z\| \leq \\ &\leq \|R_\delta\| \delta + \|(R_\alpha - \mathfrak{U})z\|. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из (4.10) следует

$$\begin{aligned} \|\|R_\alpha\| \delta - \|(R_\alpha - \mathfrak{U})z\|\| &\leq \Delta(R_{\alpha(\delta)}, \delta, z) \leq \\ &\leq \|R_\alpha\| \delta + \|(R_\alpha - \mathfrak{U})z\| \quad \forall z \in D_{\mathfrak{U}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

и

$$\Delta(R_{\alpha(\delta)}, \delta, z) \geq \|(R_{\alpha(\delta)} - \mathfrak{U})z\|, \quad (4.12)$$

из (4.11) и (4.12) — утверждение теоремы.

Аналогичное утверждение справедливо и для аппроксимирующих семейств (4.7): условие (4.8) дословно сохраняется, вместо (4.9) нужно выписать (4.7) с заменой α на $\alpha(\delta)$.

Итак, для построения РА как для задачи 1, так и для задачи 2 нужно уметь строить непрерывные линейные аппроксимации соответствующих отображений.

а) Построение аппроксимаций для задачи 1. Пусть в задаче 1 оператор A замкнут в $\bar{D}_A = Z$. Строим R_α по той же схеме, что и в § 1. Для реализации этой схемы при построении функций от оператора A^*A нужно теперь использовать общее спектральное разложение самосопряженного оператора (например, [74, 89]).

Известно, что если A замкнут и $\bar{D}_A = Z$, то существует оператор A^*A , причем он самосопряжен, имеет плотную в Z область определения [89]. Как и всякий самосопряженный оператор, он имеет спектральное разложение. Пусть E_λ спектральное семейство для A^*A .

Определим при $\lambda \in S(A^*A)$, $\alpha > 0$, функцию $\theta(\lambda, \alpha)$. Предположим, что она измерима относительно E_λ при любом $\alpha > 0$. Это позволяет определить операторную функцию $\theta(A^*A, \alpha)$ и семейство операторов R_α по формуле

$$R_\alpha = \overline{\theta(A^*A, \alpha) A^*}. \quad (4.13)$$

Черта в (4.13) означает замыкание соответствующего формального произведения.

Теорема 4.4. Пусть оператор A замкнут, $\bar{D}_A = Z$. Для того чтобы семейство операторов R_α , определяемое формулой (4.13), порождало аппроксимацию для задачи 1, т. е. чтобы было выполнено соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha A z_1 - z_1\| = 0, \quad z_1 \in D_A \text{ и } z_1 \perp \text{Ker } A,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\text{vrai sup}_{\{E_\lambda\}} |\theta(\lambda, \alpha)| \sqrt{\lambda} = K_\alpha < \infty, \quad \alpha > 0, \quad (4.14)$$

$$|\theta(\lambda, \alpha) \lambda|^2 \leq c(1 + \lambda), \quad (4.15)$$

где C — постоянная, не зависящая от α ;

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1| = 0 \quad (4.16)$$

почти всюду относительно любой меры $(E_\lambda z_1, z_1)$,

$$z_1 \in D_A, \quad z_1 \perp \text{Ker } A.$$

Доказательство. Обратим внимание на то, что в (4.14) vrai sup берется относительно всех мер $(E_\lambda z, z)$, $z \in Z$. Прежде всего напомним, что измеримость функции по операторной мере E_λ означает ее измеримость относительно любой скалярной меры $\mu(\lambda) = (E_\lambda z, z)$. Измеримы в этом смысле, например, все непре-

рывные по λ ($0 \leq \lambda < \infty$) функции. Чтобы избежать непринципиальных технических трудностей, ведем доказательство в предположении ограниченности $\theta(\lambda, \alpha)$ по λ при каждом $\alpha > 0$ и ее вещественности.

Докажем достаточность условий (4.14)—(4.16). Пусть (4.14) выполнено. Из этого условия следует ограниченность каждого оператора K_α (4.13). При доказательстве теоремы 4.1 показано, что K_α в (4.14) является нормой оператора типа (4.13). Это утверждение остается справедливым и сейчас.

Рассмотрим оператор $A\theta(A^*A, \alpha)$. Он замкнут (как произведение замкнутого оператора на ограниченный) и определен на плотном в Z множестве, так как он заведомо определен на образе любого проектора E_λ . Действительно, любой E_λ коммутирует с $\theta(A^*A, \alpha)$ и поэтому

$$\theta(A^*A, \alpha) E_\lambda Z \subseteq E_\lambda Z \subseteq D_{(A^*A)^{1/2}} \subseteq D_A.$$

На плотном в Z множестве справедливо соотношение

$$\begin{aligned} (A\theta(A^*A, \alpha)z, A\theta(A^*A, \alpha)z)_U &= (z, A^*A\theta^2(A^*A, \alpha)z)_Z \leq \\ &\leq \sup_{\{E_\lambda\}} \theta^2(\lambda, \alpha) \lambda (z, z) = K_\alpha^2(z, z). \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $A\theta(A^*A, \alpha)$ на плотном в Z множестве ограничен. Так как он замкнут, то ограничен всюду в Z . Сопряженный к нему оператор в силу вещественности θ в точности совпадает с оператором (4.13).

Проверим теперь выполнение соотношения (4.7). Докажем, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha A z_1 - z_1\| = 0, \quad z_1 \in D_A, \quad z_1 \perp \text{Ker } A. \quad (4.17)$$

Если учесть (4.15) ограниченность θ и равенство $D_A = D_{(A^*A)^{1/2}}$ [56], то соотношение (4.17) с помощью интеграла по E_λ можно переписать в виде

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{S(A^*A)} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1|^2 d(E_\lambda z_1, z_1) = 0. \quad (4.18)$$

Справедливость (4.18) следует с учетом (4.15), (4.16) из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Достаточность доказана. Необходимость условий (4.14) и (4.15) почти очевидна. Пусть (4.17) выполнено и операторы R_α ограничены. Условие (4.14) — для выполнения (4.17). Множество D_A для замкнутого оператора A само является гильбертовым пространством $\text{Gr}(A)$ с нормой

$$(\|z\|^2 + \|Az\|^2)^{1/2}.$$

Рассмотрим теперь последовательность линейных операторов $R_\alpha A$, действующих из D_A в Z . В силу (4.17) эта последова-

тельность сходится при $\alpha \rightarrow 0$ и поэтому по известной теореме линейного функционального анализа [74] равномерно ограничена:

$$\|R_\alpha A z\|_Z \leq c \|z\|_{\text{Gr}(A)}.$$

Это неравенство эквивалентно (4.15), так как $D_A = D_{(A^*A)^{1/2}}$.

З а м е ч а н и е. Для выполнения условий (4.14) — (4.16) достаточно потребовать выполнения соответствующих неравенств всюду при $\lambda > 0$ и $\lambda = 0$. Например, достаточно потребовать ограниченности при всех $\lambda \geq 0$ правой части (4.15) и сходимости в (4.16) всюду, кроме точки $\lambda = 0$. Кстати, во всех реально используемых аппроксимациях эти условия выполняются именно в таком усиленном виде (см. примеры ниже).

Для фактического построения семейства R_α вида (4.13) не обязательно знание спектральной меры E_λ оператора A^*A . Дело в том, что все рациональные и некоторые другие функции оператора A^*A могут быть построены без знания спектральной меры.

Пример 1. $\theta(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\lambda + \alpha}$. Все условия теоремы 4.4 для этой функции выполнены. При этом

$$\text{vrai sup}_{\{E_\lambda\}} \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \alpha} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (4.19)$$

Оценка (4.19) неулучшаема на всем рассматриваемом классе операторов и достигается, например, для ограниченного оператора A , у которого спектр A^*A заполняет отрезок $[0, \|A^*A\|]$.

Оператор R_α можно выписать в явном виде:

$$R_\alpha = \overline{(\alpha E + A^*A)^{-1} A^*}. \quad (4.20)$$

Если оператор A ограничен, то формула (4.20) дает классическую аппроксимацию Тихонова, уже изученную нами (другим методом) в гл. III. Конкретный вид алгоритмов (4.13) (в частности, и (4.20)) существенно зависит от выбранных пространств Z и U . Например, если A — интегральный оператор Фредгольма из $W_2^l(D)$ в $L_2(D)$, то при $l=0, 1, \dots$ из (4.20) получаются схемы регуляризации нулевого, первого и т. д. порядков [103].

Выбирая $\alpha(\delta)$ так, как это допускается теоремой 4.3, мы получим на основании (4.20) РА для задачи 1. Новая информация о схеме Тихонова (4.20), получаемая рассматриваемыми методами, состоит в том, что условие на выбор $\alpha(\delta)$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} = 0 \quad (4.21)$$

носит окончательный характер.

Теорема 4.5. Для того чтобы аппроксимации Тихонова (4.20) порождали РА по формуле $R_{\alpha(\delta)} \equiv R_*$ для любой линейной задачи I , необходимо и достаточно, чтобы $\alpha(\delta)$ выбиралось согласно условию (4.21).

Приводимые ниже примеры 2 и 3 показывают, что аппроксимации и РА для задачи 1 порождают, в частности, давно известные в вычислительной математике итерационные процессы.

Пример 2. Пусть A — ограниченный оператор из Z в U . Рассмотрим итерации

$$z_{i+1} = (E - \mu A^* A) z_i + \mu A^* u, \quad z_0 = 0, \quad 0 < \mu < 2/\|A^* A\|. \quad (4.22)$$

Нетрудно видеть, что для любого u элемент z_n ($n=1, \dots$) выражается в виде некоторого линейного оператора $R_n u$ и этот оператор имеет вид (4.13), где α пробегает дискретное множество значений: $\alpha=1, 1/2, \dots, 1/n, \dots$.

Прямой подсчет показывает, что функция $\theta(\lambda, \alpha)$ выражается в виде

$$\theta(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \frac{1 - (1 - \mu\lambda)^{1/\alpha}}{\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ \mu/\alpha, & \lambda = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Условия (4.15), (4.16) выполняются. Условие (4.14) также выполнено, причем

$$K_\alpha = O\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\alpha}}\right). \quad (4.24)$$

Как и в примере 1, эта оценка неулучшаема на всем классе рассматриваемых операторов. Теорема (4.3) и соотношение (4.24) позволяют утверждать, что регуляризирующий алгоритм на основе процесса (4.22) мы получим, выбирая число итераций в процессе в зависимости от δ так, чтобы

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sqrt{n(\delta)} \delta = 0. \quad (4.25)$$

Условие (4.25), как и в примере 1, носит окончательный характер.

Теорема 4.6. Для того чтобы итерационные аппроксимации (4.22) порождали РА по формуле $R_{\alpha(\delta)} = R_\delta$ для любой линейной задачи 1 с ограниченным A , необходимо и достаточно, чтобы $n(\delta)$ (правило остановки) выбиралось согласно (4.25).

Подчеркнем, что теоремы 4.5 и 4.6 относятся к тому случаю, когда α (или n) выбираются в зависимости только от δ (но не от u_δ).

Пример 3. В предположениях примера 2 рассмотрим итерации

$$z_{i+1} = z_i - \mu A^* A z_{i+1} + \mu A^* u, \quad z_0 = 0, \quad \mu > 0. \quad (4.26)$$

И в этом случае $R_n u$ имеет вид (4.13) с функцией θ вида

$$\theta(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda(1 + \mu\lambda)^{1/\alpha}}, & \lambda \neq 0, \\ \mu/\alpha, & \lambda = 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Анализ функции (4.27) показывает, что для нее также выполнены условия теоремы 4.4, остаются справедливой оценка (4.24) и аналог теоремы 4.6.

Если процесс (4.26) переписать в виде

$$z_{i+1} = (E + \mu A^* A)^{-1} z_i + (E + \mu A^* A)^{-1} A^* u,$$

то его можно применять и в случае неограниченного замкнутого оператора A (вместо оператора $(E + \mu A^* A)^{-1} A^*$ нужно использовать его замыкание). Все сделанные выше выводы останутся справедливыми. Формально функцию (4.27), (4.23) можно рассматривать при любом вещественном $\alpha > 0$. При $\alpha \rightarrow 0$ аппроксимирующие и регуляризирующие свойства сохранятся.

Пример 4. Рассмотрим функцию

$$\theta(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \frac{1 - \exp(-\lambda/\alpha)}{\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ 1/\alpha, & \lambda = 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Если обозначить $1/\alpha = t$, то, для того чтобы определить результат действия оператора (4.13) с такой функцией θ , нужно решить задачу Коши для операторного дифференциального уравнения

$$\dot{z} = -A^* A z + A^* u, \quad z|_{t=0} = 0. \quad (4.29)$$

Выполнение всех нужных условий для функции (4.28) также легко проверяется. Можно показать, что

$$K_\alpha = O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) = O(\sqrt{t}).$$

Если $\|u - u_0\| \leq \delta$ и задача Коши решается до момента $t(\delta)$ такого, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sqrt{t(\delta)} = 0, \quad (4.30)$$

то эволюционный оператор $R_{t(\delta)}$ уравнения (4.29) порождает регуляризирующий алгоритм для задачи 1. Выбор $t(\delta)$ из (4.30) обязателен в том же смысле, что и в примерах 1—3.

Конструирование аппроксимаций и РА для задачи 1 может быть существенно упрощено, если оператор A самосопряжен. Пусть A самосопряженный и $\bar{D}_A = Z$. Тогда спектральное разложение по некоторой мере E_λ имеет уже сам оператор A и можно рассматривать измеримые функции оператора A . Определим операторное семейство R_α по формуле

$$R_\alpha = \theta(A, \alpha). \quad (4.31)$$

Теорема 4.7 Для того чтобы семейство операторов R_α , определяемое формулой (4.31), порождало ограниченную аппроксимацию для задачи 1 в случае самосопряженного A , т. е. было выполнено соотношение (4.17) и $z_1 \perp \text{Ker} A$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условие (4.16) и условия

$$\sup_{\{E_\lambda\}} |\theta(\lambda, \alpha)| = K_\alpha < \infty, \quad \alpha > 0, \quad (4.32)$$

$$|\theta(\lambda, \alpha)\lambda| \leq C(1 + |\lambda|).$$

$\{E_\lambda\}$ — спектральное семейство оператора A .

Доказательство этой теоремы — упрощенный вариант доказательства теоремы 4.4. Условие (4.32) необходимо и достаточно для ограниченности каждого оператора R_α из (4.31). Остальные рассуждения доказательства теоремы 4.4 полностью переносятся на рассматриваемый случай.

При рассмотрении конкретных примеров функций $\theta(\lambda, \alpha)$ следует иметь в виду, что спектр оператора A в отличие от A^*A , вообще говоря, заполняет всю вещественную ось (а не только луч $\lambda \geq 0$).

Так, функции $\theta(\lambda, \alpha)$, использованные при построении примеров 1—4 к теореме 4.4, порождают аппроксимации и РА только для задачи 1 с самосопряженным положительным оператором A . При этом аппроксимация для примера 1 $\left(\theta(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\lambda + \alpha}\right)$ примет вид

$$R_\alpha = (\alpha + A)^{-1}. \quad (4.33)$$

Аппроксимация (4.33) в литературе носит название аппроксимации Лаврентьева [69]. Величина K_α для нее вычисляется точно. Если $0 \in S(A)$, то $K_\alpha = 1/\alpha$. Сопоставляя это с теоремой 4.3, получим следующую теорему.

Теорема 4.8. Для того чтобы аппроксимации Лаврентьева порождали РА для задачи 1 с самосопряженным положительным оператором A , $0 \in S(A)$, по формуле $R_{\alpha(\delta)} = R_\delta$, необходимо и достаточно выбрать $\alpha(\delta)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\alpha(\delta)} = 0. \quad (4.34)$$

Для самосопряженных положительных операторов A можно рассмотреть также аналоги процессов (4.22), (4.26) и (4.29). При их записи нужно просто заменить A^* на единичный оператор. Величины K_α из (4.32) в этих случаях точно равны соответственно μ/α , μ/α , $1/\alpha$ (если $0 \in S(A)$).

Справедливы соответствующие аналоги теоремы 4.8. В частности, для модифицированного (без A^*) процесса (4.22) правило остановки $n(\delta)$, обеспечивающее регуляризирующие свойства процесса, должно удовлетворять условию

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} n(\delta) \delta = 0. \quad (4.35)$$

В случае общего самосопряженного оператора рассматриваемые в примерах 1—4 аппроксимации неприменимы. Однако существуют естественные аналоги аппроксимаций примеров 1 и 3.

Нетрудно проверить, что, например, функция $\theta(\lambda, \alpha) = \frac{1}{i\alpha + \lambda}$, i — мнимая единица, порождает аппроксимацию в случае самосопряженного оператора. При этом $K_\alpha = 1/\alpha$, если $\theta \in S(A)$. Если в (4.27) μ заменить на $i\mu$ ($\mu > 0$), то итерации

$$z_{n+1} = z_n - i\mu A z_{n+1} + i\mu u, \quad z_0 = 0,$$

порождают аппроксимации и РА для задачи 1 в общем самосопряженном случае. Правило остановки должно удовлетворять соотношению (4.35). Доказательство этих утверждений непосредственно следует из теорем 4.3 и 4.7.

б) Построение аппроксимаций и РА для задачи 2. Схема получения аппроксимаций и РА для линейной некорректной задачи 1 в общих чертах переносится и на задачу 2 — задачу вычисления значений неограниченного оператора $\mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ замкнут и $\bar{D}_{\mathfrak{M}} = Z$. Воспользуемся тем, что оператор $\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*$ замкнут, самосопряжен в u и имеет плотную в u область определения. Он допускает спектральное разложение, и поэтому можно определить операторные функции от $\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*$. Определим семейство операторов K_α следующей формулой:

$$R_\alpha = \overline{\chi(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*, \alpha) \mathfrak{M}}. \quad (4.36)$$

Дополнительно предполагаем, что функция $\chi(\lambda, \alpha)$ ограничена. Кроме того, области значений операторов $\mathfrak{M}$ и $(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)^{1/2}$ совпадают [56]. Это позволяет переписать условие аппроксимируемости в виде

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\chi(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*, \alpha) z - z\| = 0 \quad \forall z \in R(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)^{1/2} \quad (4.37)$$

или

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\chi(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*, \alpha) (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)^{1/2} u - (\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)^{1/2} u\| = 0. \quad (4.38)$$

Ограниченность функции $\chi(\lambda, \alpha)$ является чисто техническим предположением, без которого можно обойтись за счет усложнения рассуждений.

Теорема 4.9. Для того чтобы семейство операторов (4.39) в сделанных выше предположениях порождало аппроксимацию оператора $\mathfrak{M}$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$\operatorname{vrai} \sup_{E_\lambda} |\chi(\lambda, \alpha)| \sqrt{\lambda} = L_\alpha < \infty, \quad \alpha > 0, \quad (4.39)$$

$$|\chi(\lambda, \alpha) \sqrt{\lambda}|^2 \leq c(1 + \lambda^2), \quad (4.40)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} |\chi(\lambda, \alpha) \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}| = 0 \quad (4.41)$$

почти везде относительно мер

$$(E_\lambda u, u), \quad u \in D(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)^{1/2},$$

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 4.4. Его проведение предоставляется читателю.

Если ограничиться только достаточными условиями аппроксимации, то условия (4.40), (4.41) можно упростить. Пусть, например, $|\chi(\lambda, \alpha)| < c$, $\forall \lambda \geq 0$, $\alpha \geq 0$ и

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} |\chi(\lambda, \alpha) - 1| = 0$$

на полуоси $[0, \infty)$. Тогда имеет место сильная сходимость аппроксимаций (4.36) к $\mathfrak{M} z \forall z \in D_{\mathfrak{M}}$ (сравните с замечанием к теореме 4.4).

Пример. Положим $\chi(\lambda, \alpha) = \frac{1}{1 + \alpha\lambda}$. Нетрудно видеть, что

$$|\chi(\lambda, \alpha)| < 1 \quad \forall \lambda, \alpha \geq 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} |\chi(\lambda, \alpha) - 1| = 0, \quad \lambda \in [0, \infty).$$

Кроме того,

$$L_{\alpha} \leq \sup_{\lambda \in [0, \infty)} \frac{\sqrt{\lambda}}{1 + \alpha\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (4.42)$$

Эта оценка неуллучшаема на всем классе рассматриваемых операторов. Оператор R_{α} вида (4.36) можно в этом случае явно выписать:

$$R_{\alpha} = \overline{(E + \alpha \mathfrak{M}^*)}^{-1} \mathfrak{M}. \quad (4.43)$$

Аппроксимация (4.43) — аналог аппроксимации Тихонова (4.20) для задачи 1. Ее можно применять для вычисления значений замкнутых операторов $\mathfrak{M}$ с плотной областью определения $D_{\mathfrak{M}}$.

Пусть теперь аргумент оператора $\mathfrak{M}$ задан с ошибкой: $\|z - z_0\| \leq \delta$, где z_0 — приближенно заданный аргумент. В соответствии с теоремой 4.3 и оценкой (4.42) получаем следующую теорему.

Теорема 4.10. Для того чтобы аппроксимации (4.43) порождали PA для задачи 2 по формуле $R_{\alpha(\delta)} = R_0$ для любого замкнутого оператора с плотной областью определения, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha(\delta)$ выбиралось так, чтобы выполнялось соотношение (4.21).

Посмотрим, как выглядит семейство (4.43) для конкретного оператора $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{M} = \frac{d}{dx}$ и действует в вещественном гильбертовом пространстве $L_2(0, 1)$. Область $D_{\mathfrak{M}}$ состоит из функций $L_2(0, 1)$, производная которых суммируема с квадратом.

Можно показать, что $\mathfrak{U}^* = -\frac{d}{dx}$ и $D_{\mathfrak{U}^*}$ состоит из функций, принадлежащих $L_2(0, 1)$, имеющих суммируемую с квадратом производную и таких, что $z(0) = z(1) = 0$ [89]. Ясно, что

$$\mathfrak{U}\mathfrak{U}^*z = -\frac{d^2z}{dx^2}, \quad z(0) = z(1) = 0.$$

Оператор

$$(E + \alpha \mathfrak{U}\mathfrak{U}^*)^{-1}u,$$

очевидно, является интегральным оператором вида

$$\int_0^1 G_\alpha(x, \xi) u(\xi) d\xi,$$

где G_α — функция Грина оператора

$$\mathcal{L}z = \left(E - \alpha \frac{d^2}{dx^2}\right)z, \quad z(0) = z(1) = 0.$$

Оператор $(E + \alpha \mathfrak{U}\mathfrak{U}^*)^{-1} \mathfrak{U}$ имеет вид

$$\int_0^1 G_\alpha(x, \xi) \frac{d}{d\xi} u d\xi. \quad (4.44)$$

Его замыкание можно получить, выполнив в (4.44) интегрирование по частям:

$$R_\alpha = -\int_0^1 G'_{\alpha\xi}(x, \xi) u(\xi) d\xi. \quad (4.45)$$

В отличие от конструкции (4.13), которой охватывается большинство практически используемых схем приближенного решения операторных уравнений, конструкция (4.36) в приложениях практически не использовалась. Это связано в основном с относительно малой распространенностью задачи 2 по сравнению с задачей 1 в практике решения некорректных задач. Наиболее известная из задач типа 2 — задача вычисления производной функции одной или нескольких переменных. Для ее решения можно использовать аппроксимацию (4.45), но обычно используются другие аппроксимации (например, разностные), работать с которыми удобнее. Так же как и в случае задачи 1, конструирование аппроксимаций и РА для задачи 2 может быть упрощено, если оператор самосопряжен.

Рассмотрим возможность построения ограниченных аппроксимаций задачи 2 в виде

$$R_\alpha = \overline{\mathfrak{K}(\mathfrak{U}, \alpha)} \mathfrak{U}. \quad (4.46)$$

Теорема 4.11. Для того чтобы семейство операторов R_α , определенное формулой (4.46), порождало ограниченную аппрок-

симацию для задачи 2 в случае самосопряженного $\mathfrak{M}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\sup_{\lambda \in \sigma(\mathfrak{M})} |\chi(\lambda, \alpha)\lambda| = L_\alpha < \infty \quad \forall \alpha > 0,$$

$$\begin{aligned} |\chi(\lambda, \alpha)\lambda| &\leq C(1 + |\lambda|), \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} |\chi(\lambda, \alpha)\lambda - \lambda| &= 0, \end{aligned}$$

где E_λ — спектральное семейство самого $\mathfrak{M}$.

Доказательство этой теоремы копирует доказательство теоремы 4.7. Читатель без труда восстановит его детали.

В качестве примера рассмотрим опять операторную функцию $\chi(\mathfrak{M}, \alpha)$, порожденную функцией $\chi(\lambda, \alpha) = \frac{1}{1 + i\alpha\lambda}$. Нетрудно видеть, что если $\mathfrak{M}$ — положительный оператор, то условия теоремы 4.11 для нее выполнены, в частности $L_\alpha = 1/\alpha$. Соответствующая аппроксимация R_α описывается формулой

$$R_\alpha = \overline{(E + \alpha\mathfrak{M})^{-1} \mathfrak{M}}.$$

Если $\mathfrak{M}$ — самосопряженный (не обязательно положительный) оператор, то можно использовать аппроксимацию, порожденную функцией

$$\chi(\lambda, \alpha) = \frac{1}{1 + i\alpha\lambda}, \quad \alpha > 0, \quad L_\alpha = 1/\alpha. \quad (4.47)$$

Аппроксимация $\frac{1}{1 + i\alpha\lambda}$, $\alpha > 0$, непригодна, если $S(A)$ расположен по обе стороны от точки $\lambda = 0$.

§ 3. Оценки погрешности при решении линейных некорректных задач. Оптимальные алгоритмы

В гл. I (§ 3) отмечалось, что не может быть равномерной оценки погрешности аппроксимации (и погрешности РА на основе этой аппроксимации) на всей области определения аппроксимируемого оператора (A^{-1} или $\mathfrak{M}$). Для получения такой оценки нужна дополнительная информация об элементе, на котором есть аппроксимация. Наиболее законченные результаты об оценках в линейных задачах получаются, если множество D , на котором мы хотим получить оценку (в обоих рассматриваемых нами задачах), имеет вид

$$D = B(S \cap D_B), \quad (4.48)$$

здесь B — некоторый линейный оператор, S — единичная сфера с центром в 0 в некотором банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Только такие множества D рассматриваются в этом параграфе.

Оценки погрешности в задаче 1

Пусть R_α порождает аппроксимацию вида (4.13) в задаче 1, т. е.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha A z_1 - z_1\| = 0, \quad z_1 \in D_A, \quad z_1 \perp \text{Ker } A$$

Пусть также $\alpha \rightarrow 0$ B — какой-либо оператор из $\mathfrak{B}$ в D_A с плотной в $\mathfrak{B}$ областью D_B и $z_1 \in D$.

Теорема 4.12. Для того чтобы множество D (4.48) было множеством равномерной аппроксимации в задаче 1, необходимо и достаточно, чтобы оператор $R_\alpha AB - B$ допускал расширение на все $\mathfrak{B}$ и

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha AB - B\|_{\mathfrak{B} \rightarrow Z} = 0. \quad (4.49)$$

Доказательство. Так как по предположению D_B плотно в $\mathfrak{B}$, то множество $S \cap D_B$ плотно в S . Поэтому если на D существует равномерная оценка погрешности аппроксимации, то $\forall \alpha > 0$ оператор $R_\alpha AB - B$ равномерно ограничен на плотном множестве $S \cap D_B$ в единичной сфере. В силу линейности его можно продолжить на всю единичную сферу в $\mathfrak{B}$ с сохранением той же оценки. Это означает необходимость соотношения (4.49). Доказательство достаточности очевидно.

Рассмотрим задачу 1 с ограниченным оператором A и множеством

$$D = (A^* A)^k(S), \quad k > 0, \quad (4.50)$$

S — сфера в Z . Если R_α задается формулой (4.13), то в силу (4.49) скорость аппроксимации (в смысле (4.49)) на этом множестве оценивается формулой

$$\varphi(\alpha, k) = \sup_{\lambda \in S(A^* A)} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1| \lambda^k. \quad (4.51)$$

Величина нормы правой части (4.49) в этом случае равна

$$\text{vrai sup}_{\{E_\lambda\}, \lambda \in S(A^* A)} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1| \lambda^k.$$

Правая часть (4.51) для конкретных аппроксимаций может быть легко подсчитана. Сделаем это для разобранных в § 2 примеров.

1. Аппроксимация Тихонова (4.20). Подсчитаем для нее величину (4.51):

$$\sup_{\lambda \in S(A^* A)} \left| \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} - 1 \right| \lambda^k \leq \alpha \sup_{0 \leq \lambda \leq \|A\|^2} \frac{\lambda^k}{\lambda + \alpha}.$$

Но

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \|A\|^2} \frac{\lambda^k}{\lambda + \alpha} = \begin{cases} k^k (1-k)^{1-k} \alpha^{k-1}, & 0 < k < 1, \\ \frac{\|A\|^{2k}}{\|A\|^2 + \alpha}, & k \geq 1. \end{cases} \quad (4.52)$$

Подставим (4.52) в предыдущее выражение. Получаем, что при $0 < k \leq 1$ на множестве (4.50) имеется равномерная оценка погрешности аппроксимации (4.20) $O(\alpha^k)$, при $k \geq 1$ — оценка $O(\alpha)$. Эти оценки неулучшаемы для всего класса рассматриваемых операторов. Для неограниченных операторов первая оценка сохраняется при $0 < k \leq 1$. При $k > 1$ множество (4.50) уже не является множеством равномерной аппроксимации.

Из приведенных рассуждений следует, что на множествах вида (4.50) аппроксимации Тихонова не могут иметь оценку скорости аппроксимации, лучшую, чем $O(\alpha)$. Оказывается, что вообще ни на каком ненулевом элементе $z \in D_A$ скорости сходимости, лучшей, чем $O(\alpha)$, для аппроксимации (4.20) быть не может.

Действительно, пусть $z_1 \perp \text{Ker } A$, $z_1 \neq 0$,

$$\|R_\alpha A z_1 - z_1\| = \alpha \left[\int_{S(A^*A)} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \right)^2 d(E_\lambda z_1, z_1) \right]^{1/2}. \quad (4.53)$$

Так как $z_1 \neq 0$, то на луче $\lambda \geq 0$ имеется отделенное от 0 множество положительной $(E_\lambda z_1, z_1)$ меры. На этом множестве функция $\frac{\lambda}{\lambda + \alpha}$ при достаточно малом α становится больше, например, $1/2$. Следовательно, выражение в квадратных скобках в (4.53) при $\alpha \rightarrow 0$ не может стремиться к 0 и выражение слева $\geq \alpha \text{const}$.

2. Итерационная схема аппроксимации (4.22). Имеем

$$\varphi(n, k) = \sup_{\substack{\lambda \in S(A^*A) \\ 0 < \mu < 2/\|A^*A\|}} (1 - \mu\lambda)^n \lambda^k. \quad (4.54)$$

Можно непосредственно подсчитать, что

$$\varphi(n, k) = \left(\frac{n}{n+k} \right)^n \frac{1}{\mu^k} \left(\frac{k}{n+k} \right)^k = O(n^{-k}). \quad (4.55)$$

Итак, в случае итерационной аппроксимации (4.22) скорость аппроксимации увеличивается с ростом показателя k в (4.50).

3. Итерационная аппроксимация (4.26). Для нее

$$\varphi(n, k) = \sup_{\lambda \in S(A^*A)} \frac{\lambda^k}{i(1 + \mu\lambda)^n}, \quad \mu > 0.$$

Подсчет показывает, что при $S(A^*A) = [0, \infty)$

$$\varphi(n, k) = \frac{k^k}{(n-k)^k} \frac{1}{\mu^k} \left(\frac{n-k}{n} \right)^n = O(n^{-k}). \quad (4.56)$$

Итак, скорость аппроксимации при увеличении параметра k также увеличивается. Заметим, что в случаях итераций (4.22) и (4.26) скорость аппроксимации на множествах вида (4.50) возрастает с увеличением параметра μ . Оценку скорости аппрокси-

маций (4.13) удастся получить и на некоторых множествах, отличных от (4.50), в частности на множествах вида

$$D(A^*)^k S, \quad (4.57)$$

k — положительно, целое число.

Пусть для простоты рассуждений A и $\theta(A, \alpha)$ — ограниченные операторы. Нам нужно оценить норму оператора

$$R_\alpha A A^{*k} - A^{*k} = \theta(A^* A, \alpha) A^* A A^{*k} - A^{*k}.$$

Так же как и в доказательстве ограниченности $\|R_\alpha\|$ в теореме 4.4, оценим норму сопряженного оператора:

$$\begin{aligned} & \|A^* [\theta(A^* A, \alpha) A^* A - E]\| = \\ &= \sup_{\|z\| \leq 1} ((A^k A^* A \theta(A^* A, \alpha) - A^k) z, (A^k A^* A \theta(A^* A, \alpha) z)^{1/2} = \\ &= \sup_{\|z\| \leq 1} (z, (A^* A \theta(A^* A, \alpha) - E) (A^* A)^k (A^* A \theta(A^* A, \alpha) - E) z)^{1/2} = \\ &= \sup_{\|z\| \leq 1} \left\{ \int |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1|^2 \lambda^k d(E_\lambda z, z) \right\}^{1/2} \leq \\ & \sup_{\lambda \in S(A^* A)} \{ |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1|^2 \lambda^k \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Эта формула оценивает скорость сходимости аппроксимаций (4.13) на множестве (4.57). Из (4.58) непосредственно следуют конкретные оценки в рассмотренных примерах на множествах вида (4.57).

Если оператор A самосопряжен, то для конструирования аппроксимаций целесообразно пользоваться формулой (4.31). В этом случае аналогично предыдущему можно найти скорость сходимости аппроксимаций (4.31) на множествах

$$D = A^k(S), \quad k > 0. \quad (4.59)$$

Если оператор A неограничен, что вместо S нужно взять $S \cap D_A$. Скорость сходимости дается и в этом случае формулой (4.51) и заменой $S(A^* A)$ на $S(A)$.

Результаты примеров 1—3 остаются справедливыми в соответствующем контексте. Имея оценки скорости аппроксимации, нетрудно получить оценки погрешностей соответствующих РА на множествах (4.50), (4.57) и (4.59).

Лемма 4.1. [14]. Для фиксированной аппроксимации (4.13) R_α и фиксированного выбора $\alpha(\delta)$ справедлива оценка (на множестве D вида (4.50))

$$\frac{1}{2} \rho(\alpha(\delta), \theta, k) \leq \Delta(R_{\alpha(\delta)}, \delta, D) \leq \rho(\alpha(\delta), \theta, k), \quad (4.60)$$

где

$$\rho(\alpha(\delta), \theta, k) = K_{\alpha(\delta)}\delta + \sup_{\{E_\lambda\}, \lambda \in S(A^*A)} |(\theta(\lambda, \alpha(\delta))\lambda - 1)\lambda^k|.$$

Доказательство. По определению величина

$$\Delta(R_{\alpha(\delta)}, \delta, D) = \sup_{z_1 \in D} \sup_{\|u_\delta - Az_1\| \leq \delta} \|R_{\alpha(\delta)}u_\delta - z_1\|.$$

Поэтому

$$\Delta(R_{\alpha(\delta)}, \delta, D) \geq \sup_{z_1 \in D} \|R_{\alpha(\delta)}Az_1 - z_1\|.$$

Так как $z_1 = 0 \in D$, то

$$\Delta(R_{\alpha(\delta)}, \delta, D) \geq \sup_{\|u_\delta\| \leq \delta} \|R_{\alpha(\delta)}u_\delta\| = R_{\alpha(\delta)}\delta.$$

Суммируя эти две оценки, получаем с учетом (4.51) левую оценку (4.60). С другой стороны, из неравенства треугольника

$$\Delta(R_{\alpha(\delta)}, \delta, D) \leq K_{\alpha(\delta)}\delta + \sup_{z_1 \in D} \|R_{\alpha(\delta)}Az_1 - z_1\| = \rho(\alpha(\delta), \theta, k).$$

Аналогичные оценки справедливы для аппроксимаций (4.31) и множеств D вида (4.59). (Нужно только $S(A^*A)$ заменить на $S(A)$ и K_α считать в соответствии с (4.32).)

Оценки типа (4.60) позволяют не только оценивать погрешности конкретных РА на множествах вида (4.50), но и строить оптимальные и квазиоптимальные методы решения. Эта возможность основана на двухсторонней оценке погрешности оптимального метода R_{δ}^{opt} на D , следующей из (4.60) и теоремы 1.11:

$$\omega_1(\delta, D) \leq \Delta(R_{\delta}^{\text{opt}}, \delta, D) \leq \rho(\alpha(\delta), \theta, k), \quad (4.61)$$

здесь $\omega_1(\delta, D)$ — модуль непрерывности в 0 оператора A^{-1} (на D). В оценке (4.61) функция $\theta(\lambda, \alpha)$ может быть любой, допускаемой теоремой 4.4 (или теоремой 4.7 в случае самосопряженного A и множества D вида (4.59)).

Лемма 4.2 [14, 32]. Пусть ограниченный оператор A такой, что $S(A^*A)$ целиком заполняет отрезок $[0, a]$. Тогда

$$\omega_1(\delta, D) = \delta^{\frac{2k}{2k+1}} \quad (4.62)$$

при $a \geq \delta^{\frac{1}{k+1}}$. Если оператор A самосопряженный, положительный, $D = A^k(S)$, а $S(A)$ целиком заполняет отрезок $[0, a]$, то

$$\omega_1(\delta, D) = \delta^{\frac{k}{k+1}} \quad (4.63)$$

при $a \geq \delta^{\frac{1}{2k+1}}$.

Теорема 4.13. В условиях леммы 4.2 метод $R_{\bar{\alpha}(\delta)}$ (R_{α} — фиксированная аппроксимация вида (4.13) или (4.31), соответствующая функции θ , $\alpha(\delta)$ — фиксированная функция δ) оптимален на множестве D вида (4.50) или (4.57) при фиксированном $k > 0$, если

$$\rho(\bar{\alpha}(\delta), \bar{\theta}, k) = \delta^{\frac{k}{k+1/2}} (\delta^{\frac{k}{k+1}}), \quad (4.64)$$

или квазиоптимален, если

$$\rho(\bar{\alpha}(\delta), \bar{\theta}, k) = O(\delta^{\frac{k}{k+1/2}})(\delta^{\frac{k}{k+1}}). \quad (4.65)$$

В скобках стоят нужные правые части в случае аппроксимации (4.31) и множеств D вида (4.57).

Доказательство этой теоремы прямо следует из оценок (4.61) — (4.63).

Следствие 1. В условиях леммы 4.2 аппроксимация (4.13) с функцией

$$\theta(\lambda, \alpha) = \lambda^{k-1/2} (\alpha + \lambda^{k+1/2})^{-1}, \quad k > 0, \quad (4.66)$$

порождает оптимальный метод на D вида (4.50), если $\alpha(\delta) = \frac{\delta}{2k}$.

Аппроксимация (4.31) с функцией

$$\theta(\lambda, \alpha) = \lambda^k (\alpha + \lambda^{k+1})^{-1}. \quad (4.67)$$

порождает оптимальный метод на D вида (4.50), если $\alpha(\delta) = \delta/k$.

Доказательство этого следствия состоит в непосредственной проверке соотношения (4.64).

Следствие 2. Итерационные аппроксимации (4.22), (4.26) в условиях леммы 4.2 порождают квазиоптимальные методы на D вида (4.50), если правило останова дается формулой

$$n(\delta) = \left\lceil \frac{1}{\delta^{\frac{1}{k+1/2}}} \right\rceil.$$

Итерационные аппроксимации, построенные по схеме (4.31) с теми же функциями θ , порождают квазиоптимальные методы на D вида (4.59), если правило останова $n(\delta)$ дается формулой

$$n(\delta) = \left\lceil \frac{1}{\delta^{\frac{1}{k+1}}} \right\rceil.$$

Доказательство следствия 2 опирается на прямой подсчет порядка величины $\rho(n(\delta), \theta, k)$ вида (4.60) с применением соотношений (4.55), (4.56), (4.24). Используется также то обстоятельство, что

$$[x] \asymp x \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Следствие 3. В условиях леммы 4.2 аппроксимация Тихонова (4.20) порождает квазиоптимальный метод на D вида (4.50)

при $0 < k \leq 1$, если $\alpha(\delta) = \delta^{\frac{1}{k+1/2}}$. При $k > 1$ ни при каком выборе $\alpha(\delta)$ метод (4.20) не порождает квазиоптимального алгоритма.

Для доказательства второй части приведенного утверждения воспользуемся левой оценкой (4.60). Из (4.53) и (4.19) следует, что при $k \geq 1$

$$\rho(\alpha(\delta), \theta, k) \geq \inf_{\alpha > 0} \left[\frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + c\alpha \right] \geq c_1 \delta^{2/3},$$

где c, c_1 — некоторые положительные константы. Поэтому на рассмотренном семействе методов не может быть выполнено условие (4.65).

Читателю рекомендуется проверить самостоятельно, что в условиях леммы 4.2 аппроксимации Лаврентьева (4.33) порождают квазиоптимальный метод на D вида (4.59) при $0 < k \leq 1$ (как нужно при этом выбрать $\alpha(\delta)$?) и не порождают такого метода при $k > 1$.

Оценки погрешности в задаче 2

Оценки сходимости в задаче 2 (вычисление значений неограниченного линейного оператора $\mathfrak{U}$) на множествах вида (4.43) проводятся аналогично случаю задачи 1. Мы поэтому ограничимся только формулировками результатов.

Аналогом теоремы 4.12 является

Теорема 4.14. Для того чтобы множество D вида (4.48) было множеством равномерной аппроксимации в задаче 2, необходимо и достаточно, чтобы оператор $R_\alpha B - \mathfrak{U}B$ допускал непрерывное расширение на все $\mathfrak{B}$ и

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha B - \mathfrak{U}B\|_{\mathfrak{B} \rightarrow Z} = 0.$$

Предполагаем, что оператор $\mathfrak{U}$ обратим. Аналогом множества D вида (4.50) служит множество

$$D = \mathfrak{U}^{-1}(\mathfrak{U}\mathfrak{U}^*)^{-k}(S), \quad (4.68)$$

S — единичная сфера в U .

Скорость сходимости аппроксимации (4.36) на этом множестве дается формулой (в предположениях теоремы 4.9)

$$\eta(\alpha, k) = \sup_{\lambda \in S(\mathfrak{U}\mathfrak{U}^*)} \left| \frac{\chi(\lambda, \alpha)^{-1}}{\lambda^k} \right|. \quad (4.69)$$

Так, для аппроксимации (4.43)

$$\chi(\lambda, \alpha) = \frac{1}{1 + \alpha\lambda}, \quad \eta(\alpha, k) \leq \begin{cases} k^k (1-k)^{1-k} \alpha^k, & 0 \leq k < 1, \\ \alpha, & k = 1. \end{cases} \quad (4.70)$$

Если $S(\mathfrak{U}\mathfrak{U}^*)$ отделен от 0, то вторая оценка (4.70) сохраняется

и при $k > 1$. В противном случае множество (4.68) при $k > 1$ не будет множеством равномерной аппроксимации. Скорость аппроксимации $O(\alpha)$ для алгоритма (4.36), так же как и для алгоритма (4.20), является предельно возможной.

В случае самосопряженного $\mathfrak{M}$ можно рассмотреть множество равномерной аппроксимируемости вида

$$D = \mathfrak{M}^{-1}(\mathfrak{M}^{-k}(S)). \quad (4.71)$$

Скорость сходимости определяется формулой (4.69) с заменой $S(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)$ на $S(\mathfrak{M})$.

Имея оценку скорости аппроксимации, можно получить оценки погрешностей РА, порожденных аппроксимациями (4.36) и (4.46) на множествах (4.68) и (4.71) соответственно.

Лемма 4.3. Для фиксированной аппроксимации (4.36) R_α и фиксированного выбора $\alpha(\delta)$ справедлива оценка (на множестве D вида (4.68))

$$\frac{1}{2} \rho_1(\alpha(\delta), \chi, k) \leq \Delta(R_{\alpha(\delta)}, \delta, D) \leq \rho_1(\alpha(\delta), \chi, k), \quad (4.72)$$

где

$$\rho_1(\alpha(\delta), \chi, k) = L_{\alpha(\delta)} \delta + \operatorname{vrai\,sup}_{\{E_\lambda\}, \lambda \in S(A^*A)} \left| \frac{\chi(\lambda, \alpha(\delta)) - 1}{\lambda^k} \right|.$$

Эта лемма — точный аналог леммы 4.1.

Оценка (4.72) переносится и на аппроксимации (4.46) на множествах (4.71). Для задачи 2 также можно (на множествах (4.68) и (4.71)) строить оптимальные и квазиоптимальные алгоритмы. Основой такого построения служит аналог оценки (4.61). Погрешность R_δ^{opt} на D оценивается следующим образом:

$$\overline{w}_1(\delta, D) \leq \Delta(R_\delta^{\text{opt}}, \delta, D) \leq \rho_1(\alpha(\delta), \chi, k), \quad (4.73)$$

ρ_1 определено в (4.72), а $\overline{w}_1(\delta, D)$ — модуль непрерывности в 0 оператора $\mathfrak{M}$, рассматриваемого на D :

$$\overline{w}_1(\delta, D) = \sup_{\|u\| \leq \delta, u \in D} \|\mathfrak{M}u\|.$$

Лемма 4.4. Если $\mathfrak{M}$ таков, что $S((\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*)^{-1})$ целиком заполняет отрезок $[0, a]$ ($S(\mathfrak{M}^{-1})$ целиком заполняет отрезок $[0, a]$ в случае положительного самосопряженного $\mathfrak{M}$), то для $\overline{w}_1$ справедливы оценки (4.62) и (4.63) соответственно.

Теорема 4.15. В условиях леммы 4.3 метод $R_{\alpha(\delta)}$ ($\alpha(\delta)$ — фиксированная функция от δ , R_α — фиксированная аппроксимация вида (4.36) или (4.46)) оптимален (квазиоптимален) на множествах D вида (4.68) или (4.71) при фиксированном $k > 0$, если

$$\rho_1(\alpha(\delta), \chi, k) = \delta^{\frac{k}{k+1/2}} (\delta^{\frac{k}{k-1}})^{-1}, \quad (4.74)$$

или квазиоптимален, если

$$\rho_1(\alpha(\delta), \chi, k) = O(\delta^{\frac{k}{k+1/2}})(\delta^{\frac{k}{k+1}}). \quad (4.75)$$

Замечательно, что, как и в случае задачи 1, оптимальные алгоритмы на множествах (4.68) и (4.71) легко построить. Так, аппроксимация (4.36) с

$$\chi(\lambda, \alpha) = \lambda^{-(k-1/2)}(\alpha + \lambda^{-(k+1/2)})^{-1}$$

при $\alpha(\delta) = \frac{\delta}{2k}$ порождает оптимальный метод на D вида (4.68), а аппроксимация (4.46) с

$$\chi(\lambda, \alpha) = \lambda^{-k}(\alpha + \lambda^{-(k+1)})^{-1}$$

при $\alpha(\delta) = \delta/k$ — на D вида (4.71) [94].

§ 4. Регуляризация при возмущении оператора

Доказанная выше теорема 4.3 позволяет легко получить из конкретного аппроксимирующего семейства R_α (например, итерационного) регуляризирующий алгоритм вида $R_{\alpha(\delta)}$ в случае, если входными данными считать пару (u_δ, δ) . Однако в реальных задачах часто имеют дело не только с приближенной правой частью (приближенным аргументом), но и с приближенным оператором. Поэтому целесообразно изучать асимптотическое поведение аппроксимирующих семейств при возмущениях оператора.

В частности, если удастся превратить множество возмущенных операторов в метрическое пространство, то можно ставить вопрос о конструировании РА для соответствующего отображения и при возмущениях оператора задачи. Ниже в основном исследуются с этой точки зрения задача 1 (задача решения линейного операторного уравнения) и семейства (4.13) и (4.31), причем оператор A считаем ограниченным. Результаты в этом случае носят наиболее законченный характер.

Превратим множество ограниченных линейных операторов из Z в U в банахово пространство $\mathcal{L}$ с нормой в нем в виде нормы оператора. Следующее определение является детализацией общего определения РА из гл. I.

Определение. Семейство линейных ограниченных операторов $R_{\delta, h} : \mathcal{L} \times U \rightarrow Z$ называется регуляризирующим алгоритмом для задачи (4.1) (задачи вычисления значений $G = A^{-1}$) при возмущениях u и A , если выполнено соотношение

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \sup_{\substack{\|Az_1 - u_\delta\| \leq \delta \\ \|A - A_h\| \leq h}} \|R_{\delta, h}(A_h, u_\delta) - z_1\| = 0, \quad (4.76)$$

$$Az_1 = u, \quad z_1 \perp \text{Ker } A.$$

Рассмотрим теперь аппроксимирующее семейство (4.13). Возникает вопрос, можно ли выбрать $\alpha(\delta, h)$ так, чтобы для $R_{\alpha(\delta, h)}(A_h, u_\delta)$ выполнялось соотношение (4.76).

Теорема 4.16. [10]. Пусть A, A_h — ограниченные линейные операторы, Z — сепарабельное гильбертово пространство, а функция $\theta(\lambda, \alpha)$, порождающая аппроксимацию (4.13), обладает следующими свойствами:

1) $\theta(\lambda, \alpha)$ определена и непрерывна по λ на $[0, \Lambda]$, где Λ — верхняя граница спектров операторов $A_h^* A_h$ при всех рассматриваемых h ;

$$2) \sup_{\lambda \in [0, \Lambda]} |\theta(\lambda, \alpha)| \sqrt{\lambda} = K_\alpha < \infty;$$

$$3) \sup_{\substack{\lambda \in [0, \Lambda] \\ \alpha > 0}} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1| = M < \infty; \quad (4.77)$$

$$4) \lim_{\alpha \rightarrow 0} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1| = 0$$

равномерно на $[c, \Lambda]$, $c > 0$ — любое сколь угодно малое число. Тогда если $\alpha(\delta, h)$ выбрана так, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, h \rightarrow 0} \alpha(\delta, h) = 0, \quad (4.78)$$

$$\lim_{\delta, h \rightarrow 0} K_{\alpha(\delta, h)} \max(\delta, h) = 0$$

(K_α определяется из условия 2), то для $R_{\alpha, h}(A_h) = \theta(A_h^* A_h, \alpha(\delta, h)) A_h^*$ выполнено соотношение (4.76).

Доказательство. В силу неравенства треугольника и второго условия (4.77)

$$\|R_{\alpha(\delta, h)} u_\delta - z_1\| \leq K_{\alpha(\delta, h)} \{\delta + h \|z_1\|\} + \|R_{\alpha(\delta, h)} A_h z_1 - z_1\|. \quad (4.79)$$

Первое слагаемое правой части (4.79) стремится к 0 при $\delta \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ независимо от конкретного выбора u_δ и A_h в силу (4.78).

Покажем, что, как бы ни выбирать A_h : $\|A - A_h\| \leq h$,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} \|\theta(A_h^* A_h, \alpha(\delta, h)) A_h^* A_h z_1 - z_1\| = 0. \quad (4.80)$$

Рассмотрим величину под знаком предела в (4.80) при каком-либо допустимом A_h :

$$\|\theta(A_h^* A_h, \alpha(\delta, h)) A_h^* A_h z_1 - z_1\| \leq \int_0^\lambda |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1|^2 d(E_{\lambda h} z_1, z_1). \quad (4.81)$$

Заметим, что $(E_\lambda z_1, z_1)$ как функция λ непрерывна в точке $\lambda = 0$ и $(E_0 z_1, z_1) = 0$, так как $z_1 \perp \text{Ker } A$. (Здесь E_λ — спектральное семейство невозмущенного оператора $A^* A$.)

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть λ_ε — точка положительной полуоси, не являющаяся собственным значением $A^* A$ и такая, что

$(E_{\lambda t} z_1, z_1) \leq \varepsilon$. Такая точка найдется $\forall \varepsilon \geq 0$, так как $(E_{\lambda} z_1, z_1)$ непрерывна в 0, а дискретный спектр $A^* A$ счетен в силу сепарабельности Z . Оценим теперь правую часть (4.81):

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Lambda} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1|^2 d(E_{\lambda h} z_1, z_1) = \int_{\lambda_t}^{\Lambda} + \int_0^{\lambda_t} \leq \\ & \leq \int_{\lambda_t}^{\Lambda} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1|^2 d(E_{\lambda h} z_1, z_1) + M^2 [(E_{\lambda_t h} z_1, z_1) - (E_0 z_1, z_1)]. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь теоремой Реллиха, утверждающей, что если $\lim_{h \rightarrow 0} \|A_h^* A_h z_1 - A^* A z_1\| = 0$, то в любой точке непрерывности функции $(E_{\eta} z_1, z_1)$ справедливо соотношение

$$\lim_{h \rightarrow 0} (E_{\eta h} z_1, z_1) = (E_{\eta} z_1, z_1).$$

$\lambda = 0$ — точка непрерывности $(E_0 z_1, z_1)$ в силу выбора z_1 . Точка λ_t является таковой по определению. В силу теоремы Реллиха и соотношения 3) в (4.77)

$$\overline{\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} \|\theta(A_h^* A_h, \alpha(\delta, h)) A_h^* A_h z_1 - z_1\|} \leq M^2 \varepsilon$$

независимо от выбора оператора A_h . Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то соотношение (4.80) доказано. Теперь из (4.79) получается (4.76).

Условия (4.77) теоремы 4.16 выполнены для всех практически используемых аппроксимаций (4.13), в частности для аппроксимаций (4.20), (4.22), (4.26).

Для семейства (4.31) справедлива теорема, аналогичная только что доказанной.

Теорема 4.17. Пусть A, A_h — ограниченные самосопряженные операторы в Z , Z — сепарабельное гильбертово пространство, функция $\theta(\lambda, \alpha)$, порождающая аппроксимацию (4.31), обладает свойствами:

1) $\theta(\lambda, \alpha)$ определена и непрерывна на некотором отрезке $[-\Lambda, \Lambda]$, известно содержащем спектры всех операторов A_h ;

$$2) \sup_{\lambda \in [-\Lambda, \Lambda]} |\theta(\lambda, \alpha)| = K_{\alpha} < \infty;$$

$$3) \sup_{\alpha \geq 0, \lambda \in [-\Lambda, \Lambda]} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1| = M < \infty; \quad (4.82)$$

$$4) \lim_{\alpha \rightarrow 0} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1| = 0$$

равномерно на $[-\Lambda, -c] \cup [c, \Lambda]$, $c > 0$ — любое сколь угодно малое число.

Если $\alpha(\delta, h)$ выбрано так, что выполнены условия (4.78) (K_α вычисляется по формулам 2), то для

$$R_{\delta, h} = \theta(A_h, \alpha(\delta, h))$$

выполнено соотношение (4.76).

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 4.16 и может быть предоставлено читателю.

Если оператор задачи 1 неограничен, то можно по-прежнему изучать асимптотическое поведение семейств (4.13) и (4.31) при возмущениях оператора. Однако при этом естественно отказаться от близости точного и возмущенного оператора по норме, а использовать понятие поточечной близости операторов.

Теорема 4.18. Пусть A, A_h — замкнутые линейные операторы из Z в U с плотными областями определения $D_{A_h} \supseteq D_A \quad \forall h$, Z — сепарабельное гильбертово пространство, а функция $\theta(\lambda, \alpha)$, порождающая аппроксимацию (4.13), удовлетворяет условиям (4.77) с $\Lambda = \infty$. Пусть, кроме того, для рассматриваемого $z_1 (z_1 \perp \text{Ker } A)$

$$\begin{aligned} Az_1 &= u, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \|(A - A_h)z_1\| &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \|(A_h^* A_h - A^* A)z_1\| &= 0. \end{aligned} \tag{4.83}$$

Если функция $\alpha(\delta, h)$ выбрана так, что

$$\begin{aligned} \lim_{\delta, h \rightarrow 0} \alpha(\delta, h) &= 0, \\ \lim_{\delta, h \rightarrow 0} K_{\alpha(\delta, h)}(\delta + \|(A - A_h)z_1\|) &= 0, \end{aligned} \tag{4.84}$$

то выполнено соотношение

$$\lim_{\delta, h \rightarrow 0} \sup_{\|Az_1 - u_\delta\| \leq \delta} \|\overline{\theta(A_h^* A_h, \alpha(\delta, h)) A_h u_\delta} - z_1\| = 0, \tag{4.85}$$

которое является ослабленным аналогом (4.76).

Доказательство этой теоремы проводится так же, как и доказательство теоремы 4.16. Действительно, неравенство (4.79) остается справедливым с заменой выражения $K_{\alpha(\delta, h)} h \|z_1\|$ на $K_{\alpha(\delta, h)} \|(A - A_h)z_1\|$ в его правой части.

Соотношение типа (4.80) остается справедливым и имеет то же доказательство, потому что в теореме Реллиха достаточно требовать поточечной сходимости операторов. Такая сходимость имеет место в силу второго условия (4.83).

Теорема 4.18 соответствует теореме 4.16. Мы не будем формулировать соответствующий аналог теоремы 4.17, так как необходимые изменения в условиях и утверждении теоремы 4.18 в слу-

чае использования аппроксимаций (4.31) вместо (4.13) почти очевидны.

Обратимся теперь к задаче 2 — задаче вычисления значений неограниченного оператора $\mathfrak{M}$. При естественных ограничениях на используемые аппроксимации (4.36) нетрудно сформулировать условия, при выполнении которых справедливо соотношение типа (4.85).

Теорема 4.19. Пусть $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_h$ — замкнутые линейные операторы из Z в U с плотными областями определения $D_{\mathfrak{M}_h} \supseteq D_{\mathfrak{M}}$, U — сепарабельное гильбертово пространство, функция $\chi(\lambda, \alpha)$, порождающая аппроксимацию (4.36), удовлетворяет условиям

- 1) $\sup_{\lambda \in [0, \infty)} |\chi(\lambda, \alpha)| \sqrt{\lambda} = L_\alpha < \infty, \alpha > 0;$
- 2) $\sup_{\substack{\lambda \in [0, \infty) \\ \alpha \geq 0}} |\chi(\lambda, \alpha) - 1| = M < \infty;$
- 3) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} |\chi(\lambda, \alpha) - 1| = 0$

равномерно на любом отрезке $[0, \Lambda]$, $\Lambda < \infty$.

Кроме того, для рассматриваемого $z \in D_{\mathfrak{M}}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \|(\mathfrak{M}_h - \mathfrak{M})z\| &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \|(\mathfrak{M}_h \mathfrak{M}_h^* - \mathfrak{M} \mathfrak{M}^*) \mathfrak{M} z\| &= 0. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Если функция $\alpha(\delta)$ выбрана так, что

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) &= 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} L_{\alpha(\delta)} \delta &= 0, \end{aligned} \quad (4.88)$$

то выполнено соотношение

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \sup_{\|z_\delta - z\| \leq \delta} \|\chi(\mathfrak{M}_h \mathfrak{M}_h^*, \alpha(\delta), \mathfrak{M}_h z_\delta - \mathfrak{M} z)\| = 0. \quad (4.89)$$

Доказательство. Получим сначала неравенство, аналогичное неравенству (4.79):

$$\begin{aligned} &\|\chi(\mathfrak{M}_h \mathfrak{M}_h^*, \alpha(\delta)) \mathfrak{M}_h z_\delta - \mathfrak{M} z\| \leq L_{\alpha} \delta + \\ &+ \|\chi(\mathfrak{M}_h \mathfrak{M}_h^*, \alpha(\delta)) \mathfrak{M} z - \mathfrak{M} z\| + M \|(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_h)z\|. \end{aligned} \quad (4.90)$$

При выводе этого неравенства использованы первое и второе условия (4.86). Если выполнены условия (4.88) и (4.87), то первое и третье слагаемые в правой части (4.90) стремятся к 0 при $h \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 0$.

Осталось показать, что

$$\lim_{\delta, h \rightarrow 0} \|\chi(\mathfrak{U}_h \mathfrak{U}_h^*, \alpha(\delta)) \mathfrak{U}z - \mathfrak{U}z\| = 0. \quad (4.91)$$

Имеем

$$\|\chi(\mathfrak{U}_h \mathfrak{U}_h^*, \alpha(\delta)) \mathfrak{U}z - \mathfrak{U}z\|^2 = \int_0^\infty |\chi(\lambda, \alpha(\delta)) - 1|^2 d(E_{\lambda h} \mathfrak{U}z, \mathfrak{U}z),$$

$E_{\lambda h}$ — спектральная мера. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть λ_t — точка положительной полуоси, не являющаяся собственным значением $\mathfrak{U} \mathfrak{U}^*$ и такая, что $1 - (E_{\lambda_t} \mathfrak{U}z, \mathfrak{U}z) \leq \varepsilon$. В силу счетности дискретного спектра такая точка найдется при любом $\varepsilon > 0$:

$$\int_0^\infty |\chi(\lambda, \alpha(\delta)) - 1|^2 d(E_{\lambda h} \mathfrak{U}z, \mathfrak{U}z) \leq \int_0^{\lambda_t} + \int_{\lambda_t}^\infty.$$

Так же как и при доказательстве (4.80), используя теорему Реллиха и условия 2) и 3) из (4.86), получим

$$\overline{\lim_{\delta, h \rightarrow 0}} \|\chi(\mathfrak{U}_h \mathfrak{U}_h^*, \alpha(\delta)) \mathfrak{U}z - \mathfrak{U}z\| \leq M\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует (4.91), а следовательно, и (4.89).

Внимательный читатель, конечно, заметил кажущееся на первый взгляд парадоксальным несоответствие условий (4.84) и (4.88). В теореме 4.19 (в отличие от теоремы 4.18) не нужно согласовывать выбор α и параметр h , характеризующий точность аппроксимации оператора. Это происходит потому, что аппроксимации (4.83) и (4.87) неравноценны. $\mathfrak{U}_h$ — аппроксимации самой решаемой некорректной задачи — вычисления значений неограниченного оператора $\mathfrak{U}$, тогда как условия (4.83) не достаточны, вообще говоря, для поточечной аппроксимации оператора A^{-1} (значения которого мы вычисляем по схеме (4.13) без согласования α и h). В случае самосопряженных операторов $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}$ вместо аппроксимаций (4.36) можно использовать аппроксимации (4.46).

Теорема 4.20. Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_h$ — самосопряженные операторы в Z с $D_{\mathfrak{U}_h} \supseteq D_{\mathfrak{U}}$, Z — сепарабельное гильбертово пространство, функция $\chi(\lambda, \alpha)$, порождающая аппроксимацию (4.46), удовлетворяет условиям:

- 1) $\sup_{\lambda \in (-\infty, \infty)} |\chi(\lambda, \alpha) \lambda| = L_\alpha < \infty$;
- 2) $\sup_{\substack{\lambda \in (-\infty, \infty) \\ \alpha \geq 0}} |\chi(\lambda, \alpha) - 1| = M < \infty$;
- 3) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} |\chi(\lambda, \alpha) - 1| = 0$

равномерно на $[-\Lambda, \Lambda]$, $\Lambda < \infty$.

Кроме того, выполнены первое условие в (4.87) и условия (4.88).

Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{\delta, h \rightarrow 0} \sup_{\|z_\delta - z\| \leq \delta} \|\chi(\mathfrak{U}_h, \alpha(\delta)) \mathfrak{U}_h z_\delta - \mathfrak{U}z\| = 0.$$

Доказательство этой теоремы совпадает (с очевидными изменениями) с доказательством теоремы 4.19.

На практике часто единственным источником возмущений в операторе задачи служит вынужденная (при численной реализации алгоритмов) аппроксимация операторов, встречающихся в первоначальной постановке, более простыми (конечномерными). Доказанные выше теоремы гарантируют «правильное» асимптотическое поведение РА с приближенным оператором, если используемые аппроксимации таковы, что выполняются соотношения вида (4.83), (4.87). При этом выбор «параметра регуляризации» α (в случае задачи 1) производится в зависимости как от точности входных данных δ , так и от числового параметра, характеризующего точность выбранных аппроксимаций (см. формулы (4.78) и (4.84)).

Возможен и другой подход. Для определенности будем говорить только о задаче 1. Если оператор задачи A в принципе известен совершенно точно (например, интегральный оператор с аналитически задаваемым ядром), то можно выбирать α в зависимости только от δ (точности входных данных).

Задача вычисления $R_{\alpha(\delta)} u_\delta$ уже корректная, и ее можно решить сколь угодно точно, применяя схемы аппроксимации, не обязательно удовлетворяющие условиям аппроксимации, сформулированным выше. При этом обычно можно гарантировать выполнение лишь предельных соотношений вида

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \|R_{\alpha(\delta)}^{(n)} u_\delta - z_1\| = 0. \quad (4.93)$$

В (4.93) $R_{\alpha(\delta)}^{(n)} u_\delta$ — аппроксимация в Z элемента $R_{\alpha(\delta)} u_\delta$, n — параметр аппроксимационной схемы (число точек дискретизации, число базисных функций и т. п.).

Асимптотический обобщенный принцип невязки. Возвратимся к ситуации теоремы 4.16. В этой теореме обсуждается вопрос о выборе функции $\alpha(\delta, h)$ так, чтобы для $R_{\alpha(\delta, h)}$, построенных с помощью аппроксимаций (4.13), выполнялось условие РА вида (4.76). Утверждалось, что априорный выбор $\alpha(\delta, h)$ согласно (4.78) гарантирует выполнение этого условия.

В гл. III для аппроксимационной схемы Тихонова обсуждался и другой способ построения $\alpha(\delta, h)$, базирующийся на обобщенном принципе невязки. Этот способ, начало изучения которого положено в [76, 77], широко применяется при практической реализации вариационной схемы Тихонова. Попытаемся перенести этот способ на общие аппроксимации (4.13) и (4.31).

Пусть $R_{\alpha, h}$ означает либо аппроксимацию (4.13), либо (4.31) с возмущенным оператором A_h . Пусть также $\Delta_H(\alpha, \delta, h, A_h) = \|A_h R_{\alpha, h} u_\delta - u_\delta\|$, причем $\{A_h\}$ и $\{u_\delta\}$ — множество операторов и элементов такие, что

$$\begin{aligned} \|A_h - A\| &\leq h, \\ \|u_\delta - u\| &\leq \delta. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Рассмотрим сначала случай, когда параметр α пробегает интервал $(0, \alpha_0)$. Не ограничивая общности, можно считать $\alpha_0 = \infty$. Под обобщенным принципом невязки (ОПН) мы принимаем выбор $\alpha(\delta, h)$, равный корню (одному из корней) уравнения

$$\Delta_H(\alpha, \delta, h, A_h) = \rho(\delta, h, u_\delta, A_h), \quad (4.95)$$

где ρ — некоторая функция от δ, h и u_δ, A_h .

Задача заключается в подборе таких ρ , чтобы:

1) корень уравнения (4.94) существовал при всех рассматриваемых δ, h и u_δ, A_h ;

2) выполнялось соотношение (4.76), в котором

$$R_{\delta, h} = R_{\alpha(\delta, h, \dots)}(A_h) u_\delta.$$

Заметим, что в отличие от априорного выбора $\alpha(\delta, h)$ корень уравнения (4.95) α зависит также от u_δ и A_h — индивидуальных элементов множества (4.94), поэтому более точно было бы писать $\alpha(\delta, h, u_\delta, A_h)$. Оператор $R_{\delta, h}$ относительно u_δ в отличие от случая теоремы 4.16, вообще говоря, нелинеен. Однако это обстоятельство по существу не отражается на наших дальнейших рассуждениях и используется более короткое обозначение для корня (4.95).

К сожалению, для общих аппроксимаций (4.13) и (4.31) пока не удалось решить поставленную задачу в полном объеме. Наибольшую трудность представляет выбор функции ρ так, чтобы выполнялось первое поставленное условие существования корня невязочного уравнения (4.95). Для аппроксимации Тихонова такой выбор указан в гл. III. Однако для других аппроксимаций это пока сделать не удалось.

Поэтому мы несколько облегчим задачу и рассмотрим асимптотический обобщенный принцип невязки (АОПН), в котором требуется, чтобы корень уравнения (4.95) существовал при достаточно малых δ и h , $\delta \leq \delta_0$, $h \leq h_0$, причем допускается зависимость δ_0 и h_0 от рассматриваемой точной задачи (u и A).

Если при фиксированных δ и h и фиксированном выборе ρ корень (4.95) не существует (h и δ слишком велики), то выбор $\alpha(\delta, h)$ формально может быть произвольным, например $\alpha(\delta, h) = 1$, так как это никак не влияет на выполнение асимптотического соотношения (4.76). Покажем, что можно так выбрать функцию $\rho(\delta, h)$ (независимо от u_δ и A_h), что для широкого класса аппроксимаций АОПН будет справедлив.

Теорема 4.21. [20]. Пусть ρ выбрана в виде

$$\rho(\delta, h) = c_1 \delta^{1-\varepsilon} + c_2 h^{1-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (4.96)$$

$c_1, c_2 > 0$ — фиксированные постоянные, а аппроксимации (4.13), (4.31) удовлетворяют условиям:

1) выполнены предположения теорем 4.16 и 4.17 соответственно;

2) функция $\theta(\lambda, \alpha)$ непрерывна как функция двух переменных при $\lambda \in [0, \Lambda]$, $\alpha \in (0, \infty)$;

$$3) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda| = 0 \quad (4.97)$$

для аппроксимаций (4.13), (4.31) равномерно по λ ;

4) для аппроксимаций (4.13) выполнено условие

$$\sup_{\alpha \geq 0} \left(\sup_{\lambda \in [0, \Lambda]} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1| \vee \bar{\lambda} \sup_{\lambda \in]0, \Lambda]} |\theta(\lambda, \alpha)| \vee \bar{\lambda} \right) < \infty, \quad (4.98)$$

для аппроксимаций (4.31) условие

$$\sup_{\alpha \geq 0} \left(\sup_{\lambda \in [-\Lambda, \Lambda]} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1| |\lambda| \sup_{\lambda \in]-\Lambda, \Lambda]} |\theta(\lambda, \alpha)| \right) < \infty. \quad (4.99)$$

Тогда для рассматриваемых аппроксимаций при выборе $\alpha(\delta, h)$ согласно АОПН справедливо соотношение (4.76).

Доказательство. Доказательство этой теоремы достаточно сложно. Чтобы его идейная основа воспринималась яснее, разобьем его на ряд этапов.

Символ $R_{\alpha, h}$ обозначает аппроксимацию (4.13) или (4.31) с $A = A_h$.

Утверждение 1. Операторная функция $R_{\alpha, h}$ сильно непрерывна по α в любой точке $\alpha > 0$. Кроме того,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \bar{\alpha}, h \rightarrow 0} R_{\alpha, h} = R_{\bar{\alpha}} \quad (\text{сходимость сильная}).$$

Справедливость утверждения 1 следует из непрерывности $\theta(\lambda, \alpha)$ и равномерной сходимости при $h \rightarrow 0$ A_h к A (см. (4.94)).

Из утверждения 1 непосредственно следует, в частности, непрерывность невязки Δ_h как функции α при $0 < \alpha < \infty$.

Утверждение 2.

$$\sup_{\alpha, h} \|A_h R_{\alpha, h}\| \leq M + 1, \quad (4.100)$$

M — постоянная из условия 2) в (4.77) и (4.82).

Если A_h, A — самосопряженные операторы и используется аппроксимация (4.31), то неравенство (4.100) очевидно. В случае аппроксимаций (4.13) неравенство (4.100) можно доказать так.

Из цепочки равенств

$$\begin{aligned} (A_h R_{\alpha, h} z, A_h R_{\alpha, h} z) &= (R_{\alpha} z, A_h^* A_h R_{\alpha, h} z) = \\ &= ((A_h^* A_h)^{1/2} R_{\alpha, h} z, (A_h^* A_h)^{1/2} R_{\alpha, h} z) \end{aligned}$$

следует, что

$$\|A_h R_{\alpha, h}\| \leq \sup_{\lambda \in [0, \Lambda]} \sqrt{\lambda} |\theta(\lambda, \alpha)| \sqrt{\lambda} \leq M + 1.$$

Утверждение 3.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta_H(\alpha, \delta, h) = \min_{z \in Z} \|A_h z - u_\delta\|, \quad (4.101)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Delta_H(\alpha, \delta, h) = \|u_\delta\|. \quad (4.102)$$

Доказательство. Из доказательства утверждения 2 и (4.97) следует, что $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|A_h R_{\alpha, h}\| = 0$ и, следовательно, (4.102) справедливо. Прежде чем доказывать (4.101), заметим, что его правая часть равна норме части u_δ , ортогональной $\overline{A_h(z)}$, т. е. части u_δ , принадлежащей $\text{Кег } A_h^*$. Поэтому нужно доказать только, что $\forall u \in \overline{A_h(z)}$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|A_h R_{\alpha, h} u - u\| = 0. \quad (4.103)$$

Если $u \in A_h(z)$, то это, очевидно, так. Так как справедливо (4.100), то по теореме Банаха—Штейнгауза (4.103) справедливо $\forall u \in \overline{A_h(z)}$.

Возьмем в правой части (4.101) $z = z_1$. Тогда, учитывая (4.94),

$$\|A_h z_1 - u_\delta\| \leq \|A_h z_1 - A z_1 - u_\delta + u\| \leq \delta + h \|z_1\|. \quad (4.104)$$

Поэтому предел невязки при $\alpha \rightarrow 0$ заведомо не больше $\delta + h \|z_1\|$. Приступим непосредственно к доказательству.

Сравнивая правую часть (4.104) с (4.96), видим, что при достаточно малых δ_0 и h_0 (зависящих от невозмущенной задачи) корень уравнения (4.95) $\alpha(\delta, h)$ существует при $\delta < \delta_0$, $h < h_0$ и можно говорить о АОПН.

Выберем при каждом (достаточно малом) δ и h какой-либо корень (4.95). Обозначим полученную функцию $\alpha(\delta, h)$. Она, конечно, зависит и от конкретных u_δ и A_h , но эта зависимость для нас несущественна.

Докажем соотношение (4.76) так же, как в теореме 4.16 (или 4.17). Для этого рассмотрим $\|R_{\alpha(\delta, h), h} A_h z_1 - z_1\|$ при $\delta \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ на любых конкретных представителях множеств (4.94). Как и при доказательстве теоремы 4.16, можно записать неравенство (4.79). Покажем, что и в нашем случае

$$\lim_{\delta, h \rightarrow 0} \|R_{\alpha(\delta, h), h} A_h z_1 - z_1\| = 0. \quad (4.105)$$

Пусть

$$\overline{\lim}_{\delta, h \rightarrow 0} \alpha(\delta, h) = \bar{\alpha}.$$

Используя (4.102), нетрудно показать, что всегда $\bar{\alpha} < \infty$.

Имеются две возможности.

1) $\bar{\alpha}=0$. В этом случае справедливость (4.105) для аппроксимаций (4.13) следует непосредственно из доказательства соотношения (4.80) в теореме 4.16. Если используются аппроксимации (4.31), то доказательство аналогично.

2) $\bar{\alpha} \neq 0$. Пусть последовательность $\alpha(\delta_n, h_n)$, $\delta_n \rightarrow 0$, $h_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, имеет предел при $n \rightarrow \infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что этот предел равен $\bar{\alpha}$. Тогда в силу утверждения 1 существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{\alpha(\delta_n, h_n)h_n} A_{h_n} z_1 = R_{\bar{\alpha}} u.$$

Так как Δ_H при этом также стремится к 0 (в силу (4.95) и (4.96), то $AR_{\bar{\alpha}} u = u$. Остается заметить, что значение аппроксимации (4.133) и (4.31) $R_{\bar{\alpha}} u$ при любом $\alpha > 0$ ортогонально $\text{Ker } A$ ($\text{Ker } A^* A$). Поэтому $R_{\alpha} u = z_1$.

Если теперь последовательности δ_n , $h_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, выбраны так, что последовательность $\alpha(\delta_n, h_n)$ предела не имеет, то соотношение (4.105) все-таки останется справедливым. Действительно, если это не так, то мы немедленно получаем противоречие, переходя к сходящейся подпоследовательности последовательности $\{\alpha(\delta_n, h_n)\}$ и применяя только что доказанное утверждение. Итак, соотношение (4.105) доказано в общем случае.

Докажем теперь, что при выборе $\alpha(\delta, h)$ согласно АОПН справедливо второе соотношение (4.78). В основе доказательства лежит неравенство, позволяющее оценить корень уравнения (4.95) снизу (точнее, значение некоторой функции от этого корня). Рассмотрим тождество (по α)

$$\begin{aligned} -A_h R_{\alpha, h} A_h z_1 + A_h z_1 = u_\delta - A_h R_{\alpha, h} u_\delta + \\ + A_h R_{\alpha, h} u_\delta - A_h R_{\alpha, h} A_h z_1 - u_\delta + A_h z_1. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Обозначим норму правой части (4.106) $r(\alpha)$. Тогда в силу (4.100) и (4.104) справедливо неравенство (при любом $\alpha > 0$)

$$r(\alpha) \geq \Delta_H(\alpha, \delta, h) - (M+2)(\delta + h \|z_1\|).$$

В частности, при $\alpha = \alpha(\delta, h)$ (корень уравнения (4.95)) в силу (4.96)

$$r(\alpha(\delta, h)) \geq c_1 \delta^{1-\varepsilon} + c_2 h^{1-\varepsilon} - (M+2)(\delta + h \|z_1\|). \quad (4.107)$$

Неравенство (4.107) нетривиально только при достаточно малых δ и h , но только они нас и интересуют.

Для $r(\alpha)$ в случае аппроксимаций (4.13) и (4.31) легко (с учетом предположений теоремы) получить оценку сверху:

$$r(\alpha) = \begin{cases} \sup_{\lambda \in [0, \Lambda]} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1| \sqrt{\lambda} \|z_1\|, \\ \sup_{\lambda \in [-\Lambda, \Lambda]} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda - 1| |\lambda| \|z_1\|. \end{cases} \quad (4.108)$$

С учетом оценки (4.107) имеем при достаточно малых δ и h

$$K_{\alpha(\delta, h)} \max(\delta, h) \leq \frac{r(\alpha(\delta, h)) K_{\alpha(\delta, h)} \max(\delta, h)}{c_1 \delta^{1-\varepsilon} + c_2 h^{1-\varepsilon} - (M+2)(\delta + h \|z_1\|)}. \quad (4.109)$$

Из (4.108) и условий (4.98) и (4.99) следует

$$\sup_{\alpha \geq 0} K(\alpha) r(\alpha) < D \text{ (const)}. \quad (4.110)$$

Поэтому из (4.109) следует справедливость второго соотношения (4.78). Обращаясь к (4.79), мы видим, что соотношение (4.76) установлено. Доказательство теоремы закончено.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 4.21 доказана в предположении, что параметр пробегает интервал $(0, \alpha_0)$. Во многих аппроксимациях, например итерационных, параметр пробегает дискретное множество точек $\alpha = 1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$, или, более обще, множество параметров $\{\alpha\}$, имеет лакуны на числовой оси. В этом случае целесообразнее говорить не о корнях уравнения (4.95), а о соседних точках, между которыми невязка переходит уровень $\rho(\delta, h)$.

Пусть $\alpha_+(\delta, h)$ и $\alpha_-(\delta, h)$ — какие-либо соседние значения α , между которыми невязка переходит уровень $\rho(\delta, h)$ (с больше на меньше).

Выбираем параметр α равным $\alpha_-(\delta, h)$. Как нужно изменить условия теоремы 4.21, чтобы ее заключение осталось справедливым при таком выборе α ? Прежде всего в условиях, связанных с множеством α , интервал $(0, \infty)$ должен быть заменен на множество фактического изменения α (например, $1, 1/2, \dots, 1/n, \dots$).

Условие (4.97) нам понадобилось только при доказательстве (4.102). В принципе оно может быть заменено условием, обеспечивающим существование такого $\alpha = \alpha_0 \neq 0$, при котором невязка не стремится к 0 при $\delta \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$. При выполнении этого условия и остальных условий теоремы $\alpha_-(\delta, h)$ существует при достаточно малых δ и h и справедливо соотношение (4.105). Проверка этого предоставляется читателю. Некоторое затруднение вызывает то обстоятельство, что неравенство (4.107) может не выполняться при $\alpha = \alpha_-$. Воспользуемся тем, что оно заведомо справедливо при $\alpha = \alpha_+$.

Очевидно, что

$$K_{\alpha_-} \max(\delta, h) = K_{\alpha_+} \max(\delta, h) \frac{K_{\alpha_-}}{K_{\alpha_+}}.$$

Если аппроксимация такова, что для любых соседних краев лакун α_1, α_2 выполняется неравенство

$$d_1 \leq K(\alpha_1)/K(\alpha_2) \leq d_2, \quad d_1, d_2 = \text{const}, \quad (4.111)$$

то, как и в основном доказательстве теоремы, устанавливается справедливость соотношения

$$\lim_{\delta, h \rightarrow 0} K_{\alpha-} \max(\delta, h) = 0.$$

Это означает справедливость модифицированного варианта теоремы 4.21 при дополнительном условии (4.111).

Читателю полезно проверить, что условия (4.98) удовлетворяются для аппроксимаций (4.20), (4.22), (4.23), (4.26)—(4.28).

В случае итерационных аппроксимаций для соседних значений α , кроме того, выполнено условие (4.111). Для аппроксимации Тихонова, очевидно, выполнено условие (4.97).

Если дополнить множество, пробегаемого параметром α в итерационных процессах, несобственным элементом $\alpha = \infty$, соответствующим индексу $n=0$, то и для итерационных аппроксимаций остается справедливым условие (4.102). Поэтому АОПН справедлив для всех этих аппроксимаций.

З а м е ч а н и е 2. При доказательстве теоремы 4.21 использовалась довольно грубая оценка $r(\alpha)$ (4.108). Ее, вообще говоря, можно уточнить, и для широкого класса аппроксимаций показать, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} r(\alpha) K(\alpha) = 0.$$

(вместо условия (4.111)). При этом оказывается, что $\rho(\delta, h)$ можно выбирать иначе, чем по формуле (4.96). Более подробно об этом можно прочитать в [32, 33, 60].

Возможны также дальнейшие ослабления условий теоремы 4.21. Например, за счет другого выбора $\rho(\delta, h)$ можно получать принципы невязки для аппроксимаций, для которых в (4.110) $D = \infty$ [11, 7]. Схема их получения отличается от приведенной только техническими деталями.

§ 5. Построение линейных аппроксимирующих семейств и РА в банаховом пространстве

Использование функций от оператора задачи для построения аппроксимаций типа (4.1), (4.2) и линейных РА на их основе возможно и в банаховом пространстве. Однако при этом возникают существенные затруднения, связанные с тем, что для операторов, действующих в банаховых пространствах, нет такого же «богатого» операторного исчисления, как в случае гильбертовых пространств, даже если область определения и область значений оператора лежат в одном и том же пространстве B . Остановимся более подробно на задаче 1 в случае, когда Z и U совпадают: $Z = U$.

Обычно в отличие от случая гильбертова пространства для изучаемого семейства R_α непосредственно удастся установить сходимость в (4.1) не на всем пространстве Z , а лишь на некотором

линеале $\mathcal{L} \in Z$. При условии ограниченности $\|R_\alpha A\|$ можно затем воспользоваться теоремой Банаха—Штейнгауза и перенести сходимость на замыкание $\mathcal{L}$. Возможность дальнейшего расширения области сходимости зависит от оператора задачи A и пространства Z . Далее в этом параграфе рассматривается случай, когда линеал $\mathcal{L}$ задан в виде $\mathcal{L} = A(Z)$ — образа пространства Z при отображении A . Вообще говоря, $A(Z) \subset Z$.

Пусть для конкретного семейства удается показать, что

$$\begin{cases} \|R_\alpha A - E\| \leq c \text{ (независимо от } \alpha), \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|(R_\alpha A^2 - A)z\| = 0, \quad \forall z \in Z. \end{cases} \quad (4.112)$$

Условий (4.112), (4.113) достаточно, чтобы утверждать, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha Az - z\| = 0 \quad \forall z \in \overline{A(Z)}. \quad (4.113)$$

По теореме 4.3, справедливой и в банаховом пространстве, из (4.113) следует регуляризируемость задачи 1 на множестве $A(Z)$ семейством $R_{\alpha(\delta)}$, где $\alpha(\delta)$ выбрано так, чтобы

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|R_{\alpha(\delta)}\| \delta = 0.$$

Для некоторых классов операторов A и пространств Z предельное соотношение (4.113) можно расширить до соотношения (4.7) и тем самым показать регуляризируемость задачи 1 на всем банаховом пространстве (используя теорему 4.3).

1. Пусть решается задача 1 с ограниченным оператором. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|A\| = 1$. Очевидно, что $0 \leq \|E - A\| \leq 2$. Если $\|E - A\| < 1$, то оператор A ограниченно обратим и задача 1 корректна. Для некорректной задачи 1 всегда

$$1 \leq \|E - A\| \leq 2.$$

Случай, когда левое неравенство превращается в равенство, замечателен тем, что в рефлексивном пространстве Z при его реализации задача 1 допускает построение аппроксимирующих семейств R_α со свойством (4.7).

Пусть выполнено условие

$$\|E - A\| = 1 \quad (4.114)$$

и пространство Z рефлексивно. В этом случае в линейном функциональном анализе доказывается теорема, согласно которой пространство Z представимо в виде прямой суммы $\overline{A(Z)}$ и $\text{Кег } A$ (эргодическая теорема для сжатий) [55]. Следовательно, если для какого-либо семейства доказаны соотношения (4.112), то тем самым установлено и (4.7), а значит, и возможность регуляризации задачи 1 при помощи построенного семейства.

Ищем R_α в виде

$$R_\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(\alpha) (E - A)^l, \quad (4.115)$$

$a_l(\alpha)$ — комплекснозначные функции параметра α .

Теорема 4.22. [9]. Пусть $\|A\|=1$, выполнено условие (4.114), Z рефлексивно и $a_l(\alpha)$ выбраны так, что

$$\sum_{l=0}^{\infty} |a_l(\alpha)| < \infty \quad \forall \alpha > 0, \quad (4.116)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} |\Delta^{(1)} a_l(\alpha)| < c,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{\infty} |\Delta^{(2)} a_l(\alpha)| = 0,$$

$\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}$ — первая и вторая разности последовательности a_l ,

$$a_{-2} = a_{-1} = 0.$$

Тогда выполнены условия (4.112), а следовательно, и (4.7).

Доказательство. Первое условие (4.116) достаточно для ограниченности $\|R_\alpha\| \quad \forall \alpha > 0$. Простые алгебраические преобразования показывают, что второе и третье условия (4.116) в нашем случае эквивалентны (4.112).

Приведем несколько примеров конкретных семейств (4.115). Всюду, не оговаривая это особо, мы предполагаем выполненным условие (4.114).

Пример 1. $a_l(\alpha) = \frac{1}{(1+\alpha)^{1+l}}$. Простой подсчет показывает, что условия (4.116) выполнены. Кроме того, ряд (4.115) можно просуммировать, и окажется, что R_α имеет вид (4.33):

$$R_\alpha = (\alpha + A)^{-1}.$$

Мы получили аппроксимацию Лаврентьева. Нетрудно видеть, что

$$\|R_\alpha\| \leq 1/\alpha \quad \forall \alpha > 0. \quad (4.117)$$

В силу (4.117) справедливо утверждение теоремы 4.8 относительно допустимого выбора $\alpha(\delta)$ так, чтобы $R_{\alpha(\delta)}$ порождало РА для задачи 1. В этом случае нужно выбирать $\alpha(\delta)$ согласно (4.34).

Пример 2 [93]. Параметр α принимает значения 1, 1/2, ..., ..., 1/n, ...,

$$a_l\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{n+1-l}{n+1}, & 0 \leq l < n+1, \\ 0, & l \geq n+1. \end{cases}$$

Проверка условий (4.116) не представляет затруднений. В частности,

$$\|R_{1/n}\| \leq \sum_{l=0}^{\infty} |a_l(1/n)| = \sum_{l=0}^n \frac{n+1-l}{n+1} = \frac{n}{2} + 1.$$

$R_{1/n}$ действует на правую часть u уравнения $Az=u$ по формулам

$$R_{1/n}u = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n z_i, \quad (4.118)$$

$$z_i = (E-A)z_{i-1} + u, \quad z_0 = 0.$$

Это итеративный метод аппроксимации, получаемый последовательным усреднением итераций типа (4.22). Выбор $n(\delta)$, позволяющий превратить записанный процесс аппроксимаций в РА, можно осуществлять согласно условию (4.35). Можно показать на простых конечномерных примерах, что итерации (4.118), в которых усреднение опущено, аппроксимаций для задачи 1 при сделанных предположениях не образуют.

Однако положение меняется, если ввести параметр

$$z_i = (E-\mu A)z_{i-1} + \mu u, \quad z_0 = 0, \quad 0 < \mu < 1. \quad (4.119)$$

Оказывается, что итерации (4.119), вполне аналогичные итерациям (4.22), уже порождают аппроксимацию в нашей задаче (при выполнении (4.114)). Доказательство этого утверждения довольно громоздко. Оно опирается также на теорему 4.22 и то обстоятельство, что $\|E-\mu A\| \leq 1$, $0 < \mu < 1$, причем, если оператор A необратим, это неравенство обращается в равенство [9]. Детали проверки условий (4.116) в данном случае можно найти в [84].

2. Выше при построении R_α нами было использовано операторное исчисление (4.115), существенно приспособленное к условию (4.114). В банаховом пространстве, как известно, существует и другое операторное исчисление, основанное на интеграле Коши. Предполагаем, что оператор A ограничен и пространство Z рефлексивно.

Пусть $\theta(\lambda, \alpha)$ — аналитическая функция λ в окрестности $S(A)$ — спектра A . Эта окрестность, вообще говоря, зависит от α . Рассмотрим семейство операторов

$$R_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\alpha} \theta(\lambda, \alpha) R(\lambda, A) d\lambda. \quad (4.120)$$

В этой формуле Γ_α — контур, окружающий $S(A)$, $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$ — резольвента оператора A . Если придерживаться схемы, описанной в начале этого параграфа, прежде всего надо проверить соотношения (4.112).

Функция $\Phi(\alpha, m)$, определяемая формулой

$$\Phi(\alpha, m) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\alpha} |\theta(\lambda, \alpha) \lambda^m - \lambda^{m-1}| \|R(\lambda, A)\| |d\lambda| \quad (4.121)$$

при $m=0, 1$, мажорирует правые части (4.112). Очевидно, что вычислить (или оценить) правую часть (4.121) можно, только если знать оценку нормы резольвенты оператора рассматриваемой задачи 1.

Предполагаем, что норма резольвенты удовлетворяет оценке

$$\|R(\lambda, A)\| \leq c/|\lambda| \quad (4.122)$$

вне некоторого сектора S_{φ_0} с раствором $2\varphi_0$ и вершиной в точке $\lambda=0$, ($\varphi_0 < \pi$). Операторы, для которых выполнена оценка (4.122), обладают многими замечательными свойствами. Поэтому условие (4.122) используется в теории линейных операторов (см., например, [55, 56]).

Для нас наиболее важным является то обстоятельство, что при выполнении (4.122) (как и при выполнении (4.114)) рефлексивное пространство Z разлагается в прямую сумму $\overline{A(Z)}$ и $\text{Ker } A$ [55]. Это ведет к тому, что для выполнения (4.7) достаточно выполнения (4.112). Нетрудно указать несколько больших классов операторов, заведомо удовлетворяющих условию (4.122). Во-первых, это самосопряженные положительные операторы в гильбертовом пространстве. На отрицательной части вещественной оси их резольвента удовлетворяет условию (4.117), но это частный случай (4.122). Во-вторых, это операторы в рефлексивном банаховом пространстве Z , удовлетворяющие (4.114) (см. (4.117)).

Таким образом, операторы, удовлетворяющие (4.122), порождают класс линейных задач 1, обобщающий классы, рассмотренные нами ранее. Для таких операторов пока не построено нетривиальное описание класса всех допустимых функций $\theta(\lambda, \alpha)$, порождающих аппроксимации (4.7), однако примеров конкретных аппроксимаций существует довольно много.

Напомним, что задача заключается в оценке функции (4.121) и установлении соотношений (4.112), т. е.

$$\Phi(\alpha, 0) < c,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Phi(\alpha, 1) = 0. \quad (4.123)$$

Пример 1. Возьмем функцию $\theta(\lambda, \alpha)$ согласно (4.28). Пусть неравенство (4.122) выполняется вне сектора S_{φ_0} с углом раствора $2\varphi_0 < \pi$ и вершиной в точке $\lambda=0$ (рис. 1).

Выберем контур Γ_α , как показано на рис. 1. Он охватывает $S(A)$. Так как резольвента — аналитическая функция вне $S(A)$,

то можно без потери общности считать, что неравенство (4.122) выполнено и на дуге Γ_α^{III} . Учитывая (4.122), имеем

$$\Phi(\alpha, m) \leq c \left[\int_{\Gamma_\alpha^I} |\exp(-\lambda/\alpha)| |\lambda^{m-1}| d\lambda + \int_{\Gamma_\alpha^{II}} (\cdot) + \int_{\Gamma_\alpha^{III}} (\cdot) \right].$$

Здесь Γ_α^I — часть окружности радиуса α .

Легко видеть, что интеграл по Γ_α^I стремится к 0 при $\alpha \rightarrow 0$ для любого $m \geq 1$. Для $m=0$ он ограничен равномерно по α . Если $\operatorname{Re} \lambda \geq a > 0$, то $\lim_{\alpha \rightarrow 0} |\exp(-\lambda/\alpha)| = 0$ равномерно по α . Поэтому

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\alpha^{III}} (\cdot) = 0.$$

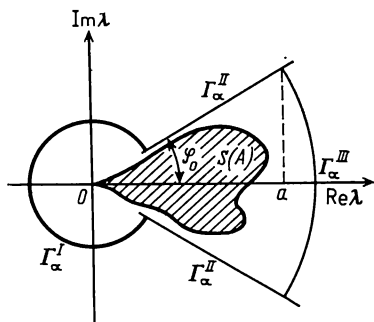


Рис. 1.

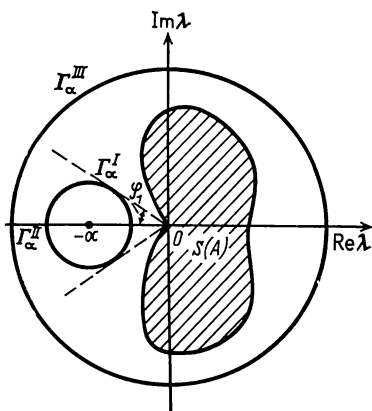


Рис. 2

Наконец,

$$\int_{\Gamma_\alpha^{III}} |\exp(-\lambda/\alpha)| |\lambda^{m-1}| d\lambda \leq \alpha^m L(\varphi_0) \int_{\cos \varphi_0}^{a/\alpha} \exp(-x) x^{m-1} dx,$$

где $\alpha(\varphi_0)$ — постоянная, зависящая от φ_0 . Из этой оценки видно, что интеграл по Γ_α^{II} стремится к 0 при $\alpha \rightarrow 0$ и $m \geq 1$ и ограничен при $m=0$.

Итак, для функции (4.28) выполнены соотношения (4.123) и, следовательно, соответствующие R_α порождают аппроксимацию (4.7). Множество операторов R_α , порожденное функцией (4.28), совпадает с полугруппой эволюционных операторов задачи Коши $\dot{z} + Az = u$, $z|_{t=0} = 0$ (если положить $\alpha = 1/t$).

Пример 2. Исследуем в тех же предположениях на резольвенту (4.122), что и в примере 1, итерационный процесс (4.119). Ему

соответствует функция $\theta(\lambda, \alpha)$, определенная в (4.23). При оценке $\Phi(\alpha, m)$ выберем тот же контур, что и в предыдущем примере (см. рис. 1). Пусть $\mu > 0$ достаточно мало, а именно при $\lambda \in \Gamma_{\alpha}^{II}$ выполнено неравенство

$$|1 - \mu\lambda| \leq \frac{1}{|1 + \mu\lambda|}$$

и на Γ_{α}^{III}

$$|1 - \mu\lambda| < 1.$$

Тогда оценку $\Phi(\alpha, m)$ можно выполнить совершенно аналогично предыдущему случаю и доказать соотношения (4.123), а следовательно, и аппроксимационные свойства процесса (4.119), т. е. сходимость его к решению уравнения $Az = u \quad \forall u \in A(z)$ при $0 < \mu < \mu_0$, где μ_0 определяется из условия (4.124). Несложные аналитические выкладки мы опускаем [9].

Пример 3. Рассмотрим аппроксимацию Лаврентьева (4.33). Ей соответствует функция $\theta(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\lambda + \alpha}$. Аппроксимационные свойства этого семейства удастся показать при несколько менее жестких условиях на резольвенту, чем в примерах 1 и 2. Достаточно предположить выполнение условия (4.122) только на отрицательной части вещественной оси. В силу аналитичности $R(\lambda, A)$ оценка (4.122) автоматически выполняется также в некотором секторе с раствором $2\varphi_1$, содержащем отрицательную вещественную полуось (рис. 2). Выберем контур Γ_{α} так, как показано на рис. 2. Имеем

$$\Phi(\alpha, m) \leq c \left[\int_{\Gamma_{\alpha}^I} \frac{\alpha |\lambda^{m-1}|}{|\lambda + \alpha|} |d\lambda| + \int_{\Gamma_{\alpha}^{II}} (\cdot) + \int_{\Gamma_{\alpha}^{III}} (\cdot) \right],$$

здесь Γ_{α}^{II} — окружность радиуса $\alpha \sin \varphi_1$, Γ_{α}^{III} — окружность, заведомо содержащая весь $S(A)$, Γ_{α}^{II} — отрезок действительной оси, проходимый дважды. Непосредственные вычисления показывают, что соотношения (4.123) выполнены. Так как пространство Z рефлексивно, то выполнено и соотношение (4.7). Для того чтобы на основе аппроксимирующего семейства R_{α} построить РА вида $R_{\alpha(\delta)}$, нужно оценить $\|R_{\alpha}\|$.

Во всех трех примерах, используя ту же технику, что и при оценке $\Phi(\alpha, m)$, можно легко показать, что

$$\|R_{\alpha}\| = O(1/\alpha).$$

Поэтому, выбирая $\alpha(\delta)$ согласно правилу (4.34) или (4.35) (в примере 2) мы получим при сделанных предположениях на оператор A и пространство Z РА для задачи 1.

Для аппроксимаций (4.120), в частности для аппроксимаций примеров 1—3, возможен выбор $\alpha(\delta)$ и по невязке (4.95). Общая

схема получения принципов невязки для алгоритмов вида (4.120) остается той же самой, что и в случае гильбертова пространства. Удастся получить регуляризующие свойства семейства (4.120) и при возмущениях оператора. При помощи формулы (4.120) можно строить квазиоптимальные алгоритмы на соответствующих подмножествах. Эти и некоторые другие результаты, носящие, в общем, технический характер, читатель может найти в литературе [9, 14, 23].

§ 6. Стохастические помехи.

Аппроксимация и регуляризация решений линейных задач в условиях стохастических помех

До сих пор нами использовалась детерминированная модель ошибок в исходных данных задачи: приближенные данные об аргументе отображения G понимались так, как это было оговорено в гл. I. Однако во многих задачах, в частности связанных с решением линейного уравнения первого рода, более естественно считать ошибки случайными. В общем бесконечномерном случае существуют разные определения случайных ошибок. Чтобы не отвлекаться на преодоление дополнительных технических сложностей, остановимся на случае, когда ошибки являются случайными величинами.

Определение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ — вероятностное пространство, Ω — множество элементарных исходов, $\mathcal{F}$ — σ -алгебра измеримых множеств, p — вероятностная мера на $\mathcal{F}$, X — метрическое пространство. Отображение $X(\omega)$ называется случайной величиной, если прообраз открытого в X множества принадлежит $\mathcal{F}$ [27, 110].

Таким образом, случайная величина ξ — измеримая функция со значениями в X .

Теория таких абстрактных случайных функций достаточно хорошо развита и во многом аналогична классической теории вероятностей. Для нас наиболее существенным обстоятельством является то, что некоторые подмножества случайных величин (при фиксированном X) и $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ естественным образом превращаются в метрические пространства. Если само X содержится в них в качестве подпространства, то основные факты и конструкции детерминированной теории РА без особого труда переносятся на стохастический случай. Схематично опишем такое перенесение [8].

Пусть X — гильбертово пространство. Рассмотрим те случайные величины ξ со значениями в X , для которых $\|\xi\|^2$ интегрируема:

$$M \|\xi\|^2 = \int_{\Omega} \|\xi\|_X^2 d\omega < \infty. \quad (4.125)$$

Такие случайные величины сами образуют гильбертово пространство $L_2(X)$ со скалярным произведением

$$(\xi, \eta)_{L_2(X)} = \int_{\Omega} (\xi, \eta)_X dw. \quad (4.126)$$

Само X является, очевидно, подпространством в $L_2(X)$.

Нам понадобится еще определение математического ожидания случайной величины.

Пусть $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$ — базис X . Тогда $\xi \in L_2(X)$ представляется в виде ряда (сходящегося в $L_2(X)$)

$$\xi(w) = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi(w), e_k)_X e_k, \quad (4.127)$$

где $(\xi(w), e_k)_X$ — обычные случайные величины над Ω . По определению

$$MO\xi = \sum_{k=1}^{\infty} MO(\xi(w), e_k)_X e_k.$$

В силу (4.125) это определение корректно. Если теперь рассматривается задача решения линейного уравнения $Az=u$, $z \in Z$, $u \in U$ и Z, U — гильбертовы пространства, то ее очевидный стохастический аналог — задача решения линейного уравнения

$$\hat{A}\hat{z}=\hat{u},$$

где $\hat{z} \in L_2(Z)$, $\hat{u} \in L_2(U)$, $\hat{A}$ — естественное продолжение A с Z на $L_2(Z)$.

Нетрудно проверить, что $\hat{A}$ — линейный оператор и

$$\|\hat{A}\|_{L_2(Z) \rightarrow L_2(U)} \leq \|A\|_{Z \rightarrow U}.$$

Построение РА для $\hat{A}^{-1}$ легко может быть выполнено по общим схемам, предложенным в § 1, 2 этой главы, причем не обязательно, чтобы «точные» правые части и решения лежали в Z и U соответственно, хотя в большинстве приложений считают «точную» задачу детерминированной.

Чтобы применить развитый выше аппарат регуляризации, необходимо знать интенсивность статистической помехи, т. е. оценку вида

$$\|u - \tilde{u}\|_{L_2(U)}^2 \leq \delta^2. \quad (4.128)$$

В реальных ситуациях ее получают, наблюдая независимые «реализации» случайной величины $\tilde{u}: \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N$.

Согласно обычным статистическим представлениям «наблюдения» $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N$ трактуются как случайные величины, а из их независимости вытекает ортогональность в смысле скалярного произведения (4.126). Если точное значение u неслучайное, то ес-

тественно предположить, что $MO\tilde{y}=MO\tilde{y}_1=MO\tilde{y}_2=\dots=u$ (отсутствие систематических ошибок в наблюдениях).

В таком случае в правой части (4.128) стоит квадрат дисперсии случайной величины $\tilde{y}$ и ставится задача оценки этой дисперсии по «наблюдениям» $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N$. Когда дисперсия $\tilde{y}$ неизвестна, а имеются только наблюдения случайной величины, часто представляется более интересным не строить непосредственно РА по «данным» $\tilde{y}$ и δ (т. е. фактически по одному «наблюдению» и дисперсии), а построить подходящую статистику R_N от всех имеющихся наблюдений так, чтобы

$$z_N = R_N(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N)$$

удовлетворила соотношению

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|z_N - z\|_{L_2(Z)} = 0. \quad (4.129)$$

Особый интерес представляют оценки итерационного типа:

$$z_N = R_N(z_{N-1}, \tilde{y}_N), \quad (4.130)$$

позволяющие с поступлением очередного наблюдения $\tilde{y}_N$ строить очередную оценку точного решения z_N . Процедуры оценки неизвестных элементов модели по схеме типа (4.130) называются в статистике процедурами стохастической аппроксимации. Для иллюстрации сказанного опишем одну такую процедуру.

Пусть A — положительный ограниченный самосопряженный оператор в Z . Пусть также для элемента $u \in U$ множество $A^{-1}u \neq \emptyset$. Ставится задача приближенного вычисления какого-либо элемента $A^{-1}u$ в условиях стохастических помех. Точнее, вместо u известны «независимые» случайные наблюдения $u_1, \dots, u_N$ такие, что $M.O.u_N = u$, $\|u - u_N\|_{L_2(Z)} = \delta < \infty$, но величина δ нам неизвестна.

Теорема 4.23. *Если A — положительный, самосопряженный ограниченный оператор в Z и $\|A\| \leq 1/2$, числа α_n удовлетворяют условиям*

$$0 < \alpha_n < 1/2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} \alpha_n} = 0,$$

то последовательность случайных величин

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= ((1-\alpha_n)E - A)z_n + \xi_n, \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{n-1}{n} \xi_{n-1}, \quad z_0 = \xi_0 = 0, \end{aligned} \quad (4.131)$$

сходится в $L_2(z)$ к элементу $A^{-1}u$, обладающему минимальной нормой.

Доказательство. Сразу же отметим, что условие на норму оператора задачи можно удовлетворить соответствующей нормировкой. Оно поэтому не является сколько-нибудь принципиальным. Введем последовательность элементов пространства (не случайных) v_n следующим образом:

$$v_{n+1} = [(1-\alpha_n)E - A]v_n + u, \quad v_0 = 0. \quad (4.132)$$

Последовательность (4.132) сходится к элементу $A^{-1}u$, обладающему минимальной нормой. Для доказательства этого вспомогательного утверждения нужно проверить, что оператор действия n шагов процесса (4.132) удовлетворяет условиям теоремы 4.7. Проверка условий этой теоремы совершенно элементарна за исключением (4.16).

Проверить условие (4.16) можно, например, так. Обозначим κ_n выражение в правой части условия (4.16) теоремы 4.7 ($\alpha = 1/n$) для аппроксимаций (4.132). Непосредственно из (4.132) получается разностное неравенство

$$\kappa_{n+1} \leq (1-\alpha_n - \lambda)\kappa_n - \alpha_n, \quad \kappa_0 = 1. \quad (4.133)$$

В последующих рассуждениях существенную роль играет следующая лемма о рекуррентных числовых неравенствах [24, 35].

Лемма 4.5. Если последовательность положительных чисел v_n удовлетворяет разностному неравенству

$$v_{n+1} \leq (1-a_n)v_n + b_n,$$

$$0 \leq a_n \leq 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0,$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

Применяя эту лемму к (4.133), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n = 0 \quad \forall \lambda \in S(A), \quad \lambda \neq 0.$$

Условие (4.16) теоремы 4.7 в нашем случае действительно выполнено. Следовательно, и последовательность (4.132) сходится

к элементу $A^{-1}u$, обладающему минимальной нормой. Продолжим теперь основное доказательство. Величина $\|z_n - v_n\|_{L_2(Z)}$ удовлетворяет разностному неравенству, непосредственно следующему из (4.131) и (4.132):

$$\|z_{n+1} - v_{n+1}\|_{L_2(Z)} \leq (1 - \alpha_n) \|z_n - v_n\|_{L_2(Z)} + \|u - \xi_n\|_{L_2(Z)}. \quad (4.134)$$

В силу попарной ортогональности случайных величин

$$\|u - \xi_n\|_{L_2(Z)} = \delta/\sqrt{n}. \quad (4.135)$$

Это проверяется прямым вычислением.

Подставляя (4.135) в (4.134) и используя лемму, получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - v_n\|_{L_2(Z)} = 0$. Но так как сама последовательность v_n сходится в Z к элементу $A^{-1}u$ с минимальной нормой, то отсюда и следует утверждение теоремы.

По схеме доказательства этой теоремы можно исследовать сходимость и более сложных процедур типа (4.131).

В заключение скажем несколько слов о других изучаемых в настоящее время моделях случайных ошибок в линейных задачах. Эти модели последовательно расширяют модель, описанную выше. Во-первых, можно, оставаясь внутри концепции случайной величины со значениями в Z , попробовать отказаться от условия (4.125). Во-первых, вместо обычных случайных величин можно рассматривать так называемые слабые случайные величины. Наконец, можно не предполагать, что значения слабой случайной величины лежат в исходном пространстве правых частей. Оказывается, что в наиболее интересных ситуациях можно прийти к нашей постановке задачи, применив к первоначальному уравнению подходящий линейный оператор B , действующий из более широкого пространства V значений слабой случайной величины в первоначальное пространство U . При этом уже Bu аппроксимирует Bi и в смысле нормы (4.125), и можно строить приближения к элементам $A^{-1}u$ и $(BA)^{-1}Bi$ так же, как это было описано выше. Более подробно этот круг вопросов рассмотрен в [110].

**Итеративные алгоритмы решения
нелинейных некорректных задач.
Принцип итеративной регуляризации**

В этой главе рассматриваются схемы, позволяющие строить итерационные аппроксимации для широкого класса нелинейных отображений, порожденных нелинейными некорректными задачами, и на их основе регуляризирующие алгоритмы для таких задач. Стандартная вариационная схема построения аппроксимаций (см. гл. III), пригодная и в нелинейном случае, непосредственно к построению численно реализуемых РА не приводит, так как для нахождения значений каждого оператора R_α (или R_δ) требуются дополнительные аппроксимации, обычно итерационные.

Итак, итерационные аппроксимации обязательно присутствуют в стандартной вариационной схеме Тихонова, если по этой схеме пытаться решать нелинейные задачи. В совокупности стандартный путь ведет к громоздкой двухэтапной схеме приближений. Возникает естественный вопрос о возможности непосредственного построения итерационных аппроксимаций для нелинейных некорректных задач. К сожалению, прямо воспользоваться стандартными рецептами построения итеративных методов, давно известными в вычислительной математике, в нашем случае не удастся. Предположения, при которых обеспечивается сходимость процессов, построенных по этим рецептам, заведомо не выполнены для некорректных задач.

Возникающую здесь ситуацию можно продемонстрировать на примере задачи выпуклой минимизации в общем бесконечномерном случае — минимизации выпуклого функционала f на замкнутом выпуклом множестве Q в гильбертовом пространстве H . Ситуация здесь принципиально меняется в зависимости от того, сводится ли исследуемая задача к линейной или нет. Так, если f — квадратичный функционал и $Q=H$, то задача минимизации такого функционала сводится к задаче решения линейного операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Для решения последней пригодны, как мы знаем из гл. IV, традиционные итерационные методы аппроксимации, которые нужно дополнить подходящими правилами остановки, чтобы получить из них РА.

В общем же неквадратичном случае при отказе от условий, гарантирующих сходимость любой минимизирующей последова-

тельности (такая задача минимизации некорректна в некотором естественном смысле), любой традиционный итеративный метод минимизации порождает только слабо сходящиеся минимизирующие последовательности. Аналогично обстоит дело и для других нелинейных задач. Непосредственное «продолжение» известных итеративных методов в некорректную область не всегда возможно даже формально. Например, метод Ньютона решения нелинейных уравнений в некорректном случае часто вообще не реализуем.

Ниже для широкого класса нелинейных проблем, описываемых вариационными неравенствами (в частности, для проблемы минимизации выпуклого функционала), предлагается принцип, позволяющий строить эффективные итерационные аппроксимации их решений в том случае, когда стандартные предположения, обеспечивающие корректность задачи, не выполняются. Простые априорные правила остановки в зависимости от погрешностей входных данных превращают эти итеративные аппроксимации в итеративные регуляризирующие алгоритмы.

§ 1. Вариационные неравенства как способ формулировки нелинейных задач

Вариационные неравенства — удобная общая форма записи и изучения различных нелинейных задач. В частности, в виде задачи решения вариационного неравенства могут быть сформулированы задачи решения нелинейного уравнения, нахождения экстремальной точки функционала, нахождения точки равновесия в игре n лиц и т. д.

Задача решения вариационного неравенства ставится следующим образом. Пусть $F(x)$ — некоторое отображение (вообще говоря, точечно-множественное) из вещественного банахова пространства B в B^* (сопряженное к B), заданное на подмножестве $D_F \subseteq B$.

Определение. Пусть Q — замкнутое выпуклое множество в B ($Q \subseteq B$). Под задачей решения вариационного неравенства понимаем задачу нахождения элемента $x^* \in D_F \cap Q$ такого, что

$$(F(x^*), x^* - z) \leq 0 \quad \forall z \in Q. \quad (5.1)$$

Скобки $(\ , \)$ в случае пары B, B^* — значение соответствующего функционала на элементе. Когда $B = H$ — гильбертово пространство, можно отождествить B и B^* . После такого отождествления в левой части (5.1) будет стоять некоторое скалярное произведение. Не оговаривая этого особо всегда, когда B — гильбертово пространство, считаем, что упомянутое отождествление сделано и скобки в (5.1) означают просто скалярное произведение.

В этой главе все пространства B предполагаются вещественными. Перенесение результатов на комплексный случай не представляет трудности, однако записи условий и результатов становятся более громоздкими.

Когда $F(x)$ — точечно-множественное отображение, под $F(x^*)$ в (5.1) понимается некоторый подходящий элемент образа x^* при отображении F . Более точная запись (5.1) в этом случае такая:

$$\exists x^* \in D_F \cap Q, \quad \exists y^* \in F(x^*),$$

что

$$(y^*, x^* - z) \leq 0 \quad \forall z \in Q. \quad (5.1')$$

Ниже всюду используется более короткая запись (5.1) с учетом того, что в случае точечно-множественного отображения ее нужно понимать в смысле (5.1').

Вариационное неравенство (5.1) является универсальной формой записи различных задач нелинейного анализа.

а) Задача решения нелинейного уравнения

$$F(x) = 0, \quad (5.2)$$

$F: B \rightarrow B^*$, эквивалентна задаче решения вариационного неравенства (5.1), причем $Q = B$. (Если F — точечно-множественное отображение, то (5.2) нужно понимать как включение $0 \in F(x)$.)

б) Задача нахождения минимума функционала $\Phi(x)$ на замкнутом выпуклом множестве $Q \subseteq B$ эквивалентна задаче решения вариационного неравенства (5.1), если, например, $\Phi(x)$ имеет субдифференциал $\partial\Phi = F$ в каждой точке Q . В этом случае в (5.1) в качестве F можно выбирать субдифференциал $\Phi(x)$, $\partial\Phi(x) = F$, $D_F \equiv Q$, или обычный градиент в дифференцируемом случае [90].

В частности, если

$$\Phi(x) = \|Ax - u\|_{H^2},$$

где A — линейный непрерывный оператор, действующий в H , то функционал Φ непрерывный, выпуклый и имеет субдифференциал. Задача решения соответствующего вариационного неравенства перекрывает, в частности, задачу решения линейного уравнения (4.1) и задачу решения уравнения (4.1) при априорных условиях на решение $x \in Q$. Таким образом, задачи этой главы обобщают рассмотренные выше линейные задачи гл. III, IV.

в) С задачей выпуклой минимизации тесно связана задача о поиске седловой точки соответствующей функции Лагранжа. Седловая точка в свою очередь — один из примеров так называемой «точки равновесия» в теории бескоалиционных игр n лиц. Такие игры широко изучаются в современной теории исследования операций. Они являются математическими моделями разнообразных конфликтных ситуаций.

Приведем формальную схему бескоалиционной игры [86]. Имеется набор n функционалов

$$\begin{aligned} & f_1(x_1, \dots, x_n), \\ & \vdots \\ & f_n(x_1, \dots, x_n), \quad x_i \in Q_i \end{aligned} \quad (5.3)$$

(Q_i — замкнутое выпуклое множество в пространстве B_i). Стра-

тегии x_i выбираются независимо каждым игроком с номером i . Суть игры состоит в том, что каждый игрок — «владелец» стратегии x_i — пытается с помощью подходящего выбора этой стратегии уменьшить значение «своего» функционала f_i . За эффективную точку игры (5.3) принимается точка равновесия, т. е. набор стратегий $x_1^*, \dots, x_n^*$, для которого

$$f_i(x_1^*, \dots, x_n^*) \leq f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \quad (5.4)$$

$$\forall x_i \in Q_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Это классическая схема бескоалиционной игры n лиц.

Наиболее популярен случай $n=2$ и $f_1 = -f_2$, когда игра называется антагонистической, а определение точки равновесия (5.4) совпадает с определением седловой точки функционала f_1 (или f_2).

Задача нахождения точки равновесия, а следовательно, и седловой точки (5.4) для многих классов игр (5.3) может быть сведена к задаче решения вариационного неравенства (5.1). Пусть $\mathbf{B}$ — прямое произведение пространств $B_i, i = \overline{1, n}$, $\mathbf{Q}$ — прямое произведение пространств $Q_i, i = \overline{1, n}$. Образуем функционал $\Phi(w, x)$, определенный на $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ следующим образом:

$$\Phi(w, x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i, \dots, w_i, \dots, x_n). \quad (5.5)$$

Непосредственно устанавливается следующее утверждение [82].

Точка $x^ = (x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда является точкой равновесия (5.4), когда*

$$\Phi(x^*, x^*) \leq \Phi(w, x^*) \quad \forall w \in \mathbf{Q}. \quad (5.6)$$

Этот критерий позволяет свести задачу о точке равновесия к задаче решения вариационного неравенства. Действительно, пусть функционал (5.5) имеет субдифференциал по первому аргументу. Тогда в силу (5.6) и утверждения б) точка x^* удовлетворяет вариационному неравенству (5.1), где

$$F(x) = \partial_w \Phi(w, x) |_{w=x}, \quad (5.7)$$

и наоборот.

Вариационные неравенства являются полезным инструментом исследования экстремальных задач и в более общих ситуациях. Например, при отказе от субдифференцируемости можно записать вариационные неравенства такие, что среди их решений находятся и решения рассматриваемых экстремальных задач. Можно также рассматривать игры (5.3), на произвольном выпуклом множестве $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{B}$. В этом случае вариационное неравенство с оператором (5.7) позволяет найти «нормализованные» точки равновесия (5.3) [18].

§ 2. Эквивалентные преобразования вариационных неравенств

Задачу решения вариационного неравенства (5.1) часто удается преобразовать к другим эквивалентным задачам, отличающимся от первоначальной по форме и более удобным. Такие преобразования (как и при решении уравнений) оказываются полезными, в частности, при конструировании численных методов решения (5.1).

Некоторые преобразования удается осуществить без каких-либо дополнительных существенных предположений об операторе F и области Q , другие — только при наложении условий на F и Q .

Лемма 5.1 [70]. Для того чтобы элемент $x^ \in Q$ был решением неравенства (5.1), когда F действует в гильбертовом пространстве H , необходимо и достаточно, чтобы x^* удовлетворял уравнению*

$$x^* = \mathcal{P}_Q(x^* - \alpha F(x^*)) \quad (5.8)$$

для некоторого $\alpha > 0$. Здесь $\mathcal{P}_Q$ — метрический проектор на Q . Если уравнение (5.8) удовлетворяется при некотором $\alpha > 0$, то оно справедливо (для данного x^) при любом $\alpha > 0$.*

Доказательство. Пусть w — какая-либо точка H . Метрическая проекция точки w на Q определяется как точка минимума функционала $\Phi(x) = \frac{1}{2} \|x - w\|^2$, $x \in Q$. Очевидно, что

$\text{grad } \Phi(x) = x - w$. В силу сказанного выше вариационное неравенство $(x - w, x - z) \leq 0$, x — искомая, z — произвольная точки Q , как раз и определяет эту точку. Поэтому запись (5.8) эквивалентна вариационному неравенству

$$(x^* - x^* + \alpha F(x^*), x^* - z) \leq 0,$$

или

$$(F(x^*), x^* - z) \leq 0.$$

В теории вариационных неравенств вообще и в наших дальнейших рассмотрениях, в частности, большую роль играет понятие монотонного и максимального монотонного оператора [31].

Определение. Оператор F называется монотонным, если его график в прямом произведении $B \times B^*$ — монотонное множество, т. е. $(y_2 - y_1, x_2 - x_1) \geq 0 \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{Gr}(F)$. Символ $\text{Gr}(F)$ обозначает график оператора F . Оператор F называется максимально монотонным, если его график — монотонное множество, не являющееся подмножеством никакого другого монотонного множества в $B \times B^*$.

Если образ точки при отображении F — также одна точка, то в теории таких монотонных операторов важную роль играет понятие хеминепрерывности F .

Определение. Однозначное отображение F называется хеминепрерывным в точке $x_0 \in D_F$, если для любого x такого, что

$x_0 + tx \in D_F$ при всех t , $0 \leq t < \alpha(x)$, $\alpha(x) > 0$, существует $\lim_{t \rightarrow 0} F(x_0 + tx)$ в смысле *слабой сходимости и

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(x_0 + tx) = F(x_0).$$

Важным примером максимальных монотонных операторов являются хеминепрерывные монотонные операторы, определенные на всем B .

Лемма 5.2 [31]. *Хеминепрерывный монотонный оператор ($D_F = B$) — максимальный монотонный ограниченный оператор.*

Определение. Оператор F называется хемограниченным в точке $x_0 \in D_F$, если для любого направления $x_0 + tx \in D_F$ множество $\bigcup_{0 \leq t \leq t_0} \{F(x_0 + tx)\}$ ограничено для достаточно малых t_0 .

Следующая лемма и ей подобные утверждения играют основную роль в теории вариационных неравенств с монотонными операторами.

Лемма 5.3. *Если F — максимально монотонный хемограниченный (локально) в каждой точке D_F оператор или монотонный, однозначный, хеминепрерывный оператор в сепарабельном пространстве B , $D_F = B$, а $D_F \cap Q$ — выпуклое множество и $\overline{D_F \cap Q} = Q$, то $x^* \in D_F \cap Q$ тогда и только тогда является решением (5.1), когда выполнено «дуальное» неравенство*

$$(F(z), z - x^*) \geq 0 \quad \forall z \in D_F \cap Q. \quad (5.9)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что из максимальной монотонности следует свойство:

если $z_n \rightarrow z$ сильно и $F(z_n) \rightarrow w$ *слабо, то $z, w \in \text{Gr}(F)$ (т. е. $w \in F(z)$).

Действительно, в противном случае мы могли бы расширить F , присоединяя w к $F(z)$. Полученное расширение было бы снова монотонным оператором, но это невозможно по условию. Итак, максимальный монотонный оператор обладает свойством замкнутости. Доказательство необходимости (5.9) сразу следует из монотонности F (в обоих случаях).

Достаточность доказывается так (первый случай). Возьмем любое $z \in D_F \cap Q$, рассмотрим множество z_t , $t \in [0, 1]$: $z_t = x^* + t(z - x^*) \in D_F \cup Q$ (по условию). В силу (5.9)

$$(F(z_t), z_t - x^*) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

или

$$(F(z_t), x^* - z) \leq 0.$$

В силу хемограниченности F $\{F(z_t)\}$ *слабо компактно (при $t \rightarrow 0$). Но при $t \rightarrow 0$ $z_t \rightarrow x^*$. В силу сделанного замечания

$$\{F(z_t)\} \rightarrow F(x^*), \quad t \rightarrow 0$$

{*слабо; точнее, некоторая последовательность $\{F(z_t)\}$ *слабо сходится к одному из элементов $F(x^*)$ при $t \rightarrow 0$), т. е.

$$\lim_{t \rightarrow 0} (F(z_t), x^* - z) = (F(x^*), x^* - z) \leq 0$$

$\forall z \in D_F \cap Q$. Так как $\overline{D_F \cap Q} = Q$, то это неравенство справедливо $\forall z \in Q$. Второй случай сводится к первому в силу леммы 5.2.

Приведем еще одну формулировку леммы об эквивалентности. В ней не нужна априорная хемиограниченность, однако налагаются большие требования на D_F и необходимо некоторое усиление (5.9).

Лемма 5.3'. *Если B рефлексивно и F — максимально монотонный, а $D_F \supseteq Q$ и $\text{int } D_F \cap Q \neq \emptyset$, то условие (5.9) необходимо и достаточно, чтобы x^* было решением (5.1) по крайней мере в том случае, когда оно выполняется для любой пары $\{z, F(z)\} \in \text{Gr } F$ [25].*

Следствие. Если оператор F удовлетворяет условиям леммы 5.3 (5.3'), то множество решений вариационного неравенства (5.1) выпукло (возможно, что оно пусто), а при условии $D_F \supseteq Q$ и замкнуто.

Лемма 5.4. *Если оператор F строго монотонен, т. е. равенство в определении монотонности возможно только при $x_1 = x_2$, то решение неравенства (5.1) (при условии его существования) единственно.*

Доказательство этой леммы непосредственно следует из условий строгой монотонности.

Результаты о преобразованиях вариационных неравенств, приведенные выше, не опирались на конкретный вид области Q . Однако реализуемость и эффективность практически любых итеративных алгоритмов решения (5.1) существенно зависят от конкретного вида Q , так как их отдельные шаги связаны с проектированием точки на Q , решением на Q некоторых вспомогательных неравенств и т. п.

Чаще всего на практике встречается способ задания Q в виде системы функциональных неравенств:

$$Q = \{x \in B, \varphi_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}, \quad (5.10)$$

φ_i — выпуклые непрерывные функционалы на B . В этом случае существует следующее замечательное эквивалентное преобразование неравенства (5.1) в систему вариационных неравенств.

Пусть $Q = Q_1 \cap Q_2$, Q_1 — замкнутое выпуклое множество в B , вид которого мы не конкретизируем, а Q_2 имеет вид (5.10) и все φ_j выпуклы и непрерывны в B . Рассмотрим систему вариационных неравенств

$$\begin{cases} (F(x) + \langle p, \partial \varphi \rangle, x - z)_B \leq 0, \\ (\varphi(x), q - p)_{E^m} \leq 0, \end{cases} \quad (5.11)$$

$x, z \in Q_1, p, q \in E_+^m, E_+^m$ — положительный октант в евклидовом пространстве E^m , $\langle p, \partial\varphi \rangle \equiv \sum_{i=1}^m p_i \partial\varphi_i(x)$.

Лемма 5.5. Пусть пара x^*, p^* , являющаяся решением системы (5.11), порождает x^* — решение неравенства (5.1). Если область (5.10) удовлетворяет условию Слейтера ($\forall p \in E_+^m, p \neq 0, \exists x \in Q_2 : (p, \varphi(x))_{E^m} < 0$), то любому решению x^* неравенства (5.1) соответствует решение системы (5.11) вида x^*, p^* [16, 117].

Доказательство. Пусть x^*, p^* — одно из решений (5.11). Из второго неравенства этой системы следует

$$(\varphi(x^*), q) \leq (\varphi(x^*), p^*) \quad \forall q \in E_+^m,$$

отсюда

$$\varphi_j(x^*) \leq 0, \quad j = \overline{1, m},$$

т. е. $x^* \in Q_2$. Кроме того, отсюда же следует, что $(\varphi_j(x^*), p_j^*) = 0, j = \overline{1, m}$. Это аналог условий дополняющей нежесткости в математическом программировании. Функционал $(\varphi(x), p^*)_{E^m}$ в силу условий теоремы выпуклый и субдифференцируемый. Из определения субградиента и условия дополняющей жесткости имеем

$$(\langle p^* \partial\varphi(x^*) \rangle, v - x^*) \leq (p^*, \varphi(v)) \leq 0,$$

так как если $v \in Q_1 \cap Q_2$, то $\varphi(v) \leq 0$. Отсюда и из правого неравенства (5.11) следует, что $(F(x^*), x^* - v) \leq 0 \quad \forall v \in Q$, т. е. x^* — решение (5.1).

Обратно, пусть x^* — решение (5.1). В силу (5.1)

$$(F(x^*), x^*) = \min_{z \in Q} (F(x^*), z).$$

Для этой задачи на минимум справедлива (так как выполнено условие Слейтера) теорема Куна—Таккера, в силу которой $\exists p^* \in E_+^m$ такой, что (x^*, p^*) является седловой точкой функционала Лагранжа

$$\mathcal{L}(z, p) = (F(x^*), z) + (p, \varphi(z)),$$

$z \in Q, p \in E_+^m$.

Любая седловая точка функционала $\mathcal{L}$ удовлетворяет системе вариационных неравенств по форме, совпадающей с (5.11). Следовательно, (x^*, p^*) — решение (5.11).

Отметим, что в лемме 5.5 на оператор F не накладывается практически никаких условий. Если F монотонный или максимально монотонный, то таким же будет оператор $\tilde{F}(x, p)$ системы (5.11) в прямом произведении $B \times E_+^m$ (проверьте). Смысл преобразования (5.11) состоит в переходе от «сложного» множества Q к более простому («снятие ограничений»).

В случае, когда F — потенциальный оператор, лемма 5.5 эквивалентна утверждению теоремы Куна—Таккера о седловой

точке в выпуклом математическом программировании. Систему (5.11) можно назвать поэтому системой Куна—Таккера, ассоциированной с неравенством (5.1).

Те требования на операторы F , которые мы использовали до сих пор, не обеспечивают, вообще говоря, существования и устойчивости решения (5.1) в каком-либо «естественном» смысле. Замечательно, однако, что если множество решений рассматриваемого вариационного неравенства не пусто, то некоторые элементы этого множества можно аппроксимировать решениями «устойчивых» вариационных неравенств, обладающих лучшими в некотором смысле свойствами. Точные условия такого приближения сформулированы в следующем параграфе.

§ 3. Аппроксимация Браудера — Тихонова решений вариационных неравенств

В этом параграфе излагается схема аппроксимации решений (5.1), если они существуют, последовательностью решений некоторых вспомогательных вариационных неравенств, обладающих «хорошими» свойствами. Использование такой аппроксимации при построении РА для задач на экстремум функционала было предложено А. Н. Тихоновым [100, 102]. Аналогичное более общее утверждение относительно специальной аппроксимации решений вариационных неравенств было доказано Ф. Браудером [115]. Поэтому мы называем подобные аппроксимации аппроксимациями Браудера—Тихонова.

Предположим, что пара пространств B, B^* такова, что в B существует всюду определенный хеминепрерывный сильно монотонный оператор M , т. е.

$$(Mx - Mz, x - z) \geq \|x - z\| \gamma(\|x - z\|) \quad \forall x, z \in B, \quad (5.12)$$

где $\gamma(t)$ — строго возрастающая непрерывная функция на $[0, \infty)$ и $\gamma(0) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$.

В случае, когда B — гильбертово пространство, такой оператор заведомо существует. Можно положить, например, $M = E$, ($\gamma(t) = t$). Решения неравенства (5.1) будем приближать решениями неравенств с операторами $F + \varepsilon M$, $\varepsilon > 0$. Следующая лемма описывает основное асимптотическое свойство таких приближений [115].

Лемма 5.6. Пусть выполняются условия $D_F \supseteq Q$, B рефлексивно, F монотонен, хеминепрерывен и $D_F = B$, или максимально монотонен и $\text{int } D_F \cap Q \neq \emptyset$. Тогда существует x_ε — единственное решение вариационного неравенства

$$(F(x) + \varepsilon M(x), x - z) \leq 0, \quad z \in Q, \quad (5.13)$$

и если K — множество решений (5.1) — не пусто, то справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|x_\varepsilon - y\| = 0,$$

где $y \in K$ — единственное решение вариационного неравенства

$$(M(x), x-z) \leq 0 \quad \forall z \in K. \quad (5.14)$$

Доказательство. В силу следствия из леммы 5.3 (5.3') непустое множество K замкнуто и выпукло. По стандартным теоремам существования для вариационных неравенств [70, 115] и условию (5.12) элементы x_ε и y существуют и единственны $\forall \varepsilon > 0$. Обозначим $F_\varepsilon(x) \equiv F(x) + \varepsilon M(x)$. Так как F — монотонный оператор, то справедливо неравенство $(F_\varepsilon(x) - F(x_\varepsilon), x - x_\varepsilon) \geq \varepsilon(M(x) - M(x_\varepsilon), x - x_\varepsilon)$. С учетом (5.1) отсюда следует

$$(F(x_\varepsilon), x - x_\varepsilon) \geq \varepsilon(M(x) - M(x_\varepsilon), x - x_\varepsilon). \quad (5.15)$$

Пусть $v \in K$, тогда $(F(v), v - z) \leq 0 \quad \forall z \in Q$. Полагая в (5.15) $x = v$, получим с учетом (5.12)

$$\begin{aligned} \|M(v)\| \|v - x_\varepsilon\| &\leq (M(v), v - x_\varepsilon) \geq (M(v) - M(x_\varepsilon), v - x_\varepsilon) \geq \\ &\geq \|v - x_\varepsilon\| \gamma (\|v - x_\varepsilon\|). \end{aligned} \quad (5.16)$$

В силу рефлексивности B отсюда следует слабая компактность $\{x_\varepsilon\}$. Перейдем в (5.15) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В силу леммы 5.3 (5.3') любой слабый предел $\{x_\varepsilon\}$ — решение (5.1).

Докажем, что при наших предположениях x_ε на самом деле сильно сходится к y — решению (5.14). Действительно, в силу (5.16)

$$(M(y) - M(x_\varepsilon), y - x_\varepsilon) \leq (M(y), y - x_\varepsilon).$$

Из слабой компактности $\{x_\varepsilon\}$, принадлежности всех слабых пределов $\{x_\varepsilon\}$ к множеству K и (5.14) имеем

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} (M(y), y - x_\varepsilon) \leq 0,$$

следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (M(y) - M(x_\varepsilon), y - x_\varepsilon) = 0. \quad (5.17)$$

В силу (5.12) из (5.17) следует утверждение леммы.

Замечание 1. Условия на оператор M могут быть ослаблены. В частности, достаточно требовать, например, максимальной монотонности M и условия $\text{int } D_M \supseteq Q$ вместо однозначности и хеминепрерывности M всюду. Условие (5.12), конечно, должно быть сохранено на D_M .

Замечание 2. Пусть в рефлексивном пространстве B множество $Q = Q \cap Q_2$, Q представимо в виде (5.10). Рассмотрим функционал на B вида

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^m [\varphi_j(x)]_+^p, \quad p \geq 1. \quad (5.18)$$

Функционал (5.18) — один из возможных «штрафных» функцио-

налов математического программирования. В предположениях выпуклости и непрерывности φ_i на B , $\psi(x)$ также выпуклый и непрерывный на B . Поэтому он имеет субдифференциал $\partial\psi$, являющийся максимальным монотонным оператором [90]. Нетрудно видеть, что множество $Q=Q_1 \cap Q_2$ совпадает с множеством решений вариационного неравенства на Q_1 :

$$(\partial\psi(x), x-z) \leq 0, \quad z \in Q_1. \quad (5.19)$$

Напишем для неравенства (5.19) аппроксимирующее неравенство (5.1), в котором в качестве M возьмем оператор F :

$$(\varepsilon F(x) + \partial\psi(x), x-z) \leq 0 \quad \forall z \in Q_1. \quad (5.20)$$

Если оператор F основного неравенства (5.1) удовлетворяет свойству сильной монотонности (5.12), то при необременительных условиях непрерывности или максимальной монотонности решение неравенства (5.20) x_* аппроксимирует при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение (5.1) (которое в данном случае единственное!).

Смысл перехода от основного неравенства (5.1) к аппроксимирующему неравенству (5.20) состоит в том, что в неравенстве (5.20) множество задания Q_1 устроено более просто, чем первоначальное множество Q (часть ограничений снята). В частности, Q_1 может просто совпадать со всем пространством, и тогда (5.20) превращается в уравнение (включение) $\partial\psi=0$ ($0 \in \partial\psi$). Если F — потенциальный оператор, то описанная процедура известна в математическом программировании как метод штрафа.

Рассмотрим теперь вопрос о близости решений вариационных неравенств с «близкими» операторами. Пусть заданы $F(x)$ и $\tilde{F}(x)$ и $D_{\tilde{F}} \supseteq D_F$. Кроме того, существуют элементы $x^* \in D_F \cap Q$ и $\tilde{x}^* \in D_{\tilde{F}} \cap Q$ такие, что

$$(F(x), x-x^*) \geq \|x-x^*\| \gamma(\|x-x^*\|) \quad \forall x \in D_F \cap Q \quad \forall F(x), \quad (5.21)$$

$$(\tilde{F}(x), x-\tilde{x}^*) \geq \|x-\tilde{x}^*\| \gamma(\|x-\tilde{x}^*\|) \quad \forall x \in D_{\tilde{F}} \cap Q \quad \forall \tilde{F}(x),$$

где $\gamma(\tilde{\gamma})$ — строго возрастающая функция t и $\gamma(0)=\tilde{\gamma}(0)=0$.

Лемма 5.9. Если выполнены условия (5.21) и, кроме того,

$$(F(x^*), x^*-x) \leq 0 \quad \forall x \in Q \quad (5.22)$$

хотя бы для какого-нибудь элемента $F(x^)$, то*

$$\|x^*-\tilde{x}^*\| \tilde{\gamma}(\|x^*-\tilde{x}^*\|) \leq (\tilde{F}(x^*)-F(x^*), x^*-\tilde{x}^*),$$

или более грубо

$$\|x^*-\tilde{x}^*\| \leq \tilde{\gamma}^{-1}(\|\tilde{F}(x^*)-F(x^*)\|), \quad (5.23)$$

где $\tilde{F}(x^*)$ — любой представитель образа $\{\tilde{F}(x^*)\}$ при отображении $\tilde{F}$, а $F(x^*)$ — элемент из $\{F(x^*)\}$, для которого выполнено (5.22).

Доказательство. Подставив во второе из неравенств (5.21) $x=x^*$, имеем

$$\|x^*-\tilde{x}^*\|\gamma(\|x^*-\tilde{x}^*\|) \leq (F(x^*), x^*-\tilde{x}^*) + \\ + (\tilde{F}(x^*)-F(x^*), x^*-\tilde{x}^*).$$

В силу (5.22) отсюда и следует оценка (5.23). Очевидно, что в оценке (5.23) можно одновременно $\tilde{\gamma}$ заменить на γ , а x^* на $\tilde{x}^*$. Она при этом останется справедливой.

Следствие. Если F и $\tilde{F}$ сильно монотонны и для них выполнено условие (5.12), а вариационные неравенства (5.1) с F и $\tilde{F}$ разрешимы, то для решений x^* и $\tilde{x}^*$ справедлива оценка (5.23).

Если пространство B гильбертово, то можно в достаточно общих предположениях оценить близость решений двух вариационных неравенств (5.1) с различными областями Q . Пусть Q и $\tilde{Q}$ — две замкнутые выпуклые области в гильбертовом пространстве H . «Близость» между Q и $\tilde{Q}$ измеряем при помощи двух функционалов [17]:

$$\rho(Q, \tilde{Q}, u) = |\mathcal{P}_Q u - \mathcal{P}_{\tilde{Q}} u| \quad (5.24)$$

$$\text{и} \quad \rho_D(Q, \tilde{Q}) = \sup_{\|u\| \leq D} \rho(Q, \tilde{Q}, u), \quad (5.25)$$

где D — некоторое фиксированное, положительное число. Функционалы (5.24), (5.25) обладают всеми свойствами метрики, за исключением того, что из их равенства нулю, вообще говоря, не следует совпадение областей $Q, \tilde{Q}$. Требование близости областей Q и $\tilde{Q}$ в смысле (5.24) или (5.25) существенно слабее требования их близости в стандартной хаусдорфовой метрике $\alpha(Q, \tilde{Q})$.

Пусть оператор F сильно монотонен в смысле (5.12) на $QU\tilde{Q}$ с $\gamma(t)=ct$, $c>0$, и удовлетворяет на $QU\tilde{Q}$ условию Липшица

$$\|F(z_1)-F(z_2)\| \leq L\|z_1-z_2\|, \quad z_1, z_2 \in QU\tilde{Q}. \quad (5.26)$$

Пусть также w и $\tilde{w}$ — решения неравенств (5.1) с областями Q и $\tilde{Q}$ соответственно.

Лемма 5.10. При выполнении для F условий (5.12) ($\gamma(t)=ct$) и (5.26) справедлива оценка

$$\|w-\tilde{w}\| \leq \frac{\min\{\rho(Q, \tilde{Q}, \bar{w}), \rho(Q, \tilde{Q}, \tilde{w})\}}{1-(1-c^2/L)^{1/2}}, \quad (5.27)$$

где $\bar{w}=w-(c/L)F(w)$. Аналогично определяется $\tilde{\bar{w}}$.

Доказательство. Пусть $\rho(Q, \tilde{Q}, w) \leq \rho(Q, \tilde{Q}, \bar{w})$. Используя представление (5.8) для решения (5.1) и свойство нерастягиваемости оператора проектирования, имеем

$$\|w-\tilde{w}\| \leq \|\mathcal{P}_Q(w-\alpha F(w))-\mathcal{P}_{\tilde{Q}}(\tilde{w}-\alpha \tilde{F}(\tilde{w}))\| + \\ + \|\mathcal{P}_Q(\tilde{w}-\alpha F(\tilde{w}))-\mathcal{P}_{\tilde{Q}}(\tilde{w}-\alpha F(\tilde{w}))\| \leq \\ \leq \|w-\tilde{w}-\alpha(F(w)-F(\tilde{w}))\| + \rho(Q, \tilde{Q}, \tilde{w}-\alpha F(\tilde{w})).$$

Так как пространство B гильбертово, то с учетом сильной монотонности и (5.26)

$$\|\omega - \tilde{\omega} - \alpha(F(\omega) - F(\tilde{\omega}))\| \leq (1 - 2\alpha c + L\alpha^2)^{1/2} \|\omega - \tilde{\omega}\|.$$

Полагая $\alpha = c/L$, получаем оценку (5.27).

§ 4. Принцип итеративной регуляризации

Аппроксимация, описанная в лемме 5.6, — аналог тихоновской аппроксимации гл. III и преследует аналогичные цели «улучшения» первоначальной задачи. В частности, неравенство (5.13) обычно можно решать стандартными итерационными методами, так как в нем оператор F_* в отличие от оператора F в (5.1) сильно монотонен. Это, как правило, обеспечивает сходимость итераций. Однако итерации, аппроксимирующие решение (5.13) при фиксированном $\varepsilon \neq 0$, вообще говоря, не аппроксимируют решение (5.1) при увеличении номера итерации.

Попытаемся получить итерационную последовательность, сходящуюся к решению (5.1), следующим образом. Пусть ε_0 и $z_0 \in Q$ фиксированы. Рассмотрим неравенство (5.13) с $\varepsilon = \varepsilon_0$ и сделаем шаг какого-либо итеративного метода, предназначенного для решения «регулярного» неравенства (5.13). Получим точку z_1 . Выберем теперь ε_1 и с парой ε_1, z_1 проделаем ту же операцию. Получим z_2 и т. д.

Описанную процедуру мы называем «итеративной регуляризацией». Замечательно, что, взяв за основу подходящий итеративный метод решения регулярного неравенства (5.13), удастся так априорно выбрать последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что процедура итеративной регуляризации будет сходиться (сильно) к решению неравенства (5.1), если это решение существует. Приведем общую схему изучения сходимости любой конкретной процедуры итеративной регуляризации [13].

Предположим, что мы выбрали итеративный метод, при помощи которого осуществляется переход от z_n к z_{n+1} , $n = 0, 1, \dots$, в процедуре итеративной регуляризации. Этот метод мы называем базовым. Обозначим $U(\varepsilon_n, x)$ функцию (функционал) Ляпунова, применяемую обычно для изучения сходимости базового итеративного метода к решению неравенства (5.13) с фиксированным $\varepsilon = \varepsilon_n$. Напомним, что функционал Ляпунова — такой функционал на изучаемой итеративной последовательности, по поведению которого при возрастании номера итерации можно судить о сходимости в том или ином смысле рассматриваемых итераций.

В стандартных случаях в качестве функционала Ляпунова используют норму разности между точным решением и текущей точкой или какие-либо аналогичные функционалы. Для определенности предполагаем, что

$$U(\varepsilon_n, x_{\varepsilon_n}) = 0.$$

Можно записать очевидное неравенство

$$U(\varepsilon_{n+1}, z_{n+1}) \leq U(\varepsilon_n, z_{n+1}) + |U(\varepsilon_n, z_{n+1}) - U(\varepsilon_{n+1}, z_{n+1})|. \quad (5.28)$$

Схема доказательства сходимости базового итерационного метода часто позволяет выписать связь $U(\varepsilon_n, z_{n+1})$ и $U(\varepsilon_n, z_n)$ в виде

$$U(\varepsilon_n, z_{n+1}) \leq \chi(U(\varepsilon_n, z_n), \varepsilon_n). \quad (5.29)$$

Если второе слагаемое первой части неравенства (5.28) удастся оценить через ε_n , ε_{n+1} и априорно заданные постоянные и функции, то, подставляя (5.25) в (5.28), получим разностное уравнение для $U_n \equiv U(\varepsilon_n, z_n)$:

$$U_{n+1} \leq \chi(U_n, \varepsilon_n) + \kappa(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}). \quad (5.30)$$

Предположим еще, что функция Ляпунова U обладает свойством сильной положительности, т. е.

$$U_n \geq c(\varepsilon_n) \varphi(\|z_n - x_{\varepsilon_n}\|), \quad c(\varepsilon_n) > 0, \quad (5.31)$$

причем $\varphi(\xi) \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда $\xi \rightarrow 0$.

В случае, когда U — расстояние до точного решения, неравенство (5.31), очевидно, выполнено с $c(\varepsilon_n) \equiv 1$ и $\varphi(\xi) \equiv \xi$. Обычно с помощью (5.30) удастся оценить скорость стремления U_n к 0 при $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Если окажется, что $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n / c(\varepsilon_n) = 0$ и справедлива лемма 5.6, то отсюда $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - y\| = 0$. Это означает сильную сходимость конкретной процедуры итеративной регуляризации. Следовательно, основной задачей является задача указания таких последовательностей ε_n , для которых $U_n = o(c(\varepsilon_n))$. Приведенная схема открывает, как мы и увидим ниже, широкие возможности итеративной регуляризации очень многих конкретных методов.

§ 5. Итеративная регуляризация на основе методов нулевого порядка

Предмет нашего дальнейшего рассмотрения — процедура итеративной регуляризации решения неравенства (5.1), в которой итеративный шаг (от z_n к z_{n+1}) делается с помощью решения вспомогательного вариационного неравенства типа (5.1), с оператором Φ , связанным с тейлоровским отрезком оператора F порядка $p \geq 0$ в точке z_n . (Все производные в дальнейшем можно понимать в смысле Гато.) Мы особо останавливаемся на изучении методов с таким переходом от z_n к z_{n+1} ввиду их большой универсальности и возможности при исследовании воспользоваться простейшей функцией Ляпунова $U(\varepsilon, x) = \|x - x_{\varepsilon_n}\|$. Эту функцию обозначим Δ , чтобы подчеркнуть ее специфический характер. Будем для краткости записи вместо x_{ε_n} писать x_n там, где

это не может вызвать недоразумений. Вот как формально описывается упомянутый класс методов.

Пусть приближение z_n уже найдено, тогда следующее приближение z_{n+1} находится как решение вариационного неравенства вида

$$(z - \Phi_p(z_n, z, \varepsilon_n, \alpha_n), z - x) \leq 0 \quad \forall x \in Q,$$

где $\Phi_p(z_n, z, \varepsilon_n, \alpha_n)$ — отрезок тейлоровского разложения оператора $\Phi(z, \varepsilon_n, \alpha_n) = z - \alpha_n(F(z) + \varepsilon_n M(z))$ в точке $z = z_n$ до членов, содержащих производные порядка $p \geq 0$. Формально можно рассматривать методы с любым целым $p \geq 0$. Однако содержательная теория получается только при $p=0$ и $p=1$, так как при $p \geq 2$ глобальные свойства тейлоровского отрезка оператора практически не связаны со свойствами самого оператора (например, отрезок может быть не монотонен, даже если основной оператор этим свойством обладает).

Случай $p=0$ требует минимальных предположений гладкости $\Phi(z, \varepsilon_n, \alpha)$. Мы покажем, что в этом случае можно априори задать закон изменения величин ε_n и α_n , обеспечивающий сходимость $\{z_n\}$ к решению (5.1), выделяемому леммой 5.6.

Если предположить, что B — гильбертово пространство, то итеративная последовательность z_n (при $p=0$) выписывается в «явном» виде (см. лемму 5.1):

$$z_{n+1} = \mathcal{P}_Q(z_n - \alpha_n(F(z_n) + \varepsilon_n M(z_n))), \quad n=0, 1, \dots \quad (5.32)$$

При исследовании сходимости процесса (5.32) приходится делать те или иные предположения относительно F и M . Сделанное предположение позволяет указать диапазон изменения параметров ε_n и α_n и связь между ними, при которых обеспечивается сходимость.

Исследование сходимости процесса (5.2) проведем, следуя общей схеме, изложенной в § 4. Функция Ляпунова в данном случае имеет вид $\Delta = \|(\cdot) - x_n\|$. Одновременно с последовательностью z_n рассмотрим вспомогательную последовательность точек x_n , удовлетворяющих неравенству (5.13) леммы 5.6. Далее, исследуя соответствующее неравенство (5.30), мы доказываем стабилизацию z_n к x_n при $n \rightarrow \infty$. В силу леммы 5.6 отсюда следует сходимость $\{z_n\}$ к некоторому решению (5.1) (предполагается всегда, что $K \neq \emptyset$, K — множество решений (5.1)).

Выделим те общие предположения, которые постоянно используются на протяжении этого параграфа.

а) B — вещественное гильбертово пространство. Оператор M или однозначный хеминепрерывный на Q , или максимально монотонный и $\text{int } D_M \ni Q$. Кроме того, в (5.12) функция имеет специальный вид:

$$\gamma(t) = mt, \quad m > 0, \quad (5.33)$$

б) Выполнены предположения леммы 5.6.

Следующие ниже теоремы дают условия, гарантирующие справедливость соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - y\| = 0 \quad (5.34)$$

(y — решение неравенства (5.14)).

Теорема 5.1. Пусть выполнены предположения а) и б), в множествах $F(x)$ и $M(x)$ существует по крайней мере один элемент такой, что

$$\|F(x)\| \leq L(1 + \|x\|) \quad \forall x \in D_F, \quad (5.35)$$

$$\|M(x)\| \leq L(1 + \|x\|) \quad \forall x \in D_M, \quad (5.36)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\varepsilon_n} = 0. \quad (5.36)$$

Кроме того, выполнены условия

$$\begin{aligned} \alpha_n, \varepsilon_n &> 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n &= 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|}{\alpha_n \varepsilon_n^2} = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varepsilon_n &= \infty. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Тогда справедливо соотношение (5.34), если $z_0 \in Q$ ($z_0 \in B$) и в качестве $F(z_n)$ и $M(z_n)$ выбраны элементы, удовлетворяющие (5.35).

Доказательство. Согласно общей схеме исследования метода итеративной регуляризации

$$\|z_n - y\| \leq \overbrace{\|z_n - x_n\|}^{\text{I}} + \overbrace{\|x_n - y\|}^{\text{II}}. \quad (5.38)$$

В силу предположения б) слагаемое II $\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Остается исследовать поведение слагаемого I в (5.38), т. е. проверить стабилизацию z_n к траектории вспомогательных точек x_n . Имеем, используя (5.32) и свойства оператора $\mathcal{P}_Q$,

$$\Delta_{n+1} \leq \|z_n - \alpha_n(F(z_n) + \varepsilon_n M(z_n)) - x_n\| + \|x_n - x_{n+1}\|.$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\|z_n - \alpha_n(F(z_n) + \varepsilon_n M(z_n)) - x_n\| \leq \\ &\leq \{\Delta_n^2(1 - 2\alpha_n m \varepsilon_n + \alpha_n^2(\|F(z_n)\| + \varepsilon_n \|M(z_n)\|)^2)\}^{1/2}. \end{aligned}$$

В силу (5.35)

$$(\|F(z_n)\| + \varepsilon_n \|M(z_n)\|)^2 \leq c_1 + c_2 \Delta_n^2,$$

c_1, c_2 — некоторые постоянные.

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} & \|z_n - \alpha_n (F(z_n) + \varepsilon_n M(z_n)) - x_n\| \leq \\ & \leq \{\Delta_n^2 (1 - 2m\alpha_n \varepsilon_n + c_2 \alpha_n^2) + c_1 \alpha_n^2\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Для оценки $\|x_n - x_{n+1}\|$ используем лемму 5.9 с $\gamma(t) = m\varepsilon_n t$. Так как слагаемое $\Pi \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то последовательность $\|x_n\|$ ограничена. Применим лемму 5.9 к двум неравенствам Браудера—Тихонова с $\varepsilon = \varepsilon_n$ и $\varepsilon = \varepsilon_{n+1}$. Получим в силу (5.23) и (5.33)

$$\|x_n - x_{n+1}\|^2 = O\left(\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right)^2. \quad (5.39)$$

Соотношение (5.30) для этого конкретного метода выглядит следующим образом:

$$\Delta_{n+1} \leq \{\Delta_n^2 (1 - 2m\alpha_n \varepsilon_n + c_2 \alpha_n^2) + c_1 \alpha_n^2\}^{1/2} + O\left(\left|\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right|\right).$$

Преобразуем это неравенство. Возведем обе его части в квадрат и применим элементарное неравенство

$$(a+b)^2 \leq (1 + \alpha_n \varepsilon_n) a^2 + \left(1 + \frac{1}{\alpha_n \varepsilon_n}\right) b^2.$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1}^2 & \leq \Delta_n^2 (1 - m\alpha_n \varepsilon_n + c_3 \alpha_n^2) + c_4 \alpha_n^2 + \\ & + \frac{1}{\alpha_n \varepsilon_n} O\left(\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right)^2, \end{aligned}$$

$c_i, i=3, 4$, — постоянные, может быть, зависящие от x_0 .

Для завершения доказательства остается сослаться на лемму 4.5 о числовых последовательностях.

З а м е ч а н и е. Последовательности $\alpha_n = (1+n)^{-1/2}$ и $\varepsilon_n = (1+n)^{-p}$, $0 < p < 1/2$, удовлетворяют всем нужным условиям (5.36), (5.37).

При наличии большей гладкости операторов F и M или иных дополнительных условий можно доказать соотношение (5.34), заменяя условия теоремы 5.1 другими, вообще говоря, менее строгими.

Т е о р е м а 5.2. Пусть выполнены предположения а) и б), условия (5.37), кроме того, F и M удовлетворяют условию Липшица

$$\|F(x) - F(z)\| \leq L\|x - z\| \quad \forall x, z \in D_F, \quad (5.40)$$

$$\|M(x) - M(z)\| \leq L\|x - z\| \quad \forall x, z \in D_M, \quad (5.41)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \frac{(1 + \varepsilon_n)^2}{\varepsilon_n} < \frac{2m}{L^2}. \quad (5.41)$$

Тогда справедливо соотношение (5.34).

Доказательство проходит по той же схеме, что и доказательство теоремы 5.1. Более того, заново нужно доказывать только, что слагаемое I в (5.38) стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Используя предположение б) и лемму 5.1, получим

$$x_n = \mathcal{P}_Q(x_n - \alpha_n(F(x_n) + \varepsilon_n M(x_n))).$$

Используя это соотношение, а также условие (5.40), получим

$$\Delta_{n+1} \leq \Delta_n(1 - 2\alpha_n \varepsilon_n m + \alpha_n^2(1 + \varepsilon_n)^2 L^2)^{1/2} + \|x_n - x_{n+1}\|. \quad (5.42)$$

Далее, используя условие (5.41), оценку (5.39), нужные условия (5.37), а также лемму (4.5), снова получим, что слагаемое I $\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и я.

1. Требуемым в теореме условиям удовлетворяют, например, последовательности $\alpha_n = \theta \varepsilon_n$,

$$\varepsilon_n = (1+n)^{-p}, \quad 0 < p < \frac{1}{2}, \quad \theta < \frac{2m}{(1+\varepsilon_0)^2 L^2}.$$

2. Введение добавки $\varepsilon_n M(z_n)$ на каждом шагу процесса (5.32) носит принципиальный характер, так как процесс (5.32) с $\varepsilon_n \equiv 0$, вообще говоря, расходится даже в конечномерном пространстве. Действительно, рассмотрим в двумерном евклидовом пространстве E_2 оператор

$$F(x) = \{x_2, -x_1\}, \quad x = (x_1, x_2), \quad Q = E_2.$$

Соответствующее вариационное неравенство определяет единственную седловую точку функционала $f(x) = x_1 x_2$ во всем пространстве. Это точка (0, 0). Несложные рассуждения показывают, что в данном случае процесс (5.32) с $\varepsilon_n \equiv 0$ ни при каком выборе α_n не сходится к точке (0, 0) (если $z_0 \neq (0, 0)$). Кроме того, последовательность (5.32) в этом случае не является даже «решающей» для неравенства (5.1), т. е. не выполняются соотношения

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (F(x_n), x_n - z) \leq 0 \quad \forall z \in E_2.$$

Теорема 5.3. Пусть F, M — потенциальные, непрерывные и дифференцируемые операторы, F монотонен, выполнены предположения а) и б), условия (5.37). Кроме того,

$$\|F'(x)\| \leq N, \quad \|M'(x)\| \leq N, \quad (5.43)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon_n) \alpha_n < 2/N, \quad (5.44)$$

Тогда справедливо соотношение (5.34).

Доказательство. И в этом случае нужно доказать только то, что $I \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Оценка Δ_n проводится следующим обра-

зом. Используя лемму 5.1 и дифференцируемость F и M , запишем

$$\Delta_{n+1} \leq \|z_n - x_n - \alpha_n \int_0^1 [F'(x_n + t(z_n - x_n)) + \\ + \varepsilon_n M'(x_n + t(z_n - x_n))(z_n - x_n)] dt\| + \|x_n - x_{n+1}\|.$$

В силу потенциальности и монотонности при каждом из фиксированных x_n и z_n значение $F' + \varepsilon_n M'$ — положительный самосопряженный оператор, причем из (5.43), предположений а) и б) получаем, что верхняя и нижняя границы его спектра суть $(1 + \varepsilon_n)_N$ и ε_n соответственно. Поэтому

$$\Delta_{n+1} \leq \Delta_n \max \{ (1 - \alpha_n \varepsilon_n), (1 - \alpha_n (1 + \varepsilon_n) N) \} + \|x_n - x_{n+1}\|.$$

Если выполнено (5.37) и (5.44), то снова можно применить лемму 4.5, из которой следует, что $1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е. Условиям теоремы удовлетворяют, например, последовательности

$$0 < \alpha_n \equiv \alpha < 1/N, \quad \varepsilon_n = (1+n)^{-p}, \quad 0 < p < 1.$$

Теорема 5.4. Пусть выполнены предположения а) и б), (5.37) и $Q=B$, $F(x)=x-R(x)$,

$$\|R(x) - R(z)\| \leq \|x - z\|, \quad (5.45)$$

т. е. $R(x)$ — нестягивающий оператор,

$$M(x) = x, \quad \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} (1 - \alpha_n - \alpha_n \varepsilon_n) \geq 0. \quad (5.46)$$

Тогда справедливо соотношение (5.34).

Доказательство. Оценка Δ_n получается из рекуррентного соотношения

$$\Delta_{n+1} \leq \| (1 - \alpha_n - \alpha_n \varepsilon_n) (z_n - x_n) + \alpha_n (R(z_n) - R(x_n)) \| + \\ + \|x_n - x_{n+1}\|.$$

Отсюда с учетом (5.45) и (5.46) имеем

$$\Delta_{n+1} \leq (1 - \alpha_n \varepsilon_n) \Delta_n + \|x_n - x_{n+1}\|.$$

Дальнейшие рассуждения те же, что и при доказательстве теорем 5.1—5.3.

З а м е ч а н и е. Последовательности

$$\alpha_n = \frac{1}{1 + \varepsilon_n}, \quad \varepsilon_n = (1+n)^{-p}, \quad 0 < p < 1.$$

удовлетворяют условиям теоремы 5.4.

Доказанные выше четыре теоремы о сходимости последовательности (5.32) носили глобальный характер в том смысле, что

выбор ε_n и α_n не зависел от выбора начального приближения z_0 . Если такую зависимость допустить, то можно еще ослабить условия на F и M , обеспечивающие сходимость итераций (5.32). Основную роль в этой ситуации играют дополнительные условия на ε_n и α_n , гарантирующие ограниченность $\|z_n\|$. Говоря точнее, можно в условиях (5.35) теоремы 5.1, условиях (5.40) теоремы 5.2 и условиях (5.43) теоремы 5.3 допустить зависимость L или N от $\|x\|$.

Формально доказательства теорем 5.1—5.3 теряют при этом силу, так как $\{\|z_n\|\}$, вообще говоря, перестает быть ограниченной. Однако если выбирать подходящее начальное приближение z_0 и наложить некоторые дополнительные условия на ε_n , α_n , то $\|z_n\|$ останутся ограниченными и доказательства теорем 5.1—5.3 можно сохранить.

Лемма 5.12. Пусть в предположениях теоремы 5.1

$$M(x) = x, \|F(x)\| \leq L(\|x\|), \quad (5.47)$$

$L(t)$ — неубывающая функция t . Пусть y — любое решение неравенства (5.1). Если для заданного $R_0 > 0$ и ε_n , α_n выполнены соотношения

$$R_0 > l\|y\|, \quad l > 1, \quad (5.48)$$

и

$$0 \leq \alpha_n \leq \frac{2(1-l_1)\varepsilon_n}{\varepsilon_n^2 + \frac{4L^2(R_0 + \|y\|)}{R_0^2} - l_1^2\varepsilon_n^2}, \quad (5.49)$$

$$\frac{1}{l} \leq l_1 < 1, \quad \|z_0 - y\| \leq R_0, \quad \text{тогда и для любого } n \geq 1$$

$$\|z_n - y\| \leq R_0.$$

Доказательство. Учитывая лемму 5.1 и проведя простые преобразования, получим

$$\|z_{n+1} - y\| \leq \|(1 - \alpha_n \varepsilon_n)(z_n - y) - \alpha_n(F(z_n) - F(y))\| + \alpha_n \varepsilon_n \|y\|.$$

Используя монотонность F , имеем

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - y\| \leq \{ \|z_n - y\|^2 [(1 - \alpha_n \varepsilon_n)^2 + \alpha_n^2 (\|F(z_n)\| + \|F(y)\|)^2]^{1/2} + \\ + \alpha_n \varepsilon_n \|y\|. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Предположим, что $\|z_k - y\| \leq R_0$ для всех $k \leq n$. Тогда

$$\|F(z_n)\| \leq L(R_0 + \|y\|),$$

$$\|F(y)\| \leq L\|y\|,$$

из (5.50) имеем

$$\|z_{n+1} - y\| \leq R_0 \left[\left\{ (1 - \alpha_n \varepsilon_n)^2 + \frac{4L^2(R_0 + \|y\|)\alpha_n^2}{R_0^2} \right\}^{1/2} + \alpha_n \varepsilon_n \frac{\|y\|}{R_0} \right].$$

Если α_n , ε_n , R_0 удовлетворяют условиям (5.48), (5.49), то согласно принципу индукции выражение в квадратных скобках ≤ 1 и утверждение леммы справедливо.

Смысл доказанной леммы в том, что подходящим выбором $\{\alpha_n\}$ можно обеспечить сходимость последовательности (5.32) при любом начальном приближении $z_0 \in Q$, однако сам выбор последовательности $\{\alpha_n\}$ теперь зависит от начального приближения.

Объединяя условия доказанной леммы с условиями теоремы 5.1, получим одну из возможных теорем о локальной сходимости процесса (5.32). Если в условиях теорем 5.2, 5.3 допустить зависимость N и L от $\|x\|$, то условия леммы 5.12 также обеспечат локальную сходимость (постоянные в соответствующих условиях будут зависеть от R_0 и $\|y\|$). Кроме того, в оставшихся двух случаях можно доказать несколько более точные леммы о локальной ограниченности. Принцип доказательства подобных лемм остается тем же самым, что и в лемме 5.12. Мы опускаем их формулировки и доказательства.

§ 6. Итеративная регуляризация на основе методов первого порядка (регуляризированный метод Ньютона)

Можно рассмотреть процессы, в которых следующее итеративное приближение к решению z_{n+1} находится из вариационного неравенства

$$(z - \Phi_p(z_n, z, \varepsilon_n, \alpha_n), z - x) \leq 0,$$

где $p \geq 1$. Разумеется, при этом необходима большая гладкость F и M , чем раньше. Как мы уже указывали в начале § 5, содержательная теория таких процессов получается только в случае $p=1$. Этот случай мы и рассмотрим.

Пусть F в (5.1) дважды дифференцируем по Гато и числовая функция $(F''(x+th)h^2, h)$ интегрируема на $(0, 1)$ по t при любых x , $x+th \in Q$. Предположим также, что

$$\|F''(x)\| \leq N(\|x\|), \quad x \in Q, \quad (5.51)$$

где $N(t)$ — некоторая неубывающая функция t ,

$$(F'(x)h, h) \geq 0, \quad x \in Q, \quad h \in B. \quad (5.52)$$

Условие (5.52) обеспечивает монотонность оператора F . Условие (5.51) заведомо обеспечивает, например, хеминепрерывность. Как и в § 4, предположим, что нана пара пространств B и B^* такова, что в B существует всюду определенный сильно монотонный оператор M из B в B^* , удовлетворяющий (5.51) и (5.12) с $\gamma(t) = =t$ и обладающий достаточной гладкостью.

В случае, когда B — гильбертово пространство, можно положить $M(x)=x$. В этом случае гладкость M конечно обеспечена.

При $p=1$ последовательность точек $z_n \in Q$ порождается следующим образом. Если z_{n-1} уже задано, то z_n — решение вариационного неравенства

$$(F(z_{n-1}) + \varepsilon_{n-1}M(z_{n-1}) + (F'(z_{n-1}) + \varepsilon_{n-1}M'(z_{n-1}))(x - z_{n-1}), x - w) \leq 0, \quad w \in Q. \quad (5.53)$$

Если $\varepsilon_n \equiv 0$, то описанный метод можно назвать методом Ньютона для решения вариационного неравенства (5.1). Метод (5.53) естественно назвать регуляризированным методом Ньютона, полученным применением итеративной регуляризации к обычному методу Ньютона. Регуляризированные приближения Ньютона существуют и единственны при любом $\varepsilon_{n-1} > 0$. Действительно, оператор в неравенстве (5.53), очевидно, непрерывно и сильно монотонный, так как $M'(z_n)$ — сильно положительный линейный оператор (в силу (5.12)). Поэтому к неравенству (5.53) применимы все стандартные теоремы существования и единственности [70, 115].

В противоположность этому собственно метод Ньютона ($\varepsilon_n \equiv 0$), вообще говоря, нереализуем, если требовать только выполнения (5.51) и (5.52). Предположим, что решение y вариационного неравенства (5.14) существует. В отличие от § 5, для того чтобы построить сходящийся к y процесс (5.53), необходимо знать какую-либо априорную оценку $\|y\|$, даже если правая часть (5.51) не зависит от $\|x\|$.

Пусть

$$\|y\| \leq d. \quad (5.54)$$

При подходящем выборе $\{\varepsilon_n\}$ и начального приближения z_0 последовательность $\{z_n\}$ в (5.53) сильно сходится к y . Справедлива

Теорема 5.5. Пусть справедливы предположения леммы 5.6. Если операторы F и M удовлетворяют условиям (5.51), (5.52), оператор M — условию (5.12) с $\gamma(t) = t$, а последовательность $\{\varepsilon_n\}$ и начальное приближение $z_0 \in Q$ — условиям:

- 1) $1 \leq \varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n \leq l$ (l — некоторое фиксированное число);
- 2) $\|F''(x)\| + \varepsilon_n \|M''(x)\| \leq N(\|x\|) \quad \forall x \in Q, \quad n = 0, 1, \dots;$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0;$
- 4) $\frac{2\varepsilon_0}{N(3d_1)} \leq d_1;$
- 5) $d_1 \geq \sup \{\|M(y)\|, \|y\|, \sup_n \|M(x_{\varepsilon_n})\|\};$
- 6) $\frac{\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_n \varepsilon_{n-1}} \leq \frac{2(1-l)q}{N(3d_1)d_1};$
- 7) $\frac{N(3d_1)\|z_0 - x_{\varepsilon_0}\|}{2\varepsilon_0} \leq q < \frac{1}{l};$

то справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - y\| = 0.$$

Доказательство теоремы следует из общей схемы § 4. При этом используется та же функция Ляпунова Δ , что и в § 5.

Лемма 5.9 позволяет без труда оценить $\|z_n - x_{n-1}\|$ через Δ_{n-1} и тем самым получить соотношение типа (5.29) (см. [31], [85]):

$$\|z_n - x_{n-1}\| \leq \frac{N(S_{n-1})}{2\varepsilon_{n-1}} \Delta_{n-1}^2,$$

$$S_{n-1} = \max_{0 \leq t \leq 1} \|z_{n-1} + t(x_{n-1} - z_{n-1})\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \|z_{t,n-1}\|.$$

Из этого соотношения сразу получается

$$\Delta_n \leq \frac{N(S_{n-1})}{2\varepsilon_{n-1}} \Delta_{n-1}^2 + \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Но в силу той же леммы 5.9

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \|M(x_{\varepsilon_n})\| \leq \frac{\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} d_1.$$

Поэтому окончательно имеем

$$\Delta_n \leq \frac{N(S_{n-1})}{2\varepsilon_{n-1}} \Delta_{n-1}^2 + \frac{\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} d_1. \quad (5.56)$$

Нужно показать, что $\Delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Докажем, что предположения теоремы ведут к выполнению следующих соотношений:

$$\begin{cases} \|z_n\| \leq 3d_1, \quad \forall n, \\ S_n \leq 3d_1, \end{cases} \quad (5.57)$$

$$\frac{N(3d_1) \Delta_n}{2\varepsilon_n} \leq q. \quad (5.58)$$

Из соотношения (5.58) следует, что $\Delta_n = O(\varepsilon_n)$ и, следовательно, в силу условия 3) из (5.55)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0.$$

Соотношения (5.57) и (5.58) доказываются по индукции. При $n=0$ соотношение (5.58) выполнено в силу условия 7) в (5.55). Проверим выполнение условия (5.57). Имеем

$$\begin{aligned} \|z_0\| &\leq \|z_0 - x_0\| + \|x_0 - y\| + \|y\| \leq 3d_1, \\ \Delta_0 &= \|z_0 - x_0\| \leq d_1 < 3d_1. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Так как сфера — выпуклое множество, то $z_{t,0} \in S(0, 3d_1) \quad \forall t \in$

$\in [0, 1]$, $S(0, 3d_1)$ — сфера с центром в 0 радиусом $3d_1$. Следовательно,

$$\|z_{t,0}\| \leq 3d_1 \quad \forall t \in [0, 1]$$

и

$$S_0 \leq 3d_1.$$

Итак, (5.57), (5.58) проверены при $n=0$.

Пусть они справедливы для какого-либо $n=k$, $k>1$. Покажем, что тогда они справедливы и для $n=k+1$. В силу неравенства (5.56) и предположений (5.57), (5.58), (5.55) имеем

$$\frac{N(3d_1) \Delta_{k+1}}{2\varepsilon_{k+1}} \leq q,$$

т. е. (5.58) выполнено при $n=k+1$. Так как последовательность ε_n монотонно убывает, то $\Delta_{k+1} = \|z_{k+1} - x_{k+1}\| \leq d_1 < 3d_1$. Кроме того, в силу неравенства, аналогичного (5.59),

$$\|z_{t,k+1}\| \leq 3d_1.$$

Как и в случае $n=0$, из этих двух неравенств следует

$$S_{k+1} \leq 3d_1,$$

т. е. (5.57) справедливо и при $n=k+1$.

Для завершения доказательства остается еще раз сослаться на лемму (5.6), из которой следует сильная сходимость x_n к y .

Условия (5.55) выглядят очень громоздко, и на первый взгляд не ясно, можно ли вообще всем им удовлетворить. Покажем, что, фиксируя $l>1$ и q , распоряжаясь только выбором d_1 и ε_0 , можно по крайней мере для некоторых $M(x)$ при любом начальном приближении $z_0 \in Q$, добиться выполнения всех условий теоремы. Выберем какие-либо l , q , d_1 , $lq<1$. Дальнейшие ограничения на эти параметры наложим в процессе рассуждений. Прежде всего заметим, что существует оценка $\|x_\varepsilon\|$, не зависящая от ε :

$$\|x_\varepsilon\| \leq \|y\| + \|M(y)\|. \quad (5.60)$$

Она легко следует из общей оценки (5.23), примененной к неравенствам (5.1) и (5.13).

Положим

$$\varepsilon_0 = \frac{N(3d_1) d_1}{2}. \quad (5.61)$$

Если при этом выполнено 7) из (5.55), то не меняем d_1 , в противном случае выбираем d_1 так, чтобы

$$\frac{\|z_0 - x_{\varepsilon_0}\|}{d_1} \leq q < \frac{1}{l}. \quad (5.62)$$

Это можно сделать в силу (5.60). Тем самым выполнится условие 7) в (5.55).

Последовательность $\{\varepsilon_n\}$ выбираем, например, из рекуррентного соотношения

$$\frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_{n-1}} = \frac{2(1-lq)q}{N(3d_1)d_1},$$

т. е.

$$\varepsilon_n = \frac{1}{1/\varepsilon_0 + n2(1-lq)q/(N(3d_1)d_1)}. \quad (5.63)$$

Очевидно, $\{\varepsilon_n\}$ удовлетворяет условию 3) в (5.55), кроме того, отношение $\varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n$ убывает при $n \rightarrow \infty$. Но

$$\varepsilon_0/\varepsilon_1 = 1 + (1-lq)q < 2.$$

Поэтому, выбирая $l \geq 2$, $lq < 1$, мы удовлетворим условию 1) в (5.55).

Нетрудно выделить важный частный случай, когда условие 2) в (5.55) заведомо выполняется при любых положительных ε_n . Это случай линейного оператора $M(x)$, в частности $M(x) = x$. Если $M(x) = x$ (или $M(x) = Ax$, $A > 0$), то нужная последовательность $\{\varepsilon_n\}$ строится так: сначала выбираем $l > 2$ и q такие, что $lq < 1$. Затем выбираем d_1 так, чтобы выполнялось (5.62), ε_0 определяем из (5.61) и ε_n — из (5.63). В более общем случае, когда $M \neq E$ (нелинейный $M(x)$), нетрудно (проводя аналогичные рассуждения) показать выполнение всех условий (5.55) для последовательности (5.63), если z_0 выбрано близко к x_{ε_0} . Детали этих рассуждений читатель может воспроизвести самостоятельно.

§ 7. РА для решения вариационных неравенств

Конструкции итеративных аппроксимаций могут быть использованы при построении РА для отображений, связанных с вариационными неравенствами. Эти отображения возникают следующим образом.

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое множество, элементами которого являются операторы F (из B в B^*). Каждому F из $\mathcal{F}$ поставим в соответствие множество $K_F \subseteq B$ решений вариационного неравенства (5.1). Полученное отображение $G(F)$ естественно связано с рассматриваемой нелинейной проблемой. Для него мы и будем строить РА.

Всюду ниже $\mathcal{F}$ состоит из таких F , для которых выполнены все условия леммы 5.6 хотя бы для одного подходящего фиксированного отображения M . Примером такого множества $\mathcal{F}$ является множество всех однозначных монотонных хеминепрерывных операторов F на Q , удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям роста при $\|x\| \rightarrow \infty$.

Способы построения семейства непрерывных отображений R_α , аппроксимирующего значения соответствующего отображения

$G(F)$, описаны в § 3—6. Ниже показано, что в некоторых случаях на основе этих семейств можно построить также и РА для $G(F)$ (на всем D_G или по крайней мере на подмножествах D_G) на основе выбора подходящей функции $\alpha(\delta)$.

Пусть R_ϵ , $\epsilon > 0$, — семейство отображений $\mathcal{F}$ в B , определенное равенством $R_\epsilon(F) = x_\epsilon$, где x_ϵ — решение (5.13) и F — любой элемент из $\mathcal{F}$. Превратим $\mathcal{F}$ в метрическое пространство следующим образом. Предполагаем, что существует некоторая неубывающая функция $\psi(t) > 0$ такая, что

$$\sup_{x \in Q} \frac{\|F^{(1)}(x) - F^{(2)}(x)\|}{\psi(\|x\|)} < \infty \quad \forall F^{(1)}, F^{(2)} \in \mathcal{F}$$

(под $\|F^{(1)}(x) - F^{(2)}(x)\|$ понимается α -расстояние между соответствующими множествами, если $\mathcal{F}$ содержит и многозначные отображения).

Положим по определению

$$\rho(F^{(1)}, F^{(2)}) = \sup_{x \in Q} \frac{\|F^{(1)}(x) - F^{(2)}(x)\|}{\psi(\|x\|)}. \quad (5.64)$$

Теорема 5.6. Семейство R_ϵ образует РА для отображения G , если в $\mathcal{F}$ ввести метрику (5.64).

Доказательство. Действительно, пусть $\rho(\tilde{F}, F) \leq \delta$ и $G(F) \neq \emptyset$. Тогда в силу предположений относительно $\mathcal{F}$ в $G(F)$ существует элемент y , удовлетворяющий (5.14). Далее,

$$\|R_\epsilon(\tilde{F}) - y\| \leq \|R_\epsilon(\tilde{F}) - R_\epsilon(F)\| + \|R_\epsilon(F) - y\|. \quad (5.65)$$

В силу леммы 5.9

$$\|R_\epsilon(\tilde{F}) - R_\epsilon(F)\| = \gamma^{-1} \left(\frac{\|\tilde{F}(x_\epsilon) - F(x_\epsilon)\|}{\epsilon} \right) \leq \gamma^{-1} \left(\frac{\psi(c)\delta}{\epsilon} \right). \quad (5.66)$$

Здесь мы учли, что $\|x_\epsilon\| \leq c$, c — постоянная, зависящая только от y и M .

Так как в силу леммы 5.6

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|R_\epsilon(F) - y\| = 0,$$

то из (5.65), (5.66) следует, что если $\epsilon(\delta)$ выбрана так, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta/\epsilon(\delta) = 0,$$

то

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\rho(\tilde{F}, F) \leq \delta} \|R_{\epsilon(\delta)}(\tilde{F}) - y\| = 0. \quad (5.67)$$

Описанные выше отображения $G(F)$, $R_\epsilon(F)$ зависят и от области Q . Регуляризирующие свойства семейства $R_\epsilon(F, Q)$ по отношению к возмущениям области Q устанавливаются с помощью

леммы 5.10. Множество областей Q можно превратить в метрическое пространство, введя, например, метрику Хаусдорфа.

Пусть выполнены предположения леммы 5.10. Тогда

$$\|R_\varepsilon(\tilde{Q}) - R_\varepsilon(Q)\| \leq \rho_D(Q, \tilde{Q}) / \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{L} \right)^{1/2} \right\}, \quad (5.68)$$

$$D \geq \|y\| + \max_\varepsilon \frac{\varepsilon}{L} \|F(x_\varepsilon)\|.$$

Пусть расстояние Хаусдорфа $\alpha(Q, \tilde{Q}) \leq \delta$. Используя известную оценку $\rho_D(Q, \tilde{Q}) = O(\alpha(Q, \tilde{Q}))^{1/2}$ [71] и неравенство, аналогичное (5.65), получим

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\alpha(Q, \tilde{Q}) \leq \delta} \|R_{\varepsilon(\delta)}(\tilde{Q}) - y\| = 0,$$

если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{1/2} / \varepsilon^2(\delta) = 0.$$

Покажем теперь, как следует выбирать правило останова $n(\delta)$ итерационных последовательностей, полученных с помощью принципа итеративной регуляризации, чтобы получился итерационный регуляризирующий алгоритм. Наши рассуждения базируются на том, что стабилизация итеративной последовательности к траектории вспомогательных точек (решений неравенств Браудера—Тихонова) происходит равномерно относительно выбора оператора F из пространства $\mathcal{F}$ при надлежащем определении $\mathcal{F}$. При этом пространство $\mathcal{F}$, вообще говоря, свое для каждого конкретного итеративного метода аппроксимации.

Исследуем сначала регуляризирующие свойства итеративно регуляризованных методов нулевого порядка. Предположим, что совокупность $\mathcal{F}$ состоит из операторов, удовлетворяющих сформулированным выше требованиям, и, кроме того, каждый оператор из $\mathcal{F}$ обладает свойством (5.35), (5.40) или (5.43) соответственно с одними и теми же L и N . Метрика в $\mathcal{F}$ определяется, как и выше, формулой (5.64). Выбор функции ψ обычно связан с конкретной задачей и конкретным характером возмущений F и на ход дальнейших рассуждений не влияет.

Зафиксируем $z_0 \in Q$ и последовательности α_n, ε_n . Пусть семейство операторов R_n — итерационная аппроксимация $G(F)$, образуется следующим образом:

$$R_n(\tilde{F}) = z_n, \quad \tilde{F} \in \mathcal{F},$$

а z_n определяется последовательностью (5.32) с заменой F на $\tilde{F}$. Таким образом, R_n — оператор действия (на $\tilde{F}$ и z_0) n шагов итерационного процесса (5.32).

Пусть α_n и ε_n удовлетворяют условиям теоремы 5.1, а для $\tilde{F}$ и F выполнены общие предположения а) и б) перед теоремами 5.1—5.4.

Пусть $\rho(\tilde{F}, F) \leq \delta$, $G(F) \neq \emptyset$ и элемент $y \in G(F)$ удовлетворяет неравенству (5.14). Тогда

$$\|R_n(\tilde{F}) - y\| \leq \underbrace{\|z_n - R_{\varepsilon_n}(\tilde{F})\|}_I + \underbrace{\|R_{\varepsilon_n}(\tilde{F}) - R_{\varepsilon_n}(F)\|}_{II} + \underbrace{\|R_{\varepsilon_n}(F) - y\|}_{III}, \quad (5.69)$$

здесь R_{ε_n} — семейство операторов, порожденных аппроксимацией Браудера—Тихонова.

Пусть $\delta \rightarrow 0$. Выберем $n(\delta)$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} n(\delta) = \infty,$$

так, чтобы выполнялось соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta/\varepsilon_{n(\delta)} = 0. \quad (5.70)$$

Слагаемые II и III в правой части (5.69) стремятся к 0 при $\delta \rightarrow 0$, если выполнено условие (5.70). Покажем, что это справедливо и для слагаемого I. Слагаемое I, очевидно, совпадает с Δ_n (в обозначениях теорем 5.1—5.3) и удовлетворяет тем же разностным неравенствам, только вместо F во всех рассуждениях нужно брать $\tilde{F}$. Это последнее обстоятельство повлияет только на оценку $\|x_n - x_{n-1}\|$ из (5.39). Теперь требуется оценить $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}\|$. Как и раньше,

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}\| \leq \left| \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}} \right| \|M(\tilde{x}_{\varepsilon_n})\|.$$

В силу (5.66) (если $\gamma(t) = ct$)

$$\|x_{\varepsilon_n} - \tilde{x}_{\varepsilon_n}\| \leq \frac{1}{c} \frac{\delta}{\varepsilon_n}.$$

Окончательно имеем

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}\| \leq \left| \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}} \right| O\left(\frac{\delta}{\varepsilon_n}\right). \quad (5.71)$$

Неравенство (5.71) в совокупности с условием (5.70) означает, что $\Delta_n(\tilde{F})$ при $0 \leq n \leq n(\delta)$ удовлетворяют одним и тем же рекуррентным соотношениям (таким же, как в теоремах 5.1—5.3) независимо от конкретного выбора $\tilde{F}$. Поэтому при выполнении условия (5.70)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta_{n(\delta)}(\tilde{F}) = 0. \quad (5.72)$$

Окончательно, если выполнено (5.70), то для $R_{n(\delta)}$ справедливо соотношение типа (5.67).

В частности, некоторый метод (5.32) с фиксированными $\{\alpha_n\}$ и $\{\varepsilon_n\}$ и $\varepsilon_n \downarrow 0$ порождает РА для отображения $G(F)$, если в каче-

стве приближения к $G(F)$ брать член последовательности (5.32), образованной по оператору $\tilde{F}$ с номером $n(\delta)$ таким, что

$$\varepsilon_{n(\delta)} \geq \sqrt[3]{\delta}, \text{ но } \varepsilon_{n(\delta)+1} < \sqrt[3]{\delta}.$$

Совершенно аналогично можно установить, что описанная выше аппроксимация порождает РА и в условиях теорем 5.2—5.4 соответственно в подходящих множествах $\mathcal{F}$.

Используя лемму 5.12, можно аналогично предыдущему показать, что $R_n(F)$ порождает РА также и в том случае, когда все F из $\mathcal{F}$ удовлетворяют предположениям этой леммы. Тогда описанное семейство R_n образует РА на подмножестве $D \subset \mathcal{F}$ таких операторов F , для которых $G(F) = y$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям (типа априорного условия $\|y\| < d$, d задано).

Отображения $R_n(F)$ зависят также и от области Q . Лемма 5.10 позволяет установить регуляризующие свойства этих отображений по отношению к возмущению области. Метод исследования сходимости $R_{n(\delta)}(\tilde{Q})$ к y такой же, как и выше в случае возмущения F . Нужно только вместо леммы 5.9 использовать лемму 5.10. В частности, справедливо соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\alpha(Q, \tilde{Q}) \leq \delta} \|R_{n(\delta)}(\tilde{Q}) - y\| = 0,$$

если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{1/2} / \varepsilon_{n(\delta)}^2 = 0. \quad (5.73)$$

Аналогично тому, как это сделано выше, можно показать, что семейство отображений $R(n, F, z_0(F), d) = z_n$, z_n — результат действия n шагов итеративного процесса типа метода Ньютона (5.53), порождает при соответствующем выборе $n(\delta)$ РА для отображения $G(F)$ по крайней мере в тех точках $F \in \mathcal{F}$, для которых выполнено условие (5.54). Класс $\mathcal{F}$ в данном случае — множество операторов F , удовлетворяющих одновременно условиям (5.51), (5.52) с одной и той же функцией $N(\|x\|)$.

Разумеется, метрика на $\mathcal{F}$ вводится с помощью формулы (5.64). Исследование поведения $R_{n(\delta)}(\tilde{F})$ проводится с помощью неравенства (5.69). Используя соотношения (5.71), (5.70) и доказательство теоремы 5.5 из тех же соображений, что приведены выше, получаем, что и в этом случае величины $\Delta_n(F)$ при $0 \leq n \leq n(\delta)$ удовлетворяют одному и тому же неравенству типа (5.58), независимо от конкретного выбора $\tilde{F}$ из множества $\mathcal{F}$, $\rho(\tilde{F}, F) \leq \delta$. Следовательно, выполняется предельное соотношение (5.72) [12].

Сказанное выше можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 5.7 (о правилах остановки). *В предположениях теорем 5.1—5.4 и 5.5 правило остановки (5.70) порождает итеративные регуляризующие алгоритмы при условии использования итеративных аппроксимаций (5.32) и (5.53).*

§ 8. Оценки скорости сходимости методов итеративной регуляризации

Получение оценок скорости сходимости алгоритмов итеративной регуляризации, как и любых аппроксимаций решений некорректных задач, возможно только при наложении каких-либо дополнительных априорных условий на данные задачи.

Согласно общей схеме изучения сходимости таких алгоритмов задача оценки скорости сходимости будет решена, если удастся:

1) получить оценку скорости стабилизации изучаемой итеративной последовательности к траектории $\{x_{\varepsilon_n}\}$ точек Браудера—Тихонова (решений неравенств (5.13));

2) оценить скорость сходимости точек Браудера—Тихонова к предельной (y) в лемме 5.6.

Решение первой части задачи обычно удается получить, не привлекая дополнительные априорные соображения. Например, существует много результатов о скорости сходимости к 0 последовательности из леммы 4.5. Из них автоматически следуют оценки скорости стабилизации последовательности (5.32) в условиях теорем 5.1—5.4. Доказательство теоремы 5.5 о методе (5.53) содержит такую оценку непосредственно.

Основные трудности возникают при решении второй части задачи — оценке скорости сходимости последовательности $\{x_\varepsilon\}$ в лемме 5.6. Наиболее полные результаты здесь получены в случае, когда область Q совпадает со всем пространством B . При достаточно общих предположениях существует оценка скорости сходимости $\|x_\varepsilon - y\|$ снизу [21].

Теорема 5.8. Пусть M и F — монотонные операторы, имеющие непрерывную производную в окрестности точки y , $Q = B$,

$$M(y) \neq 0. \quad (5.74)$$

Тогда

$$\|y - x_\varepsilon\| \geq \varepsilon \text{ const}. \quad (5.75)$$

Доказательство. Действительно, x_ε удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon M(x_\varepsilon) + F(x_\varepsilon) = 0.$$

Кроме того,

$$\varepsilon M(y) + F(y) = \varepsilon M(y).$$

Следовательно,

$$\varepsilon [M(y) - M(x_\varepsilon)] + F(y) - F(x_\varepsilon) = \varepsilon M(y).$$

Преобразуем теперь это равенство, пользуясь дифференцируемостью M и F :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left\{ \int_0^1 M'(x_\varepsilon + t(y - x_\varepsilon))(y - x_\varepsilon) dt \right\} + \\ & + \int_0^1 F'(x_\varepsilon + t(y - x_\varepsilon))(y - x_\varepsilon) dt = \varepsilon M(y). \end{aligned}$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$y - x_\varepsilon = \varepsilon P_\varepsilon^{-1} M(y),$$

здесь P_ε — линейный оператор вида

$$P_\varepsilon = \varepsilon \int_0^1 M'(x_\varepsilon + t(y - x_\varepsilon)) dt + \int_0^1 F'(x_\varepsilon + t(y - x_\varepsilon)) dt.$$

В силу сделанных предположений оператор P_ε ограничен равномерно по ε и обратим. Кроме того,

$$\overline{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}} \|P_\varepsilon^{-1} M(y)\| > 0,$$

так как в противном случае $M(y) = 0$, что противоречит (5.74). Поэтому

$$\|y - x_\varepsilon\| > \text{const } \varepsilon.$$

В случае нарушения условия (5.74) теорема 5.8 несправедлива. Тогда $x_\varepsilon \equiv y$. Требование гладкости M и F также существенно. При его нарушении скорость сходимости может быть большей, чем это допустимо соотношением (5.75) (см. гл. VI).

Следствие. Для всех допустимых в смысле теоремы 5.5 последовательностей $\{\varepsilon_n\}$ для метода (5.53) при выполнении (5.74) справедливо соотношение

$$\|z_n - y\| = O(\|x_n - y\|). \quad (5.76)$$

Для метода (5.32) при выполнении (5.74) справедливо соотношение

$$\|z_n - y\| \leq \|x_n - y\| \left(1 + \frac{\varphi(\varepsilon_n, \alpha_n)}{\varepsilon_n} \right), \quad (5.77)$$

где $\varphi(\varepsilon_n, \alpha_n)$ — оценка скорости стабилизации z_n к x_n в (5.32). Действительно, для обоих методов

$$\|z_n - y\| \leq \|x_n - y\| + \|z_n - x_n\|,$$

но в силу теоремы 5.5 для метода (5.53) $\|z_n - x_n\| = O(\varepsilon_n)$ на всех допустимых последовательностях $\{\varepsilon_n\}$. В силу (5.75) отсюда следует (5.76). Соотношение (5.77) получается аналогично.

В случае нарушения условия (5.74) стабилизация последовательностей (5.32) и (5.53) происходит непосредственно к точке и утверждение следствия перестает быть справедливым.

Теорема 5.9. Пусть $\gamma(t) = t$ (в условии (5.12)). Если оператор F имеет непрерывную вторую производную в окрестности y и $\exists v$ такой, что

$$M(y) = F'(y)v, \quad (5.78)$$

$$\|v\|N < 2, \quad (5.79)$$

N — оценка сверху для $\|F''\|$, то при достаточно малом ε

$$\|y - x_\varepsilon\| = O(\varepsilon). \quad (5.80)$$

Доказательство. В обозначениях теоремы 5.8

$$\begin{aligned} \|y - x_\varepsilon\| &= \|\varepsilon P_\varepsilon^{-1} P v\| = \|\varepsilon P_\varepsilon^{-1} [P_\varepsilon + P - P_\varepsilon] v\| \leq \\ &\leq \varepsilon \|v\| + \|P - P_\varepsilon\| \|v\|. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\|P_\varepsilon^{-1}\| = 1/\varepsilon$, $\gamma(t) = t$. Далее,

$$\|P - P_\varepsilon\| \leq \varepsilon \bar{M} + \frac{1}{2} N \|y - x_\varepsilon\|,$$

$$\bar{M} = \sup_\varepsilon \left\| \int_0^1 M'(x_\varepsilon + t(y - x_\varepsilon)) dt \right\|.$$

Подставляя в предыдущее неравенство, получим

$$\|y - x_\varepsilon\| \leq \varepsilon \frac{\|v\| (1 + \bar{M})}{1 - 1/2 N \|v\|} = O(\varepsilon).$$

Условие (5.78) необходимо для оценки (5.80) на всем классе рассматриваемых операторов. В случае линейного F и $M = E$ это условие истокообразной представимости линейного уравнения первого рода. Оно необходимо для сходимости аппроксимации Браудера—Тихонова со скоростью $O(\varepsilon)$ (см. гл. IV, § 3). Условие (5.79) в линейном случае автоматически выполняется.

Следствие. При выполнении условий теоремы 5.9 и условий теоремы 5.5 метод (5.53) имеет асимптотическую оценку скорости сходимости $O(\varepsilon_n)$. Оценка (5.80) позволяет при помощи (5.77) оценить также скорость сходимости процесса (5.32):

$$\|z_n - y\| = O(\varepsilon_n + \Phi(\alpha_n, \varepsilon_n)).$$

В случае $Q \neq B$ теорема 5.8 перестает быть справедливой.

Приведем простой пример. Пусть B — конечномерное евклидово пространство $M = E$, $F(x) = \vec{c}$ (постоянный вектор), Q описывается системой линейных ограничений, $x \geq 0$, $Ax \leq b$. Соответствующее вариационное неравенство (5.1) описывает экстремальную точку в задаче линейного программирования. В этом случае, начиная с некоторого ε_0 , зависящего от задачи, приближения Браудера—Тихонова x_ε совпадают с y [88, 114].

Итеративные методы решения типичных классов нелинейных некорректных задач

В этой главе мы продемонстрируем возможности применения методов, основанных на итеративной регуляризации в традиционных областях прикладной математики. С помощью итеративной регуляризации становится возможным стандартное построение обоснованных итеративных методов в тех случаях, когда классическая техника или вообще не работает, или наталкивается на очень большие трудности.

В таких областях прикладной математики, как теория оптимизации, теория игр, математическое программирование и т. д., возникавшие задачи, как правило, не делились на корректные и некорректные, и связанная с этим проблематика вообще не анализировалась. Более того, само понятие корректности, например в задаче выпуклой оптимизации, было осознано сравнительно недавно.

Оказывается, что обоснование и применение классических итерационных методов наталкиваются на принципиальные трудности именно в случае, когда решаемая задача некорректна. На этом и основана по существу эффективность алгоритмов на основе итеративной регуляризации.

§ 1. Алгоритмы минимизации выпуклых функционалов. Решение нелинейных уравнений

Как уже упоминалось в начале предыдущей главы, «классическая» идеология построения итеративных методов испытывает принципиальные затруднения, в частности, в попытках построить сильно сходящиеся итеративные методы минимизации выпуклых функционалов на замкнутом выпуклом множестве Q в гильбертовом пространстве H . Так как градиент (субградиент) выпуклого непрерывного функционала — монотонный оператор, то развитая в гл. V теория итеративной регуляризации полностью применима в этом случае. Можно, например, непосредственно использовать стандартные алгоритмы нулевого и первого порядков (§ 5, 6 гл. V).

Так, теорема 5.1 описывает в рассматриваемом частном случае условия сильной сходимости нового метода недифференцируемой

выпуклой оптимизации. Этот метод в отличие от всех до сих пор существующих вырабатывает минимизирующую последовательность, сильно сходящуюся к точке минимума как в конечномерном, так и в бесконечномерном случае, не требуя никакого дополнительного усиления условия выпуклости. Чтобы условия теоремы 5.1 выполнялись, достаточно предположить, что $f(x)$ — непрерывный выпуклый функционал, $D(f) \supseteq Q$, $\text{int } Q \neq \emptyset$, и его субградиент удовлетворяет условиям роста (5.35), или начальное приближение удовлетворяет условиям леммы 5.12.

В задаче минимизации выпуклого функционала можно предложить и другую, отличную от (5.32), модификацию метода проекции градиента. Она основана на том, что в случае потенциального F ($F = \text{grad } f$) оператор в правой части представления (5.8) не растягивающий при достаточно малом α .

Лемма 6.1. *Если F потенциален и $\|F'(x)\| \leq N$, $x \in Q$, то оператор $T(x) = \mathcal{P}_Q(x - \alpha F(x))$ нестягивающий из Q в Q при $0 < \alpha \leq 2/N$.*

Доказательство этой леммы состоит в непосредственной проверке с использованием самосопряженности F' (см. доказательство теоремы 5.3).

Итак, в рассматриваемом случае задача нахождения точки минимума сводится к нахождению неподвижной точки нестягивающего отображения. Поэтому можно применить теорему 5.4. Непосредственно из нее получаем следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Пусть выпуклый функционал f имеет вторую производную f'' , удовлетворяющую условию $\|f''(x)\| \leq N$, $x \in H$, $\text{argmin } f \neq \emptyset$. Тогда процесс*

$$z_{n+1} = \frac{1}{1 + (1 + n)^{-p}} \mathcal{P}_Q(z_n - \alpha \text{grad } f(z_n)), \quad (6.1)$$

$$0 < p < 1, \quad 0 < \alpha \leq 2/N, \quad z_0 \in H,$$

сильно сходится к точке $\text{argmin}_Q f$, обладающей минимальной нормой.

Принцип итеративной регуляризации носит универсальный характер: для конкретной нелинейной задачи в качестве базового метода не обязательно брать методы нулевого и первого порядков.

Пусть снова выполнены предположения леммы 6.1 и, кроме того,

$$\text{diam } Q = D < \infty. \quad (6.2)$$

Хорошо известно, что в этих предположениях метод условного градиента [35] (метод Франк—Вольфа) порождает только слабо сходящиеся в общем бесконечномерном случае минимизирующие последовательности. Пользуясь общей схемой § 4 гл. V, нетрудно исследовать итеративно регуляризованный аналог этого метода.

Приведем базовый алгоритм условного градиента. Пусть точка z_n уже получена. Следующая точка z_{n+1} находится по правилу

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + \alpha_n (\bar{z}_n - z_n), \quad 0 \leq \alpha_n \leq 1, \\ \bar{z}_n &\in \operatorname{argmin}_{z \in Q} (f'(z_n), z - z_n), \\ \alpha_n &\in \operatorname{argmin}_{0 \leq \alpha \leq 1} f(z_n + \alpha (\bar{z}_n - z_n)). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Для упрощения выкладок предположим, что итеративная регуляризация проводится с оператором $M(x) = x$.

Теорема 6.2. Пусть выполнены условие (6.2), $M(x) = x$, $\varepsilon_n = 1/n^\nu$, $0 < \nu \leq \nu_0 < 1/2$, и предположения леммы 6.1. Тогда итеративно регуляризованный метод (6.3) сильно сходится к точке $\operatorname{argmin} f$, обладающей минимальной нормой.

Доказательство. При исследовании сходимости метода условного градиента (6.3) целесообразно воспользоваться функцией Ляпунова вида $u(x) = f(x) - \min_{x \in Q} f(x)$. Применим стандартную схему исследования § 4 гл. V с учетом того, что в рассматриваемом случае $M(x) = x$,

$$u(\varepsilon_n, x) = f(x) + \frac{\varepsilon_n}{2} (x, x) - \left[f(x_{\varepsilon_n}) + \frac{\varepsilon_n}{2} (x_{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}) \right].$$

Для величины $|u(\varepsilon_n, z_{n+1}) - u(\varepsilon_{n+1}, z_{n+1})|$ с учетом условий теоремы непосредственно получается оценка вида

$$\begin{aligned} |u(\varepsilon_n, z_{n+1}) - u(\varepsilon_{n+1}, z_{n+1})| &= O(\|x_{\varepsilon_n} - x_{\varepsilon_{n+1}}\|) = \\ &= O\left(\left|\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right|\right). \end{aligned}$$

Последняя оценка в приведенной цепочке равенств уже знакома читателю по § 5 гл. V.

Соотношение (5.29) в нашем случае имеет вид [35]

$$u(\varepsilon_n, z_{n+1}) \leq u(\varepsilon_n, z_n) - (1/c) u^2(\varepsilon_n, z_n),$$

где c — достаточно большая постоянная, зависящая от D и N . Кроме того, так как функция $f(x) + \frac{\varepsilon_n}{2} (x, x)$ сильно выпукла, то

$$u(\varepsilon_n, x) \geq \frac{\varepsilon_n}{4} \|x - x_{\varepsilon_n}\|^2. \quad (6.4)$$

В предположениях теоремы

$$\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Дальнейшее доказательство опирается на исследование разностного неравенства (неравенство типа (5.30))

$$u_{n+1} \leq u_n - 1/cu_n^2 + c_1/n.$$

Известный результат [35] состоит в том, что

$$u_n \leq O(1/\sqrt{n}).$$

Если учесть (6.4), то получим, что в предположениях теоремы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_{e_n}\| = 0.$$

Как это уже отмечалось выше, в случае, когда область Q в (5.1) совпадает со всем пространством, задача решения вариационного неравенства превращается в задачу решения операторного уравнения. Применение итеративных методов гл. V в этом случае обычно существенно упрощается. Например, в процессах (5.32) не нужно выполнять операцию проектирования. Наиболее существенно то, что в случае уравнения регуляризованный метод Ньютона (5.53) превращается в сравнительно легко реализуемый процесс — каждый его шаг заключается в решении соответственного линейного уравнения.

§ 2. Алгоритмы минимизации квадратичных функционалов.

Нелинейные процессы решения линейных задач

Квадратичный выпуклый функционал — простейший частный случай общего выпуклого функционала. Однако проблема его минимума на всем (бесконечномерном) пространстве или на выпуклом подмножестве пространства столь часто встречается в разнообразных приложениях, что на ней следует остановиться особо.

В каких случаях для решения проблемы минимума квадратичного функционала целесообразно использовать принцип итеративной регуляризации? Во-первых, его заведомо целесообразно использовать при построении алгоритмов минимизации, если область Q не совпадает со всем бесконечномерным пространством. По-другому получить сильно сходящиеся итеративные алгоритмы в этом случае пока не удастся. Во-вторых, при решении линейных задач (что эквивалентно нахождению минимума квадратичного функционала типа невязки во всем пространстве) часто используются нелинейные (с нелинейным оператором шага) итеративные процессы, например метод сопряженных градиентов, наискорейший спуск и др.

Для этих нелинейных процессов и в некорректном случае сравнительно легко удастся установить сходимость, т. е. аппроксимирующие свойства [111, 81]. Однако установление их регуляризующих свойств (правил останова $n(\delta)$) существенно более сложно. Полного решения этой проблемы в настоящее время еще не получено [41, 42, 80, 92].

Если же к упомянутым нелинейным методам применить итеративную регуляризацию, то получатся новые нелинейные итеративные методы, аналогичные по свойствам первоначальным, но для которых вопросы сходимости и устойчивости легко решаются по общей схеме исследования итеративно-регуляризованных процессов, приведенной в § 4 гл. V.

1. Задача минимизации квадратичного функционала на подмножестве Q гильбертова пространства H в разнообразных физических приложениях обычно возникает в следующей постановке. Найти решения линейного операторного уравнения вида $Ax=u$, где A — линейный ограниченный необратимый оператор, действующий в гильбертовом пространстве H (иногда из H_1 в H_2), причем балансовое соотношение усложнено требованием

$$x \in Q, \quad (6.5)$$

Q — замкнутое выпуклое множество в $H(H_1)$. Обычно множество Q устроено в некотором смысле «просто». Типичным примером такого множества является конус положительных функций (в L_2).

Требования $Ax=u$ и (6.5) могут оказаться противоречивыми. Естественнo расширить постановку задачи и переформулировать ее так: найти квазирешение уравнения на Q в смысле Иванова, т. е. минимизировать какую-либо обобщенную невязку. В качестве невязки можно брать, например, следующие функционалы:

$$f_1 = 1/2 \|Ax - u\|^2, \quad (6.6)$$

$$f_2 = 1/2 (g(A^*A)A^*Ax, x) - (g(A^*A)A^*u, x), \quad (6.7)$$

$$f_3 = 1/2 (g(A)Ax, x) - (g(A)u, x), \quad (6.8)$$

где $g(A)$ — положительная оператор-функция A такая, что $[g(A)]^{-1}$ существует.

Известно много линейных итеративных процессов для нахождения решений линейного операторного уравнения. Они, например, могут быть получены с использованием общего генератора линейных методов аппроксимации, описанного в гл. IV. Все эти процессы после соответствующего преобразования имеют вид

$$z_{n+1} = z_n - \alpha \operatorname{grad} f(z_n), \quad (6.9)$$

$$0 < \alpha < 2/N,$$

где $f(x)$ — функционал типа (6.6) — (6.8) при том или ином выборе функции g . Величина N для этих функционалов равна соответственно $\|A^*A\|$, $\|g(A^*A)A^*\|$, $\|g(A)A\|$. Модифицируя процесс (6.9) согласно формуле (6.1), получим аппроксимацию, сходящуюся к решению задачи минимизации обобщенной невязки на Q .

Если оператор A и правая часть вычисляются с ошибкой, например, $\|u_\delta - u\| \leq \delta$, то итеративный процесс типа (6.1) должен

быть дополнен правилом останова (5.70) (в нем $\varepsilon_n = \frac{1}{(1+n)^p}$).

В частности, можно положить

$$\varepsilon_n = \sqrt[p]{\delta}. \quad (6.10)$$

Если множитель перед оператором проектирования в (6.1) опустить, то полученный процесс сходится лишь слабо при $Q \neq H$ [37].

Во многих задачах проектирование на множество Q осуществляется очень просто, и любую процедуру, предназначенную для решения линейного некорректного уравнения итеративным методом типа (6.9), несложно дополнить так, что она в состоянии решать уже и нелинейную проблему, сформулированную выше.

2. Рассмотрим теперь итеративную регуляризацию некоторых классических нелинейных итеративных методов, предназначенных для решения линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве или для минимизации функционалов (6.6)–(6.8) на всем пространстве ($Q=H$).

Пусть $g(A)=E$, A — положительный самосопряженный оператор в H . В качестве базового метода рассмотрим какой-либо из α -процессов. Это достаточно широкий класс итеративных методов. В него (при $\alpha=0$) входит, в частности, метод наискорейшего спуска для минимизации функционала (6.8).

Общий вид α -процессов следующий [68]:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + \mu_n^{(\alpha)} (Az_n - u), \\ \mu_n^{(\alpha)} &= \begin{cases} \frac{(A^\alpha (Az_n - u), Az_n - u)}{(A^{1+\alpha} (Az_n - u), Az_n - u)}, & \text{если } Az_n \neq u, \\ 0, & \text{если } Az_n = u, \end{cases} \\ -1 &\leq \alpha < \infty, \quad z_0 \in H. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Лемма 6.2. Если A обратим и $(Ax, x) \geq c(x, x)$, $c > 0$, $c < \|A\|$, то процесс (2.16) сходится к точке $x^* = \arg \min_{x \in H} f_3$, причем справедливо неравенство

$$\|z_{n+1} - x^*\| \leq \sqrt{1 - \frac{c}{\|A\|}} \|z_n - x^*\|. \quad (6.12)$$

Доказательство. Рассмотрим очевидное неравенство

$$\|z_{n+1} - x^*\| \leq \|(E - \mu_n^{(\alpha)} A)(z_n - x^*)\|. \quad (6.13)$$

Возведя обе части (6.13) в квадрат, получим

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - x^*\|^2 &\leq \|z_n - x^*\|^2 \left(1 - 2\mu_n^{(\alpha)} \frac{(A(z_n - x^*), z_n - x^*)}{\|z_n - x^*\|^2} + \right. \\ &\quad \left. + (\mu_n^{(\alpha)})^2 \frac{\|A(z_n - x^*)\|^2}{\|z_n - x^*\|^2} \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Здесь мы предположили, что $\|z_n - x^*\| \neq 0$. В противном случае неравенство (6.12), очевидно, справедливо. Обозначим для краткости $z_n - x^* = \xi_n$. Из известного неравенства моментов и его следствия [68] имеем

$$\begin{aligned} (A\xi_n, \xi_n) &\geq -\frac{(A^{\alpha+2}\xi_n, \xi_n)}{(A^{\alpha+3}\xi_n, \xi_n)} (A\xi_n, A\xi_n), \\ -\frac{(A^{\alpha+2}\xi_n, \xi_n)}{(A^{\alpha+3}\xi_n, \xi_n)} &= \mu_n^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Воспользовавшись (6.15), в (6.14) получим

$$\|\xi_{n+1}\|^2 \leq \|\xi_n\|^2 \left(1 - \mu_n^{(\alpha)} \frac{(A\xi_n, \xi_n)}{\|\xi_n\|^2} \right). \quad (6.16)$$

Введя обозначение $\eta_n = A^{\alpha/2}\xi_n$, можно записать

$$\mu_n^{(\alpha)} = \frac{\|\eta_n\|^2}{(A\eta_n, \eta_n)}.$$

В силу условий леммы

$$\frac{1}{\|A\|} \leq \mu_n^{(\alpha)} \leq \frac{1}{c}, \quad c \leq \frac{(A\xi_n, \xi_n)}{\|\xi_n\|^2} \leq \|A\|.$$

Отсюда и из (6.16) получаем неравенство (6.12). Лемма доказана.

Лемма 6.2 доставляет нам необходимое при использовании принципа итеративной регуляризации неравенство типа (5.29), поэтому можно провести итеративную регуляризацию процесса (6.11). Формально она заключается в использовании на каждом шаге вместо оператора A оператора $A + \varepsilon_n A$ (это одна из мыслимых возможностей).

Теорема 6.3. Пусть A — самосопряженный положительный оператор, $A \geq 0$ в H и $g(A) = E$. Пусть множество $\operatorname{argmin}_{x \in H} f_3(x)$ не пусто. При выполнении условий

$$\begin{aligned} \varepsilon_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2} \right| = 0, \end{aligned} \quad (6.17)$$

итеративно регуляризованный процесс (6.11) сходится к решению задачи минимизации $f_3(x)$, обладающему минимальной нормой.

Доказательство проводится вполне аналогично доказательству теорем § 5 гл. V с использованием неравенства

$$\|z_{n+1} - x_n\| \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_n}{\|A\| + \varepsilon_n}} \|z_n - x_n\|,$$

вытекающего из (6.12).

Из общих рассуждений § 7 гл. V непосредственно следует, что если элемент u задан с погрешностью $\|u_\delta - u\| \leq \delta$, то правило останова (5.70) порождает РА вида $z_{n(\delta)}$ для рассматриваемой задачи минимизации. Аналогичное утверждение справедливо, если возмущается и оператор задачи, а именно если A_h — также положительный самосопряженный оператор и $\|A_h - A\| \leq h$, то то же правило останова порождает РА.

В случае произвольного ограниченного A можно рассмотреть аналоги процессов (6.11) для функционала (6.7). Утверждения леммы 6.2 и теоремы 6.3 очевидным образом переносятся и на этот случай. Заметим, что в отличие от линейных процессов (6.8), естественным образом порождающих регуляризующие алгоритмы, для нелинейных процессов типа (6.11) установление регуляризующих свойств самих этих процессов (без итеративной регуляризации) удалось выполнить пока только на некоторых подмножествах области определения A^{-1} [42, 80, 92].

Итеративная регуляризация, не усложняя итерации в вычислительном плане, позволяет получить такие процессы, сходимость и регуляризующие свойства которых совершенно стандартно проверяются уже на всей области определения A^{-1} .

§ 3. Алгоритмы итеративного решения общих задач математического программирования

В случае задания области Q в виде (5.10) появляются новые возможности конструирования итеративных алгоритмов, связанные с возникающими в этом случае новыми формами представления основной задачи (5.1).

1. При построении итеративных аппроксимаций решений (5.1) можно использовать систему Куна—Таккера (5.11).

Отметим, что система (5.11) — вариационное неравенство с оператором $F(x, p)$ в прямом произведении $B \times E_+^m$. Область задания Q в этом случае существенно более простая, $Q = Q_1 \times E_+^m$. Однако платой за переход к более простому множеству задания является некорректность задачи, связанной с (5.11), даже если первоначальная задача (5.1) была корректна! Например, если F удовлетворяет условию (5.12), то F на Q подобному условию уже не удовлетворяет.

К системе неравенств (5.11) (или одному неравенству в прямом произведении соответствующих пространств) можно применить развитую в гл. V теорию построения устойчивых итеративных методов решения. На этом пути, в частности, получают различные обобщения так называемых двойственных [88] методов выпуклого математического программирования, сходящиеся по прямым и двойственным переменным в общем бесконечномерном случае.

Проблема построения общих итеративных методов выпуклого математического программирования давно привлекает внимание исследователей. Многие попытки такого построения связаны так

или иначе с функцией Лагранжа (системой Куна—Таккера). Однако подходы, существовавшие до выдвижения принципа итеративной регуляризации (модифицированные функции Лагранжа, модификация монотонных отображений и т. п. [43, 44]), не позволяли получить в общем выпуклом случае сильно сходящиеся итеративные последовательности. При переходе от области Q к $\hat{Q}$ обычно существенно упрощается операция проектирования. Она производится покомпонентно на Q_1 и E_+^m . Это обстоятельство повышает возможность использования процесса (5.32) для задач математического программирования.

Выпишем в качестве примера соответствующие расчетные формулы для задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \min(c, x), \\ Ax \leq b - Q_2, \\ x \geq 0 - Q_1, \end{aligned} \quad (6.18)$$

здесь H — конечномерное евклидово пространство, c, b, x — векторы, A — некоторая матрица.

Оператор (5.11) для этой задачи имеет вид

$$F(x, p) = \{c + A^T p, -Ax + b\},$$

т. е. $F(x, p)$ — вектор, имеющий размерность «число переменных + число ограничений». Проектор $\mathcal{P}_{\hat{Q}}$ на множество $Q = \{x \geq 0, p \geq 0\}$ записывается совсем просто: $\mathcal{P}_{\hat{Q}}(x, p) = \{x_+, p_+\}$ (положительные компоненты x, p сохраняются, отрицательные заменяются на 0).

Окончательно процесс (5.32) имеет в этом случае вид (оператор M единичный)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= [x_n - \alpha_n(c + A^T p_n + \varepsilon_n x_n)]_+, \\ p_{n+1} &= [p_n + \alpha_n(Ax_n - b - \varepsilon_n p_n)]_+. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Процесс (6.19) сходится, например, если выполнены условия теоремы 5.2, причем $m=1$, а одна из возможных оценок запишется в виде

$$L \leq \max \left\{ \max_i \sum_j |a_{ij}|, \max_j \sum_i |a_{ij}| \right\},$$

a_{ij} — элементы матрицы A .

Метод (6.19) согласно теореме 5.2 сходится к решению прямой и двойственной задачи линейного программирования, обладающей суммарной минимальной нормой. Заметим, что конечномерность H не является ограничением. Тот же процесс (6.19) применим и в бесконечномерном случае с очевидными изменениями в записи задачи и расчетных формулах, вызванными тем, что матрицу A в (6.19) нужно трактовать как фиксированный набор элементов $H: (a_1, \dots, a_m)$.

В разнообразных экономико-математических моделях большую роль играет так называемая блочная задача линейного программирования [57]. Она отличается от стандартной задачи (6.18) специальной структурой матрицы A . Блочную задачу можно записать в виде

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^N (c_i, x_i), \\ A_i x_i \leq b_i, \\ \sum_{i=1}^N D_i x_i \leq d, \quad x_i \geq 0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Здесь c_i, x_i, b_i, d — векторы разных размерностей, A_i, D_i — матрицы.

Полагая

$$Q_1 = \prod_1^N \{A_i x_i \leq b_i, \quad x_i \geq 0\} = \prod_{i=1}^N Q_i,$$

записав соответствующую систему (5.11) и учитывая, что в данном случае

$$\widehat{F}(x, p) = \{c_1 + D_1^T p, \dots, c_N + D_N^T p, -(\sum_{i=1}^N D_i x_i - d)\},$$

а также вид проекции на Q_1 , можно конкретизировать процесс (5.32) для задачи (6.20) ($F_n = F$, M — единичный оператор):

$$x_i^{(n+1)} = \mathcal{P}_{Q_i}(x_i^{(n)} - \alpha_n(c_i + D_i^T p^{(n)} + \varepsilon_n x_i^{(n)})), \quad i = \overline{1, N}, \quad (6.21)$$

$$p^{(n+1)} = [p^{(n)} + \alpha_n(\sum_{i=1}^N D_i x_i^{(n)} - d - \varepsilon_n p^{(n)})]_+.$$

Условия его сходимости даются, например, теоремой 5.2. Процесс (6.21) является новым итеративным алгоритмом декомпозиции для блочной задачи линейного программирования.

2. Другая возможность конструирования итеративных алгоритмов для решения задачи математического программирования базируется на использовании штрафных функционалов типа (5.18) и представлении области Q в виде множества решений вариационного неравенства (5.19) (замечание 2 к лемме 5.6). Идея заключается в том, чтобы решать неравенство (5.19) каким-либо итеративным методом, основанным на принципе итеративной регуляризации. Если в качестве оператора M брать (пусть это возможно по условиям соответствующих теорем) сам оператор F в (5.1), то итерации будут сходиться к решению основной задачи.

В частности, процесс (5.32) применительно к неравенству (5.19) с $M=F$ принимает вид

$$z_{n+1} = \mathcal{D}_{Q_1} \left(z_n - \alpha_n \left(\varepsilon_n F(z_n) + \partial \left[\sum_{j=1}^m [\varphi_j(z_n)]_+^p \right] \right) \right), \quad p \geq 1. \quad (5.22)$$

Условия сходимости процесса (6.22) даются теоремами 5.1—5.3. Эти же теоремы позволяют учитывать неточности задания F и φ_j .

Так как обычно $Q_1=H$, то итерации (6.22) порождают серию весьма просто реализуемых итеративных методов решения задачи математического программирования. Если операторы F и $\partial \left[\sum_j [\varphi_j(x)]_+^p \right]$ имеют произвольный рост при $\|x\| \rightarrow \infty$, то на основании леммы 5.12 последовательность (6.22) сходится при условии, что ε_n, α_n выбираются еще и в зависимости от начального приближения.

Для решения неравенств (5.19) можно использовать и процесс типа (5.53) (регуляризованный метод Ньютона). Пусть $Q_1=H$. Для получения z_{n+1} , если z_n уже известно, требуется решить линейное уравнение вида

$$\varepsilon_n F(z_n) + \psi'(z_n) + [\varepsilon_n F'(z_n) + \psi''(z_n)](x - z_n) = 0. \quad (6.23)$$

При этом в (5.18) нужно брать $p > 2$ для обеспечения нужной гладкости участвующих в (6.23) операторов.

В представлении (5.10) возможны и ограничения типа равенств, например, если соответствующие φ_j — линейные функционалы (более общий случай, когда $|\varphi_j|$ — выпуклые функционалы). Слагаемые в (5.18), соответствующие этим ограничениям, можно брать в виде φ_j^2 .

Рассмотрим задачу выпуклого квадратичного программирования следующего вида:

$$\begin{aligned} \min [(Sx, x) + (c, x)], \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

В (6.24) (Sx, x) — положительно определенная квадратичная форма в евклидовом пространстве E_l . Одна из возможных конкретизаций алгоритма (5.53) для этого случая имеет вид (для ограничений в виде равенств $p=2$, для неравенств $p=3$)

$$\begin{aligned} z_{n+1} = z_n - [(\varepsilon_n S + A^* A) + 6 \{ (-z_n)_+ \}]^{-1} \times \\ \times [\varepsilon_n S z_n + \varepsilon_n c + A^* A z_n - A^* b - 3 \{ (-z_n)_+^2 \}], \end{aligned} \quad (6.25)$$

$\{ (-z_n)_+ \}$ — диагональная матрица с соответствующими элементами. Параметр N из условия (5.51) в данном случае равен 6.

Параметр d_1 нужно оценивать, исходя из конкретных данных задачи.

В частности, если использовать алгоритм (6.25) для нахождения ближайшей к нулю точки многогранника условий (6.24) (в этом случае $S=E$, $c=0$), то $d_1 \leq 2\|z\|$, где z — любая точка, удовлетворяющая ограничениям (6.24). Заметим еще, что согласно лемме Удзавы [114, 88] задача (6.24) с $(Sx, x) = s(x, x)$, где $s > 0$ достаточно мало, эквивалентна задаче линейного программирования (с $s=0$). Следовательно, процедура (6.25) позволяет устойчиво решать и задачу линейного программирования.

Процессы (6.22) и (6.23) сходятся в предположении строгой монотонности оператора F . Непосредственно аппроксимировать решение некорректного неравенства (5.1) этими итерациями нельзя (за исключением специальных задач типа задачи линейного программирования).

При потенциальном F , удовлетворяющем условиям сильной монотонности типа (5.12) и области Q_2 , удовлетворяющей условию регулярности Слейтера, можно оценить скорость сходимости соответствующих штрафных аппроксимаций (по нашей терминологии скорость сходимости аппроксимаций Браудера—Тихонова). Подобные результаты получены многими авторами.

Приведем типичный пример такого результата. Пусть f — потенциал для F и f_* — его минимальное значение на Q , тогда при выборе штрафной функции в виде (5.18) справедливо соотношение [36]

$$|f(x_n) - f_*| = O(\varepsilon_n^{q-1}), \quad (6.26)$$

$$1/p + 1/q = 1.$$

Из оценки (6.26) при тех или иных условиях сильной монотонности F типа (5.12) можно получить оценку величины $\|x - y\|$. В частности, при $\gamma(t) = t$ в (5.12) имеем оценку следующего вида:

$$\|x_n - y\| = O(\varepsilon_n^{\frac{q-1}{2}}). \quad (6.27)$$

Оценка (6.27) в совокупности с оценками скорости стабилизации последовательностей (5.32), (5.53) позволяет оценить скорость сходимости последовательностей (6.22), (6.23). Может показаться, что соотношение (2.27) противоречит оценке снизу (5.75) при $q > 3$. Это не так. Действительно, при $q > 2$ величина $p < 2$ и оператор в неравенстве (5.19) не обладает требуемой в теореме 5.8 гладкостью.

Методы (6.22), (6.23) являются новыми итеративными процессами решения корректной задачи математического программирования. Мы не ставили себе цель специально конструировать итеративные процессы классической теории оптимизации. Приведенные в этом пункте результаты предназначены лишь для того, чтобы продемонстрировать разнообразные возможности применения принципа итеративной регуляризации. Прделанные числен-

ные эксперименты, часть из которых мы обсудим в следующей главе, подтверждают возможность использования таких процессов в вычислительной практике. В каждой конкретной задаче часто появляются возможности иного управления выбором последовательностей ε_n . Как следствие этого, возможна большая скорость сходимости, чем та, которая гарантируется оценкой (6.27) (в совокупности с оценками скорости стабилизации). Проиллюстрируем сказанное на примере процесса (6.25).

Рассмотрим задачу квадратичного программирования в евклидовом пространстве E_l . Пусть в (6.24) $S=E$, $c=0$, $A=(1, \dots, 1)$, $b=1$. Точное решение этой задачи имеет вид $(y_1, \dots, y_l)$,

$$y_i = \{1/l\}_i, \quad i=1, \dots, l.$$

Очевидно, что как только итерации (6.25) попадают в область $x \geq 0$, выполняется равенство $z_n = x_n$ независимо от выбора $\{\varepsilon_n\}$. В данном случае x_n — стандартное тихоновское приближение к нормальному решению системы $Ax=b$. Так как $\|x_n - y\| = O(\varepsilon_n)$ и $\varepsilon_n > 0$ можно выбирать произвольно, то скорость сходимости «итерационной» последовательности (6.25) может быть сколь угодно большой, если отвлечься от возможной неточности данных.

§ 4. Алгоритмы нахождения седловых точек и точек равновесия в играх

Игровые схемы оптимизации в настоящее время широко используются в моделях исследования операций. Если точкой «оптимума» в такой схеме считать точку равновесия, то нахождение этой точки сводится к решению вариационного неравенства (системы неравенств).

Условия, при которых справедливо сведение задачи о точке равновесия (5.3)—(5.4) к решению вариационного неравенства, уже рассматривались в § 1 гл. V. В этом параграфе мы предполагаем по крайней мере, что f_i в (5.3) конечны, выпуклы вниз по x_i и полунепрерывны по x_i . Этих условий достаточно для такого сведения. Прокомментируем сначала возможности использования основных процессов (5.32), (5.53) для решения получающихся вариационных неравенств. Рассмотрим отдельно два случая.

1. Задача о седловой точке. Случай $n=2$, $f_2 = -f_1$ (в 5.3) изучен наиболее полно. Игра (5.3) в этом случае называется *антагонистической*, точка равновесия игры совпадает с седловой точкой (функционала f_1). Для антагонистической игры оператор (5.7) или максимально монотонен (если его рассматривать не только на Q), или если f_i дополнительно к нашему предположению непрерывно дифференцируемы в Q , монотонен и хеминепрерывен в Q (в этом случае ∂_{x_1} , ∂_x заменяются соответствующими частными производными в точке $x \in Q$) [90]. Ясно, что к этой задаче полностью применима теория построения итеративных алгоритмов, развитая в предыдущей главе.

Частные виды процесса (5.32) (с $\epsilon_n \equiv 0$) для отыскания седловых точек рассматривались и раньше. Однако при этом предполагалась сильная монотонность и дифференцируемость F [58, 61]. В частности, рассмотренные ранее процессы такого вида не годились для решения матричных игр. Напомним, что для таких игр функционал f_1 имеет вид $f_1 = (Ax_1, x_2)$, A — некоторая матрица, а скобки означают евклидово скалярное произведение. Оператор F для такой игры имеет вид

$$F(x) = \{A^T x_2, -Ax_1\}$$

(A^T — матрица, транспонированная к A). Такой оператор монотонен, но ни при какой матрице A не может удовлетворять условию (5.12) (проверьте). Процесс (5.32) в этом случае применим, например, в условиях теоремы 5.2.

Таким образом, процесс (5.32) расширяет возможности простого градиентного метода решения игр и, кроме того, позволяет решить задачу построения РА для соответствующего отображения.

2. Общая задача о точке равновесия. В случае $n > 2$ (или $f_1 \neq -f_2$ при $n = 2$) оператор F (5.7) априори уже не обладает монотонностью и тем более максимальной монотонностью. При конструировании методов «градиентного типа» для нахождения точки равновесия такая монотонность обычно предполагается. Ранее рассматривался только случай непрерывного оператора, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям гладкости (типа условия Липшица) и, конечно, условиям сильной монотонности. Наши теоремы позволяют построить процессы решения игр при отказе от требования сильной монотонности F (и даже частично гладкости) и РА для отображений, связанных с соответствующими вариационными неравенствами.

Конкретные расчетные формулы, соответствующие, например, схеме (5.32) или (5.53), выписываются без каких-либо затруднений. В качестве базовых итеративных методов, разумеется, можно использовать и различные специфические итерационные методы, разработанные специально для нахождения точек равновесия. Итеративная регуляризация стандартным образом ослабляет условия сходимости в таких процессах.

Наиболее известным итеративным процессом нахождения точек равновесия в играх является процесс Брауна и его обобщения [28]. Рассмотрим его итеративную регуляризацию. Пространства стратегий считаем гильбертовыми. Сделаем следующие предположения:

$$\Phi(x, x) = 0, \quad x \in Q, \quad (6.28)$$

где Φ — функционал, определенный формулой (5.5); все f_i дифференцируемы по Гато по всем аргументам и

$$\|f_i'(z_j)\| \leq L, \quad z_j \in Q_j, \quad i, j = \overline{1, n}; \quad (6.29)$$

функционал (5.5) предположим сильно выпуклым по ω и сильно вогнутым по x с постоянной сильной выпуклости c , т. е.

$$\begin{aligned} (\Phi_{\omega'}(\omega_1) - \Phi_{\omega'}(\omega_2), \omega_1 - \omega_2) &\geq c \|\omega_1 - \omega_2\|^2, \\ (-\Phi_{x'}(x_1) - (-\Phi_{x'}(x_2)), x_1 - x_2) &\geq c \|x_1 - x_2\|^2. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Базовый итеративный процесс определим следующим образом [28]:

$$\begin{aligned} z_k^{(j+1)} &= (1 - \alpha_j) z_k^{(j)} + \alpha_j \widehat{z}_k^{(j)}, \\ \widehat{z}_k^{(j)} &= \operatorname{argmin}_{x_k \in Q_k} f_k(z_1^{(j)}, \dots, z_k, \dots, z_n^{(j)}), \quad 0 \leq \alpha_j \leq 1. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Воспользуемся следующим результатом о сходимости базового метода (6.31) [19, 15].

Лемма 6.3. Пусть выполнены предположения (6.28) — (6.30) и

$$0 \leq \underline{\alpha}_i \leq \alpha_i \leq \bar{\alpha} = \frac{c^2}{L^2 + Lc}, \quad (6.32)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \underline{\alpha}_i = \infty \left(\frac{c}{L} < 1 \right).$$

Тогда существует единственная точка равновесия игры (5.3) и справедлива оценка

$$u(x^{(i+1)}) \leq \left(1 - \alpha_i + \left(\frac{L}{c} + \frac{L^2}{c^2} \right) \alpha_i^2 \right) u(x^{(i)}), \quad (6.33)$$

где $u(x) = -\min_{\omega \in Q} \Phi(\omega, x)$.

Из оценки (6.33) следует сходимость $u(x^{(i)})$ к 0 при $i \rightarrow \infty$ и сильная сходимость к точке равновесия x^* всего процесса (6.31), так как $u(x) = 0$ только, когда $x = x^*$, а в силу оценок (6.30) справедливо соотношение

$$\|x - x^*\|^2 \leq \frac{4}{c} u(x) \quad \forall x \in Q, \quad (6.34)$$

$u(x)$ — функция Ляпунова базового процесса (6.31).

Итеративная регуляризация процесса (6.31) состоит в использовании при вычислении $\hat{x}_k$ на каждом шаге процесса вместо функционала f_k преобразованного функционала f_{k, ε_k} :

$$f_{k, \varepsilon_k} = f_k - \varepsilon_k(x_k, x_k) + \frac{\varepsilon_k}{2(n-1)} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (x_i, x_i). \quad (6.35)$$

Теорема 6.4. Пусть выполнены условия (6.28)—(6.30), причем в (6.30), вообще говоря, $c=0$, но множество точек равновесия не пусто. Кроме того,

$$\text{diam } Q < \infty, \quad (6.36)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0.$$

$$0 < l \leq \frac{4\alpha_i (L\varepsilon_i + L^2)}{\varepsilon_i^2} < 1, \quad (6.37)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^2 = \infty, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i^4} \right| = 0.$$

Тогда итерации (6.31) с $f_k = f_{k, \varepsilon_k}$ сходятся к минимальной по норме точке равновесия игры (5.3).

Доказательство этой теоремы также проводится по общей схеме предыдущей главы. Функцию Ляпунова базового метода мы ввели выше. Имеем в силу (6.33)

$$\begin{aligned} u(z^{(i+1)}, \varepsilon_{i+1}) &\leq \left(1 - \alpha_i + 4 \left(\frac{L}{\varepsilon_i} + \frac{L^2}{\varepsilon_i^2} \right) \alpha_i^2 \right) u(z^{(i)}, \varepsilon_i) + \\ &+ |u(z^{(i+1)}, \varepsilon_{i+1}) - u(z^{(i+1)}, \varepsilon_i)|, \quad z^{(i)} = (z_1^{(i)}, \dots, z_n^{(i)}). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Это неравенство — детализация неравенства (5.28).

Оценка $|u(z^{(i+1)}, \varepsilon_{i+1}) - u(z^{(i+1)}, \varepsilon_i)|$ проводится аналогично оценке подобной же величины в теореме 6.2. Имеем

$$|u(z^{(i+1)}, \varepsilon_{i+1}) - u(z^{(i+1)}, \varepsilon_i)| = 0 \left(\left| \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} \right| \right). \quad (6.39)$$

При получении оценки (6.39) используется, как и в теореме 6.2, ограниченность $\|z^{(i+1)}\|$ в силу ограниченности области Q .

Подставляя (6.39) в (6.38), получим неравенство типа (5.30). Из него с использованием условий (6.37) теоремы следует (так как $\varepsilon_i/\varepsilon_{i+1} = 1 + O(\varepsilon_i^3)$)

$$\lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{u(z^{(i)}, \varepsilon_i)}{\varepsilon_i} = 0,$$

т. е. в силу (6.34) имеем стабилизацию траектории точек $z^{(i)}$, выработываемую методом, к траектории точек x_{ε_i} . Для завершения доказательства нужно сослаться на лемму 5.6.

Заметим, что в случае, когда в условиях (6.30) величина $c=0$, основной метод (6.31) при наших предположениях (бесконечность области Q и ее ограниченность), вообще говоря, не реализуем. В настоящее время сходимость основного процесса (6.31) в случае $c=0$ исследована в предположении ограниченности об-

ласти Q только в конечномерном случае. При этом доказательство основано на весьма сложной технике [28].

В качестве другого примера специфически «игрового» процесса рассмотрим итеративную регуляризацию метода нахождения точки равновесия в игре n лиц, предложенного Бенсусаном, Лионсом, Темамом [29] (для краткости назовем его методом БЛТ). Предположим, что в игре (5.3) функционалы f_i дифференцируемы по x_j и их производные удовлетворяют условиям Липшица, а также что оператор (5.7) монотонен и игра (5.3) имеет непустое множество точек равновесия.

Если оператор игры (5.7) сильно монотонен, то базовый итеративный метод БЛТ нахождения единственной точки равновесия следующий. Пусть $z^{(k)} = (z_1^{(k)}, \dots, z_n^{(k)})$ уже определено, тогда i -я компонента элемента $z^{(k+1)}$ находится из решения задачи минимизации вида

$$z_i^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_{\omega_i \in Q_i} (\tau_k f_i(z_1^{(k)}, \dots, \omega_i, \dots, z_n^{(k)}) + (\omega_i - z_i^{(k)})^2), \quad (6.40)$$

τ_k — параметр, зависящий от постоянной сильной монотонности. Итеративная регуляризация метода БЛТ имеет вид

$$z_i^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_{\omega_i \in Q_i} \left[\tau_k \left(f_i(z_1^{(k)}, \dots, \omega_i, \dots, z_n^{(k)}) + \frac{\varepsilon_k}{2} \omega_i^2 \right) + (\omega_i - z_i^{(k)})^2 \right]. \quad (6.41)$$

Исследуем ее сходимость, опираясь на результаты, изложенные в [29]. Для исследования сходимости метода (6.40) (базового) в этой работе используется простейшая функция Ляпунова: $u(x, \varepsilon_k) = \|x - x_{\varepsilon_k}\|$. Следовательно,

$$|u(z^{(k+1)}, \varepsilon_{k+1}) - u(z^{(k)}, \varepsilon_k)| = O \left(\left| \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \right| \right).$$

Из результатов [29] непосредственно следует оценка

$$u(z^{(k+1)}, \varepsilon_k) \leq \frac{1}{\sqrt{1 - 2\mu^2(n-1)\tau_k^2 + \varepsilon_k\tau_k}} u(z^{(k)}, \varepsilon_k).$$

Постоянная μ зависит от постоянных Липшица производных функционалов f_i , $i=1, n$. Если τ_k записать, например, в виде $\tau_k = \varepsilon_k/4\mu^2(n-1)$, то (для достаточно малых ε_k)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\mu^2(n-1)\tau_k^2 + \varepsilon_k\tau_k}} \leq 1 - \frac{\varepsilon_k^2}{32\mu^2(n-1)}.$$

Окончательно для $u_k = u(z^{(k)}, \varepsilon_k)$ получается разностное неравенство типа (5.30):

$$u_{k+1} \leq \left(1 - \frac{\varepsilon_k^2}{32\mu^2(n-1)} \right) u_k + O \left(\left| \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \right| \right).$$

Согласно лемме 4.5 для сходимости u_k к 0 (а следовательно, в данном случае для сходимости итеративной регуляризации метода БЛТ) достаточно выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k &= 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^3} \right| &= 0. \end{aligned} \tag{6.42}$$

Этим условиям удовлетворяет, например, последовательность $\varepsilon_k = 1/k^{1/4}$. Таким образом, доказана

Теорема 6.5. *При выполнении условий (6.29), (6.30) хотя бы с $s=0$ и условий (6.42) метод (6.41) сильно сходится к точке равновесия игры, обладающей минимальной нормой.*

При решении игр и вообще систем вариационных неравенств можно использовать и другие базовые методы, модифицируя их с использованием принципа итеративной регуляризации. Общая идеология таких исследований аналогична описанной выше [15, 18].

Применение РА для решения прикладных задач

В предыдущих главах были предложены и обоснованы методы решения широкого класса некорректных задач. Созданные на их основе численные методы могут быть с успехом использованы в математическом моделировании [52, 79]. В этой главе мы остановимся лишь на некоторых примерах, характеризующих возможности описанного математического аппарата.

§ 1. Корректность задач реконструктивной обработки фото- и телеизображений

Совершенствование ЭВМ, появление внешних устройств с развитой графикой позволили по-новому поставить и решить целый ряд задач обработки изображений. По сути дела, все задачи обработки изображений можно свести к решению операторных уравнений вида

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U,$$

где Z, U — функциональные пространства, а A — оператор, действующий из Z в U .

В отдельную группу выносятся задачи предварительной обработки изображений. К этой группе можно отнести задачи изменения контрастности снимка, устранение царапин и т. п.

Более сложные задачи приходится решать при реконструкции изображений, где связь между z и u осуществляется оператором A , отличным от единичного. Сложности, возникающие при создании алгоритмов решения задач реконструкции изображений, в первую очередь связаны с некорректностью этих задач. К задачам реконструкции изображений относятся проблемы восстановления дефокусированных и смазанных изображений, задачи томографии и т. п.

Большое значение для разработки систем искусственного зрения, создания автоматизированных систем диагностики, обнаружения дефектов имеет разработка алгоритмов распознавания образов.

В простейшей модели бинарное изображение сравнивается с бинарным эталоном (A — единичный оператор либо оператор

сдвига или поворота). В рамках подобных постановок задача идентификации корректна и алгоритмы ее решения хорошо исследованы. Пример такой задачи — задача автоматизированного поиска дефектов планарных структур в изделиях электроники (фотошаблоны, слои печатных плат и т. п.). Основные трудности в решении этих задач связаны с необходимостью разработки алгоритмов распознавания, допускающих высокую степень распараллеливания, так как объем обрабатываемой информации на современном фотошаблоне, например, достигает ~ 1 Гбт.

Понятно, что подобные простейшие модели не охватывают всех задач распознавания образов. Увеличение числа градаций интенсивности на идентифицируемом изображении делает задачу распознавания образов некорректной. Следующие параграфы этой главы посвящены проблемам создания эффективных алгоритмов решения некорректных задач реконструктивной обработки изображений [105, 107, 118].

§ 2. Математические проблемы реконструктивной обработки фото- и телеизображений

1. Задачи реконструктивной обработки смазанных изображений. Обозначим $z'(\xi', \eta')$ интенсивность исходного изображения в точке (ξ', η') плоскости $\zeta = -f_1$. В приближении геометрической оптики считаем, что оптическая система $\mathfrak{D}$ создает действительное изображение плоскости $\zeta = -f_1$ в плоскости $\zeta = f_2$. В качестве примера такой системы может быть рассмотрена линза $\mathcal{L}$ с фокусным расстоянием f (рис. 3). Тогда $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$, причем распределение интенсивности изображения в плоскости $\zeta = f_2$ имеет вид $z(\xi, \eta) = z'(\xi', \eta')$, где $\xi' = -\frac{f_1}{f_2}\xi$; $\eta' = -\frac{f_1}{f_2}\eta$. Таким обра-

зом, изображение в плоскости $\zeta = f_2$ с точностью до изменения масштаба совпадает с исходным изображением в плоскости $\zeta = -f_1$.

Простейшая постановка задачи линейного смазывания предполагает, что в течение времени экспонирования либо объект, либо система регистрации линейно двигалась вдоль какого-либо направления. Для простоты предполагаем направление известным и совпадающим с осью $O\xi$.

Полагаем, что интенсивность $D(x, y)$ в точке (x, y) плоскости $\zeta = f_2$ пропорциональна величине [106]

$$\int_0^{\tau} z(x + \omega t, y) dt,$$

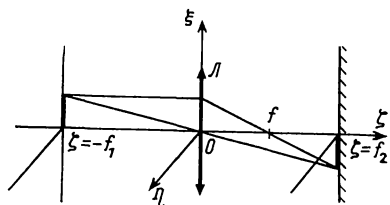


Рис. 3

где $\omega(t) = \int_0^t v(t) dt$, τ — величина времени экспонирования, а $v(t)$ — скорость перемещения объекта в плоскости $\xi = f_2$, вообще говоря, зависящая от времени.

На самом деле регистрируемой величиной является потемнение $P(x, y)$, зависимость которого от $D(x, y)$ нелинейна. Однако, зная характеристики пленки, всегда можно перейти от $P(x, y)$ к $D(x, y)$, которую считаем в дальнейшем регистрируемой величиной. Предполагая, что скорость $v(t) > 0$, получаем [53, 106]

$$D(x, y) = k \int_x^{x+\omega(t)} z(\xi, y) K(\xi - x) d\xi, \quad (7.1)$$

где

$$K(\xi - x) = \frac{1}{v(t)} \Big|_{t=t^*(\xi-x)},$$

$t^*(x)$ — решение уравнения $\omega(t) = x$.

Не ограничивая общности, считаем коэффициент k равным 1. Таким образом, мы переходим к уравнению

$$D(x, y) = \int_x^{x+\omega(\tau)} z(\xi, y) K(\xi - x) d\xi, \quad (7.2)$$

представляющему собой множество одномерных интегральных уравнений первого рода типа свертки.

В результате пришли к операторному уравнению

$$Az(\xi, y) = D(x, y), \quad (7.3)$$

где $z(\xi, y)$, $D(x, y)$ — элементы некоторых функциональных пространств, а A — оператор, вид которого определен формулой (7.2). По приближению заданной функции $D(x, y)$ требуется восстановить исходное изображение $z(\xi, \eta)$.

Если $v(t) = \text{const} = v_0$, то получается однопараметрическое семейство уравнений

$$A_{v_0} z(\xi, \eta) = \int_x^{x+v_0\tau} z(\xi, \eta) K(\xi - x) d\xi, \quad (7.4)$$

где $K(t) = \text{const}$. Параметр v_0 задан или является искомым параметром. Уравнения (7.2)–(7.4) представляют собой операторные уравнения Фредгольма первого рода. Естественно в качестве U выбирать пространство L_2 , а пространство Z полагать либо L_2 , либо W_2^1 в зависимости от априорной информации об искомом решении задачи. При каждом фиксированном v_0 (7.4) — одномерное линейное интегральное уравнение. При фиксированном v_0 применима стандартная техника решения линейных интегральных

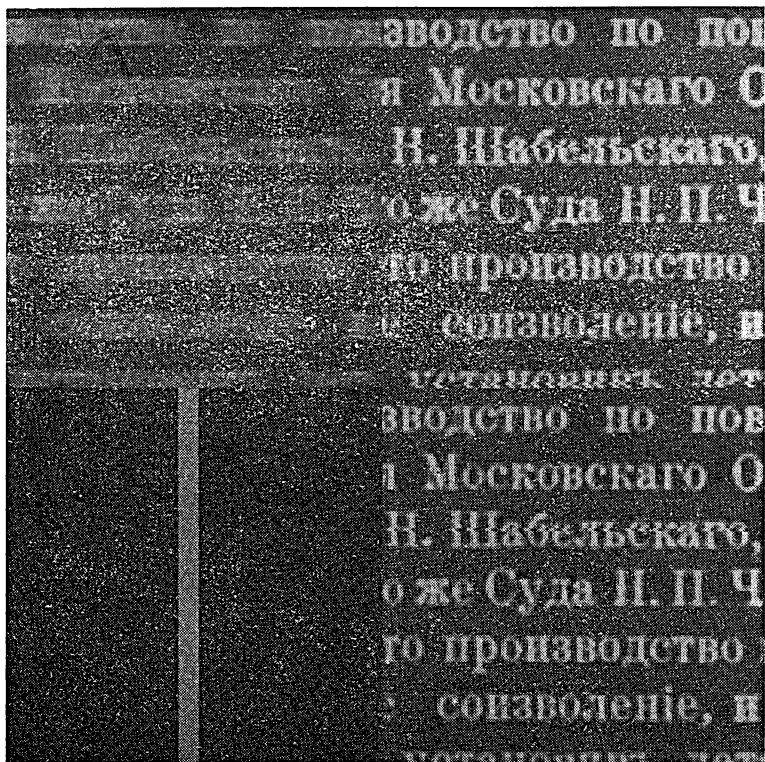


Рис. 4. Модельная задача. Реконструкция смазанного изображения. Правый верхний угол — исходное изображение, правый нижний угол — восстановленное изображение, левый верхний угол — правая часть уравнения (7.4)

уравнений, основанная на использовании, например, функционала Тихонова $M^\alpha[z]$. Параметр α можно выбирать по невязке (см. гл. III). На рис. 4 приведен результат решения модельной задачи (при известном параметре v_0).

Для решения задачи при фиксированном v_0 можно применять и итерационные регуляризирующие алгоритмы (см. гл. IV), например метод простой итерации (4.22) с выбором правила останова $n=n(\delta)$ согласно (4.25) или принципу невязки. Выбор параметра $n=n(\delta)$ по такому правилу останова делает алгоритм регуляризирующим. Если параметр n выбран неверно, то полученное «приближенное» решение может кардинально отличаться от искомого решения. Этот случай иллюстрируется решением модельной задачи на рис. 5. Здесь сделано неоправданно много итераций. Аналогично сказывается некорректность задачи и в схеме с использованием функционала Тихонова, если α неоправданно мало.

Важное значение имеет проблема определения неизвестного параметра задачи v_0 . Использование в схеме Тихонова, а также



Рис. 5. Модельная задача. Реконструкция смазанного изображения. Правый верхний угол — приближенное решение задачи (7.4) с неверно выбранным параметром регуляризации

для вычисления операторов A и A^* в итерационном процессе (4.22) быстрого преобразования Фурье делает возможным решение задачи (7.4) при фиксированном параметре v_0 за несколько секунд. При такой скорости обработки параметр v_0 можно выбирать, проводя визуальную оценку решения. Использование дополнительной информации, например такой, как бинарность искомого решения, позволяет при определенных предположениях реализовать автоматизированный выбор параметра v_0 .

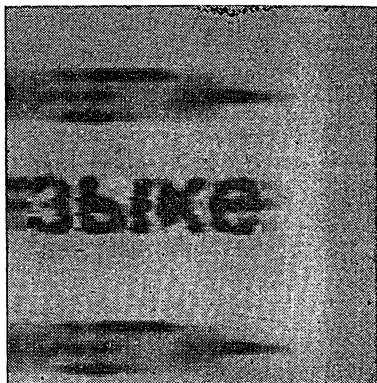
На рис. 6 приведен фрагмент обработки реального снимка (в центре кадра), полученного фотоаппаратом «Зенит ТТЛ» на стандартной пленке при движении исходного изображения (параметр v_0 был неизвестен). Остальная часть кадра — смазанное изображение.

2. Задачи реконструкции дефокусированных изображений. Пусть исходное изображение расположено в плоскости $\xi = -f_1$. Оптическая система апертуры a расположена в начале координат и имеет фокусное расстояние f (рис. 7).

Изображение регистрируется на фоточувствительном материале в плоскости $\xi=f_2+\Delta$, где f_2 связано с f_1 и f соотношением $1/f=1/f_1+1/f_2$. В простейшей модели геометрической оптики каждая точка изображения $z(\xi', \eta')$ отображается на фотослой, при котором изображение каждой точки представляет собой круг радиусом $\rho=a\Delta/f_2$ с центром в точке

$$\left\{ -\xi' \frac{f_2 + \Delta}{f_1}; -\eta' \frac{f_2 + \Delta}{f_1} \right\}.$$

Рис. 6. Реконструкция смазанного изображения. Реальный эксперимент. В центре кадра — фрагмент восстановленного изображения на фоне смазанного изображения



Если отвлечься от искажений геометрического характера (растяжение или сжатие изображения), то связь между исходным изображением $z(\xi, \eta)$ и регистрируемым $D(x, y)$ можно записать в виде

$$D(x, y) = \iint z(\xi, \eta) K_\rho(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta, \quad (7.5)$$

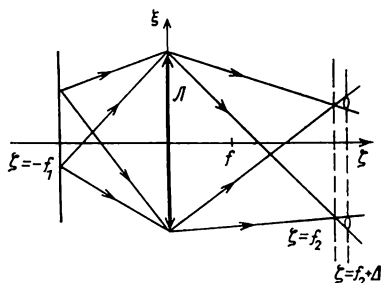


Рис. 7

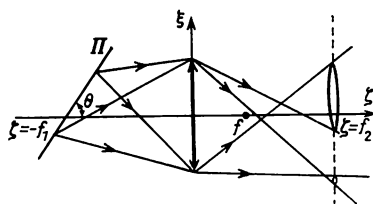


Рис. 8

где

$$K_\rho(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{если } u^2 + v^2 > \rho^2, \\ \frac{1}{\pi\rho^2}, & \text{если } u^2 + v^2 \leq \rho^2. \end{cases}$$

Последнее уравнение — уравнение Фредгольма первого рода от разности аргументов.

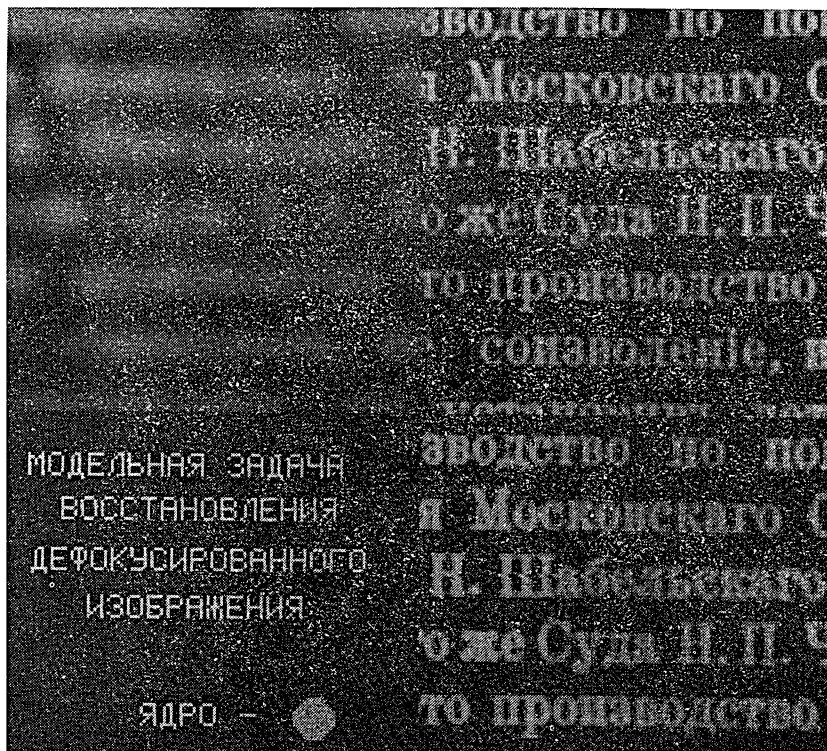


Рис. 9. Модельная задача. Реконструкция дефокусированного изображения. Правый верхний кадр — истинное изображение, правый нижний кадр — восстановленное изображение, левый верхний кадр — правая часть уравнения (7.5)

Более сложная ситуация имеет место, когда регистрируемое изображение расположено в плоскости, не параллельной плоскости фотопленки. При этом, как видно из рис. 8, уравнение, связывающее $z(\xi, \eta)$ и $D(x, y)$, не будет, вообще говоря, уравнением от разности аргументов. В общем случае его можно записать как

$$D(x, y) = \iint K(x, y, \xi, \eta) z(\xi, \eta) d\xi d\eta = Az. \quad (7.6)$$

Ядро уравнения (7.6) зависит от расположения плоскости регистрации и достаточно просто выписывается [106]. Учитывая специфику оператора A (по одной из переменных в определенной системе координат оператор A зависит от разности аргументов), можно эффективно вычислять значения оператора A , что дает возможность строить различные регуляризирующие алгоритмы решения задач (7.5), (7.6).

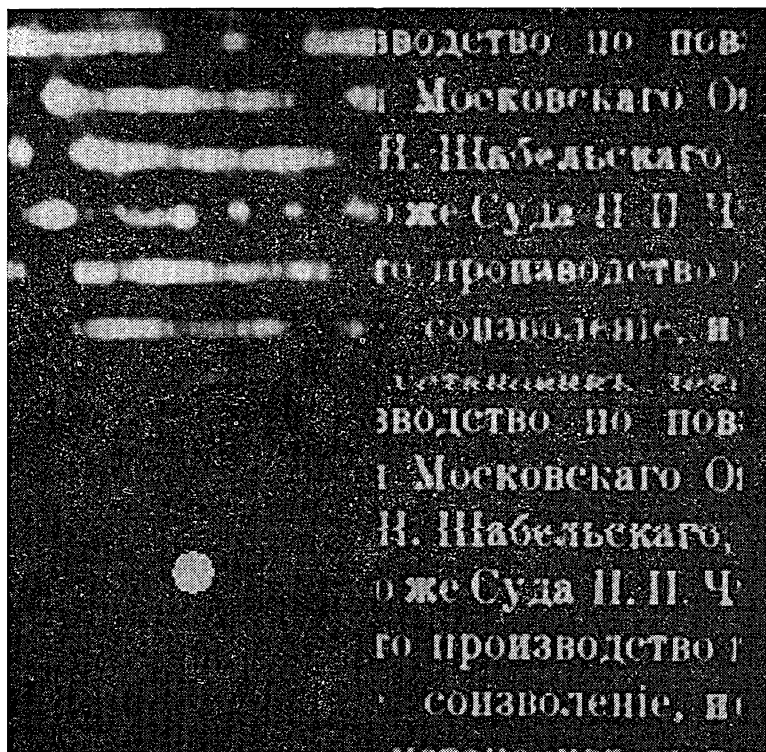


Рис. 10. Модельная задача. Реконструкция дефокусированного изображения. Правый верхний угол — исходное изображение, правый нижний угол — восстановленное изображение, левый верхний угол — дефокусированное изображение

На рис. 9 приведены результаты решения модельной задачи (уравнение (7.5)) для известного параметра дефокусировки ρ . Результат получен с применением стандартной схемы Тихонова при условии $Z=U=L_2$ с выбором параметра α по невязке.

Для решения задачи (7.5) можно также применять различные итерационные методы. Так как (7.5) — уравнения типа свертки, то их применение также очень эффективно в вычислительном плане (см. § 3 этой главы).

На рис. 11 приведен фрагмент обработки реального изображения, снятого неверно наведенным на резкость фотоаппаратом «Зенит ТТЛ». Параметр дефокусировки ρ был неизвестен и определялся простым перебором с визуальным контролем изображения. Для восстановления использовалась схема Тихонова.

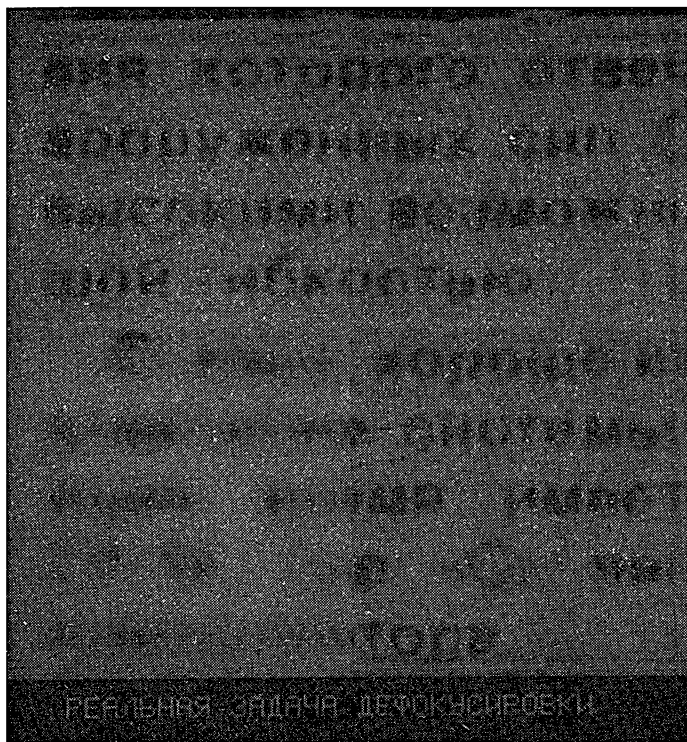


Рис. 11. Реконструкция дефокусированного изображения. Реальный эксперимент. Левый нижний угол — фрагмент дефокусированного изображения — правой части уравнения (7.5), остальная часть кадра — реконструированное изображение

Используя информацию о бинарности искомого изображения (например, текстов), можно разрабатывать автоматизированные системы реконструктивной обработки смазанных и дефокусированных изображений.

Задачи реконструкции дефокусированных снимков и телеизображений тесно связаны с задачами реконструктивной томографии. Проиллюстрируем это на примере задач диагностики слоистых объектов. Такого типа объекты типичны для изделий электроники и микроэлектроники (микросхемы, печатные многослойные платы). Создание эффективных методов контроля для таких изделий — задача, без решения которой невозможен дальнейший прогресс в этой области.

Считаем, что объект состоит из двух параллельных плоскостей, каждая из которых характеризуется своим изображением $\varphi_i(x, y)$, $i=1, 2$. Схема наблюдения состоит в следующем: при фокусировке оптической системы на первый слой (рис. 12, а)

фиксируется изображение первого слоя с наложением на него дефокусированного изображения второго слоя; при фокусировке на второй слой (рис. 12, б) фиксируется изображение второго слоя

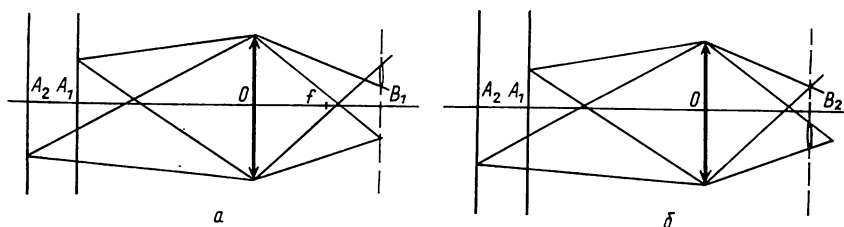


Рис. 12. а) Оптическая система сфокусирована на слой A_1 , плоскость регистрации — B_1 ; б) оптическая система сфокусирована на слой A_2 , плоскость регистрации — B_2

с наложением на него дефокусированного первого слоя. Требуется восстановить φ_1, φ_2 . В рамках приближения, аналогичного (7.5), в отсутствии поглощения слоев получим

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) + \iint K(x - \xi, y - \eta) \varphi_2(\xi, \eta) d\xi d\eta = u_1(x, y), \\ \varphi_2(x, y) + \iint K(x - \xi, y - \eta) \varphi_1(\xi, \eta) d\xi d\eta = u_2(x, y), \end{cases} \quad (7.7)$$

где

$$K(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2}, & u^2 + v^2 \leq a^2, \\ 0, & u^2 + v^2 > a^2. \end{cases}$$

Исследуем свойства системы (7.7). Рассмотрим следующую задачу. Даны $u_1, u_2 \in L_2(-\infty, \infty)$. Требуется определить $\varphi_1, \varphi_2 \in L_2(-\infty, \infty)$, удовлетворяющие системе (7.7). Пусть $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ — двумерные преобразования Фурье функций $u_1, u_2, \varphi_1, \varphi_2$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(\omega_1, \omega_2) + \tilde{K}(\omega_1, \omega_2) \tilde{\varphi}_2(\omega_1, \omega_2) &= \tilde{u}_1(\omega_1, \omega_2), \\ \tilde{\varphi}_2(\omega_1, \omega_2) + \tilde{K}(\omega_1, \omega_2) \tilde{\varphi}_1(\omega_1, \omega_2) &= \tilde{u}_2(\omega_1, \omega_2), \end{aligned} \quad (7.8)$$

или

$$Q(\omega_1, \omega_2) \vec{\tilde{\varphi}}(\omega_1, \omega_2) = \vec{\tilde{u}}(\omega_1, \omega_2), \quad (7.9)$$

где $\vec{\tilde{\varphi}}, \vec{\tilde{u}}$ — векторы с компонентами $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ соответственно, а Q — матрица системы (7.8).

Нетрудно проверить следующее утверждение; $\det Q(\omega_1, \omega_2)$ равен нулю в единственной точке $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Заметим, что

$\det Q(\omega_1, \omega_2) \rightarrow 1$ при $\omega_1^2 + \omega_2^2 \rightarrow \infty$. Для существования решения $\varphi_1, \varphi_2 \in L_2$ системы (7.7) необходимо и достаточно, чтобы компоненты $Q^{-1}(\omega_1, \omega_2) \vec{u}$ принадлежали $L_2(-\infty, \infty)$; при этом $\vec{\varphi}$ определяется формулой

$$\vec{\varphi} = F^{-1} \vec{Q}^{-1} F \vec{u}, \quad (7.10)$$

где F, F^{-1} — операторы прямого и обратного двумерного преобразования Фурье соответственно, $\vec{Q}^{-1} = \vec{Q}^{-1}(\omega_1, \omega_2)$ — матрица, совпадающая с обратной матрицей $\vec{Q}^{-1}(\omega_1, \omega_2)$ для всех ω_1, ω_2 , кроме точки $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

Пусть вместо u_1, u_2 известны их приближения:

$$u_1^\delta = u_1 + \xi_1, \quad u_2^\delta = u_2 + \xi_2, \quad \xi_1, \xi_2 \in L_2(-\infty, \infty)$$

$$\|\xi_1\| \leq \delta, \quad \|\xi_2\| \leq \delta.$$

Нетрудно убедиться, что алгоритм (7.10) не является устойчивым к ошибкам во входных данных. Для получения устойчивых приближений можно воспользоваться известной схемой регуляризации Тихонова $\varphi_\alpha = F^{-1}(Q^*Q + \alpha E)^{-1}Fu$, где Q^* — эрмитово сопряженная с Q матрица, α — параметр регуляризации, согласованный с δ .

Результаты легко переносятся на случай многослойной схемы, состоящей из N тонких слоев, а также на случай слоистой схемы из N тонких слоев с однородным заполнением и т. п.

Проведенные расчеты модельных задач показывают высокую эффективность методов регуляризации в задачах реконструктивной обработки изображений слоистых сред [107, 108].

§ 3. Псевдоитерационные РА для решения задач реконструктивной обработки смазанных и дефокусированных изображений

В рассмотренных выше задачах (§ 1, 2) типичным уравнением, описывающим связь искомого изображения z и наблюдаемого u , является уравнение типа свертки (7.2), (7.4). Если для построения регуляризирующего алгоритма использовать линейные итерационные схемы, то возникает заманчивая возможность сразу выписать (а не последовательно) любую итерацию! Подобные алгоритмы мы называем *псевдоитерационными* РА. Ясно, что они обладают целым рядом преимуществ (высокая скорость, уменьшение ошибок накопления и т. п.).

Изложим более подробно эту идею на примере одномерного интегрального уравнения типа свертки:

$$Az = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s) z(s) ds = u(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (7.11)$$

Пусть входящие в уравнение функции удовлетворяют требованиям

$$K(y) \in L_1(-\infty, \infty) \cap L_2(-\infty, \infty), u(x) \in L_2(-\infty, \infty), \\ z(s) \in W_2^1(-\infty, \infty).$$

Оператор A — непрерывный оператор из W_2^1 в L_2 . Пусть, как обычно, некоторой функции $\bar{u}(x)$ соответствует единственное решение уравнения (7.11) — функция $\bar{z}(s) \in W_2^1$, причем известна не сама функция $\bar{u}(x)$, а заданная с известной погрешностью функция $u_\delta(x)$:

$$\|u_\delta - \bar{u}\|_V \leq \delta.$$

Нас интересуют РА на основе линейных итерационных методов. Рассмотрим некоторый k -шаговый линейный итерационный метод решения уравнения (7.11) с точными данными:

$$z_{n+1} = z_n + f_n(z_{n-k+1}, \dots, z_n, u), n = k-1, k, k+1, \dots, \quad (7.12)$$

обладающий тем свойством, что при определенном выборе начального приближения $z_0(s), z_1(s), \dots, z_{k-1}(s)$ порождаемая им последовательность z_n сходится:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \bar{z}. \quad (7.13)$$

Пусть функция f_n представляет собой линейную комбинацию интегральных операторов типа свертки. Если правая часть задачи (7.11) задана с погрешностью δ , то предельное соотношение (7.13), вообще говоря, не имеет места. Однако приближенное решение (7.11) можно получить методом (7.12), если дополнить его соответствующим правилом останова $n = n(\delta)$. Как известно, для согласования числа итераций n с погрешностью входных данных δ можно применять априорный выбор момента останова, например, из соотношения $n(\delta) = 1/\delta$, или обобщенный принцип невязки (ОПН). Оба этих способа гарантируют сходимость полученных значений $z_{n(\delta)}$ к решению $\bar{z}$ при $\delta \rightarrow 0$ в пространстве W_2^1 , а это согласно теореме вложения С. Л. Соболева [67] обеспечивает на любом конечном отрезке равномерную сходимость.

Таким образом, для получения приближенного решения необходимо проделать следующие операции:

- 1) выбрать начальное приближение $z_0(s), z_1(s), \dots, z_{k-1}(s) \in W_2^1$;
- 2) найти $n(\delta)$;
- 3) по рекуррентному соотношению (7.12) вычислить последовательно

$$z_k, z_{k+1}, \dots, z_{n(\delta)}.$$

Если погрешность входных данных мала, число $n(\delta)$ оказывается довольно большим и прямое вычисление $z_{n(\delta)}$ может потребовать больших затрат машинного времени. К тому же из-за накоп-

ления погрешности округления теряется точность вычислений. Используя специфический вид уравнений типа свертки, можно при решении уравнения (7.11) находить z_n значительно более экономным способом.

Идея новой серии алгоритмов очень проста. К рекуррентному соотношению (7.12) применим преобразование Фурье. Получим равенство

$$\tilde{z}_{n+1}(\omega) = \tilde{z}_n(\omega) + \tilde{f}_n(\tilde{z}_{n-k+1}, \dots, \tilde{z}_n, \tilde{u}). \quad (7.14)$$

Рассмотрим (7.14) как разностное уравнение относительно $\tilde{z}_n(\omega)$, дополнив его начальными условиями:

$$\tilde{z}_l(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z_l(s) e^{-i\omega s} ds, \quad l = 0, 1, \dots, k-1.$$

Для большинства стационарных и некоторых нестационарных линейных итерационных методов решение уравнения (7.14) с указанными начальными условиями можно представить в виде

$$\tilde{z}_n(\omega) = \tilde{F}(n, \omega, \tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_{k-1}, \tilde{u}),$$

причем $\tilde{F}$ явно выписывается.

При априорном выборе момента останова для получения приближенного решения (7.11) остается лишь применить обратное преобразование Фурье к решению (7.14), взятому при $n = n(\delta)$:

$$z_{n(\delta)}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(n(\delta), \omega, \tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_{k-1}, \tilde{u}) e^{i\omega s} d\omega. \quad (7.15)$$

Для выбора $n(\delta)$ согласно обобщенному принципу невязки обычно сначала вычисляют $\tilde{z}_n(\omega)$ при $n = n_1, n_2, n_3$. Вычислив затем невязки, соответствующие найденным $\tilde{z}_{n_i}(\omega)$, с помощью квадратичной интерполяции находят приближенное значение $n = n(\delta)$. После этого приближенное решение (7.11) вычисляется по формуле (7.15). Таким образом, алгоритмы вида (7.15) позволяют находить $z_{n(\delta)}$ сразу, фактически не проводя итерационного процесса, что дает основания назвать эти алгоритмы псевдоитерационными.

В качестве примеров линейных алгоритмов (7.12), на основе которых возможно построение псевдоитерационных алгоритмов, рассмотрим явный и неявный методы простой итерации:

$$z_{n+1} = z_n - \mu A^*(Az_n - u), \quad z_0 \in W_2^1, \\ 0 < \mu < \frac{2}{\|A^*A\|}, \quad (7.16)$$

$$z_{n+1} = z_n - \beta A^*(Az_{n+1} - u), \quad z_n \in W_2^1, \quad (7.17)$$

а также один нестационарный трехслойный метод [81]:

$$z_{n+1} = z_n - \alpha_n A^* (Az_n - u) + \beta_n (z_n - z_{n-1}), \quad (7.13)$$

$$\alpha_n = \frac{4(2n+1)}{9n+3}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$\beta_n = \frac{2n-1}{2n+3}, \quad n = 1, 2, \dots, \beta_0 = 0.$$

Здесь мы считаем

$$\|A\| \leq 1.$$

Решение соответствующего разностного уравнения (7.14) для метода (7.16) имеет вид

$$\tilde{z}_n(\omega) = \begin{cases} (1 - \mu\Omega |\tilde{K}(\omega)|^2)^n \tilde{z}_0(\omega) + \frac{1 - (1 - \mu\Omega |\tilde{K}(\omega)|^2)^n}{\tilde{K}(\omega)} & \text{при } \tilde{K}(\omega) \neq 0, \\ \tilde{z}_0(\omega) & \text{при } \tilde{K}(\omega) = 0, \end{cases} \quad (7.19)$$

где

$$\Omega = \frac{1}{1 + \omega^2}.$$

Используя последнее соотношение, приняв $z_0(s) = 0$ и меняя порядок интегрирования в (7.15), решение (7.11) методом (7.16) можно представить в виде интеграла

$$z_{n(\delta)}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{n(\delta)}(s-x) u(x) dx, \quad (7.20)$$

где ядро обращения

$$R_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_n(\omega) e^{t\omega} d\omega, \quad (7.21)$$

$$Q_n(\omega) = \begin{cases} \frac{1 - (1 - \mu\Omega |\tilde{K}(\omega)|^2)^n}{\tilde{K}(\omega)} & \text{при } \tilde{K}(\omega) \neq 0, \\ 0 & \text{при } K(\omega) = 0. \end{cases} \quad (7.22)$$

Аналогично для неявного метода простой итерации (7.17)

$$\tilde{z}_n(\omega) = \begin{cases} \frac{\tilde{z}_0(\omega)}{(1 + \beta\Omega |\tilde{K}(\omega)|^2)^n} + \frac{1 - (1 + \beta\Omega |\tilde{K}(\omega)|^2)^{-n}}{\tilde{K}(\omega)} \tilde{u}(\omega), & \tilde{K}(\omega) \neq 0, \\ \tilde{z}_0(\omega), & \tilde{K}(\omega) = 0, \end{cases} \quad (7.23)$$

следовательно, при $z_0 \equiv 0$ справедливы (7.20), (7.21) с

$$Q_n(\omega) = \begin{cases} \frac{1 - (1 + \beta \Omega |\tilde{K}(\omega)|^2)^{-n}}{\tilde{K}(\omega)}, & \tilde{K}(\omega) \neq 0, \\ 0, & \tilde{K}(\omega) = 0. \end{cases} \quad (7.24)$$

А для метода (7.16)

$$Q_n(\omega) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \left(\cos n\varphi + \frac{\sqrt{1 - |\tilde{K}(\omega)|^2}}{\tilde{K}(\omega)} \sin n\varphi \right) \right) (\tilde{K}(\omega))^{-1}, & \tilde{K}(\omega) \neq 0, \\ 0, & \tilde{K}(\omega) = 0. \end{cases} \quad (7.25)$$

Все сказанное выше о решении одномерного интегрального уравнения типа свертки (7.11) без труда переносится на двумерный случай.

Рассмотрим уравнение

$$Az = \iint_{\mathbf{R}^2} K(x-s, y-t) z(s, t) ds dt = u(x, y), \quad (7.26)$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty,$$

где $K(\xi, \eta) \in L_1 \cap L_2$, $u(x, y) \in L_2$, $z(s, t) \in W_2^2$, т. е. $A: W_2^2 \rightarrow L_2$. Считаем, что точной правой части $\tilde{u}(x, y)$ уравнения (7.26) соответствует единственное решение $\tilde{z}(s, t) \in W_2^2$. Как и ранее, правая часть задана с погрешностью $\delta > 0$.

Для решения этой задачи применимы все описанные выше алгоритмы, где формулы (7.20), (7.21) принимают вид

$$z_{n(\delta)}(s, t) = \iint_{\mathbf{R}^2} R_n(s-x, t-y) u_\delta(x, y) dx dy, \quad (7.27)$$

$$R_n(\xi, \eta) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbf{R}^2} Q_n(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 \xi + \omega_2 \eta)} d\omega_1 d\omega_2, \quad (7.28)$$

а в формулах (7.23)–(7.25) $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\Omega = [1 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2]^{-1}$. При правильном выборе момента остановки $n(\delta)$ построенные алгоритмы обеспечивают сходимость приближенного решения $z_{n(\delta)}$ к точному $\tilde{z}$ при $\delta \rightarrow 0$ в пространстве W_2^2 , откуда следует равномерная сходимость на любом компакте в $\mathbf{R}^2$. Для эффективной практической реализации методов (7.19)–(7.25) используется алгоритм быстрого преобразования Фурье [104].

Заметим, что построенные выше псевдоитерационные алгоритмы (7.19)–(7.25) предназначены для быстрого получения приближенных решений задач (7.11), (7.26) в пространствах W_2^1 и W_2^2 соответственно. После подстановки в них $\Omega = 1$ те же формулы позволяют быстро вычислять приближения к решениям указанных задач в метрике L_2 .

Рассмотренные выше псевдоитерационные регуляризирующие алгоритмы имеют ряд преимуществ. Однако они не дают возможности использовать априорную информацию о принадлежности точного решения $\bar{z}$ задачи выпуклому замкнутому множеству $Q \subset L_2$. Дело в том, что после введения операции проектирования нельзя применить теорему о свертке. Подобная информация характерна для широкого класса задач обработки изображений, причем Q — множество неотрицательных функций пространства L_2 , равных нулю на определенном множестве $M \subset \mathbb{R}^2$. Возможность использовать такую информацию представляет, например, метод простой итерации с проектированием на каждом шаге на множество Q (процесс (6.1)):

$$z_{n+1} = \frac{1}{1 + d(1+n)^{-p}} P_Q(z_n - \alpha A^*(Az_n - u)),$$

$$0 < \alpha < \frac{1}{\|A^*A\|}, \quad 0 < p < 1, \quad d > 0. \quad (7.29)$$

Этот метод гарантирует сильную сходимость z_n к $\bar{z}$ при решении задачи с точными данными. Если же входные данные известны лишь приближенно, метод (7.29) дополняется правилом останова типа (6.10), например,

$$n(\delta) = [d^{1/p}/\delta]. \quad (7.30)$$

При малых δ значение $n(\delta)$ может быть велико, и реализация алгоритма (7.29), (7.30) потребует больших затрат машинного времени. Присутствие в (7.29) оператора проектирования не дает возможности построить на основе этого метода псевдоитерационный алгоритм. Вместе с тем для решения уравнений типа свертки (7.11), (7.26) можно предложить эффективные методы, использующие априорную информацию о решении и работающие значительно быстрее, чем (7.29), (7.30).

Нетрудно показать, что проектирование на множество Q и умножение на $\frac{1}{1 + d(1+n)^{-p}}$ можно осуществлять не на каждом шаге, а через k шагов, причем переход от z_n к z_{n+k} совершается сразу с помощью построенного выше псевдоитерационного алгоритма (7.19).

Таким образом, мы приходим к следующей схеме:

$$z_{n+1} = \frac{1}{1 + d(1+nk)^{-p}} P_Q(B_k(z_n, u)), \quad (7.31)$$

где $B_k(x, u)$ — оператор перехода за k шагов для явного метода простой итерации. Сходимость (7.31) при решении задачи с точными данными легко устанавливается по схеме теоремы 6.1. Для задачи с приближенными данными правило останова можно выбрать в виде

$$\tilde{n}(\delta) = \left\lceil \frac{d^{1/p}}{k\delta} \right\rceil. \quad (7.32)$$

Очевидно, вычисления по формулам (7.31), (7.32) требуют в k раз меньше времени, чем по формулам (7.29), (7.30).

Заметим, что наряду с явным методом простой итерации в алгоритме (7.31) можно использовать некоторые другие линейные итерационные методы. В частности, как показывает практика, хорошие результаты дает применение псевдоитерационного алгоритма (7.23), построенного на основе неявного метода простой итерации.

Рассмотрим примеры применения построенных алгоритмов в задачах реконструкции изображений. В предыдущем параграфе была дана постановка задач линейного смазывания и дефокусировки. Задача линейного смазывания приводит к одномерному интегральному уравнению типа свертки первого рода, ядро которого имеет локальный носитель:

$$Az = \int K(x - \xi) z(\xi) d\xi = u(x), \quad (7.33)$$

$$K(t) = \begin{cases} 0, & |t| > d, \\ \frac{1}{2d}, & |t| \leq d. \end{cases}$$

Для решения задачи (7.33) можно использовать любой из алгоритмов (7.19) — (7.25), подставляя вместо $\tilde{K}(\omega)$ выражение $\tilde{K}(\omega) = \frac{\sin(\omega d)}{\omega d}$. На получение результата численного решения уравнения (7.33) методом (7.20) — (7.22) при $n=100$ было затрачено 80 с машинного времени ЭВМ БЭСМ-6, в то время как на вычисление этого же значения стандартным методом (7.16) требовалось более 6 мин.

Особенно заметно ускорение при решении двумерных уравнений типа свертки. Задача восстановления дефокусированного изображения сводится к двумерному интегральному уравнению, ядро которого также имеет локальный носитель:

$$Az = \iint K(x - \xi, y - \eta) z(\xi, \eta) d\xi d\eta = u(x, y), \quad (7.34)$$

$$K(s, t) = \begin{cases} 0, & s^2 + t^2 > \rho^2, \\ \frac{1}{\pi \rho^2}, & s^2 + t^2 \leq \rho^2. \end{cases}$$

Для решения этого уравнения также применимы алгоритмы (7.19) — (7.25), где в качестве $\tilde{K}(\omega)$ нужно брать

$$\tilde{K}(\omega_1, \omega_2) = 2 \frac{I_1(\omega \rho)}{\omega \rho}, \quad \omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2,$$

здесь $I_1(\cdot)$ — функция Бесселя первого порядка.

Получение приближенного решения задачи (7.34) методом (7.27), (7.28), (7.22) при $n=1000$ заняло лишь 140 с, а метод

(7.16) работал бы более 1 ч. Реализация алгоритма (7.31) также требует сравнительно небольших затрат времени.

Проведенные модельные и реальные расчеты говорят о высокой эффективности предлагаемых методов (7.19)—(7.25) и (7.31) при решении интегральных уравнений типа свертки вида (7.11), (7.26). Аналогичные выражения можно получить и для некоторых других интегральных уравнений с ядрами специального вида при условии, что левые части этих уравнений переводятся в произведения интегральными преобразованиями Лапласа, Меллина и др. (подробнее о таких уравнениях см. в [103]).

§ 4. Задачи реконструктивной рентгеновской томографии

Реконструктивная томография в последние годы находит все более широкое применение в различных областях науки и техники. Наиболее яркие результаты методы вычислительной томографии дали в медицине. Первые томографы были предназначены для исследований головного мозга. Вслед за этим широкое применение они получили в диагностике заболеваний брюшной полости [112]. В настоящее время на серийных томографах разрешение достигает долей миллиметра. Огромные возможности томографии делают чрезвычайно привлекательным использование специализированных томографов и в технической диагностике, в частности для контроля изделий микроэлектроники. Здесь томография делает лишь первые шаги, но уже сейчас удается достичь разрешения ~ 10 мкм [105, 108].

Результатом измерения в стандартной схеме рентгеновской томографии является двумерный массив данных $I(l, \theta)$, характеризующих интенсивность прошедшего через объект излучения для каждого угла θ и прицельного расстояния l (рис. 13).

Если закон поглощения имеет стандартный вид $\frac{dI}{d\xi} = -\alpha\xi$,

то

$$I(l, \theta) = I_0 \exp \left(- \int_G f(x, y) \delta(l - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \right),$$

$$-\infty < l < +\infty, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2,$$

$f(x, y)$ — искомый коэффициент поглощения плоскости сканиро-

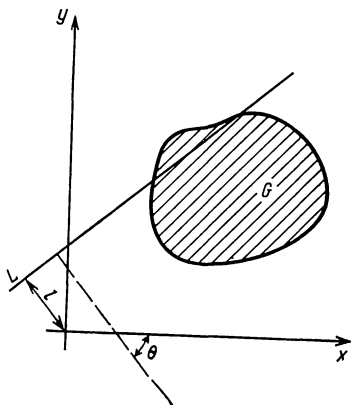


Рис. 13. Схема рентгеновской томографии

вания, G — локальный носитель функции f , $\delta(\cdot)$ — дельта-функция. Используя обозначение $p(l, \theta) = -\ln \frac{I(l, \theta)}{I_0}$, перейдем к линейному уравнению

$$Tf = \int_{L(l, \theta)} f(x, y) dl = p(l, \theta). \quad (7.35)$$

Уравнение (7.35) исследовано достаточно полно, существуют даже явные формулы для его решения [112]. Однако применение этих формул при приближенно заданной информации связано с преодолением существенных трудностей в силу некорректности задачи (7.35). В уравнении (7.35) будем традиционно считать, что оператор T действует из $L_2(\mathbf{R}_2)$ в $L_2(\mathbf{R}_2)$. Оператор T имеет сопряженный:

$$T^*p = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta = u(x, y). \quad (7.36)$$

Можно показать, что

$$T^*Tf = \iint \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{V(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = u(x, y). \quad (7.37)$$

Применяя в (7.37) преобразование Фурье, получим уравнение, связывающее преобразование Фурье элементов f и u ,

$$\tilde{u}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{V\omega_1^2 + \omega_2^2} \hat{f}(\omega_1, \omega_2). \quad (7.38)$$

Последнее уравнение можно рассматривать как уравнение из $L_2(E_2)$ в $L_2(E_2)$ с оператором умножения на функцию. Обратим внимание читателя на то, что оператор умножения на $1/\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, очевидно, неограничен из $L_2(E_2)$ в $L_2(E_2)$, причем неограниченным является и обратный к нему оператор. В силу унитарности преобразования Фурье неограничен оператор T^*T , а, стало быть, и операторы T и T^* .

Для устойчивого решения уравнения (7.35) нужно использовать соответствующие регуляризирующие схемы с неограниченным оператором. В силу простой структуры оператора T^*T достаточно легко производить построение таких схем. В частности тихоновская схема аппроксимации имеет вид

$$\begin{aligned} f_\alpha(x, y) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V\omega_1^2 + \omega_2^2 e^{-t(\omega_1 x + \omega_2 y)}}{1 + \alpha V\omega_1^2 + \omega_2^2} d\omega_1 d\omega_2 \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1 x' + \omega_2 y')} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_\delta(x' \cos \theta + y' \sin \theta, \theta) d\theta dx' dy'. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Компактная запись этой формулы выглядит следующим образом:

$$\hat{f}_\alpha = \overline{(T^*T + \alpha E)^{-1} T^* p_\delta}. \quad (7.40)$$

Остается стандартным образом согласовать параметр регуляризации α с точностью задания входной информации δ .

В настоящее время томографические исследования все более вторгаются в медицину, биологию, микроэлектронику. Для задач микробиологии и микроэлектроники, где необходимо очень высокое разрешение, удастся различать объекты, размеры которых состав-

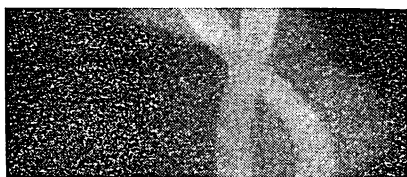


Рис. 14. Томограмма реального образца

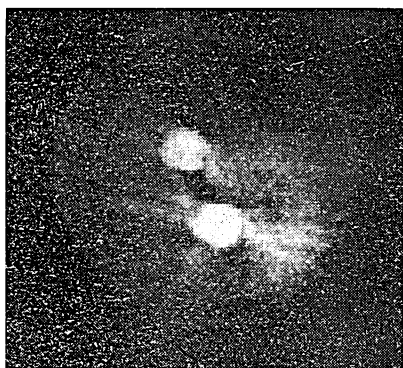


Рис. 15. Реконструированное сечение реального образца

ляют десятки микрон. На рис. 14, 15 приведены проекции $p(l, \theta)$ (исходные данные) и восстановленные изображения (две проволоочки диаметром ~ 50 мкм, помещенные в оболочке). Томограмма получена на томографическом комплексе, созданном на базе растрового электронного микроскопа в МГУ (кафедра электроники физического факультета, кафедра математической физики факультета ВМК).

§ 5. Рентгеновская томография.

Случай неполного задания диапазона углов

Для многих задач микроэлектроники не удастся получить томограмму $p(l, \theta)$ (или, что то же самое, $I(l, \theta)$) в полном диапазоне углов $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Так, например, характерные размеры микросхем по одной координате на несколько порядков больше, чем по другой. При этом реальная функция $I(l, \theta)$ по θ промеряется лишь в некотором диапазоне углов $|\theta| < \theta_0 < \pi/2$. В этом случае формулы (7.36), (7.40) неприменимы. Нетрудно убедиться в том, что задача восстановления $f(x, y)$ по проекциям

$p(l, \theta)$ при $|\theta| < \theta_0 < \pi/2$ имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений.

Один из наиболее распространенных методов получения изображения $f(x, y)$ по данным томографических исследований — метод обращения по Фурье. Он основан на следующем известном результате (подробнее см. [73]).

Пусть $\tilde{f}(\omega_1, \omega_2)$ — двумерное преобразование Фурье от $f(x, y)$. Тогда

$$\tilde{f}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p\left(l, \arctg \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) e^{-il\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} dl. \quad (7.41)$$

Формула (7.41) означает, что одномерное преобразование Фурье от проекции $p(l, \theta)$ по первому аргументу при фиксированном $\theta = \theta^*$ есть функция $\tilde{f}(\omega_1, \omega_2)$ на прямой, составляющей угол θ^* с осью $O\omega_1$. Следовательно, если $p(l, \theta)$ известно для $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то преобразование Фурье от $f(x, y)$ задано во всей плоскости и имеет место формула

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p\left(l, \arctg \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) e^{-il\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} dl \right] d\omega_1 d\omega_2. \quad (7.42)$$

Заметим, что формула (7.42) дает еще один алгоритм решения задачи при полной информации.

Если $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ и $\theta_0 < \pi/2$, то преобразование Фурье от $f(x, y)$ известно не на всей плоскости, а в конусе $|\omega_2| \leq \tg \theta_0 |\omega_1|$. Функция $f(x, y)$ восстанавливается неоднозначно.

Ситуация меняется, если известно, что $f(x, y)$ имеет локальный носитель. Пусть $f(x, y) \equiv 0$ вне круга радиусом R . Тогда функции $g_1(\omega_1) = \tilde{f}(\omega_1, \omega_2)$ (ω_2 фиксировано) и $g_2(\omega_2) = \tilde{f}(\omega_1, \omega_2)$ (ω_1 фиксировано) являются аналитическими. Используя методы аналитического продолжения, зная $\tilde{f}(\omega_1, \omega_2)$ в конусе $|\omega_2| \leq \leq \tg \theta_0 |\omega_1|$, можно определить $\tilde{f}(\omega_1, \omega_2)$ на всей плоскости, и ситуация сводится к рассмотренной [83].

Покажем, как можно решить задачу аналитического продолжения $\tilde{f}(\omega_1, \omega_2)$ из конуса $|\omega_2| \leq \leq \tg \theta_0 |\omega_1|$ на всю плоскость. Она решается, если мы научились эффективно решать задачу аналитического продолжения функции $g(x)$, известной при $x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$, $a > 0$ (рис. 16). Требуется найти $g(x)$ при $x \in [-a, a]$. Про функцию известно, что ее преобразование Фурье имеет локальный носитель. Обозначим M_R класс функций, преобразование Фурье которых имеет локальный носитель радиусом R (т. е. $\tilde{g}(\omega) = 0$ вне круга радиусом R). Пусть $t_R(\omega)$ — характеристическая функция на интервале $(-R, R)$: $t_R(\omega) = 1$ при $|\omega| < R$ и $t_R(\omega) = 0$ при $|\omega| \geq R$. Тогда для любой функции $g \in M_F$

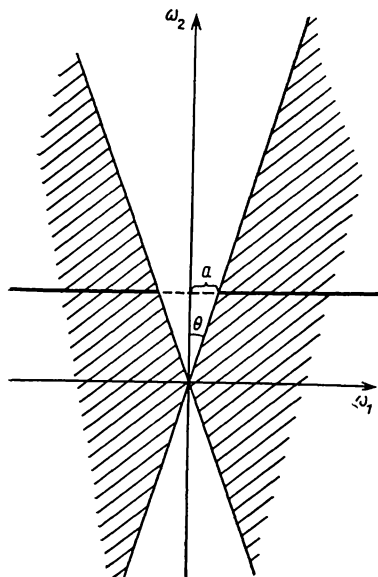


Рис. 16. Схема аналитического продолжения

$$\tilde{g}(\omega) t_R(\omega) = \tilde{g}(\omega), \quad \omega \in (-\infty, \infty).$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin R(x-s)}{\pi(x-s)} g(s) ds = g(x).$$

Обозначим функцию $g(x)$ там, где она неизвестна, $z(x)$, а там, она задана, $u(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \frac{\sin R(x-s)}{\pi(x-s)} z(s) ds - z(x) = \\ &= - \int_{-x}^{-a} \frac{\sin R(x-s)}{\pi(x-s)} u(s) ds - \int_x^{\infty} \frac{\sin R(x-s)}{\pi(x-s)} u(s) ds. \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

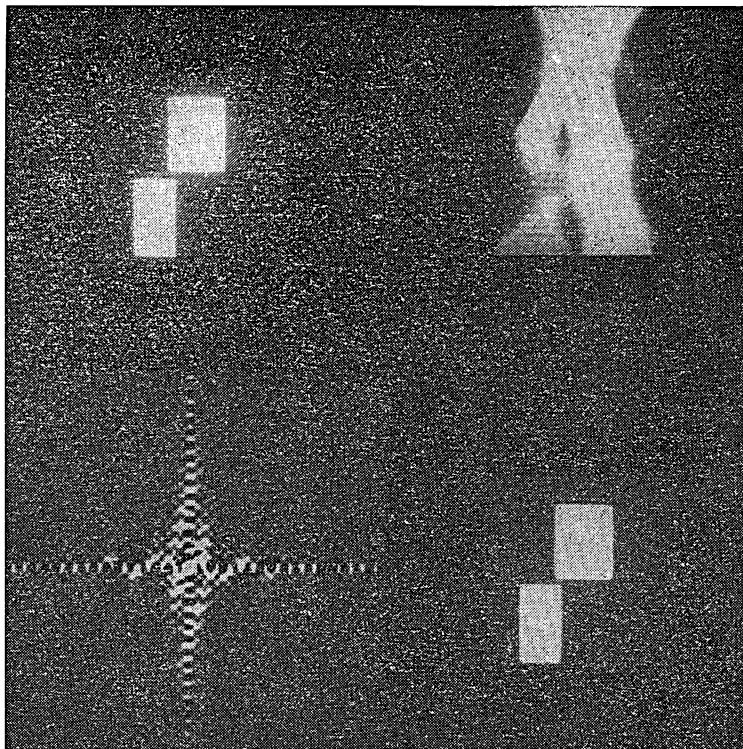


Рис. 17, а

Соотношение (7.43) — уравнение Фредгольма второго рода, причем оператор

$$Az = \int_{-a}^a \frac{\sin R(x-s)}{\pi(x-s)} z(s) ds$$

имеет норму, строго меньшую единицы (оператор A действует из $L_2(-a, a)$ в $L_2(-a, a)$).

Для решения уравнения (7.43) применимы стандартные алгоритмы, например итерационные методы типа простой итерации. После того как найдена функция $\hat{f}(\omega_1, \omega_2)$ на всей плоскости $O\omega_1\omega_2$, можно применить формулу обращения. Ясно, что если $f(x, y)$ имеет локальный носитель, то решение задачи единственно ввиду единственности аналитического продолжения.

На рис. 17 приведены расчеты модельной задачи. Верхний правый угол на рис. 17, а — проекции $p(l, \theta)$ от исходного изображения. Левый нижний угол — модуль преобразования Фурье от $f(x, y)$. Правый нижний угол — восстановленное изображение при полной информации. На рис. 17, б исходное изображение

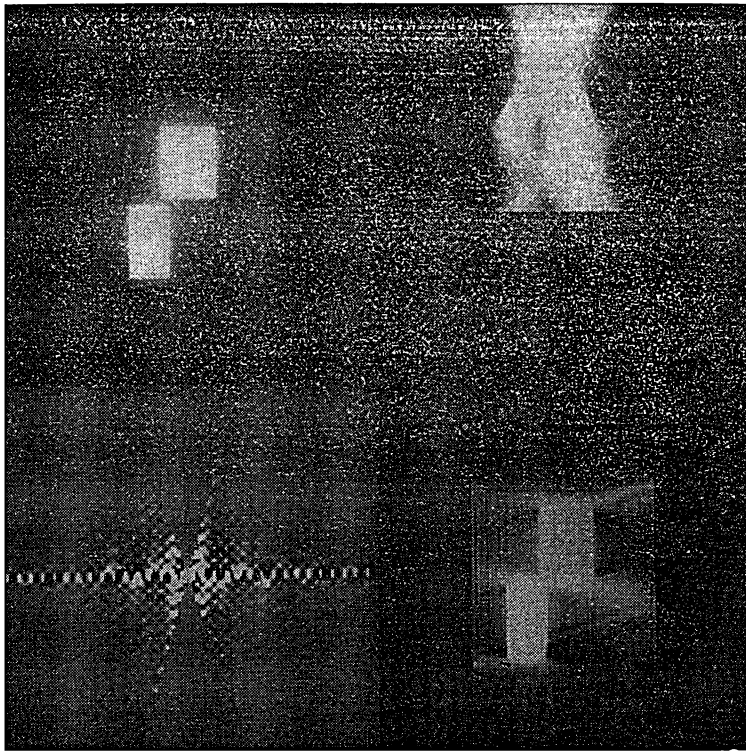


Рис. 17, б

(верхний левый угол) восстановлено по неполным данным ($\theta_0 = 70^\circ < \pi/2$). В преобразовании Фурье $\tilde{f}(\omega_1, \omega_2)$ вырезан конус раствором $\pi/2 - \theta_0$. В правом нижнем углу — нормальное решение задачи, которое получается, если дополнить $\tilde{f}(\omega_1, \omega_2)$ нулями. На рис. 17, в левый нижний угол — восстановленный спектр Фурье $\tilde{f}(\omega_1, \omega_2)$, правый нижний угол — восстановленное изображение.

В последнее время идеи томографии нашли широкое применение в решении задач синтеза антенн сверхвысокого разрешения. Идеи построения радиолокационных станций сверхвысокого разрешения (РЛС с синтезированной апертурой) были опробованы экспериментально еще в начале 50-х годов [75, 109]. Основная идея построения РЛС с синтезированной апертурой заключается в том, что в режиме избирательного картографирования [75] за время анализа изображения некоторой части поверхности Q осуществляется многократное зондирование исследуемой области с разных точек траектории движущегося объекта, являющегося

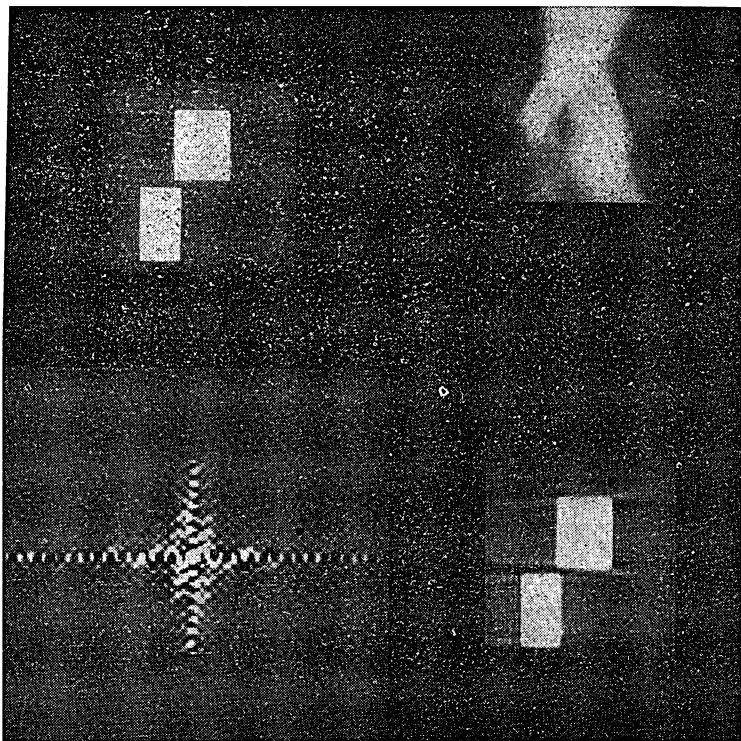


Рис. 17, в

Рис. 17. Реконструктивная томография при неполном диапазоне углов: а) изображение восстановлено по полной информации ($|\theta| \leq \pi/2$); б) изображение восстановлено по неполной информации ($|\theta| \leq 70^\circ$); восстановленное решение соответствует нормальному решению задачи (7.36); в) решение найдено методом аналитического продолжения

носителем РЛС. Можно показать, что задача восстановления изображения участка поверхности Q в некотором приближении есть задача реконструктивной томографии в неполном диапазоне углов [75].

§ 6. Томографические методы в инженерной сейсмике

Томографические методы находят все более широкое применение в решении задач диагностики, в том числе при проектировании сложных инженерных сооружений.

В связи с интенсификацией в строительстве крупных инженерно-технических сооружений значительно возросло значение инженерной геофизики при проведении детального исследования физико-механических свойств и структуры горных пород и

скальных оснований. Предмет исследования инженерной геофизики составляют приповерхностные части земной коры, которые характеризуются сложным строением, широким спектром свойств, трехмерными разномасштабными неоднородностями, размеры которых связаны с неоднородностью кристаллического строения (от 0,1 до 10 мм), с литологическими неоднородностями, тектоническими нарушениями (от 10 до 100 м) и т. п.

В исследовании реальных геологических сред большое значение имеют сейсмические методы, так как скорость и ослабление сейсмических волн зависят от ряда параметров среды, представляющих инженерный интерес: химического состава, плотности, пористости, трещиноватости и др. В качестве источников сейсмических волн используются небольшие взрывы, при этом видимая частота (максимум амплитудного спектра) составляет 60—500 Гц, что соответствует длине волны от 3 до 50 м.

При таких параметрах наиболее адекватным является дифракционное описание распространения сейсмических волн в неоднородной среде. В этом случае задача восстановления скоростных характеристик исследуемого участка среды (размером от десятков до сотен метров) может быть сформулирована как обратная задача дифракции (рассеяния) упругого волнового поля. Строгое решение обратной задачи дифракции в трехмерном случае сопряжено со значительными трудностями, связанными с ее громоздкостью, огромным объемом расчетов, трудно доступным даже для современных ЭВМ. Кроме этого существующие методики сейсмического исследования не позволяют получить за разумное время экспериментальные данные, необходимые для решения задачи в дифракционном приближении.

В настоящее время в практике

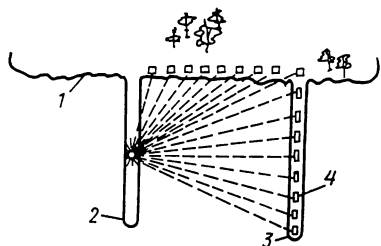


Рис. 18. Схема сейсмической инженерной томографии: 1 — поверхность Земли; 2, 3 — скважины; 4 — приемники излучения

сейсморазведки восстановление скоростного строения среды проводится в рамках кинематической задачи сейсмоки. В постановке этой задачи используется лучевое описание сейсмических волн, которое предполагает, что скорость сейсмической волны в среде мало изменяется на базе одной длины волны. При этом в качестве исходных данных используются только времена распространения продольных волн, измеряемые на современных установках с относительной точностью 1—3%.

Системы наблюдений, применяемые при сейсмическом исследовании среды, обычно сводятся к следующему (рис. 18): на интересующем участке бурятся две (или более) скважины (глубиной до сотен метров); расстояние между скважинами выбирается равным десяткам используемых длин волн. В одной из сква-

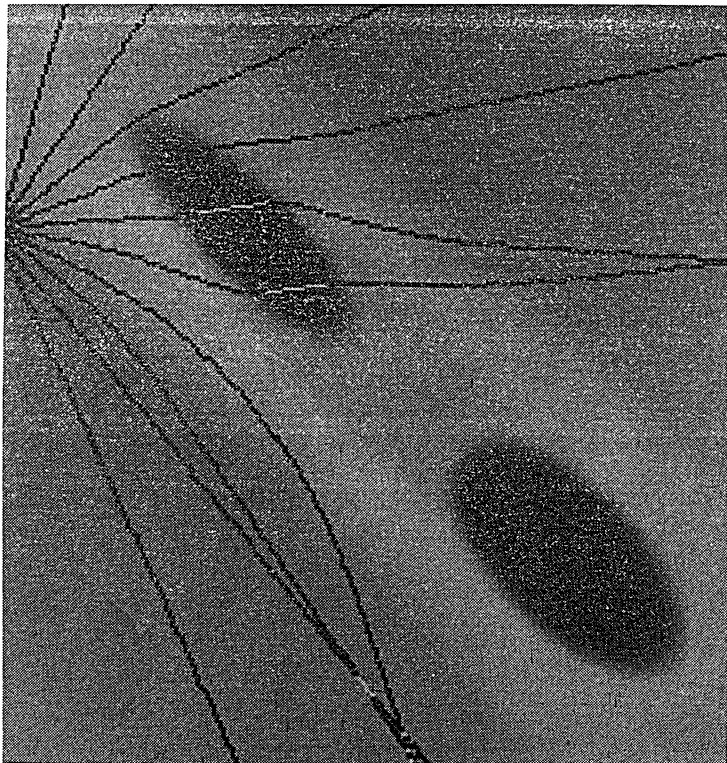


Рис. 19

жин (а также иногда на поверхности) располагают источники сейсмических волн, приемники размещают на поверхности и в другой скважине. Меняя глубину установки источников и местоположение приемников, производят измерения времен пробега продольных волн, т. е. «просвечивают» интересующий участок по разным направлениям.

Интерпретация данных эксперимента сводится к нахождению функции $f=1/v$, где v — локальная скорость распространения волн, по ее интегралам вдоль траектории луча, т. е. к решению уравнения

$$\tau_i = \int_{T_i} f dl. \quad (7.44)$$

В (7.51) T_i — траектория луча, τ_i — измеренное время пробега. В силу принципа Ферма T_i — функция от искомого распределения f : $T_i=T_i(f)$, т. е. уравнение (7.44) нелинейно. Из этого также следует, что даже при плоскостном расположении системы наблюдения задача восстановления оказывается существенно трехмерной.

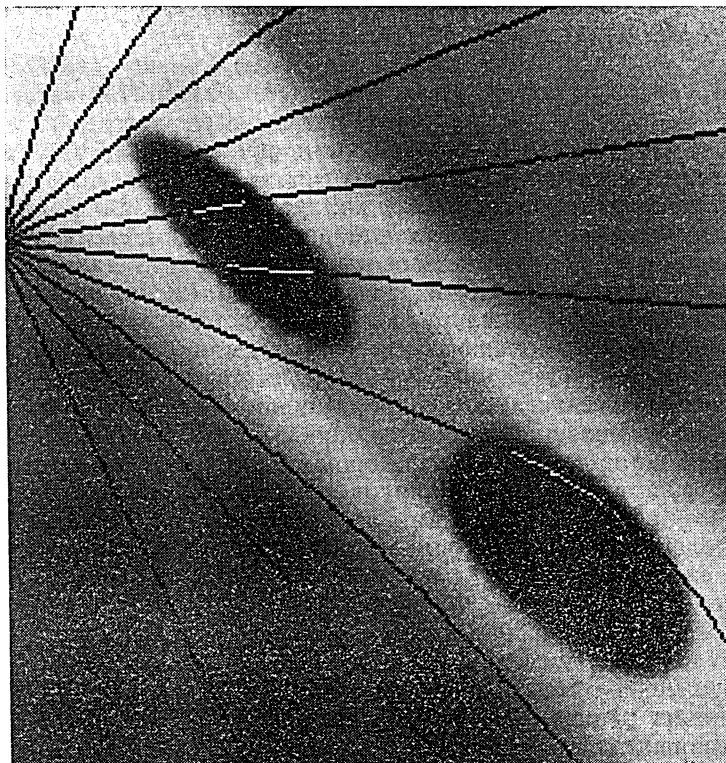


Рис. 20. Распространение лучей в неоднородной среде. Относительные изменения скорости малы

Рис. 19 иллюстрирует распространение лучей из одного источника в двумерно-неоднородной среде; темные области соответствуют низкоскоростным участкам среды, светлые — высокоскоростным (относительное изменение скорости среды $\sim 100\%$). Траектории лучей получены из решения уравнения эйконала.

Для сред с небольшими относительными изменениями скоростных характеристик ($v=v_0+\Delta v$, $\Delta v \ll v_0$) траектории лучей достаточно хорошо аппроксимируются прямыми линиями (рис. 20). В этом случае говорят о сейсмической томографии: после линейаризации интеграла Ферма (7.44) задача сводится к восстановлению так называемого скоростного разреза — функции $f=1/v$ в плоскости, определяемой скважинами и дневной поверхностью, и имеет математическую постановку, совпадающую с постановкой задач рентгеновской вычислительной томографии, а именно требуется решить операторное уравнение

$$Rf=p \quad (7.45)$$

относительно функции двух переменных $f(x, y)$. В уравнении (7.45) R — оператор Радона:

$$Rf = \int f(l \cos \theta - t \sin \theta, l \sin \theta + t \cos \theta) dt,$$

$p = p(\theta, l)$ — параллельные проекции функции $f(x, y)$ (интегралы по прямым $x \cos \theta + y \sin \theta - l = 0$).

Спецификой задач сейсмической томографии является невозможность получения полного набора проекций $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $l \in (-\infty, +\infty)$. При этом имеет место неполнота данных как по углу проецирования θ , так и по параметру l (в чем нетрудно убедиться, например, анализируя схему, представленную на рис. 18) [54]. Однако для большого класса систем наблюдения существуют теоремы единственности [65]. Для схемы на рис. 18 уравнение (7.45) имеет единственное решение, если известны проекции, соответствующие временам пробега от источников в одной скважине до приемников во второй скважине и на дневной поверхности, а также от источников во второй скважине до приемников на дневной поверхности.

Неполнота данных по параметру θ не позволяет применить для решения задачи сейсмической томографии методы, использующие преобразование Фурье (методы свертки, обращения по Фурье и т. п.). Для подобных задач широко используются так называемые алгебраические методы, основанные на сведении уравнения (7.45) к системе линейных алгебраических уравнений.

Введем в интересующей нас области декартову сетку прямоугольных элементов изображения таким образом, чтобы она покрывала реконструируемое изображение (рис. 21). Пронумеруем элементы изображения. Считаем, что $f(x, y)$ принимает постоянное значение f_j внутри j -го элемента изображения, $j = 1, \dots, n$. Обозначим длину пути луча, имеющего i -ю ориентацию ($\theta = \theta_i$, $l = l_i$, $i = 1, \dots, m$) по j -му элементу изображения, через a_{ij} . Тогда модель характеризуется системой линейных алгебраических уравнений

$$A\vec{f} = \vec{p}, \quad (7.46)$$

где $\vec{f} = \{f_j\}$ — вектор изображения, $\vec{p} = \{p_i\}$ — вектор проекций $p = p(\theta_i, l_i)$, $i = 1, \dots, m$, A — матрица $n \times m$ с элементами a_{ij} .

Отметим особенности системы (7.46):

а) размерность системы, как правило чрезвычайно велика: $n \sim 300-1000$, $m \sim 500-1500$,

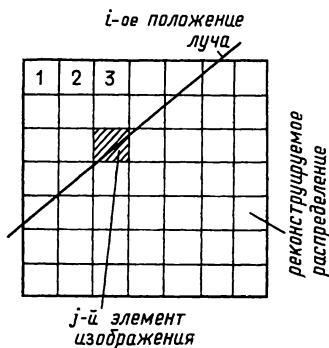


Рис. 21

б) матрица A сильно разреженная (лишь около 1% ее элементов отлично от нуля), так как каждый луч пересекает очень незначительное число элементов изображения;

в) матрица A плохо обусловлена, что является следствием неполноты данных проецирования.

Свойство а) делает нецелесообразным, а зачастую и невозможным применение стандартных алгоритмов для решения системы (7.53). С другой стороны, сильная разреженность матрицы позволяет создать достаточно эффективные по быстродействию итерационные вычислительные процедуры. К сожалению, общей тенденцией в создании таких алгоритмов до недавнего времени было перенесение методов решения систем с хорошо обусловленной матрицей на задачи сейсмической томографии.

С нашей точки зрения, чрезвычайно перспективным представляется применение для решения задач сейсмотомографии устойчивых регуляризирующих итерационных алгоритмов решения некорректно поставленных задач. Эффективность применения этих алгоритмов обусловлена также и тем, что они позволяют естественным образом учитывать различную априорную информацию об искомом решении.

§ 7.

Обратные задачи гравиметрии

Методы регуляризации являются эффективным инструментом решения обратных задач диагностики. Их применение существенно расширяет рамки устойчивых моделей в диагностике плазмы, геофизике, астрофизике и т. п. [79, 52, 26].

Пусть на поверхности $z=0$ измеряется изменение потенциала гравитационного поля, вызванное наличием однородного тела T плотности $\rho_1 \neq \rho_0$. Как известно, потенциал гравитационного поля

$$U(x, y, z) = \gamma_0 \iiint_T \frac{d\xi d\eta d\zeta}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}. \quad (7.47)$$

Измеряемое изменение силы тяжести на поверхности Земли определяется как

$$\Delta g(x, y) = - \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} = \gamma_0 \iiint_T \frac{\xi d\xi d\eta d\zeta}{r^2} \Big|_{z=0}. \quad (7.48)$$

Здесь $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, γ_0 — гравитационная постоянная.

Соотношение (7.48) — операторное уравнение первого рода, связывающее форму поверхности тела T и наблюдаемое изменение $\Delta g(x, y)$. В случае выпуклого тела с известной внутренней точкой удобно в качестве неизвестной задавать функцию $r = r(\varphi, \theta)$, определяющую границу тела T в сферической системе

координат (рис. 22). В этих обозначениях задача вычисления гравитационного поля сводится к вычислению интеграла

$$\Delta g(x, y) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} F(\theta, \varphi, \rho, x, y) d\theta, \quad (7.49)$$

где

$$F(\theta, \varphi, \rho, x, y) = \sin \theta_0 \int_0^{\rho} \frac{(H - r \cos \theta) r^2 dr}{[(x - r \sin \theta \cos \varphi)^2 + (y - r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (H - r \cos \theta)^2]^{3/2}}.$$

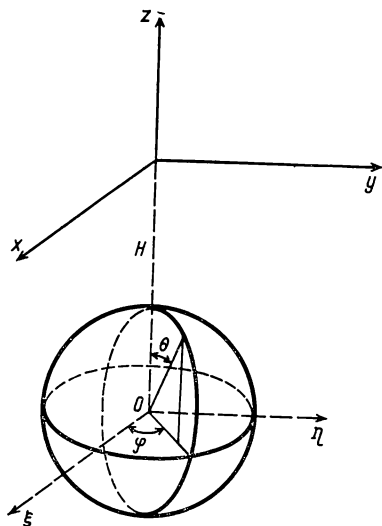


Рис. 22. Поверхность Земли — $z=0$. Начало сферической системы координат находится в точке $(0, 0, -H)$

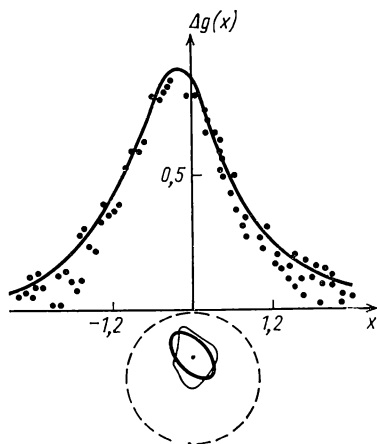


Рис. 23. Обратная задача гравиметрии. Сплошная линия на верхней части рисунка — точное значение. Точки — значение возмущенной правой части

Таким образом, решение прямой задачи при заданном $\rho = \rho(\theta, \varphi)$ сводится к вычислению нелинейного оператора

$$A\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} F(\theta, \varphi, \rho(\theta, \varphi), x, y) d\theta.$$

Решение обратной задачи

$$A\rho = \Delta g(x, y) \quad (7.50)$$

есть операторное нелинейное уравнение первого рода, представ-

ляющее собой некорректную задачу. Считаем, что решение и правая часть (7.50) принадлежат пространствам L_2 . Для решения задачи (7.50) можно использовать метод Ньютона с применением итеративной регуляризации, например (5.53). Его конкретный вид

$$\rho^{(n+1)} = \rho^{(n)} - (\Phi'' + \gamma_n E)^{-1} (\text{grad } \Phi + \gamma_n \rho^{(n)}). \quad (7.51)$$

Здесь $\Phi(\rho) = \|\Delta \rho - g\|_{L_2}^2$, E — единичный оператор, Φ'' — оператор вторых производных от Φ по ρ . При расчетах полагалось $\gamma_n = 1/(1 + 0,5n)$. Дополнив алгоритм (7.51) правилом останова $n = n(\delta)$, можно получить регуляризирующий алгоритм.

На рис. 23 приведены: точное решение модельной задачи — жирная сплошная линия, приближенное решение, полученное после семи итераций, — тонкая сплошная линия, штрихпунктирная линия — начальное приближение. Значение функционала невязки на найденном приближенном решении $\Phi(\rho^{(7)})$ в 400 раз меньше, чем на начальном приближении. Задача решалась при погрешности $\sim 7\%$ от максимума правой части (верхняя часть рис. 23). Сплошная линия на верхней части рис. 23 — точное значение функции $\Delta g(x, y)$.

§ 8.

Задачи линейного программирования

Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} (c, x) &\rightarrow \min, \\ Ax &= b, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \quad (7.52)$$

В (7.52) $x \in E_m$, $b \in E_n$, E_m , E_n — евклидовы пространства соответствующих размерностей. Чтобы исключить возможную неоднозначность решения задачи (7.52), понимаем под ним нормальное решение (решение с минимальной нормой). Если мы хотим построить приближенное решение (7.52), непрерывно зависящее от входных данных A , c , b , необходимо использовать регуляризирующий алгоритм.

Как показывает приводимый ниже пример, наиболее употребительный «точный» метод численного решения (7.52) — симплекс-метод — этим свойством не обладает. Конкретизируем задачу (7.52). Пусть [101]

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0,5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.53)$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = (1, 1, 0, 0, 0).$$

Нормальное решение задачи (7.53) следующее: $x^*=(0; 0; 0,8; 1; 0,4)$. Стандартная программа решения задач линейного программирования на основе симплекс-метода (разработка ВНИИСИ АН СССР) при точных данных выдала в качестве решения задачи (7.53) вектор $(0; 0; 1; 1; 0)$. Это действительно решение (7.53), хотя и не обладающее минимальной нормой.

Возмутим теперь задачу (7.53): положим $b_3=3,01$ (вместо 3,0), оставив все остальные данные без изменений. Стандартная программа не выдает никакого решения и сообщает о несовместности ограничений. Такой же ответ получался и при других возмущениях (даже очень малых), делающих задачу несовместной.

С точки зрения классического подхода эти результаты вполне естественны и говорят о достаточно высоком качестве стандартной программы. Если же встать на точку зрения теории регуляризации, то те же самые результаты говорят о непригодности симплекс-метода в качестве регуляризующего алгоритма.

Положение меняется, если для решения задачи линейного программирования (7.53) использовать итерационные методы с гарантированными регуляризующими свойствами. Продемонстрируем на примере (7.53) работу некоторых из них, укладывающихся в общую схему итеративной регуляризации.

Итеративный процесс

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= [z_n - \alpha_n (\vec{c} + A^+ p_n + \varepsilon_n z_n)]_+, \\ p_{n+1} &= p_n + \alpha_n (A z_n - b - \varepsilon_n p_n), \end{aligned} \quad (7.54)$$

где

$$[t]_+ = \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

сходится к решению прямой и двойственной задачи с суммарной минимальной нормой для z_0, p_0 при подходящем выборе α_n, ε_n . Это некоторая спецификация процесса (6.19). Условия на α_n, ε_n , обеспечивающие сходимость, даются теоремой 5.2 (см. также § 3 гл. VI). Например, последовательности

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}, \quad \alpha_n = \frac{0,1}{(\sqrt{n+1})^0,1+1}, \\ \varepsilon_n &= \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}, \quad \alpha_n = \frac{0,01}{\sqrt[4]{n+1}} \end{aligned}$$

являются допустимыми.

Правило останова $n=n(\delta)$, обеспечивающее регуляризующие свойства процесса (7.54), должно быть выбрано из условия

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\varepsilon_{n(\delta)}} = 0.$$

Приведем результаты расчета задачи (7.53) с возмущенными данными ($a_{11}=2,001$; $b_3=3,01$; все остальные данные не изменены):

$$z=(0; 0; 0,8052\dots; 0,9916\dots; 0,4026\dots).$$

Расчеты показывают слабую зависимость приближенного регуляризованного решения параметра n .

Для решения задачи (7.52)) можно использовать и другие методы итеративной регуляризации, например метод (6.25). Для задачи линейного программирования он имеет вид

$$z_{n+1}=z_n-(A^T A + \varepsilon_n s + 6[-z_n]_+)^{-1} \times \\ \times (\varepsilon_n s z_n + \varepsilon_n c + A^T A z_n - A^T b - 3([-z_n]_+)^2). \quad (7.55)$$

В (7.55) $\varepsilon_n \geq 0$, $s \geq 0$ — параметры процесса, $[-z_n]_+$ — диагональная матрица или вектор, компоненты которого равны нулю, если z_n положительны, $([-z_n]_+)^2$ — вектор, компоненты которого — квадраты компонент вектора $[-z_n]_+$. Соответствующий выбор управляющих параметров ε_n и s и процедуры останова $n=n(\delta)$ обеспечивает регуляризирующие свойства алгоритма (7.55).

Проведенные численные расчеты показали высокую эффективность методов типа (7.55) для решения задач линейного программирования с неточно заданной матрицей A , векторами b и c . Например, при $s=0,01$ и $\varepsilon_n = \frac{1}{1+10n}$ при возмущенных, как описано выше, данных компоненты z_{40} отличались от нормального решения (7.53) в третьем знаке после запятой.

1. Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций. М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
2. Альбер Я. И. О решении линейных уравнений с монотонными операторами в банаховом пространстве//Сиб. мат. жур. 1975. Т. 16, № 1. С. 3—11.
3. Альбер Я. И., Рязанцева И. П. Принцип невязки при решении нелинейных задач с монотонными операторами — регуляризирующий алгоритм//ДАН СССР. 1978. Т. 239, № 5. С. 1017—1020.
4. Антохин Ю. Г. Некорректные задачи в гильбертовом пространстве и устойчивые методы их решения//Диф. ур. 1967. Т. 3, № 7. С. 1135—1156.
5. Бакушинский А. Б. Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве//ЖВМ и МФ. 1967. Т. 7, № 3. С. 672—677.
6. Бакушинский А. Б. Алгоритмы регуляризации для линейных уравнений с неограниченными операторами//ДАН СССР. 1968. Т. 183, № 1. С. 12—14.
7. Бакушинский А. Б., Сизиков В. С. Некоторые нестандартные РА и их численная реализация//ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22, № 3. С. 532—539.
8. Бакушинский А. Б. О построении регуляризирующего алгоритма при случайных помехах//ДАН СССР. 1969. Т. 189, № 2. С. 231—233.
9. Бакушинский А. Б. К проблеме построения линейных регуляризирующих алгоритмов в банаховых пространствах//ЖВМ и МФ. 1973. Т. 13, № 1. С. 204—210.
10. Бакушинский А. Б. Замечания об одном классе регуляризирующих алгоритмов//ЖВМ и МФ. 1973. Т. 13, № 6. С. 1596—1598.
11. Бакушинский А. Б. К обоснованию принципа невязки//Дифференциальные и интегральные уравнения. Вып. 2. Иркутск: Изд-во ИГУ, 1973. С. 117—126.
12. Бакушинский А. Б. Регуляризирующий алгоритм на основе метода Ньютона—Канторовича для решения вариационных неравенств//ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16, № 6. С. 1397—1404.
13. Бакушинский А. Б. Методы решения монотонных вариационных неравенств, основанные на принципе итеративной регуляции//ЖВМ и МФ. 1977. Т. 17, № 6. С. 1350—1362.
14. Бакушинский А. Б. Оптимальные и квазиоптимальные методы решения линейных задач, порожденные регуляризирующими алгоритмами//Изв. вузов. Сер. Математика. 1978. № 11. С. 6—10.
15. Бакушинский А. Б. Некоторые методы решения систем монотонных вариационных неравенств//Численные методы оптимизации. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1978. С. 13—26.
16. Бакушинский А. Б. Эквивалентные преобразования вариационных неравенств и их использование//ДАН СССР. 1979. Т. 247, № 6. С. 1297—1300.
17. Бакушинский А. Б. К принципу итеративной регуляризации//ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19, № 4. С. 1040—1043.
18. Бакушинский А. Б. Вычислительные методы композиционного планирования//Проблемы композиционного планирования. М.: ВНИИСИ, 1980. № 5. С. 5—21.

19. Бакушинский А. Б. Замечание об итеративном методе Брауна—Волконского//Экономика и мат. методы. 1981. Т. 17, № 1. С. 196—199.
20. Бакушинский А. Б. Принцип невязки в случае возмущенного оператора для общих регуляризирующих алгоритмов//ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22, № 4. С. 989—993.
21. Бакушинский А. Б. Одно асимптотическое соотношение для итеративно-регуляризованного метода Ньютона—Канторовича//ЖВМ и МФ. 1983. Т. 23, № 1. С. 216—218.
22. Бакушинский А. Б. Замечания о выборе параметра регуляризации по критерию квазиоптимальности и отношения//ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24, № 8. С. 1258—1259.
23. Бакушинский А. Б. Регуляризирующие алгоритмы в банаховом пространстве, основанные на обобщенном принципе невязки//Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1984. С. 18—21.
24. Бакушинский А. Б., Апарцин А. С. Методы типа стохастической аппроксимации для решения линейных некорректных задач//Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 1. С. 12—18.
25. Бакушинский А. Б., Поляк Б. Т. О решении вариационных неравенств//ДАН СССР. 1974. Т. 219, № 5. С. 1038—1041.
26. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В., Степанов Л. Д. Применение алгоритмов итерационной регуляризации для решения обратных задач гравиметрии//Изв. АН СССР. Сер. Физика земли. 1986. № 10. С. 43—50.
27. Балакришнан А. В. Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
28. Итеративные методы в теории игр и программировании/В. З. Беленький, В. А. Волконский и др. М.: Наука, 1974.
29. Бенсусан А., Лионс Ж., Темам Р. Методы декомпозиции, децентрализации, координации и их приложения//Методы вычислительной математики. Новосибирск: Наука, 1975. С. 144—274.
30. Буров В. А., Горюнов А. А. и др. Обратные задачи рассеяния в акустике (обзор)//Акустический журнал. 1986. Т. XXXII, вып. 4. С. 433—449.
31. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972.
32. Вайникко Г. М. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту: Изд-во ТГУ, 1982.
33. Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986.
34. Василенко Г. И., Тараторин А. М. Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986.
35. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
36. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
37. Васин В. В. Проксимальный алгоритм с проектированием в задачах выпуклого программирования. Препринт ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1982.
38. Винокуров В. А. О понятии регуляризуемости разрывных отображений//ЖВМ и МФ. 1971. Т. 11, № 5. С. 1097—1112.
39. Винокуров В. А. О порядке погрешности вычисления функции от приближенно заданным аргументом//ЖВМ и МФ. 1973. Т. 13, № 5. С. 1112—1123.
40. Гапоненко Ю. Л. Метод дискретной функции Грина для линейных некорректных задач//ДАН СССР. 1976. Т. 229, № 2. С. 269—271.
41. Гилязов С. Ф. Об устойчивом решении линейных операторных уравнений первого рода методом наискорейшего спуска//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1980. № 3. С. 26—32.
42. Гилязов С. Ф. О регуляризирующих алгоритмах, основанных на методе сопряженных градиентов//ЖВМ и МФ. 1986. Т. 26, № 1. С. 15—22.
43. Гольштейн Е. Г. Метод модификации монотонных отображений//Экономика и мат. методы. 1975. Т. 11, № 6. С. 1144—1159.

44. Гольштейн Е. Г. О сходимости градиентного метода отыскания седловых точек модифицированной функции Лагранжа//Экономика и мат. методы. 1977. Т. 13, № 2. С. 322—329.
45. Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г. Некоторое обобщение принципа невязки для случая оператора, заданного с ошибкой//ДАН СССР. 1972. Т. 203, № 6. С. 1238—1239.
46. Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г. Об одном регуляризирующем алгоритме для некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором//ЖВМ и МФ. 1972. Т. 12, № 6. С. 1592—1594.
47. Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г. Обобщенный принцип невязки//ЖВМ и МФ. Т. 13, № 2. С. 294—302.
48. Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г. О принципе невязки при решении нелинейных некорректных задач//ДАН СССР. 1974. Т. 214, № 3. С. 499—500.
49. Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г. О применимости принципа невязки в случае нелинейных некорректных задач и о новом регуляризирующем алгоритме их решения//ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15, № 2. С. 290—297.
50. Гончарский А. В., Степанов В. В. О равномерном приближении решения с ограниченной вариацией некорректных задач//ДАН СССР. 1979. Т. 248, № 1. С. 20—22.
51. Гончарский А. В., Степанов В. В. Численные методы решения некорректных задач на компактных множествах//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1980. № 3. С. 12—18.
52. Гончарский А. В., Черепашук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978.
53. Гончарский А. В. Обратные задачи оптики//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1986. № 3. С. 59—77.
54. О проблеме неполноты данных в задачах восстановления скоростного разреза по данным сейсмического просвечивания/А. В. Гончарский, А. Н. Матвиенко и др.//Тезисы III Всесоюзного симпозиума по вычислительной томографии. Киев: Наукова думка, 1987.
55. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы (общая теория). М.: ИЛ, 1962.
56. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы (спектральная теория). М.: Мир, 1966.
57. Данциг Дж., Вульф П. Алгоритмы разложения для задач линейного программирования//Математика (сборник переводов). 1964. Т. 8, № 1. С. 151—160.
58. Демьянов В. Ф., Певный А. Б. Численные методы отыскания седловых точек//ЖВМ и МФ. 1972. Т. 12, № 5. С. 1099—1127.
59. Ди Ченцо А. Сопоставление разрешающей способности системы машинной томографии и РЛС с синтезированием апертуры в решении задач избирательного картографирования//ТИИЭР. 1986. Т. 74, № 8. С. 122—124.
60. Емелин Н. В., Красносельский М. А. К теории некорректных задач//ДАН СССР. 1979. Т. 244, № 4. С. 805—808.
61. Зуховицкий С. И., Поляк Р. А., Примак М. Е. Вогнутые игры многих лиц (численные методы)//Экономика и мат. методы. 1971. Т. 7, № 6. С. 888—900.
62. Иванов В. К. О линейных некорректных задачах//ДАН СССР. 1962. Т. 145, № 2. С. 270—272.
63. Иванов В. К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода//ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6, № 4. С. 1089—1094.
64. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
65. Иванссон С. Сейсмическая скважинная томография: теория и методы вычислений//ТИИЭР. 1986. Т. 74, № 2. С. 88—93.
66. Карманов В. Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1975.
67. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

68. Приближенное решение операторных уравнений/М. А. Красносельский, Г. М. Вайнник и др. М.: Наука, 1969.
69. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
70. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
71. Лисковец О. А. Некорректные задачи и устойчивость квазирешений// //Сиб. мат. жур. 1969. Т. 10, № 2. С. 373—385.
72. Лисковец О. А. Теория и методы решения некорректных задач// //Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 20. М.: ВИНТИ, 1982. С. 116—178.
73. Луитт Р. Н. Алгоритмы реконструкции с использованием интегральных преобразований//ТИИЭР. 1983. Т. 71, № 3. С. 125—147.
74. Люстерник Л. А., Соболев В. Н. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
75. Мансон Д. С., Брайен Д. Д., Джеккинс У. К. Томографический подход к описанию работы РЛС с синтезированием апертуры в режиме избирательного картографирования//ТИИЭР. 1983. Т. 71, № 8. С. 5—17.
76. Морозов В. А. О решении функциональных уравнений методом регуляризации//ДАН СССР. 1966. Т. 167, № 3. С. 510—512.
77. Морозов В. А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации//ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6. № 1. С. 170—175.
78. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректных задач. М.: Изд-во МГУ, 1974.
79. Некорректные задачи естествознания/Под ред. А. Н. Тихонова, А. В. Гончарского. М.: Изд-во МГУ, 1987.
80. Немировский А. С. О регуляризирующих свойствах метода сопряженных градиентов на некорректных задачах//ЖВМ и МФ. 1986. Т. 26, № 3. С. 332—347.
81. Немировский А. С., Поляк Б. Т. Итеративные методы решения линейных некорректных задач при точной информации I, II//Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1984. № 2. С. 13—25; № 3. С. 18—25.
82. Никайдо Х., Исода К. Заметка о бескоалиционных выпуклых играх//Бесконечные антагонистические игры. М.: Физматгиз, 1963. С. 449—458.
83. Новикова Т. Н., Матвиенко А. Н. Обратные задачи вычислительной томографии с неполным набором данных//Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1987. № 3. С. 14—17.
84. Обломская Л. Я. О методах последовательных приближений для уравнений в банаховых пространствах//ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8, № 2. С. 417—426.
85. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
86. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.
87. Петунин Ю. И., Пличко А. Н. Теория характеристик подпространств и ее приложения. Киев: Высшая школа, 1980.
88. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
89. Рисс Ф., Надь Б. С. Лекции по функциональному анализу. М.: ИЛ, 1954.
90. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
91. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
92. Сарв Л. Одно семейство нелинейных итерационных методов для решения некорректных задач//Изв. АН ЭССР. Сер. Физика—математика. 1982. № 3. С. 261—268.
93. Страхов В. Н. О решении некорректных задач магнито- и гравиметрии, представленных интегральными уравнениями типа свертки I, II//Изв. АН СССР. Сер. Физика земли. 1967. № 4. С. 36—54; № 5. С. 33—53.
94. Страхов В. Н. О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве//Диф. ур. 1970. № 8. С. 1490—1495.
95. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач//ДАН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195—198.

96. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации//ДАН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501—504.
97. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач//ДАН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49—52.
98. Тихонов А. Н. О решении нелинейных интегральных уравнений первого рода//ДАН СССР. 1964. Т. 156, № 6. С. 1296—1299.
99. Тихонов А. Н. О нелинейных уравнениях первого рода//ДАН СССР. 1965. Т. 161, № 5. С. 1023—1026.
100. Тихонов А. Н. О методах регуляризации задач оптимального управления//ДАН СССР. 1965. Т. 162, № 4. С. 763—765.
101. Тихонов А. Н., Рютин А. А., Агаян Г. М. Об устойчивом методе решения задачи линейного программирования с приближенными данными//ДАН СССР. 1983. Т. 272, № 5. С. 1058—1063.
102. Тихонов А. Н. Об устойчивости задач оптимизации функционалов//ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6, № 4. С. 631—634.
103. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
104. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация/А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский и др. М.: Наука, 1983.
105. Вычислительная микротомография объектов в рентгеновской и оптической сканирующей микроскопии/А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский и др.//ДАН СССР. 1986. Т. 289, № 5. С. 1103—1107.
106. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В. Некорректные задачи обработки изображений//ДАН СССР. 1987. Т. 294, № 4. С. 832—837.
107. Тихонов А. Н., Гончарский А. В. Некорректные задачи вычислительной диагностики и реконструкции изображений//Тезисы III Всесоюзного симпозиума по вычислительной томографии. Киев: Наукова думка, 1987. С. 18.
108. Основные принципы, проблемы и перспективы развития томографии на микроуровне/А. Н. Тихонов, П. Н. Бочикашвили и др.//Тезисы III Всесоюзного симпозиума по вычислительной томографии. Киев: Наукова думка, 1987. С. 8.
109. Томиясу К. РЛС с синтезированием апертуры и их применение для отображения поверхности объекта//ТИИЭР. 1983. Т. 68, № 5. С. 40—67.
110. Федотов А. М. Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск: Наука, 1982.
111. Фридман В. М. О сходимости методов типа наискорейшего спуска//УМН. 1962. Т. 17, вып. 3. С. 201—204.
112. Хермен Г. Восстановление изображений по проекции. М.: Мир, 1983.
113. Ценсор Я. Методы реконструкции изображений, основанные на разложении в конечные ряды//ТИИЭР. 1983. Т. 71, № 3. С. 148—160.
114. Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: ИЛ, 1962.
115. Browder F. E. Existence and Approximation of Solutions of Nonlinear Variational Inequalities//Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1966. V. 56, N 4. P. 1080—1086.
116. Goncharsky A. V. Ill-posed problems and their solution methods//Ill-posed problem in the Natural Science. М.: Peace, 1987. P. 12—52.
117. Rocafellar R. T. Monotone Operators and Augmented Lagrangian Methods in Nonlinear Programming//Nonlinear Programming. N 3. Acad. Press. 1978. P. 1—25.

Учебное пособие

*Бикишинский Анатолий Борисович,
Гончарский Александр Владимирович*

**Некорректные задачи.
Численные методы и приложения**

Зав. редакцией
С. И. Зеленский

Редактор
Е. Д. Егорушкина

Художественный редактор
Ю. М. Добрянская

Технический редактор
В. В. Макарова

Корректоры
*И. А. Мушникова,
Л. С. Клочкова*

ИБ № 3266

Сдано в набор 01.06.89.
Подписано в печать 03.11.89.
Формат 60×90/16. Бумага кн.-журн.
Гарнитура литературная. Высокая печать.
Усл. печ. л. 12,5. Уч.-изд. л. 12,79.
Тираж 7540 экз. Заказ 116. Изд. № 388.
Цена 75 коп.

*Ордена «Знак Почета» издательство
Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.*

Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ.
119891, Москва, Ленинские горы