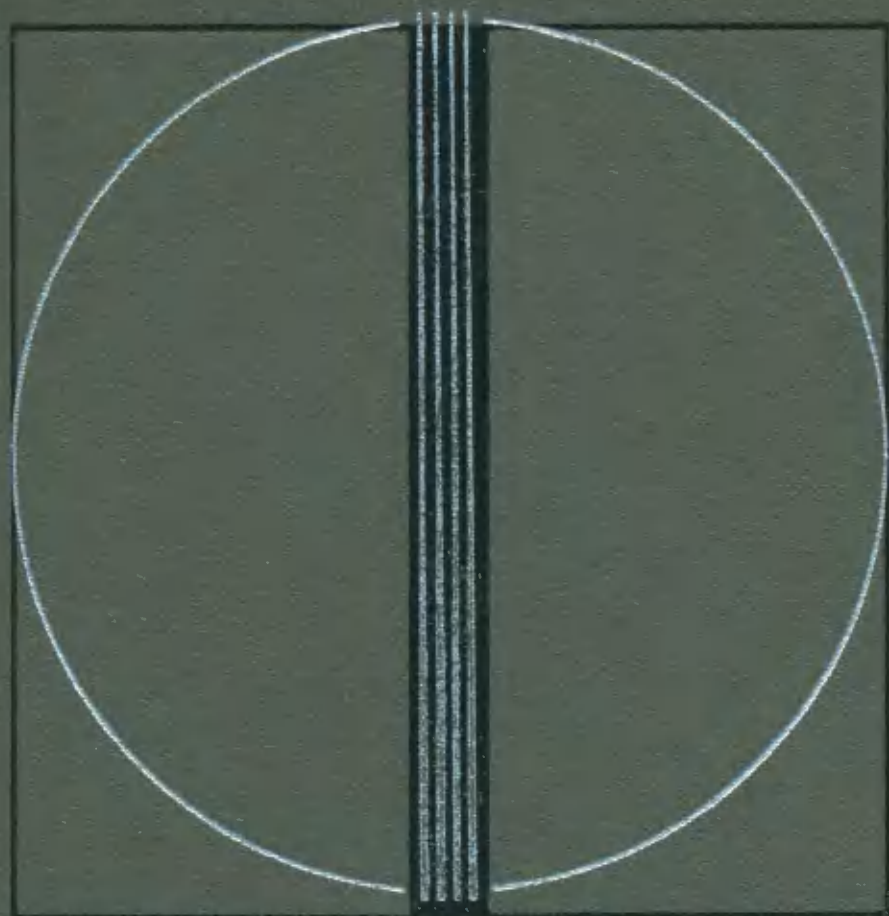




ПРОЕКТИРОВАНИЕ
СИСТЕМ
НАВЕДЕНИЯ

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ НАВЕДЕНИЯ

*Под ред. д-ра техн. наук
Е. А. ФЕДОСОВА*



Москва
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
1975

А в т о р ы: А. М. БАТКОВ, А. А. ГОРСКИЙ, В. Ф. ЛЕВИТИН,
Г. Г. СЕБРЯКОВ, Е. А. ФЕДОСОВ, Б. Е. ФЕДУНОВ

Рецензент чл.-кор. АН СССР, д-р техн. наук Е. П. Попов

Проектирование систем наведения. Под ред. д-ра техн. наук Е. А. Федосова. М., «Машиностроение», 1975, 296 с.

В книге изложены современные математические методы, применяемые при проектировании систем наведения ракет, и показан способ их использования. Описан ряд аналитических и численных методов анализа и синтеза законов управления линейных и нелинейных систем.

Книга предназначена для инженеров и научных работников, занимающихся вопросами проектирования систем наведения.

Табл. 5, ил. 89, список лит. 44 назв.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Система наведения ракет представляет собой замкнутую единую систему, состоящую из аппаратуры визирования цели, датчиков измерения параметров движения ракеты, различных счетно-вычислительных приборов для выработки команд наведения и сервомеханизмов, приводящих в движение аэродинамические или газодинамические устройства управления. Весь этот сложный комплекс аппаратуры объединен в единую систему процессом прохождения сигналов наведения. Такая сложная динамическая система помимо аппаратуры наведения включает в себя и собственно динамические звенья управляемого объекта — ракеты и кинематические связи его с целью.

Формализация процесса наведения ракеты на цель представляет собой классическую задачу теории управления с рядом особенностей.

Первая особенность заключается в резко выраженной нестационарности процесса наведения. Эта нестационарность вызвана тем, что два движущихся объекта в пространстве каких-либо координат связаны самим процессом относительного движения определенными кинематическими связями. Обычно эти связи формализуются дифференциальными уравнениями, отражающими движение вектора дальности между целью и ракетой в пространстве и во времени. Отдельные параметры этого движения могут быть измерены аппаратурой визирования цели и использованы в выработке команд наведения. В связи с тем, что вектор дальности при сближении с целью стремится к нулю, в контуре регулирования оказывается сложное нелинейное, нестационарное кинематическое звено, существенным образом определяющее весь процесс наведения.

Вторая особенность связана с динамикой движения летательного аппарата в пространстве под действием управляющих сил и всего комплекса мешающих этому движению возмущений. Эта динамика описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений, которые линеаризуются при определенных допущениях. Однако как исходные линейные уравнения, так и линеаризованные уравнения имеют специфический вид.

Третья особенность определяется критериями, по которым идет проектирование ракетной системы. Это могут быть критерии устойчивости и качества переходных процессов при анализе и синтезе системы стабилизации, критерии точности или боевой эффективности при анализе и синтезе самого контура наведения ракеты. В отдельных случаях может использоваться критерий эффективности — стоимость.

Эти особенности позволили выделить теорию наведения как самостоятельную дисциплину из теории управления динамическими системами.

В последние годы в научно-технической литературе появилось много публикаций по общей теории наведения. В данной книге читатель найдет описание некоторых математических методов проектирования систем наведения и познакомится со способами их использования. Здесь изложена методика проектирования систем наведения, основанная на теории линейных управляемых систем. Приведены методы исследования таких математических моделей, которые позволяют учитывать нестациональность параметров объекта и производственные допуски. В книге показано, как, используя современную математическую теорию оптимального управления и численные методы оптимизации, можно устанавливать структуры законов управления и выбирать их параметры.

Цель данной книги — изложить современные математические методы проектирования систем наведения ракет. Книга освещает отдельные фрагменты теории наведения, имеющие внутреннюю общность и связь и являющиеся, по мнению авторов, центральными на данном этапе развития систем наведения.

Авторы приносят благодарность рецензенту книги чл.кор. АН СССР Е. П. Попову за полезные замечания, способствовавшие ее улучшению. Авторы будут весьма признательны читателям, которые сочтут возможным прислать свои замечания по адресу: Москва, Б-78, 1-й Басманный пер., 3, изд-во «Машиностроение».

ВВЕДЕНИЕ

Современная ракета — это комплекс сложных технических устройств, предназначенных для обеспечения ее движения при выполнении той или иной целевой функции.

При создании сложных ракетных систем инженеры решают проблемы аэродинамики, газовой динамики, гидродинамики, электродинамики, материаловедения и другие не менее сложные физические или химические проблемы. Это определяется физическими процессами, протекающими в самой ракете и ее элементах. Ракетная техника наиболее остро из всех других направлений современной техники выдвинула проблемы, связанные с так называемыми информационными процессами.

Понятие информационных процессов возникает при рассмотрении управления движением летательного аппарата, когда для выработки управляющего сигнала используется та или иная информация о параметрах движения самой ракеты или преследуемой ею цели. При этом образуется упорядоченная передача тех или иных сигналов по элементам ракетной системы в форме тех или иных физических процессов. Однако современная наука об управлении рекомендует создать модель передачи сигнала по цепям системы, абстрагируясь от физической сущности самого физического содержания процесса передачи. Такая модель явления вскрывает новое качество физического процесса — его информационное содержание, а сам процесс в такой модели становится информационным.

Изучением информационных процессов занимается теория управления. Одним из направлений этой общей теории управления является теория управления движением, которая иногда называется теорией наведения. В настоящее время еще не завершено создание законченной теории наведения ракетных сис-

тем. Это обстоятельство объясняется несколько своеобразным процессом проектирования таких систем. Сложность динамических процессов, описывающих движение ракетной системы, с первых же шагов проектирования требует решения систем нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка. Столкнувшись с подобными трудностями в первые годы зарождения управляемых ракет, инженеры и ученые обратились к машинной математике, к вычислительным машинам, особенно аналоговым вычислительным машинам.

Обойдя таким образом математические трудности, инженеры-ракетчики стали создавать моделирующие комплексы из аналоговых решающих элементов. Появилось целое направление в технике проектирования и исследования — имитационное моделирование. Преимущество аналогового моделирования заключалось в том, что процессы в аналоговой модели протекают в так называемом реальном масштабе времени, что позволяет иногда включать в модель реальные конструкции приборов и элементов систем управления, выполненных в макетном или опытном исполнении. В настоящее время с ростом быстродействия цифровых машин они все более заменяют аналоговые в моделирующих комплексах.

Используя мощный аппарат моделирования, инженер получает все ответы на вопросы, которые возникают при проектировании. Именно это обстоятельство и привело к тому парадоксу, когда создаются очень совершенные конструкции ракет при довольно скромных достижениях в аналитической теории систем наведения. Это обычно компенсируется хорошей оснащенностью современного конструкторского коллектива вычислительными машинами, моделирующими комплексами и динамическими стендами.

Однако моделирование остается только экспериментом, иногда математическим экспериментом. Только теория способна дать нужное обобщение и параметрические зависимости, необходимые инженеру при проектировании. Авторы глубоко убеждены, что только сочетание моделирования с аналитическими расчетами и исследованиями позволяет наиболее гармонично построить процесс современного проектирования систем управления ракет.

Задачи математического исследования процессов наведения ракет рассматривались рядом отечественных и зарубежных ав-

торов. В книге представлены математические исследования отдельных вопросов теории наведения.

Одним из них является методика проектирования системы наведения, основанная на теории линейных управляемых систем, достаточно хорошо развитой в настоящее время.

Однако при создании линейной системы управления не всегда удается учесть ряд факторов, имеющих большое значение для повышения эффективности системы управления. Таковыми являются производственные допуски, нестабильность параметров, жесткие ограничения на управление, на отклонение органов управления или на их прочность, ограничения на различные параметры, характеризующие движения объекта (фазовые координаты). Учет этих факторов либо части из них является действительно необходимым при создании системы управления для работы ракеты в предельных условиях, т. е. при максимальном использовании ее возможностей.

Работа ракет в широком диапазоне условий и стремление максимально использовать предельные возможности вынуждают учитывать при создании системы управления ряд ограничений на управление (ограничение максимальной величины управляющего усилия, по прочности и возможности отклонения рулей, углов встречи ракеты с целью и др.).

При этом вначале необходимо получить математическую модель, учитывающую главную специфику рассматриваемой задачи и поддающуюся математическому анализу. На основании условий оптимальности управления в этой математической модели устанавливаются основные принципиальные особенности закона управления — определяется его оптимальная структура. Установление структуры закона управления, обеспечивающей максимальную эффективность в рамках основных ограничений, крайне важно для получения совершенной системы управления.

Полученная структура управления должна обеспечивать работоспособность реального объекта, математическое описание которого гораздо сложнее той модели, на которой выбиралась структура. Сама структура содержит параметры, подлежащие выбору при создании реального закона управления на основе этой структуры. Оптимальный выбор параметров при рассмотрении сложного объекта возможно производить только с использованием вычислительных машин. Все эти вопросы нашли отражение в предлагаемой книге.

В книге не отражены вопросы проектирования контуров стабилизации, предназначенных для ракет с широким диапазоном условия их применения. Использование в этих задачах хорошо развитой в настоящее время теории марковских случайных процессов позволяет получить эффективные технические решения.

Необходимо отметить, что поскольку основное внимание в данной книге обращается на выявление общих качественных закономерностей, все приведенные примеры демонстрируют приемы применения математических теорий в конкретных ситуациях проектирования систем наведения и носят методический характер, а все численные результаты являются только иллюстративными.

ГЛАВА 1

МЕТОДИКА ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМ НАВЕДЕНИЯ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Задачей первой главы является создание единого методического подхода к анализу и синтезу линейных (линеаризованных) систем наведения, использующих различные источники информации.

В этой главе дается понятие пролета как меры текущей точности наведения; угловой скорости линии дальности и линейного рассогласования, измерение которых позволяет оценить пролет и сформировать управление.

Линеаризация кинематических зависимостей, связывающих пролет, линейное рассогласование, угловую скорость линии дальности с относительным ускорением ракеты и цели, приводит к единой структурной схеме системы наведения с выходом по пролету и двумя входами: по ускорению цели и по ошибке измерения относительных координат.

С помощью аппарата весовых и параметрических передаточных функций формируется подход к исследованию точности линейной системы в один момент времени наблюдения, вводится понятие эквивалентных по точности систем.

Для конкретных методов наведения формируются выражения, связывающие передаточную функцию системы (контура стабилизации, фильтра, измерителя относительных координат) с параметрической передаточной функцией замкнутой системы.

Понятие эквивалентности по точности позволило применить для оптимизации нестационарной системы наведения широко распространенную задачу Винера, разработанную для стационарных систем.

1.1. ЗАДАЧА, ПРОЦЕСС И СИСТЕМА НАВЕДЕНИЯ

Относительное движение ракеты и цели в каждый момент времени удобно характеризовать векторами: дальности $\bar{R}(t)$, относительной скорости $\bar{V}(t)$ и относительного ускорения $\bar{J}(t)$ (рис. 1.1).

Независимо от того, каким образом формируются начальные условия этого относительного движения и вектор $\bar{J}(t)$, предопределяющий изменение векторов $\bar{V}(t)$ и $\bar{R}(t)$, в каждом полете ракеты модуль дальности имеет минимум, представляющий собой кратчайшее расстояние R_k между ракетой и целью. Задачей наведения ракеты на цель является минимизация кратчайшего расстояния R_k . Естественно, что это возможно только при условии, что за некоторое время до момента пролета ракеты мимо цели начнется прогнозирование величины R_k и на основе этого прогноза будет формироваться соответствующее управление.

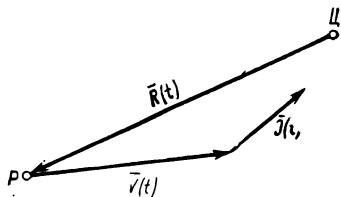


Рис. 1.1. Взаимное расположение векторов дальности $\bar{R}(t)$, относительной скорости $\bar{V}(t)$ и относительного ускорения $\bar{J}(t)$

Процессом наведения назовем прогнозирование кратчайшего расстояния R_k между ракетой и целью и управление ракетой, т. е. создание ускорения $\bar{J}$, обеспечивающего уменьшение этого расстояния. Вектор $\bar{J}$ представляет собой разность

$$\bar{J} = \bar{J}_p - \bar{J}_c,$$

где $\bar{J}_p(t)$ и $\bar{J}_c(t)$ — векторы ускорения ракеты и цели.

Обычно наведение осуществляется только с помощью ускорения $\bar{J}_p$. Ускорение цели $\bar{J}_c$ всегда ограничено по модулю и может произвольно изменяться. В частном случае цель может стремиться увеличить кратчайшее расстояние R_k .

Системой наведения назовем всю совокупность устройств, обеспечивающих управление кратчайшим расстоянием R_k в каждой реализации процесса наведения. В систему наведения входят:

информационные устройства, изменяющие текущие параметры относительного движения ракеты и цели;

вычислительные и корректирующие устройства, прогнозирующие текущую оценку кратчайшего расстояния между ракетой и целью в данной реализации процесса наведения и формирующие заданное управление;

контур стабилизации ракеты, обеспечивающий реализацию заданного управления. Контур стабилизации включает в себя ракету и автопилот, которые выполняют здесь функции исполнительного устройства и регулятора соответственно.

1.2. ПРОЛЕТ — ТЕКУЩАЯ МЕРА ТОЧНОСТИ НАВЕДЕНИЯ

Текущей мерой точности наведения, т. е. величиной, прогнозирующей наименьшее значение модуля дальности R_k , принято считать дальность, на которой ракета пролетит мимо цели, если с данного момента времени t ракета и цель в относительном дви-

жении будут перемещаться прямолинейно (рис. 1.2), т. е. по касательной к относительной траектории. Эту дальность называют пролетом (или промахом). Обозначим ее индексом $\bar{h}(t)$, или $\bar{h}$, причем аргумент t указывает здесь на то, что величина пролета может изменяться во времени, так как реальное относительное движение непрямолинейно*.

По определению векторы $\bar{R}$, $\bar{V}$ и $\bar{h}$ лежат в одной плоскости (плоскости Q), причем вектор $\bar{h}$ перпендикулярен вектору $\bar{V}$.

В момент времени t_k , в который вектор пролета совпадает с вектором дальности, расстояние между ракетой и целью минимально, так как вектор дальности

$$\bar{R}(t_k) = \bar{h}(t_k)$$

нормален к относительной траектории. Для простоты принимает-

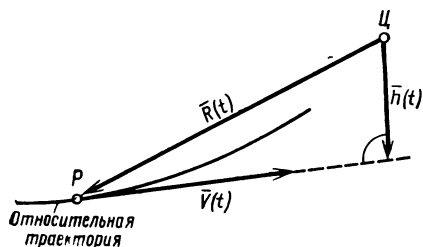


Рис. 1.2. Текущий пролет

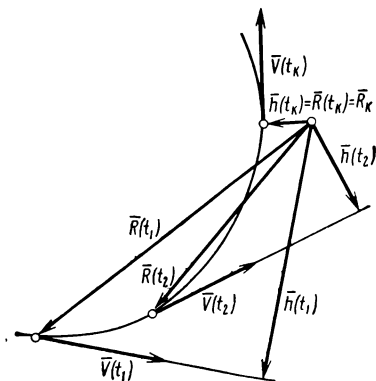


Рис. 1.3. Пример изменения пролета при криволинейном относительном движении ($\bar{h}(t_k)$ — конечный пролет)

ся, что на всей относительной траектории это происходит только однажды (рис. 1.3). Момент времени t_k будем называть моментом встречи.

Скалярная величина пролета может быть записана как

$$h = R \sin \lambda, \quad (1.1)$$

где λ — угол между векторами $\bar{R}$ и $\bar{V}$, отсчитанный от направления вектора $\bar{R}$.

Из (1.1) следует, что полет ракеты с нулевым текущим пролетом ($h(t) \equiv 0$) предполагает относительное движение вдоль линии дальности (рис. 1.4). К этому случаю применяют обычно термин — полет в упрежденную точку встречи.

Векторное выражение для пролета будет

$$\bar{h} = \bar{R} - \bar{V}_0 (\bar{R} \bar{V}_0). \quad (1.2)$$

* Возможны и другие меры текущей точности, например расстояние, на котором ракета пролетит мимо цели, если с данного момента ускорение будет постоянным.

Здесь и ниже индексом «0» обозначены соответствующие единичные векторы [1].

В выражении (1.2) пролет $\bar{h}$ представляется в виде катета прямоугольного треугольника (см. рис. 1.2), в котором гипотенузой служит дальность $\bar{R}$, а вторым катетом — проекция дальности на направление относительной скорости.

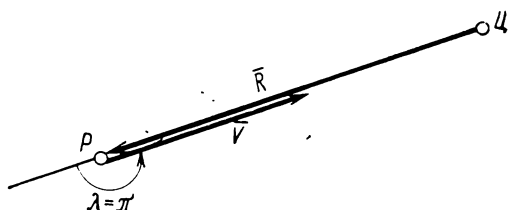


Рис. 1.4. Взаимное расположение векторов дальности и относительной скорости при пролете, равном нулю

Приняв пролет $\bar{h}$ в качестве меры текущей точности наведения, можно определить возможность управления пролетом. Для этой цели продифференцируем (1.2) по времени

$$\dot{\bar{h}} = \dot{\bar{R}} - \dot{\bar{V}}_0 (\bar{R} \bar{V}_0) - \bar{V}_0 (\dot{\bar{R}} \bar{V}_0) - \bar{V}_0 (\bar{R} \dot{\bar{V}}_0). \quad (1.3)$$

Учитывая, что $\dot{\bar{R}} = \bar{V}$ и, следовательно,

$$\bar{V}_0 (\dot{\bar{R}} \bar{V}_0) = \bar{V}_0 (\bar{V} \bar{V}_0) = \bar{V},$$

получим

$$\dot{\bar{h}} = -\dot{\bar{V}}_0 (\bar{R} \bar{V}_0) - \bar{V}_0 (\bar{R} \dot{\bar{V}}_0). \quad (1.4)$$

Умножим и разделим первое слагаемое выражения (1.4) на величину относительной скорости V

$$-\dot{\bar{V}}_0 (\bar{R} \bar{V}_0) = \dot{\bar{V}}_0 V \left[-\frac{(\bar{R} \bar{V}_0)}{V} \right].$$

Произведение $\dot{\bar{V}}_0 V$ представляет собой нормальную составляющую вектора относительного ускорения. Эта составляющая $\bar{J}_H$ (рис. 1.5) равна проекции вектора относительного ускорения $\bar{J}$ на плоскость H , перпендикулярную вектору относительной скорости и содержащую вектор пролета.

Выражение в квадратных скобках имеет размерность времени и может быть истолковано как время, оставшееся до момента встречи $t_K = t_0$ при условии, что с данного момента относительное движение прямолинейно и равномерно.

Таким образом, введем обозначение

$$t_y = -\frac{(\overline{RV}_0)}{V}.$$

$$-\bar{V}_0(\bar{R}\bar{V}_0)=\bar{J}_H t_y. \quad (1.5)$$

Вектор J_H может быть разложен в плоскости H на два: по направлению полета и перпендикулярно к полету. Первую проекцию обозначим J_h , вторую — $\bar{J}_g$, тогда

$$\bar{J}_H = \bar{J}_h + \bar{J}_\Omega. \quad (1.6)$$

Второе слагаемое в выражении (1.4) умножим и разделим на V . При этом скалярное произведение можно будет преобразовать так:

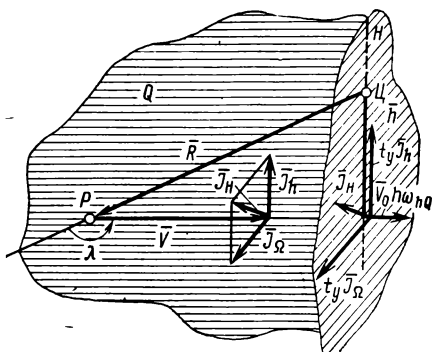


Рис. 1.5. Составляющие относительно-го ускорения и скорости изменения пролета

$$\begin{aligned}(\bar{R}\dot{\bar{V}}_0) &= (\bar{R}\dot{\bar{V}}_0 V) \frac{1}{V} = \\ &= (\bar{R}\bar{J}_H) \frac{1}{V}. \quad (1.7)\end{aligned}$$

Учитывая, что векторы $\vec{R}$, $\vec{V}$ и $\vec{h}$ лежат в одной плоскости и, следовательно, вектор $\vec{J}_a$, перпендикулярный $\vec{h}$ и $\vec{V}$, перпендикулярен вектору $\vec{R}$, получим

$$(\bar{R}\bar{J}_H)=(\bar{R}\bar{J}_h). \quad (1.8)$$

Если принять, что положительно направленный вектор $\bar{J}_h$ вращает вектор относительной скорости $\bar{V}$ в положительном направлении, то угол между $\bar{R}$ и $\bar{J}_h$ согласно рис. 1.5 равен $\lambda + \frac{\pi}{2}$.

Тогда с учетом (1.1), (1.7) и (1.8) второе слагаемое может быть записано в виде

$$\begin{aligned} -\bar{V}_0(\bar{R}\dot{\bar{V}}_0) &= -\bar{V}_0 R \frac{J_h}{V} \cos\left(\lambda + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \bar{V}_0 R \sin \lambda \frac{J_h}{V} = \bar{V}_0 h \omega_{hQ}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Индексом ω_{hQ} обозначена величина $\frac{J_h}{V}$, характеризующая скорость разворота вектора $\bar{V}$ и, следовательно, перпендикулярного ему вектора $\bar{h}$ в плоскости Q .

Из (1.9) следует, что второе слагаемое выражения (1.4) представляет собой нормальную составляющую скорости изменения вектора пролета в плоскости Q , отличную от нуля только тогда, когда отлична от нуля проекция вектора относительного ускорения J_h . Иными словами, выражение (1.9) определяет составляющую скорости, изменяющую направление пролета в связи с изменением его скалярной величины. Естественно, что эта составляющая так же, как и составляющая $\bar{J}_H t_y$, не изменяет скалярной величины пролета. Итак, производная вектора пролета $\dot{\bar{h}}$ может быть представлена в виде суммы трех ортогональных составляющих:

$$\dot{\bar{h}} = \bar{J}_H t_y + \bar{J}_Q t_y + \bar{V}_0 \omega_{hQ}, \quad (1.10)$$

где $\bar{J}_H t_y$ — скорость изменения скалярной величины пролета;
 $\bar{J}_Q t_y$ — скорость разворота пролета в плоскости H ;
 $\bar{V}_0 \omega_{hQ}$ — скорость изменения направления пролета в плоскости Q при изменении его скалярной величины.

На скорость изменения пролета влияет только проекция вектора относительного ускорения на плоскость H (вектор $\bar{J}_H$).

Проекция на направление относительной скорости $\bar{J}_V$ оказывает косвенное влияние на скорость изменения пролета вследствие изменения скалярной величины относительной скорости и, следовательно, изменения упрежденного времени t_y .

Из этого следует, что наибольшей скорости уменьшения пролета при заданном по модулю векторе ускорения можно добиться, если направить полный вектор относительного ускорения по вектору пролета. Идеальная система наведения, таким образом, должна обеспечить измерение вектора пролета и направить вектор относительного ускорения $\bar{J}$ навстречу вектору пролета. Увеличение текущего пролета достигается таким маневром цели, при котором проекция ускорения $\bar{J}$ на направление пролета положительна.

Итак, вектор пролета $\bar{h}$ позволяет прогнозировать кратчайшее расстояние между ракетой и целью R_k и указывает, как ориентировать вектор относительного ускорения, чтобы добиться максимальной скорости изменения этого кратчайшего расстояния.

На практике непосредственное измерение пролета представляет значительные трудности. Однако существует большое число координат, характеризующих относительное движение ракеты и цели, которые позволяют при определенных допущениях оценить пролет. Относительно просто это достигается при не-

подвижной цели, так как в этом случае относительная скорость совпадает со скоростью ракеты.

Измеряя дальность и углы пеленга, можно с точностью до угла атаки и ошибки, вносимой скоростью ветра, определить пролет по формуле (1.1), где $\lambda = \pi - \varphi$ (φ — полный угол пеленга цели). Для правильной ориентации вектора ускорения знание дальности необязательно.

В случае подвижной цели для оценки пролета часто используется измерение линейного рассогласования или угловой скорости линии дальности ракета — цель.

Рассмотрим связь этих координат с пролетом.

1.3. ЛИНЕЙНОЕ РАССОГЛАСОВАНИЕ

Линейным рассогласованием $\bar{l}$ называют вектор, характеризующий расстояние между целью и линией, проведенной через ракету в заданном направлении $\bar{u}_0$.

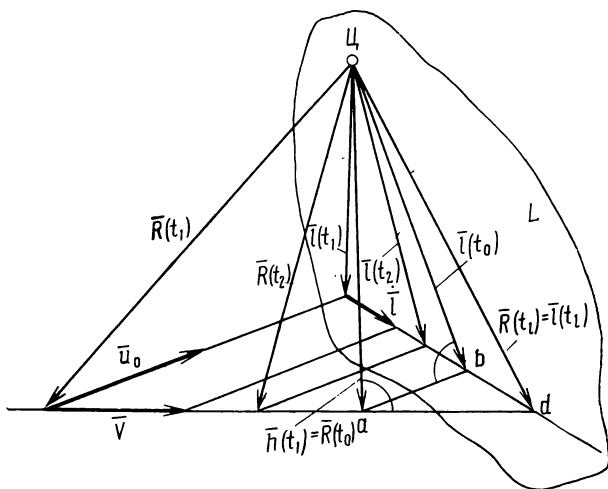


Рис. 1.6. Изменение линейного рассогласования в процессе относительного движения

В прямолинейном относительном движении последовательным положениям вектора дальности $\bar{R}(t)$ соответствуют векторы линейного рассогласования $\bar{l}(t)$, лежащие в плоскости L , перпендикулярной заданному направлению (рис. 1.6).

Вектор $\bar{l}(t)$, лежащий в той же плоскости, является проекцией вектора относительной скорости на плоскость L . При равномерном прямолинейном относительном движении линейное

рассогласование в момент t_2 может быть выражено через линейное рассогласование в момент t_1 формулой

$$\bar{l}(t_2) = \bar{l}(t_1) + \dot{\bar{l}}(t_1)(t_2 - t_1).$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \bar{l}(t_0) &= \bar{l}(t_1) + \dot{\bar{l}}(t_1)(t_0 - t_1), \\ \bar{l}(t_i) &= \bar{l}(t_1) + \dot{\bar{l}}(t_1)(t_i - t_1). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь $\dot{\bar{l}}(t_i)$ — вектор линейного рассогласования в момент, когда вектор дальности $\bar{R}(t)$ оказывается лежащим в плоскости L .

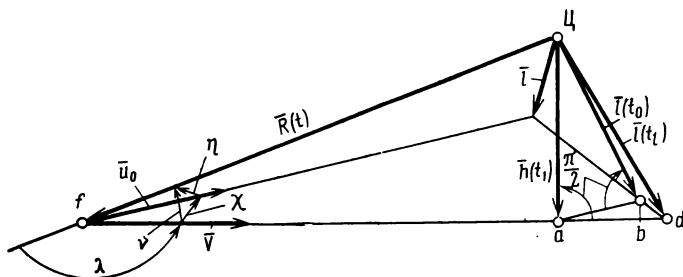


Рис. 1.7. Взаимная ориентация векторов дальности $\bar{R}(t)$, относительной скорости $\bar{V}(t)$ и опорного направления $\bar{u}_0$

Согласно рис. 1.6 скалярные величины векторов $l(t_0)$, $l(t_i)$ и $h(t_i)$ удовлетворяют неравенству

$$l(t_i) > h(t_i) > l(t_0). \quad (1.12)$$

Действительно, пролет $h(t_i)$ — катет в прямоугольном треугольнике, гипотенузой которого является $l(t_i)$. В то же время пролет $h(t_i)$ может рассматриваться в качестве гипотенузы прямоугольного треугольника, в котором $l(t_0)$ является катетом.

Докажем, что при определенных условиях из (1.12) следует приближенное равенство

$$\bar{h}(t_i) \simeq \bar{l}(t_0) = \bar{l}(t_1) + \dot{\bar{l}}(t_1)(t_0 - t_1). \quad (1.13)$$

Модуль разности верхней и нижней оценок пролета, как это следует из (1.11), равен величине

$$|\dot{\bar{l}}(t_1)(t_i - t_0)|,$$

совпадающей с длиной отрезка bd на рис. 1.6, 1.7.

Для того чтобы сопоставить эту величину с величиной пролета, введем следующие углы: η — между вектором $\bar{u}_0$ и обрат-

ным направлением вектора дальности $\bar{R}$, χ — между векторами $\bar{u}_0$ и $\bar{V}$ и v , равный $\pi - \lambda$ (см. рис. 1.7).

Длина отрезка fd может быть представлена в виде

$$R \frac{\cos \eta}{\cos \chi},$$

длина отрезка fa —

$$R \cos v.$$

Их разность (длина отрезка ad) равна

$$R \cos v \left(\frac{\cos \eta}{\cos \chi \cos v} - 1 \right).$$

С другой стороны, длина отрезка ad может быть выражена через длину отрезка bd . Согласно (1.11) и рис. 1.7 длина отрезка ad равна

$$\dot{l}(t_1)(t_1 - t_0) \frac{1}{\sin \chi}.$$

Приравнявая последние выражения, получим разность оценок в виде

$$\dot{l}(t_1)(t_1 - t_0) = R \operatorname{tg} \chi (\cos \eta - \cos \chi \cos v). \quad (1.14)$$

Если направить вектор $\bar{u}_0$ по вектору $\bar{V}$ ($\chi=0$), разность оценок обращается в нуль, так как при этом вектор линейного рассогласования $\bar{l}$ совпадает с вектором пролета $\bar{h}$. Кроме того, разность оценок обращается в нуль, если пролет равен нулю, так как в этом случае $v=0$ и, как следует из рис. 1.7,

$$\eta = \chi.$$

При фиксированных значениях $v \neq 0$ и $\chi \neq 0$ величина разности оценок (1.14) достигает максимального значения при минимальном η , а минимального значения — при максимальном η . Такими максимальными и минимальными значениями согласно рис. 1.7 являются

$$\eta = |\chi| + |v| \text{ и } \eta = |\chi - v|, \quad (1.15)$$

что соответствует расположению вектора $\bar{u}_0$ в плоскости, содержащей $\bar{V}$ и $\bar{h}$. При этом максимальному значению η соответствует $t_1 - t_0 < 0$, а минимальному — $t_1 - t_0 > 0$. Воспользовавшись тем, что $h = R \sin v$, из (1.14) для этих случаев получим

$$\dot{l}(t_1)(t_1 - t_0) = -h \sin \chi \operatorname{tg} \chi \text{ при } t_1 - t_0 < 0,$$

$$\dot{l}(t_1)(t_1 - t_0) = h \sin \chi \operatorname{tg} \chi \text{ при } t_1 - t_0 > 0.$$

Учитывая, что при (1.15) разность (1.14) максимальна, имеем

$$\dot{l}(t_1)|t_1 - t_0| \leq h \sin \chi \operatorname{tg} \chi.$$

Таким образом, относительная величина разности оценок скалярной величины пролета удовлетворяет неравенству

$$\frac{\dot{l}(t_1)|t_1 - t_0|}{h(t)} \leq \sin \chi \operatorname{tg} \chi.$$

Угол между вектором пролета $\bar{h}(t_1)$ и его оценками $\bar{l}(t_1)$, $\bar{l}(t_0)$ может быть выражен через тангенс углов $a\bar{C}b$ и $a\bar{C}d$ (см. рис. 1.7). Так,

$$\operatorname{tg}(\bar{h}(t_1), \widehat{\bar{l}(t_0)}) \leq \sin \chi,$$

$$\operatorname{tg}(\bar{h}(t_1), \widehat{\bar{l}(t_1)}) \leq \operatorname{tg} \chi.$$

Как следует из рис. 1.7, при малых углах χ ошибка в определении пролета в основном ориентирована вдоль вектора относительной скорости, поэтому, направив вектор ускорения $\bar{J}$ навстречу вектору $\bar{l}(t_0)$ или $\bar{l}(t_1)$, в соответствии с (1.3) — (1.10) получим следующие составляющие:

$$J_h \simeq |J|; \quad |J_a| \ll J_h \text{ и } J_v \simeq |J| \chi.$$

Как следует из (1.13), точность оценки пролета существенно зависит от точности определения упрежденного времени $t_y = t_0 - t_1$. Обычно упрежденное время рассчитывают по приближенной формуле

$$t_y = \frac{R(t_1)}{|\dot{R}(t_1)|},$$

дающей приемлемую точность только при условии

$$h \ll R. \quad (1.16)$$

В связи с тем, что определить положение вектора относительной скорости довольно трудно, опорное направление выбирают близким к обратному направлению вектора дальности (т. е. задаются малым углом η). При этом угол χ может быть малым только при малых v , что соответствует выполнению условия (1.16). Таким образом, использование линейного рассогласования $\bar{l}(t_0)$ в качестве приближения вектора пролета $\bar{h}(t_1)$ допустимо, если выполняется условие (1.16) и угол η мал.

Обычно в начале процесса наведения условие (1.16) выполняется. В зенитных ракетах это обеспечивается разворотом пусковой установки и этапом вывода, в ракетах «воздух—воздух» — этапом самонаведения носителя, а в некоторых случаях еще и автономным управлением на стартовом участке траектории. В

процессе сближения ракеты с целью при уменьшении дальности это условие выполняется тем дольше, чем успешнее происходит процесс наведения. Однако всегда, в конце концов, дальность оказывается равной пролету, поэтому, естественно, что в некоторой окрестности точки встречи угол χ становится большим, а оценка упрежденного времени неверной. При этом оценка пролета с помощью неравенства (1.12) будет неточной. Практически чем выше относительная скорость ракеты и цели, тем менее существенно увеличение угла χ . При большой относительной

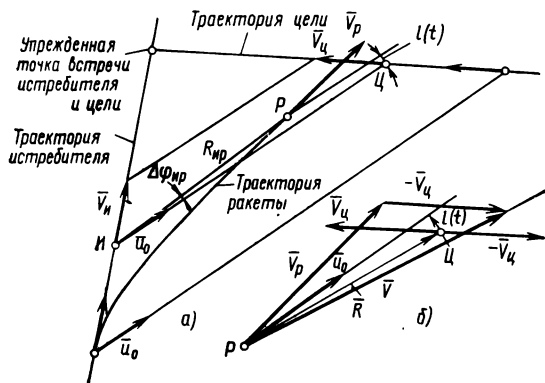


Рис. 1.8. Траектория ракеты «воздух — воздух» при управлении по линейному рассогласованию (истребитель наводится в «собственную» точку встречи с целью)

скорости условие (1.16) выполняется до малого времени t_0-t_1 , когда согласно (1.10) пролет уже не может существенно измениться. Таким образом, положение вектора $\bar{u}_0$ можно выбирать достаточно произвольно, но так, чтобы угол η не был большим.

Согласно (1.13) скалярную величину линейного рассогласования можно рассматривать как решение дифференциального уравнения первого порядка с $h(t)$ в правой части. Произвольный выбор вектора $\bar{u}_0$ соответствует произвольному выбору начальных условий по $l(0)$ и компенсируется соответствующим изменением $\dot{l}(0)$.

Вектор $\bar{u}_0$ может быть, например, выбран так, чтобы линия заданного направления совпадала с линией дальности ракета—цель в момент начала наведения. В этом случае угол $\eta=0$, угол $\chi=\psi$, $l(0)=0$, а $\dot{l} \simeq \frac{1}{t_0} \bar{h}(0)$.

В качестве примера рассмотрим вариант построения системы телеуправления ракеты «воздух — воздух» (рис. 1.8).

Положим, что истребитель осуществляет самонаведение в упрежденную точку встречи с целью. При этом линия дальности

истребитель — цель остается параллельной самой себе. Она и выбирается в качестве опорного направления. После пуска ракеты истребитель с помощью бортовой радиолокационной станции измеряет дальность до ракеты и угол между линиями дальности истребитель — ракета и истребитель — цель. Этих данных достаточно для того, чтобы вычислить линейное рассогласование, т. е. расстояние между ракетой и линией дальности истребитель — цель. На рис. 1.8,а показано абсолютное, а на рис. 1.8,б — относительное движение цели, ракеты и истребителя.

При формировании контура наведения по линейному рассогласованию необходимо знать, как связаны между собой векторы $\bar{J}$ и $\bar{l}$. $\dot{\bar{l}}$ — проекция относительной скорости $\bar{V}$ на плоскость L , перпендикулярную плоскости чертежа, $\ddot{\bar{l}}$ — проекция вектора относительного ускорения $\bar{J}$ на ту же плоскость

$$\ddot{\bar{l}} = \bar{J}_L. \quad (1.17)$$

При малых углах γ проекция $\bar{J}_L \simeq \bar{J}_H$, поэтому согласно (1.10) и (1.13), направив $\bar{J}_L$ по обратному направлению вектора $\bar{l}(t_0)$, можно обеспечить совпадение вектора $\bar{J}_H$ с обратным направлением $\bar{h}$ и, следовательно, уменьшить пролет.

Таким образом, система наведения по линейному рассогласованию должна включать в себя:

устройство, измеряющее линейное рассогласование, его производную и время, оставшееся до встречи ракеты с целью;

вычислитель, который так формирует команды на контур стабилизации, чтобы проекция полного вектора ускорения ракеты на плоскость L была направлена навстречу вектору $\bar{l}(t_0)$. (Если имеется информация о проекции ускорения цели на плоскость L , естественно так сформировать команду на контур стабилизации, чтобы навстречу вектору $\bar{l}(t_0)$ была направлена проекция полного вектора относительного ускорения $\bar{J}_L$).

Системы наведения, использующие линейное рассогласование, применяются при телеуправлении, т. е. тогда, когда координаты ракеты и цели измеряются с поверхности Земли или с подвижного объекта и сформированные команды транслируются по линии связи на ракету.

В отличие от описанной схемы на практике для простоты реализации иногда применяют подвижный вектор $\bar{u}_0$. Так, при управлении по методу трех точек вектор $\bar{u}_0$ направляют по дальности станция — цель (имеется в виду, например, радиолокационная станция, ведущая измерение координат цели и ракеты). Наличие угловой скорости вектора в первом приближении эквивалентно маневру цели и приводит к дополнительным затратам маневра ракеты, однако в ряде случаев это оказывается целесо-

образным, так как отпадает необходимость в точном измерении дальности до цели (рис. 1.9).

Часто не производят измерения упрежденного времени $t_y = t_0 - t$, необходимого для правильного учета производной линейного рассогласования. При этом команда на контур стабилизации формируется в соответствии с формулой

$$\bar{l}(t) + \dot{\bar{l}}(t)T,$$

где T — константа.

Такой выбор способа управления основан на том, что для ограничения текущего пролета доста-

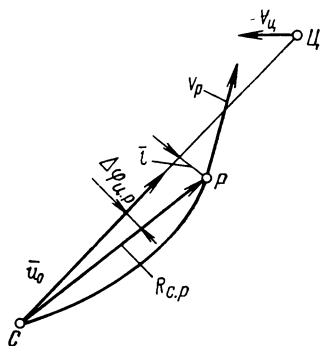


Рис. 1.9. Траектория ракеты при наведении по методу трех точек



Рис. 1.10. Траектория ракеты при выводе на высоту цели при управлении по линейному рассогласованию

точно ограничения линейного рассогласования и его производной. Важной особенностью здесь является стремление ракеты совместить дальность с линией заданного направления. В некоторых случаях этим пользуются для придания определенных свойств траектории ракеты. Так, для того чтобы удержать ракету на высоте, равной высоте полета цели, опорное направление может быть выбрано горизонтальным (рис. 1.10).

1.4. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ ЛИНИИ ДАЛЬНОСТИ

Вектор угловой скорости линии дальности $\bar{\omega}$ является нормалью к плоскости Q , в которой лежат векторы $\bar{R}$, $\bar{V}$ и $\bar{h}$ (рис. 1.11). Скалярная величина вектора угловой скорости может быть определена из соотношения

$$\omega R = V \sin \lambda, \quad (1.18)$$

характеризующего тангенциальную составляющую относительной скорости.

Учитывая (1.1), из (1.18) получим

$$\omega = \frac{hV}{R^2} \quad \text{и} \quad h = \frac{\omega R^2}{V}.$$

В соответствии с рис. 1.11 выражение для пролета можно записать в векторной форме

$$\bar{h} = \bar{V}_0 \times \bar{\omega}_0 h = \bar{V}_0 \times \bar{\omega}_0 \frac{\omega R^2}{V} = \bar{V} \times \bar{\omega} \frac{R^2}{V^2}. \quad (1.19)$$

Если векторы $\bar{V}$, $\bar{\omega}$ и $\bar{R}$ заданы своими проекциями на ось так называемой лучевой системы координат $X_{\text{л}}$, $Y_{\text{л}}$, $Z_{\text{л}}$, где ось $X_{\text{л}}$ совпадает с отрицательным направлением вектора дальнос-

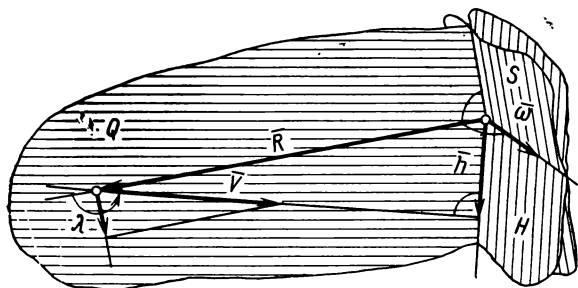


Рис. 1.11. Взаимное расположение плоскости Q , содержащей векторы $\bar{R}$ и $\bar{V}$, плоскости S , перпендикулярной вектору дальности, и плоскости H , перпендикулярной вектору относительной скорости

ти, а ось $Z_{\text{л}}$ горизонтальна. Составляющие пролета выражаются формулами:

$$h_{X_{\text{л}}} = (V_{Y_{\text{л}}} \omega_{Z_{\text{л}}} - V_{Z_{\text{л}}} \omega_{Y_{\text{л}}}) \frac{R_{X_{\text{л}}}^2}{V_{X_{\text{л}}}^2 + V_{Y_{\text{л}}}^2 + V_{Z_{\text{л}}}^2}$$

$$h_{Y_{\text{л}}} = -V_{X_{\text{л}}} \omega_{Z_{\text{л}}} \frac{R_{X_{\text{л}}}^2}{V_{X_{\text{л}}}^2 + V_{Y_{\text{л}}}^2 + V_{Z_{\text{л}}}^2},$$

$$h_{Z_{\text{л}}} = V_{X_{\text{л}}} \omega_{Y_{\text{л}}} \frac{R_{X_{\text{л}}}^2}{V_{X_{\text{л}}}^2 + V_{Y_{\text{л}}}^2 + V_{Z_{\text{л}}}^2}.$$

Равенство нулю проекций $R_{Y_{\text{л}}}$, $R_{Z_{\text{л}}}$ и $\omega_{X_{\text{л}}}$ определено выбором системы координат. При малых по сравнению с $V_{X_{\text{л}}}$ проекциях $V_{Y_{\text{л}}}$ и $V_{Z_{\text{л}}}$ (что соответствует условию (1.16))

$$h_{Y_{\text{л}}} \simeq -\omega_{Z_{\text{л}}} \frac{R_{X_{\text{л}}}^2}{V_{X_{\text{л}}}},$$

$$h_{Z_{\text{л}}} \simeq \omega_{Y_{\text{л}}} \frac{R_{X_{\text{л}}}^2}{V_{X_{\text{л}}}},$$

а сам пролет

$$h \simeq \sqrt{h_{Y_{\text{л}}}^2 + h_{Z_{\text{л}}}^2}.$$

Учитывая, что $R_{x_{\lambda}} \simeq -R$ и $V_{x_{\lambda}} = |\dot{R}|$, получим

$$\begin{aligned} h_{y_{\lambda}} &\simeq -\omega_{z_{\lambda}} \frac{R^2}{|\dot{R}|}, \\ h_{z_{\lambda}} &\simeq \omega_{y_{\lambda}} \frac{R^2}{|\dot{R}|}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Из соотношений (1.18) — (1.20) следует, что угловая скорость линии дальности характеризует текущее значение пролета. Угловая скорость как бы позволяет измерять пролет с переменным масштабом: чем ближе ракета к цели, тем крупнее масштаб.

Рассмотрим вопрос, как, зная вектор угловой скорости $\bar{\omega}$, ориентировать вектор ускорения $\bar{J}$. Вектор $\bar{\omega}$ перпендикулярен плоскости Q , поэтому для того, чтобы $\bar{J}_{\bar{\omega}}$ в (1.6) был равен нулю, потребуем, чтобы

$$(\bar{J}\bar{\omega}) = 0.$$

При этом в проекциях на лучевую систему

$$J_{y_{\lambda}} \omega_{y_{\lambda}} + J_{z_{\lambda}} \omega_{z_{\lambda}} = 0,$$

откуда

$$\frac{J_{y_{\lambda}}}{\omega_{z_{\lambda}}} = -\frac{J_{z_{\lambda}}}{\omega_{y_{\lambda}}} = K,$$

где K — коэффициент.

Тогда и

$$J_{y_{\lambda}} = K \omega_{z_{\lambda}}, \quad J_{z_{\lambda}} = -K \omega_{y_{\lambda}}. \quad (1.21)$$

Для того чтобы скалярная величина пролета уменьшалась, в соответствии с (1.10) потребуем выполнения неравенства

$$(\bar{J}\bar{h}) < 0.$$

В проекциях на лучевую систему координат это условие имеет вид

$$J_{x_{\lambda}} h_{x_{\lambda}} + J_{y_{\lambda}} h_{y_{\lambda}} + J_{z_{\lambda}} h_{z_{\lambda}} < 0.$$

Подставив $J_{y_{\lambda}}$ и $J_{z_{\lambda}}$ из (1.21), а $h_{y_{\lambda}}$ и $h_{z_{\lambda}}$ из (1.20), получим неравенство

$$J_{x_{\lambda}} h_{x_{\lambda}} - (\omega_{y_{\lambda}}^2 + \omega_{z_{\lambda}}^2) \frac{KR^2}{|\dot{R}|} < 0,$$

из которого следует, что в (1.21) коэффициент пропорциональности K должен быть положительным. (Произведение $J_{x_{\lambda}} h_{x_{\lambda}}$ обычно мало по сравнению с другими слагаемыми, так как при выполнении (1.16) $h_{x_{\lambda}} \ll \sqrt{h_{y_{\lambda}}^2 + h_{z_{\lambda}}^2}$, а $J_{x_{\lambda}}$ либо мал, либо име-

ет тот же порядок, что и J_{Y_A}, J_{Z_A}). Таким образом, зная проекции угловой скорости в лучевой системе координат, можно, воспользовавшись (1.21), сформировать ускорения J_{Y_A} и J_{Z_A} , обеспечивающие уменьшение скалярной величины пролета без изменения его направления.

Полезно знать, как угловая скорость линии дальности связана с вектором относительного ускорения. Рассмотрим векторную форму выражения (1.18)

$$\bar{\omega} \times \bar{R} = \bar{R}_0 \times (\bar{V} \times \bar{R}_0).$$

Раскрывая двойное векторное произведение и учитывая, что $(\bar{R}_0 \bar{R}_0) = 1$, получим

$$\bar{\omega} \times \bar{R} = \bar{V} - \bar{R}_0 (\bar{R}_0 \bar{V}).$$

Продифференцируем левую и правую части последнего равенства

$$\dot{\bar{\omega}} \times \bar{R} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{R}} = \dot{\bar{V}} - \dot{\bar{R}}_0 (\bar{R}_0 \bar{V}) - \bar{R}_0 (\dot{\bar{R}}_0 \bar{V}) - \bar{R}_0 (\bar{R}_0 \dot{\bar{V}}). \quad (1.22)$$

Сумму первого и последнего членов правой части выражения (1.22) можно представить в виде

$$\dot{\bar{V}} - \bar{R}_0 (\bar{R}_0 \dot{\bar{V}}) = \bar{J} - \bar{J}_R = \bar{J}_S, \quad (1.23)$$

где $\bar{J}_R$ — проекция вектора относительного ускорения $\bar{J}$ на дальность;

$\bar{J}_S$ — проекция того же вектора $\bar{J}$ на плоскость S , перпендикулярную дальности.

Перенесем член $\bar{R}_0 (\dot{\bar{R}}_0 \bar{V})$ в левую часть выражения (1.22) и рассмотрим показанный на рис. 1.12 вектор

$$\bar{A} = \bar{\omega} \times \dot{\bar{R}} + \bar{R}_0 (\dot{\bar{R}}_0 \bar{V}). \quad (1.24)$$

Первое слагаемое в (1.24)

$$\bar{\omega} \times \dot{\bar{R}} = \bar{\omega} \times \bar{V}.$$

Его скалярная величина равна ωV . Скалярная величина второго слагаемого равна $\omega V \sin \lambda$, так как $(\dot{\bar{R}}_0) = \omega$, а угол между векторами $\dot{\bar{R}}_0$ и $\bar{V}$ составляет $\lambda - \frac{\pi}{2}$. Угол, измеренный от второго слагаемого к первому в положительном направлении, равен $\lambda + \frac{\pi}{2}$.

Вектор $\bar{A}$, равный сумме слагаемых (1.24) и, следовательно, лежащий в плоскости Q , может быть представлен в виде стороны треугольника, в котором две другие стороны (слагаемые

в (1.24)) относятся друг к другу, как $\sin \lambda$, а угол между ними равен $\lambda - \frac{\pi}{2}$. Такое представление возможно только, если вектор $\bar{A}$ перпендикулярен меньшей из сторон, откуда следует, что вектор $\bar{A}$ перпендикулярен $\bar{R}$ и его скалярная величина

$$\omega V \sin \left(\lambda - \frac{\pi}{2} \right) = -\omega V \cos \lambda. \quad (1.25)$$

Учитывая, что $V \cos \lambda = \dot{R}$, получим

$$\bar{A} = -\bar{R}_0 \times \bar{\omega} \dot{R} = -\bar{\omega} \times \bar{R}_0 \dot{R}.$$

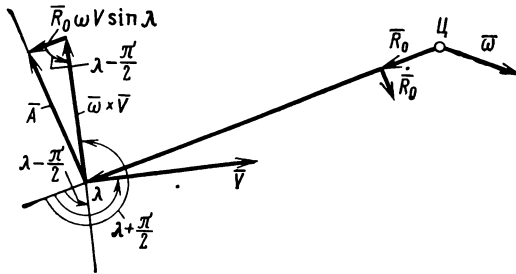


Рис. 1.12. Компоненты вектора $\bar{A}$

Произведение $\bar{R}_0 \dot{R}$ назовем вектором скорости сближения и обозначим $\dot{\bar{R}}$. Тогда окончательно

$$\bar{A} = -\bar{\omega} \times \dot{\bar{R}}. \quad (1.26)$$

Второе слагаемое в правой части (1.22)

$$-\dot{\bar{R}}_0 (\bar{R}_0 \bar{V})$$

может быть представлено в виде

$$-\dot{\bar{R}}_0 (\bar{R}_0 \bar{V}) = -\bar{\omega} \times \bar{R}_0 \dot{R} = -\bar{\omega} \times \dot{\bar{R}}.$$

Таким образом, из соотношений (1.22) — (1.26) получим дифференциальное уравнение

$$\dot{\bar{\omega}} \times \bar{R} + 2\bar{\omega} \times \dot{\bar{R}} = \bar{J}_S, \quad (1.27)$$

связывающее векторы $\bar{\omega}$, $\bar{R}$ и $\bar{J}_S$.

Заметим, что при

$$\bar{J}_S = K(t) (\bar{\omega} \times \dot{\bar{R}}) \quad (1.28)$$

все члены уравнения (1.27) коллинеарны и, следовательно, вектор $\dot{\omega}$ изменяется только по величине. Вектор $\bar{J}_s$ при этом лежит в плоскости Q и дает такую проекцию на плоскость H , при которой нормальная составляющая относительного ускорения $\bar{J}_s$ равна нулю и вектор пролета не вращается (точнее, не вращается его проекция на плоскость H , см. разд. 1.2).

В проекциях на оси лучевой системы координат с учетом того, что $R_{x_d} = -R$ и $\dot{R}_{x_d} = -\dot{R}$, уравнение (1.27) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{z_d} R + 2\omega_{z_d} \dot{R} &= -J_{y_d}, \\ \dot{\omega}_{y_d} R + 2\omega_{y_d} \dot{R} &= J_{z_d}.\end{aligned}\tag{1.29}$$

1.5. УПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРОМ УСКОРЕНИЯ РАКЕТЫ

Из изложенного ясно, что скорость изменения пролета зависит только от проекции вектора относительного ускорения ракеты и цели на плоскость H . В наиболее часто встречающихся случаях в системе управления ракеты ускорение цели измерить непосредственно невозможно, и ракета «парирует» его только после того, как возникает пролет. Поэтому естественно рассмотреть отдельно проекцию ускорения ракеты на плоскость H .

Как известно, маневренные возможности ракеты ограничены. Обычная ракета с аэродинамическим управлением способна создать вдоль связанных с нею осей Y_1 и Z_1 ускорения, предельные значения которых колеблются от сотен м/с^2 на режимах максимальных скоростных напоров до десятков м/с^2 на режимах минимальных скоростных напоров. Создание аэродинамических сил вдоль осей Y_1 и Z_1 сопровождается возникновением силы лобового сопротивления, которая вызывает торможение ракеты вдоль оси X_1 .

В настоящее время реактивные силы для создания линейного ускорения еще не нашли широкого использования в ракетах, применяющихся в атмосфере. Поэтому ускорение, создаваемое двигателем и действующее обычно вдоль связанной с ракетой оси X_1 , так же, как и лобовое сопротивление, следует рассматривать как возмущение. Продольное ускорение ракеты, вызванное тягой двигателя, может достигать нескольких сот м/с^2 . Кроме перечисленных сил на ракету действуют сила тяжести и ветер. Если известно, что траектория цели близка к баллистической, сила тяжести вообще не учитывается, так как в этом случае она не влияет на относительное ускорение. Воздействие ветра в основном сводится к изменению направления движения набегающего потока воздуха и появлению дополнительного угла атаки.

Из изложенного следует, что в обычной аэродинамической ракете возможно управление только проекциями полного вектора

ускорения ракеты на связанные оси Y_1 и Z_1 . Проекция ускорения J_{x_1} при этом изменяется самым произвольным образом. Поэтому полный вектор ускорения ракеты, как правило, не удастся направить по пролету. Однако учитывая, что проекция ускорения на относительную скорость не оказывает вредного влияния на процесс наведения (если, естественно, при этом не происходит чрезмерного роста или убывания относительной скорости), составляющие J_{Y_1} и J_{Z_1} следует выбирать таким образом, чтобы направить по пролету проекцию вектора ускорения на плоскость H (см. стр. 14). Это, естественно, возможно только при условии, что между связанной осью X_1 и вектором относительной скорости угол φ_V не слишком велик. Для того чтобы скомпенсировать продольное ускорение ракеты J_{x_1} , требуется боковое ускорение $\sqrt{J_{Y_1}^2 + J_{Z_1}^2} = J_{x_1} \operatorname{tg} \varphi_V$.

Рассмотрим с этой позиции построение системы наведения по линейному рассогласованию и угловой скорости линии дальности.

В системе наведения по линейному рассогласованию целесообразно на ракете установить гироскопическую платформу, стабилизированную относительно линии заданного направления $\vec{u}_0$.

В частности, такой платформой может быть гиростабилизированная головка самонаведения, которая с момента пуска ракеты до захвата цели сохраняет положение оси X_d (так называемого равносигнального направления диаграммы направленности головки самонаведения).

Измеряя проекции ускорения ракеты на плоскость (Y_d , Z_d), перпендикулярную стабилизируемому направлению (рис. 1.13), и сравнивая их с заданными ускорениями, соответствующими измеренному с помощью линейного рассогласования пролету, можно сформировать команды на рули ракеты. Такое построение бортовой системы управления позволяет непосредственно на ракете компенсировать проекции возмущающих воздействий на плоскость, перпендикулярную заданному направлению.

На практике для простоты бортовой системы ракеты сигналы заданных ускорений $\dot{Y}_d$ и $\dot{Z}_d$ ракеты, вычисленные в соответствии с ориентацией измеренного пролета, подают на вход каналов управления контура стабилизации. В результате сравнения этих сигналов с ускорением ракеты по связанным осям J_{Y_1} и J_{Z_1} формируются команды на рули ракеты. В ситуациях, отличных от чисто «встречных» или чисто «догонных», когда ось ракеты повернута относительно линии заданного направления, возмущения, действующие на ракету, и ошибка в ориентации вектора $\vec{J}_{Y_1} + \vec{J}_{Z_1}$ относительно $\dot{\vec{Y}}_d + \dot{\vec{Z}}_d$ воздействуют на контур наведения так же, как неизвестный на борту ракеты маневр цели.

При управлении по угловой скорости линии дальности правильная ориентация полного вектора ускорения может быть достигнута, если рассматривать соотношение (1.21) как выражение для заданных ускорений в лучевой системе координат:

$$J_{Y_{\lambda}}^* = K \omega_{Z_{\lambda}} \text{ и } J_{Z_{\lambda}}^* = -K \omega_{Y_{\lambda}}.$$

а команды на рули ракеты формировать как результат сравнения этих заданных ускорений с измеренными $J_{Y_{\lambda}}$ и $J_{Z_{\lambda}}$. И в этом случае возмущения, действующие вдоль оси X_{λ} , не окажут су-

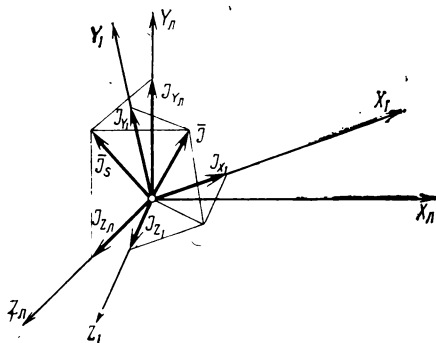


Рис. 1.13. Проекции вектора относительного ускорения на лучевые и связанные оси

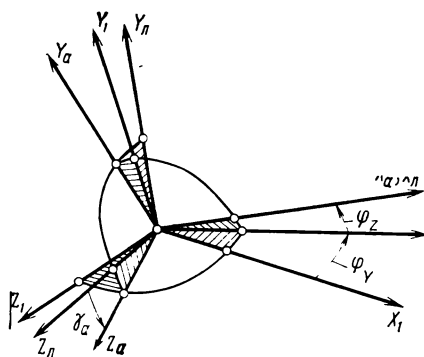


Рис. 1.14. Связанная, антенная и лучевая системы координат

щественного влияния на процесс наведения, если они не приведут к чрезмерно большим или чрезмерно малым скоростям сближения. При самонаведении измерение составляющих угловой скорости, заданного ускорения и ускорения ракеты производится не в лучевой системе координат, а в системе координатора цели (так называемой антенной системе координат X_a, Y_a, Z_a), повернутой относительно ракеты на два угла пеленга φ_Y и φ_Z . При нулевых ошибках слежения за целью антенная система координат развернута относительно лучевой только в плоскости, перпендикулярной линии дальности, т. е. оси X_{λ} (рис. 1.14).

В большинстве реальных систем угловая скорость линии дальности, измеренная в виде проекций ω_{Y_a} и ω_{Z_a} на оси Y_a и Z_a антенной системы координат, используется для формирования заданных ускорений ракеты в связанной системе

$$J_{Y_{\lambda}}^* = K \omega_{Z_a};$$

$$J_{Z_{\lambda}}^* = -K \omega_{Y_a}.$$

В этих системах проекция вектора ускорения ракеты на плоскость, перпендикулярную вектору дальности, может существ-

венно отличаться от ускорения, соответствующего измеренным значениям угловой скорости линии дальности. Так же, как и в случае управления по линейному рассогласованию, эта разница между заданным и реализованным ускорением воспринимается контуром наведения как маневр цели.

Необходимо отметить, что везде выше, говоря об ускорении ракеты или его проекциях, имелось в виду, что это ускорение включает в себя и соответственно направленное ускорение силы тяжести. Фактически установленные на ракете датчики линейных ускорений измеряют проекции векторной суммы $\bar{J}_p + \bar{g}$. При свободном падении ракеты и полном отсутствии аэродинамических и газодинамических сил эти датчики выдают нулевой сигнал. Поэтому для компенсации ускорения силы тяжести показания датчиков должны быть скорректированы на величину проекций ускорения силы тяжести.

1.6. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ПРОЛЕТ, ЛИНЕЙНОЕ РАССОГЛАСОВАНИЕ И УГЛОВУЮ СКОРОСТЬ

При исследовании динамики наведения удобно пользоваться линейными приближениями зависимостей, характеризующих связь между пролетом, линейным рассогласованием и угловой скоростью.

Основой для линеаризации является условие малости углов η и ν (см. рис. 1.7), характеризующих взаимное расположение нормалей к плоскостям H , L и S (см. рис. 1.5, 1.6 и 1.11). V — нормаль к плоскости H ; $\bar{u}_0$ — нормаль к плоскости L ; $\bar{R}$ — нормаль к плоскости S . При этом приближенно можно считать, что проекции вектора относительного ускорения на эти плоскости равны друг другу

$$\bar{J}_L \simeq \bar{J}_S \simeq \bar{J}_H.$$

Если положить, что $\dot{R} \simeq \text{const}$ ($\bar{J}_V \simeq \bar{J}_R \simeq 0$), дальность можно записать так:

$$R(t) = |\dot{R}|(t_0 - t). \quad (1.30)$$

Тогда, учитывая, что в данном случае $|\dot{R}| = -\dot{R}$, в проекциях на оси Y_L и Z_L лучевой системы координат имеем

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{Z_L}(t_0 - t) - 2\omega_{Z_L} &= -\frac{J_{Y_L}}{|\dot{R}|}, \\ \dot{\omega}_{Y_L}(t_0 - t) - 2\omega_{Y_L} &= \frac{J_{Z_L}}{|\dot{R}|}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Но согласно (1.20), подставляя в (1.31) выражение для дальности, находим

$$\begin{aligned}\omega_{Z_n} &= -\frac{h_{Y_n}}{|\dot{R}|(t_0-t)^2}, \\ \omega_{Y_n} &= \frac{h_{Z_n}}{|\dot{R}|(t_0-t)^2}\end{aligned}\quad (1.32)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{Z_n} &= -\frac{\dot{h}_{Y_n}}{|\dot{R}|(t_0-t)^2} - 2\frac{h_{Y_n}}{|\dot{R}|(t_0-t)^3}, \\ \dot{\omega}_{Y_n} &= \frac{\dot{h}_{Z_n}}{|\dot{R}|(t_0-t)^2} + 2\frac{h_{Z_n}}{|\dot{R}|(t_0-t)^3}.\end{aligned}\quad (1.33)$$

Подставив (1.32) и (1.33) в соотношения (1.31), после упрощений получим

$$\dot{h}_{Y_n} = (t_0-t) J_{Y_n}, \quad \dot{h}_{Z_n} = (t_0-t) J_{Z_n}, \quad (1.34)$$

что соответствует точной формуле (1.10).

Рассмотрим (1.11) в проекциях на оси Y_n и Z_n :

$$\begin{aligned}h_{Y_n} &= l_{Y_n} + \dot{l}_{Y_n}(t_0-t), \\ h_{Z_n} &= l_{Z_n} + \dot{l}_{Z_n}(t_0-t).\end{aligned}\quad (1.35)$$

Продифференцировав соотношения (1.35), определим

$$\dot{h}_{Y_n} = \ddot{l}_{Y_n}(t_0-t), \quad \dot{h}_{Z_n} = \ddot{l}_{Z_n}(t_0-t).$$

Учитывая, что

$$\ddot{\vec{l}} = \ddot{\vec{J}}_L \simeq \ddot{\vec{J}}_H,$$

получим

$$\dot{h}_{Y_n} = (t_0-t) J_{Y_n}, \quad \dot{h}_{Z_n} = (t_0-t) J_{Z_n}.$$

Как уже указывалось в разд. 1.3, линейное рассогласование можно рассматривать как решение дифференциального уравнения (1.13) с произвольным значением начального условия $l(0)$. Задавшись начальными значениями $l_{Y_n}(0)$ и $l_{Z_n}(0)$, можно согласно (1.35) выразить $l_{Y_n}(t)$ и $l_{Z_n}(t)$ как решения уравнений:

$$l_{Y_n}(t) + (t_0-t) \dot{l}_{Y_n}(t) = h_{Y_n}(t),$$

$$l_{Z_n}(t) + (t_0-t) \dot{l}_{Z_n}(t) = h_{Z_n}(t).$$

Для дальнейшего удобно представить

$$\begin{aligned} l_{Y_L}(t) &= \delta l_{Y_L}(t) + l_{Y_L}(0), \\ l_{Z_L}(t) &= \delta l_{Z_L}(t) + l_{Z_L}(0), \end{aligned} \quad (1.36)$$

где $\delta l_{Y_L}(t)$ — вариация величины $l_{Y_L}(t)$;

$$\begin{aligned} \delta l_{Y_L}(0) &= \delta l_{Z_L}(0) = 0; \\ l_{Y_L}(0) &= \text{const}, \quad l_{Z_L}(0) = \text{const}. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} \delta l_{Y_L}(t) + (t_0 - t) \delta \dot{l}_{Y_L}(t) &= h_{Y_L}(t) - l_{Y_L}(0); \\ \delta l_{Z_L}(t) + (t_0 - t) \delta \dot{l}_{Z_L}(t) &= h_{Z_L}(t) - l_{Z_L}(0). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Следовательно, при сделанных допущениях пролет, линейное рассогласование и угловая скорость связаны между собой и с относительным ускорением линейно.

1.7. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ЗВЕНА КИНЕМАТИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ

Точные (1.10), (1.11), (1.17), (1.19), (1.27) и приближенные (1.31), (1.33), (1.34), (1.35), (1.36) уравнения, связывающие пролет, линейное рассогласование и угловую скорость линии дальности с относительным ускорением ракеты, называют уравнениями кинематических связей или кинематическими соотношениями (фактически эта терминология не точна, так как связь между этими величинами носит динамический характер).

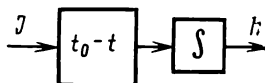


Рис. 1.15. Структурная схема звена кинематических связей, соответствующая уравнению (1.34)

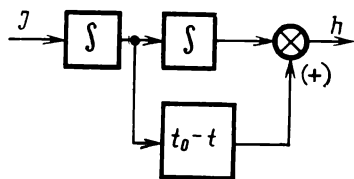


Рис. 1.16. Структурная схема звена кинематических связей, соответствующая уравнению (1.35)

С целью изучения динамики наведения для представления контура наведения в виде системы автоматического регулирования в соответствии линеаризованным уравнениям удобно поставить структурные схемы так называемых звеньев кинематических связей.

Согласно соотношениям (1.31) — (1.34) и (1.35) звено кинематических связей может быть представлено в виде, показанном

на рис. 1.15—1.17. При сделанных в разд. 1.6 допущениях из соотношений (1.31) следует

$$|\dot{R}| \dot{\omega}(t_0 - t) - 2|\dot{R}| \omega = J,$$

$$|\dot{R}| [\omega(t_0 - t)]' - |\dot{R}| \omega = J.$$

Проинтегрировав левую и правую части последнего выражения в предположении $|\dot{R}| = \text{const}$, получим

$$|\dot{R}| \dot{\varepsilon}(t_0 - t) - |\dot{R}| \Delta \varepsilon = i, \quad (1.38)$$

где

$$\dot{\varepsilon} = \omega;$$

$$\Delta \varepsilon = \int_0^t \dot{\varepsilon} du + \Delta \varepsilon(0); \quad i = \int_0^t J du + i(0).$$

Соответствующая схема звена кинематических связей показана на рис. 1.18, а. Переносом точки суммирования схема преобразуется к виду, приведенному на рис. 1.18, б.

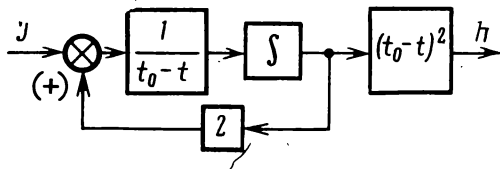


Рис. 1.17. Структурная схема звена кинематических связей, соответствующая уравнению (1.31)

Выражение (1.38) может быть получено и непосредственно при линеаризации уравнений проекций векторов скорости ракеты и цели на линию дальности и перпендикуляр к ней (рис. 1.19, а)

$$\dot{R} = V_{\text{ц}} \cos(\varepsilon - \theta_{\text{ц}}) - V_p \cos(\varepsilon - \theta_p),$$

$$R \dot{\varepsilon} = V_p \sin(\varepsilon - \theta_p) - V_{\text{ц}} \sin(\varepsilon - \theta_{\text{ц}}). \quad (1.39)$$

Положив $V_p = \text{const}$ и $V_{\text{ц}} = \text{const}$, получим

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon, \quad \theta_p = \theta_{p_0} + \Delta \theta_p, \quad \theta_{\text{ц}} = \theta_{\text{ц}_0} + \Delta \theta_{\text{ц}},$$

где ε_0 , θ_{p_0} , $\theta_{\text{ц}_0}$ — константы, удовлетворяющие уравнению $V_p \sin(\varepsilon_0 - \theta_{p_0}) - V_{\text{ц}} \sin(\varepsilon_0 - \theta_{\text{ц}_0}) = 0$ (см. рис. 1.19, б), а $\Delta \varepsilon$, $\Delta \theta_p$ и $\Delta \theta_{\text{ц}}$ — малые вариации. После отбрасывания членов высших порядков малости получим

$$\dot{R} = V_{\text{ц}} \cos(\varepsilon_0 - \theta_{\text{ц}_0}) - V_p \cos(\varepsilon_0 - \theta_{p_0}),$$

$$R \dot{\varepsilon} = -[V_{\text{ц}} \cos(\varepsilon_0 - \theta_{\text{ц}_0}) - V_p \cos(\varepsilon_0 - \theta_{p_0})] \Delta \varepsilon + \\ + V_{\text{ц}} \cos(\varepsilon_0 - \theta_{\text{ц}_0}) \Delta \theta_{\text{ц}} - V_p \cos(\varepsilon_0 - \theta_{p_0}) \Delta \theta_p.$$

Окончательно, представив дальность в виде

$$R = |\dot{R}|(t_0 - t),$$

получим

$$\begin{aligned} |\dot{R}| \dot{\varepsilon}(t_0 - t) - |\dot{R}| \Delta \varepsilon = \\ = V_{\text{ц}} \cos(\varepsilon_0 - \theta_{\text{ц}_0}) \Delta \theta_{\text{ц}} - V_p \cos(\varepsilon_0 - \theta_{p_0}) \Delta \theta_p. \end{aligned}$$

Правая часть уравнения при малых $\Delta \theta_p$ и $\Delta \theta_{\text{ц}}$ представляет собой величину проекции вектора относительной скорости на перпендикуляр к дальности. Положив, что направление

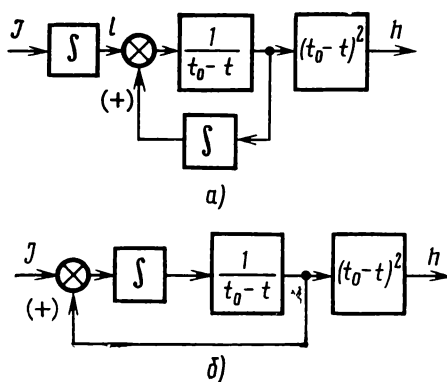


Рис. 1.18. Структурная схема звена кинематических связей, соответствующая уравнению (1.38)

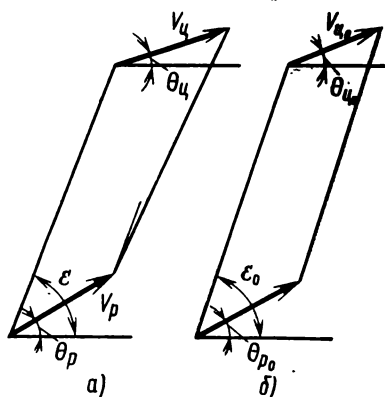


Рис. 1.19. Взаимное расположение дальности и векторов скорости для возмущенного (а) и невозмущенного (б) движения

вектора $\vec{u}_0$ выбрано по линии дальности, заданной углом ε_0 , получим уравнение (1.38), так как

$$V_{\text{ц}} \cos(\varepsilon_0 - \theta_{\text{ц}_0}) \Delta \theta_{\text{ц}} - V_p \cos(\varepsilon_0 - \theta_{p_0}) \Delta \theta_p = \dot{l}.$$

Дальнейшее интегрирование (1.38) приводит к выражению

$$|\dot{R}|(t_0 - t) \Delta \varepsilon = l. \quad (1.40)$$

Соответствующая структурная схема показана на рис. 1.20.

Итак, при $h \ll R$ и $|\dot{R}| = \text{const}$ существует значительное число различных форм представления звена кинематических связей, описывающего динамику образования пролета. Все эти формы эквиваленты и отличаются только внутренней структурой. При цифровом и аналоговом моделировании в зависимости от характера задачи отдается предпочтение той или иной схеме.

Для дальнейшего изложения удобно ввести в рассмотрение звенья, которые преобразуют пролет в величину, измеряемую в системе наведения. Будем называть такое звено звеном формирования измеряемой величины (ФИВ).

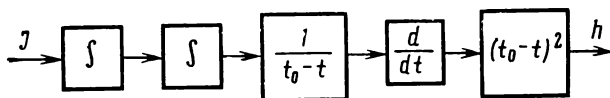


Рис. 1.20. Структурная схема звена кинематических связей, соответствующая уравнениям (1.40)

Для случая, когда система наведения строится на базе измерения угловой скорости линии дальности, звено ФИВ описывается выражением

$$\omega = \frac{h}{(t_0 - t)^2 |\dot{R}|}.$$

В структурной схеме это звено представляет собой переменный коэффициент.

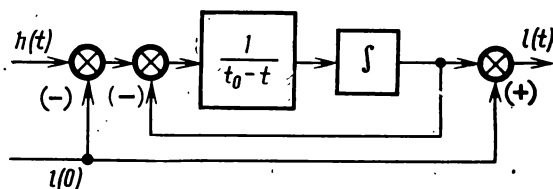


Рис. 1.21. Структурная схема звена, преобразующего пролет в линейные рассогласования

Как следует из уравнения (1.37), структурная схема звена ФИВ в случае использования линейного рассогласования имеет вид, показанный на рис. 1.21.

1.8. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА КОНТУРА НАВЕДЕНИЯ

В разд. 1.1 было введено понятие системы наведения, состоящей из информационных устройств, контура стабилизации вычислительных и корректирующих устройств.

Совместно с рассмотренными в предыдущем разделе звеньями кинематических связей и формирования измеряемой величины система наведения образует так называемый контур наведения, представляющий собой замкнутую систему.

Структурная схема типового контура наведения показана на рис. 1.22.

В теории автоматического регулирования контур наведения представляется системой стабилизации, в которой на объект регулирования (звено кинематических связей) воздейст-

вует возмущение (ускорение цели $J_{ц}$) и управление (ускорение ракеты J_p); стабилизируемая координата (пролет) измеряется через звено ФИВ с ошибками ψ , собственными информационным устройствам; корректирующее устройство (вычислительное и корректирующее звенья) формирует управляющее воздействие (заданное ускорение J^*) и через исполнительное устройство (контур стабилизации) подает его на объект регулирования.

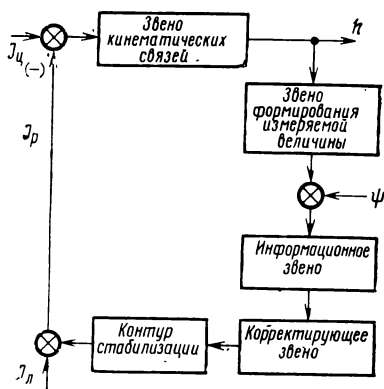


Рис. 1.22. Структурная схема контура наведения

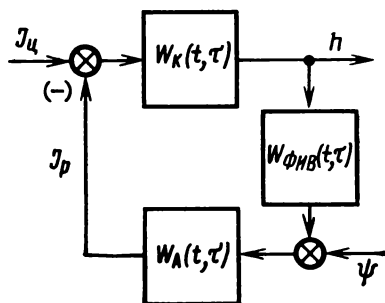


Рис. 1.23. Структурная схема контура наведения с указанием весовых функций

Контур стабилизации, задачей которого является воспроизведение с наилучшей точностью заданного ускорения J^* , подвержен действию возмущений, приложенных к ракете или автопилоту. Та часть возмущений, которая не подавляется автопилотом, является «ложной составляющей» в ускорении ракеты $J_{л}$ и воздействует на систему подобно маневру цели.

Для удобства введем весовые функции [4—8] звеньев, образующих контур наведения: $W_K(t, \tau)$ — весовая функция звена кинематических связей со входом по $J = J_{ц} - J_p$ и выходом по h (здесь $J_{ц}$ и J_p — проекции соответствующих ускорений на ось $Y_{л}$ или $Z_{л}$ лучевой системы координат); в соответствии с (1.34)

$$W_K(t, \tau) = 1(t - \tau)(t_0 - \tau); \quad (1.41)$$

$W_{ФИВ}(t, \tau)$ — весовая функция звена формирования измеряемой величины со входом по h и выходом по линейному рассогласованию, угловой скорости или другой доступной для измерения координате, характеризующей текущую точность наведения. В конкретных случаях эта весовая функция будет обозначаться как $W_{lh}(t, \tau)$, или $W_{\omega h}(t, \tau)$. Индексы l и ω указывают, какая величина измеряется.

Источник информации, вычислительное и корректирующее звенья, контур стабилизации объединим в одно звено со входом

по измерениям (измеряемая величина плюс ошибки измерения ψ) и выходом по J_p . Это звено условно назовем автономным контуром. Оно, по существу, объединяет все, что выше было названо системой наведения. Весовую функцию автономного контура назовем $W_a(t, \tau)$.

С учетом введенных обозначений структурная схема контура наведения представлена на рис. 1.23.

В зависимости от типа задачи наведения структурная схема может несколько изменяться, однако в основных чертах она сохраняется практически для всех ситуаций.

1.9. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА КОНТУРА НАВЕДЕНИЯ ПО УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ЛИНИИ ДАЛЬНОСТИ

В соответствии с изложенным в разд. 1.4 и 1.6 структурная схема контура наведения по угловой скорости линии дальности отличается тем, что звено формирования измеряемой величины представляется в виде коэффициента

$$\frac{\omega}{h} = \frac{1}{(t_0 - t)^2 |\dot{R}|}.$$

Как будет показано в разд. 1.11, удобно использовать не саму угловую скорость ω , а произведение $|\dot{R}|\omega$, поэтому в дальнейшем будем считать измеряемой величиной $|\dot{R}|\omega$, соответствующее звено примем в виде коэффициента $\frac{1}{(t_0 - t)^2}$. При этом весовая функция звена будет

$$W_{|\dot{R}|\omega-h}(t, \tau) = \frac{\delta(t - \tau)}{(t_0 - t)^2}. \quad (1.42)$$

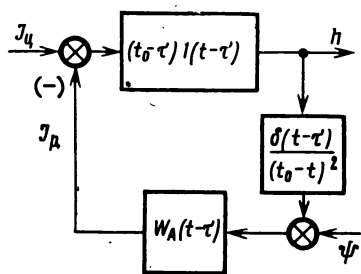


Рис. 1.24. Структурная схема наведения по угловой скорости линии дальности

Обычно в системах наведения по угловой скорости стремятся к тому, чтобы автономный контур был стационарен. Этого достигают применением стационарного корректирующего фильтра и автопилота, стабилизирующего динамические характеристики контура стабилизации, несмотря на существенное изменение коэффициентов ракеты.

Для стационарного автономного контура

$$W_a(t, \tau) = W_a(t - \tau). \quad (1.43)$$

С учетом соотношений (1.41)—(1.43) структурная схема контура наведения по угловой скорости линии дальности может быть представлена в виде, приведенном на рис. 1.24.

Поскольку контур наведения по угловой скорости включает в себя нестационарные звенья (их последовательное соединение имеет весовую функцию $\frac{(t_0 - \tau)}{(t_0 - t)^2} 1(t - \tau)$), замкнутый контур наведения нестационарен. Это создает определенные трудности в синтезе и анализе линеаризованных систем подобного вида. Подробно эти вопросы изложены ниже.

1.10. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА КОНТУРА НАВЕДЕНИЯ ПО ЛИНЕЙНОМУ РАССОГЛАСОВАНИЮ

Структурная схема, приведенная на рис. 1.21, и уравнение (1.37) позволяют получить весовую функцию от пролета h до линейного рассогласования l

$$W_{lh}(t, \tau) = \frac{(t_0 - t)}{(t_0 - \tau)^2} 1(t - \tau). \quad (1.44)$$

При выводе весовой функции следует положить $l(0) = 0$ и $h(t) = \delta(t - \tau)$.

Рассмотрим системы, в которых автономный контур от измеренного значения линейного рассогласования до ускорения ракеты стационарен. В связи с этим интересно рассмотреть в структурной схеме контура весовую функцию последовательного соединения звеньев с весовыми функциями $W_k(t, \tau)$ и $W_{lh}(t, \tau)$.

Учитывая соотношения (1.41) и (1.44), запишем

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t W_{lh}(t, u) W_k(u, \tau) du &= \int_{\tau}^t \frac{(t_0 - t)}{(t_0 - u)^2} (t_0 - \tau) du = \\ &= (t_0 - t)(t_0 - \tau) \int_{\tau}^t \frac{du}{(t_0 - u)^2} = \\ &= (t_0 - t)(t_0 - \tau) \left[\frac{1}{t_0 - t} - \frac{1}{t_0 - \tau} \right] 1(t - \tau) = (t - \tau) 1(t - \tau). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Полученное выражение зависит от разности аргументов t и τ и представляет собой весовую функцию двойного интегрирующего звена.

Выражение (1.45) совместно с (1.35) позволяет видоизменить структурную схему контура, приведенную на рис. 1.25, в структурную схему на рис. 1.26, состоящую из замкнутого стационарного

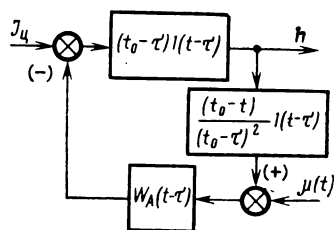


Рис. 1.25. Структурная схема наведения по линейному рассогласованию

ного контура с выходом по l и нестационарного звена, преобразующего l в h . Согласно (1.35) его весовая функция

$$W_{hl}(t, \tau) = \delta(t - \tau) + (t_0 - t) \delta'_t(t - \tau). \quad (1.46)$$

Естественно, что весовая функция $W_{hl}(t, \tau)$ обратна весовой функции $W_{lh}(t, \tau)$. Для проверки этого факта достаточно убедиться в том, что

$$\int_{\tau}^t W_{lh}(t, u) W_{hl}(u, \tau) du = \delta(t - \tau).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t \frac{(t_0 - t)}{(t_0 - u)^2} 1(t - u) [\delta(u - \tau) + (t_0 - u) \delta'_t(u - \tau)] du = \\ = \frac{(t_0 - t)}{(t_0 - \tau)} \delta(t - \tau) = \delta(t - \tau). \end{aligned}$$

Возможность представления контура наведения по линейному рассогласованию в виде последовательного соединения стационарной и нестационарной частей

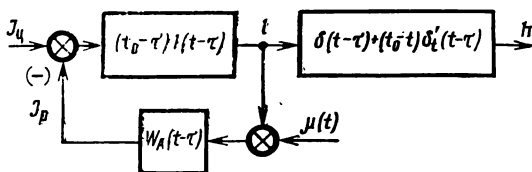


Рис. 1.26. Структурная схема наведения по линейному рассогласованию, представленная в виде последовательного соединения стационарной и нестационарной частей

нарной и простейшей нестационарной частей существенно упрощает анализ и синтез такой системы.

В ряде случаев стационарность контура наведения по l явилась причиной того, что именно этому способу построения системы наведения отдавалось предпочтение. Материалы, связанные с расчетом стационарных систем наведения по линейному рассогласованию, содержатся в последующих разделах настоящей главы.

1.11. ПРОСТЕЙШИЕ СИСТЕМЫ НАВЕДЕНИЯ ПО УГЛОВОЙ СКОРОСТИ И ЛИНЕЙНОМУ РАССОГЛАСОВАНИЮ

Простейшей моделью системы наведения по угловой скорости линии дальности является модель, в которой оператор автономного контура заменяется постоянным коэффициентом усиления.

Для этой модели удастся получить аналитические зависимости угловой скорости линии дальности и ускорения ракеты от времени. Как показывают приближенные расчеты и моделирование, при времени самонаведения, в 10—20 раз большем эквивалентной постоянной времени автономного контура, эти зависимости дают достаточно хорошее представление о процессах в реальной системе.

Итак, уравнение автономного контура имеет вид $J_p = K\omega$. Положим $K = K_a |\dot{R}|$, откуда

$$J_p = K_a |\dot{R}| \omega. \quad (1.47)$$

Контур наведения при этом описывается согласно соотношениям (1.31) и (1.47) системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} (t_0 - t) \dot{\omega} - 2\omega &= \frac{J_p}{|\dot{R}|}, \\ J_p &= K_a |\dot{R}| \omega, \\ J &= J_u - J_p, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$(t_0 - t) \dot{\omega} + (K_a - 2) \omega = f_u, \quad (1.48)$$

где $f_u = \frac{J_u}{|\dot{R}|}$ — приведенный маневр цели.

Уравнение (1.48) при $f_u = \text{const}$ имеет решение вида

$$\omega(t) = f_u \frac{1}{K_a - 2} \left(1 - \frac{(t_0 - t)^{K_a - 2}}{t_0^{K_a - 2}} \right) + \omega(0) \frac{(t_0 - t)^{K_a - 2}}{t_0^{K_a - 2}}. \quad (1.49)$$

Соответствующее приведенное значение ускорения ракеты

$$f_p(t) = f_u \frac{K_a}{K_a - 2} \left(1 - \frac{(t_0 - t)^{K_a - 2}}{t_0^{K_a - 2}} \right) + \omega(0) K_a \frac{(t_0 - t)^{K_a - 2}}{t_0^{K_a - 2}}. \quad (1.50)$$

Из соотношений (1.49) и (1.50) следует, что вид кривых $\omega(t)$ и $f_p(t)$ (рис. 1.27—1.30) зависит не от полного коэффициента K между ω и J_p , а от относительного коэффициента K_a . На практике, там, где это представляется возможным, скорость сближения $|\dot{R}|$ измеряется и управление ведется по произведению $|\dot{R}|\omega$. В остальных случаях коэффициент K выбирается так, чтобы с учетом прогнозируемого на момент встречи значения $|\dot{R}|$ получить определенное значение K_a .

Зависимости процессов изменения $\omega(t)$ и $f_p(t)$ от K_a показаны на рис. 1.27—1.30, из которых видно, что если отсутствует маневр цели ($f_u = 0$, $\omega(0) \neq 0$), угловая скорость $\omega(t)$ и ускорение $f_p(t)$ не возрастают только в случае $K_a \geq 2$.

Когда $K_a \leq 1$ или $K_a = 2$, или $K_a = 3$, угловая скорость и ускорение ракеты соответственно растут неограниченно либо постоянно, либо изменяются линейно от начального значения до

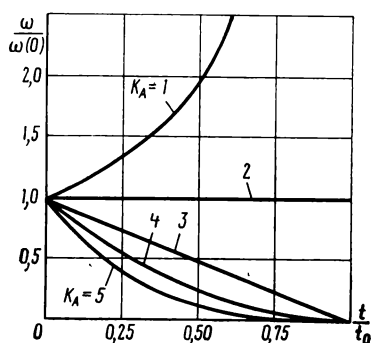


Рис. 1.27. Угловая скорость линии дальности при различных значениях коэффициента K_a (маневр цели отсутствует)

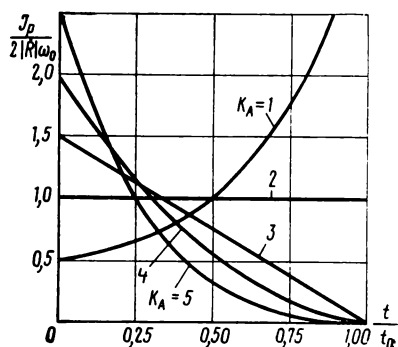


Рис. 1.28. Ускорение ракеты при различных значениях коэффициента (маневр цели отсутствует)

нуля. При отсутствии начальных условий и воздействии маневра ($\omega(0) = 0$, $J(t) \neq 0$) угловая скорость и ускорение ограничены только при $K_a > 2$. Если $K_a = 3$, скорость и ускорение ракеты воз-

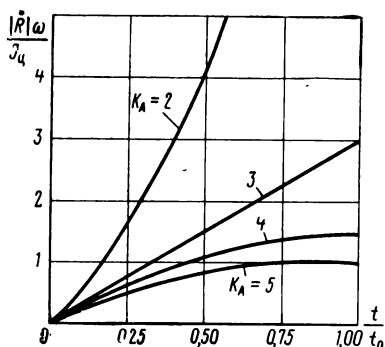


Рис. 1.29. Угловая скорость линии дальности при различных значениях коэффициента усиления K_a (начальный пролет отсутствует)

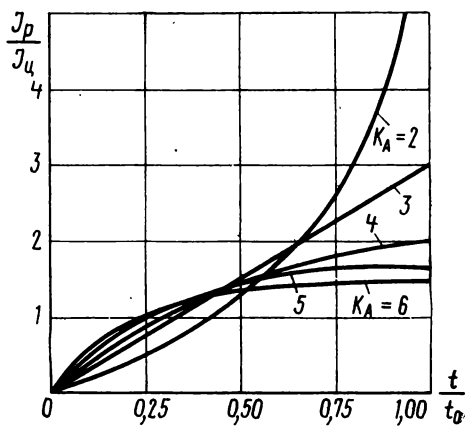


Рис. 1.30. Ускорение ракеты при различных значениях коэффициента усиления K_a (начальный пролет отсутствует)

растают линейно от нуля, причем ускорение ракеты достигает максимального значения, в три раза превышающего ускорение

цели. Максимальное ускорение ракеты может быть равно ускорению цели только при бесконечно большом коэффициенте усиления. С помощью соотношения (1.32) пролет может быть выражен через угловую скорость

$$h = \omega \dot{K}(t_0 - t)^2, \quad (1.51)$$

откуда, учитывая (1.49),

$$h(t) = J_{\Sigma} \frac{1}{K_a - 2} \left[(t_0 - t)^2 - \frac{(t_0 - t)^{K_a}}{t_0^{K_a - 2}} \right] + h(0) \frac{(t_0 - t)^{K_a}}{t_0^{K_a}}, \quad (1.52)$$

где $h(0)$ — начальный пролет.

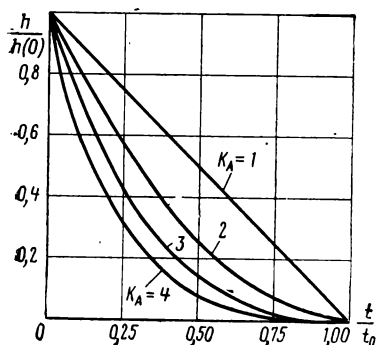


Рис. 1.31. Пролет при различных значениях коэффициента усиления K_a (маневр цели отсутствует)

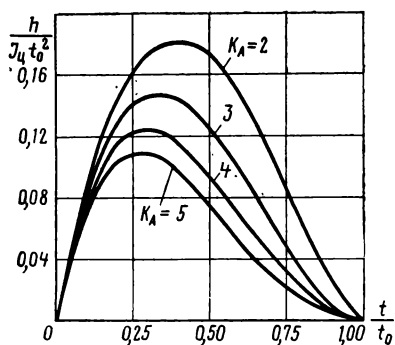


Рис. 1.32. Пролет при различных значениях коэффициента усиления K_a (начальный пролет отсутствует)

Естественно, что при $J_{\Sigma} = 0$ пролет не возрастает при любом неотрицательном значении K_a , так как согласно (1.34) в этих условиях $\dot{h} \leq 0$ (см. рис. 1.31, 1.32).

В соответствии с рис. 1.26 структурная схема контура наведения по линейному рассогласованию со стационарным автономным контуром может быть представлена в виде последовательного соединения стационарного и нестационарного звеньев. При этом автономный контур включен в качестве обратной связи к звену, связывающему относительное ускорение и линейное рассогласование и представляющему собой два последовательно включенных интегратора. Естественно, что оператор автономного контура в такой системе не может быть коэффициентом усиления, так как совместно с двойным интегрирующим звеном он образует консервативное звено. Простейший автономный контур системы наведения по линейному рассогласованию характеризуется уравнением

$$J_p = K(l + Ti). \quad (1.53)$$

В этом случае система уравнений контура наведения имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{l} &= J_{\pi} - K(l + T\dot{l}), \\ h &= l + \dot{l}(t_0 - t).\end{aligned}\tag{1.54}$$

Для постоянного ускорения цели J_{π} из (1.54) следует

$$\begin{aligned}l(t) &= \frac{J_{\pi}}{K} + e^{-\alpha t} \left\{ \frac{1}{\omega} \left[\dot{l}(0) + \left(l(0) - \frac{J_{\pi}}{K} \right) \alpha \right] \sin \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \left(l(0) - \frac{J_{\pi}}{K} \right) \cos \omega t \right\}, \\ h(t) &= \dot{l}(0) e^{-\alpha t} \frac{1}{\omega} [\sin \omega t - (t_0 - t)(\alpha \sin \omega t - \omega \cos \omega t)] + \\ &\quad + l(0) e^{-\alpha t} \left\{ \frac{\alpha}{\omega} [\sin \omega t - (t_0 - t)(\alpha \sin \omega t - \omega \cos \omega t)] + \right. \\ &\quad \left. + [\cos \omega t - (t_0 - t)(\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t)] \right\} + \\ &\quad + \frac{J}{K} \left\{ 1 - e^{-\alpha t} \left\{ \frac{\alpha}{\omega} [\sin \omega t - (t_0 - t)(\alpha \sin \omega t - \omega \cos \omega t)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [\cos \omega t - (t_0 - t)(\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t)] \right\} \right\},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\left(\frac{KT}{2} \right)^2 - K}; \\ \alpha &= \frac{KT}{2}.\end{aligned}$$

Стационарность контура наведения от J_{π} до l и некоторые свойства последовательного соединения стационарных и нестационарных звеньев (см. разд. 1.13) позволяют проводить исследование подобных систем методом частотных характеристик, поэтому усложнение выражения (1.53) не оказывает существенного влияния на методику расчета.

1.12. ТОЧНОСТЬ СИСТЕМЫ НАВЕДЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРОЛЕТА

Для удобства исследования точности линейной системы наведения представим текущий пролет в момент t в виде суммы четырех составляющих

$$h(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(t),\tag{1.55}$$

где $h_1(t)$ — пролет из-за начальной ошибки прицеливания, измеряемой начальным пролетом $h(\tau)$, т. е. пролетом в момент вклю-

чения системы; $h_2(t)$ — пролет из-за маневра цели; $h_3(t)$ и $h_4(t)$ — пролеты из-за случайных ошибок измерения относительных координат ракеты и цели.

Поскольку система наведения, как правило, нестационарна или подвержена воздействию нестационарных входных сигналов, естественно при исследовании точности воспользоваться аппаратом весовых и параметрических передаточных функций [4, 6, 7]. Начальный пролет $h(\tau)$ является начальным условием в дифференциальном уравнении (1.34). ($h(\tau)$ равен $h(t)$ при $t=\tau$,

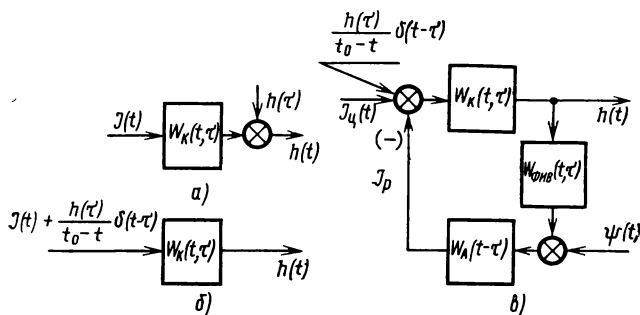


Рис. 1.33. Преобразование структурной схемы при замене начального пролета эквивалентным входным воздействием

здесь и далее индексом τ обозначен момент приложения того или иного воздействия). Для получения пролета h_1 удобно заменить начальное условие $h(\tau)$ (рис. 1.33,а) эквивалентным входным сигналом $x(t)$.

Выбирая $x(t)$, будем считать, что начальный пролет подается на вход системы управления только в момент начала наведения. Тогда эквивалентный входной сигнал можно выбирать для звена кинематических связей без учета весовых функций, замыкающих контур наведения. Выберем $x(t)$ таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\int_{-\infty}^{t_+} W_k(t, u) x(u) du = h(\tau) \quad \text{при } t = \tau.$$

Учитывая (1.41), получим

$$x(t) = \frac{\delta(t - \tau)}{t_0 - \tau} h(\tau). \quad (1.56)$$

Тогда пролет $h_1(t)$ из-за начальной ошибки может быть записан в виде

$$h_1(t) = \int_{-\infty}^t W_{hJ}(t, u) x(u) du = \frac{W_{hJ}(t, \tau)}{t_0 - \tau} h(\tau). \quad (1.57)$$

Здесь $W_{hJ}(t, \tau)$ — весовая функция замкнутого контура наведения со входом по ускорению цели $J_{ц}$ и выходом по пролету h (см. рис. 1.33,б). Введем понятие коэффициента пролета

$$\eta_1(t, \tau) = \frac{h_1(t)}{h(\tau)} = \frac{W_{hJ}(t, \tau)}{t_0 - \tau}. \quad (1.58)$$

Как следует из соотношения (1.58), коэффициент пролета характеризует относительную величину конечного пролета в зависимости от момента τ , для которого задано начальное условие $h(\tau)$, и момента наблюдения t .

Для разомкнутой системы, когда весовая функция автономного контура $W_a(t, \tau) = 0$ и $W_{hJ}(t, \tau) = W_k(t, \tau)$, коэффициент пролета $\eta_1(t, \tau) = 1$ ($t = \tau$).

При выполнении условия физической осуществимости системы наведения, когда весовая функция звеньев от координаты h до J_p (т. е. обратной связи в структурной схеме рис. 1.33,б) не содержит δ -функций и ее производных, должно удовлетворяться равенство

$$W_{hJ}(t, \tau) = W_k(t, \tau) \quad \text{при } t = \tau,$$

из которого следует, что

$$\eta_1(t, \tau) = 1 \quad \text{при } t = \tau.$$

Пролет из-за маневра цели выражается формулой

$$h_2(t) = \int_{\tau}^t W_{hJ}(t, u) J_{ц}(u) du. \quad (1.59)$$

В предположении, что

$$J_{ц}(t) = J_{ц} 1(t - \tau),$$

где $J_{ц} = \text{const}$, вторая составляющая пролета в выражении (1.55) равна

$$h_2(t) = J_{ц} \int_{\tau}^t W_{hJ}(t, u) du. \quad (1.60)$$

Коэффициентом пролета из-за маневра цели назовем величину

$$\eta_2(t, \tau) = \frac{h_2(t)}{J_{ц}} = \int_{\tau}^t W_{hJ}(t, u) du. \quad (1.61)$$

Для разомкнутой системы

$$\eta_2(t, \tau) = \int_{\tau}^t W_k(t, u) du = \int_{\tau}^t (t_0 - u) du = \frac{(t_0 - \tau)^2 - (t_0 - t)^2}{2}. \quad (1.62)$$

Эта формула характеризует приращение пролета в разомкнутой системе при постоянном ускорении цели (или ракеты) за время с момента τ до момента t .

Для замкнутой системы переменная τ в (1.57) трактуется как момент начала процесса наведения. В (1.60) τ — момент начала маневра цели. Если маневр цели начался до начала процесса наведения, его с помощью (1.62) следует учесть в начальных условиях, а в (1.60) переменную τ принять той же, что и в (1.57). Если маневр начался позже начала процесса самонаведения, значения переменной τ в (1.57) и (1.60) окажутся разными.

Пролет из-за случайной ошибки измерения относительных координат ракеты и цели можно записать в виде

$$h_c(t) = h_s(t) + h_d(t) = \int_{-\infty}^t W_{h\psi}(t, u) \psi(u) du. \quad (1.63)$$

Здесь $W_{h\psi}(t, \tau)$ — весовая функция контура наведения с входом по ошибке измерения ψ (см. рис. 1.33, в).

Как следует из разд. 1.6, ошибка измерения пролета должна характеризоваться в основном ошибками измерения проекций координат и скоростей на плоскость, перпендикулярную линии дальности. Эти ошибки обычно с достаточной степенью точности удается аппроксимировать двумя некоррелированными процессами: стационарным случайным процессом по угловому перемещению линии дальности ракета — цель и стационарным случайным процессом по изменению линейной координаты цели в плоскости, перпендикулярной линии дальности. Источником ошибок, близких к стационарному процессу по угловому перемещению, являются в основном угломерные устройства, установленные на ракете (так называемые головки самонаведения); источником ошибок, близких к стационарному процессу по линейной координате, являются флюктуации центра отражения цели, устройства измерения углов и дальностей, не совмещенные с ракетой, бортовые устройства для измерения собственных линейных координат ракеты.

И те и другие ошибки, как правило, имеют близкую к равномерной спектральную плотность в полосе частот, большей, чем полоса пропускания реальной системы наведения. Поэтому естественной аппроксимацией ошибок являются случайные процессы в виде «белого шума».

Корреляционная функция ошибки в определении линейной координаты $\mu(t)$ при этом имеет вид суммы стационарной и нестационарной (изменяющейся с изменением дальности ракета — цель) составляющих

$$R_{\mu\mu}(t_1, t_2) = [G_1 R(t_1) R(t_2) + G_2] \delta(t_1 - t_2), \quad (1.64)$$

где G_1 — уровень спектральной плотности ошибки, стационарной по углу, рад²·с; G_2 — уровень спектральной плотности ошибки, стационарной по линейной координате, м²·с.

При управлении по линейному рассогласованию $l(t)$ координата $\psi(t)$ в соотношении (1.63) и на рис. 1.33,б совпадает с ошибкой измерения линейной координаты

$$\psi(t) = \mu(t).$$

При управлении по произведению угловой скорости линии дальности ω на скорость сближения $|\dot{R}|$ (см. разд. 1.11), считая $|\dot{R}| = \text{const}$, будем иметь

$$\psi(t) = |\dot{R}| \delta\omega,$$

где $\delta\omega$ — ошибка измерения угловой скорости.

Учитывая, что $\delta\omega$ является производной ошибки измерения углового положения цели $\delta\varepsilon$, соответствующую ошибку измерения линейной координаты запишем в виде

$$\mu(t) = R(t) \delta\varepsilon(t).$$

В предположении, что $|\dot{R}| = \text{const}$ и $R(t) = |\dot{R}|(t_0 - t)$, $\mu(t) = |\dot{R}|(t_0 - t) \delta\varepsilon(t) = (t_0 - t) \lambda(t)$, где $\lambda(t) = |\dot{R}| \delta\varepsilon$, откуда корреляционные функции сигналов $\mu(t)$ и $\lambda(t)$ равны соответственно

$$\begin{aligned} R_{\mu\mu}(t_1, t_2) &= [|\dot{R}|^2 G_1 (t_0 - t_1)(t_0 - t_2) + G_2] \delta(t_1 - t_2), \\ R_{\lambda\lambda}(t_1, t_2) &= \left[|\dot{R}|^2 G_1 + \frac{G_2}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)} \right] \delta(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Выражение, связывающее между собой ошибки $\mu(t)$ и $\lambda'(t)$, позволяет получить весовую функцию $W_{\lambda'\mu}(t, \tau)$, преобразующую одну ошибку в другую. Поскольку $\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu(t)}{t_0 - t} \right)$,

$$W_{\lambda'\mu}(t, \tau) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta(t - \tau)}{t_0 - t} \right) = \frac{(t_0 - t) \delta'_t(t - \tau) + \delta(t - \tau)}{(t_0 - t)^2}.$$

Согласно соотношениям (1.42) и (1.46) весовая функция звена, преобразующего линейное рассогласование в произведение угловой скорости линии дальности на скорость сближения, имеет точно такой же вид. Таким образом,

$$W_{\lambda'\mu}(t, \tau) = W_{|\dot{R}|\omega-l}(t, \tau) = \frac{(t_0 - t) \delta'_t(t - \tau) + \delta(t - \tau)}{(t_0 - t)^2}. \quad (1.66)$$

Использование в системе наведения других кинематических параметров, характеризующих текущий пролет и линейно с ним связанных, должно изменить как весовую функцию формирова-

ния измеряемой величины $W_{\text{Фив}}(t, \tau)$, так и корреляционную функцию ошибки измерения $\psi(t)$ (см. разд. 1.8 и рис. 1.33, в).

При этом, очевидно, можно ожидать, что и новая измеряемая величина и новая ошибка измерения будут связаны с линейным рассогласованием $l(t)$ и ошибкой измерения линейной координаты $\mu(t)$ одинаковыми операторами. Следовательно, при задании исходных ошибок корреляционной функцией (1.64) независимо от вида измеряемой величины пролет из-за случайных ошибок измерения $h_c(t)$ можно характеризовать весовой функцией $W_{h\mu}(t, \tau)$, связывающей ошибки измерения линейного рассогласования с величиной пролета.

Такой подход эквивалентен представлению структурной схемы контура наведения (рис. 1.34), при котором звено формирования измеряемой величины разбивается на два последовательно соединенных звена, первое из которых преобразует пролет в линейное рассогласование [весовая функция $W_{lh}(t, \tau)$, см. соотношение (1.44)], а второе — линейное рассогласование в измеряемую величину, по которой собственно и производится управление, причем ошибка измерения $\mu(t)$ всегда приложена к входу второго звена и имеет корреляционную функцию (1.64). В общем случае весовую функцию второго звена обозначим $W_{\text{Фив}}^l(t, \tau)$. В случае управления по l

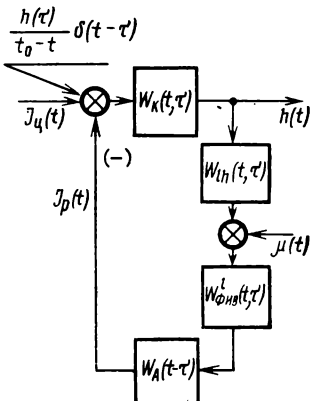


Рис. 1.34. Структурная схема контура наведения

$$W_{\text{Фив}}^l = \delta(t - \tau).$$

Как следует из (1.66), при управлении по $|\dot{R}| \omega$

$$W_{\text{Фив}}^l(t, \tau) = W_{|\dot{R}| \omega - l}(t, \tau).$$

Итак, из-за случайной ошибки измерения относительных координат ракеты и цели пролет

$$h_c(t) = h_3(t) + h_4(t) = \int_{\tau}^t W_{h\mu}(t, u) \mu(u) du.$$

Здесь нижний предел τ характеризует момент подачи на вход системы воздействия $\mu(t)$ и совпадает с моментом начала наведения. Величину $h_3(t)$ будем считать пролетом из-за стационарной угловой ошибки, а величину $h_4(t)$ — из-за стационарной ошибки по линейной координате.

Считая, что корреляционная функция сигнала $\mu(t)$ имеет вид (1.65), получим выражение для дисперсии пролета из-за случайных ошибок измерения

$$D_{h_c}(t, \tau) = D_{h_s}(t, \tau) + D_{h_k}(t, \tau), \quad (1.67)$$

где

$$D_{h_s}(t, \tau) = |\dot{R}|^2 G_1 \int_{\tau}^t W_{h\mu}^2(t, u) (t_0 - u)^2 du,$$

$$D_{h_k}(t, \tau) = G_2 \int_{\tau}^t W_{h\mu}^2(t, u) du.$$

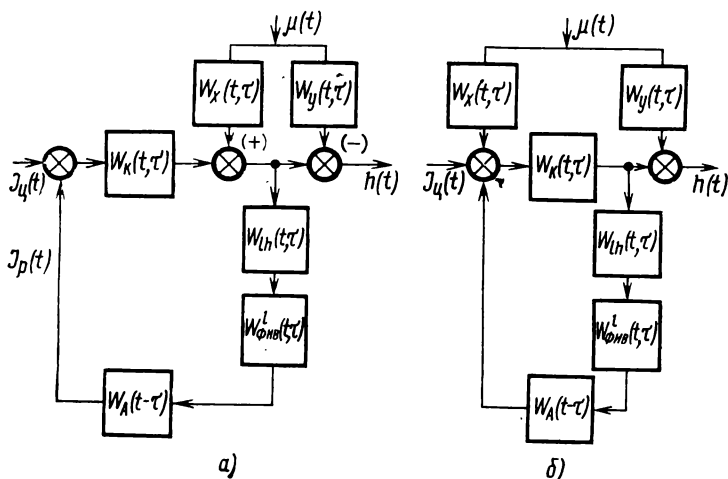


Рис. 1.35. Структурные преобразования сигнала $\mu(t)$ на вход и выход замкнутой системы наведения:

а — первая фаза преобразования
б — вторая »

Введем понятие коэффициентов пролетов из-за ошибок измерения $\eta_3(t, \tau)$ и $\eta_4(t, \tau)$:

$$\eta_3(t, \tau) = \frac{\sqrt{D_{h_s}(t, \tau)}}{\sqrt{G_1 |\dot{R}|^2}} \sqrt{\int_{\tau}^t W_{h\mu}^2(t, u) (t_0 - u)^2 du};$$

$$\eta_4(t, \tau) = \frac{\sqrt{D_{h_k}(t, \tau)}}{\sqrt{G_2}} \sqrt{\int_{\tau}^t W_{h\mu}^2(t, u) du}.$$

Полученные выражения показывают, что дисперсия пролета является неубывающей функцией времени от момента начала наведения τ до момента наблюдения t .

Весовые функции $W_{hJ}(t, \tau)$ и $W_{h\mu}(t, \tau)$, характеризующие точность системы наведения, могут быть выражены одна через другую. Перенесем воздействие $\mu(t)$ к точке приложения сигнала $J_{\Pi}(t)$ и к выходу системы. Сначала сигнал $\mu(t)$ (см. рис. 1.34) переносится так, как это показано на рис. 1.35,а. Затем преобразование следует в соответствии с рис. 1.35,б. При этом естественно потребовать, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\int_{\tau}^t W_{hJ}(t, u) W_x(u, \tau) du - W_y(t, \tau) = W_{h\mu}(t, \tau),$$

$$\int_{\tau}^t W_{\kappa}(t, u) W_x(u, \tau) du - W_y(t, \tau) = 0,$$

$$W_y(t, \tau) = W_{ih}^{-}(t, \tau).$$

Первое следует непосредственно из структурной схемы, второе — из того, что при размыкании контура наведения ($W_a(t, \tau) = 0$) ошибки не воздействуют на пролет, третье — из первой фазы переноса воздействия (см. рис. 1.35,а).

В результате вычитания второго условия из первого получим

$$W_{h\mu}(t, \tau) = \int_{\tau}^t [W_{hJ}(t, u) - W_{\kappa}(t, u)] W_x(u, \tau) du. \quad (1.68)$$

Кроме того,

$$W_x(t, \tau) = \int_{\tau}^t W_{\kappa}^{-}(t, u) W_{ih}^{-}(u, \tau) du. \quad (1.69)$$

Выражение для $W_x(t, \tau)$ получено в результате подстановки $W_y(t, \tau)$ во второе условие и воздействия слева обратной весовой функции $W_{\kappa}^{-}(t, \tau)$.

Вместо того чтобы определять $W_x(t, \tau)$ по (1.69), вычислим обратную весовую функцию

$$W_x^{-}(t, \tau) = \int_{\tau}^t W_{ih}(t, u) W_{\kappa}(u, \tau) du.$$

Согласно (1.41) и (1.44) получим

$$W_x^{-}(t, \tau) = (t_0 - t)(t_0 - \tau) \int_{\tau}^t \frac{du}{t_0 - u} = (t - \tau) 1(t - \tau).$$

Таким образом, $W_x^{-}(t, \tau)$ — весовая функция двойного интегрирующего звена (это следует непосредственно из того, что вход

последовательного соединения звеньев — относительное ускорение J , а выход — линейное рассогласование l), и, следовательно,

$$W_x(t, \tau) = \frac{d^2 \delta(t - \tau)}{dt^2} \quad (1.70)$$

весовая функция двойного дифференцирующего звена.

Подставив соотношение (1.70) в (1.68)), окончательно получим

$$\begin{aligned} W_{h\mu}(t, \tau) &= \int_{\tau}^t [W_{hJ}(t, u) - W_{\kappa}(t, u)] \frac{d^2 \delta(u - \tau)}{du^2} du = \\ &= \frac{d^2}{d\tau^2} [W_{hJ}(t, \tau) - W_{\kappa}(t, \tau)]. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Из выражений (1.70) и (1.71) следует

$$\int_{\tau}^t W_{h\mu}(t, u) (u - \tau) du = W_{hJ}(t, \tau) - W_{\kappa}(t, \tau)$$

и, следовательно,

$$W_{hJ}(t, \tau) = \int_{\tau}^t W_{h\mu}(t, u) (u - \tau) du + W_{\kappa}(t, \tau). \quad (1.72)$$

Выражения (1.71) и (1.72) позволяют по заданной весовой функции $W_{hJ}(t, \tau)$ вычислить $W_{h\mu}(t, \tau)$ и наоборот.

Итак, для определения коэффициентов пролетов, характеризующих совместно с параметрами входных воздействий ($h(\tau)$, $J_{\text{ц}}$, $G_1|\dot{R}|$, G_2) точность системы наведения, достаточно знать весовую функцию замкнутого контура наведения с входом по маневру цели $W_{hJ}(t, \tau)$ или по ошибке измерения линейной координаты $W_{h\mu}(t, \tau)$.

1.13. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМ НАВЕДЕНИЯ

Понятие параметрической передаточной функции нестационарной линейной системы было введено Заде [7]. Параметрическая передаточная функция $W(s, t)$ определяется как преобразование Лапласа от весовой функции $W(t, \tau)$ по разности аргументов $t - \tau$ (где t — параметр)

$$W(s, t) = L \{W(t, \tau)\}_{t-\tau} = \int_{-\infty}^t W(t, \tau) e^{-s(t-\tau)} d\tau. \quad (1.73)$$

Соответственно обратное преобразование

$$W(t, \tau) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(s, t) e^{s(t-\tau)} ds. \quad (1.74)$$

Для стационарных систем, свойством которых является зависимость весовой функции от разности аргументов:

$$W(t, \tau) = W(t - \tau),$$

получим

$$W(s, t) = \int_{-\infty}^t W(t - \tau) e^{-s(t - \tau)} d\tau = \int_0^{\infty} W(\theta) e^{-s\theta} d\theta = W(s).$$

Таким образом, соотношение (1.73), являющееся обобщением понятия передаточной функции на нестационарные системы, в случае стационарной системы сводится к обычному преобразованию Лапласа. Все свойства преобразований Лапласа справедливы для выражений (1.73) и (1.78), если в качестве временной переменной рассматривать разность $t - \tau$. Сделаем следующие преобразования, которые будут полезны в дальнейшем:

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{dW(t, \tau)}{d\tau}\right\}_{t-\tau} &= -L\left\{\frac{dW(t, \tau)}{d(t - \tau)}\right\}_{t-\tau} = -sW(s, t); \\ L\{\tau W(t, \tau)\}_{t-\tau} &= -L\{(t - \tau)W(t, \tau) - tW(t, \tau)\}_{t-\tau} = \\ &= \frac{dW(s, t)}{ds} + tW(s, t). \end{aligned} \quad (1.75)$$

Важными являются свойства параметрической передаточной функции двух последовательно соединенных звеньев с весовыми функциями $W_1(t, \tau)$ и $W_2(t, \tau)$. Звено с весовой функцией $W_1(t, \tau)$ будем считать входным. Параметрическая передаточная функция

$$W(s, t) = \int_{-\infty}^t d\tau \int_{\tau}^t W_2(t, u) e^{-s(t-u)} W_1(u, \tau) e^{-s(u-\tau)} du.$$

После замены порядка интегрирования получим

$$W(s, t) = \int_{-\infty}^t W_2(t, u) e^{-s(t-u)} du \int_{-\infty}^u W_1(u, \tau) e^{-s(u-\tau)} d\tau.$$

Если входное звено стационарно, т. е. $W_1(t, \tau) = W_1(t - \tau)$, интеграл

$$\int_{-\infty}^u W_1(u, \tau) e^{-s(u-\tau)} d\tau = W_1(s).$$

В этом случае параметрическая передаточная функция последовательного соединения равна

$$W(s, t) = W_1(s) \int_{-\infty}^t W_2(t, u) e^{-s(t-u)} du = W_2(s, t) W_1(s). \quad (1.76)$$

При нестационарном входном звене представить параметрическую передаточную функцию последовательного соединения в виде произведения передаточных функций можно лишь тогда, когда оператор выходного звена является коэффициентом усиления. Так, если

$$W_2(t, \tau) = a(t) \delta(t - \tau),$$

то

$$W(t, \tau) = \int_{\tau}^t W_2(t, u) W_1(u, \tau) du = a(t) W_1(t, \tau),$$

при этом

$$W(s, t) = a(t) W_1(s, t). \quad (1.77)$$

Воспользуемся понятием параметрической передаточной функции для описания динамических свойств контуров наведения. Для произвольного контура параметрические передаточные функции

$$W_{hJ}(s, t) = L \{W_{hJ}(t, \tau)\}_{t-\tau};$$

$$W_{h\mu}(s, t) = L \{W_{h\mu}(t, \tau)\}_{t-\tau}$$

связаны между собой выражением, которое может быть получено из (1.72) с помощью (1.76). Учитывая, что

$$L \{(t - \tau) 1(t - \tau)\}_{t-\tau} = \frac{1}{s^2},$$

находим

$$W_{hJ}(s, t) = W_{h\mu}(s, t) \frac{1}{s^2} + W_{\kappa}(s, t), \quad (1.78)$$

где согласно (1.41) параметрическая передаточная функция кинематического звена

$$\begin{aligned} W_{\kappa}(s, t) &= L \{W_{\kappa}(t, \tau)\}_{t-\tau} = L \{(t_0 - \tau) 1(t - \tau)\}_{t-\tau} = \\ &= L \{(t_0 - t) 1(t - \tau)\}_{t-\tau} + L \{(t - \tau) 1(t - \tau)\}_{t-\tau}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение (1.77), имеем

$$W_{\kappa}(s, t) = \frac{(t_0 - t)}{s} + \frac{1}{s^2} = \frac{(t_0 - t)s + 1}{s^2}. \quad (1.79)$$

Из соотношений (1.78) и (1.79) получим

$$W_{hJ}(s, t) = \frac{W_{h\mu}(s, t) + (t_0 - t)s + 1}{s^2}; \quad (1.80)$$

$$W_{h\mu}(s, t) = W_{hJ}(s, t) s^2 - (t_0 - t)s - 1.$$

Для конкретных законов наведения, когда задана весовая функция звена формирования измеряемой величины $W_{\text{Фив}}(t, \tau)$, а автономный контур стационарен, может быть получено выражение, связывающее передаточную функцию автономного контура с параметрической передаточной функцией замкнутого контура наведения.

В случае наведения по линейному рассогласованию в соответствии с рис. 1.26 и формулами (1.46) и (1.76) параметрическая передаточная функция

$$W_{hJ}(s, t) = L \{ (t_0 - t) \delta'_t(t - \tau) + \delta(t - \tau) \}_{t-\tau} W_{IJ}(s). \quad (1.81)$$

Первый сомножитель в (1.81) — параметрическая передаточная функция нестационарного звена равна

$$L \{ (t_0 - t) \delta'_t(t - \tau) + \delta(t - \tau) \}_{t-\tau} = (t_0 - t)s + 1,$$

откуда

$$W_{hJ}(s, t) = [(t_0 - t)s + 1] W_{IJ}(s). \quad (1.82)$$

Учитывая, что в прямой цепи замкнутого стационарного контура (см. рис. 1.26) стоит двойное интегрирующее звено, а в обратной — автономный контур, получим

$$W_{IJ}(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{W_a(s)}{s^2}} = \frac{1}{s^2 + W_a(s)}. \quad (1.83)$$

Таким образом,

$$W_{hJ}(s, t) = \frac{(t_0 - t)s + 1}{s^2 + W_a(s)}, \quad (1.84)$$

откуда

$$W_a(s) = \frac{(t_0 - t)s + 1 - s^2 W_{hJ}(s, t)}{W_{hJ}(s, t)}. \quad (1.85)$$

Сравнивая (1.85) с выражением (1.80), находим

$$W_a(s) = - \frac{W_{h\mu}(s, t)}{W_{hJ}(s, t)}. \quad (1.86)$$

Поскольку выражение (1.83) справедливо только для стационарного автономного контура, определенная из него передаточная функция $W_a(s)$ не зависит от t . Это можно проследить, представив $W_{h\mu}(s, t)$ в виде

$$W_{h\mu}(s, t) = [(t_0 - t)s + 1] W_{I\mu}(s, t),$$

где $W_{I\mu}(s, t)$ — передаточная функция замкнутого контура наведения с входом по $\mu(t)$ и выходом по $l(t)$ (см. рис. 1.26).

При стационарном автономном контуре и управлении по $l(t)$

$$W_{l\mu}(s, t) = W_{l\mu}(s).$$

Подставив $W_{hJ}(s, t)$ из (1.82) и $W_{h\mu}(s, t)$ в (1.86), получим

$$W_a(s) = -\frac{W_{l\mu}(s)}{W_{lJ}(s)}.$$

Другие виды законов наведения, когда измеряемые величины отличны от линейного рассогласования, могут быть получены из зависимостей, аналогичных (1.85), однако здесь встречаются значительные трудности, так как контур наведения оказывается нестационарным. Чтобы найти эти зависимости, воспользуемся выражением для весовых функций взаимно обратных систем

$$\int_{\tau}^t W_{hJ}(t, u) W_{hJ}^{-}(u, \tau) du = \delta(t - \tau). \quad (1.87)$$

Весовая функция системы, обратной замкнутому контуру наведения (см. рис. 1.23), может быть представлена в виде

$$W_{hJ}^{-}(t, \tau) = W_{\kappa}^{-}(t, \tau) + \int_{\tau}^t W_a(t, u) W_{\Phi И В}(u, \tau) du. \quad (1.88)$$

Подставив соотношение (1.88) в (1.87), получим

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t W_{hJ}(t, u) W_{\kappa}^{-}(u, \tau) du + \int_{\tau}^t W_{hJ}(t, u) du \int_{\tau}^u W_a(u - \vartheta) \times \\ \times W_{\Phi И В}^{-}(\vartheta, \tau) d\vartheta = \delta(t - \tau). \end{aligned} \quad (1.89)$$

Учитывая, что все слагаемые в соотношении (1.89) представляют собой весовые функции некоторых систем, подадим на их вход весовую функцию $W_{\Phi И В}^{-}(t, \tau)$. При этом выражение (1.89) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t W_{hJ}(t, u) du \int_{\tau}^u W_{\kappa}^{-}(u - \vartheta) W_{\Phi И В}^{-}(\vartheta, \tau) d\vartheta + \\ + \int_{\tau}^t W_{hJ}(t, u) W_a(u - \vartheta) du = W_{\Phi И В}^{-}(t, \tau). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Выражение (1.90) связывает между собой весовые функции $W_{hJ}(t, \tau)$ и $W_a(t, \tau)$. Для стационарного автономного контура аналогично (1.81) удобно перейти к преобразованиям Лапласа

$$\begin{aligned} L \left\{ \int_{\tau}^t W_{hJ}(t, u) du \left[\int_{\tau}^u W_{\kappa}^{-}(u, \vartheta) W_{\Phi И В}^{-}(\vartheta, \tau) d\vartheta \right] \right\}_{t=\tau} + \\ + W_{hJ}(s, t) W_a(s) = W_{\Phi И В}^{-}(s, t). \end{aligned} \quad (1.91)$$

Подстановкой в (1.90) и (1.91) вместо $W_{\text{ФИБ}}^-(t, \tau)$ весовой функции

$$W_{ih}^-(t, \tau) = W_{hl}(t, \tau)$$

можно согласно формулам (1.46), (1.69), (1.70) получить выражение, тождественное (1.85):

$$L \left\{ \int_{\tau}^t W_{hJ}(t, u) \frac{d^2}{du^2} \delta(u - \tau) du \right\} + W_{hJ}(s, t) W_a(s) = (t_0 - t)s + 1,$$

откуда

$$W_{hJ}(s, t) (s^2 + W_a(s)) = (t_0 - t)s + 1.$$

Воспользуемся соотношением (1.91) для исследования связи между параметрической передаточной функцией замкнутой системы наведения и стационарным автономным контуром в случае управления по произведению угловой скорости линии дальности и скорости сближения.

В этом случае весовая функция звена формирования измеряемой величины имеет вид (1.42), и, следовательно, обратная весовая функция

$$W_{\text{ФИБ}}^-(t, \tau) = W_{|R|_{\omega-h}}^-(t, \tau) = W_{h-|k|_{\omega}}(t, \tau) = \delta(t - \tau)(t_0 - t)^2. \quad (1.92)$$

Весовая функция звена, обратного звену кинематических связей (1.41),

$$W_k^-(t, \tau) = \frac{\delta'_t(t - \tau)}{t_0 - t}, \quad (1.93)$$

что следует из структурной схемы, приведенной на рис. 1.15.

Последовательное соединение звеньев с весовыми функциями (1.92) и (1.93) имеет весовую функцию

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t W_k^-(t, \theta) W_{\text{ФИБ}}^-(\theta, \tau) d\theta &= \int_{\tau}^t \frac{\delta'_t(t - \theta)}{t_0 - t} (t_0 - \theta)^2 \delta(\theta - \tau) d\theta = \\ &= \frac{1}{(t_0 - t)} \frac{d}{dt} [(t_0 - t)^2 \delta(t - \tau)] = (t_0 - t) \delta'_t(t - \tau) - 2\delta(t - \tau). \end{aligned} \quad (1.94)$$

Подставляя соотношения (1.92) и (1.94) в (1.91) и учитывая (1.75) и (1.76), получим

$$s \frac{d}{ds} W_{hJ}(s, t) + [2 - (t_0 - t)s - W_a(s)] W_{hJ}(s, t) = -(t_0 - t)^2. \quad (1.95)$$

Формула (1.95) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением относительно параметрической передаточной функции $W_{hJ}(s, t)$.

В общем случае решение уравнения (1.95) не удастся довести до конца, так как оно сводится, как правило, к интегральным показательным функциям.

С помощью (1.95) можно получить формулу для вычисления передаточной функции автономного контура по параметрической передаточной функции замкнутой системы:

$$W_a(s) = \frac{(t_0 - t)^2 + [2 - (t_0 - t)s] W_{hJ}(s, t) + s \frac{d}{ds} W_{hJ}(s, t)}{W_{hJ}(s, t)}. \quad (1.96)$$

Воспользовавшись соотношением (1.80), можно найти аналогичную зависимость $W_a(s)$ от $W_{h\mu}(s)$:

$$W_a(s) = s \frac{\frac{dW_{h\mu}(s, t)}{ds} - W_{h\mu}(s, t)(t_0 - t)}{W_{h\mu}(s, t) + (t_0 - t)s + 1}. \quad (1.97)$$

Выражения (1.96) и (1.97) получены в предположении, что автономный контур стационарен, поэтому так же, как и в (1.86), правые части этих выражений не зависят от t .

1.14. ТОЧНОСТЬ В ЗАДАННЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПО ТОЧНОСТИ СИСТЕМЫ

Точность систем наведения существенна не на всем интервале времени наведения. Так, например, для систем наземного наведения ракет, в которых на конечном этапе используется режим самонаведения, т. е. наведения по информации, вырабатываемой бортовыми устройствами (головкой самонаведения или бортовой радиолокационной станцией), важна точность в момент захвата цели. Для этапа самонаведения или телеуправления ракеты важна точность вблизи точки подрыва боевой части. Таким образом, условно можно принять, что точность наведения существенна только в один момент времени. Этот момент t_1 либо соответствует началу последующего этапа, как в случае перехода на самонаведение или пуска ракет, либо вообще концу процесса наведения. В последнем случае для того, чтобы иметь право использовать линейные уравнения кинематических связей, момент t_1 выбирается таким, чтобы еще выполнялось условие (1.16). При этом пролет определяется с ошибкой, не превышающей

$$\Delta h = \frac{(t_0 - t_1)^2}{2} J_{\max}. \quad (1.98)$$

Это соотношение может быть получено из (1.62) в предположении, что с момента t_1 до t_0 действует постоянное максимально возможное относительное ускорение ракеты и цели $J_{\max}$. Если

потребовать, чтобы ошибка в определении пролета не превосходила 2 м, и предположить, что максимальное относительное ускорение $J_{\max}$ составляет 100 м/с², момент наблюдения t_1 должен удовлетворять неравенству

$$t_1 \geq t_0 - 0,2 \text{ с.}$$

С другой стороны, если величина пролета равна 10 м, необходимо, чтобы

$$R(t) \simeq |\dot{R}|(t_0 - t_1) \gg 10 \text{ м.}$$

Когда $|\dot{R}| = 200$ м/с, дальность $R(t) = 40$ м. Этого достаточно, чтобы считать условие (1.16) выполненным и, следовательно, целесообразно принять $t_1 = t_0 - 0,2$ с.

При больших пролетах следует пойти на увеличение допустимой ошибки Δh и за счет этого увеличить время $t_0 - t_1$.

Анализ формул (1.58), (1.60), (1.67) показывает, что динамические и случайные ошибки наведения в момент t_1 определяются только одним сечением весовых функций $W_{hj}(t, \tau)$ и $W_{h\mu}(t, \tau)$, которые связаны друг с другом формулой (1.72). Аналогичную картину будем иметь, рассматривая параметрические передаточные функции $W_{hj}(s, t)$ и $W_{h\mu}(s, t)$ и формулы, связывающие их с передаточной функцией автономного контура для различных весовых функций звена ФИВ (1.91), (1.96), (1.97).

Это свойство контуров наведения существенно упрощает задачу анализа точности линейных систем и синтеза оптимальных по точности систем. В первом случае для получения динамических и случайных ошибок достаточно определить лишь одно сечение весовой функции замкнутой системы или, что по существу эквивалентно, параметрическую передаточную функцию при одном значении параметра $t = t_1$. Задача синтеза оптимальной по точности системы наведения сводится к определению оптимального сечения весовой функции замкнутой системы или параметрической передаточной функции при одном значении параметра $t = t_1$. В этой связи удобно ввести понятие эквивалентных по точности систем, т. е. систем, точность которых в заданный момент времени при произвольных, но одних и тех же входных воздействиях одинакова. Из выражения

$$y(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} W(t_1, \tau) x(\tau) d\tau$$

следует, что эквивалентными в момент $t = t_1$ являются такие системы, весовые функции которых в момент $t = t_1$ равны. Естественно, что у каждой системы может быть бесчисленное множество эквивалентных по точности систем. Геометрически это означает, что через данное сечение весовой функции можно провести бесчисленное множество поверхностей, обращающихся в нуль при $t < \tau$ (рис. 1.36).

Для одного и того же входного сигнала выходные сигналы эквивалентных систем могут быть различными при $t \neq t_1$, а их производные могут отличаться в момент $t = t_1$.

Для равенства первых n производных выходных сигналов при $t = t_1$, первые n производных от весовых функций по t при $t = t_1$ должны быть равны друг другу.

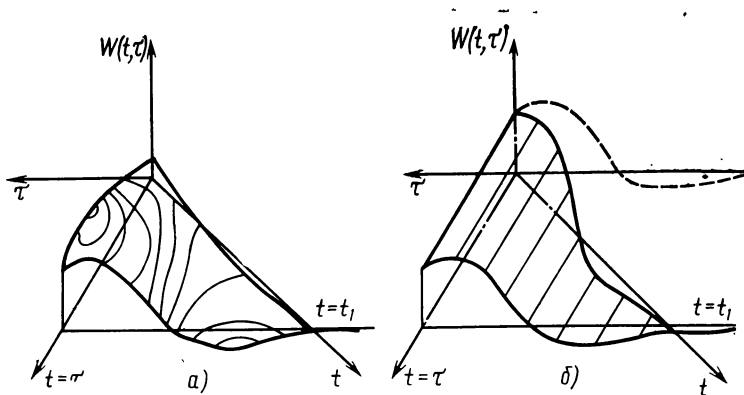


Рис. 1.36. Весовые функции эквивалентных по точности в момент $t = t_1$ нестационарной (а) и стационарной (б) систем

Поскольку через любое сечение $W(t, \tau)$ можно провести цилиндрическую поверхность с направляющей, параллельной биссектрисе координатного угла $t = \tau$ (рис. 1.36, б), среди всех эквивалентных данной системе систем всегда есть стационарная. Из этого не следует, впрочем, что всегда эта стационарная система имеет дробно-рациональную передаточную функцию, однако с заданной степенью точности сечение всегда может быть аппроксимировано суммой экспонент и, следовательно, приближенная передаточная функция будет дробно-рациональной.

В этом случае параметрическую передаточную функцию нестационарной системы удобно трактовать как передаточную функцию стационарной эквивалентной системы, параметрически зависящую от момента наблюдения t .

1.15. ТОЧНОСТЬ КОНТУРА НАВЕДЕНИЯ ПРИ БЕСКОНЕЧНОМ ВРЕМЕНИ УПРАВЛЕНИЯ. ПОНЯТИЕ ВРЕМЕНИ ПАМЯТИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Анализируя точность контура наведения, можно воспользоваться его стационарным эквивалентом, имеющим передаточную функцию $W_{hj}(s, t_1)$. В этом случае, используя теорему о

начальном и конечном значениях, согласно (1.57) и (1.60) получим

$$\begin{aligned}\lim_{t_1, -\tau \rightarrow \infty} [\eta_1(t_1, \tau)(t_0 - \tau)] &= \lim_{s \rightarrow 0} s W_{hJ}(s, t_1), \\ \lim_{t_1, -\tau \rightarrow \infty} \eta_2(t_1, \tau) &= \lim_{s \rightarrow 0} W_{hJ}(s, t_1).\end{aligned}\quad (1.99)$$

На основании (1.64)

$$\lim_{t_1, -\tau \rightarrow \infty} D_{h_4}(t_1, \tau) = \frac{G_2}{\pi} \int_0^{\infty} \left| W_{h_4}(i\omega, t_1) \right|^2 d\omega. \quad (1.100)$$

Точно так же, как и в случае стационарных систем, формулы (1.99) и (1.100) представляют ценность только потому, что реальные системы имеют практически конечное время памяти.

Для стационарной системы с весовой функцией $W(\theta)$, где $\theta = t - \tau$, под временем памяти обычно понимают минимальный интервал времени T ; на котором выполняется условие

$$\int_0^{\infty} W(\theta) x(t - \theta) d\theta = \int_0^T W(\theta) x(t - \theta) d\theta$$

для произвольных $x(t)$. Это возможно, если при $\theta > T$, $W(\theta) = 0$. Здесь время памяти обычно трактуется как время затухания реакции системы. Однако эквивалентная запись

$$\int_{-\infty}^t W(t - \tau) x(\tau) d\tau = \int_{t-T}^t W(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

при произвольных $x(\tau)$ позволяет говорить о времени памяти как о времени, в течение которого система еще «помнит» входное воздействие.

Для времени памяти нестационарной системы правильно только второе толкование

$$\int_{-\infty}^t W(t, \tau) x(\tau) d\tau = \int_{t-T}^t W(t, \tau) x(\tau) d\tau.$$

Согласно рис. 1.37 под временем памяти нестационарной системы в момент наблюдения t_1 будем понимать время T , при котором выполняется условие $W(t, \tau) \approx 0$, если $t_1 - \tau > T$. Время памяти нестационарной системы удобно трактовать как время памяти стационарного эквивалента. Здесь уже нет сколько-нибудь четкой зависимости между временем переходного процесса и временем, в течение которого нестационарная система

«помнит» входные воздействия. Часто бывает невозможно определить, что такое время переходного процесса, хотя время памяти системы можно указать всегда, если только стационарный эквивалент устойчив.

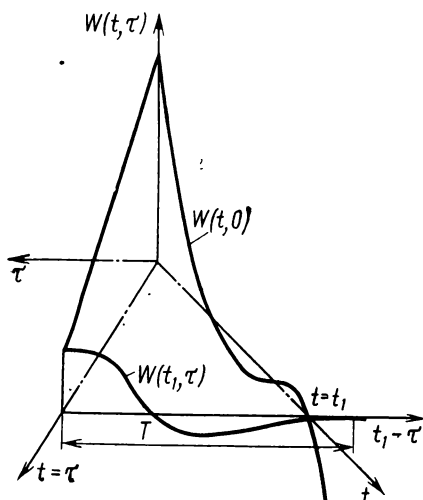


Рис. 1.37. Весовая функция нестационарной системы

Понятие эквивалентных систем позволяет определить устойчивость нестационарной системы как устойчивость стационарного эквивалента. Для анализа точности нестационарного контура наведения можно воспользоваться его стационарным эквивалентом. Задав сечение весовой функции замкнутой системы или стационарным эквивалентом системы, с помощью (1.85) и (1.96) можно определить передаточные функции автономных контуров систем наведения по l и $|\dot{R}|\omega$. Получившиеся при этом контуры наведения будут эквивалентны по точности заданной системе и между собой.

Подстановка заданного стационарного эквивалента в (1.85) и (1.96) делает передаточные функции автономных контуров параметрически зависящими от того, на какой момент времени задана точность.

1.16. СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛИНОМОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАМКНУТОГО КОНТУРА НАВЕДЕНИЯ

В настоящем разделе рассматриваются контуры наведения по $|\dot{R}|\omega$. Аналогичные результаты для наведения по линейному рассогласованию могут быть легко получены. При выборе характеристик замкнутого контура наведения важно знать, как связаны между собой коэффициенты полиномов передаточных функций $W_{hJ}(s, t)$, $W_{h\mu}(s, t)$ и $W_a(s)$.

Представим $W_{hJ}(s, t)$ в виде

$$W_{hJ}(s, t) = \frac{A(s)}{B(s)}, \quad (1.101)$$

где

$$A(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i, \quad B(s) = \sum_{j=0}^n b_j s^j.$$

Коэффициенты полиномов a_i и b_j являются функциями параметра $t=t_1$. Подставив соотношение (1.101) в (1.96) и положив

$$t_0 - t_1 = \Delta, \quad (1.102)$$

получим

$$W_a(s) = \frac{\Delta^2 B^2 s + A(s) B(s) (2 - \Delta s) + s [A'(s) B(s) - B'(s) A(s)]}{A(s) B(s)}. \quad (1.103)$$

Как следует из формулы (1.103), характеристическим уравнением автономного контура является

$$A(s) B(s) = 0.$$

Таким образом, для устойчивости автономного контура достаточно, чтобы полиномы $A(s)$ и $B(s)$ не имели корней с положительной вещественной частью. Иными словами, замкнутый контур наведения должен быть минимально-фазовой системой.

Из формулы (1.99) следует, что при $a_0 = 0$ и $b_0 \neq 0$ выполняется условие

$$\lim_{t_1 - \tau \rightarrow \infty} [\eta_1(t_1, \tau) (t_0 - \tau)] = 0,$$

из которого следует

$$\lim_{t_1 - \tau \rightarrow \infty} \eta_1(t_1, \tau) = 0. \quad (1.104)$$

Для коэффициента пролета

$$\eta_2(t_1, -\infty) = \lim_{t_1 - \tau \rightarrow \infty} \eta_2(t_1, \tau) = \frac{a_0}{b_0}. \quad (1.105)$$

Анализ соотношения (1.103) показывает, что коэффициент усиления автономного контура (отношение свободных членов числителя и знаменателя)

$$K_a = \frac{\Delta^2 b_0^2 + 2a_0 b_0}{a_0 b_0} = 2 + \frac{\Delta^2}{a_0/b_0},$$

откуда с учетом соотношения (1.105)

$$K_a = 2 + \frac{\Delta^2}{\eta_2(t_1, -\infty)}. \quad (1.106)$$

Этот же результат, но для безынерционной системы, может быть получен из соотношения (1.52), если положить там $h(0) = 0$, $t_0 - t = \Delta$ при $t \rightarrow \infty$, что в данном случае соответствует бесконечному времени самонаведения, так как при выводе соотно-

шения (1.52) считалось, что начало наведения соответствует $t=0$. В результате имеем

$$h = J_{\text{н}} \frac{\Delta^2}{K_a - 2},$$

откуда с учетом соотношения (1.61) непосредственно получим (1.106), из которого следует, что

$$\eta_2(t_1, -\infty) = \frac{\Delta^2}{K_a - 2}. \quad (1.107)$$

Формально из соотношения (1.107) вытекает, что в случае, когда наведение продолжается до $\Delta=0$, пролет из-за маневра цели может быть ликвидирован полностью, если только $K_a \neq 2$. Однако, как следует из рис. 1.27—1.32 для безынерционного автономного контура и из многочисленных расчетов для реальных систем, требуемые ускорения ракеты ограничены только при $K_a > 2$, причем даже и в этом случае приходится ограничиваться значениями Δ порядка 0,2 с для определения пролета с точностью ~ 2 м. При $K_a < 2$ весовая функция $W_{hj}(t, \tau)$ не стремится к нулю с ростом времени $t_1 - \tau$ и коэффициент η_2 неограниченно возрастает.

Соотношение (1.105) выражает свойство низкочастотной асимптоты передаточной функции замкнутого контура $W_{hj}(s, t_1)$. При $a_0=0$ передаточная функция $W_{hj}(s, t_1)$ в области низких частот обладает свойствами дифференциатора и коэффициент пролета $\eta_2(t_1, -\infty) = 0$.

Более подробно вопрос о характере динамических ошибок в функции времени наведения $\theta = t_1 - \tau$ и времени, оставшегося до встречи от момента наблюдения $\Delta = t_0 - t_1$, рассматривается в разд. 1.17.

Рассмотрим свойства высокочастотной асимптоты передаточной функции $W_{hj}(s, t)$. Формула (1.103) позволяет получить зависимость разности порядков $m-n$ полиномов $B(s)$ и $A(s)$ от вида $W_a(s)$. В дальнейшем будем рассматривать только физически реализуемые передаточные функции $W_a(s)$, для которых разность порядков полиномов знаменателя и числителя составляет величину

$$v+1 > 0. \quad (1.108)$$

В соответствии с (1.103) порядок полинома знаменателя в $W_a(s)$ равен $n+m$. Числитель в (1.103)

$$\Delta^2 B^2(s) + A(s) B(s) (2 - \Delta s) + s [A'(s) B(s) - A(s) B'(s)] \quad (1.109)$$

должен иметь порядок $n+m-v-1$.

Как следует из формулы (1.109), порядок первого слагаемого — $2m$, порядок второго $m+n+1$, порядок третьего — $m+n$. Предположение, что $n \geq m$, неверно, так как в этом слу-

чае наибольший порядок, равный $n+m+1$, в (1.109) имеет второе слагаемое (старший член — $a_n b_m \Delta s^{n+m+1}$) и, следовательно, разность порядков полиномов знаменателя и числителя оказывается отрицательной, что противоречит соотношению (1.108).

Предположение, что $n < (m-1)$, также неверно, так как в этом случае наибольший порядок имеет первое слагаемое (старший член — $\Delta^2 b_m^2 s^{2m}$) и порядок полинома числителя передаточной функции $W_a(s)$ выше порядка полинома знаменателя, что противоречит условию (1.108). При $n=m-1$ условие (1.108) выполняется, если обращаются в нуль соответствующие комбинации коэффициентов полиномов $A(s)$ и $B(s)$. Эти комбинации могут быть получены непосредственно из соотношения (1.109), однако существует более простой путь, которым воспользуемся несколько позже.

Итак, для физически реализуемой передаточной функции $W_a(s)$ порядок полинома $A(s)$ всегда на единицу ниже порядка полинома $B(s)$. Параметрическая передаточная функция $W_{hp}(s, t_1)$ в соответствии с формулами (1.80) и (1.102) может быть представлена в виде

$$W_{hp}(s, t_1) = \frac{-(\Delta s - 1)B(s) + s^2 A(s)}{B(s)} = \frac{C(s)}{B(s)}, \quad (1.110)$$

где

$$C(s) = \sum_{k=0}^l c_k s^k.$$

Подставив $W_{hp}(s, t_1)$ из формулы (1.110) в (1.97), получим

$$W_a(s) = \frac{s[-\Delta C(s)B(s) + C'(s)B(s) - C(s)B'(s)]}{[B(s)(\Delta s + 1) + C(s)]B(s)}. \quad (1.111)$$

Аналогичный проведенному анализ показывает, что для выполнения (1.108) порядок полинома $C(s)$ должен быть ниже порядка полинома $B(s)$, таким образом

$$l < m.$$

Последнее позволяет утверждать, что порядок полинома числителя в $W_a(s)$ определяется членом $\Delta C(s)B(s)s$ и всегда равен $m+l+1$, а знаменателя — членом $B^2\Delta s$ и равен $2m+1$. Учитывая это, получим

$$m-l=v+1, \quad l=m-v-1.$$

Кроме того, высокочастотные асимптоты передаточных функций оказываются равными с точностью до знака, так как

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W_a(s) = -\frac{c_l b_m \Delta}{b_m^2 \Delta} = -\frac{c_l}{b_m} = -\lim_{s \rightarrow \infty} W_{hp}(s, t_1). \quad (1.112)$$

Из соотношения (1.110) следует выражение, связывающее между собой коэффициенты полиномов $A(s)$, $B(s)$ и $C(s)$,

$$c_l = a_{l-2} - b_{l-1}\Delta - b_l. \quad (1.113)$$

Выражение (1.113) позволяет определить старшие $v+1$ коэффициенты полинома $A(s)$. Действительно, поскольку $n=m-1$, $l=m-v-1$, получим

$$\left. \begin{aligned} c_{m+1} &= -b_m\Delta + a_{m-1} = 0, \\ c_m &= -b_{m-1}\Delta - b_m + a_{m-2} = 0, \\ c_{m-1} &= -b_{m-2}\Delta - b_{m-1} + a_{m-3} = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ c_{m-\nu} &= -b_{m-\nu-1}\Delta - b_{m-\nu} + a_{m-\nu-2} = 0, \\ c_{m-\nu-1} &= -b_{m-\nu-2}\Delta - b_{m-\nu-1} + a_{m-\nu-3} = c_j, \end{aligned} \right\} \quad (1.114)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} a_n &= a_{n-1} = b_m \Delta, \\ a_{n-1} &= a_{n-2} = b_{m-1} \Delta + b_m, \\ a_{n-2} &= a_{n-3} = b_{m-2} \Delta + b_{m-1}, \\ . &. \\ a_{n-v+1} &= a_{n-v+2} = b_{m-v+1} \Delta + b_{m-v}, \\ a_{n-v+2} &= a_{n-v+3} = b_{m-v+2} \Delta + b_{m-v+1} + c_l = \\ &= b_{m-v+2} \Delta + b_{m-v+1} - f b_m. \end{aligned} \right\} \quad (1.115)$$

где $f = -\frac{c_1}{b_m}$ — коэффициент высокочастотной асимптоты передаточной функции $W_a(s)$. Система (1.115) определяет $v+3$ старших коэффициента полинома $A(s)$.

Учитывая (1.105), получим $v+4$ условия, которым должны удовлетворять коэффициенты полинома $A(s)$ для того, чтобы обеспечить:

заданную динамическую точность при бесконечном (большом времени памяти) времени действия маневра цели;

разность порядков, равную $\nu+1$, полиномов передаточной функции автономного контура $W_a(s)$ и заданный коэффициент ее высокочастотной асимптоты f .

Естественно, что выполнение всех этих требований возможно, если $n \geq v+3$ и, следовательно, $m \geq v+4$. Что касается полинома $C(s)$, то согласно соотношениям (1.113) для него получим

$$\left. \begin{aligned} c_l &= c_{m-l-1} = -fb_m, \\ &\dots\dots\dots \\ c_2 &= a_0 - b_1\Delta - b_2 = \eta_2(t_1, -\infty) b_0 - b_1\Delta - b_2, \\ c_1 &= -b_0\Delta - b_1, \\ c_0 &= -b_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.116)$$

В качестве примера приведем передаточные функции $W_{hj}(s, t)$ и $W_{h\mu}(s, t)$ при минимально возможном m для двух случаев:

- 1) задается $\eta_2(t_1, -\infty) = \eta_2$, $v = 0$, $f = f_1$;
- 2) задается только $\eta_2(t_1, -\infty) = \eta_2$ и $v = 0$.

В первом случае

$$W_{h\mu}(s, t_1) = -\frac{b_0 + [b_0\Delta + b_1]s + [b_1\Delta + b_2 - b_0\eta_2]s^2 + f_1b_4s^3}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3 + b_4s^4},$$

$$W_{HJ}(s, t_1) = \frac{b_0 \eta_2 + [\Delta b_2 + b_3 - b_4 f] s + [\Delta b_3 + b_4] s^2 + \Delta b_4 s^3}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4}.$$

Во втором случае

$$W_{h\mu}(s, t_1) = - \frac{b_0 + [b_0\Delta + b_1]s + [b_1\Delta + b_2 - b_0\eta_2]s^2}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3}. \quad (1.117)$$

$$W_{hJ}(s, t_1) = \frac{b_0 \eta_2 + [\Delta b_2 + b_3] s + \Delta b_3 s^2}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3},$$

при этом

$$f = \frac{-b_1\Delta + b_2 - b_2\eta_2}{b_3}. \quad (1.118)$$

Приведенные примеры дают представление о том, как, задавшись полиномом $B(s)$, порядок которого $m = v + 4$, с помощью (1.105), (1.115) и (1.116) сформировать полиномы $A(s)$ и $C(s)$ передаточных функций замкнутого контура наведения $W_{\text{нр}}(s, t_1)$ и $W_{\text{нр}}(s, t_1)$, обеспечивающих заданный коэффициент пролета η_2 , заданную разность порядков $v + 1$ полиномов передаточной функции $W_a(s)$ и заданный коэффициент ее высокочастотной асимптоты f .

Если $m > v + 4$, то коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_{m-v-4}$ и $c_3, c_4, \dots, c_{m-v-2}$ оказываются произвольными.

1.17. КАЧЕСТВЕННОЕ СРАВНЕНИЕ ВЕСОВЫХ, ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ НАВЕДЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОЛЕТОВ

Воспользуемся материалом, приведенным в разд. 1.12—1.16, для того чтобы проследить связь между характеристиками автономного контура и замкнутой системы.

На рис. 1.38 приведены примеры амплитудно-фазовых логарифмических характеристик автономного контура системы наведения по произведению $|\dot{R}|\omega$. Соответствующие характеристики автономного контура при управлении по линейному рассогласованию показаны на рис. 1.39.

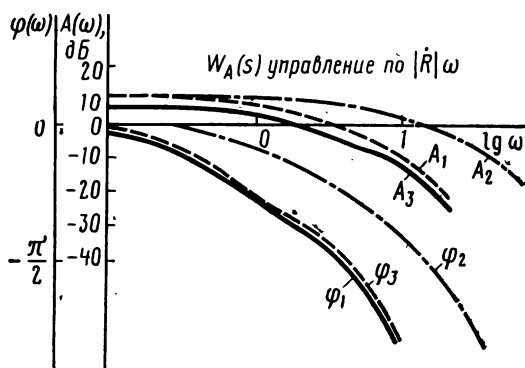


Рис. 1.38. Логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики автономного контура систем наведения при управлении по $|\dot{R}|\omega$:

Автономные контуры 1 и 2 имеют одинаковый коэффициент усиления, но полоса пропускания контура 2 шире вдвое. Автономный контур 3 отличается от контура 1 только меньшим коэффициентом усиления

Частотные характеристики автономного контура отличаются шириной полосы пропускания частот и коэффициентом усиления.

На рис. 1.40—1.42 приведены амплитудно-фазовые частотные характеристики передаточных функций $W_{hJ}(s)$ и $W_{h\mu}(s)$, весовая функция $W_{hJ}(\theta, \Delta)$ и коэффициент пролета (исходная система — 1, система с увеличенной полосой пропускания частот — 2 и система с малым коэффициентом усиления — 3; везде $\Delta = 0,25$). Сравнение характеристик подтверждает приведенные в разд. 1.16 свойства, связывающие высокочастотную асимптоту $W_a(s)$ с $W_{h\mu}(s)$, а низкочастотную асимптоту $W_a(s)$ с $W_{hJ}(s)$. Частотные характеристики $W_{hJ}(i\omega)$ и $W_{h\mu}(i\omega)$ в области частот, где фазовая характеристика $W_a(i\omega)$ существенно отличается от

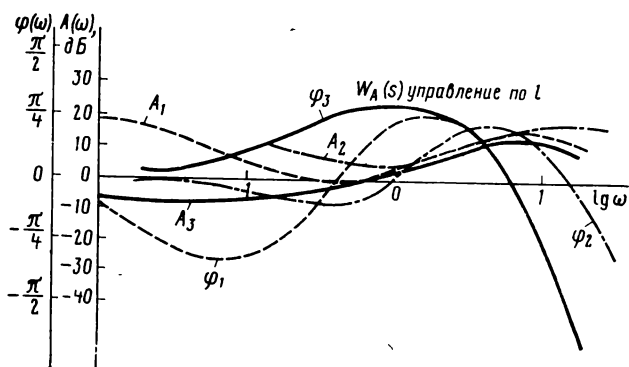


Рис. 1.39. Логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики автономного контура систем наведения при управлении по линейному рассогласованию

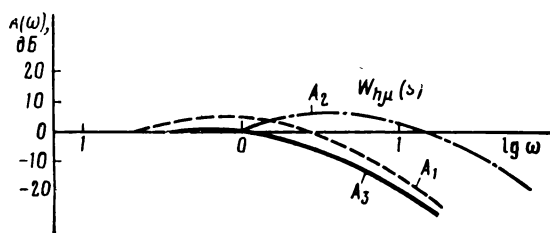


Рис. 1.40. Логарифмические амплитудные характеристики контура наведения с входом по ошибке измерения линейной координаты цели

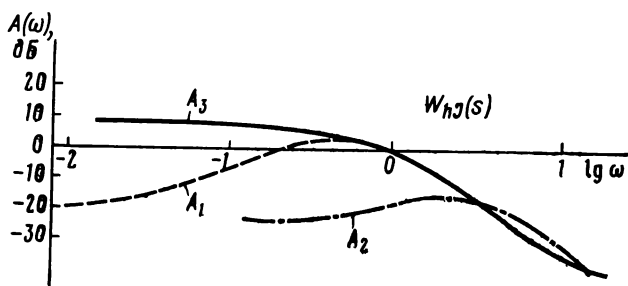


Рис. 1.41. Логарифмические амплитудные характеристики замкнутых систем наведения с входом по ускорению цели

нуля, но амплитудная еще достаточно велика, не совпадают ни с высокочастотной, ни с низкочастотной асимптотами.

Максимум амплитудной характеристики $W_{hJ}(s)$ тем ниже, чем шире полоса пропускания частот автономного контура. Его величина характеризует пролет при наихудшем по частоте и фазе синусоидальном маневре цели.

Сравнение этого максимума с максимумом коэффициента $\eta_2 = \eta_{2\max}$ показывает, что реакция на наихудшее синусоидальное воздействие мало отличается от реакции на маневр цели

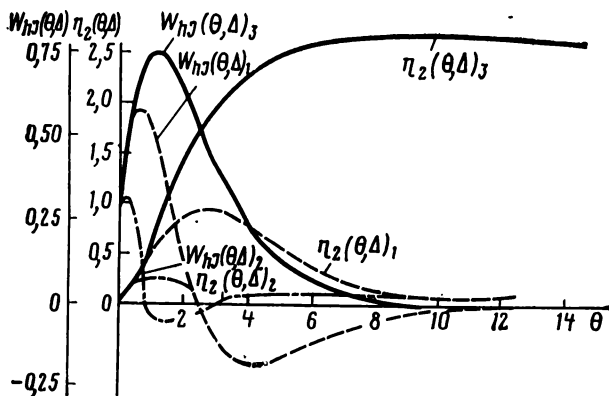


Рис. 1.42. Весовые функции $W_{hJ}(\theta, \Delta)$ и коэффициенты пролета $\eta_2(\theta, \Delta)$ замкнутых систем наведения

с одной наихудшей по времени сменой знака ускорения. Такое воздействие может быть представлено в виде разности удвоенного по величине ускорения цели $J_{ц}$, приложенного в момент смены знака и постоянного ускорения, действующего бесконечно долго. При этом пролет равен

$$J_{ц} [2\eta_{2\max} - \eta_2(\infty)]. \quad (1.119)$$

Близкий результат дает интеграл

$$I_J = \int_0^{\theta} |W_{hJ}(u)| du, \quad (1.120)$$

характеризующий пролет при наихудшем по форме, ограниченном по модулю маневре цели.

Максимум амплитудной характеристики $W_{h\mu}(i\omega)$ растет с увеличением коэффициента усиления автономного контура, точнее, с увеличением амплитудной характеристики автономного контура на частотах, где фазовая характеристика автономного контура существенно отличается от нуля. Этот максимум характеризует пролет при наихудшем по частоте и фазе синусоидальном

изменении ошибки в определении линейной координаты цели. Близкий результат дает наихудшее по форме, ограниченное по модулю изменение ошибки измерения линейной координаты цели

$$I_{\mu} = \int_0^{\theta} |W_{h\mu}(u)| du. \quad (1.121)$$

Сравнение характеристик исходной и широкополосной систем подтверждает, что время памяти системы наведения обратно пропорционально полосе пропускания частот автономного контура.

1.18. ВЫБОР ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЗАМКНУТОГО КОНТУРА НАВЕДЕНИЯ

Приведенные в данной главе свойства параметрических передаточных функций замкнутого контура наведения по $|\dot{R}|_{\omega}$ позволяют проектировать систему, обеспечивающую заданное качество.

Проектирование сводится к:

- а) заданию желаемых значений ν , f , $\eta_2(t_1, -\infty)$ и времени памяти замкнутого контура T (см. разд. 1.15 и 1.16);
- б) выбору подходящего полинома $B(s)$;
- в) определению коэффициентов полиномов $A(s)$ и $B(s)$ [см. формулы (1.114) — (1.116)];
- г) вычислению по формулам (1.97) или (1.98) передаточной функции автономного контура.

Разность порядков полиномов передаточной функции автономного контура $\nu+1$ задается в результате подсчета числа наиболее инерционных звеньев, образующих прямую цепь автономного контура (контур автосопровождения головки самонаведения, фильтр, рулевой привод, ракета). Обычно в полосе частот, влияющих на точность наведения, принимают $\nu=4\div 5$.

Коэффициент высокочастотной асимптоты f назначается для ограничения полосы пропускания автономного контура. Основной задачей такого ограничения является обеспечение устойчивости контуров, образованных так называемыми «паразитными» связями через ошибки радиопрозрачного обтекателя и систему гиросtabilизации головки. Следует помнить, что частотная характеристика автономного контура может подходить к своей высокочастотной асимптоте произвольным образом, поэтому не следует переоценивать эффективности введенных ограничений полосы пропускания.

Время памяти T обычно назначают таким, чтобы удовлетворились следующие противоречивые требования:

- 1) время памяти должно быть максимально возможным, так как это уменьшает пролет из-за случайной ошибки, стационар-

ной по линейной координате, и снижает флуктуационную перегрузку ракеты из-за обеих составляющих ошибки;

2) время памяти должно быть минимально возможным, так как при этом уменьшается пролет из-за наихудшего маневра цели [см. формулы (1.119), (1.120)]; время памяти должно быть не более минимального времени наведения ракеты.

Величина коэффициента пролета из-за маневра $\eta_2(t_1, -\infty)$ назначается малой, если имеется основание принять его постоянным. Если предположить, что цель стремится создать наихудший маневр, коэффициент пролета согласно формуле (1.119) следует принимать близким к $\eta_{2\max}$.

В соответствии с материалом, изложенным в разд. 1.16, порядок полинома $B(s)$ должен быть равен или больше $\nu+3$.

Полином $B(s)$ удобно выбирать таким, чтобы среди его корней находились два комплексно сопряженных корня с вещественной частью, приблизительно равной $-4/T$, и мнимой частью, равной $\left(\frac{2\pi}{T} j\right)$. Остальные корни выбираются кратными вещественными. Влияние этих корней сводится к тому, что с их увеличением сужается полоса пропускания автономного контура, что, в свою очередь, сопровождается повышением максимального значения $\eta_{2\max}$, увеличением времени памяти и некоторым возрастанием коэффициента η_3 .

Приведенное выше представление полинома $B(s)$ эквивалентно заданию сечений весовых функций $W_{hj}(t_1, \tau)$ и $W_{hu}(t_1, \tau)$ в виде

$$\begin{aligned} W(t_1 - \tau) = W(\theta) = & A_1 e^{-\alpha\theta} \sin \omega\theta + \\ & + A_2 e^{-\alpha\theta} \cos \omega\theta + \sum_{i=3}^{\nu+3} A_i \theta^{i-3} e^{-\beta\theta}. \end{aligned} \quad (1.122)$$

1.19. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ НАВЕДЕНИЯ ПО ТОЧНОСТИ

Как было показано, точность системы наведения в один момент времени $t=t_1$ определяется сечением весовой функции замкнутой системы $W_{hj}(t_1, \tau)$ или $W_{hu}(t_1, \tau)$. Этот факт существенно расширяет возможности по привлечению различных методов статистической динамики для оптимизации точности систем наведения.

Независимо от того, стационарной или нестационарной получается оптимальная весовая функция, используется только одно ее сечение, причем так, чтобы через него прошла весовая функция системы наведения, реализованная с помощью одного из возможных способов измерения текущей точности наведения и стационарного автономного контура. Иными словами, система наведения делается эквивалентной по точности (см. разд. 1.14) оптимальной системе в заданный момент времени $t=t_1$.

С точки зрения статистической динамики наведение рассматривается как обычная задача наилучшего приближения преобразования заданным оператором полезного сигнала при измерении его со случайными ошибками. Тот факт, что здесь имеет место фиксированный момент наблюдения, не вносит каких-либо особенностей, так как рассматривается конечный или бесконечный интервал времени наблюдения входных сигналов, заканчивающийся к моменту $t=t_1$ (см. разд. 1.15).

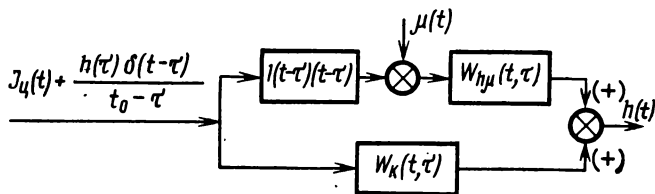


Рис. 1.43. Структурная схема формирования полета

Рассмотрим структурную схему (рис. 1.43), реализующую выражение (1.72), связывающее между собой весовые функции $W_{h\mu}(t, \tau)$ и $W_{hJ}(t, \tau)$.

Схема имеет два входа: по ускорению цели $J_u(t)$ и по ошибке измерения линейной координаты $\mu(t)$. В соответствии с формулой (1.56) на первый вход подается еще и начальный пролет в виде сигнала

$$\frac{h(t) \delta(t - \tau)}{t_0 - \tau}.$$

Выходом структурной схемы является текущий пролет. Если перенести ошибку $\mu(t)$ на вход двойного интегрирующего звена,

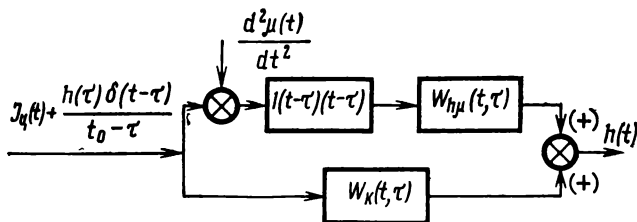


Рис. 1.44. Структурная схема формирования полета, преобразованная к стандартному виду задачи оптимизации

структурная схема приобретет вид, свойственный обычной задаче оптимизации (рис. 1.44).

Здесь верхнюю ветвь (обозначим ее весовую функцию $W^o(t, \tau)$) можно рассматривать как оптимизируемое звено, ниж-

нюю ветвь — звено кинематики — как оператор заданного преобразования полезного сигнала

$$J(t) + \frac{h(t) \delta(t - \tau)}{t_0 - \tau}.$$

Дополнительный сигнал $\frac{d^2\mu(t)}{dt^2}$ на входе оптимизируемого звена — ошибка измерения полезного сигнала. Пролет $h(t)$ — ошибка воспроизведения полезного сигнала.

Выбор того или иного метода оптимизации определяется критерием точности и характеристиками входных воздействий. Так, задача Винера [5, 8] может быть использована для оптимизации системы наведения, если входные воздействия заданы в виде стационарных случайных процессов, причем время памяти системы наведения не ограничивается искусственно, например, минимальным временем наведения.

В случае существенно ограниченного времени наведения при стационарных и нестационарных воздействиях целесообразно использовать метод, близкий к методу Заде — Рагацини [8].

1.20. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАДАЧИ ВИНЕРА К РАСЧЕТУ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НАВЕДЕНИЯ

Как уже отмечалось, применение задачи Винера возможно при условии, что входные воздействия представляются в виде стационарных случайных процессов, а время памяти системы наведения не ограничено искусственно. Положим, что маневр цели задан спектральной плотностью $S_{JJ}(s)$, а ошибка измерения полезного сигнала $n(t) = \frac{d^2\mu(t)}{dt^2}$ — спектральной плотностью $S_{nn}(s)$.

Начальный пролет учитывать при оптимизации не будем.

Тот факт, что точность (и оптимальность по точности) представляет интерес только для момента $t = t_1$, позволяет заменить заданный оператор — звено кинематики — его стационарным эквивалентом (см. разд. 1.14) с передаточной функцией

$$F(s) = \frac{\Delta s + 1}{s^2}. \quad (1.123)$$

Если принять, что оптимальная передаточная функция

$$W^o(s) = \frac{1}{s^2} W_{h\mu}^o(s, t)$$

обеспечивает минимум дисперсии суммарного пролета, получим обычную постановку задачи Винера.

Определенные трудности здесь вызывает вид передаточной функции заданного оператора. Дело в том, что произведение спектральной плотности полезного сигнала на передаточную

функцию заданного оператора $F(s)$ входит в выражение для оптимальной передаточной функции в качестве взаимной спектральной плотности входного сигнала системы и заданного оператора от полезного сигнала.

Строго говоря, в случае, если спектральная плотность $S_{JJ}(s)$ не содержит s^2 в качестве множителя, то произведение

$$S_{JJ}(s) F(s) = S_{JJ}(s) \frac{\Delta s + 1}{s^2}$$

не может рассматриваться в качестве спектральной плотности, так как спектральная плотность не должна иметь полюсов в

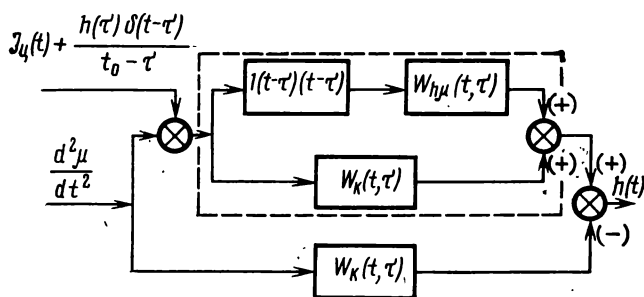


Рис. 1.45. Преобразование структурной схемы, обеспечивающее возможность применения оптимизации по Винеру

начале координат. (Понятие спектральной плотности определено для стационарных случайных процессов. Полученный на выходе интегрирующего звена сигнал при подаче на его вход сигнала, спектральная плотность которого отлична от нуля на нулевых частотах, нестационарен; его дисперсия растет с течением времени).

По существу, это означает лишь то, что из условия конечности дисперсии пролета $h(t)$ оптимальная передаточная функция так же, как и заданная, должна содержать $1/s^2$ в качестве множителя. Однако непосредственное применение задачи Винера здесь невозможно. Существуют два пути выхода из этого положения.

Первый [5] состоит в том, чтобы передаточную функцию $F(s) = \frac{\Delta s + 1}{s^2}$ заменить на $\frac{\Delta s + 1}{(s + \beta)^2}$, а после оптимизации коэффициент β в выражении для оптимальной передаточной функции положить равным нулю.

Второй, более простой, путь состоит в преобразовании структурной схемы к виду, приведенному на рис. 1.45. В этом случае в качестве полезного сигнала выступает шум $n(t) = \frac{d^2\mu}{dt^2}$ со

спектральной плотностью $S_{nn}(s)$, маневр цели со спектральной плотностью $S_{JJ}(s)$ выполняет роль шума (рис. 1.46).

Заданный оператор имеет передаточную функцию (1.123), а оптимизируемая система — передаточную функцию $W_{hJ}(s)$, соответствующую параметрической передаточной функции замкнутого контура наведения со входом по $J_{\text{ц}}(t)$.

Учитывая, что

$$S_{nn}(s) = s^4 S_{\mu\mu}(s), \quad (1.124)$$

получим, что произведение $F(s) S_{nn}(s)$ не имеет полюсов в начале координат.

Следуя обычной процедуре решения задачи Винера, оптимальную функцию получим в виде

$$W_{hJ}^0(s) = \frac{[\gamma(s)]_+}{\psi(s)}, \quad (1.125)$$

где $\psi(s)$ — результат представления суммы спектральных плотностей $S_{nn}(s)$ и $S_{JJ}(s)$ в виде

$$S_{nn}(s) + S_{JJ}(s) = \psi(s)\psi(-s); \quad (1.126)$$

$[\gamma(s)]_+$ — результат факторизации выражения

$$\gamma(s) = \frac{F(s) S_{nn}(s)}{\psi(-s)} \quad (1.127)$$

(т. е. выделения преобразования Лапласа от функции $\gamma(t)$, взятой при $t \geq 0$ [4]).

В соответствии с формулой (1.64) рассмотрим случай, когда

$$S_{nn}(s) = s^4 S_{\mu\mu}(s) = l^4 s^4, \quad (1.128)$$

здесь $l^4 = G_2$ — уровень спектральной плотности ошибки измерения, стационарной по линейной координате.

Маневр цели, не знающей момента встречи с ракетой, естественно представить в виде стационарного случайного процесса, некоррелированного с сигналом $\mu(t)$.

Наиболее естественно представление маневра цели в виде бинарного случайного процесса с пуассоновским распределением длительности интервалов постоянства знака [5]. Соответствующая спектральная плотность может быть записана в виде

$$S_{JJ}(s) = \frac{m^4}{-s^2 \alpha^2 + 1}, \quad (1.129)$$

где α — математическое ожидание интервалов постоянства знака маневра;

$$m^4 = 2a\alpha, \quad (1.130)$$

где a — дисперсия ускорения маневра цели, m^2/c^4 .

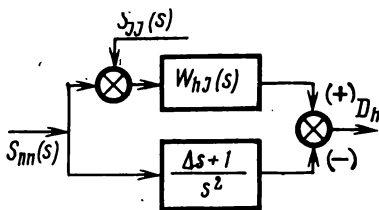


Рис. 1.46. Структурная схема, сведенная к задаче Винера

Для того чтобы получить решение в аналитическом виде, положим, что

$$\frac{l}{m} \gg \alpha. \quad (1.131)$$

При этом сумма спектральных плотностей

$$S_{nn}(s) + S_{JJ}(s) = l^4 s^4 + \frac{m^4}{-s^2 \alpha^2 + 1} \approx l^4 s^4 + m^4. \quad (1.132)$$

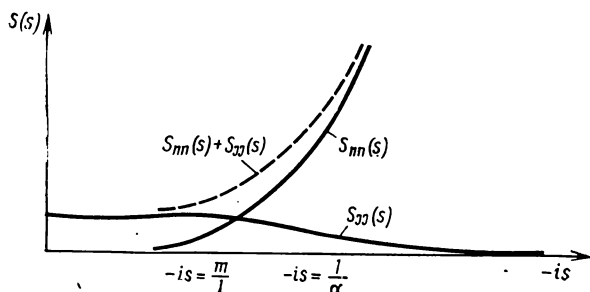


Рис. 1.47. Сумма спектральных плотностей $S_{nn}(s) + S_{JJ}(s)$ в случае выполнения неравенства (1.131)

Допустимость такого приближения следует из рис. 1.47 и 1.48, на которых показаны спектральные плотности $S_{nn}(\omega)$, $S_{JJ}(\omega)$ и их суммы для двух условий: (1.131) выполняется (см. рис. 1.47), (1.131) не выполняется (см. рис. 1.48).

Спектральную плотность $S_{JJ}(s) = m^4$ можно рассматривать как спектральное представление δ -функции [5]. Поэтому, учитывая (1.56), данную задачу можно трактовать как оптимизацию по критерию минимума интегральной квадратической оценки при обработке начальных условий по пролету. С учетом формулы (1.132) выражение (1.126) имеет вид

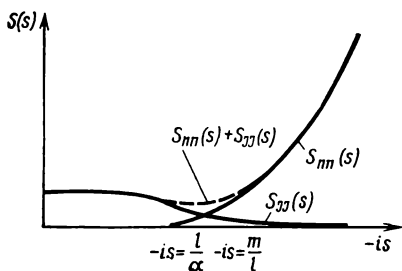


Рис. 1.48. Сумма спектральных плотностей $S_{nn}(s) + S_{JJ}(s)$ в случае невыполнения неравенства (1.131)

$$\psi(s)\psi(-s) = l^4 s^4 + m^4 = (l^2 s^2 + \sqrt{2}lms + m^2)(l^2 s^2 - \sqrt{2}lms + m^2). \quad (1.133)$$

Выражение (1.127) при этом можно записать

$$\gamma(s) = \frac{F(s) S_{nn}(s)}{\psi(-s)} = \frac{l^4 \Delta s^3 + l^4 s^2}{l^2 s^2 - \sqrt{2}lms + m^2}. \quad (1.134)$$

В результате факторизации $\gamma(s)$ представляется в виде

$$\gamma(s) = [\gamma(s)]_- + [\gamma(s)]_+,$$

где

$$\begin{aligned} [\gamma(s)]_- &= \frac{As + B}{l^2 s^2 - \sqrt{2} l m s + m^2}, \\ [\gamma(s)]_+ &= Ds + C, \end{aligned} \quad (1.135)$$

A , B , C и D — постоянные коэффициенты.

Полином $Ds + C$ отнесен к $[\gamma(s)]_+$ потому, что он представляет собой преобразование Лапласа от суммы δ -функции и ее производных, отличных от нуля только при $t \geq 0$.

Коэффициенты D и C равны:

$$\begin{aligned} D &= \Delta l^2, \\ C &= l^2 + \Delta l m \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (1.136)$$

Таким образом, оптимальная передаточная функция

$$W_{hj}^0(s) = \frac{[\gamma(s)]_+}{\psi(s)} = \frac{\Delta l^2 s + (l^2 + \sqrt{2} l m \Delta)}{l^2 s^2 + \sqrt{2} l m s + m^2}. \quad (1.137)$$

Положив $l/m = q$, преобразуем оптимальную передаточную функцию к виду

$$W_{hj}^0(s) = \frac{\Delta q^2 s + (q^2 + \sqrt{2} q \Delta)}{q^2 s^2 + \sqrt{2} q s + 1}. \quad (1.138)$$

Учитывая, что по смыслу структурной схемы (см. рис. 1.46) передаточная функция $W_{hj}^0(s)$ представляет собой оптимальную параметрическую передаточную функцию контура наведения, получим с помощью соотношения (1.80) оптимальную передаточную функцию

$$W_{h\mu}^0(s) = \frac{(\sqrt{2} q + \Delta) s + 1}{q^2 s^2 + \sqrt{2} q s + 1}. \quad (1.139)$$

Соответствующие дисперсии полета из-за маневра цели и ошибки μ равны:

$$\begin{aligned} D_{h_2} &= \frac{q^2 + 2\sqrt{2} q \Delta + 3\Delta^2}{2\sqrt{2}} q m^4, \\ D_{h_4} &= \frac{3q^2 + 2\sqrt{2} q \Delta + \Delta^2}{2\sqrt{2}} q m^4. \end{aligned} \quad (1.140)$$

Эти дисперсии получены в соответствии с таблицами, приведенными в [5].

Задавшись целью сформировать оптимальную систему наведения по линейному рассогласованию, получим в соответствии

с формулой (1.85) оптимальную передаточную функцию автономного контура

$$W_a'(s) = \frac{(\sqrt{2}q + \Delta)s + 1}{q[\Delta qs + (q + \sqrt{2}\Delta)]}. \quad (1.141)$$

Для того чтобы сформировать оптимальную систему наведения по угловой скорости, необходимо в соответствии с формулой (1.96) положить

$$W_a^{k\omega}(s) = \frac{\Delta q^2 (\Delta + \sqrt{2}q) s^2 + \sqrt{2}q (\Delta^2 + 2\sqrt{2}q\Delta + q^2) s + (\Delta + \sqrt{2}q)^2}{q[\Delta qs + (q + \sqrt{2}\Delta)](q^2 s^2 + \sqrt{2}qs + 1)}. \quad (1.142)$$

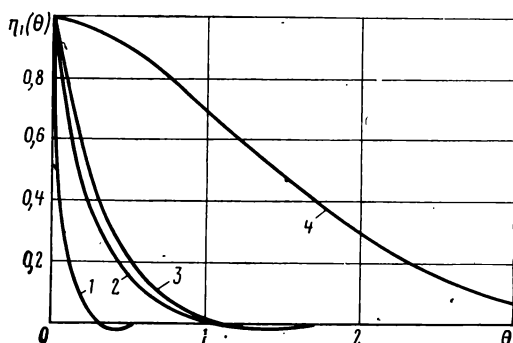


Рис. 1.49. Коэффициенты пролета $\eta_1(\theta, \Delta)$ для оптимальных систем наведения

В качестве примера на рис. 1.49 приведены графики коэффициента $\eta_1(\theta)$, полученные для следующих значений коэффициентов Δ и q :

- 1) $\Delta = 0,2$ с; 2) $\Delta = 0,2$ с; 3) $\Delta = 0,5$ с; 4) $\Delta = 0,5$ с;
 $q = 0,1$ с; $q = 0,3$ с; $q = 0,3$ с; $q = 1$ с.

Коэффициент $\eta_1(\theta)$ вычислен с помощью обратного преобразования Лапласа от $W_{hJ}^o(s)$ (1.138)

$$W_{hJ}^o(\theta) = e^{-\frac{\theta}{q\sqrt{2}}} \left[(q\sqrt{2} + \Delta) \sin \frac{\theta}{q\sqrt{2}} + \Delta \cos \frac{\theta}{q\sqrt{2}} \right].$$

Из графиков на рис. 1.49 следует, что, несмотря на отсутствие в постановке соответствующего ограничения, полученное в результате оптимизации время памяти системы практически ограничено, причем его величина определяется в основном величиной коэффициента q .

Упрощающее предположение (1.131) позволило разложить сумму спектральных плотностей (1.133) на множители в общем виде и выразить передаточные функции системы и автономных контуров через параметры входных воздействий.

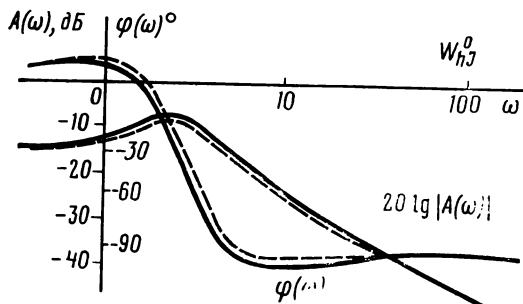


Рис. 1.50. Логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики оптимальной замкнутой системы наведения со входом по маневру цели

На рис. 1.50—1.58 приведены примеры оптимальных передаточных и весовых функций для спектральной плотности

$$S_{JJ} = \frac{m^4}{-s^2\alpha^2 + 1}.$$

Для того чтобы ограничить полосу пропускания автономного контура, что необходимо для облегчения реализации оптималь-

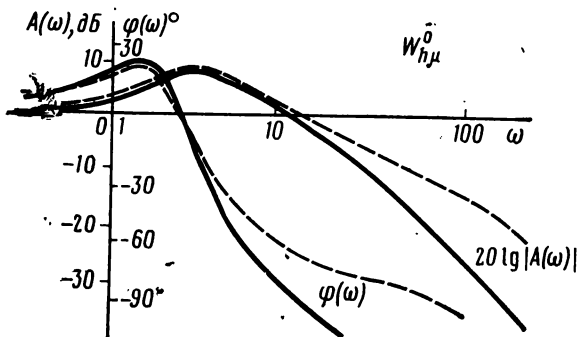


Рис. 1.51 Логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики оптимальной замкнутой системы наведения со входом по ошибке измерения линейного рассогласования

ной системы, в спектральную плотность $S_{nn}(s)$ введено дополнительное слагаемое $r^6 s^6$. При этом

$$S_{nn}(s) = l^4 s^4 - r^6 s^6. \quad (1.143)$$

Это слагаемое повышает уровень спектральной плотности «полезного сигнала» в области высоких частот. В результате расширяется полоса частот, в которой выполняется неравенство

$$S_{nn}(s) \gg S_{JJ}(s),$$

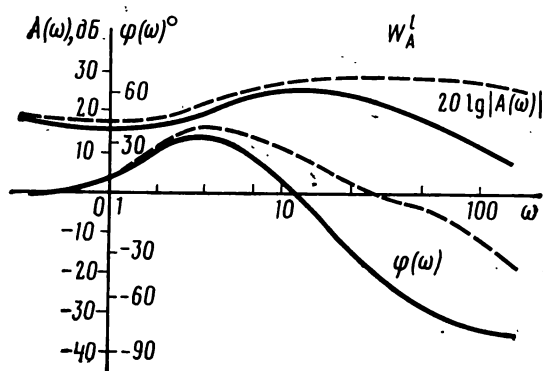


Рис. 1.52. Логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики автономного контура оптимальной системы наведения при управлении по линейному рассогласованию

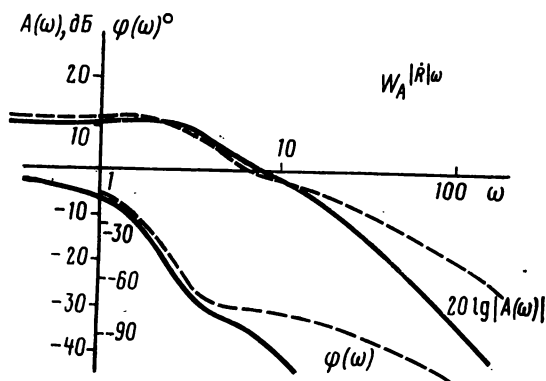


Рис. 1.53. Логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики автономного контура оптимальной системы наведения при управлении по угловой скорости линии дальности

что, естественно, сопровождается расширением области частот, в которой разница между передаточными функциями $W_{hJ}^0(s)$ и $F(s)$ мала.

Но согласно структурной схеме, приведенной на рис. 1.33, а, контур наведения представляет собой замкнутую систему, в

прямой цепи которой стоит звено кинематических связей, а в обратной — автономный контур. Учитывая эквивалентность между заданным оператором и звеном кинематических связей, при-

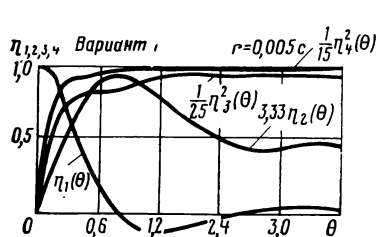


Рис. 1.54. Коэффициенты пролетов оптимальной системы наведения (вариант 1)

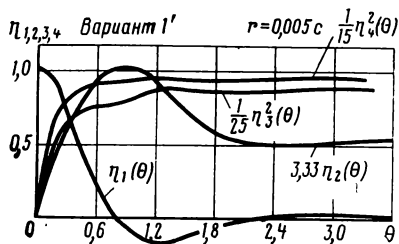


Рис. 1.55. Коэффициенты пролетов оптимальной системы наведения (вариант 1')

ходим к выводу, что область частот, на которых совпадают передаточные функции $W_{hJ}^0(s)$ и $F(s)$, тем шире (точнее, простирается тем дальше в область малых частот), чем уже полоса пропускания автономного контура.

Ограничение полосы пропускания автономного контура при оптимизации приводит к некоторому увеличению дисперсии сум-

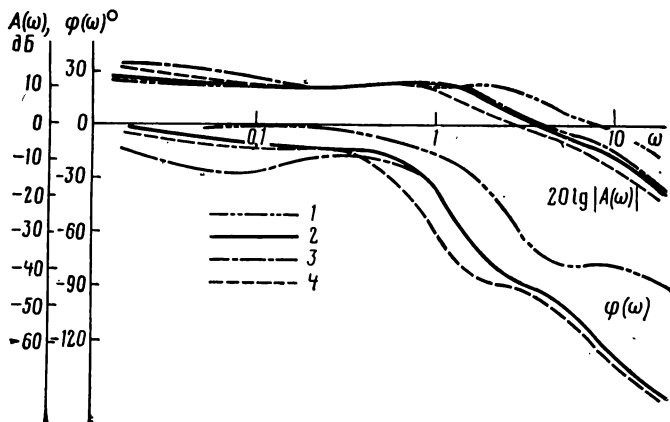


Рис. 1.56. Логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики автономных контуров оптимальных систем наведения (варианты 1, 2, 3 и 4)

марного пролета системы наведения. (Сравнение оптимальных систем с ограничением и без ограничения полосы пропускания должно проводиться при одних и тех же входных воздействиях, причем естественно положить, что $r^6 = 0$).

Предложенный способ воздействия на полосу пропускания автономного контура не отличается строгостью, так как, во-первых, заранее не ясно, как сильно повлияет слагаемое — $r^6 s^6$ на полосу пропускания, и, во-вторых, невозможно предсказать заранее, нельзя ли достичь того же ограничения полосы пропускания с меньшим ухудшением точности системы.

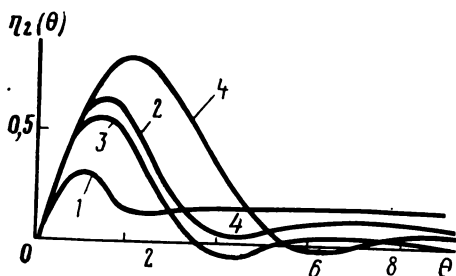


Рис. 1.57. Коэффициент пролета $\eta_2(\theta, \Delta)$ оптимальных систем наведения (варианты 1, 2, 3, и 4).

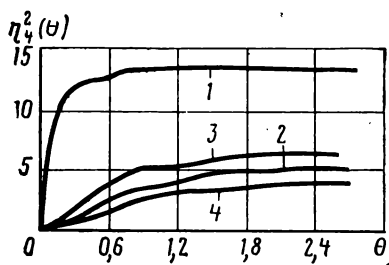


Рис. 1.58. Коэффициент пролета $\eta_1^2(\theta, \Delta)$ оптимальных систем наведения (вариант 1, 2, 3 и 4)

Расчеты оптимальных систем при входных воздействиях (1.129) и (1.143) проведены для параметров, показанных в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Вариант	1	1'	2	3	4
$m^4, \text{м}^2/\text{с}^3$	4000	4000	2000	5000	5000
$l^4, \text{м}^2 \cdot \text{с}$	3	3	3	1	10
$\alpha, \text{с}$	1,25	1,25	10	25	25
$r, \text{м}^{\frac{4}{3}} \cdot \text{с}$	0,005	0,05	0,1	0,1	0,1
$\Delta, \text{с}$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$a^2, \text{м}^2/\text{с}^4$	1600	1600	100	100	100

На рис. 1.50—1.53 для вариантов 1 (пунктир) и 1' (сплошная линия) приведены амплитудные и фазовые логарифмические характеристики оптимальной замкнутой системы $W_{hj}(\omega)$ и $W_{hp}(\omega)$ и соответствующих автономных контуров $W_a^{|\dot{r}|^\infty}(\omega)$ и $W_a^I(\omega)$. Соответствующие коэффициенты пролета показаны на рис. 1.54 и 1.55. В данном случае система рассчитана на динамично изменяющийся маневр цели. Выбор коэффициента $r = 0,05$ в варианте 1' несущественно повысил ошибки, однако существенно снизил требования к реализации автономного контура на частотах, больших $\omega = 10 \text{ 1/с}$.

На рис. 1.56—1.58 приведены результаты оптимизации для вариантов 2, 3 и 4, в которых цель маневрирует с меньшим ускорением и сравнительно редкими сменами знака маневра. Сужение спектра маневра цели привело к увеличению памяти оптимальной системы и уменьшению установившегося значения коэффициента пролета $\eta_2(\infty)$. Последнее достигается повышением амплитудной частотной характеристики автономного контура $W_a(i\omega)$ в области низких частот. Интересно, что для всех рассмотренных примеров частотная характеристика автономного контура при управлении по $|\dot{R}|_\omega$ обязательно имеет участок длиной около декады, на котором амплитудная характеристика равна 3.

ГЛАВА 2

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ УЧИТЫВАТЬ СЛУЧАЙНЫЕ РАЗБРОСЫ ПАРАМЕТРОВ

Трудно себе представить реальную динамическую систему, параметры которой в той или иной мере не подвергались бы случайному разбросу.

Совершенствование систем автоматического управления привело к появлению таких систем, в которых случайность параметров обусловлена самим принципом построения системы. Примером этого могут служить различные адаптивные и радиотехнические системы с модуляцией параметров.

Случайные изменения параметров наблюдаются также в элементах систем управления, подверженных механическим воздействиям в виде случайных вибраций и акустических шумов, а также при эксплуатации систем в условиях изменения температуры, влажности, радиации и т. д.

При изготовлении элементов системы управления неизбежно имеет место технологический разброс параметров. Так что в совокупности одинаковых систем параметры отдельных экземпляров всегда будут несколько различаться. Поэтому в процессе проектирования и при исследовании систем данного типа независимо от выбора конкретного экземпляра параметры следует считать случайными, заданными их распределениями внутри поля допуска. Подобная картина наблюдается также в результате старения различных элементов систем в условиях хранения и нормальной эксплуатации.

Требования к точности и работоспособности автоматических систем постоянно повышаются. Это привело к тому, что в настоящее время учет перечисленных факторов (а также многих других, обусловленных либо случайностью среды, в которой происходит движение системы, либо изменением ее собственных динамических свойств и приводящих к случайным изменениям параметров) является необходимым при проектировании и оценке качества функционирования системы.

Общность целого ряда понятий и методов, выработанных при решении вопросов, связанных со случайным изменением параметров, дает возможность рассматривать эти понятия и методы как основу складывающегося в настоящее время раздела теории автоматического управления — теории стохастических систем.

Математической моделью процессов, протекающих в стохастических системах автоматического управления, являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами. Наиболее строгие и законченные результаты по исследованию таких систем получены для сравнительно частного случая линейных систем, когда изменения коэффициентов — гауссовы белые шумы [8].

При произвольных спектрах случайных процессов в стохастических системах точное решение задачи анализа не получено. В работах [3, 6] излагаются приближенные методы анализа, основанные на структурном представлении линейных стохастических систем. Исследование ограничено рамками корреляционной теории.

В данной главе излагаются некоторые методы анализа линейных и нелинейных стохастических систем. Вопросы, рассмотренные здесь, далеко не исчерпывают всех задач, связанных с исследованием стохастических систем. Тем не менее решение многих задач, возникающих в процессе проектирования, может быть получено на основе методов, изложенных в этой главе.

2.1. ВОЗДЕЙСТВИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВИБРАЦИЙ НА ДАТЧИКИ ЛИНЕЙНЫХ УСКОРЕНИЙ

При полете ракеты с работающим двигателем на посадочных местах приборов в приборных отсеках возникают случайные вибрации. Одновременно с вибрацией посадочного места прибора возникает акустическое воздействие, которое создает вокруг аппаратуры случайное поле давлений. Все это приводит к случайной модуляции параметров электромеханических цепей. Диапазон частот вибровозмущений обычно достаточно широк, чтобы вызвать модуляционные явления в любой аппаратуре, установленной на ракете. Эффект модуляции проявляется в каждом звене системы управления по-разному. Ниже будет рассмотрено влияние вибраций на работу датчиков линейных ускорений.

Датчики линейных ускорений, или навигационные акселерометрические устройства являются наиболее чувствительными элементами системы управления, призванными измерять параметры движения ракеты на траектории для выработки корректирующих сигналов.

Анализ динамических свойств акселерометров при действии вибраций особенно важен потому, что они являются датчиками

первичной информации, и погрешности, возникающие в них, непосредственно сказываются на работе системы.

Рассмотрим акселерометры, не имеющие силовой коррекции и выполненные по двум различным конструктивным схемам: с вращательным (типа маятника) и поступательным движением инерционного элемента.

Акселерометр маятникового типа (рис. 2.1) представляет собой инерционный неуравновешенный груз, способный поворачиваться вокруг оси, укрепленной в корпусе прибора.

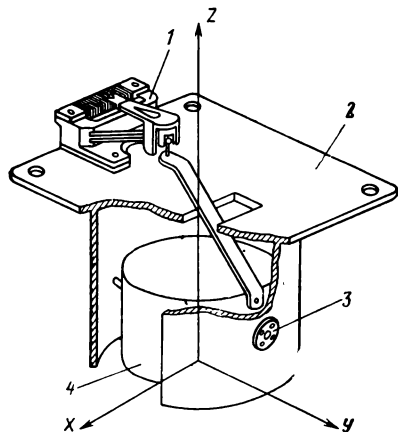


Рис. 2.1. Акселерометр маятникового типа:

1—токосъемное устройство; 2—корпус; 3—ось подвеса; 4—неуравновешенный груз

С подвижным грузом с помощью шарнирного соединения связано токосъемное устройство, укрепленное на корпусе плоскими пружинами.

Акселерометр с поступательным движением чувстви-

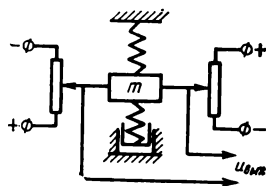


Рис. 2.2. Схема акселерометра с поступательным движением чувствительного элемента

тельного элемента представляет собой инерционную массу, подвешенную с помощью нескольких плоских пружин к корпусу. На рис. 2.2 показана принципиальная схема акселерометра.

При действии вибрационных ускорений, приложенных к корпусу акселерометра, уравнение движения чувствительного элемента маятникового типа можно записать в виде

$$J\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} + ml[(\ddot{z} + g) \sin \varphi - \ddot{x} \cos \varphi] = 0,$$

где J — момент инерции маятника; B — коэффициент демпфирования; m — масса подвижной системы; l — расстояние от центра тяжести до оси подвеса; φ — угол отклонения от вертикали; $\ddot{x}$ и $\ddot{z}$ — составляющие вектора вибрационных ускорений в проекциях на соответствующие оси.

Для малых углов отклонения маятника с учетом дополнительных обозначений

$$a_2 = \frac{B}{J}; \quad a_1 = \frac{mgl}{J}; \quad \Delta_1(t) = \frac{\ddot{z}ml}{J}; \quad f(t) = \frac{\ddot{x}ml}{J}$$

уравнение движения можно записать в виде

$$\ddot{\varphi} + a_2 \dot{\varphi} + [a_1 + \Delta_1(t)] \varphi = f(t).$$

Из этого уравнения следует, что наличие случайной вибрации по оси z приводит к появлению случайного коэффициента $\Delta_1(t)$ в левой части уравнения движения.

Процессы в акселерометре с поступательным перемещением чувствительного элемента в условиях вибраций из-за наличия двух промежуточных стоек должны описываться системой дифференциальных уравнений, которая связывает движение трех масс. Однако, если учесть, что конструкция датчика обычно симметричная и влияние движения промежуточных стоек по оси измерений на положение чувствительного элемента можно представить в виде дополнительных внешних воздействий, то уравнение движения акселерометра можно приближенно представить в виде

$$m\ddot{x} + 2h\dot{x} + k[1 + \mu F(t)]x = P(t),$$

где k — суммарная жесткость системы; m — масса чувствительного элемента; h — коэффициент демпфирования; μ — коэффициент относительного изменения жесткости; $F(t)$ — силы, действующие в направлении, перпендикулярном оси измерения; $P(t)$ — силы, действующие в направлении оси измерения.

Таким образом, приближенное уравнение движения акселерометра с поступательным движением чувствительного элемента имеет вид, аналогичный уравнению для акселерометра маятникового типа.

Акселерометры рассчитаны на вполне определенный диапазон измеряемых ускорений, поэтому в их конструкции предусмотрены упоры, ограничивающие перемещения чувствительного элемента.

Сочетание больших ускорений ракеты с виброускорениями может привести к тому, что измеряемое ускорение выйдет за пределы диапазона линейности акселерометра и произойдет упругий отскок чувствительного элемента от упора. В этих условиях датчик линейных ускорений следует рассматривать как нелинейную систему со стохастической линейной частью.

2.2. ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛА ЧЕРЕЗ ОБТЕКАТЕЛЬ АНТЕННЫ ГОЛОВКИ САМОНАВЕДЕНИЯ

При использовании различных информационных подсистем для определения координат целей (например, оптических и радиолокационных головок самонаведения) часто имеет место прохождение электромагнитных сигналов через среды, обладающие случайными свойствами. Особенно ярко это проявляется в радиолокационных головках самонаведения.

Одна из трудностей, возникающих при проектировании самонаводящихся ракет, обусловлена искажениями сигнала радиопрозрачным обтекателем. В результате этих искажений головка самонаведения измеряет кажущуюся угловую скорость линии дальности. Разница между кажущейся и фактической угловой скоростью определяется ошибками преломления обтекателя и колебаниями ракеты относительно центра тяжести. Так, в плоском движении кажущийся угол места цели

$$q_{ц.к} = q_{ц} + \Delta\varphi(\varphi),$$

где $\Delta\varphi(\varphi)$ — ошибка преломления, зависящая от угла пеленга φ .

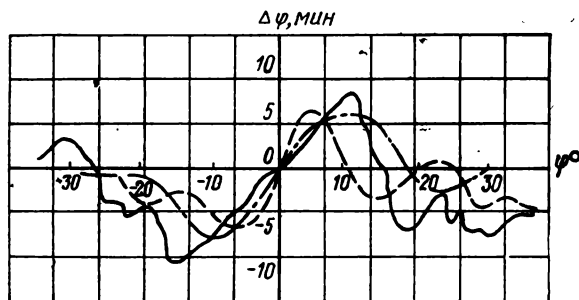


Рис. 2.3. Интегральная характеристика обтекателя

Зависимость $\Delta\varphi(\varphi)$ является существенно нелинейной и называется интегральной характеристикой обтекателя. Типичные характеристики $\Delta\varphi(\varphi)$ для трех экземпляров обтекателей представлены на рис. 2.3.

Кажущаяся угловая скорость равна в этом случае

$$\frac{dq_{ц.к}}{dt} = \frac{dq_{ц}}{dt} + \frac{d\Delta\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}.$$

Так как

$$\varphi = q_{ц} - \vartheta,$$

где ϑ — угол поворота оси ракеты, то

$$\frac{dq_{ц.к}}{dt} = \frac{dq_{ц}}{dt} + \frac{d\Delta\varphi}{d\varphi} \left(\frac{dq_{ц}}{dt} - \frac{d\vartheta}{dt} \right) = \frac{dq_{ц}}{dt} \left(1 + \frac{d\Delta\varphi}{d\varphi} \right) - \frac{d\Delta\varphi}{d\varphi} \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Из полученного уравнения следует, что имеет место изменение коэффициента усиления по угловой скорости линии дальности в $\left(1 + \frac{d\Delta\varphi}{d\varphi} \right)$ раз и образуется паразитная обратная связь по угловой скорости относительно центра тяжести.

Контур, образованный паразитной обратной связью, содержит в прямой цепи значительный коэффициент усиления, в результате, несмотря на малость производной $\frac{d\Delta\varphi}{d\varphi}$, при полетах, особенно на больших высотах, имеют место значительные ошибки системы наведения.

Причина угловых ошибок определения пеленга цели заключается в деформации диаграммы направленности антенны, которая в свою очередь является следствием фазовых искажений электромагнитного поля, падающего на обтекатель, и переотражений от внутренних стенок. Величина ошибок зависит от диэлектрических свойств материала, геометрии обтекателя и угла падения пришедшей волны. В обтекателях всегда имеет место локальная неоднородность материала, которая приводит к появлению изрезанности характеристики ошибок (см. рис. 2.3).

Вид функции $\Delta\varphi(\varphi)$ существенным образом изменяется в зависимости от того, через какое сечение обтекателя проходит падающая волна, и, следовательно, зависит от движений ракеты относительно центра тяжести. Поскольку относительно центра тяжести ракета движется по случайному закону, в полете характеристика ошибок обтекателя претерпевает случайные изменения.

Помимо этого, в результате ошибок производства и случайного характера локальной неоднородности материала обтекателя характеристика $\Delta\varphi(\varphi)$ для каждого экземпляра обтекателя имеет различный вид.

Таким образом, искажения, вносимые обтекателем, приводя к появлению в контуре управления нелинейности $\Delta\varphi(\varphi)$, параметры которой случайны как во времени, так и в совокупности одинаковых систем.

2.3. МОДУЛЯЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СЕРВОМЕХАНИЗМОВ РУЛЕЙ СЛУЧАЙНОЙ НАГРУЗКОЙ

Обладая ограниченной мощностью, сервоприводы органов управления ракет имеют статические характеристики, параметры которых существенно зависят от величин нагрузочных моментов.

На рис. 2.4 показана типичная характеристика, отражающая зависимость максимальной скорости сервомотора $\omega_{\max}$ от величины момента нагрузки M , — нагрузочная характеристика сервомотора.

Точка A соответствует режиму «холостого хода», а точка B — режиму «короткого замыкания». Из рисунка видно, что изменение нагрузочного момента в диапазоне ΔM вызывает изменение максимальной скорости в диапазоне $\Delta\omega_{\max}$. Эти изменения существенным образом сказываются на виде статических характеристик, которые определяют зависимость частоты вращения привода ω от величины управляющего сигнала $u_{\text{упр}}$.

На рис. 2.5 приведено семейство статических характеристик сервомотора, управляемого отсечным золотником, для различных нагрузок на выходном валу.

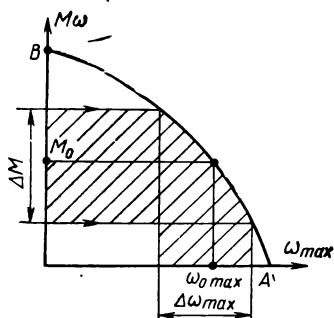


Рис. 2.4. Нагрузочная характеристика сервомотора

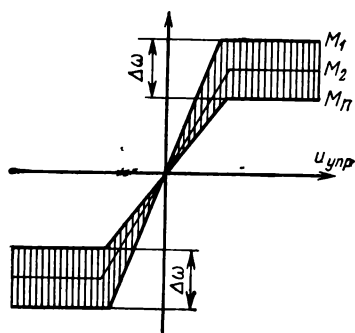


Рис. 2.5. Статические характеристики сервомотора при различных значениях нагрузки на выходном валу

На рис. 2.6 показаны статические характеристики сервомотора, управляемого струйной трубкой, которые соответствуют различным величинам моментов сухого трения $M_{тр}$.

На рис. 2.7 изображены статические характеристики сервомотора, управляемого струйной трубкой, при изменении нагрузки и величины сухого трения.

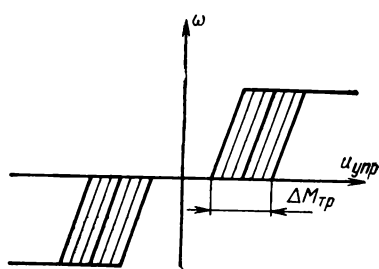


Рис. 2.6. Статические характеристики сервомотора при изменении величины сухого трения

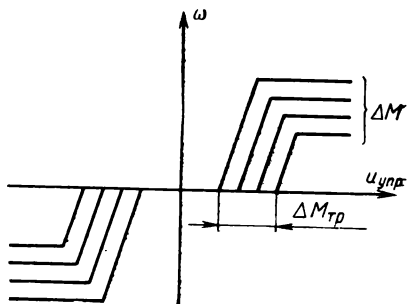


Рис. 2.7. Статические характеристики сервомотора при изменении нагрузки и величины сухого трения

В процессе полета ракеты органы управления (рули, элероны, поворотные крылья и др.) находятся в возмущенном потоке, который вызывает случайные изменения шарнирного момента. Изменение шарнирного момента изменяет статические характеристики сервомеханизма. Поскольку шарнирный момент в про-

цессе полета представляет собой случайный процесс, то и параметры зависимости скорости сервомотора от управляющего сигнала (коэффициент усиления линейного участка, зона насыщения, зона нечувствительности и т. д.) являются случайными.

2.4. АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Математической моделью процессов, протекающих в динамических системах со случайными параметрами, является следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{y} = G(t) f(y, t) + P(t) z(t), \quad (2.1)$$

где $y = \|y_i\|_{1 \times m}$ — вектор выходных координат;
 $z = \|z_i\|_{1 \times m}$ — вектор аддитивных входных воздействий;
 $f(y, t) = \|f_i(y, t)\|_{1 \times m}$ — нелинейная вектор-функция;
 $G(t) = \|g_{ij}(t)\|_{m \times m}$ и $P(t) = \|p_{ij}(t)\|_{m \times m}$ — матрицы коэффициентов.

Относительно элементов матрицы G и компонент вектора воздействий z будем предполагать, что они являются коррелированными стационарными нормальными случайными процессами с дробно-рациональными спектральными плотностями.

Если функция $f(y, t)$ линейно зависит от y , то уравнения (2.1) описывают процессы в линейной системе со случайными параметрами.

Используя идею многомерных формирующих фильтров и расширив за счет них размерность пространства состояний, систему уравнений (2.1) можно привести к следующему виду:

$$\dot{x} = F^0(x) + L_1(t) F^1(x) + U(t) r(t), \quad (2.2)$$

где $x = \|x_i\|_{1 \times n}$ — вектор состояния системы;
 $r = \|r_i\|_{1 \times n}$ — вектор аддитивных воздействий;

$F^0 = \|F_{ij}^0\|_{1 \times n}$; $F^1 = \|F_{ij}^1\|_{1 \times n}$ — нелинейные векторные функции;

$L_1(t) = \|l_{ij}\|_{n \times n}$; $U(t) = \|u_{ij}(t)\|_{n \times n}$ — матрицы коэффициентов.

Элементы матрицы L_1 и компоненты вектора r представляют собой коррелированные белые шумы со следующими статистическими характеристиками:

$$\left. \begin{aligned} M[l_{ij}(t)] &= l_{ij}^0(t); & M[r_i(t)] &= m_i^r(t); \\ M[a_{ij}(t) a_{kl}(t_1)] &= c_{ij,kl} \delta(t_1 - t); \\ M[a_{ij}(t) r_k(t_1)] &= c_{ij,k} \delta(t_1 - t); \\ M[r^*(t) r^{*T}(t_1)] &= \delta(t_1 - t) C^r = \delta(t_1 - t) \|c_{ij}\|_{n \times n}, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где $\alpha_{ij} = l_{ij} - l_{ij}^0$; $r^*(t) = r(t) - m^*(t)$; $c_{ij,kl}$; $c_{ij,k}$, c_{ij} — постоянные величины.

Появление нелинейной функции F^0 обусловлено тем, что при добавлении к системе (2.1) уравнений формирующих фильтров в правой части образуются слагаемые, представляющие собой произведение новых фазовых координат на функции $f(y, t)$. Таким образом, даже если исходная система была линейной, система (2.2) нелинейна всегда, когда процессы $g_{ij}(t)$ не являются белыми шумами.

Матрица коэффициентов L_1 представляет собой сумму детерминированной $L^0 = \|l_{ij}^0\|$ и случайной $L = \|\alpha_{ij}\|$ составляющих.

Обозначив

$$F(x) = F^0(x) + L^0 F^1(x),$$

перепишем систему (2.2) в следующей форме:

$$\dot{x} = F(x) + L(t) F^1(x) + U(t) r(t). \quad (2.4)$$

При сделанных предположениях о статистических характеристиках вектора воздействий $r(t)$ и элементов матрицы $L(t)$ вектор состояния системы (2.4) представляет собой непрерывный n -мерный марковский процесс. Для непрерывных марковских процессов закон распределения вероятностей является решением уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [A_i(x) f(x, t)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [B_{ij}(x) f(x, t)], \quad (2.5)$$

где $f(x, t)$ — вероятность того, что в момент времени система будет находиться в дифференциальном элементе пространства состояний.

Вектор коэффициентов сноса $A = \|A_i\|_{1 \times n}$ и матрица коэффициентов диффузии $B = \|B_{ij}\|_{n \times n}$ в уравнении (2.5) определяются как условные статистические характеристики по формулам:

$$A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[\Delta x / x(t) = x]}{\Delta t};$$

$$B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[\Delta x \Delta x^T / x(t) = x]}{\Delta t}.$$

Выражения для A и B могут быть получены из системы уравнений, описывающих рассматриваемый марковский процесс.

Интегрируя систему (5.4) на интервале времени (t, t_1) , находим

$$x(t_1) = x(t) + \int_t^{t_1} F[x(\tau)] d\tau + \int_t^{t_1} L(\tau) F^1[x(\tau)] d\tau + \int_t^{t_1} U(\tau) r(\tau) d\tau.$$

Воспользуемся следующим соотношением:

$$F^1[x(\tau)] = F^1[x(t)] + \int_t^\tau \frac{\partial F^1}{\partial x} dx(\sigma).$$

Согласно уравнению (2.4)

$$dx = F(x) dt + L(t) F^1(x) dt + U(t) r(t) dt,$$

поэтому можем написать

$$\begin{aligned} F^1[x(\tau)] &= F^1[x(t)] + \int_t^\tau \frac{\partial F^1}{\partial x} F[x(\sigma)] d\sigma + \\ &+ \int_0^\tau \frac{\partial F^1}{\partial x} L(\sigma) F^1[x(\sigma)] d\sigma + \int_t^\tau \frac{\partial F^1}{\partial x} U(\sigma) r(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

После этого получим следующее выражение для вектора состояния:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x(t) + \int_t^{t_1} F[x(\tau)] d\tau + \int_t^{t_1} L(\tau) F^1[x(t)] d\tau + \\ &+ \int_t^{t_1} L(\tau) \int_t^\tau \frac{\partial F^1}{\partial x} F[x(\sigma)] d\sigma d\tau + \int_t^{t_1} L(\tau) \int_t^\tau \frac{\partial F^1}{\partial x} L(\sigma) F^1[x(\sigma)] d\sigma d\tau + \\ &+ \int_t^{t_1} L(\tau) \int_t^\tau \frac{\partial F^1}{\partial x} U(\sigma) r(\sigma) d\sigma d\tau + \int_t^{t_1} U(\tau) r(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Обозначим

$$F(t) = F[x(t)]; \quad F^1(t) = F^1[x(t)]; \quad \frac{dF^1(t)}{dx} = \frac{\partial F^1(x)}{\partial x} \Big|_{x=x(t)}.$$

Как уже отмечалось, вектор состояния $x(t)$ является непрерывной функцией времени. В силу свойств нелинейных функций F и F^1 они и их производные также непрерывно зависят от времени. Следует заметить, что по отношению к элементам матрицы L и вектора $r(t)$ эти утверждения несправедливы. Можно написать

$$\int_t^{t_1} L(\tau) \int_t^\tau \frac{dF^1(\sigma)}{dx} F(\sigma) d\sigma d\tau = \int_t^{t_1} (\tau - t) L(\tau) d\tau \frac{\partial F^1(t^*)}{\partial x} F(t^*),$$

где t^* — внутренняя точка интервала $[t, \tau]$.

Из непрерывности нелинейных функций следует

$$\frac{\partial F^1(t^*)}{\partial x} F(t^*) = \frac{\partial F^1(t)}{\partial x} F(t) + o(\tau - t).$$

Приведенные рассуждения применимы и к остальным интегралам в выражении (2.6), поэтому оно может быть преобразовано в следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 x(t_1) = & x(t) + \int_t^{t_1} F(\tau) d\tau + \int_t^{t_1} L(\tau) F^1(t) d\tau + \int_t^{t_1} (\tau - t) L(\tau) \times \\
 & + \frac{F^1(t)}{\partial x} F(t) d\tau + \int_t^{t_1} \int_t^\tau L(\tau) \frac{\partial F^1(t)}{\partial x} L(\sigma) F^1(t) d\sigma d\tau + \\
 & + \int_t^{t_1} \int_t^\tau L(\tau) \frac{\partial F^1(t)}{\partial x} U(\sigma) r(\sigma) d\sigma d\tau + \int_t^{t_1} U(\tau) r(\tau) d\tau + o(t_1 - t) = \\
 = & x(t) + \int_t^{t_1} F(\tau) d\tau + \int_t^{t_1} L(\tau) d\tau F^1(t) + \int_t^{t_1} (\tau - t) L(\tau) d\tau \frac{\partial F^1(t)}{\partial x} \times \\
 & \times F(t) + \int_t^{t_1} \int_t^\tau \left\| \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial F_k^1(t)}{\partial x_j} F_l^1(t) \alpha_{ik}(\tau) \alpha_{jl}(\sigma) \right\| d\sigma d\tau + \\
 & + \int_t^{t_1} \int_t^\tau \left\| \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial F_k^1(t)}{\partial x_j} u_{jl}(\sigma) \alpha_{ik}(\tau) r_l(\sigma) \right\| d\sigma d\tau + \\
 & + \int_t^{t_1} U(\tau) r(\tau) d\tau + o(t_1 - t). \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

На основе полученного выражения вычислим условное математическое ожидание приращения вектора состояния $M[x(t_1) - x(t) | x(t) = x]$

$$\begin{aligned}
 M[\Delta x | x(t) = x] = & \int_t^{t_1} F(\tau) d\tau + \int_t^{t_1} M[L(\tau)] d\tau F^1(t) + \\
 & + \int_t^{t_1} (\tau - t) M[L(\tau)] d\tau \frac{\partial F^1(t)}{\partial x} F(t) + \left\| \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial F_k^1(t)}{\partial x_j} F_l^1(t) \times \right. \\
 & \times \int_t^{t_1} \int_t^\tau M[\alpha_{ik}(\tau) \alpha_{jl}(\sigma)] d\sigma d\tau \left. + \left\| \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial F_k^1(t)}{\partial x_j} \int_t^{t_1} \int_t^\tau u_{jl}(\sigma) \times \right. \right. \\
 & \times M[\alpha_{ik}(\tau) r_l(\sigma)] d\sigma d\tau + \left. \int_t^{t_1} U(\tau) M[r(\tau)] d\tau + o(t_1 - t) \right\|.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $M[L(t)]=0$, а также соотношения (2.3) и используя свойства δ -функций, из последнего выражения находим

$$M[\Delta x/x(t)=x] = F(x) \Delta t + \frac{1}{2} \left\| \sum_{j,k,l=0}^n \frac{\partial F_k^1(x)}{\partial x_j} F_l^1(x) c_{lk,jl} \right\| \Delta t + \\ + \frac{1}{2} \left\| \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial F_k^1(x)}{\partial x_j} u_{jl}(t) c_{lk,l} \right\| \Delta t + U(t) m^2(t) \Delta t + o(\Delta t);$$

здесь $\Delta t = t_1 - t$.

Поделив правую и левую части на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим формулы для вектора сноса

$$A = F(x) + \frac{1}{2} \left\| \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial F_k^1(x)}{\partial x_j} [F_l^1(x) c_{lk,jl} + u_{jl}(t) c_{lk,l}] \right\| + \\ + U(t) m^r(t). \quad (2.8)$$

Чтобы получить выражения для матрицы коэффициентов диффузии, запишем следующее уравнение для транспонированного вектора состояния:

$$x^T(t_1) = x^T(t) + \int_t^{t_1} F^T(\tau) d\tau + \int_t^t F^T(t) L^T(\tau) d\tau + \\ + \int_t^{t_1} (\tau - t) F^T(t) \left[\frac{\partial F^1(t)}{\partial x} \right] L^T(\tau) d\tau + \int_t^{t_1} \int_t^\tau F^T(t) L^T(\sigma) \left[\frac{\partial F^1(t)}{\partial x} \right]^T \times \\ \times L^T(\tau) d\sigma d\tau + \int_t^{t_1} \int_t^\tau r^T(\sigma) U^T(\sigma) \left[\frac{\partial F^1(t)}{\partial x} \right]^T L^T(\tau) d\sigma d\tau + \\ + \int_t^{t_1} r^T(\tau) U^T(\tau) d\tau + o(t_1 - t). \quad (2.9)$$

Далее вычислим $\Delta x \Delta x^T$. Перемножив выражения (2.7) и (2.9) и применив к произведению операцию условного математического ожидания, получим в правой части $M[\Delta x \Delta x^T / x(t)=x]$ тридцать шесть слагаемых, из которых тридцать два будут иметь второй порядок малости относительно Δt и не войдут в выражения для коэффициентов диффузии. Лишь условные математические ожидания взаимных произведений вторых и шес-

тых слагаемых в формулах (2.7) и (2.9) имеют порядок Δt . Поэтому

$$\begin{aligned}
 B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M \left\{ \int_t^{t_1} \int_t^{t_1} [L(\tau_1) F^{1T}(t) L^T(\tau_2) + L(\tau_1) F^1(t) r^T(\tau_2) U^T(\tau_2) + \right. \\
 \left. + U(\tau_1) r(\tau_1) r^T(\tau_2) U^T(\tau_2) + U(\tau_1) r(\tau_1) F^{1T}(t) L^T(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 / x(t) = x \right\} = \\
 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M \left\{ \int_t^{t_1} \int_t^{t_1} \left\| \sum_{k,l=1}^n F_k^1(t) F_l^1(t) a_{lk}(\tau_1) a_{jl}(\tau_2) + \right. \right. \\
 \left. \left. + F_k^1(t) u_{jl}(\tau_2) a_{lk}(\tau_1) r_l(\tau_2) + u_{lk}(\tau_1) F_l^1(t) a_{jl}(\tau_2) r_k(\tau_1) + \right. \right. \\
 \left. \left. + u_{lk}(\tau_1) u_{jl}(\tau_2) r_k(\tau_1) r_l(\tau_2) \right\| d\tau_1 d\tau_2 / x(t) = x \right\}.
 \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (2.3) и используя свойства δ -функций, находим

$$\begin{aligned}
 B = \left\| \sum_{k,l=1}^n F_k^1(x) F_l^1(x) c_{lk,jl} + F_k^1(x) u_{jl}(t) c_{lk,l} + \right. \\
 \left. + F_l^1(x) u_{lk}(t) c_{jl,k} + u_{lk}(t) u_{jl}(t) c_{k,l} \right\|. \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

В частном случае, когда исходная система (2.1) линейна, то $F^1(x) = x$. При этом матрица $\frac{\partial F^1}{\partial x}$ является единичной и выражения для коэффициентов уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова имеют вид

$$\begin{aligned}
 A = F(x) + \frac{1}{2} \left\| \sum_{k,l=1}^n x_l c_{lk,kl} + u_{kl} c_{lk,l} \right\| + U(t) m^r(t), \\
 B = \left\| \sum_{k,l=1}^n x_k x_l c_{lk,jl} + x_k u_{jl}(t) c_{lk,l} + x_l u_{lk}(t) c_{jl,k} + u_{lk}(t) u_{jl}(t) c_{k,l} \right\|. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

В этом случае несмотря на линейность $F^1(x)$ функция $F(x)$ — нелинейна, поскольку содержит произведения фазовых координат системы.

Из выражений (2.8), (2.10) и (2.11) видно, что коэффициенты уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова для динамической системы со случайными параметрами зависят от вида нелинейных функций, входящих в правые части дифференциальных уравнений, и от статистических характеристик случай-

ных параметров и воздействий. Само уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = & - \sum_{v=1}^n \frac{\partial}{\partial x_v} \left\{ \left[F_v(x) + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial F_k^1(x)}{\partial x_j} \{ F_l^1(x) c_{v,k,l} + \right. \right. \\ & \left. \left. + u_{jl}(t) c_{v,k,l} \} + \sum_{j=1}^n u_{vj} m_j^r \right] f(x, t) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{k,l,i,v=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_v} \times \\ & \times \{ [F_k^1(x) F_l^1(x) c_{i,k,l} + F_k^1(x) u_{vl}(t) c_{i,k,l} + F_l^1(x) u_{ik}(t) c_{v,l,k} + \\ & + u_{ik}(t) u_{vl}(t) c_{k,i,l}] f(x, t) \}. \end{aligned}$$

Получить точное решение уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова удастся лишь в некоторых, не представляющих практического интереса, случаях. Однако оно с успехом может быть использовано для получения систем уравнений относительно статистических моментов исследуемых процессов.

Пусть

$$\mu_{k_1, k_2, \dots, k_n}^k = M[x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}] -$$

смешанный момент порядка $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

Умножим правую и левую части уравнения (2.5) на $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ и проинтегрируем по всем компонентам в бесконечных пределах

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ = & - \sum_{l=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \frac{\partial}{\partial x_l} [A_l(x) f(x)] dx_1 dx_2 \dots dx_n + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [B_{ij}(x) f(x, t)] \times \\ & \times dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

В левой части последнего выражения операцию дифференцирования можно вынести за знак интеграла, в правой — интегра-

лы легко вычисляются, если воспользоваться интегрированием по частям. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mu_{k_1, k_2, \dots, k_n}^k = & \sum_{l=1}^n k_l M [A_l(x) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_l^{k_l-1} \dots x_n^{k_n}] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n k_l (k_l - 1) M [B_{ll}(x) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_l^{k_l-2} \dots x_n^{k_n}] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{l, j=1 \\ l \neq j}}^n k_l k_j M [B_{lj}(x) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_l^{k_l-1} \dots x_j^{k_j-1} \dots x_n^{k_n}], \\ k_1, k_2, \dots, k_n = \overline{0, k}; k_1 + k_2 + \dots + k_n = k. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Соотношения (2.12) позволяют получить системы дифференциальных уравнений относительно статистических моментов любого порядка. Видно, что в общем случае, когда коэффициенты A_i и B_{ij} нелинейно зависят от вектора состояния, эта система является разомкнутой, поскольку правая часть содержит моменты, порядок которых выше чем k .

Для того чтобы система (2.12) была замкнутой, т. е. чтобы она содержала моменты порядка не выше k , коэффициенты A_i должны линейно, а B_{ij} — квадратично зависеть от вектора состояния. Из формул (2.8) и (2.10) видно, что это имеет место лишь тогда, когда функции $F(x)$ и $F^1(x)$ линейны, т. е. когда математическая модель исходной динамической системы (2.1) — линейна и случайные параметры — белые шумы. Лишь в этом случае можно получить точное решение системы моментных уравнений (2.12).

Полагая в формулах (2.8) и (2.10)

$$F(x) = N(t)x, \quad F^1(x) = x,$$

где $N(t) = \|n_{ij}\|_{n \times n}$ — матрица, элементы которой — заданные функции времени, на основании (2.12) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mu_{k_1, k_2, \dots, k_n}^k = & \sum_{l=1}^n k_l M \left\{ \left[\sum_{j=1}^n n_{ij} x_j + \frac{1}{2} \sum_{j, l=1}^n c_{ij, l} x_l + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} \sum_{j, l=1}^n u_{jl}(t) c_{ij, l} + \sum_{j=1}^n u_{ij}(t) m_j^r(t) \right] x_1^{k_1} \dots x_l^{k_l-1} \dots x_n^{k_n} \Big\} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n k_l (k_l - 1) M \left\{ \left[\sum_{j, l=0}^n c_{ij, ll} x_j x_l + u_{il}(t) c_{ij, l} x_j + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u_{ij}(t) c_{il,j} x_l + u_{ij}(t) u_{il}(t) c_{j,l} x_1^{k_1} \dots x_i^{k_i-2} \dots x_n^{k_n} \} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,l=1 \\ i \neq j}}^n k_i k_j M \left\{ \left[\sum_{k,l=1}^n c_{ik,jl} x_k x_l + u_{jl}(t) c_{ik,l} x_k + \right. \right. \\
& \left. \left. + u_{ik}(t) c_{jl,k} x_l + u_{ik}(t) u_{jl}(t) c_{k,l} \right] x_1^{k_1} \dots x_i^{k_i-1} \dots x_j^{k_j-1} \dots x_n^{k_n} \right\}.
\end{aligned}$$

После осреднения правой части окончательно получим

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mu_{k_1 k_2 \dots k_n}^k &= \sum_{i,j=1}^n k_i \{ n_{ij} \mu_{k_1, k_2 (k_i-1) (k_j+1) \dots k_n}^k + \\
& + u_{ij}(t) m_j^r(t) \mu_{k_1, \dots (k_i-1) \dots k_n}^{k-1} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n [c_{ij,il} \mu_{k_1, \dots (k_i-1) \dots (k_l+1) \dots k_n}^k + \\
& + u_{jl}(t) c_{ij,il} \mu_{k_1, \dots (k_i-1) \dots k_n}^{k-1}] + \frac{1}{2} \sum_{i,j,l=1}^n k_i (k_i-1) \times \\
& \times [c_{ij,il} \mu_{k_1, \dots (k_i-2) \dots (k_j+1) \dots (k_l-1) \dots k_n}^k + u_{il}(t) c_{ij,il} \mu_{k_1, \dots (k_i-2) \dots (k_j+1) \dots k_n}^{k-1} + \\
& + u_{ij}(t) c_{il,jl} \mu_{k_1, \dots (k_i-2) \dots (k_l+1) \dots k_n}^{k-1} + u_{ij}(t) u_{il}(t) c_{j,l} \times \\
& \times \mu_{k_1, \dots (k_i-2) \dots k_n}^{k-2}] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i \neq j}}^n k_i k_j \times \\
& \times [c_{iv,jl} \mu_{k_1, \dots (k_i-1) \dots (k_j-1) \dots (k_v+1) \dots (k_l+1) \dots k_n}^k + \\
& + u_{jl}(t) c_{iv,jl} \mu_{k_1, \dots (k_i-1) \dots (k_j-1) \dots (k_v+1) \dots k_n}^{k-1} + \\
& + u_{iv}(t) c_{jl,iv} \mu_{k_1, \dots (k_i-1) \dots (k_j-1) \dots (k_l+1) \dots k_n}^{k-1} + u_{iv}(t) u_{jl}(t) c_{v,l} \times \\
& \times \mu_{k_1, \dots (k_i-1) \dots (k_j-1) \dots k_n}^{k-2}]; \\
& k_i = \overline{0, k}; i = \overline{1, n}; \sum_{i=1}^n k_i = k.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Система (2.13) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с детерминированными правыми частями. Если исходная система (2.1) или случайные внешние воздействия, которые к ней приложены, нестационарны, то и система моментных уравнений (2.13) получается нестационарной

Легко заметить, что уравнения (2.13) содержат моменты порядка не выше k и, кроме того, имеется столько уравнений, сколько моментов k -го порядка. Эту систему дифференциальных уравнений относительно статистических моментов компонент вектора состояния можно решать обычными методами, но для определения моментов порядка k необходимо сначала найти моменты более низкого порядка, поскольку они участвуют как неоднородные члены в правых частях уравнений.

Как уже отмечалось, интегрированием системы (2.13) могут быть вычислены моменты любого порядка. По известным статистическим моментам методами теории случайных функций можно восстановить законы распределения вектора состояния $x(t)$ или отдельных его компонент. Для систем со случайными параметрами законы распределения координат всегда отличны от нормальных.

Однако часто задача исследования ограничивается определением лишь двух первых моментов, а именно, математического ожидания и дисперсии решения.

Пусть

$$\mu_l = M[x_l] = \mu_{00 \dots k_l - 1 \dots 0}^1.$$

На основании соотношений (2.13) находим

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_l}{dt} = M[A_l] &= \sum_{j=1}^n n_{lj} \mu_j + u_{lj}(t) m_j^r(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j,v=1}^n c_{lj,jv} \mu_{jv} + u_{jv}(t) c_{lj,jv}, \quad l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_l(t) = \|a_{li}(t)\|_{n \times 1} - l\text{-я строка матрицы } L;$$

$$\alpha^l(t) = \|a_{li}(t)\|_{1 \times n} - l\text{-й столбец матрицы } L;$$

$$D_{aa} \delta(t_2 - t_1) = M \|\alpha_l(t_1) \alpha^l(t_2)\|_{n \times n} = \left\| \sum_{k=1}^n c_{ik,kj} \right\|_{n \times n} \delta(t_2 - t_1) -$$

матрица, зависящая от взаимных интенсивностей случайных параметров;

$$D_{ar} \delta(t - t_1) = M \|\alpha_l(t_1) U(t) r(t)\|_{1 \times n} = \left\| \sum_{j=1}^n u_{jv}(t) c_{lj,jv} \right\|_{1 \times n} \delta(t - t_1)$$

— вектор-столбец, зависящий от взаимных интенсивностей вектора воздействия и случайных параметров.

Теперь система (2.14) может быть записана в матричной форме

$$\dot{\mu} = N(t)\mu + U(t)m^r(t) + \frac{1}{2} D_{aa}\mu + \frac{1}{2} D_{ar}. \quad (2.15)$$

В отсутствие случайных параметров математическое ожидание вектора состояния определяется следующим уравнением:

$$\frac{d\mu}{dt} = N(t)\mu + U(t)m^r(t). \quad (2.16)$$

Из сравнения уравнений (2.15) и (2.16) следует, что случайные изменения параметров динамической системы оказывают влияние на величину регулярной составляющей вектора состояния, т. е. вносят регулярные погрешности в работу системы. Величина этих погрешностей определяется интенсивностями процессов, характеризующих изменения параметров, и степенью коррелированности этих процессов с компонентами вектора воздействий $r(t)$.

Выходной сигнал системы содержит регулярную составляющую, зависящую от D_{ar} даже в том случае, когда отсутствует математическое ожидание входного сигнала, т. е. $m^r(t) \equiv 0$.

Систему, эквивалентную исходной динамической системе в смысле преобразования регулярной составляющей, можно записать в следующей форме:

$$\frac{d\mu}{dt} = N_s(t)\mu + U(t)m_s^r(t), \quad (2.17)$$

где

$$N_s(t) = N(t) + \frac{1}{2} D_{aa}; \quad m_s^r(t) = m^r(t) + \frac{1}{2} U^{-1}(t) D_{ar}(t).$$

Видно, что наличие случайных параметров изменяет коэффициенты эквивалентной системы по сравнению с коэффициентами исходной. Кроме того, коррелированность между случайными параметрами и аддитивными внешними воздействиями приводит к появлению ложных детерминированных составляющих на входе системы

$$r_{\text{ложн}}(t) = \frac{1}{2} U^{-1}(t) D_{ar}(t).$$

Если обозначить матрицу вторых моментов

$$\theta = M[x, x^T] = \|\theta_{ij} = \mu_{0 \dots i-1 \dots j-1 \dots 0}^2\|$$

и в уравнениях (2.13) положить $k=2$, получим систему дифференциальных уравнений для вычисления статистических моментов второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{ps} = & \sum_{j=1}^n \left[n_{pj} \theta_{js} + u_{pj}(t) m_j^r(t) \mu_s + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n (c_{pj,jl} \theta_{ls} + u_{jl}(t) c_{pj,l} \mu_s) \right] + \\ & + \sum_{j=1}^n \left[n_{sj} \theta_{jp} + u_{sj}(t) m_j^r(t) \mu_p + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n c_{sj,jl} \theta_{lp} + u_{jl}(t) c_{sj,l} \mu_p \right] + \\ & + \sum_{v,l=1}^n [c_{pv,sl} \theta_{vl} + u_{sl}(t) c_{pv,l} \mu_v + \\ & + u_{pv}(t) c_{sl,v} \mu_l + u_{pv}(t) u_{sl}(t) c_{vl}], \quad p, s = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

Система (2.18) содержит n^2 дифференциальных уравнений для определения элементов матрицы вторых статистических моментов. Поскольку матрица θ симметрична, порядок системы (2.18) может быть понижен до $\frac{n(n+1)}{2}$.

Обозначим

$$\begin{aligned} U_s(t) &= \|u_{si}(t)\|_{n \times 1} \quad s\text{-ю строку матрицы } U(t); \\ D_{rap} \delta(t_1 - t) &= M \|U_i(t) r(t) \alpha_j(t_1) \mu(t)\|_{n \times n} = \\ &= \left\| \sum_{v,l=1}^n u_{il}(t) c_{jv,l} \mu_v \right\|_{n \times n} \delta(t_1 - t); \end{aligned}$$

$$D_{a\theta a} \delta(t_1 - t) = M \|\alpha_i(t) \theta(t) \alpha_j^T(t_1)\|_{n \times n} = \left\| \sum_{v,l=1}^n c_{iv,jl} \theta_{vl} \right\|_{n \times n} \delta(t_1 - t).$$

Запишем систему (2.18) в матричной форме

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= N\theta + \theta N^T + UC^T U^T + U m^T \mu^T + \mu m^T U^T + \\ &+ \frac{1}{2} (D_{aa} \theta + D_{ar} \mu^T + \theta D_{aa}^T + \mu D_{ar}^T) + D_{a\theta a} + D_{rra} + D_{rap}^T. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Принимая во внимание, что

$$\theta = \sum \mu \mu^T; \quad \dot{\theta} = \sum \dot{\mu} \mu^T + \mu \dot{\mu}^T,$$

где $\sum = M[(x - \mu)(x^T - \mu^T)]_{n \times n}$ — матрица дисперсий, для $\sum$ можно записать следующее матричное уравнение:

$$\begin{aligned} \sum &= N \sum + \sum N^T + UC^T U^T + \frac{1}{2} (D_{aa} \sum + \sum D_{aa}^T) + \\ &+ D_{a\mu} + D_{rap} + D_{rap}^T; \end{aligned} \quad (2.20)$$

здесь обозначено $D_{ap} \delta(t - t_1) = M \|\alpha_i(t) \mu \mu^T \alpha_j^T(t_1)\|_{n \times n}$.

Если в системе отсутствуют случайные параметры, то

$$\dot{\Sigma} = N\Sigma + \Sigma N^T + UC^T U^T. \quad (2.21)$$

Сравнивая уравнения (2.20) и (2.21), приходим к выводу, что при определенных статистических характеристиках $r(t)$ и $L(t)$ влияние случайных изменений параметров на уровень дисперсии выходных координат динамической системы может быть весьма существенным.

Частным случаем рассматриваемых систем являются динамические системы, процессы в которых описываются линейными дифференциальными уравнениями n -го порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx^n}{dt^n} + [a_n(t) + \Delta_n(t)] \frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + [a_2(t) + \Delta_2(t)] \frac{dx}{dt} + \\ + [a_1(t) + \Delta_1(t)] x = f(t), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $a_i(t)$ — детерминированные функции времени; $\Delta_i(t)$ — процессы типа белого шума, характеризующие случайные изменения параметров; $f(t)$ — возмущающее воздействие, представляющее собой сумму детерминированной $m_f(t)$ и случайной $f^*(t)$ (типа белого шума) составляющих:

$$f(t) = m_f(t) + f^*(t).$$

Уравнению (2.22) соответствует система уравнений первого порядка следующего вида:

$$\dot{y} = Ny + Ly + Ur, \quad (2.23)$$

причем в данном случае

$$\begin{aligned} y = \left\| \begin{array}{l} y_i = \frac{d^i x}{dt^i} \\ i = \overline{1, n} \end{array} \right\|_{1 \times n}; \quad r = \left\| \begin{array}{l} r_i = 0 \\ i = \overline{1, n-1} \\ r_n = f(t) \end{array} \right\|_{1 \times n}; \quad U = I; \\ L = \left\| \begin{array}{l} a_{ij} = 0 \\ i = \overline{1, n-1} \\ a_{nj} = -\Delta_j \end{array} \right\|_{n \times n}; \quad N = \left\| \begin{array}{ll} n_{ij} = 0 & j \neq i+1 \quad i = \overline{1, n-1} \\ n_{i, i+1} = 1 & i = \overline{1, n-1} \\ n_{nj} = -a_j & j = \overline{1, n} \end{array} \right\|_{n \times n}. \end{aligned}$$

Согласно выражениям (2.11) коэффициенты уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова для системы (2.23) имеют вид

$$\begin{aligned} A_i &= y_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ A_n &= - \sum_{j=1}^n a_j y_j + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n y_l c_{nn, nl} - \frac{1}{2} c_{nn, n} + m_f; \\ B_{ij} &= 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad i, j = \overline{1, n}; \\ B_{nn} &= \sum_{k, l=1}^n y_k y_l c_{nk, nl} + 2 \sum_{k=1}^n y_k c_{nk, n} + c_{n, n}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Для статистических моментов имеет место система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mu_{k_1 k_2 \dots k_n}^k &= \sum_{v=1}^n k_v \{ \mu_{k_1 k_2 \dots (k_v-1) \dots (k_v+1) \dots k_n}^k - \\ &- \left[\mu_{k_1 k_2 \dots (k_v-1) \dots (k_n+1)}^k + \sum_{j=1}^n \left(a_j - \frac{1}{2} c_{nn, nj} \right) \times \right. \\ &\times \mu_{k_1 k_2 \dots (k_v-1) \dots (k_j+1) \dots k_n}^k + \left. \left(\frac{1}{2} c_{nn, n} - m_f \right) \mu_{k_1 k_2 \dots (k_v-1) \dots k_n}^{k-1} \right] \delta_n^v \} + \\ &+ k_n (k_n - 1) \left[\frac{1}{2} c_{nn} \mu_{k_1 k_2 \dots (k_n-2)}^{k-2} + \frac{1}{2} \sum_{j, l=1}^n c_{ni, nj} \times \right. \\ &\times \mu_{k_1 k_2 \dots (k_l+1) \dots (k_j+1) \dots (k_n-2)}^{k-1} - \left. \sum_{l=1}^n c_{ni, n} \mu_{k_1 k_2 \dots (k_l+1) \dots (k_n-2)}^{k-1} \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

В частности, математические ожидания и вторые статистические моменты являются решениями следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_i &= \mu_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ \dot{\mu}_n &= - \sum_{j=1}^n \left(a_j - \frac{1}{2} c_{nn, nj} \right) \mu_j - \frac{1}{2} c_{nn, n} + m_f; \\ \dot{\theta}_{ij} &= \theta_{i+1, j} + \theta_{i, j+1}, \quad i, j = \overline{1, n-1}; \\ \dot{\theta}_{nj} &= - \sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{1}{2} c_{nn, ni} \right) \theta_{ij} + \left(m_f - \frac{1}{2} c_{nn, n} \right) \mu_j + \\ &+ \theta_{n, j+1}, \quad j = \overline{1, n-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{nn} = & -2 \left[\sum_{l=1}^n \left(a_l + \frac{1}{2} c_{nn, nl} \right) \theta_{nl} + \left(m_f - \frac{1}{2} c_{nn, n} \right) \mu_n \right] + \\ & + 2 \sum_{l=1}^n c_{nl, n} \mu_l + c_{n, n} + \sum_{k, l=1}^n c_{nk, kl} \theta_{kl}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Система (2.26) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными в общем случае коэффициентами. Решение системы может быть осуществлено обычными методами.

Учитывая, что

$$\mu_l = M \left[\frac{d^{l-1} x}{dt^{l-1}} \right],$$

уравнения, описывающие поведение математического ожидания, можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} \mu_1 + \left[a_n - \frac{1}{2} c_{nn, nn} \right] \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \mu_1 + \left[a_{n-1} - \frac{1}{2} c_{nn, n(n-1)} \right] \times \\ \times \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \mu_1 + \dots + \left[a_1 - \frac{1}{2} c_{nn, n1} \right] \mu_1 = m_f - \frac{1}{2} c_{nn, n}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Отсюда следует, что на поведение математического ожидания выходной координаты рассматриваемой системы со случайными параметрами существенно влияет случайная составляющая коэффициента при $(n-1)$ -й производной. Наличие $a_n(t)$ и ее коррелированность со случайными составляющими других параметров изменяет коэффициенты эквивалентного уравнения (2.27) для математического ожидания по сравнению со средними значениями коэффициентов исходного уравнения (2.22).

Коррелированность $a_n(t)$ с внешним воздействием приводит к появлению ложных детерминированных составляющих на входе системы $m_{f \text{ ложн}} = -\frac{1}{2} c_{nn, n}$, что обуславливает дополнительные регулярные ошибки, характерные для систем со случайными параметрами.

Пример. В качестве примера рассмотрим задачу вычисления математического ожидания и дисперсии процесса на выходе системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка со случайным коэффициентом демпфирования

$$\ddot{x} + [a_2 + \Delta_2(t)] \dot{x} + a_1 x = f.$$

Пусть $f = m_f + f^*$; $m_f = 0$; $M[f^*(t_1) f^*(t_2)] = c_{22} \delta(t_2 - t_1)$;

$$M[\Delta_2(t)] = 0; M[\Delta_2(t_1) \Delta_2(t_2)] = c_{22, 22} \delta(t_2 - t_1);$$

$$M[\Delta_2(t_1) f^*(t_2)] = c_{22, 2} \delta(t_2 - t_1).$$

На основании уравнения (2.27) для среднего значения выходной координаты имеем

$$\ddot{\mu}_1 + \left(a_2 - \frac{1}{2} c_{22,22}\right) \dot{\mu}_1 + a_1 \mu_1 = -\frac{1}{2} c_{22,2}.$$

Если система стационарна ($a_1 = \text{const}$ и $a_2 = \text{const}$) и устойчива, то при $t \rightarrow \infty$ производные асимптотически будут стремиться к нулю,

$$\ddot{\mu}_1 \rightarrow 0; \dot{\mu}_1 \rightarrow 0.$$

Вследствие этого в установившемся режиме получим

$$\mu_1 = \frac{c_{22,2}}{2a_1}.$$

Таким образом, если аддитивное воздействие $f(t)$ коррелировано со случайной составляющей коэффициента демпфирования, среднее положение системы не совпадает с ее положением равновесия, несмотря на то, что воздействие $f(t)$ центрировано, т. е. не имеет регулярных составляющих.

Для вторых и смешанных вторых моментов процесса и его производной согласно системе (2.27) имеем следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{11} &= 2\theta_{21}; \\ \dot{\theta}_{21} &= \theta_{22} - a_1\theta_{11} - \left(a_2 - \frac{1}{2} c_{22,22}\right) \theta_{21} - \frac{1}{2} c_{22,2}\mu_1; \\ \dot{\theta}_{22} &= -2a_1\theta_{21} - 2\left(a_2 - \frac{1}{2} c_{22,22}\right) \theta_{22}c_{22,2}\mu_2 + c_{2,2} + c_{22,22}\theta_{22} - 2c_{22,2}\mu_2 = \\ &= c_{2,2} - 2(a_1\theta_{21} + a_2\theta_{22}) + 3(c_{22,22}\theta_{22} - c_{22,2}\mu_2). \end{aligned}$$

Если система стационарна, то в установившемся режиме производные по времени можно приравнять нулю. Учитывая, что в этом случае

$$\mu_1 = -\frac{c_{22,2}}{2a_1}; \mu_2 = 0,$$

находим

$$\theta_{22} = \frac{c_{22}}{2a_2 - 3c_{22,22}}; \theta_{21} = 0; \theta_{11} = \frac{\theta_{22}}{a_1} - \mu_1^2.$$

Из последних выражений видно, что случайные изменения коэффициента демпфирования увеличивают уровень флуктуаций на выходе системы.

2.5. АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Из результатов предыдущего раздела следует, что в общем случае, когда параметры системы возбуждаются процессами, которые по спектральным характеристикам отличны от белых шумов, исследование систем представляет собой нелинейную задачу, не имеющую точного решения. Такое решение может быть получено лишь для систем первого порядка.

Рассмотрим простейшую параметрическую систему, которая описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка вида

$$\dot{x} + \alpha(t)x = g(t), \quad (2.28)$$

где $\alpha(t)$ и $g(t)$ — стационарные гауссовы случайные процессы; в дальнейшем будем предполагать их коррелированными с известными статистическими характеристиками

$$\begin{aligned} M\{\alpha(t)\} &= m_1; \quad M\{g(t)\} = m_2; \\ M\{[\alpha(t) - m_1][\alpha(t+\tau) - m_1]\} &= R_{\alpha\alpha}(\tau); \\ M\{[\alpha(t) - m_1][g(t+\tau) - m_2]\} &= R_{\alpha g}(\tau); \\ M\{[g(t) - m_2][g(t+\tau) - m_2]\} &= R_{gg}(\tau). \end{aligned}$$

При начальных условиях $x=0$, $t=0$ решение уравнения (2.28) имеет вид

$$x(t) = \int_0^t g(u) \exp\{-z(u, t)\} du, \quad (2.29)$$

где

$$z(u, t) = \int_u^t \alpha(\tau) d\tau. \quad (2.30)$$

Так как процесс $\alpha(\tau)$ является гауссовым, то процесс $z(t)$ также гауссов. Причем

$$\left. \begin{aligned} M\{z(u, t)\} &= m_1(t-u); \\ \sigma_z^2(u, t) &= M\{[z(u, t) - m_1(t-u)]^2\} = \int_u^t \int_u^t R_{\alpha\alpha}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Используя выражение (2.29), вычислим математическое ожидание и корреляционную функцию процесса $x(t)$. Имеем

$$M\{x(t)\} = \int_0^t \{g(u) \exp[-z(u, t)]\} du.$$

Подынтегральное выражение может быть представлено в следующем виде:

$$M\{g(u) \exp[-z(u, t)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g \exp\{-z\} f_2(g, z) dg dz, \quad (2.32)$$

где $f_2(g, z)$ — двумерная функция распределения гауссовых случайных процессов.

Для вычисления интеграла (2.32) воспользуемся известным разложением двумерной нормальной функции распределения в ряд по многочленам Чебышева — Эрмита [4]

$$f_2(g, z) = \frac{1}{2\pi\sigma_g\sigma_z} \exp\left\{-\frac{1}{2}(g^{02} + z^{02})\right\} \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_{gz}^k}{k!} H_k(g^0) H_k(z^0), \quad (2.33)$$

где

$$g^0 = \frac{g - m_g}{\sigma_g}; \quad z^0 = \frac{z - m_z}{\sigma_z}; \quad Q_{gz} = M\{g^0 z^0\}; \quad (2.34)$$

$H_k(x)$ — полином Чебышева — Эрмита k -го порядка.
Взаимный корреляционный момент Q_{gz} легко получить

$$Q_{gz}(u, t) = \frac{M\{g - m_g\} z}{\sigma_g\sigma_z} = \frac{1}{\sigma_g\sigma_z} M\{[g(t) - m_g] \times \\ \times \int_u^t a(\tau) d\tau\} = \frac{1}{\sigma_g\sigma_z} \int_u^t R_{ag}(t - \tau) d\tau. \quad (2.35)$$

После подстановки разложения (2.33) в (2.32) можем написать

$$M\{g(u) \exp[-z(u, t)]\} = \frac{1}{2\pi\sigma_g\sigma_z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_{gz}^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(g^0) H_k(z^0) \times \\ \times g \exp\{-z\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(g^{02} + z^{02})\right\} dg dz.$$

В последнем выражении двойной интеграл распадается на произведение одинарных. Принимая во внимание (2.34), получим

$$M\{g(u) \exp[-z(u, t)]\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_{gz}^k}{k!} \left[\sigma_g \int_{-\infty}^{\infty} g^0 H_k(g^0) \times \right. \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2} g^{02}\right\} dg^0 + m_g \int_{-\infty}^{\infty} H_k(g^0) \exp\left\{-\frac{1}{2} g^{02}\right\} dg^0 \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} H_k(z^0) \exp\left\{-\frac{1}{2} (z^{02} + 2\sigma_z z^0 + 2m_z)\right\} dz^0 \right]$$

В силу ортогональности многочленов Чебышева — Эрмита первый интеграл в квадратных скобках равен нулю для всех значений $k \neq 1$; второй — для всех $k \neq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} M \{g(u) \exp[-z(u, t)]\} &= \sigma_g \varrho_{gz} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(z^0) \exp\left\{-m_z + \frac{1}{2} \varrho_z^2\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2} (z^0 + \sigma_z)^2\right\} dz^0 + m_z \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-m_z + \frac{1}{2} \sigma_z^2\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2} (z^0 + \sigma_z)^2\right\} dz^0. \end{aligned}$$

Используя формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_k(z) \exp\left\{-\frac{1}{2} (z-y)^2\right\} dz = y^k, \quad (2.36)$$

находим

$$\begin{aligned} M \{x(t)\} &= \int_0^t [m_2 - \sigma_g \sigma_z(u, t) \varrho_{gz}(u, t) \times \\ &\times \exp\left\{-m_1(t-u) + \frac{1}{2} \sigma_z^2(u, t)\right\} du. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Полученное выражение указывает на появление дополнительных регулярных ошибок в системе, вызванных коррелированностью входного воздействия $g(t)$ и случайной составляющей параметра $\alpha(t)$.

Корреляционная функция $x(t)$ равна

$$R(t_1, t_2) = M \{x(t_1) x(t_2)\} - M \{x(t_1)\} M \{\dot{x}(t_2)\}.$$

Согласно выражению (2.29) можем написать

$$\begin{aligned} M \{x(t_1) x(t_2)\} &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} M \{g(\tau_1) g(\tau_2) \exp[-z(\tau_1, t_1) - \\ &- z(\tau_2, t_2)]\} d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

Математическое ожидание подынтегральной функции вычислим с помощью четырехмерной нормальной плотности вероятности

$$\begin{aligned} &M \{g(\tau_1) g(\tau_2) \exp[-z(\tau_1, t_1) - z(\tau_2, t_2)]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 u_2 \exp\{-u_3 - u_4\} f(u_1, u_2, u_3, u_4) du_1 du_2 du_3 du_4, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где

$$u_1 = g(\tau_1); u_2 = g(\tau_2); u_3 = z(\tau_1, t_1); u_4 = z(\tau_2, t_2).$$

Четырехмерная нормальная плотность вероятности имеет следующее разложение по многочленам Чебышева — Эрмита [4]:

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{1}{4\pi^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) \right\} \times \\ \times \sum_{k_1, k_2, \dots, k_6} \frac{Q_{12}^{k_1} Q_{13}^{k_2} Q_{14}^{k_3} Q_{23}^{k_4} Q_{24}^{k_5} Q_{34}^{k_6}}{k_1! k_2! k_3! \dots k_6!} H_{k_1+k_2+k_3} \times \quad (2.39) \\ \times (u_1^0) H_{k_1+k_4+k_5} (u_2^0) H_{k_2+k_1+k_6} (u_3^0) H_{k_3+k_5+k_6} (u_4^0).$$

После подстановки разложения (2.39) в (2.38) четырехкратный интеграл распадается на произведение однократных, которые легко вычисляются благодаря ортогональности многочленов Чебышева — Эрмита.

Окончательное выражение для корреляционной функции процесса $x(t)$ имеет вид

$$R(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \{ Q_{gg}(\tau_1 - \tau_2) + Q_{gz}(0) [Q_{gz}(\tau_2 - \tau_1) + \\ + Q_{gz}(0)] + Q_{gz}(\tau_1 - \tau_2) [Q_{gz}(\tau_2 - \tau_1) + Q_{gz}(0)] \} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma_z^2(t_1, \tau_1) - m_z \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sigma_z^2(t_2, \tau_2) - m_z \right\} \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} R_{zz}^k(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (2.40)$$

где $R_{zz}(\tau)$ — корреляционная функция процесса $z(t)$.

Аналогичным образом, используя разложения многомерных плотностей вероятности, можно вычислить статистический момент $x(t)$ любого порядка.

Однако связанные с этим выкладки и конечные формулы оказываются громоздкими и здесь не приводятся.

В заключение рассмотрим частный случай уравнения (2.28) при $g(t) \equiv 0$ и начальных условиях $x = x_0, t_0 = 0$

$$\frac{dx}{dt} + \alpha(t) x = 0. \quad (2.41)$$

Решение уравнения (2.41) имеет вид

$$x = x_0 \exp \{ -m_1 t - z(t) \}; \quad (2.42)$$

где

$$z(t) = \int_0^t \tilde{\alpha}(\tau) d\tau; \quad \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) - m_1.$$

Откуда находим

$$M\{z(t)\} = 0;$$

$$\sigma_z^2(t) = M\{z^2(t)\} = \int_0^t \int_0^t M\{\tilde{\alpha}(\tau_1) \tilde{\alpha}(\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2.$$

Процесс $\alpha(t)$ является стационарным, следовательно,

$$M\{\tilde{\alpha}(\tau_1) \tilde{\alpha}(\tau_2)\} = R_{\alpha\alpha}(\tau_1 - \tau_2).$$

Выразим корреляционную функцию через спектральную плотность

$$R_{\alpha\alpha}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_{\alpha\alpha}(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

В результате получим

$$\sigma_z^2(t) = 2 \int_0^{\infty} \int_0^t \int_0^t S_{\alpha\alpha}(\omega) \cos \omega(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\omega.$$

Произведя интегрирование, находим

$$\sigma_z^2(t) = 2 \int_0^{\infty} S_{\alpha\alpha}(\omega) [1 - \cos \omega t] \omega^{-2} d\omega. \quad (2.43)$$

Для моментов решения имеем следующее выражение:

$$M\{x^p\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x^p(z) f_1(z) dz,$$

где функция плотности вероятности $f(z)$ задается формулой

$$f_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right). \quad (2.44)$$

На основании (2.42) и (2.44) получим

$$\begin{aligned} M\{x^p\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x_0^p \exp\left\{-p[m_1 t + z] - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right\} dz = \\ &= x_0^p \exp\left\{-p\left(m_1 t - \frac{1}{2} p \sigma_z^2\right)\right\}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Формула (2.45) позволяет вычислить статистический момент любого порядка.

В частном случае, когда процесс $\alpha(t)$ — белый шум, вычисление по формуле (2.43) дает

$$\sigma_z^2(t) = c^2 t,$$

где c^2 — уровень спектральной плотности шума.

Выражение (2.45) принимает вид

$$M\{x^p\} = x_0^p \exp\left\{-pt\left(m_1 - \frac{1}{2}pc^2\right)\right\}. \quad (2.46)$$

Этот результат совпадает с полученным ранее в работе [8]. Из формулы (2.46) следует, что каков бы ни был уровень случайного процесса $\alpha(t)$ статистические моменты реакции системы (2.41) порядка $p > \frac{2m_1}{c^2}$ будут возрастающими функциями времени.

2.6. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТЬЮ

Задача анализа динамической точности систем автоматического управления часто приводит к необходимости исследования нелинейных систем со случайными параметрами, при этом случайными свойствами могут обладать параметры как линейных, так и нелинейных элементов системы.

Рассмотрим нелинейную систему, динамика которой описывается следующим уравнением:

$$Lx + F(x) = g, \quad (2.47)$$

где L — линейный дифференциальный оператор; $F(x)$ — нелинейная функция; $g = g(t)$ — случайный процесс.

Пусть оператор L имеет вид

$$Lx = a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t)x, \quad (2.48)$$

причем $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, $\dots$, $a_0(t)$ — случайные функции.

Для простоты изложения рассмотрим частный случай оператора L , а именно, положим $a_n(t) = a_n = \text{const}$,

$$a_{n-1}(t) = a_{n-1} = \text{const}, \dots, a_1(t) = a_1 = \text{const}, a_0(t) = a_0 + \alpha(t).$$

Здесь $a_0 = \text{const}$, а $\alpha(t)$ — стационарный центрированный случайный процесс с нормальным распределением. Тогда

$$Lx = a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x + \alpha x = L^* x + \alpha x.$$

На рис. 2.8 представлена структурная схема системы, описываемой в рассматриваемом случае уравнением (2.47).

Здесь $k(\tau)$ и $H(p)$ являются импульсной переходной и передаточной функциями, соответствующими оператору L^* .

К такой схеме приводится, например, схема датчиков ускорений в условиях кососимметричных вибраций с учетом ограничения хода чувствительного элемента и упругого отскока от упоров.

Трудности, возникающие при анализе нелинейных систем вообще, обусловлены искажениями законов распределения, которые являются следствием нелинейных преобразований. Однако при прохождении через линейные звенья процесс нормализуется, так что закон распределения процесса на выходе линейного звена всегда ближе к нормальному, чем на его входе. Причем эффект нормализации тем значительнее, чем инерционнее линейное звено. Поэтому в ряде случаев, встречающихся на практике, можно предположить, что закон распределения входных сигналов нелинейных преобразований близок к нормальному.

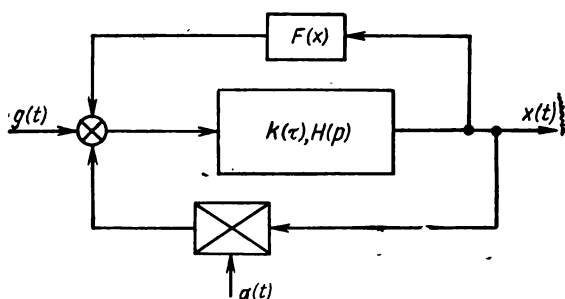


Рис. 2.8. Структурная схема нелинейной системы со стохастической линейной частью

На основе предположения о нормальности закона распределения можно осуществить приближенный анализ рассматриваемой нелинейной системы со случайными параметрами.

Пусть

$$g(t) = m_g + g^0(t),$$

где $m_g = \text{const}$, а $g^0(t)$ — центрированный нормальный случайный процесс.

Согласно структурной схеме (см. рис. 2.8) для реакции системы имеем выражение

$$x(t) = \int_0^{\infty} k(\sigma) [g(t-\sigma) - u(t-\sigma) - a(t-\sigma)x(t-\sigma)] d\sigma. \quad (2.49)$$

Далее для каждого из звеньев цепи составим уравнения, связывающие статистические характеристики выходных сигналов с соответствующими характеристиками входов.

Измерительный элемент производит сравнение входного сигнала системы с сигналами цепей обратной связи

$$\epsilon(t) = g(t) - \gamma(t) - u(t).$$

Уравнение для спектральной плотности ошибки имеет вид

$$\begin{aligned} S_{ee}(\omega) = & S_{gg}(\omega) + S_{\Pi\Pi}(\omega) + S_{uu}(\omega) - S_{g\Pi}(\omega) - S_{\Pi g}(\omega) - S_{ug}(\omega) - \\ & - S_{gu}(\omega) - S_{\Pi u}(\omega) - S_{u\Pi}(\omega) = S_{gg}(\omega) + S_{\Pi\Pi}(\omega) + S_{uu}(\omega) - \\ & - 2 \operatorname{Re} \{ S_{\Pi g}(\omega) + S_{ug}(\omega) + S_{u\Pi}(\omega) \}; \end{aligned} \quad (2.50)$$

Корреляционная функция на выходе блока умножения будет иметь вид

$$R_{\Pi\Pi}(\tau) = \overline{y(t) y(t+\tau)} = \overline{\alpha(t) x(t) \alpha(t+\tau) x(t+\tau)}.$$

Центрируя процессы и пренебрегая моментами нечетного порядка, находим

$$R_{\Pi\Pi}(\tau) = m_x^2 R_{aa}(\tau) + R_{xa}(\tau) R_{ax}(\tau) + R_{aa}(\tau) R_{xx}(\tau),$$

откуда, переходя к спектральным плотностям, получим

$$\begin{aligned} S_{\Pi\Pi}(\omega) = & m_x^2 S_{aa}(\omega) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xa}(\nu) S_{ax}(\omega - \nu) d\nu + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{aa}(\nu) S_{xx}(\omega - \nu) d\nu. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Выражение (2.51) содержит взаимную спектральную плотность $S_{xa}(\omega)$. Для ее получения воспользуемся интегральным соотношением

$$R_{xa}(\tau) = \overline{x(t) \alpha(t+\tau)},$$

или

$$\begin{aligned} R_{xa}(\tau) = & \int_0^{\infty} k(\sigma) \overline{[g(t-\sigma) - u(t-\sigma) - \alpha(t-\sigma) x(t-\sigma)] \alpha(t+\tau)} d\sigma = \\ = & \int_0^{\infty} k(\sigma) [R_{ga}(\tau+\sigma) - R_{ua}(\tau+\sigma) - m_x R_{aa}(\tau+\sigma)] d\sigma. \end{aligned}$$

Возьмем преобразование Фурье от обеих частей равенства

$$S_{xa}(\omega) = H(-j\omega) [S_{ga}(\omega) - S_{ua}(\omega) - m_x S_{aa}(\omega)]. \quad (2.52)$$

Аналогично получим

$$S_{xg}(\omega) = H(-j\omega) [S_{gg}(\omega) - S_{ug}(\omega) - m_x S_{ag}(\omega)]. \quad (2.53)$$

Взаимные спектральные плотности $S_{ua}(\omega)$ и $S_{ug}(\omega)$ будут вычислены при рассмотрении нелинейного элемента.

Для взаимной корреляционной функции входного воздействия процессов на выходе блока умножения имеем

$$R_{1g}(\tau) = \overline{y(t)g^0(t+\tau)} = \overline{a(t)x(t)g^0(t+\tau)} = m_x R_{ag}(\tau).$$

Выражение для спектральной плотности имеет вид

$$S_{1g}(\omega) = m_x S_{ag}(\omega). \quad (2.54)$$

Процесс на выходе нелинейного преобразования может быть представлен ортогональным рядом

$$u(t) = F[x(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} a_i H_i \left[\frac{x(t) - m_x}{\sigma_x} \right]. \quad (2.55)$$

Для корреляционной функции выходного процесса имеем выражение

$$R_{uu}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} k! a_k^2 Q_{xx}^k(\tau). \quad (2.56)$$

Используя понятие эквивалентной передаточной функции, выражение для спектральной плотности можно представить в виде

$$S_{uu}(\omega) = k_0(j\omega) k_0(-j\omega) S_{xx}(\omega). \quad (2.57)$$

Эквивалентная передаточная функция $k_0(j\omega)$ определяется следующим образом:

$$k_0(j\omega) k_0(-j\omega) = \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{k=1}^{\infty} k! a_k^2 b_k(\omega),$$

где

$$b_k(\omega) = \frac{s_{xx}^{(k)}(\omega)}{s_{xx}^{(1)}(\omega)}; \quad s_{xx}^{(k)}(\omega) = Q_{xx}^k(\tau).$$

Функция $k_0(j\omega)$ зависит как от вида нелинейности, так и от статистических характеристик входного процесса. Факт наличия этих зависимостей отражает существенно нелинейные особенности преобразования.

Теперь вычислим взаимную спектральную плотность $S_{ug}(\omega)$. По определению имеем

$$R_{ug}(\tau) = \overline{u(t)g^0(t+\tau)}.$$

Переходя к осреднению по совокупности, получим

$$R_{ug}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) g^0 p_2(x, g) dx dg, \quad (2.58)$$

где $p_2(x, g)$ — совместная плотность вероятности процессов $x(t)$ и $g(t)$.

Для вычисления интеграла (2.58) воспользуемся разложением для нормальной плотности вероятности и ортогональным представлением (2.55). Подставив в (2.58) вместо $F(x)$ и $p_2(x, g)$ их разложения и интегрируя, находим

$$R_{ug}(\tau) = a_1 \sigma_g \varrho_{xg}(\tau) = \frac{a_1}{\sigma_x} R_{xg}(\tau).$$

Уравнение для спектральной плотности имеет вид

$$S_{ug}(\omega) = \frac{a_1}{\sigma_x} S_{xg}(\omega). \quad (2.59)$$

Аналогичным способом может быть получена взаимная спектральная плотность $S_{ua}(\omega)$. Окончательные выражения будут

$$R_{ua}(\tau) = \frac{a_1}{\sigma_x} R_{xa}(\tau); \quad (2.60)$$

$$S_{ua}(\omega) = \frac{a_1}{\sigma_x} S_{xa}(\omega).$$

Подстановка формул (2.59) и (2.60) в (2.52) и (2.53) дает

$$S_{ua}(\omega) = \frac{\frac{a_1}{\sigma_x} H(-j\omega)}{1 + \frac{a_1}{\sigma_x} H(-j\omega)} [S_{ga}(\omega) - m_x S_{aa}(\omega)]; \quad (2.61)$$

$$S_{ug}(\omega) = \frac{\frac{a_1}{\sigma_x} H(-j\omega)}{1 + \frac{a_1}{\sigma_x} H(-j\omega)} [S_{gg}(\omega) - m_x S_{ga}(\omega)]. \quad (2.62)$$

Остается вычислить взаимную спектральную плотность процессов на выходе нелинейного звена и блока умножения. Для этого воспользуемся выражением для взаимной корреляционной функции

$$R_{u\tau}(\tau) = \overline{u^0(t) \gamma(t+\tau)} = m_x R_{ua}(\tau) + \overline{u(t) x^0(t+\tau) a(t+\tau)}.$$

Момент третьего порядка в последнем выражении определяется следующим образом

$$\begin{aligned} & \overline{u(t) x^0(t+\tau) a(t+\tau)} = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1) (x_2 - m_x) a p_3(x_1, x_2, a) dx_1 dx_2 da. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Здесь $x_1 = x(t)$; $x_2 = x(t+\tau)$; $p_3(x, x_2, a)$ — трехмерная совместная плотность вероятности.

Разложение трехмерной нормальной плотности вероятности по полиномам Чебышева — Эрмита согласно [4] имеет вид

$$p_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right)^2 + \left(\frac{x_3 - m_3}{\sigma_3} \right)^2 \right] \right\} \sum_{l, m, n=0}^{\infty} \frac{Q_{12}^l Q_{23}^m Q_{13}^n}{l! m! n!} H_{l+n} \left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right) H_{l+n} \left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1} \right) H_{l+m} \times \\ \times \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right) H_{m+n} \left(\frac{x_3 - m_3}{\sigma_3} \right), \quad (2.64)$$

где Q_{ij} — коэффициент взаимной корреляции между x_i и x_j .

Воспользуемся этим разложением для вычисления интеграла (2.63). Подставляя в подынтегральное выражение (2.55) и (2.64) и переходя к почленному интегрированию, получим

$$\overline{u(t) a(t+\tau) x(t+\tau)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x^2 \sigma_a} \sum_{k=1, l, m, n=0}^{\infty} a_k \frac{Q_{xx}^l(\tau) Q_{xx}^m(0) Q_{xa}^n(\tau)}{l! m! n!} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} H_k \left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x} \right) H_{l+n} \left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right\} dx_1 \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} a H_m \left(\frac{a}{\sigma_a} \right) \exp \left\{ -\frac{a^2}{2\sigma_a^2} \right\} da \int_{-\infty}^{\infty} (x_2 - m_x) H_{l+m} \left(\frac{x_2 - m_x}{\sigma_x} \right) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_2 - m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right\} dx_2.$$

Последнее выражение в силу ортогональности полиномов Чебышева — Эрмита отлично от нуля в том случае, если выполняются следующие условия:

$$l+n=k, \quad l+m=1, \quad m+n=1.$$

Находим значения переменных суммирования, при которых интегралы не равны нулю,

а) $k=2; l=n=1; m=0;$

б) $k=0; l=n=0; m=1.$

Окончательно получим

$$R_{u1}(\tau) = m_x R_{ua}(\tau) + 2a_2 \sigma_a \sigma_x Q_{xx}(\tau) Q_{xa}(\tau)$$

или

$$R_{u1}(\tau) = m_x R_{ua}(\tau) + \frac{2a_2}{\sigma_x^2} R_{xx}(\tau) R_{xa}(\tau). \quad (2.65)$$

Для определения спектральной плотности применим к выражению (2.65) преобразование Фурье:

$$S_{u1}(\omega) = m_x S_{ua}(\omega) + \frac{a_2}{\pi \sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\nu) S_{xa}(\omega - \nu) d\nu. \quad (2.66)$$

Соотношение между спектральными плотностями процессов на входе и выходе линейного стационарного звена имеет вид

$$S_{xx}(\omega) = H(j\omega) H(-j\omega) S_{aa}(\omega). \quad (2.67)$$

Выражения (2.50) ÷ (2.52), (2.57), (2.61), (2.62), (2.66) и (2.67) определяют связь между спектрами входных и выходных сигналов отдельных элементов системы. Объединяя их между собой, получим интегральное уравнение для спектральной плотности процесса на выходе системы

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) = & \frac{H(j\omega) H(-j\omega)}{1 + k_3(j\omega) k_3(-j\omega) H(j\omega) H(-j\omega)} \{ S_{gg}(\omega) + \\ & + m_x^2 S_{aa}(\omega) \} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(-j\omega)}{1 + \frac{a_1}{\sigma_x} H(-j\nu)} \frac{H(j\nu - j\omega)}{1 + \frac{a_1}{\sigma_x} H(j\nu - j\omega)} \times \\ & \times [S_{ga}(\nu) - m_x S_{aa}(\nu)] [S_{ga}(\omega - \nu) - m_x S_{aa}(\omega - \nu)] d\nu + \\ & + 2m_x \operatorname{Re} S_{ag}(\omega) - 2 \operatorname{Re} \frac{\frac{a_1}{\sigma_x} H(-j\omega)}{1 + \frac{a_1}{\sigma_x} H(-j\omega)} [S_{gg}(\omega) - m_x S_{ga}(\omega) - \\ & - 2 \operatorname{Re} \frac{\frac{a_1}{\sigma_x} m_x H(-j\omega)}{1 + \frac{a_1}{\sigma_x} H(-j\omega)} [S_{ga}(\omega) - m_x S_{aa}(\omega)] + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\nu) \left\{ S_{aa}(\omega - \nu) - \frac{4a_2}{\sigma_x^2} \operatorname{Re} \frac{H(j\nu - j\omega)}{1 + \frac{a_1}{\sigma_x} H(j\nu - j\omega)} \times \right. \\ & \left. \times [S_{ga}(\omega - \nu) - m_x S_{aa}(\omega - \nu)] \right\} d\nu, \end{aligned}$$

или короче

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) = & \frac{H(j\omega) H(-j\omega)}{1 - k_3(j\omega) k_3(-j\omega) H(j\omega) H(-j\omega)} \times \\ & \times \left[B(\omega, \sigma_x, m_x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\nu) A(\omega - \nu, \sigma_x, m_x) d\nu \right], \quad (2.68) \end{aligned}$$

где A и B — функции, зависящие от заданных статистических характеристик воздействий и от неизвестных характеристик выходного процесса.

Таким образом, для спектральной плотности сигнала на выходе нелинейной системы с параметрически возмущенной линейной частью имеем интегральное уравнение типа (2.68). Решение этого уравнения осложняется тем, что функции A и B зависят от вида искомой спектральной плотности. Перейдем к вычислению среднего значения выходного сигнала. Для этого произведем осреднение выражения (2.49)

$$m_x = \int_0^{\infty} k(\tau) [m_g - m_u - \sigma_{xa}^2] d\tau. \quad (2.69)$$

Согласно (2.55) для математического ожидания процесса на выходе нелинейного преобразования имеем

$$m_u = a_0.$$

Взаимная дисперсия σ_{xa}^2 может быть получена интегрированием соответствующей спектральной плотности (см. формулу (2.52)).

Уравнения (2.68) и (2.69) позволяют определить статистические характеристики сигнала на выходе нелинейной стохастической системы. Решать эти уравнения следует совместно, так как спектральная плотность зависит от математического ожидания и наоборот. Наиболее разумным способом решения является метод последовательных приближений. При этом для получения нулевого приближения можно положить $a(t) = 0$.

Анализ уравнений (2.68) и (2.69) позволяет сделать некоторые качественные выводы о поведении рассматриваемой системы. Как видно, среднее значение сигнала на выходе системы определяется не только величиной управляющего сигнала и регулярной составляющей входа нелинейного преобразования, но и степенью корреляций между случайным параметрическим возбуждением и выходным процессом. Наличие этой корреляции приводит к появлению дополнительных установившихся ошибок на выходе системы.

Анализ уравнения (2.68) показывает, что спектральные свойства выходного сигнала в основном определяются спектральными свойствами стационарной части системы. Однако наличие случайного коэффициента и нелинейности приводит к значительному росту уровня флуктуационных ошибок системы.

2.7. ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Как отмечалось в разд. 2.1, анализ динамической точности систем наведения часто представляет собой задачу исследования замкнутых структур, включающих в себя нелинейные блоки со случайными свойствами. В качестве примера рассматри-

вался процесс деформации статических характеристик сервомеханизмов в зависимости от изменений моментов нагрузки.

Если нагрузочный момент изменяется во времени случайным образом, то и изменения параметров нелинейной зависимости скорости сервомотора от управляющего сигнала (зона насыщения, зона нечувствительности, наклон линейного участка и т. д.) будут характеризоваться случайными процессами. Причем в первом случае (см. рис. 2.5) нерегулярный характер нагрузки обуславливает случайную деформацию нелинейной зависимости между управляющим сигналом и скоростью сервомотора вдоль оси ординат. Такое преобразование можно описать следующим уравнением:

$$y(t) = \alpha(t) F[x(t)]. \quad (2.70)$$

Здесь $F(x)$ — детерминированная нелинейная функция, соответствующая статической характеристике сервомотора при фиксированном значении нагрузки, а $\alpha(t)$ — случайный процесс, отражающий случайный характер изменения нагрузки.

Простейшим преобразованием такого вида является усиление звеном со случайным коэффициентом усиления. К числу подобных преобразований могут быть также отнесены преобразования, осуществляемые нелинейными элементами релейного типа со случайным уровнем выходного сигнала, типа ограничения со случайным наклоном линейной зоны и случайным уровнем ограничения и другие.

Поле характеристик на рис. 2.6 порождается случайной деформацией нелинейной зависимости вдоль оси абсцисс. При этом уравнение, описывающее преобразование, имеет вид

$$y(t) = F[\alpha(t)x(t)]. \quad (2.71)$$

К таким нелинейностям могут быть отнесены, например, элементы со случайной зоной нечувствительности, нелинейности типа ограничения со случайной линейной зоной. Наконец, в наиболее общем случае (см. рис. 2.7) случайный характер нелинейного преобразования проявляется в деформации статической характеристики как вдоль оси абсцисс, так и вдоль оси ординат. При этом преобразованию соответствует уравнение вида

$$y(t) = \alpha_1(t) F[\alpha_2(t)x(t)]. \quad (2.72)$$

Нелинейные преобразования, характеристики которых являются случайными функциями времени, в дальнейшем будем называть стохастическими нелинейностями.

При анализе систем автоматического управления, содержащих стохастические нелинейности, исследователь сталкивается с трудностями, которые неизбежно возникают при статистическом анализе замкнутых нелинейных систем. Основная трудность обусловлена невозможностью заранее предсказать характер законов распределения координат системы.

Существующие методы исследования нелинейных систем либо очень громоздки, либо являются приближенными, основанными на предположении о том, что закон распределения сигнала на входе нелинейного преобразования близок к нормальному. Это предположение оправдывается эффектом нормализации при прохождении сигнала через линейную часть системы. Подобное же предположение может быть положено в основу исследования замкнутых динамических систем, содержащих стохастические нелинейности.

Из изложенного следует, что стохастические нелинейности представляют собой многомерные нелинейные преобразования. Поэтому ниже будут рассмотрены общие вопросы, связанные с нелинейным преобразованием векторных случайных сигналов.

Пусть нелинейное преобразование имеет вид

$$y(t) = f[r(t)], \quad (2.73)$$

где f — нелинейная функция; $r(t)$ — векторная случайная функция;

$$r(t) = \|x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\|.$$

Аппроксимируем преобразование (2.73) его разложением по многомерным ортогональным многочленам. Выбор той или иной системы ортогональных многочленов во многом зависит от закона распределения, которому подчиняются входные сигналы. В частности, если закон распределения вектора $r(t)$ — нормальный, то для аппроксимации выходного сигнала наиболее рационально использовать систему многомерных полиномов Эрмита. Многочлены Эрмита от многих переменных являются обобщением классических многочленов Эрмита одного переменного и определяются следующим образом [5].

Пусть C — фиксированная положительно определенная матрица с вещественными элементами. С матрицей C связана положительно определенная квадратичная форма

$$\varphi(r) = (Cr, r) = \sum_{i,j=1}^n ci_j x_i x_j$$

и взаимная форма

$$\psi(r) = \varphi(C^{-1}r) = (C^{-1}r, r),$$

где $r = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вещественный вектор.

Определим две системы многочленов

$$G_m(r) = G_{m_1, m_2, \dots, m_n}(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$H_m(r) = H_{m_1, m_2, \dots, m_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

с помощью производящих функций

$$\begin{aligned}\exp \left[(Ca, r) - \frac{1}{2} \varphi(a) \right] &= \sum \frac{a_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{a_n^{m_n}}{m_n!} H_m(r); \\ \exp \left[(a, r) - \frac{1}{2} \psi(a) \right] &= \sum \frac{a_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{a_n^{m_n}}{m_n!} G_m(r).\end{aligned}\quad (2.74)$$

Используя разложение Тейлора и приравнявая коэффициенты при $a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n}$, получим формулы

$$\begin{aligned}H_m(r) &= (-1)^m \exp \left[\frac{1}{2} \varphi(r) \right] \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \exp \left[-\frac{1}{2} \varphi(r) \right]; \\ G_m(C^{-1}r) &= (-1)^m \exp \left[\frac{1}{2} \psi(r) \right] \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \exp \left[-\frac{1}{2} \psi(r) \right].\end{aligned}\quad (2.75)$$

Выражения (2.74) или (2.75) определяют многочлены Эрмита от многих переменных. При $n=1$ и $c_{11}=2$ получим классические полиномы Эрмита.

Наиболее важным свойством многочленов Эрмита является свойство биортогональности

$$\int G_e(r) H_m(r) \omega(r) dx = \delta_{l,m_1} \dots \delta_{l,m_n} m_1! \dots m_n! \quad (2.76)$$

и ортогональности многочленов различных порядков

$$\begin{aligned}\int G_l(r) G_m(r) \omega(r) dx &= 0, \\ \int H_l(r) H_m(r) \omega(r) dx &= 0 \quad \text{при } m \neq l,\end{aligned}\quad (2.77)$$

где $\omega(r)$ — весовая функция, определяемая формулой

$$\omega(r) = |C|^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp \left[-\frac{\varphi(r)}{2} \right],$$

причем

$$\int \omega(r) dx = 1.$$

Произвольная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет следующие разложения по многочленам Эрмита:

$$\begin{aligned}f(r) &= \sum a_m G_m(r); \\ f(r) &= \sum b_m H_m(r).\end{aligned}\quad (2.78)$$

При этом

$$\begin{aligned}m_1! \dots m_n! a_m &= \int \omega(r) f(r) H_m(r) dx; \\ m_1! \dots m_n! b_m &= \int \omega(r) f(r) G_m(r) dx.\end{aligned}\quad (2.79)$$

В дальнейшем разложения вида (2.78) будем называть ортогональными.

В качестве весовой функции разложения следует использовать закон распределения случайного вектора $r(t)$. В этом случае свойство биортогональности (2.76) будет отражать факт статистической независимости процессов

$$h_m(t) = H_m[r(t)] \text{ и } g_m(t) = G_m[r(t)].$$

Последнее обстоятельство значительно упрощает процедуру вычисления статистических характеристик процесса на выходе преобразования.

Проиллюстрируем сказанное на примере вычисления корреляционной функции

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= M\{y(t_1)y(t_2)\} = M\{f[r(t_1)]f[r(t_2)]\} = \\ &= \iint f(r_1)f(r_2)p_2(r_1, r_2)dr_1dr_2, \end{aligned}$$

где $p_2(r_1, r_2)$ — совместный закон распределения векторов $r_1 = r(t_1)$ и $r_2 = r(t_2)$.

Пусть нелинейное преобразование разложено в ряд по многочленам $G_m(r)$

$$f(r) = \sum a_m G_m(r). \quad (2.80)$$

Закон распределения $p_2(r_1, r_2)$ имеет формальное разложение по многочленам $H_m(r)$

$$p_2(r_1, r_2) = \omega(r_1)\omega(r_2) \sum c_{kl} H_k(r_1) H_l(r_2). \quad (2.81)$$

Это разложение представляет собой обобщение на многомерный случай известного разложения Крамера. После подстановки рядов (2.80) и (2.81) интеграл распадается на сумму слагаемых следующего вида:

$$a_m a_n c_{kl} \int G_m(r_1) H_k(r_1) \omega(r_1) dr_1 \int G_n(r_2) H_l(r_2) \omega(r_2) dr_2.$$

Вычисление интегралов, входящих в эти слагаемые, в силу свойства биортогональности не представляет труда.

Другое не менее важное свойство ортогональных разложений с законом распределения в качестве весовой функции состоит в том, что коэффициенты аппроксимации a_m или b_m являются определенными статистическими мерами процессов. Их величины зависят как от вида нелинейного преобразования, так и от статистических характеристик вектора входных процессов. Таким образом, аппроксимирующее преобразование строится с учетом статистики входных сигналов, что позволяет использовать понятие средней квадратичной аппроксимации. Это озна-

чает, что выход нелинейного преобразования может быть с любой степенью точности аппроксимирован конечной суммой ряда.

Возможность подобной аппроксимации представляется следующей теоремой: для всякой измеримой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, заданной в области D многомерного пространства и принадлежащей классу L_q^q , т. е. такой, что интеграл

$$\int_D \dots \int |f(x_1, \dots, x_n)|^q \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

сходится, существует последовательность многочленов

$$\begin{aligned} \Phi_{k_1 k_2 \dots k_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = \sum_{l_1=0}^{k_1} \sum_{l_2=0}^{k_2} \dots \sum_{l_n=0}^{k_n} [c_{l_1 l_2 \dots l_n} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}, \end{aligned}$$

удовлетворяющих соотношению

$$\begin{aligned} \int_D \dots \int |f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Phi_{k_1 k_2 \dots k_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)|^q \times \\ \times \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \rightarrow 0 \text{ при } k_1 k_2, \dots, k_n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Особый интерес представляет случай, когда $q=2$ и $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где p — функция плотности вероятности случайного вектора $r = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

При этом рассматриваемый интеграл определяет операцию статистического усреднения. В данном случае из приведенной теоремы вытекает утверждение, что для любого нелинейного преобразования, имеющего при рассматриваемых входных сигналах конечное среднее квадратичное значение, существует последовательность многочленов $\Phi_{k_1 k_2 \dots k_n}$ такая, что средний квадрат ошибок аппроксимации стремится к нулю с ростом порядка аппроксимирующего многочлена.

Поскольку $G_m(r)$ — многочлены, всякая конечная сумма ряда (2.80) также будет многочленом относительно $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Может быть поставлена задача нахождения многочлена наилучшего приближения среди всех многочленов $\Phi_m(r)$ степени m .

Эта задача является частным случаем более общей задачи наилучшего среднего квадратичного приближения процесса $y(t) = f[r(t)]$, имеющего конечное среднее квадратичное значение, с помощью линейной комбинации процессов $G_i[r(t)]$, $G_1[r(t)], G_2[r(t)], \dots, G_m[r(t)]$, т. е. задачи минимизации выражения

$$\int_D \dots \int \left[f(r) - \sum_{i=0}^m a_i G_i(r) \right]^2 p(r) dx_1 dx_2, \dots, dx_n \quad (2.82)$$

подбором коэффициентов a_i . Введем обозначение

$$E(a_i) = \left[f(r) - \sum_{i=0}^m a_i G_i(r) \right]^2,$$

где черта сверху означает операцию статистического усреднения, определенную выражением (2.82). Раскрывая скобки и дифференцируя по a_i , находим

$$\frac{\partial E(a_i)}{\partial a_i} = -2\overline{fG_i} + 2 \sum_{k=0}^m a_k \overline{G_i G_k}, \quad i=0, 1, \dots, m.$$

Необходимое условие минимума $E(a_i)$

$$\frac{\partial E(a_i)}{\partial a_i} = 0 \quad \text{для всех } i=0, 1, \dots, m.$$

Учитывая свойство ортогональности полиномов G_i различных порядков, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\overline{f(r)G_i(r)} = \sum_{k=0}^m a_k \overline{G_i(r)G_k(r)}, \quad i=0, 1, \dots, m, \quad (2.83)$$

здесь суммирование производится по всем $k=k_1+k_2+\dots+k_n=t$. Для различных i имеем независимые системы уравнений, решение которых дает значения коэффициентов при полиномах i -го порядка, обеспечивающих минимум выражения (2.82). Таким образом, при увеличении порядка аппроксимирующего многочлена коэффициенты разложения будут неизменными.

Рассмотрим нелинейные преобразования двух стационарных случайных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$, имеющих нормальный совместный закон распределения $p_2(x_1, x_2)$,

$$y(t) = f[x_1(t), x_2(t)]. \quad (2.84)$$

Следует заметить, что требование стационарности не является обязательным. Анализ преобразований нестационарных процессов не вызывает принципиальных трудностей и отличается лишь наличием зависимости коэффициентов ортогональных разложений от времени. Так что результаты этого раздела без труда обобщаются на нестационарный случай.

Будем раскладывать нелинейное преобразование в ряды по полиномам Эрмита с весовой функцией $p_2(x_1, x_2)$.

Нормальному закону распределения $p_2(x_1, x_2)$ соответствует следующая симметричная квадратная матрица коэффициентов

$$C = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{1-\varrho^2}; & \frac{-\varrho}{1-\varrho^2} \\ \frac{-\varrho}{1-\varrho^2}; & \frac{1}{1-\varrho^2} \end{array} \right]; \quad |C| = \frac{1}{1-\varrho^2}.$$

С матрицей C связана положительно определенная квадратичная форма

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{(1 - \rho^2)}.$$

С помощью весовой функции

$$p_2(x, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{(1-\rho^2)}\right],$$

где ρ — взаимный корреляционный момент,

$x_i^0 = \frac{x_i - m_i}{\sigma_i}$ — нормированный процесс, могут быть определены две системы многочленов:

$$H_{mn}(x_1, x_2) = (-1)^{m+n} \exp\left[\frac{1}{2}\varphi(x_1, x_2)\right] \frac{\partial^{m+n}}{\partial x_1^m \partial x_2^n} \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi(x_1, x_2)\right];$$

$$G_{mn}(x_1, x_2) = (-1)^{m+n} \exp\left[\frac{1}{2}\psi(z_1, z_2)\right] \frac{\partial^{m+n}}{\partial z_1^m \partial z_2^n} \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2}\psi(z_1, z_2)\right],$$

где

$$x = C^{-1}z, \text{ т. е. } x_1 = z_1 + \rho z_2, \quad x_2 = \rho z_1 + z_2,$$

а $\psi(z_1, z_2)$ — квадратичная форма, соответствующая матрице C^{-1} ,

$$\psi(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2 + 2\rho z_1 z_2.$$

Важнейшими свойствами многочленов H_{mn} и G_{mn} , которые используются в дальнейшем, являются свойства биортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_{mn}(x_1, x_2) G_{kl}(x_1, x_2) p_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \delta_{km} \delta_{nl} m! n! \quad (2.85)$$

и ортогональности полиномов G_{mn} различных порядков

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{ij}(x_1, x_2) G_{kl}(x_1, x_2) p_2(x_1, x_2) = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если } k+l \neq i+j \\ k! l! \sum_{m=0}^{\min(i,l)} \binom{i}{m} \binom{j}{m+k-i} \rho^{2m+k-i} & \text{при } k+l=i+j \end{cases} \quad (2.86)$$

Справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$G_{l+1,j}(x_1, x_2) = x_1 G_{lj}(x_1, x_2) - n G_{n-1,k}(x_1, x_2) - k G_{n,k-1}(x_1, x_2); \quad (2.87)$$

$$G_{i,j+1}(x_1, x_2) = x_2 G_{ij}(x_1, x_2) - n G_{n-1,k}(x_1, x_2) - k G_{n,k-1}(x_1, x_2),$$

причем $G_{00} = 1$.

Последовательно применяя формулы (2.87), нетрудно убедиться, что G_{ij} является полиномом i -й степени относительно x_1 и j -й относительно x_2 с коэффициентом при высшем члене $x_1^i x_2^j$, равном единице.

Для некоторых значений i и j многочлены имеют следующий вид:

$$G_{00} = 1; \quad G_{10} = x_1; \quad G_{20} = x_1^2 - 1; \quad G_{01} = x_2; \quad G_{02} = x_2^2 - 1;$$

$$G_{11} = x_1 x_2 - q; \quad G_{21} = x_1^2 x_2 - x_2 - 2q x_1;$$

$$G_{22} = x_1^2 x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 - 4q x_1 x_2 + 2q^2.$$

Легко видеть, что при $q = 0$

$$G_{lj}(x_1, x_2) = H_l(x_1) H_j(x_2);$$

$$G_{i0}(x_1, x_2) = H_i(x_1);$$

$$G_{0i}(x_1, x_2) = H_i(x_2),$$

где H_i — классические одномерные полиномы Чебышева — Эрмита i -го порядка.

Полиномы H_{mn} имеют следующее интегральное представление:

$$H_{mn}(x_1, x_2) = (-1)^{m+n} (2\pi)^{-1} \sqrt{1-q^2} \exp \left[\frac{1}{2} \varphi(x_1, x_2) \right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1^m \lambda_2^n \exp \left[-\frac{1}{2} \psi(\lambda_1, \lambda_2) - i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \right] d\lambda_1 d\lambda_2. \quad (2.88)$$

Перейдем теперь непосредственно к задаче вычисления моментов нелинейного преобразования.

Пусть три случайных процесса связаны соотношением (2.84). Процесс на выходе нелинейного преобразования представим в виде ряда

$$y(t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} G_{ij} [x_1^0(t), x_2^0(t)], \quad (2.89)$$

где

$$x_i^0 = \frac{x_i - m_i}{\sigma_i},$$

а

$$a_{ij} = \frac{1}{i! j!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) H_{ij}(x_1^0, x_2^0) p_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (2.90)$$

Математическое ожидание m_y находится непосредственно осреднением ряда (2.89).

$$m_y = a_{00}.$$

Таким образом, первый член ортогонального разложения определяет среднее значение процесса на выходе нелинейного преобразования (2.89).

Для вычисления корреляционной функции имеем интеграл

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{11}, x_{21}) f(x_{12}, x_{22}) p_4(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \times \\ \times dx_{11} \dots dx_{22} - m_y(t_1) m_y(t_2), \quad (2.91)$$

где $x_{i1} = x_i(t_1); \quad x_{i2} = x_i(t_2), \quad i = 1, 2;$

$p_4(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$ — четырехмерная нормальная плотность вероятности.

Чтобы вычислить интеграл (2.91), разложим p_4 в ряд по двумерным полиномам H_{ij} . Плотность вероятности связана с характеристической функцией θ следующим интегральным соотношением:

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times \\ \times \exp[-i(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)] d\lambda_1 \dots d\lambda_n.$$

Характеристическая функция нормального четырехмерного вектора имеет вид

$$\theta_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \exp[i(m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 + m_4 \lambda_4) - \\ - \frac{1}{2}(R_{11} \lambda_1^2 + R_{22} \lambda_2^2 + R_{33} \lambda_3^2 + R_{44} \lambda_4^2 + 2R_{12} \lambda_1 \lambda_2 + \\ + 2R_{13} \lambda_1 \lambda_3 + 2R_{14} \lambda_1 \lambda_4 + 2R_{23} \lambda_2 \lambda_3 + 2R_{24} \lambda_2 \lambda_4 + 2R_{34} \lambda_3 \lambda_4)];$$

здесь через R_{ij} обозначены корреляционные моменты между x_i и x_j . Подставив последнее выражение в интегральное соотношение и произведя соответствующие выкладки, получим

$$p_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\psi(\lambda_1, \lambda_2)\right] \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2}\psi(\lambda_3, \lambda_4)\right] \exp[-(Q_{13}\lambda_1\lambda_3 + Q_{14}\lambda_1\lambda_4 + Q_{23}\lambda_2\lambda_3 + \\ + Q_{24}\lambda_2\lambda_4)] \exp\left[-i \sum_{i=1}^4 \lambda_i x_i^0\right] d\lambda_1 \dots d\lambda_4;$$

здесь Q_{ij} являются нормированными корреляционными моментами.

Разложим третью экспоненту подынтегральной функции в степенной ряд

$$p_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} \frac{q_{13}^i q_{14}^j q_{23}^k q_{24}^l}{i! j! k! l!} \times \\ \times (-1)^{i+j+k+l} \lambda_1^{i+j} \lambda_2^{k+l} \lambda_3^{i+k} \lambda_4^{j+l} \exp\left[-\frac{1}{2} \psi(\lambda_1, \lambda_2)\right] \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2} \psi(\lambda_3, \lambda_4)\right] \exp[-i(\lambda_1 x_1^0 + \lambda_2 x_2^0 + \\ + \lambda_3 x_3^0 + \lambda_4 x_4^0)] d\lambda_1 \dots d\lambda_4.$$

Выполняя почленное интегрирование и принимая во внимание интегральное представление (2.88), находим следующее разложение:

$$p_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = p_2(x_1, x_2) p_2(x_3, x_4) \times \\ \times \sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} \frac{q_{13}^i q_{14}^j q_{23}^k q_{24}^l}{i! j! k! l!} H_{i+j,k+l}(x_1^0, x_2^0) H_{i+k,j+l}(x_3^0, x_4^0). \quad (2.92)$$

Воспользуемся полученным разложением для вычисления интеграла (2.91). В результате подстановки (2.92) в подынтегральную функцию интеграл распадается на сумму следующего вида:

$$R_y(t_1, t_2) = \sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} \frac{q_{x_1 x_1}^i(t_1, t_2)}{i!} \frac{q_{x_1 x_2}^j(t_1, t_2)}{j!} \frac{q_{x_2 x_1}^k(t_1, t_2)}{k!} \frac{q_{x_2 x_2}^l(t_1, t_2)}{l!} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{11}, x_{21}) H_{i+j,k+l}(x_{11}^0, x_{21}^0) p_2(x_{11}, x_{21}) dx_{11} dx_{21} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{12}, x_{22}) H_{i+k,j+l}(x_{12}^0, x_{22}^0) p_2(x_{12}, x_{22}) dx_{12} dx_{22} - \\ - a_{00}(t_1) a_{00}(t_2).$$

Интегрирование дает

$$R_y(t_1, t_2) = \sum_{i+j+k+l=1}^{\infty} \frac{(i+j)!(k+l)!(i+k)!(j+l)!}{i! j! k! l!} \times \\ \times a_{i+j,k+l} a_{i+k,j+l} q_{x_1 x_1}^i(t_1, t_2) q_{x_1 x_1}^j(t_1, t_2) q_{x_1 x_1}^k(t_1, t_2) \times \\ \times q_{x_2 x_1}^l(t_1, t_2). \quad (2.93)$$

Для стационарных процессов, переходя от корреляционных функций к спектральным плотностям, получим

$$S_y(\omega) = \sum_{i+j+k+l=1}^{\infty} \frac{(i+j)!(k+l)!(i+k)!(j+l)!}{i!j!k!l!} \times \\ \times a_{i+j,k+l} a_{i+k,j+l} s_{ijkl}(\omega), \quad (2.94)$$

где

$$s_{ijkl}(\omega) = q_{x_1, x_1}^i(\tau) q_{x_1, x_2}^j(\tau) q_{x_2, x_1}^k(\tau) q_{x_2, x_2}^l(\tau); \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Полученные ряды имеют следующий смысл. Первые члены, для которых выполняется условие $i+j+k+l=1$, соответствуют линейной зависимости между входными и выходными сигналами. Остальные члены характеризуют нелинейные искажения, вносимые нелинейным преобразованием. Легко видеть, что эти искажения наиболее существенны при малых τ , что соответствует области больших ω в спектральной плотности.

На основании полученных формул может быть введено понятие эквивалентного частотного коэффициента усиления $k_s(j\omega)$ или эквивалентной передаточной функции $H_s(p)$ безынерционного нелинейного элемента по каждому из входных воздействий. Эквивалентный частотный коэффициент по воздействию x_i определяется следующим соотношением:

$$k_{i_s}(j\omega) k_{i_s}(-j\omega) = \frac{S_y(\omega)}{S_{x_i}(\omega)} = \sum_{m+n+k+l=1}^{\infty} \frac{(m+n)!(k+l)!(m+k)!(n+l)!}{m!n!k!l!} \times \\ \times a_{m+n,k+l} a_{m+k,n+l} b_{mnkl}^{(i)}(\omega),$$

где

$$b_{mnkl}^{(i)}(\omega) = \frac{s_{mnkl}(\omega)}{S_{x_i}(\omega)}.$$

Таким образом, использование ортогональных разложений нелинейной характеристики при нормальном совместном распределении входных сигналов позволяет выразить статистические характеристики выходного сигнала в виде рядов по степеням нормированных кросс- и автокорреляционных функций входных сигналов и построить эквивалентную передаточную функцию нелинейного преобразования по каждому из входных воздействий. Если заданы статистические характеристики входных сигналов, корреляционная функция или спектральная плотность выходного сигнала могут быть с любой степенью точности вычислены по формулам (2.93) и (2.94).

Рассмотрим задачу средней квадратичной аппроксимации применительно к двумерным преобразованиям (2.84). В этом случае система уравнений для коэффициентов аппроксимации, обеспечивающих минимум среднего квадрата разности между

исходным и аппроксимирующим преобразованиями, в соответствии с формулами (2.83) имеет следующий вид:

$$\overline{fG}_{ij} = \sum_{k+l=i+j} a_{kl} \overline{G}_{ij} \overline{G}_{kl}, \quad k+l=i+j=\text{const.} \quad (2.95)$$

Полиномы $G(x_1, x_2)$ одинакового порядка линейно независимы, т. е. ни один из них не имеет выражения через линейную комбинацию других. Это означает, что

$$D = \begin{vmatrix} \overline{G_{p0}G_{p0}} & \overline{G_{p0}G_{p-1,1}} \dots \overline{G_{p0}G_{0p}} \\ \overline{G_{p-1,1}G_{p0}} & \overline{G_{p-1,1}G_{p-1,1}} \dots \overline{G_{p-1,1}G_{1,p-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{G_{0p}G_{p0}} & \overline{G_{0p}G_{p-1,1}} \dots \overline{G_{0p}G_{p0}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, определитель системы $D \neq 0$, поэтому она имеет решение и это решение единственное.

Конечная сумма ряда (2.89), аппроксимирующая нелинейное преобразование, необязательно должна содержать полный набор из $(p+1)$ -го двумерного полинома Эрмита порядка p . В этом случае в системе (2.95) все не участвующие в аппроксимации полиномы G_p следует заменить нулями.

Решение системы (2.95) имеет следующий вид:

$$a_{ij} = \frac{\sum_{k+l=i+j} f \overline{G_{kl}} A_{kl}^{ij}}{D}, \quad i+j=p=\text{const}; \quad (2.96)$$

здесь A_{kl}^{ij} — алгебраическое дополнение элемента $\overline{G_{ij}G_{kl}}$ в определителе D .

Двумерные полиномы $H_p(x_1, x_2)$ и $G_p(x_1, x_2)$ одного и того же порядка p связаны между собой соотношением

$$H_{ij}(x_1, x_2) = \frac{\sum_{k+l=i+j} G_{kl}(x_1 x_2) A_{kl}^{ij}}{D}. \quad (2.97)$$

Сопоставляя (2.96), (2.97) и (2.90), приходим к выводу, что в том случае, когда для аппроксимации нелинейного преобразования используется полный набор полиномов $G(x_1, x_2)$ какого-либо порядка, коэффициенты a_{ij} при этих полиномах, обеспечивающие наилучшую среднюю квадратичную аппроксимацию, совпадают с коэффициентами ортогональных разложений.

Метод средней квадратичной аппроксимации нелинейных преобразований можно использовать, чтобы получить приближенные решения технических задач в тех случаях, когда применение точных методов не имеет успеха.

Если в разложениях (2.80) или (2.89) ограничиться лишь полиномами Эрмита первого порядка, то аппроксимирующее преобразование будет линейным и на его основе может быть произведена линеаризация системы. В этом случае оптимальные коэффициенты аппроксимации, вычисленные по формулам (2.79) и (2.80), совпадают с коэффициентами статистической линеаризации многомерных нелинейностей.

Подводя итоги изложенному в этом разделе, можно утверждать, что при известном распределении входных сигналов нелинейного преобразования выходной сигнал в пределах допустимой ошибки может быть приближен конечным отрезком ортогонального разложения. Коэффициенты, обеспечивающие минимум средней квадратичной ошибки приближения, вычисляются из системы уравнений (2.83) или (2.95). Величина оптимальных коэффициентов при полиномах определенного порядка зависит от количества этих полиномов, используемых для аппроксимации. Если набор используемых полиномов какого-либо порядка полный, то оптимальные коэффициенты совпадают с коэффициентами ортогональных разложений и вычисляются по формулам (2.80). Изменение количества аппроксимирующих многочленов какого-либо порядка не сказывается на величине оптимальных коэффициентов при полиномах других порядков.

Пример. Проиллюстрируем сказанное простым примером. Пусть исходное нелинейное преобразование имеет вид

$$y = f(x_1, x_2).$$

Входные процессы x_1 и x_2 имеют нормальный совместный закон распределения. Аппроксимирующее преобразование запишем в виде

$$u = a_{00} + a_{10}G_{01}(x_1^0, x_2^0) + a_{10}G_{10}(x_1^0, x_2^0) + a_{20}G_{20}(x_1^0, x_2^0) + \\ + a_{11}G_{11}(x_1^0, x_2^0) + a_{02}G_{02}(x_1^0, x_2^0). \quad (a)$$

Определим коэффициенты a_{ij} , обеспечивающие минимум выражению $E = M[y-u]^2$. Согласно (2.90) имеем

$$a_{00} = \overline{f(x_1, x_2)}; \quad (b)$$

$$\left. \begin{aligned} fG_{10} &= a_{10}\overline{G_{10}G_{10}} + a_{01}\overline{G_{01}G_{01}}; \\ fG_{01} &= a_{10}\overline{G_{01}G_{01}} + a_{01}\overline{G_{10}G_{10}}; \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{fG_{20}} &= a_{20}\overline{G_{20}G_{20}} + a_{11}\overline{G_{20}G_{11}} + a_{02}\overline{G_{20}G_{02}}; \\ \overline{fG_{11}} &= a_{20}\overline{G_{11}G_{20}} + a_{11}\overline{G_{11}G_{11}} + a_{02}\overline{G_{11}G_{02}}; \\ \overline{fG_{02}} &= a_{20}\overline{G_{02}G_{20}} + a_{11}\overline{G_{02}G_{11}} + a_{02}\overline{G_{02}G_{02}}. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Для вычисления коэффициентов при полиномах каждого порядка имеем свою систему алгебраических уравнений. Коэффициенты при полиномах первого порядка имеют вид

$$a_{10} = f \frac{x_1 - \rho x_2}{1 - \rho^2} = \overline{fH_{10}};$$

$$a_{01} = f \frac{-\rho x_1 + x_2}{1 - \rho^2} = \overline{fH_{01}}.$$

Из системы (d) находим коэффициенты при полиномах второго порядка

$$D = \begin{vmatrix} \overline{(x_1^{02} - 1)^2} & \overline{(x_1^{02} - 1)(x_1^0 x_2^0 - \rho)} & \overline{(x_1^{02} - 1)(x_2^{02} - 1)} \\ \overline{(x_1^0 x_2^0 - \rho)(x_1^{02} - 1)} & \overline{(x_1^0 x_2^0 - \rho)^2} & \overline{(x_1^0 x_2^0 - \rho)(x_2^{02} - 1)} \\ \overline{(x_2^{02} - 1)(x_1^{02} - 1)} & \overline{(x_2^{02} - 1)(x_1^0 x_2^0 - \rho)} & \overline{(x_2^{02} - 1)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2\rho & 2\rho^2 \\ 2\rho & (1 + \rho^2) & 2\rho \\ 2\rho^2 & 2\rho & 2 \end{vmatrix} = 4(1 - \rho^2)^3.$$

Тогда

$$a_{20} = \frac{\overline{fG_{20}} + \rho^2 \overline{fG_{02}} - 2\rho \overline{fG_{11}}}{2(1 - \rho^2)^2} = \frac{1}{2} f \left[\left(\frac{x_1 - \rho x_2}{1 - \rho^2} \right)^2 - \frac{1}{1 - \rho^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2!} \overline{fH_{20}}.$$

Аналогично получим

$$a_{11} = \overline{fH_{11}};$$

$$a_{02} = \frac{1}{2!} \overline{fH_{02}}.$$

Как и следовало ожидать, коэффициенты совпадают с коэффициентами ортогональных разложений.

Пусть теперь аппроксимирующее преобразование имеет вид

$$u = a_{00} + a_{10}G_{10}(x_1^0, x_2^0) + a_{01}G_{01}(x_1^0, x_2^0) + a_{11}G_{11}(x_2^0, x_2^0).$$

Здесь использован неполный набор многочленов второго порядка (в аппроксимации не участвуют многочлены G_{20} и G_{02}). Поэтому в соответствии с изложенным ранее система алгебраических уравнений для коэффициентов при полиномах первого порядка остается неизменной, а для коэффициента a_{11} при полиноме второго порядка имеем

$$a_{11} \overline{G_{11}G_{11}} = \overline{fG_{11}},$$

т. е.

$$a_{11} = \frac{\overline{fG_{11}}}{\overline{G_{11}G_{11}}}.$$

Это выражение отлично от полученного ранее для преобразования (a)

2.8. НЕОДНОЗНАЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИСТЕРЕЗИСНОГО ТИПА

Преобразования гистерезисного типа широко распространены в технике (рис. 2.9). Нелинейная характеристика этих преобразований состоит из двух различных ветвей, одна из которых соответствует возрастанию выходной величины, другая — убыванию. В данном случае с большой степенью точности можно утверждать, что выходной сигнал является результатом нелинейного преобразования двух сигналов: входного сигнала и его производной $y = F(x, \dot{x})$.

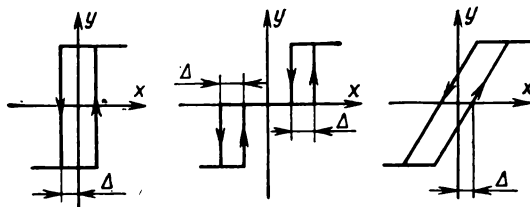


Рис. 2.9. Неоднозначные преобразования гистерезисного типа

Пусть входная величина неоднозначного преобразования является стационарным случайным процессом с нормальным законом распределения. Тогда, используя ортогональные разложения, на основании выведенных ранее соотношений (2.90) и (2.93) можем написать

$$R_{yy}(\tau) = \sum_{i+j+k+l=1}^{my=a_{00}} \frac{(i+j)!(k+l)!(i+k)!(j+l)!}{i!j!k!l!} \times \\ \times a_{i+j,k+l} a_{i+k,j+l} \varrho_{xx}^i(\tau) \varrho_{xx}^j(\tau) \varrho_{xx}^k(\tau) \varrho_{xx}^l(\tau), \quad (2.98)$$

где $\varrho_{xx}(\tau)$ — нормированная кросскорреляционная функция $x(t)$ и $\dot{x}(t)$; a_{ij} — коэффициенты ортогонального разложения преобразования.

Известно, что стационарный процесс в совпадающие моменты времени не коррелирован со своей производной.

В связи с этим, полагая в уравнении (2.98) $\tau=0$, находим выражение для дисперсии сигнала на выходе

$$\sigma_y^2 = \sum_{i+j=1}^{\infty} i!j! a_{ij}^2. \quad (2.99)$$

Остановимся несколько подробнее на вычислении коэффициентов a_{ij} . Как уже отмечалось, при $\varrho_{xx}(0)=0$ имеет место равенство

$$H_{ij}(x, \dot{x}) = H_i(x) H_j(\dot{x}),$$

где $H_k(x)$ — одномерные полиномы Чебышева — Эрмита k -го порядка. Вследствие этого формулы для коэффициентов разложения a_{ij} принимают вид

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi i l j! \sigma_x \sigma_{\dot{x}}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \dot{x}) H_i(x^0) H_j(\dot{x}^0) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}[x^{02} + \dot{x}^{02}]\right\} dx d\dot{x}. \quad (2.100)$$

Неоднозначное нелинейное преобразование состоит из двух ветвей, соответствующих возрастанию и убыванию входной величины

$$F(x, \dot{x}) = \begin{cases} F_1(x) & \dot{x} < 0 \\ F_2(x) & \dot{x} > 0. \end{cases}$$

Функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ обычно представляют собой однозначные нелинейные зависимости, симметрично сдвинутые вдоль оси x на величину, равную половине ширины петли гистерезиса (см. рис. 2.9), т. е.

$$F_1(x) = f(x + \Delta); \quad F_2(x) = f(x - \Delta).$$

Учитывая сказанное, интеграл (2.100) можно разбить на два следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi i l j! \sigma_x \sigma_{\dot{x}}} \left[\int_{-\infty}^0 H_j(\dot{x}^0) \exp\left\{-\frac{\dot{x}^{02}}{2}\right\} d\dot{x} \times \right. \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) H_i(x^0) \exp\left\{-\frac{x^{02}}{2}\right\} dx + \int_0^{\infty} H_j(\dot{x}^0) \exp\left\{-\frac{\dot{x}^{02}}{2}\right\} \times \\ \times d\dot{x} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x) H_i(x^0) \exp\left\{-\frac{x^{02}}{2}\right\} dx. \quad (2.101)$$

Следствием ортогональности полиномов Чебышева — Эрмита является равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_j(x) \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & j=0 \\ 0 & j>0, \end{cases}$$

но

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_j(x) \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = \int_{-\infty}^0 H_j(x) \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx + \\ + \int_0^{\infty} H_j(x) \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = \int_0^{\infty} [H_j(x) + H_j(-x)] \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx.$$

Полиномы Чебышева — Эрмита четного порядка являются четными функциями аргумента, а нечетного порядка — нечетными. Таким образом, можно написать

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} H_{2n}(x) \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx &= 0, \quad n > 0; \\ \int_0^{\infty} H_0(x) \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \\ \int_{-\infty}^0 H_{2n+1}(x) \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx &= \int_0^{\infty} H_{2n+1}(x) \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx. \end{aligned}$$

Принимая во внимание последние соотношения, из (2.101) находим

$$\begin{aligned} a_{i,0} &= \frac{1}{2} [a_i^{(1)} + a_i^{(2)}]; \\ a_{i,2n} &= 0 \quad \text{при } n > 0; \\ a_{i,2n+1} &= b_{2n+1} [a_i^{(2)} - a_i^{(1)}]; \end{aligned} \quad (2.102)$$

здесь обозначено

$$b_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (2n+1)! \sigma_x} \int_0^{\infty} H_{2n+1}(\dot{x}^0) \exp\left\{-\frac{\dot{x}^{0*}}{2}\right\} d\dot{x} = \frac{1}{2} a_{2n+1}^*; \quad (2.103)$$

a_{2n+1}^* — коэффициенты разложения в ряд однозначной нелинейности типа идеального реле. Эти коэффициенты постоянны и не зависят от статистических свойств входного процесса;

$$\begin{aligned} a_i^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i!} \sigma_x} \int_{-\infty}^0 f(x + \Delta) H_i(x - x^0) \exp\left\{-\frac{x^{0*}}{2}\right\} dx = \\ &= a_i(m_x + \Delta, \sigma_x); \\ a_i^{(2)} &= a_i(m_x - \Delta, \sigma_x); \end{aligned}$$

a_i — коэффициенты разложения функции $f(x)$.

При $\Delta = 0$ нелинейная характеристика однозначна. Легко видеть, что в этом случае все коэффициенты, кроме a_{i0} , обращаются в нуль. А коэффициенты a_{i0} совпадают с коэффициентами разложения $f(x)$. Выражение (2.98) можно значительно упростить, исходя из следующих соображений. Для нормированных корреляционных функций всегда имеют место соотношения:

$$\varrho_{xx}(\tau) \leq 1; \quad \varrho_{x\dot{x}}(\tau) < 1; \quad \varrho_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) \leq 1.$$

Поэтому члены ряда (2.98) быстро убывают с увеличением i, j, k и l . Кроме того, при $\tau=0$, когда значения автокорреляционных функций максимальны, кросскорреляционные функции $q_{xx}(\tau)$ и $q_{xx}(\tau)$ равны нулю, и наоборот, кросскорреляционные функции достигают наибольших значений при таких τ , при которых автокорреляционные функции уже незначительны. Вследствие этого вес слагаемых в сумме (2.98), содержащих произведения кросс- и автокорреляционных функций, будет несущественным. Если этими слагаемыми пренебречь, то, принимая во внимание (2.102), формулу (2.98) можно записать в следующем виде:

$$R_{yy}(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} i! [a_{i,0}^2 + a_{i,1}^2 q_{xx}(\tau) + 3! a_{i,3}^2 \times \\ \times q_{xx}^3(\tau) + 5! a_{i,5}^2 q_{xx}^5(\tau) + \dots] q_{xx}^i(\tau). \quad (2.104)$$

На основании этой формулы может быть получена эквивалентная передаточная функция неоднозначного нелинейного элемента. Она определяется следующим образом:

$$k(j\omega)k(-j\omega) = \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1; n=0}^{\infty} i! (2n+1)! a_{i,2n+1}^2 \frac{s_{i,2n+1}(\omega)}{s_{1,0}(\omega)}, \quad (2.105)$$

где $s_{ik}(\omega) \doteq q_{xx}^i(\tau) q_{xx}^k(\tau)$.

В выражениях (2.104) и (2.105) коэффициенты $a_{i,2n+1}^2$ при изменении n изменяются пропорционально квадрату коэффициентов b_{2n+1} (это следует из формулы (2.102)). Вычисление по формуле (2.103) дает

$$b_1^2 = 0,16; \quad b_3^2 = -0,004; \quad b_5^2 = 0,0001.$$

Отсюда видно, что для приближенных расчетов можно учитывать лишь два, а иногда и одно первое слагаемое в квадратных скобках выражения (2.104). В последнем случае эквивалентная передаточная функция определяется следующим соотношением:

$$k(j\omega)k(-j\omega) = \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^{\infty} i! a_{i0}^2 \frac{s_{i0}(\omega)}{s_{10}(\omega)}.$$

2.9. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Полученные в предыдущих разделах соотношения для статистических моментов процессов на выходе многомерных нелинейных преобразований непосредственно могут быть использованы

для исследования замкнутых динамических систем, содержащих стохастические нелинейности, при условии, что процессы в этих системах эффективно нормализуются линейной частью. Однако практическое применение этих соотношений сопряжено с определенными вычислительными трудностями. Часто требования, предъявляемые к точности вычислений, или специфика самой задачи позволяют исходное нелинейное преобразование заменить более простым преобразованием, в некотором смысле эквивалентным исходному. На этом принципе основаны известные методы статистической линеаризации, состоящие в замене нелинейного преобразования эквивалентным линейным.

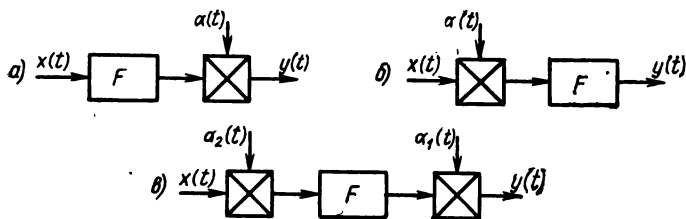


Рис. 2.10. Структурные представления стохастических нелинейных преобразований

Непосредственное применение статистической линеаризации к стохастическим нелинейностям недопустимо, так как в ряде случаев оно может привести к результатам, не соответствующим даже качественной картине процесса управления. Дело в том, что системы, содержащие стохастические нелинейности, по своей сущности являются параметрическими. Действительно, элемент со случайными свойствами можно представить различными сочетаниями блоков умножения и детерминированных нелинейностей. Например, стохастическое преобразование вида (2.70) можно представить следующей цепочкой (рис. 2.10, а). Аналогичные цепочки для нелинейностей вида (2.71) и (2.72) приведены на рис. 2.10, б и в. Таким образом, характерным для систем, содержащих стохастические нелинейности, является наличие в их структуре блоков умножения. Вследствие этого им присущи все специфические свойства параметрических систем, такие как явление параметрического резонанса и различные модуляционные явления, обуславливающие появление дополнительных ошибок системы [6].

При линеаризации нелинейной зависимости исключается всякая возможность учета параметрических явлений. Чтобы сохранить параметрическую сущность задачи, систему, в статистическом смысле эквивалентную исходной нелинейной, в данном случае следует искать в классе линейных параметрических систем. Другими словами, преобразование, аппроксимирующее исходную стохастическую нелинейность, следует искать не в

классе линейных преобразований, а в классе преобразований вида

$$u = \varphi_0 + k_1 \alpha^0 + k_2 x^0 + k_3 \alpha^0 x^0 \quad (2.106)$$

для стохастических преобразований (2.70) и (2.71) и

$$u = \varphi_0 + k_1 \alpha_1^0 + k_2 \alpha_2^0 + k_3 x^0 + k_4 \alpha_1^0 \alpha_2^0 + k_5 \alpha_1^0 x^0 + k_6 \alpha_2^0 x^0 \quad (2.107)$$

для преобразований (2.72). Здесь α^0 , α_1^0 , α_2^0 — центрированные параметрические возмущения (нагрузка на валу, момент сухого трения и т. д.); x^0 — центрированный входной сигнал.

Аппроксимацию типа (2.106) и (2.107) в дальнейшем будем называть параметрической аппроксимацией стохастической нелинейности. Задача построения аппроксимирующего преобразования сводится к определению коэффициентов передачи φ_0 , k_1 , k_2 и т. д., обеспечивающих при заданных статистических характеристиках входа и параметрических возмущений выполнение следующего условия:

$$\sigma_\varepsilon^2 = M \{ [y(t) - u(t)]^2 \} = \min. \quad (2.108)$$

Нетрудно видеть, что преобразование

$$u = a_{00} + a_{10} G_{10}(x, \alpha) + a_{01} G_{01}(x, \alpha) + a_{11} G_{11}(x, \alpha)$$

принадлежит к классу преобразований вида (2.106). В соответствии с изложенным в разд. 2.7 коэффициенты, удовлетворяющие условию (2.108), определяются следующими выражениями:

$$a_{00} = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \varrho^2 \sigma_x \sigma_\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \alpha) \exp \left\{ -\frac{x^{02} + \alpha^{02} - 2\varrho x^0 \alpha^0}{2(1 - \varrho^2)} \right\} dx d\alpha;$$

$$a_{10} = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \varrho^2 \sigma_x \sigma_\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \alpha) H_{10}(x^0, \alpha^0) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{x^{02} + \alpha^{02} - 2\varrho x^0 \alpha^0}{2(1 - \varrho^2)} \right\} dx d\alpha;$$

$$a_{01} = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \varrho^2 \sigma_x \sigma_\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \alpha) H_{01}(x^0, \alpha^0) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{x^{02} + \alpha^{02} - 2\varrho x^0 \alpha^0}{2(1 - \varrho^2)} \right\} dx d\alpha;$$

$$a_{11} = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \varrho^2 \sigma_x \sigma_\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \alpha) \frac{G_{11}(x^0, \alpha^0)}{1 + \varrho^2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{x^{02} + \alpha^{02} - 2\varrho x^0 \alpha^0}{2(1 - \varrho^2)} \right\} dx d\alpha.$$

Таким образом, для того чтобы осуществить параметрическую аппроксимацию стохастической нелинейности, достаточно в ее ортогональном представлении учесть лишь четыре первых члена.

Параметрическая аппроксимация означает замену нелинейного элемента со случайными свойствами эквивалентным в смысле минимума среднего квадрата ошибки линейным звеном со случайным коэффициентом усиления (рис. 2.11). Параметры a_{00} , a_{01} , a_{11} эквивалентного звена зависят от статистических характеристик входных процессов $x(t)$ и $\alpha(t)$. Наличие этой зависимости позволяет уловить существенно нелинейные особенности преобразования.

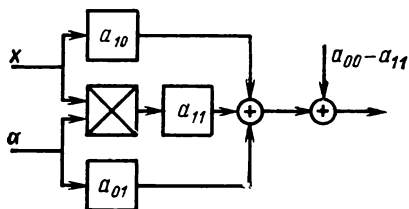


Рис. 2.11. Эквивалентное линейное стохастическое звено

Применение параметрической аппроксимации стохастического нелинейного преобразования сводит задачу анализа исходной нелинейной системы к рассмотрению эквивалентной линейной системы со случайными параметрами [6].

2.10. АНАЛИЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ РАЗБРОСОВ ПАРАМЕТРОВ*

Неизбежные технологические ошибки производства приводят к тому, что значения параметров реальных систем всегда отличны от их номинальных значений, выбранных в процессе проектирования. Технологические разбросы параметров обуславливают различие выходных характеристик (показателей точности, устойчивости, надежности и т. д.) для различных экземпляров однотипных систем. В связи с этим возникает необходимость рассмотрения выходных характеристик всей совокупности систем, получаемых в результате одного производственного процесса, и оценки влияния технологического разброса параметров на эти характеристики.

Возможность подобных оценок является весьма важной при проектировании систем, поскольку позволяет обоснованно подойти к задаче назначения допустимых разбросов на параметры системы, исходя из требований к ее выходным характеристикам.

Уменьшение поля допусков для гарантии заданного качества системы неизбежно влечет за собой неоправданные экономические затраты (более точное и дорогое оборудование, более сложную конструкцию элементов, организацию более сложного технологического процесса и т. д.). С другой стороны, не обос-

* При написании разд. 2.10 и 2.11 использованы материалы, предоставленные авторам инж. Ж. В. Бовиной.

нованное расчетом ослабление требований к точности производства приводит к снижению надежности системы и ухудшению качества ее функционирования.

Причины, вызывающие технологические ошибки производства, весьма разнообразны и случайны по своей природе, поэтому и сами ошибки, выражающиеся в отклонениях значений параметров от их номиналов, также носят случайный характер. Таким образом, оценивая качество функционирования совокупности однотипных систем, исследователь имеет дело с множеством систем, параметры которых случайным образом распределены в пределах полей допусков.

Похожая картина имеет место и при флуктуациях параметров, обусловленных износом, старением, изменениями в процессе длительного хранения и т. д.

Исчерпывающей характеристикой случайных ошибок производства так же, как и всякой случайной последовательности, являются законы распределения параметров внутри полей допусков. С теоретической и практической точек зрения наиболее правильным является задание отклонений, допускаемых по точностным и конструктивным соображениям, именно в виде требуемого распределения, а не только в виде интервала их возможных значений. Дело в том, что влияние разброса параметров на качество функционирования совокупности систем нельзя характеризовать лишь величиной этого разброса. Например, естественно предположить, что при одинаковых допусках множество систем, параметры которых сосредоточены в центре поля допуска, будет обладать иными точностными характеристиками, чем аналогичное множество, фактические значения параметров которого сосредоточены у границ поля допуска. Поэтому, для того чтобы получить правильную оценку влияния технологических ошибок на качество функционирования системы, необходимо знать законы распределения этих ошибок. Характер этих законов однозначно определяется видом и качеством технологического процесса [2].

Как показывают исследования, в подавляющем большинстве случаев, когда технологический процесс отлажен и выполняется хорошо, ошибки производства подчиняются нормальному закону распределения. В том случае, когда помимо многих, трудно устранимых, но малых по своей значимости причин, вызывающих погрешности, имеются некие доминирующие систематические погрешности, закон распределения ошибок в большей или меньшей степени может отличаться от нормального.

Можно назвать целый ряд факторов, приводящих к всевозможным искажениям (по сравнению с гауссовыми) законов распределения погрешностей. Это эксцентриситет и биение станков, колебания параметров технологического процесса, смешение нескольких партий однотипных элементов с разными характеристиками разбросов и т. д.

Истинные кривые распределения погрешностей производства могут быть получены лишь на основании статистических данных, которые имеются на любом современном предприятии. В ряде случаев (это относится в основном к этапу проектирования системы, когда статистические данные о разбросах параметров отсутствуют) подробный анализ технологического процесса позволяет построить так называемые теоретические кривые распределения погрешностей, которыми можно достаточно хорошо аппроксимировать истинные распределения параметров в пределах полей допусков [2].

Задача статистического анализа систем управления в условиях случайного технологического разброса параметров заключается в вычислении некоторых показателей, характеризующих качество функционирования всей совокупности этих систем, и в получении зависимости показателей качества от характеристик разбросов.

Пусть динамику системы автоматического управления можно описать дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\dot{x} = \varphi(x, \beta, g, t); t \in [\tau, T]; \quad (2.109)$$

$$x(t)|_{t=\tau} = x(\tau),$$

где $x(t) = \|x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\|_{1 \times n}$ — вектор состояния системы;

$\beta = \|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l\|_{1 \times l}$ — вектор параметров системы, подверженных технологическому разбросу;

$g(t) = \|g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)\|_{1 \times n}$ — векторный процесс, моделирующий внешние воздействия;

$\varphi = \|\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\|_{1 \times n}$ — нелинейная вектор-функция;

$x(\tau) = \|x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau)\|_{1 \times n}$ — вектор начального состояния системы.

Указанная совокупность систем управления образуется множеством реализаций вектора β внутри области допустимых значений параметров. Поскольку вектор параметров β входит в правую часть системы (2.109) нелинейно, то в самом общем случае можно считать, что его компоненты являются независимыми, распределенными по нормальному закону, случайными величинами.

Будем исходить из того, что наиболее полной характеристикой качества системы наведения может служить вероятность попадания вектора состояния $x(t)$ (или отдельных его компонент) в заданную область для произвольно выбранного момента времени. Величина вероятности попадания зависит от статистических характеристик внешних воздействий и от значений вектора параметров β . Считаем, что условия применения, т. е.

статистические характеристики векторов начального состояния системы и внешних воздействий, являются одинаковыми для всей совокупности рассматриваемых систем. Тогда каждой реализации вектора β , т. е. каждому конкретному экземпляру системы соответствует определенное значение вероятности попадания. Эти значения образуют случайное множество, статистические характеристики которого могут быть использованы для оценки качества функционирования всей совокупности систем и для оценки «ожидаемого» качества каждого конкретного экземпляра системы. Таким образом, рассматриваемая задача анализа сводится к исследованию статистических свойств решения системы (2.109) со случайными параметрами.

В настоящее время не существует методов, позволяющих в явном аналитическом виде вычислить вероятность попадания или закон распределения вектора фазовых координат системы общего вида. Однако в ряде важных для приложений случаев удастся получить приближенные решения как для линейных, так и для нелинейных систем управления. В частности, весьма эффективным методом исследования системы (2.109) в случае, когда компоненты вектора внешних воздействий $g(t)$ — детерминированные функции, является интерполяционный метод [7]. Сущность этого метода заключается в следующем.

Решение системы (2.109), т. е. вектор состояния $x(t)$ при детерминированном векторе $g(t)$ представляет собой некоторую также детерминированную функцию времени, зависящую от компонент случайного вектора параметров β .

Предположим, что необходимо вычислить некоторую статистическую характеристику вектора состояния, например,

$$F = M[f(x)] = \int_B f[x(\beta)] p(\beta) d\beta, \quad (2.110)$$

где интегрирование ведется по всей области B возможных значений вектора β , а $p(\beta)$ — плотность вероятности β .

В частности, если

$$f(x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} \left[1 - \frac{x_i - a_i^*}{|x_i - a_i|} \right],$$

то

$$F = P[x_1 < a_1, x_2 < a_2, \dots, x_n < a_n],$$

т. е. F определяет интегральный закон вероятности вектора состояния x . Это следует из того, что функция $f(x)$ принимает значения или 1, или 0 в зависимости от выполнения или невыполнения условий

$$x_i < a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для вычисления кратного интеграла (2.110) используется интерполяционный метод [7]. В результате чего получим приб-

лиженное выражение для искомой характеристики в следующем виде:

$$F \approx \sum_{k_1, k_2, \dots, k_l} f [x(\beta^{k_1, k_2, \dots, k_l})] Q_{k_1, k_2, \dots, k_l}, \quad (2.111)$$

где $\beta^{k_1, k_2, \dots, k_l} = (\beta_1^{k_1}, \beta_2^{k_2}, \dots, \beta_l^{k_l})$ — узловая точка интерполирования; $Q_{k_1, k_2, \dots, k_l}$ — числа Кристоффеля.

Числа Кристоффеля зависят от значений вектора β в узловой точке и вычисляются следующим образом:

$$Q_{k_1, k_2, \dots, k_l} = \int_B p(\beta) \prod_{j=1}^l \frac{\omega_{q_j}(\beta_j)}{\omega_{q_j}(\beta_j^{k_j}) (\beta_j - \beta_j^{k_j})} d\beta_j;$$

здесь

$$\omega_{q_j}(\beta_j) = (\beta_j - \beta_j^1) (\beta_j - \beta_j^2) \dots (\beta_j - \beta_j^{q_j})$$

есть полином степени q_i относительно β_j ,

$$k_i = 1, 2, \dots, q_i, i = 1, 2, \dots, l.$$

Обоснование и оценка интерполяционного метода подробно рассматриваться здесь не будут. Достаточно полное изложение этих вопросов дано в книге В. М. Чернецкого [7]. Отметим только, что точность интерполяционной формулы (2.111) существенно зависит от количества и выбора узлов интерполирования. Из формулы (2.111) следует, что искомые статические характеристики могут быть выражены через значения вектора состояния, соответствующие фиксированным значениям вектора β . Иначе говоря, поставленная задача решается путем интегрирования системы (2.109) при вполне определенных величинах параметров, равных их значениям в узлах интерполирования.

Общее количество узлов интерполирования, а следовательно, и количество необходимых интегрирований системы равно

$$N = \prod_{i=1}^l q_i.$$

Оно зависит от того, с какой точностью требуется вычислять интеграл (2.110), и от количества случайных параметров в системе. Несмотря на то, что интерполяционные формулы обладают очень хорошей сходимостью, при большой размерности вектора β объем вычислительной работы весьма значителен. По этой причине интерполяционный метод практически не может быть использован, когда среди компонент вектора воздействий $g(t)$ имеются случайные функции времени. Принципиально путем канонических или неканонических разложений случайных функций задачу можно свести к рассмотренной [7]. Однако ис-

пользование канонических разложений существенно увеличивает размерность вектора β , а неканонические разложения, из-за того, что они не обеспечивают совпадения законов распределения исходной и аппроксимирующей функций, вносят в метод погрешности, которые невозможно учесть.

Ниже будет изложен способ, который позволяет решать задачу статистического анализа системы (2.109) при случайных воздействиях, не прибегая к каноническим или неканоническим разложениям.

Пусть вновь требуется вычислить некие статистические характеристики вектора состояния системы

$$F = M[f(x)].$$

Если известен совместный закон распределения вектора состояний и случайных параметров $p(x, \beta)$, то для вычисления F имеем следующее выражение:

$$F = \int_B \int_{\Omega} f(x) p(x, \beta) dx d\beta,$$

где Ω — некоторая область пространства состояний системы.

Воспользуемся известной формулой теории вероятностей

$$p(x, \beta) = p(x/\beta) p(\beta),$$

где $p(x/\beta)$ — условный закон распределения.

В результате интеграл преобразуется в следующий

$$F = \int_B \left[\int_{\Omega} f(x) p(x/\beta) dx \right] p(\beta) d\beta. \quad (2.112)$$

Очевидно, что внутренний интеграл определяет условную статистическую характеристику вектора состояния. Обозначим ее через $F_x(\beta)$, тогда

$$F = \int_B F_x(\beta) p(\beta) d\beta.$$

Если для B вычисления этого интеграла использовать интерполяционный метод, то окончательное выражение для искомой характеристики F будет иметь вид

$$F \approx \sum_{k_1, k_2, \dots, k_l} F_x(\beta^{k_1, k_2, \dots, k_l}) Q_{k_1, k_2, \dots, k_l}. \quad (2.113)$$

Таким образом, задача свелась к вычислениям условных статистических характеристик вектора состояния при значениях параметров, соответствующих узловым точкам интерполирования. Эти вычисления в зависимости от конкретной формы системы уравнений (2.109) могут быть осуществлены теми или иными

методами статистического анализа систем с детерминированными параметрами.

В частности, если система (2.109) линейна, то она может быть записана в следующей форме:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bg(t); \\ y(t) &= Cx(t); \quad x(0) = x_0,\end{aligned}\tag{2.114}$$

где x — n -мерный вектор состояния системы; g — n -мерный вектор управлений; y — m -мерный вектор выхода;

$A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$ и $B = \|b_{ij}\|_{n \times n}$ — матрицы коэффициентов; $C = \|c_{ij}\|_{m \times n}$ — детерминированная постоянная матрица.

Относительно коэффициентов системы a_{ij} и b_{ij} будем предполагать, что они нелинейно зависят от компонент нормально распределенной векторной случайной величины β (вектор параметров):

$$a_{ij} = a_{ij}(\beta, t); \quad b_{ij} = b_{ij}(\beta, t), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Вектор управлений представляет собой сумму детерминированной $g^0(t)$ и случайной $g^*(t)$ составляющих:

$$g(t) = g^0(t) + g^*(t).$$

Без ограничения общности можно считать, что компоненты $g^*(t)$ — независимые белые шумы со следующими характеристиками:

$$M[g^*(t)] = 0 \quad \Gamma(t_1, t_2) = M[g^*(t_1)g^{*\tau}(t_2)] = \delta(t_1 - t_2)I,$$

где $\delta(t)$ — δ -функция; I — единичная матрица $n \times n$.

Как известно, полный статистический анализ линейных систем с детерминированными параметрами состоит в вычислении математического ожидания и корреляционной матрицы, зная которые, можно определить любые статистические характеристики вектора выхода.

Поэтому любая условная характеристика выхода системы (2.114) может быть найдена, если известны его условные математическое ожидание и корреляционная матрица. Часто для этого достаточно знать условное математическое ожидание и матрицу условных дисперсий. Введем следующие обозначения:

$\mu_y = M[y/\beta]$, $\mu_x = M[x/\beta]$ — условные математические ожидания;

$$\sum_{yy} = M[(y - \mu_y)(y - \mu_y)^{\tau}/\beta], \quad \sum_{xx} = M[(x - \mu_x)(x - \mu_x)^{\tau}/\beta] -$$

— матрицы условных дисперсий.

Уравнения, необходимые для вычисления условных моментов вектора состояния, можно получить непосредственно из системы (2.114).

Осредняя правые и левые части (2.114), получим систему уравнений для условных математических ожиданий

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_x &= A\mu_x + Bg^0; \\ \mu_y &= C\mu_x; \mu(0) = x_0.\end{aligned}\quad (2.115)$$

Для случайной составляющей вектора состояния $x^* = x - \mu_x$ имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}^* &= Ax^* + Bg^*; \\ x^*(t_0) &= 0.\end{aligned}\quad (2.116)$$

Используя правила дифференцирования произведения, можем написать

$$\frac{d}{dt}(x^* x^{*\tau}) = \dot{x}^* x^{*\tau} + x^* \dot{x}^{*\tau}.$$

Транспонированный вектор состояния подчиняется следующей системе уравнений:

$$\dot{x}^\tau = x^\tau A^\tau + g^\tau B^\tau.$$

В результате получим

$$\frac{d}{dt}(x^* x^{*\tau}) = Ax^* x^{*\tau} + Bg^* x^{*\tau} + x^* x^{*\tau} A^\tau + x^* g^{*\tau} B^\tau. \quad (2.117)$$

Решение линейной системы (2.116) имеет следующий вид:

$$x^*(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) Bg(\tau) d\tau;$$

здесь $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица состояний системы; она удовлетворяет условию $\Phi(t_0, t_0) = I$. (2.118)

Используя эту формулу, преобразуем последнее слагаемое в выражении (2.117)

$$x^* g^{*\tau} B^\tau = \int_{t_0}^t \Phi(t, T) Bg^*(\tau) g^{*\tau}(t) B^\tau d\tau.$$

Для транспонированной случайной составляющей имеем

$$x^{*\tau}(t) = \int_{t_0}^t g^{*\tau}(\tau) B^\tau \Phi^\tau(t, \tau) d\tau.$$

Отсюда находим

$$Bg^* x^{*\tau} = \int_{t_0}^t Bg^*(t) g^{*\tau}(\tau) B^\tau \Phi^\tau(t, \tau) d\tau.$$

Полученные формулы позволяют написать

$$\frac{d}{dt}(x^*, x^{*\tau}) = A(x^*, x^{*\tau}) + (x^*, x^{*\tau})A^{\tau} + \\ + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B g^*(\tau) g^{*\tau}(t) B^{\tau} d\tau + \int_{t_0}^t B g^*(t) g^{*\tau}(\tau) B^{\tau} \Phi^{\tau}(t, \tau) d\tau.$$

Осреднив правую и левую части последнего выражения, получим

$$\begin{aligned} \Sigma_{xx}(t) = A \Sigma_{xx}(t) + \Sigma_{xx}(t) A^{\tau} + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B \Gamma \times \\ \times (t, \tau) B^{\tau} d\tau + \int_{t_0}^t B \Gamma(\tau, t) B^{\tau} \Phi^{\tau}(t, \tau) d\tau = A \Sigma_{xx} \times \\ \times (t) + \Sigma_{xx}(t) A^{\tau} + \int_{t_0}^t \delta(t - \tau) \Phi(t, \tau) B B^{\tau} d\tau + \\ + \int_{t_0}^t B B^{\tau} \delta(\tau - t) \Phi^{\tau}(t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Откуда, учитывая свойства δ функций, а также свойство (2.118) переходной матрицы, получим систему дифференциальных уравнений для матрицы условных дисперсий вектора состояния и вектора выхода

$$\begin{aligned} \Sigma_{xx}(t) = A \Sigma_{xx}(t) + \Sigma_{xx}(t) A^{\tau} + B B^{\tau}; \\ \Sigma_{yy}(t) = C \Sigma_{xx}(t) C^{\tau}; \quad \Sigma_{xx}(t_0) = 0. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Эта система имеет порядок n^2 , однако вследствие симметричности матрицы Σ_{xx} порядок может быть понижен до $\frac{n(n+1)}{2}$.

Интегрирование систем (2.115) и (2.119) позволяет найти статистические моменты выхода, по которым определяются искомые условные статистические характеристики. Вычисление абсолютных характеристик производится согласно формуле (2.115).

Для рассматриваемых линейных систем со случайным разбросом параметров может быть поставлена наиболее общая задача статистического анализа, а именно задача вычисления закона распределения вектора выхода.

Закон распределения вектора выхода выражается через условный закон распределения вектора выхода и закон распределения вектора параметров следующим образом

$$p(y) = \int_B p(y/\beta) p(\beta) d\beta, \quad (2.120)$$

где $p(y/\beta)$ — условный закон распределения.

В линейных системах, очевидно, условный закон распределения является нормальным и полностью определяется условными математическим ожиданием и дисперсией:

$$p(y/\beta) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \left| \sum \right|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (y - \mu_y)^T \sum_{yy}^{-1} (y - \mu_y) \right].$$

Если для вычисления интеграла (2.120) применить интерполяционные формулы, то задача сведется к интегрированию в узловых точках систем моментных дифференциальных уравнений (2.15) и (2.119).

Зная закон распределения, нетрудно вычислить вероятность попадания координаты вектора выхода в заданную область.

Излагаемый метод применим к анализу нелинейных систем в том случае, если для исследуемой системы каким-либо образом могут быть получены уравнения условных статистических моментов. Эти уравнения можно получить, используя, например, метод статистической линеаризации или метод вычисления сесмиинвариантов.

Для нелинейной системы, имеющей вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(t, x, \beta) + \sigma(t) g(t); \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

где $\sigma(t)$ — матрица $n \times n$, а случайные компоненты вектора воздействий $g(t)$ — некоррелированные белые шумы, используя гипотезу о нормальности закона распределения вектора состояния и осуществив многомерную статистическую линеаризацию нелинейностей, можно получить следующую систему условных моментных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_x}{dt} &= \varphi_0(t, \mu_x, \sum_{xx}) + \sigma(t) g^0(t), \quad \mu_x(0) = x_0; \\ \frac{d\sum_{xx}}{dt} &= \varphi_1(t, \mu_x, \sum_{xx}) \sum_{xx} + \sum_{xx} \varphi_1^T(t, \mu_x, \sum_{xx}) + \\ &+ \sigma(t) \sigma^T(t), \quad \sum_{xx}(0) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_0(t, \mu_x, \sum_{xx}) &= M[F(t, \dot{x}, \beta)/\beta]; \\ \varphi_1(t, \mu_x, \sum_{xx}) &= M[F(t, x, \beta) x^T] \sum_{xx}^{-1}. \end{aligned}$$

2.11. МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА НАСТРОЕК И ДОПУСКОВ НА ПАРАМЕТРЫ СИСТЕМ

Задача выбора оптимальных настроек и допусков на параметры систем автоматического управления возникает в связи с тем, что никакое производство не в состоянии изготовить систему, значения параметров которой в точности соответствовали бы запроектированным. Если система синтезирована оптимальным образом, но без учета неизбежного технологического разброса, то параметры каждого конкретного экземпляра этой системы будут отличаться от оптимальных. Следовательно, ошибки производства приведут к ухудшению качества функционирования системы. Поскольку значения параметров в пределах поля допуска являются случайными, то и отличия показателей качества отдельных систем от показателя качества оптимальной будут иметь случайный характер. В связи с этим возникает необходимость рассматривать характеристики качества всей совокупности систем, получаемых в результате одного производственного процесса и отличающихся друг от друга вследствие технологического разброса, параметров.

Устанавливая достаточно малые допуски, можно, разумеется, добиться малого изменения показателя качества каждого экземпляра системы, т. е. добиться близкого к оптимальному качества функционирования всей совокупности. Однако уменьшение поля допусков означает повышение требований к точности производства и всегда приводит к увеличению экономических затрат. Таким образом, с одной стороны, исходя из условий качества функционирования системы необходимо сужать поле допустимых разбросов параметров, с другой стороны, максимально расширять для снижения экономических затрат производства. Поэтому приходится искать компромиссное решение, которое в той или иной мере удовлетворяло этим двум требованиям.

Пусть динамика системы автоматического управления описывается системой дифференциальных уравнений (2.109). Совокупность систем будет порождаться совокупностью реализаций случайного вектора β . Предположим, что качество функционирования каждого конкретного экземпляра системы можно характеризовать некоторой векторной функцией

$$\psi(\beta) = (\psi_1(\beta), \psi_2(\beta), \dots, \psi_k(\beta)).$$

Компоненты вектора ψ представляют собой значения различных критериев качества системы, определяемых техническими условиями. Это могут быть показатели точности, устойчивости, надежности, и т. д. Тогда условия нормальной работы системы выражаются в виде неравенства

$$\psi(\beta) \geq a, \quad (2.121)$$

где $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ — вектор технических условий.

Можно потребовать, чтобы условия (2.121) выполнялись для всей совокупности систем с некоторой достоверной вероятностью P , в частности можно положить $P=1$. В этом случае в пространстве B_l параметров системы, подверженных технологическому разбросу, неравенства (2.121) выделяют некоторую область B , в пределах которой с вероятностью P должен находиться вектор β . Область B в дальнейшем будем называть областью работоспособности системы. Часто качество системы можно характеризовать обобщенным критерием качества $K(\beta)$, зависящим от компонент вектора ψ ,

$$K(\beta) = K \|\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k\|_{1 \times k}. \quad (2.122)$$

В частном случае $K(\beta)$ может иметь следующий вид:

$$K(\beta) = (\alpha, \psi) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \psi_i,$$

где α — весовой вектор, отражающий факт неравноценности показателей ψ_i .

При использовании обобщенного критерия $K(\beta)$ область работоспособности системы B задается неравенством

$$K(\beta) \geq c, \text{ где } c = \text{const.}$$

В условиях технологического разброса параметров значения показателей качества систем $\psi(\beta)$ и $K(\beta)$ будут случайными. В связи с этим показателем качества всей совокупности рассматриваемых систем $\bar{\psi}$ или $\bar{K}$ может служить некоторая статистическая характеристика случайных величин $\psi(\beta)$ или $K(\beta)$. Например, можно принять

$$\hat{\psi} = \min P \{ \psi_j(\beta) \geq a_j \}; \quad \hat{k} = P \{ K(\beta) \geq c \},$$

или $\hat{\psi} = M[\psi(\beta)]; \quad \hat{K} = M[K(\beta)]$ и т. д.

Назначить допуски на параметры системы, это значит в области B выделить некоторый брус, внутри которого с достоверной вероятностью $P_0 \leq P$ должны попадать все реализации вектора β .

Под номиналами параметров при симметричном распределении вектора β будем понимать координаты центра бруса $\beta_0 = \|\beta_{10}, \beta_{20}, \dots, \beta_{l0}\|_{1 \times l}$. При несимметричном распределении номинальные значения параметров будем определять как их математические ожидания $\beta_0 = M[\beta]$ и показатели качества являются функциями β_0, γ и λ .

Если поле допуска симметрично относительно номинала, то

$$\Delta_i = \delta_i = \lambda_i \beta_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (2.123)$$

Введем в рассмотрение функцию стоимости

$$C = C(\Delta, \delta).$$

Функция стоимости характеризует экономические затраты производства на выдерживание параметров в заданных полях допусков. Значения функции стоимости определяются технологическим процессом, который будем считать общим для всех экземпляров систем из рассматриваемой совокупности.

Вопрос нахождения зависимости функции стоимости от допусков чрезвычайно важен. Представим функцию стоимости системы как сумму стоимостей обеспечения отдельных параметров в пределах полей допусков:

$$C(\Delta, \delta) = \sum_{i=1}^l C_i(\Delta_i, \delta_i).$$

Вид функции $C_i(\Delta_i, \delta_i)$ существенно зависит от условий производства. Так, стоимость одного и того же элемента при одинаковой величине допуска различна в зависимости от технологии, квалификации рабочих, характера производства (серийное, массовое, конвейерное), оборудования и т. д. Только вся совокупность таких условий определяет вид функции $C_i(\Delta_i, \delta_i)$. Эту зависимость можно получить эмпирически.

Для определения стоимостей элементов массового производства (резисторов, конденсаторов и др.) можно использовать преysкуранные справочники.

Очевидно, что функция стоимости является невозрастающей функцией параметров Δ и δ , т. е.

$$\frac{\partial C(\Delta, \delta)}{\partial \Delta_i} \leq 0; \quad \frac{\partial C(\Delta, \delta)}{\partial \delta_i} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

причем функция $C(\Delta, \delta)$ должна быть положительной, кусочно-гладкой и удовлетворять условиям:

$$C_i(\Delta_i, \delta_i) \rightarrow \infty;$$

$$\Delta_i + \delta_i \rightarrow 0.$$

В дальнейшем в целях упрощения формулировок будем считать, что поля допусков являются симметричными относительно номиналов, и характеризовать допуск единственным параметром δ .

Из изложенного следует, что изменения допусков на параметры приводят к изменениям показателей качества функционирования системы и функции стоимости. Причем уменьшение допусков улучшает качество, но увеличивает экономические затраты на изготовление системы.

Это оправдывает постановку задач обоснованного выбора допусков на параметры отдельных элементов системы с целью

обеспечения наилучшего качества функционирования и уменьшения стоимости систем управления. С практической точки зрения наибольший интерес представляют следующие задачи.

1. Пусть величина поля допуска пропорциональна номиналу

$$\delta_i = \lambda_i \beta_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

причем значения параметров λ_i заданы. Определить значения номиналов β_{i0} , при которых показатель качества $\hat{K}$ достигает максимума.

Необходимость постановки задачи в таком виде объясняется следующим. Пусть значения параметров β_{i0}^0 обеспечивают максимум показателя качества системы K . Вследствие ошибок производства параметры реальных систем будут отличаться от β_{i0}^0 . Это значит, что показатель качества совокупности систем $\hat{K}$ будет меньше, чем K . Оказывается, что в условиях технологического разброса качество систем можно повысить, приблизив значение $\hat{K}$ к оптимальному K , если заранее задаться некоторыми смещениями значений параметров относительно номиналов

$$\beta_{i0} = \beta_{i0}^0 + \Delta \beta_{i0}^0.$$

2. Определить оптимальные значения номиналов параметров β_{i0} и допусков δ_i так, чтобы функция стоимости $C(\delta)$ достигала минимума, а показатель качества $K(\beta_0, \delta)$ удовлетворял ограничению $\hat{K}(\beta_0, \delta) \geq K_0$, где K_0 — некоторая постоянная.

3. Определить значения номиналов и параметров допусков, обеспечивающих максимум показателя качества $\hat{K}(\beta_0, \delta)$ при условии $C(\delta) \leq C_0$.

Перечисленные задачи весьма характерны, но они не охватывают всех задач, возникающих при проектировании систем управления в связи с выбором допусков на их параметры.

Необходимо обратить внимание на следующее. Технологический разброс параметров характеризуется не только величиной допусков, но и законами распределения внутри полей допусков. Поэтому задачи оптимизации могут быть решены лишь при условии, что характер распределения технологических разбросов известен заранее и что допуски δ_i могут быть выражены через статистические параметры этих распределений.

В основу методов решения экстремальных задач можно положить результаты предыдущего раздела. В этом случае задача выбора значений номиналов и допусков разбивается на три самостоятельных части, а именно: на задачу вычисления условных вероятностных характеристик, т. е. задачу статистического анализа систем с детерминированными параметрами; задачу вычисления кратных интегралов вида $\int_B K(\beta) p(\beta) d\beta$; задачу на-

хождения максимума функции многих переменных при ограничениях типа неравенств, т. е. задачу нелинейного программирования. Существуют различные методы решения этих задач, обладающие каждый своими достоинствами и недостатками. Объединение их в одну предъявляет свои требования к выбираемым методам. Остановимся кратко на особенностях сформулированных задач оптимизации.

Характерным для первой задачи так же, как, впрочем, и для остальных, являются большие вычислительные затраты для нахождения максимизируемой функции. Поэтому первостепенное значение имеет скорость сходимости используемого итерационного процесса оптимизации.

Наиболее быстросходящимся методом решения системы трансцендентных уравнений, получаемых из необходимых условий экстремума, является метод Ньютона. Для системы $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ итерационная схема имеет вид

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - A^{-1}(\vec{x}_n) \vec{F}(\vec{x}_n),$$

где

$$A(\vec{x}_n) = \left\| \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x^{(k)}} \right\|_{\vec{x} = \vec{x}_n}.$$

Необходимость на каждом шаге считать обратную матрицу, т. е. решать систему линейных алгебраических уравнений, является определенным недостатком метода Ньютона; впрочем, этот недостаток вполне окупается быстротой сходимости. Серьезной трудностью при применении метода Ньютона является необходимость попадания нулевого приближения в достаточно малую окрестность корня. Как показывают исследования [4], сходимость метода Ньютона обеспечивается лишь в этом случае. Для увеличения области притяжения корня применима модификация, уменьшающая, однако, скорость сходимости

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \kappa_n A^{-1}(\vec{x}_n) \vec{F}(\vec{x}_n),$$

где κ — скалярный множитель, не превосходящий единицы.

Однако решение задачи затрудняет наличие локальных экстремумов у максимизируемой функции. В этом случае значение удачного начального приближения особенно возрастает. Полезно также априорное представление о величине искомого максимума.

В большинстве случаев удачным начальным приближением является оптимальное значение вектора параметров, полученное из оптимизации системы с детерминированными параметрами ($\delta_i = 0, i = 1, 2, \dots, l$).

Если разбросы параметров подчиняются нормальному закону распределения, то для нахождения экстремума показателя качества $\hat{K}(\beta_0)$ целесообразно использовать методы, оперирующие с производными высших порядков.

В этом случае

$$p(\beta) = (2\pi)^{-\frac{l}{2}} \prod_{i=1}^l \sigma_i^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{i0} - \beta_i}{\sigma_i} \right)^2 \right\},$$

поэтому вычисление производных $\hat{K}$ не требует дополнительных интегрирований системы моментных уравнений. Действительно,

$$\begin{aligned} \hat{K} &= \int_B K(\beta) p(\beta) d\beta; \\ \frac{\partial \hat{K}}{\partial \beta_{i0}} &= \int_B K(\beta) \frac{\beta_{i0} - \beta_i}{\sigma_i^2} p(\beta) d\beta; \\ \frac{\partial^2 \hat{K}}{\partial \beta_{i0} \partial \beta_{j0}} &= \int_B K(\beta) \frac{(\beta_{i0} - \beta_i)(\beta_{j0} - \beta_j)}{\sigma_i^2 \sigma_j^2} p(\beta) d\beta \text{ и т. д.,} \end{aligned} \quad (2.124)$$

т. е. при вычислении производных используются значения $K(\beta)$ в тех же узлах, что и при вычислении самого показателя качества.

Перейдем ко второй задаче. В силу отмеченной монотонности функции стоимости ее минимум может быть лишь на границе, определяемой равенством $\hat{K}(\beta_0, \delta) = K_0$. Укажем на следующую важную особенность: минимизируемая функция зависит от l переменных, в то время как ограничение — от $2l$. Для каждого набора $\{\beta_{01}, \beta_{02}, \dots, \beta_{0l}\}$ минимум стоимости $C(\delta_1, \dots, \delta_l)$ будет, вообще говоря, различным и достигается при различных $\delta_1^*, \dots, \delta_l^*$. Иными словами, хотя $\frac{\partial C}{\partial \beta_{0i}} = 0$, но $\frac{dC}{d\beta_{0i}} \neq 0$.

Формальный выход таков: считаем C функцией n величин β_{0i} и решаем обычную задачу поиска относительного экстремума. Можно доказать, что в этом случае задача решается применением правила множителей Лагранжа. Относительный минимум $C(\delta)$ при условии $K(\beta_0, \delta) = K_0$ соответствует абсолютному экстремуму функции Лагранжа

$$\begin{aligned} L(\beta_{01}, \beta_{02}, \dots, \beta_{0l}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l) &= C(\delta_1, \dots, \delta_l) + \\ &+ q \{ \hat{K}(\beta_{01}, \dots, \beta_{0l}, \delta_1, \dots, \delta_l) - K_0 \}. \end{aligned}$$

Для нахождения экстремума по-прежнему наиболее предпочтительным является решение методом Ньютона системы уравнений, полученных из необходимых условий:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial \delta_i} + \varrho \frac{\partial \hat{K}}{\partial \delta_i} &= 0, \quad i=1, 2, \dots, l; \\ \frac{\partial \hat{K}}{\partial \beta_{01}} &= 0;\end{aligned}\tag{2.125}$$

$$\hat{K}(\beta_{01}, \dots, \beta_{0l}, \delta_1, \dots, \delta_l) = K_0.$$

Трудности, связанные с выбором нулевого приближения и сходимостью метода, те же, что и в предыдущей задаче.

Заметим, что точки недифференцируемости функции стоимости подозрительны на экстремум и требуют специального исследования.

Третья задача является типичной задачей нелинейного программирования. Из прямых методов наиболее часто в настоящее время применяются метод проектирования градиента и метод возможных направлений.

Остановимся несколько подробнее на задачах оптимизации применительно к системам, процессы в которых можно описать линейными дифференциальными уравнениями в форме (2.114). Как уже отмечалось, в достаточно общем случае компоненты вектора параметров, подверженных технологическому разбросу, можно считать независимыми величинами, распределенными по нормальному закону, т. е. можно положить, что

$$p(\beta) = (2\pi)^{-\frac{l}{2}} \prod_{i=1}^l \sigma_i^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{0i} - \beta_i}{\sigma_i} \right)^2 \right\}.$$

При этом параметр поля допуска принято выражать через средние квадратичные значения. Например, часто поле допусков задают следующими соотношениями:

$$\beta_{i0} - \gamma_i \sigma_i \leq \beta_i \leq \beta_{i0} + \gamma_i \sigma_i, \quad \gamma_i > 0, \quad i=1, 2, \dots, l,$$

т. е. полагают

$$\Delta_i = \gamma_i \sigma_i.$$

Задача оптимизации в этом случае заключается в определении оптимальных значений математического ожидания и среднего квадратичного отклонения вектора.

Производные нормальной плотности распределения по математическому ожиданию и среднему квадратичному отклонению представляют собой произведения некоторых полиномов на ту же самую плотность. Это позволяет получить удобные для организации итерационного процесса выражения для соответст-

вующих производных показателя качества. В частности, наряду с формулами (2.124) нетрудно получить следующие:

$$\frac{\partial \hat{K}}{\partial \sigma_i} = \int_B K(\beta) \frac{\partial p(\beta)}{\partial \sigma_i} d\beta = \int_B K(\beta) \frac{(\beta_i - B_{i0})^2 - \sigma_i^2}{\sigma_i^3} p(\beta) d\beta.$$

В результате, например, для второй задачи необходимые условия оптимальности (2.125) могут быть записаны в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \sigma_i} + \varrho \int_B K(\beta) \frac{(\beta_i - \beta_{i0})^2 - \sigma_i^2}{\sigma_i^3} p(\beta) d\beta &= 0; \\ \int_B K(\beta) \frac{\beta_{i0} - \beta_i}{\sigma_i^2} p(\beta) d\beta &= 0; \\ \int_B K(\beta) p(\beta) d\beta &= K_0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Решая первую задачу оптимизации, следует считать, что в этом случае средние квадратичные отклонения пропорциональны математическим ожиданиям

$$\sigma_i = \frac{\lambda_i \beta_{i0}}{\gamma_i},$$

поэтому плотность распределения вектора параметров будет зависеть только от математических ожиданий

$$p(\beta) = (2\pi)^{-\frac{l}{2}} \prod_{i=1}^l \frac{\gamma_i}{\lambda_i \beta_{i0}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\gamma_i^2}{\lambda_i^2} \left(\frac{\beta_i - \beta_{0i}}{\beta_{0i}} \right)^2 \right\}.$$

При этом необходимые условия оптимальности имеют следующий вид:

$$\int_B K(\beta) \frac{\gamma_i \beta_i^2 - \gamma_i \beta_i \beta_{i0} - \lambda_i \beta_{0i}^2}{\lambda_i^2 \beta_{0i}^2} p(\beta) d\beta = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (2.127)$$

Системы уравнений (2.126), или (2.127) целесообразно решать методом Ньютона, используя для вычисления интегралов интерполяционные формулы. Значения условных показателей качества в узловых точках интерполирования находятся путем интегрирования систем моментных уравнений (2.115) и (2.119).

ГЛАВА 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМ НАВЕДЕНИЯ

При проектировании систем управления современных ракет наблюдается тенденция к максимальному использованию всех возможностей ракеты.

Математическими моделями, которыми пользуются при этом, являются задачи «понтрягинского» типа, т. е. задачи оптимального управления, в которых объект описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (детерминированными или стохастическими), а на его фазовые координаты и управление наложены ограничения. Управляющее воздействие при этом чаще всего определяется как оператор от фазовых координат объекта [6].

На начальной стадии проектирования часто бывает необходимо на основании условий оптимальности и специфики рассматриваемой задачи провести исследования для получения сведений о свойствах и особенностях искомого оптимального управления. Такие сведения, которые описывают с точностью до параметров алгоритм определения управления, называют структурой оптимального управления.

Наиболее развитой математической теорией оптимального управления, позволяющей решать самые разнообразные задачи проектирования систем наведения, является принцип максимума. Основные математические результаты по принципу максимума изложены в работах [1, 5].

В настоящей главе показывается, как, используя результаты [1, 5], можно установить условия оптимальности управления в ряде стохастических задач с ограничениями и как на их основе строить синтез управления.

В разд. 3.1 дается краткое описание способа получения принципа максимума задач управления с ограничениями на управление и на фазовые координаты. Излагается схема Дубовицкого — Милютина [1, 4], как наиболее приспособленная к получению условий оптимальности в задачах с различными типами и

количествами ограничений на управление и фазовые координаты объекта.

В разд. 3.2 показывается, как в детерминированных задачах на основании условий оптимальности могут устанавливаться свойства искомого управления; находится структура оптимального по быстродействию управления разворотом ракеты с учетом ограничений, свойственных рулевому тракту.

Построение законов управления с учетом случайных воздействий требует предварительной работы по установлению на основе принципа максимума условий оптимальности (разд. 3.3) и преобразованию их к виду (разд. 3.4), удобному для построения управления. Использование этих результатов для построения синтеза управления демонстрируется на двух примерах в разд. 3.5. В первом примере (наведение ракеты на маневрирующую цель с учетом ограничений на угол подхода) подробно описывается способ установления структуры управления, но определяются только общие свойства оптимального управления, а параметры его структуры не устанавливаются. Во втором примере (наведение ракеты на маневрирующую цель с учетом ограничений на запас топлива, предназначенного для управления) процесс определения структуры управления описан концептивно. Основное внимание в примере уделено методу получения параметров структуры.

Рассмотренные примеры указывают метод определения структуры законов управления.

3.1. МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ

Кратко изложим, следуя работам А. Я. Дубовицкого и А. А. Милютина, схему получения необходимых условий оптимальности управления в детерминированных задачах с целью использования этих методов и для стохастических задач управления. Покажем особенности метода Дубовицкого — Милютина на примере разбираемой в разд. 3.2 задачи «рулевого тракта».

Летательный аппарат необходимо развернуть на заданный угол за минимальное время. Рулевой тракт выбран так, что ограничения по угловой скорости отклонения руля и по углу его отклонения являются на таком развороте существенными. Кроме того, важно при развороте не нарушить прочностные ограничения на рули (силовая нагрузка на руль должна быть меньше допустимой). Эта задача сводится к следующей задаче оптимального управления [1, 4]. Объект описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(t), t), \quad x(0) = x^0, \quad x(1) = x^1,$$

где $x(t)$ — фазовое состояние объекта в момент времени t ;

$u(t)$ — управление,

и системой ограничений:

$\varphi(u) \leq 0$ — ограничение типа неравенства на управление;

$g(x) \leq 0$ — ограничение типа неравенства на фазовые координаты*.

Необходимо выбрать среди допустимого класса функций $u(t)$ функцию $u^0(t)$, чтобы функционал

$$J(u(t), x(t)) = \int_0^1 F(x(t), u(t)) dt$$

принимал минимальное значение.

Рассмотрим пару функций $u(t)$, $x(t)$. Среди всех таких пар найдем такую $u^0(t)$, $x^0(t)$, которая удовлетворяет всем ограничениям задачи и обеспечивает минимум функционала $J(u(t), x(t))$.

Найдем необходимые условия оптимальности пары функций $u^0(t)$, $x^0(t)$. Следуя классическому методу, будем сравнивать значения функционала J на всех функциях вида

$$u^0(t) + \varepsilon \delta u(t), \quad x^0(t) + \varepsilon \delta x(t),$$

обеспечивающих для достаточно малого ε выполнение всех ограничений задачи.

При этом в отличие от классического метода производится вначале изолированное определение множества $\{\delta u(t), \delta x(t)\}$, на котором при достаточно малом ε выполняется данное ограничение. Функционал, который минимизируется в задаче, для однотипности рассмотрения также представляется в виде ограничения типа неравенства

$$J(u^0(t) + \varepsilon \delta u(t), x^0(t) + \varepsilon \delta x(t)) \leq 0.$$

Множества $\{\delta u(t), \delta x(t)\}$, отвечающие соответствующим ограничениям задачи, имеют вид

$$1) \Omega_x = \left\{ \delta x(t), \delta u(t) : \frac{d\delta x}{dt} = f_x^0 \delta x + f_u^0 \delta u, \delta x(0) = 0 \right\};$$

это множество описывается в виде, включающем информацию об оптимальной паре $u^0(t)$, $x^0(t)$; так как производные $f_x^0 = \frac{\partial}{\partial x} f(x(t), u(t), t)$ и $f_u^0 = \frac{\partial}{\partial u} f(x(t), u(t), t)$ берутся на оптимальной паре;

$$2) \Omega_{x(1)} = \{\delta x(t), \delta u(t) : \delta x(1) = 0\};$$

$$3) \Omega_\varphi = \{\delta x(t), \delta u(t) : \varphi(u^0(t)) + \varepsilon \varphi_u^0 \delta u < -\delta\},$$

* Задача включает в себя только ограничения типа неравенства несмещенного типа. Теория Дубовицкого — Милютина касается более широкого круга задач.

где $\delta > 0$ и производная $\varphi_u^0 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ берется на оптимальной паре;

$$4) \Omega_g = \{\delta x(t), \delta u(t) : g(x^0) + \varepsilon g_x^0 \delta x < -\delta\},$$

где $\delta > 0$ и производная $g_x^0 = \frac{dg}{dx}$ берется на оптимальной паре;

$$5) \Omega_f = \{\delta x(t), \delta u(t) : \int_0^1 (F_x^0 \delta x + F_u^0 \delta u) dt < 0\} - \text{множество}$$

запрещенных вариаций.

Объединение множеств Ω_x и $\Omega_{x(1)}$ обозначим

$$\Omega = \Omega_x \cap \Omega_{x(1)}.$$

Оптимальная пара должна обладать следующим свойством: не должно быть общего элемента у всех введенных множеств. В самом деле, наличие такого элемента было бы эквивалентно тому, что, не нарушая ограничений, можно было бы найти такую пару функций $u^0(t) + \varepsilon \delta u(t)$, $x^0(t) + \varepsilon \delta x(t)$, которая обеспечивала бы меньшее значение функционала.

В случае выпуклости введенных множеств (существование используемых производных предполагалось) можно воспользоваться следующей теоремой функционального анализа. Если введенные множества не пересекаются, то существуют такие линейные функционалы, определенные на пространстве функций $u(t)$, $x(t)$ и неотрицательные каждый на своем множестве вариаций, что их сумма (уравнение Эйлера) равна нулю на любом элементе пространства функций $x(t)$, $u(t)$.

Чтобы воспользоваться этой теоремой, необходимо уметь определять общий вид линейного функционала [1, 2, 4], неотрицательного на рассматриваемом множестве вариаций.

Общий вид линейного функционала, неотрицательного на множестве Ω_φ , можно установить только в следующих терминах (свойствах). Функционал имеет вид $-l_1(\varphi_u^0, \delta u)$. Функционал $l_1(\dots)$ — положительный, т. е. при $\varphi_u^0 \delta u > 0$, $l_1(\dots) \geq 0$ и изменяется только на функциях вида $\varphi_u^0 \delta u$, отличающихся друг от друга на множестве моментов времени t , для которых $\varphi(u^0(t)) = 0$.

Общий вид линейного функционала, неотрицательного на множестве Ω_g , будет $-l_2(g_x^0 \delta x)$ со свойствами, описанными для $l_1(\dots)$ с соответствующей заменой: $g_x^0 \delta x > 0$ и $g(x^0(t)) = 0$. На непрерывных функциях из этого множества функционал принимает вид

$$-\int_0^1 g_x^0 \delta x d\mu(t),$$

где мера $d\mu(t) > 0$ сосредоточена на множестве тех t , для которых $g(x^0(t)) = 0$.

Для множества Ω_J общий вид линейного функционала будет

$$-s_0 \int_0^1 (F_x^0 \delta x + F_u^0 \delta u) dt, \quad s_0 \geq 0;$$

а для множеств Ω

$$l_3(\tilde{\delta x} - \delta x) + C, \quad \tilde{\delta x}(1),$$

где $l_3(\dots)$ — произвольный линейный функционал; C — произвольный вектор; $\tilde{\delta x}$ — произвольная функция; δx — функция, входящая в множество Ω_x .

Рассматривая сразу уравнение Эйлера на множестве функций из Ω_x , получим

$$\begin{aligned} & -s_0 \int_0^1 (F_x \delta x + F_u \delta u) dt + l_1(-\varphi_u^0 \delta u) + \\ & + \int_0^1 -g_x^0 \delta x d\mu(t) + C, \quad \delta x(1) = 0. \end{aligned}$$

Обычно выбираются для уравнения Эйлера функционалы, обеспечивающие нормировку

$$s_0 + \|l_1\| + \int_0^1 d\mu(t) = 1.$$

Выразим функционалы, зависящие от δx , через функцию $\delta u(t)$, подлежащую свободному выбору. Для этого используем дифференциальную связь вариаций:

$$\frac{d\delta x}{dt} = f_x^0 \delta x + f_u^0 \delta u, \quad \delta x(0) = 0,$$

и тот факт, что введенные функционалы от $\delta x(t)$ являются линейными функционалами от правой части $f_u^0 \delta u$ этого дифференциального уравнения.

Воспользовавшись общим видом такого функционала, будем иметь

$$-s_0 \int_0^1 (F_x^0 \delta x) dt + \int_0^1 -g_x^0 \delta x d\mu + C, \quad \delta x(1) = \int_0^1 \psi(t), \quad f_u^0 \delta u dt.$$

Справа записан линейный функционал, функцию $\psi(t)$ которого надлежит выбрать так, чтобы равенство

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi(t), f_u \delta u dt &= \int_0^1 \psi(t), \left[\frac{d\delta x}{dt} - f_x^0 \delta x \right] dt = \\ &= \psi(t) \delta x \Big|_0^1 - \int_0^1 \left[\frac{d\psi}{dt}, \delta x + \psi(t), f_x^0 \delta x \right] dt = \\ &= \psi(1), \delta x(1) - \psi(0), \delta x(0) - \int_0^1 \left[\frac{d\psi}{dt} + f_x^{0T} \psi(t), \delta x \right] dt \end{aligned}$$

превращалось в тождество. Для этого необходимо, чтобы

$$\psi(1) = C; \quad -\frac{d\psi}{dt} = f_x^{0T} \psi - s_0 F_x^0.$$

Тогда уравнение Эйлера имеет вид

$$-s_0 \int_0^1 F_u^0 \delta u dt - l_1(\varphi_u^0 \delta u) + \int_0^1 \psi(t), f_u^0 \delta u dt = 0.$$

Отсюда следует, что $l_1(\varphi_u^0 \delta u)$ можно представлять в виде

$$\int_0^1 \lambda(t), \varphi_u^0 \delta u dt.$$

Учитывая произвольность выбора функции $\delta u(t)$, получим уравнение, позволяющее изучать свойства оптимального решения

$$-s_0 F_u^0 - \lambda(t), \varphi_u^0 + \psi(t), f_u^0 = 0,$$

где $s_0 \geq 0$; $\lambda(t) \varphi(u^0(t)) = 0$; $\lambda(t) \geq 0$;

$\psi(t)$ — удовлетворяет приведенной выше системе дифференциальных уравнений.

Выше описана довольно общая схема получения условий оптимальности для того, чтобы был понятен путь получения условий оптимальности управления при исследовании структур управления в задачах, учитывающих случайные воздействия.

3.2. ЗАДАЧА ТИПА «РУЛЕВОГО ТРАКТА»

Продemonстрируем применение условий оптимального управления в задаче, к которой сводится исследование по выбору параметров рулевых трактов в некоторых видах летательных аппаратов и в ряде технических устройств. Применительно к лета-

тельным аппаратам рассматривается программное управление разворотом при учете ограничений по углу и угловой скорости отклонения руля (δ , u) и по силе F , возникающей на руле.

В общем виде эта задача формулируется следующим образом [7].

Объект описывается дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами*

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= u, \quad \frac{dF}{dt} = a_2 F + au + a_1 \delta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \vartheta_1, \quad \frac{d\vartheta_1}{dt} = b_4 \vartheta_1 + b_2 F \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

и ограничениями

$$u^2 \leq u_0^2, \quad \delta^2 \leq \delta_0^2, \quad F^2 \leq F_0^2. \quad (3.2)$$

Коэффициенты системы (3.1) связаны соотношениями

$$a = \frac{k_f T_1}{T_2}, \quad a_1 = \frac{k_f}{T_2}, \quad a_2 = -\frac{1}{T_2}, \quad b_2 = \frac{k_0}{T_2}, \quad b_4 = -\frac{1}{T_1}.$$

Величины u_0 , δ_0 , F_0 постоянны и положительны. Предполагается, что

$$a_2 < 0, \quad b_4 < 0, \quad T_1 > T_2 > 0, \quad k_0 > 0, \quad k_f > 0.$$

Найти измеримую функцию $u^0(t)$ (оптимальное управление), переводящую объект с максимальным быстродействием из начального состояния $\delta = F = \vartheta = \vartheta_1 = 0$ в конечное состояние $\delta = F = \vartheta_1 = 0$, $\vartheta = \vartheta_k$ и обеспечивающую выполнение ограничений (3.2).

Условия оптимальности. Исследуем эту задачу, используя результаты работы [1]. Пусть $\delta^0(t)$, $F^0(t)$, $\vartheta^0(t)$, $\vartheta_1^0(t)$, $u^0(t)$ — оптимальное решение. Запишем принцип максимума

$$u^0(t) = u_0 \operatorname{sign}(\psi_1 + a\psi_2), \quad (3.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\psi_1}{dt} &= a_1 \psi_2 - 2\delta^0(t) \frac{d\mu_1}{dt}, \quad -\frac{d\psi_3}{dt} = 0, \\ -\frac{d\psi_2}{dt} &= a_2 \psi_2 + b_2 \psi_4 - 2F^0(t) \frac{d\mu_2}{dt}, \quad -\frac{d\psi_4}{dt} = \psi_1 + b_4 \psi_4, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dt} [(\delta^0(t))^2 - \delta_0^2] &= 0, \quad \frac{d\mu_1}{dt} \geq 0, \\ \frac{d\mu_2}{dt} [(F^0(t))^2 - F_0^2] &= 0, \quad \frac{d\mu_2}{dt} \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

* Постановка задачи принадлежит инж. Н. П. Дергунову.

Выражение для функции $\psi_1 + a\psi_2$ получим из решения дифференциальных уравнений (3.4):

$$\psi_1(t) + a\psi_2(t) = (\psi_1 + a\psi_2)_\mu + Q(t), \quad (3.6)$$

где

$$(\psi_1 + a\psi_2)_\mu = A_1 e^{-b_1 t} + A_2 e^{-a_1 t} + A_3 t + A_4,$$

$$Q(t) = \int_0^t \left[2\delta^0(t) \frac{d\mu_1}{dt} + 2aF^0(t) \frac{d\mu_2}{dt} \right] dt -$$

$$- (a_1 + aa_2) \int_0^t e^{-a_1 \tau} \int_0^\tau 2F^0(\eta) \frac{d\mu_2}{d\eta} e^{a_1 \eta} d\eta d\tau,$$

$$A_1 = \frac{(a_1 + ab_4) b_2}{a_2 - b_4} C_4,$$

$$A_2 = \frac{a_1 + aa_2}{a_2} C_2,$$

$$A_3 = - \frac{a_1 b_2}{a_2 b_4} C_3,$$

$$A_4 = C_4 \quad (C_1, C_2, C_3, C_4 - \text{произвольные постоянные}).$$

Используя соотношения на коэффициенты системы дифференциальных уравнений (3.1), получим $A_1 = 0$.

Структура оптимальных решений. Оптимальные решения в рассматриваемой задаче в зависимости от начальных условий могут «выходить» на фазовые ограничения или «не выходить» на них.

Пусть оптимальное решение таково, что меры $d\mu_i/dt = 0$ (где $i = 1, 2$), т. е. оно не «выходит» на фазовое ограничение и будет совпадать с оптимальным по быстродействию решением соответствующей задачи без фазовых ограничений. Из функции (3.6) следует, что в этом случае оптимальное управление имеет два переключения и представляет собой кусочно-постоянную функцию времени.

Фазовые траектории системы при $u = \pm u_0$ на плоскости

$$y_1 = \frac{a_2 - a_1}{a_2} \delta, \quad y_2 = F + \frac{a_1}{a_2} \delta$$

определяются выражением

$$y_2 \pm \frac{aa_2 - a_1}{a_2^2} u_0 = C \exp \frac{a_2^2}{\pm (a_2 - a_1) u_0} y_1, \quad (3.7)$$

где C — произвольная постоянная.

На рис. 3.1 пунктирные кривые дают представление об обоих типах фазовых траекторий. Предельные прямые $П_1$ и $П_2$ (см.

рис. 3.1) определяются зависимостями (3.7) при $y \rightarrow \pm \infty$ для $u = \pm u_0$ соответственно. Замкнутая кривая соответствует типичной оптимальной траектории.

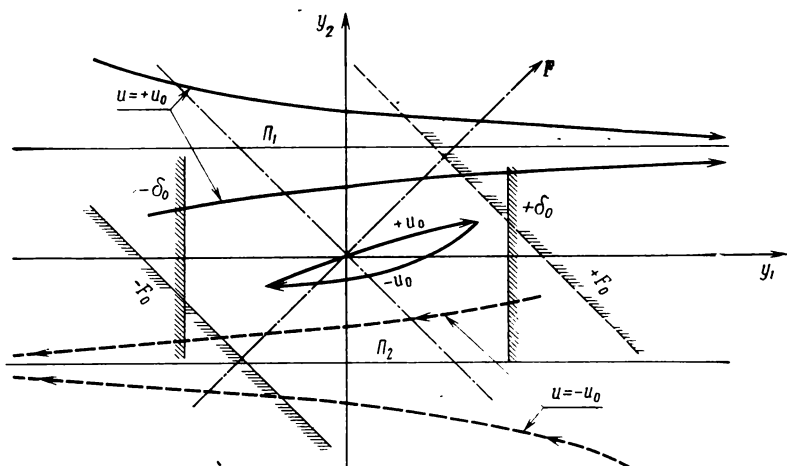


Рис. 3.1. Типы фазовых траекторий и фазовые ограничения системы

Пусть оптимальное решение таково, что хотя бы одна из мер $d\mu_1/dt$, $d\mu_2/dt$ не равна тождественно нулю (есть «выход» на фазовые ограничения). Изучим функцию (3.6). Функция $(\psi_1 + a\psi_2)_\mu$ имеет не более двух нулей, а ее производная — не более одного нуля. На рис. 3.2. показан вид этой функции, функций $Q(t)$, $\psi_1(t) + a\psi_2(t)$ и расположение скачков мер $\frac{d\mu_i}{dt}$. Заметим, что на рис. 3.2. указан и ниже разбирается случай, когда при $t=0$ функция $\psi_1(t) + a\psi_2(t)$ положительна. Для другого случая рассуждения аналогичны.

Вернемся к рис. 3.1. В координатах y_1, y_2 фазовые ограничения $F = \pm F_0$ преобразуются в прямые $\pm \delta_0$, определяемые выражением

$$y_1 = (y_1 \mp F_0) \frac{a_2 - a_1}{a_1},$$

а фазовые ограничения $\delta = \pm \delta_0$ — в соответствующие прямые

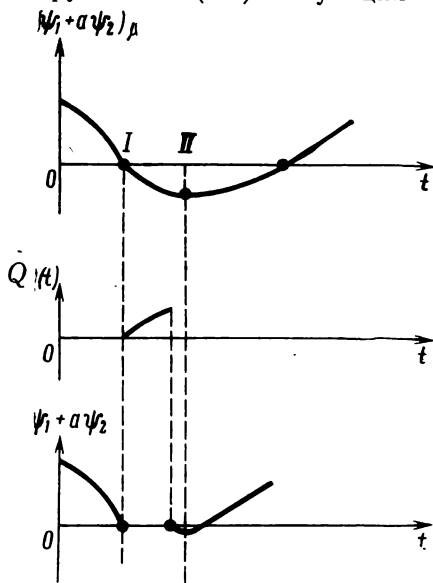


Рис. 3.2. Расположение скачков мер $d\mu_i/dt$ ($i=1, 2$)

$\pm \delta_0$. На фазовые ограничения $+F_0, +\delta_0, (-F_0, -\delta_0)$ (см. рис. 3.1, где фазовые ограничения заштрихованы) система может выходить только с положительным (отрицательным) управлением. Так как $a > 0$ и $a_1 + aa_2 < 0$, то из выражения (3.6) легко видеть, что в момент выхода на фазовое ограничение ни мера $d\mu_1/dt$, ни мера $d\mu_2/dt$ скачков иметь не может, т. е. в момент выхода $\psi_1(t) + a\psi_2(t) = 0$. Отметим также, что при нахождении на фазовой границе $\psi_1(t) + a\psi_2(t) = 0$ и в момент схода с фазового ограничения мера не может иметь скачков. Из всего этого следует (для одного случая это показано на рис. 3.2), что сход с ограничений $+F_0$ или $+\delta_0$ может быть осуществлен только в моменты, когда $d(\psi_1 + a\psi_2)_\mu/dt < 0$, ибо в противном случае фазовое ограничение будет нарушено (сход с $-F_0, -\delta_0$, когда $d(\psi_1 + a\psi_2)_\mu/dt > 0$). Таким образом, в случае, когда в начальный момент $t=0$ $(\psi_1 + a\psi_2) = (\psi_1 + a\psi_2)_\mu > 0$, оптимальная траектория может только один раз выходить на фазовые ограничения $+F_0, +\delta_0$ и только один раз на ограничения $-F_0, -\delta_0$.

З а м е ч а н и е. 1. Каждое решение дифференциальных уравнений (3.1) удовлетворяет уравнению

$$T_1 \frac{d}{dt} (T_2 \dot{\delta}_1 + \dot{\psi}_1 - k_0 k_f \delta) + (T_2 \dot{\delta}_1 + \dot{\psi}_1 - k_0 k_f \delta) = 0.$$

Отсюда, учитывая, что в конечной точке $\dot{\psi}_1 = F = \dot{\delta} = 0$, получим

$$(T_2 - T_1) \dot{\psi}_1 = T_2 k_0 F - T_1 k_0 k_f \delta.$$

З а м е ч а н и е 2. Рассмотрим участки оптимальной траектории, лежащие на фазовых ограничениях. При $|F^0(t)| = F_0$, например при $F^0(t) = F_0$, из (3.1) находим, что функция $u^0(t)$, непрерывно дифференцируемая, равна

$$u^0(t) = - \frac{a_1 \dot{\delta}(t_1) + a_2 F_0}{a} \exp[-a_1(t-t_1)a^{-1}], \quad (3.8)$$

где t_1 — момент выхода на фазовое ограничение.

При этом координата

$$\delta^0(t) = \left[\dot{\delta}(t_1) + \frac{a_2}{a_1} F_0 \right] \exp[-a_1(t-t_1)a^{-1}] - \frac{a_2}{a_1} F_0 \quad (3.9)$$

и, монотонно возрастая, стремится к $\delta(\infty) = -a_2 F_0 a_1^{-1}$. Это следует из $a_1 a^{-1} > 0$, равенства (3.7) и $a_1 \dot{\delta} + a_2 F = k_f(T_2 - T_1)T_2^{-1}[1 - e^{-\delta/T_2 u^0}] < 0$. При $|\delta^0(t)| = \delta_0$, например $\delta^0 = +\delta_0$, управление $u^0(t) \equiv 0$. Координата $F^0(t)$, монотонно убывая, стремится к $F(\infty) = -a_1 \delta_0 a_2^{-1} > 0$.

Таким образом, оптимальная траектория выходит на фазовые ограничения только в следующем порядке $+F_0, +\delta_0, -F_0, -\delta_0$, хотя при этом может и не выходить на некоторые из них.

Синтез оптимального управления. При построении синтеза управления ограничимся наиболее часто встречающимся на практике случаем, когда фазовая траектория с $u = \pm u_0$, проходящая через начало координат, вначале пересекает фазовое ограничение $F = \pm F_0$. Другой возможный случай, когда вначале пересекается ограничение $\delta = \pm \delta_0$, рассматривается аналогично.

Исследуем оптимальное решение с управлением на начальном участке $u^0(t) = \pm u_0$. Можно показать [5], что если начальный участок оптимальной траектории заканчивается внутри фазовых ограничений, то вся траектория лежит внутри фазовых ограничений. Задачей синтеза в этом случае является определение с помощью текущих фазовых координат объекта двух моментов переключения.

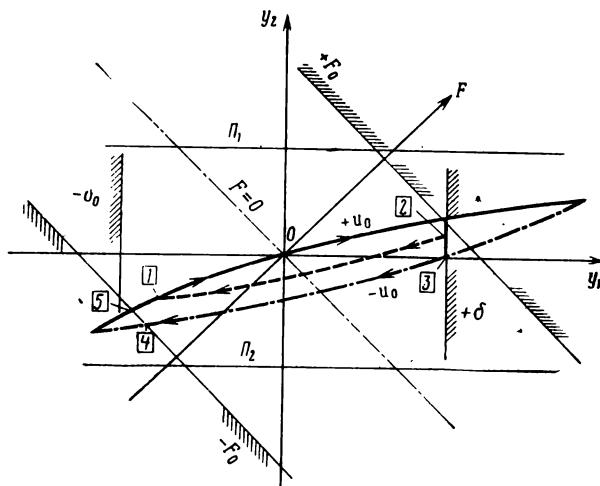


Рис. 3.3. Оптимальные фазовые траектории системы

Рассмотрим случай, когда начальный участок траектории заканчивается на фазовом ограничении $F = \pm F_0$. Здесь задача синтеза состоит в определении момента времени t_3 схода с фазового ограничения (ограничения $F = \pm F_0$ или следующего за ним $\delta = \pm \delta_0$) и различения после этого двух возможных видов конечных участков оптимальной траектории:

первый вид — конечной участок целиком находится внутри фазовых ограничений (рис. 3.3, траектория, проходящая через точки 2, 1, 0);

второй вид — конечной участок выходит на фазовое ограничение $F^0(t) = \mp F_0$ (рис. 3.3, траектория, проходящая через точки 3, 4, 5, 0).

Для траекторий с конечным участком первого вида синтез управления будет осуществлен, если момент t_3 и момент t_5 — момент перехода на участок траектории с $u = \pm u_0$, проходящей через начало координат (см. рис. 3.3), будут выражены через фазовые координаты системы. Изменение фазового состояния

объекта на конечном участке описывается при учете формулы (3.7) следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{d\delta}{dt} &= u; \quad \frac{d\vartheta_1}{dt} = a_2\vartheta_1 + a_3\delta; \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \vartheta_1; \quad a_3 = \frac{k_0 k_f}{T_2}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Фазовые траектории этой системы при $u = u_0$ в координатах

$$\bar{\delta} = -\frac{a_3}{a_2}\delta, \quad \bar{\vartheta}_1 = -\frac{a_3}{a_2}\delta - \vartheta_1 \quad (3.11)$$

описываются уравнением

$$\bar{\vartheta}_1 - \frac{a_3}{a_2^2}u_0 = C \exp\left[-\frac{a_2^2}{a_3u_0}\bar{\delta}\right], \quad (3.12)$$

где C — параметр.

Выразим фазовые координаты системы в момент t_5 (им присвоим индекс (5)), а на рис. 3.3 ему соответствует точка 1) через координаты в момент t_3 (с индексом (3)) перехода на конечной участок оптимальной траектории. Используя уравнение (3.12), получим

$$\bar{\vartheta}_1^{(5)} = \mp \sqrt{\mp \frac{a_3}{a_2^2}u_0 \left(\bar{\vartheta}_1^{(3)} \pm \frac{a_3}{a_2^2}u_0 \right) e^{\mp \frac{a_2^2}{a_3u_0}\bar{\delta}^{(3)}} + \left(\frac{a_3}{a_2^2}u_0 \right)^2}; \quad (3.13)$$

$$\bar{\delta}^{(5)} = \mp \frac{a_3u_0}{a_2^2} \ln \left| \mp \frac{a_2^2}{a_3u_0}\bar{\vartheta}_1^{(5)} + 1 \right|. \quad (3.14)$$

Здесь и ниже верхние знаки соответствуют траектории, начинающейся с $u = +u_0$, а нижние — траектории, начинающейся с $u = -u_0$. Проинтегрировав уравнения (3.11) от конечной точки $\delta = F = \vartheta_1 = 0$, $\vartheta = \vartheta_k$ в обратном порядке соответственно до точки t_5 с $u = \pm u_0$, а от точки t_5 до t_3 с $u = \mp u_0$, получим

$$\begin{aligned}\vartheta^{(3)} &= -\frac{[\vartheta_1^{(5)} + a_3\delta^{(5)}a_2^{-1} \mp a_3u_0a_2^{-2}]}{a_2} [e^{-a_2\tau^{(3)}} - 1] + \\ &+ \left[-\frac{a_3\delta^{(5)}}{a_2}\tau^{(3)} \mp a_3u_0 \left(\frac{(\tau^{(3)})^2}{2a_2} - \frac{\tau^{(3)}}{a_2^2} \right) \right] + \vartheta^{(5)},\end{aligned}\quad (3.15)$$

где

$$\tau^{(3)} = \frac{\delta^{(3)} - \delta^{(5)}}{\pm u_0}; \quad \tau^{(5)} = \frac{\delta^{(5)}}{\mp u_0};$$

$$\vartheta_1^{(5)} = \pm \frac{a_3 u_0}{a_2^2} e^{-a_1 \tau^{(5)}} \pm a_3 u_0 \left[\frac{\tau^{(5)}}{a_2} - \frac{1}{a_2^2} \right];$$

$$\vartheta^{(5)} = \mp \frac{a_3 u_0}{a_2^3} [e^{-a_1 \tau^{(5)}} - 1] \pm a_3 u_0 \left[\frac{\tau^{(5)}}{2a_2} - \frac{1}{a_2^2} \right] \tau^{(5)} + \vartheta_k.$$

Подставляя соотношения (3.13), (3.14) и (3.11) в (3.15), получим

$$\vartheta^{(3)} = \vartheta_{\pm}^{(3)}(\delta^{(3)}, \vartheta_1^{(3)}, \vartheta_k). \quad (3.16)$$

Отсюда следует, что момент t_3 определяется из условия равенства нулю функции

$$f_1(\delta, \vartheta_1, \vartheta, \vartheta_k) = \vartheta(t) - \vartheta_{\pm}^{(3)}(\delta(t), \vartheta_1(t), \vartheta_k). \quad (3.17)$$

Для траекторий с конечным участком второго вида, кроме моментов t_3 , t_5 , через текущие фазовые координаты нужно выразить еще один характерный момент времени t_4 — момент выхода на фазовое ограничение $F = \mp F_0$. При движении по этому ограничению семейство фазовых траекторий системы описывается зависимостями:

в плоскости ϑ, ϑ_1

$$\vartheta = \pm \frac{F_0}{b_4} \ln \left| \vartheta_1 \mp \frac{b_2}{b_4} F_0 \right| + \left(\vartheta_1 \mp \frac{b_2}{b_4} F_0 \right) \frac{1}{b_2} + C; \quad (3.18)$$

в плоскости δ, ϑ_1

$$\delta \pm \frac{a_2}{a_1} F_0 = \frac{C}{\vartheta_1 \mp \frac{b_2}{b_4} F_0}. \quad (3.19)$$

Двигаясь из конечной точки в точку 5, получим зависимость $\vartheta_1^{(5)}(\delta^{(5)})$, $\vartheta^{(5)}(\delta^{(5)})$. Используя первую зависимость, с помощью (3.7) при $F = \mp F_0$ определим $\delta^{(5)}$:

$$\mp T_2 k_0 F - T_1 k_0 k_f \delta^{(5)} - (T_2 - T_1) \vartheta_1^{(5)}(\delta^{(5)}) = 0.$$

Из формул (3.18), (3.19) находим, что в точке 4, соответствующей t_4 ,

$$\vartheta^{(4)} = \pm \frac{F_0}{b_4} \ln \left| \vartheta_1^{(4)} \mp \frac{b_2}{b_4} F_0 \right| + \left(\vartheta_1^{(4)} \mp \frac{b_2}{b_4} F_0 \right) \frac{1}{b_2} + C_{\vartheta}^{(5)}; \quad (3.20)$$

$$\delta^{(4)} \pm \frac{a_2}{a_1} F_0 = \frac{C_{\vartheta_1}^{(5)}}{\vartheta_1^{(4)} \mp \frac{b_2}{b_4} F_0}, \quad (3.21)$$

где постоянные $C_{\vartheta}^{(5)}(\vartheta_k)$, $C_{\vartheta_1}^{(5)}(\vartheta_k)$ легко находятся из условия прохождения этих фазовых траекторий через точку $\delta^{(5)}$, $\vartheta_1^{(5)}$, $\vartheta^{(5)}$, $\mp F_0$.

При движении в открытой области, когда $u = \text{const} = \mp u_0$, из системы (3.1) можно получить

$$\frac{d(\vartheta_1 - b_4 \vartheta - b_2 a_2^{-1} F + a b_2 a_2^{-1} \delta)}{d\delta} = -\frac{a_1 b_2}{a_2 u_0} \delta,$$

что соответствует

$$\mp \frac{a_2 u_0 (\vartheta_1 - b_4 \vartheta)}{a_1 b_2} \pm \frac{u_0}{a_1} F \mp \frac{a u_0}{a_1} \delta = C^{(4)} - \frac{\delta^2}{2}. \quad (3.22)$$

Из условия прохождения фазовой траектории (3.22) через точку $\delta^{(4)}$, $\vartheta_1^{(4)}$, $\vartheta^{(4)}$, $\mp F_0$ находим

$$C^{(4)} = \mp \frac{a_2 u_0}{a_1 b_2} (\vartheta_1^{(4)} - b_4 \vartheta^{(4)}) \mp \frac{u_0}{a_1} F_0 \mp \frac{a u_0}{a_1} \delta^{(4)} + \frac{(\delta^{(4)})^2}{2}. \quad (3.23)$$

С помощью зависимости (3.7) и замечания 1 получим уравнение, определяющее $\delta^{(4)}$:

$$\mp F_0 + \frac{a_1}{a_2} \delta^{(4)} \mp \frac{a a_2 + a_1}{a_2^2} u_0 = C^{(3)} e^{\mp \frac{a_0}{u_0} \delta^{(4)}}, \quad (3.24)$$

где

$$C^{(3)} = \left[F^{(3)} + \frac{a_1}{a_2} \delta^{(3)} \mp \frac{a a_2 + a_1}{a_2^2} u_0 \right] e^{\pm \frac{a_1}{u_0} \delta^{(3)}};$$

$$T_2 k_0 F^{(3)} - T_1 k_0 k_f \delta^{(3)} - (T_2 - T_1) \vartheta_1^{(3)} = 0.$$

Таким образом, получим

$$\text{из (3.24)} \quad \delta^{(4)} = \delta^{(4)}(\delta^{(3)}, \vartheta_1^{(3)});$$

$$\text{из (3.20)} \quad \vartheta^{(4)}(\delta^{(3)}, \vartheta_1^{(3)});$$

$$\text{из (3.21)} \quad \vartheta_1^{(4)} = \vartheta_1^{(4)}(\delta^{(3)}, \vartheta_1^{(3)});$$

$$\text{из (3.23)} \quad C^{(4)} = C^{(4)}(\delta^{(3)}, \vartheta^{(3)}, \vartheta_k). \quad (3.25)$$

Переход оптимальной фазовой траектории на конечной участок, т. е. определение момента времени t_3 при синтезе оптимального управления, происходит тогда, когда текущие фазовые координаты системы δ , ϑ_1 , ϑ удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} f_2(\delta, \vartheta_1, \vartheta, \vartheta_k) &= \mp \frac{a_2 u_0}{a_1 b_2} (\vartheta_1 - b_4 \vartheta) \pm \frac{u_0}{a_1} F \mp \\ &\mp \frac{a u_0}{a_1} \delta - C^{(4)}(\delta^{(3)}, \vartheta_1^{(3)}, \vartheta_k) + \frac{\delta^2}{2} = 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $C^{(4)}(\dots)$ определяется из соотношения (3.25), F — через ϑ_1, δ из формулы (3.7).

Синтез управления строится следующим образом. В процессе движения объекта вычисляются определенные выше [см. формулы (3.17), (3.26)] функции текущих фазовых координат и требуемого конечного Φ_K : $f_1(\dots)$, $f_2(\dots)$ и проверяются условия $F(t) = +F_0(-F_0)$ и $\delta(t) = +\delta_0(-\delta_0)$. Вначале движение объекта происходит по начальной траектории (см. рис. 3.3) с $u^0(t) = \pm u_0$. Выбор того или другого начала определяется правилом $u^0(0)\Phi_K > 0$. Правило обосновывается в [5]. В момент $F(t) = +F_0(-F_0)$ траектория выходит на фазовое ограничение по F и движение продолжается с $u^0(t)$, определяемым в соответствии с формулой (3.8). При этом координата $|\delta(t)|$ монотонно возрастает. В момент $\delta(t) = +\delta_0(-\delta_0)$ траектория выходит на фазовое ограничение по δ и движение продолжается с $u^0(t) \equiv 0$. Траектория сразу же сходится с фазового ограничения по F , так как координата $|F|$ монотонно убывает.

Описанное движение осуществляется объектом полностью либо частично в зависимости от того, когда наступит момент t_3 схода с фазовых ограничений. Этот момент совпадает с моментом выполнения одного из равенств:

$$f_1(\delta, \vartheta_1, \vartheta, \vartheta_K) = 0, \quad f_2(\delta, \vartheta_1, \vartheta, \vartheta_K) = 0.$$

При выполнении первого равенства оптимальная траектория имеет конечный участок первого вида. Движение объекта с момента t_3 происходит с $u^0(t) = \mp u_0$ до момента t_5 (на рис. 3.3 он соответствует в этом случае точке 1); при этом $f_1[\delta(t), \vartheta_1(t), \vartheta(t), \vartheta_K] \equiv 0$. Момент t_5 определяется как первый после t_3 момент, когда функция $f_1(\dots)$ снова становится отличной от нуля. Начиная с момента t_5 управление $u^0(t) = \pm u_0$ и сохраняется таковым до конца процесса, которое определяется равенством $\vartheta(t) = \vartheta_K$.

При выполнении второго равенства оптимальная траектория имеет конечный участок второго вида. Движение объекта с момента t_3 продолжается с $u^0(t) = \mp u_0$ до момента t_4 и при этом $f_2[\delta(t), \vartheta_1(t), \vartheta(t), \vartheta_K] \equiv 0$. Момент t_4 определяется из условия $F(t) = -F_0(+F_0)$. Начиная с момента t_4 и до момента t_5 движение происходит с $u^0(t)$, определяемым в соответствии с формулой (3.8). Момент t_5 определяется условием $f_1[\delta(t), \vartheta_1(t), \vartheta(t), \vartheta_K] = 0$. Заметим, что до этого момента времени, начиная с начала движения, эта функция знака не меняла. С момента t_5 и до конца процесса движение происходит с $u^0(t) = \pm u_0$.

Замечание 3. Здесь не устанавливается явная зависимость оптимального управления $u^0(\dots)$ от текущих фазовых координат объекта. Получение этой зависимости ввиду ее громоздкости вряд ли целесообразно. Приведенные выражения для определения характерных моментов времени (t_3 , t_5 и т. д.) через текущие фазовые координаты и выражения для определения оптимального управления в промежуточные моменты времени дают полную информацию для практической реализации искомого синтеза.

3.3. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Широкий круг задач определения рациональной структуры закона управления объектами может математически формулироваться как статистические задачи оптимального управления с осредненными и неосредненными ограничениями на фазовые координаты.

Условия оптимальности управления в таких задачах получаются на основании использования подхода Дубовицкого — Милютина [1].

В этом случае рассматривается задача минимизации некоторого функционала при наличии следующих ограничений:

1) дифференциальных уравнений со случайными воздействиями, описывающих поведение объекта;

2) ограничений на фазовые координаты объекта, имеющих интегральный или неинтегральный вид;

3) ограничений на управление.

Кроме этих ограничений, накладываются ограничения на информацию, на основании которой выбирается управление.

Общая тенденция решения задач на экстремум функционала — локальное варьирование. Однако не все задачи допускают такое варьирование сразу. Иногда необходимо предварительно преобразовать задачу к виду, удобному для локального варьирования, т. е. предварительно «организовать» задачу. Методы такой организации задач описаны в работах А. Я. Дубовицкого и А. А. Милютина [1, 4].

Рассматриваемая в работе задача исследуется по следующей схеме:

1) проводится преобразование задачи к задаче, удобной для локального варьирования;

2) устанавливается связь исходной и преобразованной задач;

3) проводится локальное варьирование преобразованной задачи, на основании которого получаются необходимые и достаточные условия оптимальности управления исследуемой задачи.

Прежде чем сформулировать задачу, опишем класс приложений к объекту случайных воздействий и класс используемых управлений.

Случайные воздействия. $\xi(t, \omega)$ — случайный процесс на $0 \leq t \leq T$ следующей природы. Отрезок $[0, T]$ разбит на n частей:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_{n-1} < t_n = T.$$

На интервале $t_i \leq t < t_{i+1}$ аргумент ω принадлежит некоторому множеству Ω_{i+1} . На множестве Ω_{i+1} введена непрерывная вероятностная мера $d\omega_{i+1}$. На множествах $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_i$ и $\Omega_j \times$

$\times \Omega_{j+1} \times \dots \times \Omega_n$ мера определяется как прямое произведение мер $d\omega_1 \dots d\omega_i$ и $d\omega_j \dots d\omega_{j+1} \dots d\omega_n$ соответственно при $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Класс управлений. В начале каждого интервала $[t_i, t_{i+1}]$ в момент $t = t_i$ наблюдается $\omega_{i+1} \in \Omega_{i+1}$. На основании этого наблюдения и наблюдений, проведенных на предыдущих интервалах, выбирается управление

$$u(t, \omega_1, \dots, \omega_{i+1})$$

как измеримая ограниченная функция переменных

$$t \in (t_i, t_{i+1}), \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{i+1} \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_{i+1}.$$

Таким образом, управление $u(t, \omega)$, имеющее на каждом интервале описанный выше вид, есть функция растущего числа переменных. Всякую такую функцию будем в дальнейшем называть функцией с требуемой структурой. Введем следующие обозначения:

при $t \in (t_i, t_{i+1})$

$$\begin{aligned} f(x(t, \omega_1, \dots, \omega_{i+1}), u(t, \omega_1, \dots, \omega_{i+1}), \xi(t, \omega_{i+1})) = \\ = f(x(t, \omega), u(t, \omega), \xi(t, \omega)); \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i+1}} G(x(t, \omega_1, \dots, \omega_{i+1})) d\omega_1 \dots d\omega_{i+1} = \int_{\Omega} G(x(t, \omega)) d\omega,$$

где $G(x(\dots))$ обозначает любую из функций $F(x(T, \omega))$, $g_2(x(t, \omega))$.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача A_0 . Среди функций $u(t, \omega)$ с требуемой структурой найти функцию (управление), минимизирующую функционал

$$\int_{\Omega} F(x(T, \omega)) d\omega$$

при следующих ограничениях на конечномерные вектор-функции $x(t, \omega)$, $u(t, \omega)$:

- 1) $\frac{dx(t, \omega)}{dt} = f(x(t, \omega), u(t, \omega), \xi(t, \omega)), t \in [0, T], x(0) = x_0$;
- 2) $x(t, \omega) \in D$;
- 3) $\int_{\Omega} g_2(x(t, \omega)) d\omega \leq 0$;
- 4) $u(t, \omega) \in U$.

Предположения на функции и множества:

$F(x(T, \omega))$ — абсолютно интегрируемая по ω функция;

$f(x, u, \xi)$, $\xi(t, \omega)$, $u(t, \omega)$ — такие функции, что решение дифференциального уравнения $x(t, \omega)$ существует, непрерывно по t

для почти всех ω и в любой достаточно малой окрестности точки $t \in [0, T]$ функция $x(t, \omega)$ равномерно ограничена по ω ;

$g_2(x)$ — непрерывная функция;
множества D и U — произвольны.

Проведем исследование задачи A_0 . Будем рассматривать пары функций $q^i(t, \omega) = \{x^i(t, \omega), u^i(t, \omega)\}$, где функции $x^i(t, \omega)$, $u^i(t, \omega)$ имеют требуемую структуру, связаны дифференциальным уравнением и удовлетворяют неосредненным ограничениям

$$x^i(t, \omega) \in D, u^i(t, \omega) \in U.$$

Назовем эти пары допустимыми парами. В дальнейшем предполагаем, что существует хотя бы одна допустимая пара функций задачи A_0 .

Пусть пара $q^0(t, \omega)$ будет оптимальным решением задачи A_0 ; $\{q^i(t, \omega)\}$, $i=0, 1, \dots, m$ — некоторый набор допустимых пар. Построим на этом наборе множество решений следующим образом.

Из множества всевозможных пар, полученных линейной комбинацией из элементов набора

$$\left\{ \sum_{i=0}^m \alpha_i(\omega) q^i(t, \omega) \right\},$$

выделим подмножество пар, которые будут допустимыми. Найдем условия на $\alpha_i(\omega)$, достаточные для того, чтобы пара

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i(\omega) q^i(t, \omega) \quad \text{была допустимой.}$$

Каждой паре пар $q^0(t, \omega); q^i(t, \omega)$, $i=0, 1, \dots, m$, поставим в соответствие число $r(q^0(t, \omega), q^i(t, \omega)) = r_i$, равное номеру того интервала разбиения отрезка $[0, T]$, на котором они впервые начиная с интервала $[t_0, t_1]$ не совпадают. Рассмотрим такие линейные комбинации $\sum_{i=0}^m \alpha_i(\omega) q^i(t, \omega)$, у которых коэффициенты

$\alpha_i(\omega) = \alpha_i^{(k)}(\omega)$ обладают следующими свойствами:

- 1) $\alpha_i^{(k)}(\omega) = \alpha_i^{(k)}(\omega_1, \dots, \omega_{r_i})$;
- 2) $\alpha_i^{(k)}(\omega)$ принимает значения либо 0, либо 1;
- 3) $\sum_{i=0}^m \alpha_i^{(k)}(\omega) = 1$, где номер i соответствует номеру пары $q^i(t, \omega) \in \{q^i(t, \omega)\}$.

(3.27)

Установим, что если $q^0(t, \omega)$, $q^1(t, \omega)$, ..., $q^l(t, \omega)$, ..., ..., $q^m(t, \omega)$ — функции с требуемой структурой,

$\alpha_0(\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\alpha_1(\omega_1, \dots, \omega_{r_1})$, ..., $\alpha_l(\omega_1, \dots, \omega_{r_l})$, ..., $\alpha_m(\omega_1, \dots, \omega_{r_m})$ — произвольные скалярные ограниченные измеримые функции и

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i(\omega_1, \dots, \omega_{r_i}) = 1,$$

то

$q(t, \omega) = \sum_{i=0}^m \alpha_i(\omega_1, \dots, \omega_{r_i}) q^i(t, \omega)$ — функция с требуемой структурой.

Достаточно показать, что функция $q(t, \omega)$ на произвольном $t \in [t_{j-1}, t_j]$ зависит только от $\omega_1, \dots, \omega_j$. Слагаемые $\alpha_i(\omega_1, \dots, \omega_{r_i}) q^i(t, \omega)$, у которых $r_i \leq j$, зависят только от требуемого числа ω . Остальные слагаемые ($r_i > j$) зависят от большего числа ω , однако все они на рассматриваемом интервале обладают свойством

$$\alpha_i(\omega_1, \dots, \omega_{r_i}) q^i(t, \omega) = \alpha_i(\omega_1, \dots, \omega_{r_i}) q^0(t, \omega).$$

Сгруппируем слагаемые

$$q(t, \omega) = \sum_{i: r_i \leq j} \alpha_i(\omega_1, \dots, \omega_{r_i}) q^i(t, \omega) + q^0(t, \omega) \sum_{i: r_i > j} \alpha_i(\omega_1, \dots, \omega_{r_i}).$$

Так как

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \alpha_i(\omega_1, \dots, \omega_{r_i}) &= \sum_{i: r_i \leq j} \alpha_i(\omega_1, \dots, \omega_{r_i}) + \\ &+ \sum_{i: r_i > j} \alpha_i(\omega_1, \dots, \omega_{r_i}) = 1, \end{aligned}$$

то

$$\sum_{i: r_i > j} \alpha_i(\omega_1, \dots, \omega_{r_i}) = 1 - \sum_{i: r_i \leq j} \alpha_i(\omega_1, \dots, \omega_{r_i})$$

зависит только от $\omega_1, \dots, \omega_j$. Отсюда следует, что $q(t, \omega)$ имеет требуемую структуру.

Если коэффициенты линейной комбинации

$$q(t, \omega) = \sum_{i=0}^m \alpha_i^{(k)}(\omega) q^i(t, \omega),$$

составленной из набора допустимых пар $\{q^i(t, \omega)\}$, удовлетворяют условиям (3.27), то пара $q(t, \omega)$ будет допустимой парой.

Рассмотрим задачу A_0 на множестве допустимых пар

$$q(t, \omega) = \sum_{i=0}^m \alpha_i^{(k)}(\omega) q^i(t, \omega),$$

порожденном некоторым фиксированным набором $\{q^i(t, \omega)\}$.
Непосредственно ясно, что

$$\int_{\Omega} F \left(\sum_{i=0}^m \alpha_i^{(k)}(\omega) x^i(T, \omega) \right) d\omega = \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \alpha_i^{(k)}(\omega) F(x^i(T, \omega)) d\omega.$$

Убедимся, что если пара $q^0(t, \omega)$ была оптимальной в задаче A_0 , то точка $\alpha_0^{(k)}(\omega) = 1$, $\alpha_i^{(k)}(\omega) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ будет оптимальным решением в следующей задаче.

Задача A_1 .

$$\min_{\{\alpha^{(k)}\}} \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \alpha_i^{(k)}(\omega_{r_i}) F(x^i(T, \omega)) d\omega$$

при ограничениях:

1) $\alpha_i^{(k)}(\omega_{r_i})$ — принимает значение либо 0, либо 1;

2) $\sum_{i=0}^m \alpha_i^{(k)}(\omega_{r_i}) = 1$;

3) $\zeta(t) = \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \alpha_i^{(k)}(\omega_{r_i}) g_2(x^i(t, \omega)) d\omega \leq 0$,

где

$$\alpha_i(\omega_{r_i}) = \alpha_i(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{r_i}).$$

В самом деле, если бы это было не так, то нашлась бы другая точка $\bar{\alpha}_0^{(k)}(\omega)$, $\bar{\alpha}_1^{(k)}(\omega)$, ..., $\bar{\alpha}_m^{(k)}(\omega)$, удовлетворяющая всем ограничениям задачи A_1 , для которой выполнялось бы

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i^{(k)}(\omega) F(x^i(T, \omega)) d\omega &= \int_{\Omega} F \left(\sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i^{(k)}(\omega) x^i(T, \omega) \right) d\omega \leq \\ &\leq \int_{\Omega} F(x^0(T, \omega)) d\omega; \\ \int_{\Omega} g_2 \left(\sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i^{(k)}(\omega) x^i(t, \omega) \right) d\omega &\leq 0. \end{aligned}$$

Так как $\left\{ \sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i^{(k)}(\omega) x^i(t, \omega); \sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i^{(k)}(\omega) u^i(t, \omega) \right\} = \bar{q}(t, \omega)$

будет допустимой парой, то это противоречит предположению об оптимальности пары $q^0(t, \omega)$.

всякое непустое множество $A(\alpha)$ функций $\alpha(\omega) \in M^{m+1}$, определяемое условиями:

$$1) \alpha_i(\omega_{r_i}) \geq 0, \quad i=0, 1, \dots, m;$$

$$2) \sum_{i=0}^m \alpha_i(\omega_{r_i}) = 1;$$

$$3) \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \alpha_i(\omega_{r_i}) F_k^i(\omega_{r_i}) d\omega = J_k, \quad k=0, 1, \dots, \bar{k},$$

содержит точки, состоящие из 0 и 1.

Приступим к доказательству. Пусть $\bar{\alpha}(\omega)$, $\bar{\zeta}(t)$ — произвольная вариация из $M^{m+1} \times C[0, T]$. Выпишем множества запрещенных вариаций Ω^0 и допустимых Ω^i по i -му ограничению задачи A_2 :

$$\Omega^0 = \left[\int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i(\omega_{r_i}) F(x^i(T, \omega)) d\omega < 0 \right]$$

— выпуклый открытый конус (предполагаем, что он не пуст);

$$\Omega^1 = [\bar{\alpha}_i(\omega_{r_i}) \geq \varepsilon_i > 0, \quad i=1, \dots, m; \quad \bar{\alpha}_0(\omega_{r_0}) \text{ — любая функция}]$$

— выпуклый открытый конус;

$$\Omega^{2,4} = \left[\sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i(\omega_{r_i}) = 0; \quad \bar{\zeta}(t) - \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i(\omega_{r_i}) g_2(x^i(t, \omega)) d\omega = 0 \right]$$

— подпространство (выпуклый конус);

$\Omega^3 = [\bar{\zeta}(t) < 0 \text{ на том множестве } t, \text{ где } \zeta^0(t) = 0, \quad \zeta(t) \text{ произвольная на дополнение к этому множеству}]$ — выпуклый, открытый конус.

Пусть точка $\alpha^0(\omega)$, $\zeta^0(t)$ не будет стационарным решением в задаче A_2 . Тогда приведенные выше конусы будут иметь непустое пересечение [1]. Пусть $\bar{\alpha}^0(\omega)$, $\bar{\zeta}^0(t)$ — одна из точек этого пересечения. Составим вектор-функцию

$$\{\bar{\alpha}_i(\omega_{r_i}) = \alpha_i^0(\omega_{r_i}) + \varepsilon \bar{\alpha}_i^0(\omega_{r_i})\},$$

$$\bar{\zeta}(t) = \zeta^0(t) + \varepsilon \bar{\zeta}^0(t)$$

и подберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялись все ограничения задачи A_2 и ограничение $\bar{\zeta}(t) < 0$, а значение функционала

$$\begin{aligned} J(\bar{\alpha}(\omega), \bar{\zeta}(t)) &= \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m [\alpha_i^0(\omega_{r_i}) + \varepsilon \bar{\alpha}_i^0(\omega_{r_i})] F(x^i(T, \omega)) d\omega = \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i^0(\omega_{r_i}) F(x^i(T, \omega)) d\omega + \int_{\Omega} F(x^0(T, \omega)) d\omega < \\ &< \int_{\Omega} F(x^0(T, \omega)) d\omega = J(\alpha^0(\omega), \zeta^0(t)). \end{aligned}$$

Покажем, что это противоречит предположению об оптимальности решения $q^0(t, \omega)$ в задаче A_0 . Для этого установим, что можно подобрать такую функцию $\alpha^{(k)}(\omega)$, состоящую из 0 и 1, что вектор-функция $\alpha^{(k)}(\omega), \zeta^{(k)}(t) = \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \alpha_i^{(k)}(\omega_{r_i}) g_2(x^i(t, \omega)) d\omega$ удовлетворяет всем ограничениям задачи A_2 и

$$J(\alpha^{(k)}(\omega), \zeta^{(k)}(t)) = J(\bar{\alpha}(\omega), \bar{\zeta}(t)).$$

Так как $\zeta^i(t) = \int_{\Omega} |g_2(x^i(t, \omega))| d\omega$ при $i=0, 1, \dots, m$

и $\bar{\zeta}(t)$ непрерывны на $[0, T]$, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что $\bar{\zeta}(t) < -\varepsilon_0 < 0$. В силу равномерной непрерывности $\zeta^i(t)$, $\bar{\zeta}(t)$ на интервале $[0, T]$ последний можно разбить на такие непересекающиеся интервалы $[t_j, t_{j+1}]$, на каждом из которых колебание функций будет меньше $\varepsilon_0/2(m+1)$. Пусть это достигается на разбиении

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_j < \dots < t_s = T.$$

Рассмотрим множество функций $\alpha(\omega)$, для которых

$$1) 0 \leq \alpha_i(\omega_{r_i}), i=0, 1, \dots, m;$$

$$2) \sum_{i=0}^m \alpha_i(\omega_{r_i}) = 1;$$

$$3) \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \alpha_i(\omega_{r_i}) g_2(x^i(t_j, \omega)) d\omega = \bar{\zeta}(t_j), j=0, 1, \dots, s;$$

$$4) \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \alpha_i(\omega_{r_i}) F(x^i(T, \omega)) d\omega = J(\bar{\alpha}(\omega), \bar{\zeta}(t)).$$

Из приведенного выше утверждения следует, что это множество имеет точку

$$\alpha^{(k)}(\omega) = \{\alpha_0^{(k)}(\omega_{r_0}), \alpha_1^{(k)}(\omega_{r_1}), \dots, \alpha_m^{(k)}(\omega_{r_m})\},$$

состоящую из 0 и 1. Непосредственно устанавливается, что

$$\zeta^{(k)}(t) = \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \alpha_i^{(k)}(\omega_{r_i}) g_2(x^i(t, \omega)) d\omega < 0.$$

Таким образом, точка $\alpha^{(k)}(\omega), \zeta^{(k)}(t)$ удовлетворяет всем ограничениям задачи A_2 и

$$J(\alpha^{(k)}(\omega), \zeta^{(k)}(t)) = J(\bar{\alpha}(\omega), \bar{\zeta}(t)) < J(\alpha^0(\omega), \zeta^0(t)).$$

Но пара функций

$$q(t, \omega) = \sum_{i=0}^m \alpha_i^{(k)}(\omega_{r_i}) q^i(t, \omega)$$

будет удовлетворять всем ограничениям задачи A_0 , и на этой паре

$$J(q(t, \omega)) = J(\alpha^{(k)}(\omega), \zeta^{(k)}(t)) < J(q^0(t, \omega)) = J(\alpha^0(\omega); \zeta^0(t)),$$

что противоречит оптимальности решения $q^0(t, \omega)$. Следовательно, точка $\alpha^0(\omega)$, $\zeta^0(t) = \int_{\Omega} g_2(x^0(t, \omega)) d\omega$ будет стационарной точкой задачи A_2 .

На основании этого получим условия оптимальности решения $q^0(t, \omega)$ в задаче A_0 . Запишем уравнение Эйлера задачи A_2 [1].

Конус $(\Omega^0)^*$, сопряженный конусу Ω^0 , состоит из функционалов вида

$$-s_0 \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i(\omega_{r_i}) F(x^i(T, \omega)) d\omega, \quad s_0 \geq 0.$$

Конус $(\Omega^1)^*$, сопряженный конусу Ω^1 , состоит из функционалов вида

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i (\bar{\alpha}_i(\omega_{r_i})),$$

где $\lambda_i(\dots)$ — позитивный функционал в пространстве L_{∞} функций от $\omega_1, \dots, \omega_n$.

Выпишем общий вид функционала из конуса $(\Omega^{2,4})^*$, сопряженного подпространству $\Omega^{2,4}$.

Из [1] следует, что каждый функционал из конуса $(\Omega^{2,4})^*$ можно записать в виде

$$\sigma \left(\sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i(\omega_{r_i}) \right) + l \left(\bar{\zeta}(t) - \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i(\omega_{r_i}) g_2(x^i(t, \omega)) d\omega \right),$$

где $\sigma(\dots)$ — произвольный линейный функционал из множества $(M^1)^*$;

$l(\dots)$ — произвольный линейный функционал из множества $(C[0, T])^*$.

Конус $(\Omega^3)^*$, сопряженный конусу Ω^3 , состоит из функционалов вида

$$- \int_0^T \bar{\zeta}(t) d\mu(t),$$

где $d\mu(t) \geq 0$ — мера, сосредоточенная на множестве тех t , на которых $\xi^0(t) = \int_{\Omega} g_2(x^0(t, \omega)) d\omega = 0$.

Уравнение Эйлера [1] имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & -s_0 \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i(\omega_{r_i}) F(x^i(T, \omega)) d\omega + \sum_{i=1}^m \lambda_i (\bar{\alpha}_i(\omega_{r_i})) - \\ & - \int_0^T \bar{\zeta}(t) d\mu(t) + \sigma \left(\sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i(\omega_{r_i}) \right) + l(\bar{\zeta}(t) - \\ & - \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i(\omega_{r_i}) g_2(x^i(t, \omega)) d\omega) = 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где $\{s_0, \sum_i \|\lambda_i\|, d\mu(t)\} \neq 0$, т. е. не все функционалы нулевые.

Рассматривая это уравнение на подпространстве $\Omega^{2,4}$ и учитывая, что выбор функции $\bar{\alpha}_i(\omega_{r_i})$, $i=1, 2, \dots, m$ независим и что из условия $s_0=0$, $d\mu(t) \equiv 0$ следует $\sum_i \|\lambda_i\| = 0$ (что противоречит условию (3.28), получим для любого i :

$$\left. \begin{aligned} & -s_0 \int_{\Omega} \bar{\alpha}_i(\omega_{r_i}) [F(x^i(T, \omega)) - F(x^0(T, \omega))] d\omega + \\ & + \lambda_i (\bar{\alpha}_i(\omega_{r_i})) - \int_{\Omega} \bar{\alpha}_i(\omega_{r_i}) d\omega \int_0^T [g_2(x^i(t, \omega)) - \\ & - g_2(x^0(t, \omega))] d\mu(t) = 0; \\ & \{s_0, d\mu\} \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Из рассмотрения этого уравнения на положительных функциях $\bar{\alpha}_i(\omega_{r_i})$ можно заключить, что для произвольной функции $\bar{\alpha}_i(\omega_{r_i})$

$$\begin{aligned} & s_0 \int_{\Omega} \bar{\alpha}_i(\omega_{r_i}) [F(x^i(T, \omega)) - F(x^0(T, \omega))] d\omega + \\ & + \int_{\Omega} \bar{\alpha}_i(\omega_{r_i}) d\omega \int_0^T [g_2(x^i(t, \omega)) - g_2(x^0(t, \omega))] d\mu(t) \geq 0; \\ & \{s_0, d\mu\} \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для любой пары функций $q^i(t, \omega)$ из выбранного ранее набора должно быть справедливым следующее неравенство *:

$$\int_{\mathfrak{Q}/\mathfrak{Q}_{r_i}} \left[s_0 F(x^i(T, \omega)) + \int_0^T g_2(x^i(t, \omega)) d\mu \right] d\omega \geq \\ \geq \int_{\mathfrak{Q}/\mathfrak{Q}_{r_i}} \left[s_0 F(x^0(T, \omega)) + \int_0^T g_2(x^0(t, \omega)) d\mu \right] d\omega \quad (3.30)$$

для почти всех $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{r_i}, i=1, 2, \dots, m$.

Обозначим рассматриваемый набор допустимых пар через m , а множество постоянных $s_0 \geq 0$ и мер $d\mu \geq 0$, $[d\mu][\zeta^0(t)] = 0$, удовлетворяющих неравенству (3.30) и условиям нормировки $s_0 + \int_0^T d\mu(t) = 1$, через K_m . Отметим, что это множество определяется m (выбранным набором пар).

Рассмотрим два набора допустимых пар m_1 и m_2 задачи A_0 . Если набор m_2 включает набор m_1 , то, как следует из (3.30), $K_{m_1} \supseteq K_{m_2}$. Если наборы разные, то рассмотрим новый набор $(m_1 \cup m_2)$, состоящий из объединения наборов m_1 и m_2 . Для этого набора $K_{m_1} \supseteq K_{m_1 \cup m_2}$ и $K_{m_2} \supseteq K_{m_1 \cup m_2}$. Такая система имеет непустое пересечение $K = \bigcap_m K_m$ [8].

Итак, можно найти единую для всех наборов допустимых пар постоянную $s_0 \geq 0$ и меру $d\mu$ с нужными свойствами, при этом неравенство (3.30) будет выполняться для любой допустимой пары $q(t, \omega)$.

Пусть выбраны такие $s_0, d\mu \in K$.

а) Пусть $s_0 > 0$. Полагаем $s_0 = 1$ и покажем, что необходимые условия (3.30) оптимальности решения $x^0(t, \omega), u^0(t, \omega)$ задачи A_0 будут достаточными.

В самом деле, пусть $q^0(t, \omega)$ есть решение задачи A_0 , удовлетворяющее неравенству (3.30), а $q^*(t, \omega)$ — произвольное решение. Под решением здесь понимается допустимая пара, удов-

* Здесь и ниже использовано обозначение

$$\int_{\mathfrak{Q}_{r_{i+1}} \times \dots \times \mathfrak{Q}_n} [\dots] d\omega_{r+1} \dots d\omega_n = \int_{\mathfrak{Q}/\mathfrak{Q}_r} [\dots] d\omega.$$

летворяющая всем ограничениям задачи A_0 . Условия (3.30) для решения $q^0(t, \omega)$ и $q^*(t, \omega)$ дают

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega/\Omega_{r^*}} \left[F(x^*(T, \omega)) + \int_0^T g_2(x^*(t, \omega)) d\mu(t) \right] d\omega \geq \\ & \geq \int_{\Omega/\Omega_{r^*}} \left[F(x^0(T, \omega)) + \int_0^T g_2(x^0(t, \omega)) d\mu(t) \right] d\omega \end{aligned}$$

для почти любого $\omega_1, \dots, \omega_{r^*}$. Проинтегрируем это неравенство по всем ω и отметим, что

$$\int_0^T d\mu(t) \int_{\Omega} g_2(x^0(t, \omega)) d\omega = 0, \text{ а } \int_0^T d\mu(t) \int_{\Omega} g_2(x^*(t, \omega)) d\omega \leq 0.$$

Тогда

$$\int_{\Omega} F(x^*(T, \omega)) d\omega \geq \int_{\Omega} F(x^0(T, \omega)) d\omega,$$

т. е. $q^0(t, \omega)$ — оптимальное решение.

Итак, сформулируем условия оптимальности решения

$$q^0(t, \omega) = \{x^0(t, \omega), u^0(t, \omega)\}$$

задачи A_0 .

Для того, чтобы пара $q^0(t, \omega)$ была оптимальным решением, необходимо (а при $s_0 > 0$ и достаточно), чтобы для любой пары $q(t, \omega) = \{x(t, \omega), u(t, \omega)\}$, удовлетворяющей дифференциальным уравнениям и неосредненным ограничениям задачи и совпадающей с парой $q^0(t, \omega)$ на интервале $[t_0, t_{r-1}]$ для почти всех $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ выполнялось следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega/\Omega_r} \left[s_0 F(x(T, \omega)) + \int_0^T g_2(x(t, \omega)) d\mu(t) \right] d\omega \geq \\ & \geq \int_{\Omega/\Omega_r} \left[s_0 F(x^0(T, \omega)) + \int_0^T g_2(x^0(t, \omega)) d\mu(t) \right] d\omega, \end{aligned}$$

где

$$s_0 \geq 0; \quad d\mu(t) \int_{\Omega} g_2(x^0(t, \omega)) d\omega = 0, \quad d\mu(t) \geq 0.$$

З а м е ч а н и е. Отсюда следует, что вместо задачи A_0 можно исследовать задачу на минимум некоторого нового функционала при прежних дифференциальных уравнениях и неосредненных ограничениях. Осредненные фазовые ограничения задачи A_0 «переносятся» в этот новый функционал.

б) Пусть $s_0=0$. При $s_0=0$ мера $d\mu(t) \neq 0$ и из условия (3.30) для произвольной допустимой пары $q(t, \omega)$ получим

$$\int_{\Omega/\Omega_r} d\omega \int_0^T g_2(x(t, \omega)) d\mu \geq \int_{\Omega/\Omega_r} d\omega \int_0^T g_2(x^0(t, \omega)) d\mu. \quad (3.31)$$

Из условия (3.31) следует

$$0 = \int_0^T d\mu(t) \int_{\Omega} g_2(x^0(t, \omega)) d\omega \leq \int_0^T d\mu(t) \int_{\Omega} g_2(x(t, \omega)) d\omega.$$

Так как $\max_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} g_2(x^0(t, \omega)) d\omega = 0$, то для любой допустимой пары $q(t, \omega)$ существует такая точка $t^* \in [0, T]$, что

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} g_2(x^0(t, \omega)) d\omega &\leq \int_{\Omega} g_2(x(t^*, \omega)) d\omega \leq \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} g_2(x(t, \omega)) d\omega. \end{aligned}$$

Таким образом, условия (3.31) будут необходимыми и достаточными условиями оптимальности решения $q^0(t, \omega) = \{x^0(t, \omega), u^0(t, \omega)\}$ в задаче на минимум функционала

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} g_2(t, \omega) d\omega.$$

при ограничениях 1, 2 и 4 задачи A_0 .

3.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В предыдущем разделе было установлено, что задача оптимального управления с осредненными и неосредненными фазовыми ограничениями эквивалентна задаче только с неосредненными ограничениями, но с некоторым новым функционалом. Поэтому особенность задач с фазовыми ограничениями с точки зрения использования необходимых условий оптимальности будет проявляться и в задачах с неосредненными ограничениями. Приведем вычислительную процедуру получения оптимального управления для одного типа статистических задач с неосредненными фазовыми ограничениями [9].

Задача A_1 . Найти управление $u(t, \omega)$, минимизирующее функционал

$$\int_{\Omega} F(x(T, \omega)) d\omega$$

при следующих ограничениях:

$$1) \frac{dx(t, \omega)}{dt} = A(t)x(t, \omega) + f(u(t, \omega), t) + \xi(t, \omega), \\ x(0) = x_0, t \in [0, T];$$

$$2) x(t_i, \omega) \in D_i, i = 0, 1, \dots, n;$$

$$3) u(t, \omega) \in U,$$

где $F(x)$ — выпуклая функция; $A(t), f(u, t)$ — ограниченные измеримые функции и $f(u, t) = B(t)u(t, \omega)$; D_i — выпуклые замкнутые множества; U — произвольное замкнутое множество; $\xi(t, \omega)$ — векторный случайный процесс следующей природы.

Отрезок $[0, T]$ разбит на n частей с точками деления

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_{n-1} < t_n = T.$$

На любом интервале $[t_i, t_{i+1}]$ аргумент $\omega \in \Omega_{i+1}$ может изменяться только при $t = t_i$. На множествах $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, n$, введена вероятностная мера $d\omega_i$. Управление $u(t, \omega)$ должно принадлежать множеству функций с растущим числом переменных: на $[t_i, t_{i+1}]$ функция $u(t, \omega) = u(t, \omega_1, \dots, \omega_{i+1})$, где $\omega_1, \dots, \omega_{i+1} \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i+1}$. На множествах $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i+1}$ мера определяется как прямое произведение мер $d\omega_1, \dots, d\omega_{i+1}$.

Предполагается, что хотя бы одно решение задачи существует. Из предыдущего раздела следуют условия оптимальности решения задачи A_1 : среди множества Q пар функций $q(t, \omega) = \{u(t, \omega); x(t, \omega)\}$, удовлетворяющих всем ограничениям задачи A_1 , оптимальная пара $q^0(t, \omega)$ обладает следующими свойствами: $\bar{G}_1(x^0(t_1, \omega_1)) \leq \bar{G}_1(x(t_1, \omega_1))$ почти для всех ω_1 и для всех $q(t, \omega) \in Q$;

$$\dots - - - - -$$

$$\bar{G}_i(x^0(t_i, \omega_1, \dots, \omega_i)) \leq \bar{G}_i(x(t_i, \omega_1, \dots, \omega_i))$$

почти для всех $\omega_1, \dots, \omega_i$ и для всех $q(t, \omega) \in Q$, совпадающих с оптимальной парой на интервале $[t_0, t_{i-1}]$;

$$\dots - - - - -$$

$$\bar{G}_n(x^0(t_n, \omega_1, \dots, \omega_n)) \leq \bar{G}_n(x(t_n, \omega_1, \dots, \omega_n))$$

почти для всех $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и для всех $q(t, \omega) \in Q$, совпадающих с оптимальной парой $q^0(t, \omega)$ на интервале $[t_0, t_{n-1}]$.

При этом

$$\bar{G}_n(x(t_n, \omega)) = F(x(T, \omega_1, \dots, \omega_n));$$

$$\bar{G}_i(q(t, \omega_1, \dots, \omega_i)) = \int_{\Omega_{i+1}} \min_{q(t, \omega) \in \{q(t, \omega), (t_0, t_i)\}} \times$$

$$\times \bar{G}_{i+1}(q(t, \omega_1, \dots, \omega_{i+1})) d\omega_{i+1},$$

где выражение $\{q(t, \omega), [t_0, t_i]\}$ обозначает множество тех пар функций $q(t, \omega)$, которые совпадают на интервале $[t_0, t_i]$ с фиксированной парой $q(t, \omega_1, \dots, \omega_i)$.

Заметим, что если пары $q^1(t, \omega); q^2(t, \omega) \in Q$ для каждой фиксированной точки $\omega_1, \dots, \omega_i \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_i$ обладают свойством

$$x^1(t_{i-1}, \omega) = x^2(t_{i-1}, \omega) = x_{i-1}(\omega),$$

а на интервале $[t_{i-1}, t_n]$ пара $q^1(t, \omega) = q^2(t, \omega)$, то для них справедливо

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_n} F(x^1(T, \omega_1, \dots, \omega_n)) d\omega_{i+1} \dots d\omega_n = \\ &= \int_{\Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_n} F(x^2(T, \omega_1, \dots, \omega_n)) d\omega_{i+1} \dots d\omega_n. \end{aligned}$$

Любые пары с такими свойствами не будут различаться при проверке свойств. Тогда каждому классу пар $\{q(t, \omega_1, \dots, \omega_i), [t_0, t_i]\}$ можно для почти всех точек $\omega_1, \dots, \omega_i$ взаимно однозначно сопоставить точку $x(t_i, \omega_1, \dots, \omega_i)$ и для каждого класса определить функцию

$$\bar{G}_i(x(t_i, \omega_1, \dots, \omega_i)) = \bar{G}_i(q(t, \omega_1, \dots, \omega_i))$$

и управление

$$u(t, x(t_i, \omega_1, \dots, \omega_i), \omega_{i+1}, \dots, \omega_n) = u(t, \omega_1, \dots, \omega_i, \omega_{i+1}, \dots, \omega_n).$$

Покажем, что в задаче A_1 все функции $\bar{G}_i(\dots)$ выпуклы и задачи, которые нужно решать на каждом интервале для определения оптимального решения, являются однотипными.

Рассмотрим интервал $[t_{n-1}, t_n]$. Определим область допустимых начальных точек $x_{n-1} = x(t_{n-1}) \in \bar{D}_{n-1}$, как совокупность точек, для которых выполняются следующие свойства:

1) $x_{n-1} \in D_{n-1}$;

2) для любой точки $\omega_n \in \Omega_n$ найдется такое управление $u(t, x_{n-1}, \omega_n) \in U$, что

$$\begin{aligned} x_n = & H(t_n) H^{-1}(t_{n-1}) x_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} H(t_n) H^{-1}(t) \times \\ & \times [f(u, t) + \xi(t, \omega_n)] dt \in D_n, \end{aligned}$$

где $H(t)$ — фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения из задачи A_1 .

Обозначим результат преобразования точки x_{n-1} в силу дифференциальных уравнений с управлением $u(t, x_{n-1}, \omega_n)$ и $\omega_n \in \Omega_n$ через $x_n = x_n(u(t, x_{n-1}, \omega_n), \omega_n, x_{n-1})$.

Заметим, что в силу теоремы Ляпунова [3] при каждой фиксированной паре точек x_{n-1}, ω_n , произвольном замкнутом множестве U и измеримых по t функций $u(t, x_{n-1}, \omega_n) \in U$ множество $S(x_{n-1}, \omega_n) = \{x_n : x_n(u(t, x_{n-1}, \omega_n), \omega_n, x_{n-1})\}$ будет выпуклым. Назовем множество $S(x_{n-1}, \omega_n)$ образом точки (x_{n-1}, ω_n) . Укажем путь построения множества $\bar{D}_{n-1}$. Фиксируем произвольную пару точек x_{n-1}, ω_n , где $x_{n-1} \in D_{n-1}, \omega_n \in \Omega_n$. Введем в рассмотрение множество векторов $l \in X, \|l\| = 1$, где X — пространство векторов x . Из условий:

$$\min_{u \in U} \left\{ l, H(t_n) H^{-1}(t_{n-1}) x_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} H(t_n) H^{-1}(t) [f(u, t) + \xi(t, \omega_n)] dt \right\};$$

$$\min_{u \in U} \left\{ l, H(t_n) H^{-1}(t_{n-1}) x_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} H(t_n) H^{-1}(t) [f(u, t) + \xi(t, \omega_n)] dt \right\},$$

определим функции $u^-(\dots)$ и $u^+(\dots)$ соответственно. В этих условиях только второе слагаемое зависит от u . Это слагаемое принимает экстремальное значение, когда в каждый момент t подынтегральная функция экстремальна. Эквивалентные условия принимают следующий вид:

$$\min_{u \in U} l, H(t_n) H^{-1}(t) f(u, t) \rightarrow u^-(l, t);$$

$$\max_{u \in U} l, H(t_n) H^{-1}(t) f(u, t) \rightarrow u^+(l, t).$$

Заметим, что функции u^-, u^+ зависят только от переменных l, t . С помощью функций $u^-(l, t), u^+(l, t)$ можно получить все граничные точки множества $S(x_{n-1}, \omega_n)$ для любой точки x_{n-1}, ω_n . Каждую точку отрезка, соединяющего две граничные точки, которые отвечают одной паре функций $u^-(l, t), u^+(l, t)$, можно определить из выпуклой комбинации

$$(1 - \beta) x_n(u^-(l, t), \omega_n, x_{n-1}) + \beta x_n(u^+(l, t), \omega_n, x_{n-1}),$$

где $0 \leq \beta \leq 1$.

Любую точку множества $S(x_{n-1}, \omega_n)$ можно получить, изменяя l и β .

Чтобы построить множество $\bar{D}_{n-1}$, нужно среди всех точек $x_{n-1} \in D_{n-1}$ оставить такие точки, у которых множество $S(x_{n-1}, \omega_n) \cap D_n$ при всех $\omega_n \in \Omega_n$ — непустое. Множество $S(x_{n-1}, \omega_n) \cap D_n$ — выпуклое. Для каждого l выделим такое множество β , что $0 \leq \beta \leq 1$ и

$$(1 - \beta) x_n(u^-(l, t), \omega_n, x_{n-1}) + \beta x_n(u^+(l, t), \omega_n, x_{n-1}) \in D_n.$$

Обозначим это множество $\{\beta(l, x_{n-1}, \omega_n)\}_{n-1}$.

Ясно, что точки $x_{n-1} \in D_{n-1}$, для которых при всех $\omega_n \in \Omega_n$ хотя бы для одного l множество $\{\beta(l, x_{n-1}, \omega_n)\}_{n-1}$ — непустое, принадлежат множеству $\bar{D}_{n-1}$. Описанным путем можно построить это множество. Покажем, что для любой тройки (l, x_{n-1}, ω_n) , где

$$l \in X, \|l\| = 1, x_{n-1} \notin \bar{D}_{n-1}; \omega_n \in \Omega_n,$$

множество $\{\beta(l, x_{n-1}, \omega_n)\}_{n-1}$ (если оно непустое) — выпуклое.

Докажем это. Пусть точки $\beta_1, \beta_2 \in \{\beta(l, x_{n-1}, \omega_n)\}_{n-1}$, тогда для $0 \leq \lambda \leq 1$ будет выполняться включение

$$\begin{aligned} & [1 - \lambda\beta_1 - (1 - \lambda)\beta_2] x_n(u^-(l, t), \omega_n, x_{n-1}) + [\lambda\beta_1 + (1 - \lambda)\beta_2] \times \\ & \times x_n(u^+(l, t), \omega_n, x_{n-1}) = \lambda [(1 - \beta_1) x_n(u^-(l, t), \omega_n, x_{n-1}) + \\ & + \beta_1 x_n(u^+(l, t), \omega_n, x_{n-1})] + (1 - \lambda) [(1 - \beta_2) x_n(u^-(l, t), \omega_n, x_{n-1}) + \\ & + \beta_2 x_n(u^+(l, t), \omega_n, x_{n-1})] \in D_n. \end{aligned}$$

Это следует из того, что каждое из выражений, стоящих множителем при λ и $(1 - \lambda)$ принадлежит выпуклому множеству D_n .

Таким образом, для определения множества $\{\beta(l, x_{n-1}, \omega_n)\}_{n-1}$ нужно найти его максимальный $\beta_{\max}(l, x_{n-1}, \omega_n)$ и минимальный $\beta_{\min}(l, x_{n-1}, \omega_n)$ элементы. Докажем, что множество $\bar{D}_{n-1}$ — выпуклое. Пусть

$$x'_{n-1} \notin \bar{D}_{n-1}, x''_{n-1} \in \bar{D}_{n-1}.$$

Покажем, что точка $\lambda x'_{n-1} + (1 - \lambda)x''_{n-1} \in \bar{D}_{n-1}$,

где $0 \leq \lambda \leq 1$.

Для этого нужно проверить, что

$$1) \lambda x'_{n-1} + (1 - \lambda)x''_{n-1} \in D_{n-1};$$

2) для всех ω_n найдется такое управление

$$u(t, \lambda x'_{n-1} + (1 - \lambda)x''_{n-1}, \omega_n) \in U,$$

что $x_n(u(\dots), \lambda x'_{n-1} + (1 - \lambda)x''_{n-1}, \omega_n) \in D_n$.

Первое условие выполняется ввиду выпуклости D_{n-1} . Для проверки второго условия, обозначим

$$\begin{aligned} & \int_{t_{n-1}}^{t_n} H(t_n) H^{-1}(t) f(u^+(l, t), t) dt = a_n^+(l); \\ & \int_{t_{n-1}}^{t_n} H(t_n) H^{-1}(t) f(u^-(l, t), t) dt = a_n^-(l); \end{aligned}$$

$$H(t_n)H^{-1}(t_{n-1})x'_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} H(t_n)H^{-1}(t)\xi(t, \omega_n)dt = X'_{n-1}(\omega_n);$$

$$H(t_n)H^{-1}(t_{n-1})x''_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} H(t_n)H^{-1}(t)\xi(t, \omega_n)dt = X''_{n-1}(\omega_n).$$

В силу предположений о принадлежности точек x'_{n-1} , x''_{n-1} для всех $\omega_n \in \Omega_n$ найдутся такие

$$l_1, \beta_1 \in \{\beta(l_1, x'_{n-1}, \omega_n)\}_{n-1} \text{ и } l_2, \beta_2 \in \{\beta(l_2, x''_{n-1}, \omega_n)\}_{n-1},$$

что

$$X'_{n-1} + (1 - \beta_1)a_n^-(l_1) + \beta_1 a_n^+(l_1) \in D_n;$$

$$X''_{n-1} + (1 - \beta_2)a_n^-(l_2) + \beta_2 a_n^+(l_2) \in D_n.$$

Так как множество D_n — выпуклое, то выпуклой будет комбинация

$$\begin{aligned} & \lambda X'_{n-1} + \lambda(1 - \beta_1)a_n^-(l_1) + \lambda\beta_1 a_n^+(l_1) + (1 - \lambda)X''_{n-1} + \\ & + (1 - \lambda)(1 - \beta_2)a_n^-(l_2) + (1 - \lambda)\beta_2 a_n^+(l_2) \in D_n. \end{aligned}$$

Для каждой точки x_{n-1} , ω_n множества $S(x_{n-1}, \omega_n) = X_{n-1}(\omega_n)$ — выпуклые и не зависят от точки x_{n-1} , ω_n . В эти множества входят векторы $a^\pm(l_1)$, $a^\pm(l_2)$ и их выпуклые комбинации. Поэтому

$$\begin{aligned} & \lambda(1 - \beta_1)a_n^-(l_1) + \lambda\beta_1 a_n^+(l_1) + (1 - \lambda)(1 - \beta_2)a_n^-(l_2) + \\ & + (1 - \lambda)\beta_2 a_n^+(l_2) \in S(\lambda x'_{n-1} + (1 - \lambda)x''_{n-1}, \omega_n) = \\ & = [\lambda X'_{n-1} + (1 - \lambda)X''_{n-1}]. \end{aligned}$$

Так как при этом вся выпуклая комбинация принадлежала множеству D_n , то для точки $\lambda x'_{n-1} + (1 - \lambda)x''_{n-1}$ для всех $\omega_n \in \Omega_n$ можно подобрать такие l_λ и β_λ , что

$$\lambda X'_{n-1} + (1 - \lambda)X''_{n-1} + (1 - \beta_\lambda)a_n^-(l_\lambda) + \beta_\lambda a_n^+(l_\lambda) \in D_n.$$

Таким образом, точка $\lambda x'_{n-1} + (1 - \lambda)x''_{n-1} \in \bar{D}_{n-1}$ и множество $\bar{D}_{n-1}$ — выпуклое.

В рассматриваемой задаче минимизируемый функционал $F(x(T, \omega_1, \dots, \omega_n))$ на интервале $[t_{n-1}, t_n]$ зависит только от конечной точки. Оптимальную точку $x^0(T, \omega_1, \dots, \omega_n)$, в которую должна переходить точка x_{n-1} , ω_n (где $x_{n-1} \in \bar{D}_{n-1}$, $\omega_n \in \Omega_n$) можно найти из условия

$$x_n^0 = X_{n-1}(\omega_n) + (1 - \beta_{\text{онт}})a_n^-(l_{\text{онт}}) + \beta_{\text{онт}}a_n^+(l_{\text{онт}}).$$

В последнем условии оптимальные $l_{\text{опт}} \in X$, $\|l_{\text{опт}}\| = 1$

и $\beta_{\text{опт}}(l_{\text{опт}}, x_{n-1}, \omega_n) \in \{\beta(l_{\text{опт}}, x_{n-1}, \omega_n)\}_{n-1}$ получим из выражения

$$\min_l \min_{\beta_{\min}(l, x_{n-1}, \omega_n) < \beta < \beta_{\max}(l, x_{n-1}, \omega_n)} F(X_{n-1}(\omega_n) + (1-\beta)a_n^-(l) + \beta a_n^+(l)) = G_n(x_{n-1}, \omega_n).$$

Отсюда видно, что оптимальное управление на интервале $[t_{n-1}, t_n]$ при нахождении системы в точке x_{n-1}, ω_n можно также получить из условия попадания из точки x_{n-1} в точку

$$x_n = x_{n-1} + (1 - \beta_{\text{опт}}(l_{\text{опт}}, x_{n-1}, \omega_n)) \times \int_{t_{n-1}}^{t_n} H(t_n) H^{-1}(t) \times \\ \times f(u^-(l_{\text{опт}}, t), t) dt + \beta_{\text{опт}}(l_{\text{опт}}, x_{n-1}, \omega_n) \int_{t_{n-1}}^{t_n} H(t_n) H^{-1}(t) \times \\ \times f(u^+(l_{\text{опт}}, t), t) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} H(t_n) H^{-1}(t) \xi(t, \omega_n) dt$$

в силу дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(u, t) + \xi(t, \omega_n)$$

и при ограничении на управление $u \in U$.

В двух частных случаях оптимальное управление находится тривиально:

$$\beta_{\text{опт}} = 0 \text{ и } \beta_{\text{опт}} = 1.$$

Ясно, что $\bar{G}_n(x(t_{n-1}, \dots)) = \int_{\Omega_n} G_n(x_{n-1}, \omega_n) d\omega_n$.

Докажем, что функция $\bar{G}_n(x_{n-1})$ — выпуклая. Достаточно показать выпуклость функции $G_n(x_{n-1}, \omega_n)$, так как если последняя выпуклая, то и функция

$$\bar{G}_n(x_{n-1}) = \int_{\Omega_n} G_n(x_{n-1}, \omega_n) d\omega_n$$

будет также выпуклая.

В самом деле, пусть функция $G_n(x_{n-1}, \omega_n)$ — выпуклая по x_{n-1} , тогда для любых точек x'_{n-1}, x''_{n-1} и любых ω_n

$$G(\lambda x'_{n-1} + (1-\lambda)x''_{n-1}, \omega_n) \leq \lambda G(x'_{n-1}, \omega_n) + (1-\lambda)G(x''_{n-1}, \omega_n),$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$.

Проинтегрировав это неравенство по множеству Ω_n с положительной мерой $d\omega_n$, получим

$$\int_{\Omega_n} G(\lambda x'_{n-1} + (1-\lambda)x''_{n-1}, \omega_n) d\omega_n \leq \lambda \int_{\Omega_n} G(x'_{n-1}, \omega_n) d\omega_n + \\ + (1-\lambda) \int_{\Omega_n} G(x''_{n-1}, \omega_n) d\omega_n$$

или

$$\bar{G}_n(\lambda x'_{n-1} + (1-\lambda)x''_{n-1}) \leq \lambda \bar{G}_n(x'_{n-1}) + (1-\lambda) \bar{G}_n(x''_{n-1}).$$

Покажем выпуклость функции $G_n(x_{n-1}, \omega_n)$. Сохраняя обозначения, введенные выше, запишем

$$\lambda G_n(x'_{n-1}, \omega_n) + (1-\lambda) G_n(x''_{n-1}, \omega_n) = \\ = \lambda \min_{l \in \{\beta(l, x'_{n-1}, \omega_n)\}_{n-1}} \min F(X'_{n-1} + (1-\beta) a_n^-(l) + \beta a_n^+(l)) + \\ + (1-\lambda) \min_{l \in \{\beta(l, x''_{n-1}, \omega_n)\}_{n-1}} \min F(X''_{n-1} + (1-\beta) a_n^-(l) + \beta a_n^+(l)) = \\ = \lambda F(X'_{n-1} + (1-\beta'_{\text{опт}}) a_n^-(l'_{\text{опт}}) + \beta'_{\text{опт}} a_n^+(l'_{\text{опт}})) + \\ + (1-\lambda) F(X''_{n-1} + (1-\beta''_{\text{опт}}) a_n^-(l''_{\text{опт}}) + \beta''_{\text{опт}} a_n^+(l''_{\text{опт}})) \geq \\ \geq F(\lambda X'_{n-1} + (1-\lambda) X''_{n-1} + \lambda(1-\beta'_{\text{опт}}) a_n^-(l'_{\text{опт}}) + \\ + \lambda \beta'_{\text{опт}} a_n^+(l'_{\text{опт}}) + (1-\lambda)(1-\beta''_{\text{опт}}) a_n^-(l''_{\text{опт}}) + (1-\lambda) \beta''_{\text{опт}} a_n^+(l''_{\text{опт}})).$$

Было доказано, что точка

$$\lambda X'_{n-1} + (1-\lambda) X''_{n-1} + \lambda[1-\beta'_{\text{опт}}] a_n^-(l'_{\text{опт}}) + \lambda \beta'_{\text{опт}} a_n^+(l'_{\text{опт}}) + \\ + (1-\lambda)(1-\beta''_{\text{опт}}) a_n^-(l''_{\text{опт}}) + (1-\lambda) \beta''_{\text{опт}} a_n^+(l''_{\text{опт}})$$

принадлежит множеству $S(x'_{n-1} + (1-\lambda)x''_{n-1}, \omega_n) \cap D_n$.

Поэтому найдутся такие

$$l \in X; \|l^\lambda\| = 1 \text{ и } \beta^\lambda \in \{\beta(l, \lambda x'_{n-1} + (1-\lambda)x''_{n-1})\}_{n-1},$$

что точка $\lambda X'_{n-1} + (1-\lambda) X''_{n-1} + (1-\beta^\lambda) a_n^-(l^\lambda) + \beta^\lambda a_n^+(l^\lambda)$ будет совпадать с названной выше точкой. Отсюда

$$F(\lambda X'_{n-1} + (1-\lambda) X''_{n-1} + \lambda(1-\beta'_{\text{опт}}) a_n^-(l'_{\text{опт}}) + \lambda \beta'_{\text{опт}} a_n^+(l'_{\text{опт}}) + \\ + (1-\lambda)(1-\beta''_{\text{опт}}) a_n^-(l''_{\text{опт}}) + (1-\lambda) \beta''_{\text{опт}} a_n^+(l''_{\text{опт}})) = \\ = F(\lambda X'_{n-1} + (1-\lambda) X''_{n-1} + (1-\beta^\lambda) a_n^-(l^\lambda) + \beta^\lambda a_n^+(l^\lambda)) \geq \\ \geq \min_{l \in \{\beta(l, \lambda x'_{n-1} + (1-\lambda)x''_{n-1}, \omega_n)\}} \min F(\lambda X'_{n-1} + (1-\lambda) X''_{n-1} + (1-\beta) \times \\ \times a_n^-(l) + \beta a_n^+(l)) = G_n(\lambda x'_{n-1} + (1-\lambda) x''_{n-1}, \omega_n).$$

Таким образом, $G_n(x_{n-1})$ — выпуклая функция.

Для того чтобы решение задачи существовало на интервале $[t_{n-2}, t_n]$, необходимо, чтобы конечная точка x_{n-1} интервала $[t_{n-2}, t_{n-1}]$ принадлежала множеству $\bar{D}_{n-1}$, так как в противном случае при некоторых ω_n фазовое ограничение D_n будет нарушено. Поэтому множество $\bar{D}_{n-2}$ допустимых начальных условий для интервала $[t_{n-2}, t_{n-1}]$ будем определять следующими условиями: точка $x_{n-2} \in \bar{D}_{n-2}$, если

- 1) $x_{n-2} \in D_{n-2}$;

- 2) для всех $\omega_{n-1} \in \Omega_{n-1}$ найдется такое управление

$$u(t, x_{n-2}, \omega_{n-1}) \in U,$$

что

$$x_{n-1}(u(t, x_{n-2}, \omega_{n-1}), \omega_{n-1}, x_{n-2}) \in \bar{D}_{n-1}.$$

Так как множество $\bar{D}_{n-1}$ — выпуклое, то для интервала $[t_{n-2}, t_{n-1}]$ справедливы все предыдущие рассуждения.

Итак, оптимальное решение $q^0(t, \omega)$ задачи A_1 определяется из последовательного решения на каждом интервале $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ для каждой точки $\omega_1, \dots, \omega_i \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_i$ следующей задачи.

Найти
$$\min_{u(t, x^0(t_{i-1}), \omega_i)} \bar{G}_i(x(t_i, \omega_1, \dots, \omega_i))$$

при ограничениях:

- 1) $\frac{dx(t, \omega)}{dt} = A(t)x(t, \omega) + f(u(t, \omega), t) + \xi(t, \omega);$

$$x(t_{i-1}) = x^0(t_{i-1}, \omega_1, \dots, \omega_{i-1});$$

- 2) $x(t_i, \omega_1, \dots, \omega_i) \in \bar{D}_i;$

- 3) $u(t, x^0(t_{i-1}), \omega_i) \in U,$

где $x^0(t_{i-1}, \omega_1, \dots, \omega_{i-1})$ — значение функции $x^0(t, \omega_1, \dots, \omega_{i-1})$, определенной в результате решения этой задачи на предыдущем интервале $[t_{i-2}, t_{i-1}]$, в точке $t_{i-1}, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}$.

Для интервала $[t_0, t_1]$ точка $x(t_0) = x_0$.

Из доказанного выше все $\bar{G}_i(x(t_i, \omega_1, \dots, \omega_i))$ — выпуклые функции, а $\bar{D}_i$ — выпуклые множества. Таким образом, на каждом интервале решаются одностипные задачи.

Заметим, что в случае дифференциальных уравнений, у которых есть решение на интервале $[0, T]$ для любого из рассматриваемых управлений, решение задачи A_1 существует, если:

- а) все множества $\bar{D}_i$ (при $i = 0, 1, \dots, n$) — непустые;

- б) $x_0 \in \bar{D}_0$.

3.5. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТРУКТУР ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВАНИИ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В настоящем разделе рассматриваются два примера, из которых видно, как на основании полученных условий оптимальности можно установить структуры законов управления.

Наведение на маневрирующую цель при ограничении на угол встречи. В некоторых случаях необходимо навести ракету на маневрирующую цель так, чтобы угол между векторами скоростей ракеты и цели в момент встречи (угол встречи) был не больше заданного. Если можно пренебречь ошибками измерений и предположить, что цель маневрирует независимым от поведения ракеты образом, а управление ракетой и маневр цели слабо влияют на скорость их сближения, то исследование можно свести к решению задачи, физическая интерпретация которой дана на рис. 3.4.

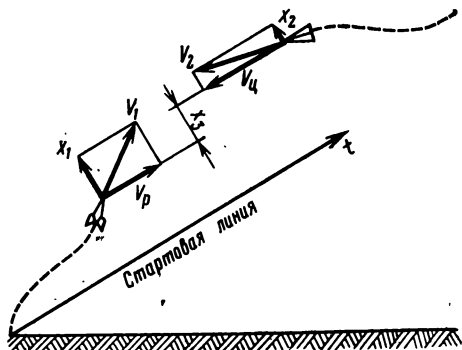


Рис. 3.4. Физическая интерпретация задачи

На этом рисунке V_1 и V_2 обозначают соответственно векторы скорости ракеты и цели, а V_p и V_c — их проекции на заранее фиксированную и неизменную в процессе наведения стартовую линию. В обозначениях рис. 3.4 задача формулируется следующим образом.

Найти такое управление ракетой $u(t, \dots)$, которое минимизирует функционал

$$\int_0^T |x_3(t)| dt$$

при ограничениях:

$$1) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = u; \quad t \in [0, T]; \\ \frac{dx_2}{dt} = \omega; \quad |\omega_i| \leq \xi_0, \quad \omega_i \in \Omega; \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2; \quad x_1(0); \quad x_2(0); \quad x_3(0); \end{cases}$$

$$2) |ax_1(T) + x_2(T)| \leq \varphi^0;$$

$$3) |u| \leq u_0.$$

Здесь x_1 — отклонение ракеты от линии дальности; x_2 — отклонение цели от линии дальности; ω_i — независимые случайные величины, с помощью которых описывается маневр цели.

Наблюдения фазовых координат производятся в моменты t_i , удовлетворяющие условию

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = T.$$

Вместо непрерывных уравнений рассмотрим разностные:

$$x_1(t_i) = x_1(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(\dots) dt;$$

$$x_2(t_i) = x_2(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega_i dt;$$

$$x_3(t_i) = x_3(t_{i-1}) + [x_1(t_{i-1}) - x_2(t_{i-1})] \Delta t.$$

Приступим к определению оптимального управления. Рассматриваемая задача принадлежит к типу задач, изученных в предыдущем разделе. Применим результаты этих исследований.

На интервале $[t_{n-1}, t_n]$

$$x_1(t_n) = x_1(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} u(t) dt;$$

$$x_2(t_n) = x_2(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega(t) dt;$$

$$x_3(t_n) = x_3(t_{n-1}) + [x_1(t_{n-1}) - x_2(t_{n-1})] \Delta t.$$

При этом должны выполняться условия:

$$\min_u |x_3(t_n)| \text{ и } |ax_1(t_n) + x_2(t_n)| \leq \varphi^0,$$

которые через фазовые координаты в начале интервала можно выразить следующим образом:

$$\min_u |x_3(t_{n-1}) + [x_1(t_{n-1}) - x_2(t_{n-1})] \Delta t|;$$

$$\left| a \int_{t_{n-1}}^{t_n} u(t) dt + ax_1(t_{n-1}) + x_2(t_{n-1}) + \omega_n \Delta t \right| \leq \varphi^0.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} ax_1(t_{n-1}) + x_2(t_{n-1}) &= \varphi_{n-1}; \quad \varphi_{n-1} + \omega_n \Delta t = \varphi_{n-1}^*; \\ x_3(t_{n-1}) + [x_1(t_{n-1}) - x_2(t_{n-1})] \Delta t &= L_{n-1}; \quad L_{n-1} = L_{n-1}^*; \\ \varphi_{n-1}^* + a \int_{t_{n-1}}^{t_n} u(t) dt &= \varphi_n; \quad L_{n-1}^* = L_n. \end{aligned}$$

При случайном воздействии ω_n точка φ_{n-1} , L_{n-1} преобразуется в точку φ_{n-1}^* , L_{n-1}^* , которая, в свою очередь, при управлении $|u(t)| \leq u_0$ переходит в точку φ_n , L_n . Граничные точки множества образов точки φ_{n-1}^* , L_{n-1}^* , которые (образы) получаются в результате управления, определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \max_{|u| \leq u_0} l_1, \left[\varphi_{n-1}^* + a \int_{t_{n-1}}^{t_n} u(t) dt \right] + l_2, \quad L_{n-1}^*; \\ u^+(t) = u_0 \operatorname{sign} l_1; \\ \varphi_n = \varphi_{n-1}^* + \beta(-u_0 \Delta t) + (1 - \beta) u_0 \Delta t; \quad 0 \leq \beta \leq 1; \\ -\varphi^0 \leq \varphi_n \leq \varphi^0. \end{aligned}$$

Образы точки φ_{n-1} , L_{n-1} при случайном воздействии ω_n (случайный сдвиг) и образы точки φ_{n-1}^* , L_{n-1}^* при управлении (управляемый сдвиг) даны на рис. 3.5.

Проведем синтез управления по интервалам.

На интервале $[t_{n-1}, t_n]$ по известным координатам $x_1(t_{n-1})$, $x_2(t_{n-1})$, $x_3(t_{n-1})$ и воздействию ω_n определяем φ_{n-1}^* ; если $|\varphi_{n-1}^* \pm au_0 \Delta t| \leq \varphi^0$, то управление — произвольное (область I на рис. 3.5); если $\varphi_{n-1}^* + au_0 \Delta t > \varphi^0$ или $\varphi_{n-1}^* - au_0 \Delta t < -\varphi^0$, но $|\varphi_{n-1}^*| \leq \varphi^0$, то выбор управления ограничивается необходимостью выполнения условия: $-\varphi^0 \leq \varphi_n \leq \varphi^0$ (области II на рис. 3.5);

если $\varphi_{n-1}^* > \varphi^0$ или $\varphi_{n-1}^* < -\varphi^0$, то

$$u_{\text{онт}} = \frac{\varphi^0 - \varphi_{n-1}^*}{a \Delta t}, \quad \text{или} \quad u_{\text{онт}} = \frac{-\varphi^0 - \varphi_{n-1}^*}{a \Delta t}.$$

Область допустимых значений φ_{n-1}^* , L_{n-1}^* при этом определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \varphi_{n-1}^* - au_0 \Delta t \leq \varphi^0 \rightarrow \varphi_{n-1}^* \leq \varphi^0 + au_0 \Delta t; \\ \varphi_{n-1}^* + au_0 \Delta t \geq -\varphi^0 \rightarrow -\varphi^0 - au_0 \Delta t \leq \varphi_{n-1}^*. \end{aligned}$$

Область допустимых $x_1(t_{n-1})$, $x_2(t_{n-1})$, $x_3(t_{n-1})$, т. е. множество D_{n-1} удобно определять в координатах φ_{n-1} , L_{n-1} :

$$\max_{\omega_n} \varphi_{n-1}^* - au_0 \Delta t \leq \varphi^0 \rightarrow \varphi_{n-1} \leq \varphi^0 + (au_0 - \xi_0) \Delta t;$$

$$\min_{\omega_n} \varphi_{n-1}^* + au_0 \Delta t \geq -\varphi^0 \rightarrow \varphi_{n-1} \geq -\varphi^0 - (au_0 - \xi_0) \Delta t.$$

На интервале $[t_{n-2}, t_{n-1}]$ следует рассматривать задачу минимизации функции $\bar{G}_{n-1} = \int_{\delta_n} |L_{n-1}^*| d\omega_n = |L_{n-1}|$ при фазовом огра-

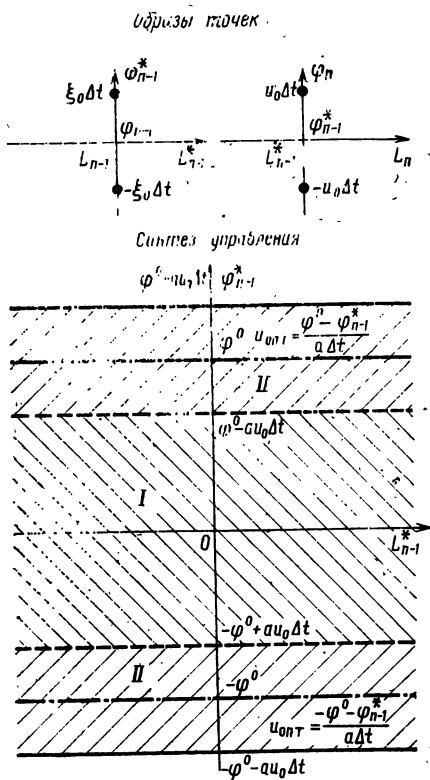


Рис. 3.5. Образы точек φ_i , L_i и φ_i^* , L_i^* и синтез управления на интервале $[t_{n-1}, t_n]$

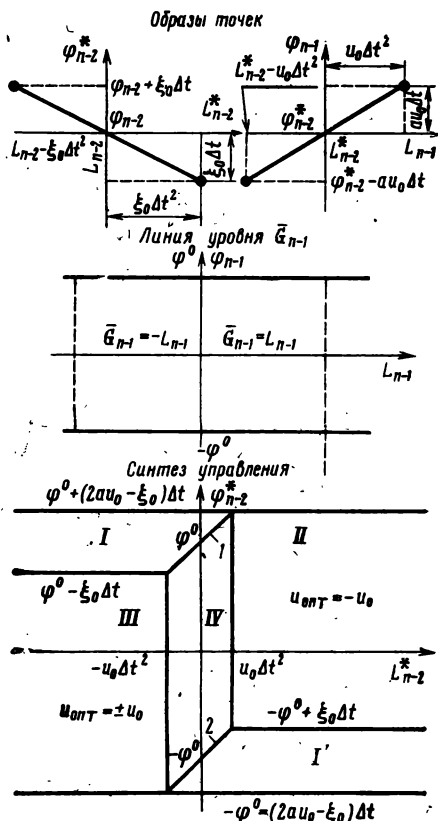


Рис. 3.6. Построение оптимального управления на интервале $[t_{n-2}, t_{n-1}]$

ничении $|\varphi_{n-1}| \leq \varphi^0 + (au_0 - \xi_0) \Delta t$. С учетом этих соотношений и дифференциальных уравнений задачи удобно ввести следующие обозначения:

$$\varphi_{n-2} = ax_1(t_{n-2}) + x_2(t_{n-2}) \rightarrow \varphi_{n-2}^* = \varphi_{n-2} + \omega_{n-1} \Delta t;$$

$$L_{n-2} = x_3(t_{n-2}) + [x_1(t_{n-2}) - x_2(t_{n-2})] 2\Delta t \rightarrow L_{n-2}^* = \\ = L_{n-2} - \omega_{n-1} \Delta t^2;$$

$$\varphi_{n-1} = \varphi_{n-2}^* + a \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} u(t) dt; \quad L_{n-2} = L_{n-2}^* + \Delta t \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} u(t) dt.$$

Граница образа точки φ_{n-2}^* , L_{n-2}^* определяется из выражения

$$\max_{|u| \leq u_0} \left[l_1, \left\{ \varphi_{n-2}^* + a \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} u(t) dt \right\} + l_2, \left\{ L_{n-2}^* + \Delta t \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} u(t) dt \right\} \right] \rightarrow \\ \rightarrow u^+ = u_0 \operatorname{sign}(l_1 a + l_2 \Delta t).$$

Образы точки φ_{n-2} , L_{n-2} при случайном воздействии ω_{n-1} и образы точки φ_{n-2}^* , L_{n-2}^* при управлении даны на рис. 3.6.

Область допустимых точек φ_{n-2}^* , L_{n-2}^* определяется следующими соотношениями:

$$\varphi_{n-2}^* - a u_0 \Delta t \leq \varphi^0 + (a u_0 - \xi_0) \Delta t \rightarrow \varphi_{n-2}^* \leq \varphi^0 + (2a u_0 - \xi_0) \Delta t;$$

$$\varphi_{n-2}^* + a u_0 \Delta t \geq -\varphi^0 - (a u_0 - \xi_0) \Delta t \rightarrow \varphi_{n-2}^* \geq (2a u_0 - \xi_0) \Delta t.$$

Область $\bar{D}_{n-2}$ определяется из выражений:

$$\max_{\omega_{n-1}} \varphi_{n-2}^* - a u_0 \Delta t \leq \varphi^0 + (a u_0 - \xi_0) \Delta t \rightarrow$$

$$\rightarrow \varphi_{n-2} \leq \varphi^0 + (a u_0 - \xi_0) \Delta t;$$

$$\min_{\omega_{n-1}} \varphi_{n-2}^* + a u_0 \Delta t \geq -\varphi^0 - (a u_0 - \xi_0) \Delta t \rightarrow \varphi_{n-2} \geq -\varphi^0 - (a u_0 - \xi_0) \Delta t.$$

Из изложенного следует, что оптимальное управление $u_{\text{опт}}$ на этом интервале, которое определяется только для допустимых точек φ_{n-2}^* , L_{n-2}^* , находится из следующего соотношения:

$$u_{\text{опт}} = \beta_{\text{опт}} (-u_0) + (1 - \beta_{\text{опт}}) u_0,$$

где $\beta_{\text{опт}} = \beta_{\text{опт}}(l_{\text{опт}})$ получаем как точку, в которой достигается

$$\min_l \min_{\beta \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]} |L_{n-1} = L_{n-2}^* + \Delta t \beta (-u_0) + (1 - \beta) u_0 \Delta t|.$$

Отсюда следует, что $u_{\text{опт}}$ не зависит от t на рассматриваемом интервале.

Оптимальное управление можно найти также из следующих соображений: управление должно смещать точку φ_{n-2}^* , L_{n-2}^* так, чтобы значение функции $\bar{G}_{n-1}$ в смещенной точке было возможно меньшим и фазовое ограничение не нарушалось. Другими

словами, нужно перевести эту точку на линию уровня функции $\bar{G}_{n-1}$ с возможно меньшим значением этой функции на ней.

Определим область всех точек φ_{n-2}^* , L_{n-2}^* , которые нельзя даже с предельным значением управления перевести в область абсолютного минимума $\bar{G}_{n-1}$:

при $L_{n-2}^* < 0$

$$L_{n-2}^* + u_0 \Delta t^2 < 0 \rightarrow L_{n-2}^* < -u_0 \Delta t^2;$$

$$\varphi_{n-2}^* + au_0 \Delta t \leq \varphi^0 + (au_0 - \xi_0) \Delta t \rightarrow \varphi_{n-2}^* \leq \varphi^0 - \xi_0 \Delta t;$$

при $L_{n-2}^* > 0$

$$L_{n-2}^* - u_0 \Delta t^2 > 0 \rightarrow L_{n-2}^* > u_0 \Delta t^2;$$

$$-\varphi^0 - (au_0 - \xi_0) \Delta t \leq \varphi_{n-2}^* - au_0 \Delta t \rightarrow \varphi_{n-2}^* \geq -\varphi^0 + \xi_0 \Delta t.$$

При нарушении фазовых ограничений в случае предельных управлений оптимальное управление для тех точек, которые не смещаются в область абсолютного минимума функции $\bar{G}_{n-1}$, находится из условия:

$$\text{при } L_{n-2}^* < 0 \quad \varphi_{n-2}^* + au_{\text{опт}} \Delta t = \varphi^0 + (au_0 - \xi_0) \Delta t;$$

$$\text{при } L_{n-2}^* > 0 \quad \varphi_{n-2}^* + au_{\text{опт}} \Delta t = -\varphi^0 - (au_0 - \xi_0) \Delta t.$$

Синтез управления представлен на рис. 3.6. Уравнения границ будут

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{n-2}^* + au_{\text{опт}} \Delta t = \varphi^0 + (au_0 - \xi_0) \Delta t; \\ L_{n-2}^* + u_{\text{опт}} \Delta t^2 = 0, \text{ или } 0 = L_{n-2}^* + \left(\frac{\varphi^0 + (au_0 - \xi_0) \Delta t}{a} - \frac{\varphi_{n-2}^*}{a} \right) \Delta t; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{n-2}^* + au_{\text{опт}} \Delta t = -\varphi^0 - (au_0 - \xi_0) \Delta t; \\ L_{n-2}^* + u_{\text{опт}} \Delta t^2 = 0, \text{ или } 0 = L_{n-2}^* + \left(\frac{-\varphi^0 + (au_0 - \xi_0) \Delta t}{a} - \frac{\varphi_{n-2}^*}{a} \right) \Delta t. \end{array} \right.$$

Оптимальное управление и значение функции $G_{n-2}(L_{n-2}^*, \varphi_{n-2}^*)$ в областях I—IV, I' (см. рис. 3.6) следующие:

$$(I) \quad u_{\text{опт}} = \frac{\varphi^0 + (au_0 - \xi_0) \Delta t - \varphi_{n-2}^*}{a \Delta t};$$

$$G_{n-2} = - \left[L_{n-2}^* + \frac{\varphi^0 + (au_0 - \xi_0) \Delta t - \varphi_{n-2}^*}{a} \Delta t \right];$$

$$(II) \quad u_{\text{опт}} = -u_0; \quad G_{n-2} = L_{n-2}^* - u_0 \Delta t^2;$$

$$(III) \quad u_{\text{опт}} = +u_0; \quad G_{n-2} = -[L_{n-2}^* + u_0 \Delta t^2];$$

(IV) оптимальное управление определяется из условия сдвига точки φ_{n-2}^* , L_{n-2}^* в область абсолютного минимума функции $\bar{G}_{n-2}$, т. е. на линию $L_{n-1}=0$:

$$u_{\text{опт}} = \frac{L_{n-2}^*}{\Delta t^2}; \quad G_{n-2} = 0;$$

$$(I') \quad u_{\text{опт}} = \frac{-\varphi^0 - (au_0 - \xi_0) \Delta t - \varphi_{n-2}^*}{a \Delta t};$$

$$G_{n-2} = L_{n-2}^* + \frac{-\varphi^0 - (au_0 - \xi_0) \Delta t - \varphi_{n-2}^*}{a} \Delta t.$$

На интервале $[t_{n-3}, t_{n-2}]$ для определения оптимального управления необходимо предварительно построить функцию

$$\bar{G}_{n-2}(L_{n-2}, \varphi_{n-2}) = \int_{-\xi_0}^{\xi_0} G_{n-2}(\varphi_{n-2}^*, L_{n-2}^*) d\omega_{n-1}.$$

Полное построение функции $\bar{G}_{n-i}(L_{n-i}, \varphi_{n-i})$ для $i=2, 3, \dots$ затруднительно. Однако определение структуры управления можно осуществить, зная лишь некоторые ее особенности.

Из рассмотрения на предыдущих интервалах следует, что и на этом интервале задачу удобно рассматривать в координатах φ_i , L_i , которые зависят от координат

$$x_1(t_i), \quad x_2(t_i), \quad x_3(t_i).$$

Отметим следующее свойство оптимального управления, которым неоднократно будем пользоваться ниже. Точки φ_i^* , L_i^* , являющиеся образами точки φ_i , L_i при всех $\omega_{i+1} \in \Omega_{i+1}$, лежат на прямой. Также на прямой лежат образы точки φ_i^* , L_i^* при различных $u \in U$. Уравнения этих прямых будут представлены ниже.

Так как минимизируемая функция на каждом интервале выпуклая, то ее линии уровня будут выпуклыми функциями. Оптимальное управление должно переводить точку φ_i^* , L_i^* на такую линию уровня, к которой прямая, содержащая образы точки φ_i^* , L_i^* , будет опорной (в точках образа) или, если таковой нет, то на линию уровня, расположенную ближе к области абсолютного минимума минимизируемой функции.

Покажем, что обозначения φ , L действительно удобно вводить на каждом интервале.

Пусть для произвольного интервала $[t_{n-i}, t_{n-(i-1)}]$ нужно минимизировать функцию $\bar{G}_{n-(i-1)}$ переменных

$$\varphi_{n-(i-1)} = ax_1(t_{n-(i-1)}) + x_2(t_{n-(i-1)});$$

$$L_{n-(i-1)} = x_3(t_{n-(i-1)}) + [x_1(t_{n-(i-1)}) - x_2(t_{n-(i-1)})] (i-1) \Delta t$$

и удовлетворить в момент $t_{n-(i-1)}$ фазовым ограничениям

$$|\varphi_{n-(i-1)}| \leq \varphi^0 + (au_0 - \xi_0)(i-1)\Delta t.$$

В силу дифференциальных уравнений задачи получим

$$\varphi_{n-(i-1)} = a \left[x_1(t_{n-i}) + \int_{t_{n-i}}^{t_{n-(i-1)}} u(t) dt \right] + x_2(t_{n-i}) + \omega_{n-(i-1)} \Delta t;$$

$$L_{n-(i-1)} = x_3(t_{n-i}) + [x_1(t_{n-i}) - x_2(t_{n-i})] \Delta t + [x_1(t_{n-i}) + \\ + \int_{t_{n-i}}^{t_{n-(i-1)}} u(t) dt - x_2(t_{n-i}) - \omega_{n-(i-1)} \Delta t] (i-1) \Delta t.$$

Отсюда видно, что удобно ввести следующие обозначения:

$$\varphi_{n-i} = ax_1(t_{n-i}) + x_2(t_{n-i}); \varphi_{n-i}^* = \varphi_{n-i} + \omega_{n-(i-1)} \Delta t;$$

$$L_{n-i} = x_3(t_{n-i}) + [x_1(t_{n-i}) - x_2(t_{n-i})] i \Delta t;$$

$$L_{n-i}^* = L_{n-i} - \omega_{n-(i-1)} (i-1) \Delta t^2;$$

$$\varphi_{n-(i-1)} = \varphi_{n-i}^* + a \int_{t_{n-i}}^{t_{n-(i-1)}} u(t) dt;$$

$$L_{n-(i-1)} = L_{n-i}^* + (i-1) \Delta t \int_{t_{n-i}}^{t_{n-(i-1)}} u(t) dt.$$

Граница образов точки L_{n-i}^* , φ_{n-i}^* при различных управлениях определяется из выражения

$$\max_{|u| \leq u_0} \left\{ l_1 \left[\varphi_{n-i}^* + a \int_{t_{n-i}}^{t_{n-(i-1)}} u(t) dt \right] + l_2 [L_{n-i}^* + \right. \\ \left. + (i-1) \Delta t \int_{t_{n-i}}^{t_{n-(i-1)}} u(t) dt \right] \rightarrow u^+ = u_0 \operatorname{sign} [l_1 a + l_2 (i-1) \Delta t].$$

Любой образ точки L_{n-i}^* , φ_{n-i}^* (без учета фазовых ограничений) можно получить на основании равенств:

$$\varphi_{n-(i-1)} = \varphi_{n-i}^* + a [\beta (-u_0) + (1-\beta) (+u_0)] \Delta t;$$

$$L_{n-(i-1)} = L_{n-i}^* + (i-1) [\beta (-u_0) + (1-\beta) (+u_0)] \Delta t^2 \text{ при } 0 \leq \beta \leq 1.$$

Образы точки L_{n-i} , φ_{n-i} при случайном воздействии (случайный сдвиг) и образы точки L_{n-i}^* , φ_{n-i}^* при управлении (управляемый сдвиг) даны на рис. 3.7.

Область допустимых начальных условий $\bar{D}_{n-i}$ описывается неравенствами

$$\begin{aligned}\varphi_{n-i}^* - au_0 \Delta t &\leq \varphi^0 + (au_0 - \xi_0)(i-1)\Delta t \rightarrow \\ &\rightarrow \varphi_{n-i}^* \leq \varphi^0 + au_0 \Delta t + (au_0 - \xi_0)(i-1)\Delta t; \\ -\varphi^0 - (au_0 - \xi_0)(i-1)\Delta t &\leq \varphi_{n-i}^* + au_0 \Delta t \rightarrow \\ &\rightarrow -\varphi^0 - au_0 \Delta t - (au_0 - \xi_0)(i-1)\Delta t \leq \varphi_{n-i}^*,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\max_{\omega_{n-(i-1)}} \varphi_{n-i}^* &\leq \varphi^0 + au_0 \Delta t + (au_0 - \xi_0)(i-1)\Delta t \rightarrow \\ &\rightarrow \varphi_{n-i} \leq \varphi^0 + (au_0 - \xi_0)i\Delta t; \\ \min_{\omega_{n-(i-1)}} \varphi_{n-i}^* &\geq -\varphi^0 - au_0 \Delta t - (au_0 - \xi_0)(i-1)\Delta t \rightarrow \\ &\rightarrow \varphi_{n-i} \geq -\varphi^0 - (au_0 - \xi_0)i\Delta t,\end{aligned}$$

т. е. $\bar{D}_{n-i} = \{|\varphi_{n-i}| \leq \varphi^0 + (au_0 - \xi_0)i\Delta t\}$.

После определения оптимального управления получим функции

$$G_{n-i}(\varphi_{n-i}^*, L_{n-i}^*) \text{ и } \bar{G}_{n-i}(\varphi_{n-i}, L_{n-i}).$$

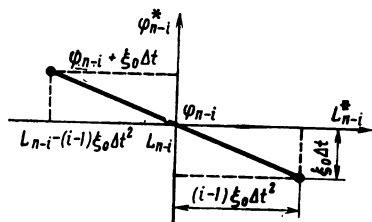
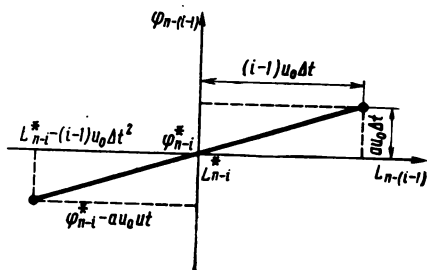


Рис. 3.7. Образы точек $\varphi_{n-1}^*, L_{n-1}^*$ и

$$\varphi_{n-1}^*, L_{n-1}^*$$



Таким образом, на любом интервале $[t_{n-i-1}, t_{n-i}]$ нужно минимизировать функцию $\bar{G}_{n-i}$ переменных

$$\begin{aligned}\varphi_{n-i} &= ax_1(t_{n-i}) + x_2(t_{n-i}); \\ L_{n-i} &= x_3(t_{n-i}) + [x_1(t_{n-i}) - x_2(t_{n-i})]i\Delta t\end{aligned}$$

и удовлетворить в момент t_{n-i} фазовым ограничениям

$$|\varphi_{n-i}| \leq \varphi^0 + (au_0 - \xi_0) i \Delta t.$$

Внутри интервала $u_{\text{опт}}$ не зависит от времени.

Для существования решения задачи необходимо, чтобы начальная точка каждого интервала лежала в допустимой области, т. е. удовлетворяла полученным выше фазовым ограничениям.

Если $au_0 \geq \xi_0$, то для любого i область $|\varphi_{n-i}| \leq \varphi^0 + (au_0 - \xi_0) i \Delta t$ не будет пустой, т. е. решение задачи будет существовать для любого T . Если же $au_0 < \xi_0$, то при i , удовлетворяющем равенству

$$\varphi^0 + (au_0 - \xi_0) i \Delta t = 0, \text{ т. е. } i^* \Delta t = -\frac{\varphi^0}{au_0 - \xi_0},$$

множество допустимых начальных условий будет пустым.

При $T > i^* \Delta t = -\frac{\varphi^0}{au_0 - \xi_0}$ решения этой задачи не существует.

Далее рассмотрим случай $au_0 \geq \xi_0$. Исследование функции $\bar{G}_{n-i}$ будем проводить по областям.

Внешняя область функции $\bar{G}_{n-i}(L_{n-i}, \varphi_{n-i})$. Областью, «внешней» по отношению к области минимума функции $\bar{G}_{n-i}$, назовем множество тех точек φ_{n-i} , L_{n-i} , на котором вид линий уровня $\bar{G}_{n-i} = \text{const}$ не изменяется с ростом значения координаты L_{n-i} . Ниже установим, что эта область состоит из двух подобластей, расположенных левее линии

$$L_{n-i} = -\frac{i(i-1)}{2} (u_0 + \xi_0) \Delta t^2 \quad (\text{левая подобласть});$$

правее линии

$$L_{n-i} = \frac{i(i-1)}{2} (u_0 + \xi_0) \Delta t^2 \quad (\text{правая подобласть}).$$

Ординаты обеих подобластей удовлетворяют неравенству

$$|\varphi_{n-i}| \leq \varphi^0 + i(au_0 - \xi_0) \Delta t.$$

Построим эту область и проведем синтез оптимального управления в ней. Процесс проведем для левой подобласти. Те же рассуждения можно провести и для правой подобласти.

Сначала предположим, что $au_0 = \xi_0$. Случай $au_0 > \xi_0$ исследуется после этого рассмотрения. На интервале $[t_{n-2}, t_{n-1}]$ синтез управления во внешней области дан на рис. 3.6. Из рисунка следует, что если для всех

$$\omega_{n-1} \in \Omega_{n-1}$$

$$L_{n-2} - \omega_{n-1} \Delta t^2 \leq -u_0 \Delta t^2, \text{ т. е. } L_{n-2} \leq -(1+a) u_0 \Delta t^2,$$

го точка ($|\varphi_{n-2}| \leq \varphi^0$, L_{n-2}) будет принадлежать «внешней» области. В этой области функция $\bar{G}_{n-2}$ задается двумя аналитическими зависимостями. Если $\varphi_{n-2} + \omega_{n-1}\Delta t \geq \varphi^0 - a u_0 \Delta t$ хотя бы для некоторых $\omega_{n-1} \in \Omega_{n-1}$,

$$\text{т. е. } \varphi_{n-2} \geq \varphi^0 - 2a u_0 \Delta t,$$

то

$$\begin{aligned} \bar{G}_{n-2} = & \frac{-1}{2\xi_0} \int_{-\xi_0}^{\bar{\xi}} [L_{n-2}^* + u_0 \Delta t^2] d\omega_{n-1} - \\ & - \frac{1}{2\xi_0} \int_{\bar{\xi}}^{\xi_0} \left[L_{n-2}^* + \Delta t \frac{\varphi^0 - \varphi_{n-2}^*}{a} \right] d\omega_{n-1}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{\xi} \rightarrow \varphi_{n-2} + \bar{\xi} \Delta t = \varphi^0 - a u_0 \Delta t;$$

$$\bar{G}_{n-2} = -L_{n-2} + F_{n-2}(\varphi_{n-2}).$$

Определение функции $F_{n-2}(\varphi_{n-2})$ ясно из выписанного выражения.

Функция

$$F_{n-2}(\varphi_{n-2}) = \frac{-1}{2\xi_0} u_0 \Delta t^2 [\bar{\xi} + \xi_0] + \frac{[\varphi^0 - \varphi_{n-2}^*]^2}{2\xi_0 a^2} \Big|_{\bar{\xi}}^{\xi_0}$$

имеет на верхней границе области $\varphi_{n-2} = \varphi^0$ следующие свойства:

$$1) F_{n-2}(\varphi^0) = 0;$$

$$2) \frac{dF_{n-2}}{d\varphi_{n-2}} \Big|_{\varphi_{n-2} = \varphi^0} = \frac{\Delta t}{a}.$$

Если $\varphi_{n-2} + \omega_{n-1}\Delta t \leq \varphi^0 - a u_0 \Delta t$ при любых $\omega_{n-1} \in \Omega_{n-1}$, т. е. $\varphi_{n-2} \leq \varphi^0 - 2a u_0 \Delta t$, то

$$\bar{G}_{n-2} = \frac{-1}{2\xi_0} \int_{-\xi_0}^{\xi_0} [L_{n-2}^* + u_0 \Delta t^2] d\omega_{n-1} = -[L_{n-2} + u_0 \Delta t^2].$$

Производная $dL_{n-2}/d\varphi_{n-2}$ на линии уровня $\bar{G}_{n-2} = \text{const}$ возрастает от нуля до своего максимального значения на верхней границе

$$\frac{dL_{n-2}}{d\varphi_{n-2}} \Big|_{\varphi_{n-2} = \varphi^0} = \frac{\Delta t}{a}.$$

(Линия уровня выпуклой функции — выпуклая кривая. Производная на линии уровня — опорная прямая к этой линии).

На интервале $[t_{n-3}, t_{n-2}]$ управляемые образы точки φ_{n-3}^* , L_{n-3}^* располагаются на прямой с углом наклона $dL_{n-2}/d\varphi_{n-2} = 2\Delta t/a$.

Максимальный же наклон касательной к линии уровня $\bar{G}_{n-2} = \text{const}$ будет $\frac{\Delta t}{a} < \frac{2\Delta t}{a}$. Поэтому линия управляемых образцов не может быть опорной к линиям уровня $\bar{G}_{n-2}$ в диапазоне $|\varphi_{n-2}| < \varphi^0$ (концы отрезка не включены). Поэтому оптимальное управление будет либо предельным $u_{\text{опт}} = u_0$, либо должно обеспечивать выход на фазовое ограничение $\varphi_{n-2} = \varphi^0$. Такой результат будет для любого $L_{n-3}^* + 2u_0\Delta t^2 \leq -(1+a)u_0\Delta t$, т. е. $L_{n-3} \leq -(3+a)u_0\Delta t^2$.

В этой области построим функцию $G_{n-3}(L_{n-3}^*, \varphi_{n-3}^*)$.

Если $\varphi^0 - au_0\Delta t \leq \varphi_{n-3}^* + au_0\Delta t \leq \varphi^0$, т. е.

$$\varphi^0 - 2au_0\Delta t \leq \varphi_{n-3}^* \leq \varphi^0 - au_0\Delta t, \text{ то } u_{\text{опт}} = u_0$$

и
$$G_{n-3} = -[L_{n-3}^* + 2u_0\Delta t^2] + F_{n-2}(\varphi_{n-3}^* + au_0\Delta t).$$

Если $\varphi_{n-3}^* + au_0\Delta t \geq \varphi^0$, т. е. $\varphi_{n-3}^* \geq \varphi^0 - au_0\Delta t$, то

$$u_{\text{опт}} = \frac{\varphi^0 - \varphi_{n-3}^*}{a\Delta t}; \quad G_{n-3} = -\left[L_{n-3}^* + \frac{\varphi^0 - \varphi_{n-3}^*}{a} 2\Delta t\right] + F_{n-2}(\varphi^0).$$

Замечание. Так как производная $dL_{n-3}/d\varphi_{n-3}$ к линии уровня $\bar{G}_{n-3}$ растет с увеличением φ_{n-3} , то для оценки ее максимального значения нужно найти функцию $\bar{G}_{n-3}$ только вблизи верхней границы $\varphi_{n-3} = \varphi^0$. Функция G_{n-3} была построена в диапазоне $\varphi^0 - 2au_0\Delta t \leq \varphi_{n-3}^* \leq \varphi^0 + au_0\Delta t$, который вмещает все случайным образом сдвинутые точки, находящиеся при $\omega_{n-2} = 0$ на $\varphi_{n-3} = \varphi^0$. Поэтому дальнейшего построения функции G_{n-3} не требуется. Это замечание будем иметь в виду при рассмотрении других интервалов.

Во внешнюю область включены те точки с $|\varphi_{n-2}| \leq \varphi^0$, которые для любого $\omega_{n-2} \in \Omega_{n-2}$ удовлетворяют неравенству $L_{n-3} - \omega_{n-2}2\Delta t^2 \leq -(3+a)u_0\Delta t$, т. е. $L_{n-3} \leq -3(1+a)\Delta t$.

Отыщем функцию вблизи верхней границы

$$\begin{aligned} \bar{G}_{n-3} = & \frac{1}{2\xi_0} \int_{-\xi_0}^{\xi} \{-[L_{n-3}^* + 2u_0\Delta t^2] + F_{n-2}(\varphi_{n-3}^* + au_0\Delta t)\} d\omega_{n-2} + \\ & + \frac{1}{2\xi_0} \int_{\xi}^{\xi_0} \left\{-\left[L_{n-3}^* + \frac{\varphi^0 - \varphi_{n-3}^*}{a} 2\Delta t\right] + F_{n-2}(\varphi^0)\right\} d\omega_{n-2}, \end{aligned}$$

где $\xi \rightarrow \varphi_{n-3} + \xi\Delta t = \varphi^0 - au_0\Delta t$;

$$\begin{aligned} \bar{G}_{n-3} = & -L_{n-3} + F_{n-3}(\varphi_{n-3}) + \frac{1}{2\xi_0} \int_{-\xi_0}^{\xi} F_{n-2}(\varphi_{n-3}^* + \\ & + au_0\Delta t) d\omega_{n-2}. \end{aligned}$$

Введенная функция

$$F_{n-3}(\varphi_{n-3}) = -2 \frac{1}{2\xi_0} u_0 \Delta t^2 [\bar{\xi} + \xi_0] + 2 \frac{[\varphi^0 - \varphi_{n-3}^*]^2 \xi_0}{2\xi_0 a^2} \Big|_{\bar{\xi}}$$

на границе области $\varphi_{n-3} = \varphi^0$ имеет следующие свойства:

- 1) $F_{n-3}(\varphi^0) = 0$;
- 2) $\frac{dF_{n-3}}{d\varphi_{n-3}} \Big|_{\varphi_{n-3} = \varphi^0} = 2 \frac{\Delta t}{a}$.

Для удобства записи обозначим

$$F_{n-2}(\varphi_{n-3}) = \frac{1}{2\xi_0} \int_{-\xi_0}^{\bar{\xi}} F_{n-2}(\varphi_{n-3}^* + a u_0 \Delta t) d\omega_{n-2}.$$

Производная функции имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dF_{n-2}(\varphi_{n-3})}{d\varphi_{n-3}} &= \frac{1}{2\xi_0} \int_{-\xi_0}^{\bar{\xi}} \frac{dF_{n-2}(\varphi_{n-3}^* + a u_0 \Delta t)}{d\varphi_{n-3}} d\omega_{n-2} + \\ &+ \frac{1}{2\xi_0} F_{n-2}(\varphi^0) \frac{d\bar{\xi}}{d\varphi_{n-3}} = \frac{1}{2\xi_0} \int_{-\xi_0}^{\bar{\xi}} \frac{dF_{n-2}}{d\varphi_{n-2}} \Big|_{\varphi_{n-2} = \varphi_{n-3}^* + a u_0 \Delta t} d\omega_{n-2}. \end{aligned}$$

В точке $\varphi_{n-3} = \varphi^0$ производная

$$\frac{dF_{n-2}(\varphi_{n-3})}{d\varphi_{n-3}} \Big|_{\varphi_{n-3} = \varphi^0} = 0.$$

Производная $dL_{n-3}/d\varphi_{n-3}$ на линии уровня $\bar{G}_{n-3} = \text{const}$ возрастает от нуля до своего максимального значения на верхней границе

$$\frac{dL_{n-3}}{d\varphi_{n-3}} \Big|_{\varphi_{n-2} = \varphi^0} = 2 \frac{\Delta t}{a}.$$

Функция $\bar{G}_{n-3}$ найдена при этом для тех значений $\varphi_{n-3} \leq \varphi^0$, у которых хотя бы для некоторых значений

$$\omega_{n-2} \in \Omega_{n-2} \text{ и } \varphi_{n-3} + \omega_{n-2} \Delta t \geq \varphi^0 - a u_0 \Delta t,$$

т. е. для значений $\varphi_{n-3} \geq \varphi^0 - 2a u_0 \Delta t$.

Проведем рассуждения для произвольного интервала $[t_{n-i}, t_{n-(i-1)}]$. Пусть на предыдущем интервале было получено, что левая подобласть внешней области располагается в полуплоскости

$$L_{n-(i-1)} \leq -\frac{(i-1)(i-2)}{2} [1+a] u_0 \Delta t^2$$

и в районе верхней границы области $\varphi^0 - 2au_0\Delta t \leq \varphi_{n-(i-1)} \leq \varphi^0$
функция

$$\bar{G}_{n-(i-1)} = -L_{n-(i-1)} + F_{n-(i-1)}(\varphi_{n-(i-1)}) + \sum_{j=2}^{i-2} F_{n-j}(\varphi_{n-(i-1)}),$$

где обозначено

$$\begin{aligned} F_{n-(i-1)}(\varphi_{n-(i-1)}) &= -(i-2) \frac{u_0 \Delta t^2}{2\xi_0} [\bar{\xi} + \xi_0] + \\ &+ (i-2) \frac{[\varphi^0 - \varphi_{n-(i-1)}]^2}{2\xi_0 a^2} \bigg|_{\bar{\xi}}, \\ F_{n-(i-1)}(\varphi^0) &= 0; \quad \frac{dF_{n-(i-1)}(\varphi_{n-(i-1)})}{d\varphi_{n-(i-1)}} = (i-2) \frac{\Delta t}{a}; \\ \bar{\xi} \rightarrow \varphi_{n-(i-1)} + \bar{\xi} \Delta t &= \varphi^0 - au_0 \Delta t \end{aligned}$$

и где функция $\sum_{j=2}^{i-2} F_{n-j}(\varphi_{n-(i-1)})$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{i=2}^{i-2} F_{n-j}(\varphi^0) = 0; \\ 2) \quad & \frac{d \sum_{j=2}^{i-2} F_{n-j}(\varphi_{n-(i-1)})}{d\varphi_{n-(i-1)}} \bigg|_{\varphi^0} = 0. \end{aligned}$$

Проведем синтез управления на этом интервале. Управляемые образы точки φ_{n-i}^* , L_{n-i}^* располагаются на прямой с углом наклона

$$\frac{dL_{n-(i-1)}}{d\varphi_{n-(i-1)}} = \frac{(i-1)\Delta t}{a}.$$

Максимальное значение производной $dL_{n-(i-1)}/d\varphi_{n-(i-1)}$ на линии уровня $\bar{G}_{n-(i-1)} = \text{const}$, которое достигается при $\varphi_{n-(i-1)} = \varphi^0$, будет $\Delta t(i-2)/a$ и оно меньше $(i-1)\Delta t/a$. Поэтому оптимальное управление либо предельно $u_{\text{опт}} = +u_0$, либо обеспечивает выход на фазовое ограничение $\varphi_{n-i} = \varphi^0$. Это справедливо для любой точки

$$\begin{aligned} |\varphi_{n-i}^*| &\leq \varphi^0 + au_0 \Delta t; \\ L_{n-i}^* + (i-1)u_0 \Delta t^2 &\leq -\frac{(i-1)(i-2)}{2}(1+a)u_0 \Delta t^2. \end{aligned}$$

В этой области построим функцию $G_{n-l}(L_{n-l}^*, \varphi_{n-l}^*)$.

Если $\varphi^0 - au_0\Delta t \leq \varphi_{n-l}^* + au_0\Delta t \leq \varphi^0$, то $u_{\text{опт}} = u_0$ и

$$G_{n-l} = -[L_{n-l}^* + (i-1)u_0\Delta t^2] + F_{n-(l-1)}(\varphi_{n-l}^* + au_0\Delta t) + \\ + \sum_{j=2}^{l-2} F_{n-j}(\varphi_{n-l}^* + au_0\Delta t).$$

Если $\varphi_{n-l}^* + au_0\Delta t \geq \varphi^0$, т. е. $\varphi_{n-l}^* \geq \varphi^0 - au_0\Delta t$, то

$$u_{\text{опт}} = \frac{\varphi^0 - \varphi_{n-l}^*}{a\Delta t};$$

$$G_{n-l} = -\left[L_{n-l}^* + \frac{\varphi^0 - \varphi_{n-l}^*}{a}(i-1)\Delta t\right] + F_{n-(l-1)}(\varphi^0) + \sum_{j=2}^{l-2} F_{n-j}(\varphi^0).$$

Во внешнюю область на этом интервале будут включаться те точки с $|\varphi_{n-l}| \leq \varphi^0$, которые для любого значения $\omega_{n-(l-1)} \in \Omega_{n-(l-1)}$ удовлетворяют условию

$$L_{n-l} - \omega_{n-(l-1)}(i-1)\Delta t^2 \leq -\frac{(i-1)(i-2)}{2}(1+a)u_0\Delta t^2 - \\ - (i-1)u_0\Delta t^2,$$

т. е.

$$L_{n-l} \leq -\frac{i(i-1)}{2}(1+a)u_0\Delta t^2.$$

Построим функцию вблизи верхней границы $\varphi_{n-l} = \varphi^0$:

$$\bar{G}_{n-l} = \frac{1}{2\xi_0} \int_{-\xi_0}^{\bar{\xi}} \{-[L_{n-l}^* + (i-1)u_0\Delta t^2] + F_{n-(l-1)}(\varphi_{n-l}^* + au_0\Delta t) + \\ + \sum_{j=2}^{l-2} F_{n-j}(\varphi_{n-l}^* + au_0\Delta t)\} d\omega_{n-(l-1)} + \frac{1}{2\xi_0} \int_{\bar{\xi}}^{\xi_0} \times \\ \times \left\{-\left[L_{n-l}^* + \frac{\varphi^0 - \varphi_{n-l}^*}{a}(i-1)\Delta t\right]\right\} d\omega_{n-(l-1)},$$

где

$$\bar{\xi} \rightarrow \varphi_{n-l} + \bar{\xi}\Delta t = \varphi^0 - au_0\Delta t;$$

$$\bar{G}_{n-l} = -L_{n-l} + F_{n-l}(\varphi_{n-l}) + \frac{1}{2\xi_0} \int_{-\xi_0}^{\bar{\xi}} \left\{-F_{n-(l-1)}(\varphi_{n-l}^* + au_0\Delta t) + \sum_{j=2}^{l-2} F_{n-j}(\varphi_{n-l}^* + au_0\Delta t)\right\} d\omega_{n-(l-1)}.$$

Введенная функция

$$F_{n-i}(\varphi_{n-i}) = -(i-1) \frac{u_0 \Delta t^2}{2\xi_0} [\bar{\xi} + \xi_0] + (i-1) \frac{(\varphi^0 - \varphi_{n-i}^*)}{2\xi_0 a^2} \bigg|_{\bar{\xi}}$$

имеет следующие свойства:

- 1) $F_{n-i}(\varphi^0) = 0$;
- 2) $\frac{dF_{n-i}(\varphi_{n-i})}{d\varphi_{n-i}} \bigg|_{\varphi_{n-i}=\varphi^0} = (i-1) \frac{\Delta t}{a}$.

Обозначая

$$\sum_{j=2}^{i-1} F_{n-j}(\varphi_{n-i}) = \frac{1}{2\xi_0} \int_{-\xi_0}^{\bar{\xi}} \left\{ -[F_{n-(i-1)}(\varphi_{n-i}^* + au_0 \Delta t) + \right. \\ \left. + \sum_{j=2}^{i-2} F_{n-j}(\varphi_{n-i}^* + au_0 \Delta t) \right\} d\omega_{n(i-1)},$$

находим, что

$$\sum_{j=2}^{i-1} F_{n-j}(\varphi^0) = 0, \text{ так как } \bar{\xi} = -au_0 = -\xi_0, \\ \text{и } \frac{d \sum_{j=2}^{i-1} F_{n-j}(\varphi_{n-i})}{d\varphi_{n-i}} \bigg|_{\varphi_{n-i}=\varphi^0} = \frac{1}{2\xi_0} \int_{-\xi_0}^{\bar{\xi}} \frac{d\{\dots\}}{d\varphi_{n-i}} \times \\ \times d\omega_{n-(i-1)} + \frac{1}{2\xi_0} \left\{ -F_{n-(i-1)}(\varphi^0) + \sum_{j=2}^{i-2} F_{n-j}(\varphi^0) \right\} \frac{d\bar{\xi}}{d\varphi_{n-i}} = 0.$$

Функция $\bar{G}_{n-i}$ построена в диапазоне

$$\varphi^0 \geq \varphi_{n-i} \geq \varphi^0 - 2au_0 \Delta t.$$

Пусть теперь $au_0 > \xi_0$. Для этого случая аналогичными рассуждениями для интервала $[t_{n-i}, t_{n-(i-1)}]$ устанавливаем, что оптимальное управление будет либо предельным $u_{\text{опт}} = +u_0$, либо будет обеспечивать выход на фазовое ограничение

$$|\varphi_{n-(i-1)}| \leq \varphi^0 + (i-1)(au_0 - \xi_0) \Delta t.$$

Синтез оптимального управления во внешней области для интервала $[t_{n-i}, t_{n-(i-1)}]$ показан на рис. 3.8.

В области I

$$u_{\text{опт}} = \frac{\varphi^0 + (i-1)(au_0 - \xi_0) \Delta t - \varphi_{n-(i-1)}}{a \Delta t}.$$

В области II

$$u_{\text{онт}} = \frac{-\varphi^0 - (i-1)(au_0 - \xi_0)\Delta t - \varphi_{n-(i-1)}}{a\Delta t}.$$

Область абсолютного минимума $\bar{G}_{n-i}(L_{n-i}, \varphi_{n-i})$. Назовем областью абсолютного минимума то множество точек φ_{n-i}, L_{n-i} , на котором функция $\bar{G}_{n-i}(\dots)$ принимает нулевое значение. У функций $\bar{G}_n$ и $\bar{G}_{n-1}(L_{n-1}, \varphi_{n-1})$ области абсолютно-

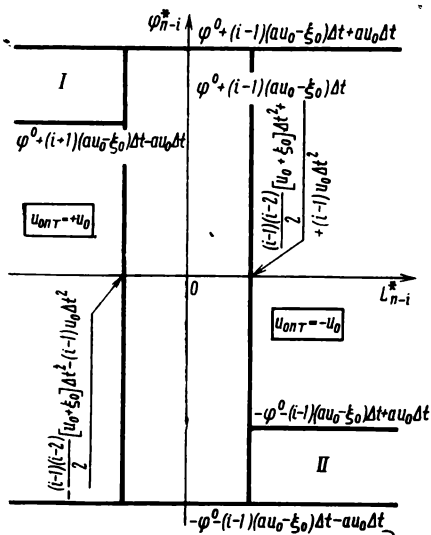


Рис. 3.8. Синтез управления для интервала $[t_{n-i}, t_{n-(i-1)}]$ во внешней области функции $\bar{G}_{n-(i-1)} (au_0 \geq \xi_0)$

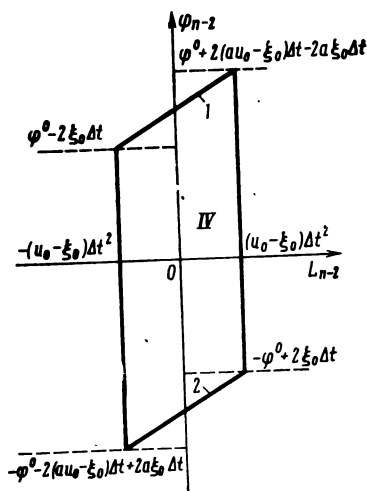


Рис. 3.9. Область абсолютного минимума функции $\bar{G}_{n-2}(\varphi_{n-2}, L_{n-2})$

го минимума одинаковы и представляют собой отрезок оси φ , точки которого отвечают неравенствам $|\varphi_n| \leq \varphi^0$ и $|\varphi_{n-1}| \leq \varphi^0 + (au_0 - \xi_0)\Delta t$ соответственно.

Область абсолютного минимума функции $G_{n-2}(\varphi_{n-2}^*, L_{n-2}^*)$ дана на рис. 3.6 (область IV). Для функции $\bar{G}_{n-2}(\varphi_{n-2}, L_{n-2})$ область абсолютного минимума будем искать из условия, что случайное преобразование точки φ_{n-2}, L_{n-2} не выводит ее из области абсолютного минимума:

$$L_{n-2} - \xi_0 \Delta t^2 + \frac{\varphi^0 + (au_0 - \xi_0)\Delta t - (\varphi_{n-2} + \xi_0 \Delta t)}{a} \Delta t \geq 0.$$

В этом случае границы области будут следующие:
верхняя

$$L_{n-2} - (u_0 + \xi_0) \Delta t^2 + \frac{\varphi^0 + 2(a u_0 - \xi_0) \Delta t - \varphi_{n-2}}{a} \Delta t = 0;$$

$$L_{n-2} + (u_0 + \xi_0) \Delta t^2 + \frac{-\varphi^0 - 2(a u_0 - \xi_0) \Delta t - \varphi_{n-2}}{a} \Delta t \leq 0;$$

нижняя

$$L_{n-2} + (u_0 + \xi_0) \Delta t^2 + \frac{-\varphi^0 - 2(a u_0 - \xi_0) \Delta t - \varphi_{n-2}}{a} \Delta t = 0;$$

левая

$$-u_0 \Delta t^2 \leq L_{n-2} - \xi_0 \Delta t^2 \rightarrow -(u_0 - \xi_0) \Delta t^2 \leq L_{n-2};$$

правая

$$L_{n-2} + \xi_0 \Delta t^2 \leq u_0 \Delta t^2 \rightarrow L_{n-2} \leq (u_0 - \xi_0) \Delta t^2.$$

Область абсолютного минимума функции $\bar{G}_{n-2}(\varphi_{n-2}, L_{n-2})$ представлена на рис. 3.9.

Рассмотрим произвольный i -й интервал $[t_{n-i}, t_{n-(i-1)}]$. Покажем, что граница области абсолютного минимума состоит из $(i-1)$ линейных участков в своей верхней части, такого же количества участков в нижней и левой и правой вертикальных прямых.

Уравнение j -го участка верхней границы, где отсчет номеров производится слева направо $1 \leq j \leq (i-1)$, для $i \geq 2$ будет иметь вид

$$L_{n-i} - \left\{ (u_0 - \xi_0) \Delta t^2 \left[-\frac{i(i-1)}{2} + j(j-1) \right] \right\} = j \frac{\Delta t}{a} [\varphi_{n-i} - \\ - \{ \varphi^0 + (2j-1)(a u_0 - \xi_0) \Delta t - 2\xi_0 \Delta t [(i-1) - (j-1)(1-a)] \}].$$

j -й участок верхней границы располагается на интервале

$$(u_0 - \xi_0) \Delta t^2 \left[-\frac{i(i-1)}{2} + j(j-1) \right] \leq L_{n-i} \leq (u_0 - \xi_0) \Delta t^2 \times \\ \times \left[-\frac{i(i-1)}{2} + j(j+1) \right].$$

Левая ордината области абсолютного минимума

$$(\varphi_{n-i})_л = \varphi^0 + (2-i)(a u_0 - \xi_0) \Delta t - (i-1) 2\xi_0 \Delta t.$$

На каждом линейном участке приращение по φ постоянно и равно

$$\frac{d\varphi}{dL} \Delta L = \frac{a}{j \Delta t} j 2 (u_0 - \xi_0) \Delta t^2 = 2a (u_0 - \xi_0) \Delta t.$$

Всего на верхней границе $(i-1)$ участков. Тогда правая ордината области абсолютного минимума будет

$$(\varphi_{n-i})_{\text{пр}} = \varphi^0 + i(au_0 - \xi_0) \Delta t - 2a\xi_0(i-1) \Delta t.$$

Подтвердим справедливость этого уравнения границы методом математической индукции.

Рассмотрим интервал $[t_{n-(i+1)}, t_{n-i}]$. Так как наклон $dL_{n-(i+1)}^*/d\varphi_{n-(i+1)}^* = \frac{i\Delta t}{a}$ прямой, на которой лежат управляемые образы точки $\varphi_{n-(i+1)}^*$, $L_{n-(i+1)}^*$, больше, чем наклон $dL_{n-i}/d\varphi_{n-i} = j\Delta t/a$, $1 \leq j \leq (i-1)$ любого линейного участка верхней границы области абсолютного минимума, то при оптимальном управлении $u_{\text{опт}} = +u_0$ точки сдвигаются на границу области абсолютного минимума. Тогда для участков $1 \leq j \leq (i-1)$ имеем

$$\begin{aligned} L_{n-(i+1)}^* + i\Delta t^2 u_0 - \left\{ (u_0 - \xi_0) \Delta t^2 \left[-\frac{i(i-1)}{2} + j(j-1) \right] \right\} = \\ = j \frac{\Delta t}{a} [\varphi_{n-(i+1)}^* + au_0 \Delta t - \{\varphi^0 + (2j-i)(au_0 - \xi_0) \Delta t - \\ - 2\xi_0 \Delta t [(i-1) - (j-1)(1-a)]\}], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} L_{n-(i+1)} - \left\{ (u_0 - \xi_0) \Delta t^2 \left[-\frac{i(i+1)}{2} + j(j-1) \right] \right\} = \\ = j \frac{\Delta t}{a} [\varphi_{n-(i+1)} - \{\varphi^0 + (2j-(i+1))(au_0 - \xi_0) \Delta t - \\ - 2\xi_0 \Delta t [i - (j-1)(1-a)]\}]. \end{aligned}$$

Уравнение i -го участка определяется из условия прохождения прямой управляемых образов точки через верхнюю правую точку области абсолютного минимума $G_{n-1}(\dots)$:

$$\frac{L_{n-(i+1)}^* - \left[(u_0 - \xi_0) \Delta t^2 \frac{i(i-1)}{2} \right]}{\varphi_{n-(i+1)}^* - [\varphi^0 + i(au_0 - \xi_0) \Delta t - 2a\xi_0(i-1) \Delta t]} = \frac{i\Delta t}{a},$$

или

$$\begin{aligned} L_{n-(i+1)} - (u_0 - \xi_0) \Delta t^2 \frac{i(i+1)}{2} = \frac{i\Delta t}{a} [\varphi_{n-(i+1)} - \\ - \{\varphi^0 + (i-1)(au_0 - \xi_0) \Delta t - 2\xi_0 \Delta t (1 + a(i-1))\}]. \end{aligned}$$

Правая абсцисса последнего участка удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}(u_0 - \xi_0) \Delta t^2 \frac{i(i-1)}{2} &\leq L_{n-(i+1)}^* - i u_0 \Delta t^2; \\ L_{n-(i+1)} + i \xi_0 \Delta t^2 &\leq i u_0 \Delta t^2 + (u_0 - \xi_0) \Delta t^2 \frac{i(i-1)}{2}; \\ L_{n-(i+1)} &\leq (u_0 - \xi_0) \Delta t \frac{i(i+1)}{2}.\end{aligned}$$

Проводя аналогичные рассуждения, устанавливаем, что нижняя граница области абсолютного минимума состоит из j линейных участков, где $1 \leq j \leq (i-1)$ и отсчет номеров j производится справа налево:

Уравнение j -го участка для $i \geq 2$ имеет вид:

$$\begin{aligned}L_{n-i} - \left[- (u_0 - \xi_0) \Delta t^2 \left(- \frac{i(i-1)}{2} + j(j-1) \right) \right] &= j \frac{\Delta t}{a} [\varphi_{n-i} - \\ - \{ - \varphi^0 - (2j-i)(a u_0 - \xi_0) \Delta t + 2 \xi_0 \Delta t [(i-1) - (j-1)(1-a)] \}].\end{aligned}$$

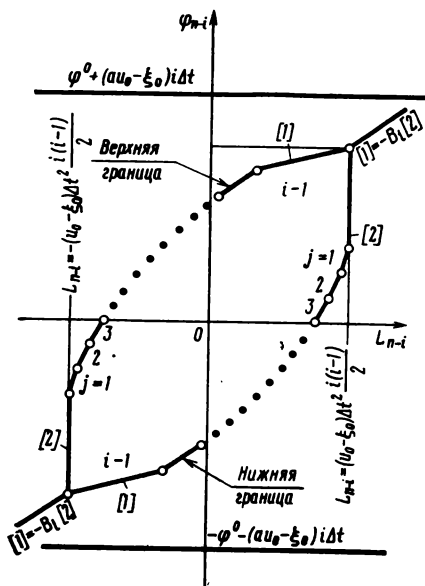


Рис. 3.10. Область абсолютного минимума $\bar{G}_{n-i}(\dots)$ при $i < i^*$

Таким образом, область абсолютного минимума функции $\bar{G}_{n-i}(\varphi_{n-i}, L_{n-i})$ состоит (рис. 3.10) из: верхней границы, состоящей из $(i-1)$ линейных участков; нижней границы, состоящей также из $(i-1)$ линейных участков, и двух вертикальных прямых

$$L_{n-i} = \pm (u_0 - \xi_0) \Delta t \frac{i(i+1)}{2}.$$

При увеличении номера интервала i концы верхней и нижней границ сближаются. Оценим расстояние между точками этих границ на правой вертикальной граничной прямой (по верхней границе — участок $j = i-1$, по нижней границе — участок $j = 1$):

$$\begin{aligned}\varphi^0 + i(a u_0 - \xi_0) \Delta t - 2 a \xi_0 (i-1) \Delta t - [-\varphi^0 - (2-i)(a u_0 - \\ - \xi_0) \Delta t + 2 \xi_0 \Delta t (i-1)] = 2 \varphi^0 + 2 [a u_0 - \xi_0] \Delta t - 2 \xi_0 (i-1) \Delta t (1+a).\end{aligned}$$

Касание границ произойдет, когда

$$i \leq \frac{\varphi^0 + (a u_0 - \xi_0) \Delta t}{\xi_0 (1+a) \Delta t} + 1 = i^*.$$

При дальнейшем увеличении значения i происходит сближение границ и уменьшение области абсолютного минимума. Верхняя и нижняя границы сливаются. Номер интервала i^{**} , на котором границы заведомо слились, можно получить из условия прохождения $(i-1)$ участка верхней границы области абсолютного минимума через точку $\varphi_{n-i}=0$, $L_{n-i}=0$:

$$\begin{aligned} & - \left\{ (u_0 - \xi_0) \Delta t^2 \left[- \frac{i(i-1)}{2} + (i-1)(i-2) \right] \right\} = \\ & = (i-1) \frac{\Delta t}{a} [- \{ \varphi^0 + (i-2)(au_0 - \xi_0) \Delta t - 2\xi_0 \Delta t [(i-1) - \\ & \quad - (i-2)(1-a)] \}]. \end{aligned}$$

То значение i , начиная с которого эта линия проходит ниже начала координат, будет i^{**} . Значение i^{**} можно определить из приведенного выше уравнения.

Таким образом, начиная с некоторого значения i , где $i^* < i \leq i^{**}$, область абсолютного минимума функции $\bar{G}_{n-i}$ пропадает.

Так как функция $\bar{G}_{n-i}$ выпуклая, то область абсолютного минимума вырождается в точку. Линии уровня этой функции будут выпуклыми линиями. В силу изложенного прямая управляемого сдвига будет касаться линий уровня только в одной точке. Все такие точки касания в пределах допустимого управляемого сдвига будут лежать на некоторой кривой переключения. Поэтому оптимальное управление будет определяться из условия максимального приближения к этой кривой.

Изучим кривую переключения вблизи верхней точки области абсолютного минимума функции $\bar{G}_{n-i}$. При $i < i^*$ получим вид линий уровня функции $\bar{G}_{n-i}$ вблизи области абсолютного минимума там, где возможно касание управляемой прямой.

Из рассмотрения рис. 3.6 имеем

$$\begin{aligned} \bar{G}_{n-2} = & - \frac{1}{2\xi_0} \int_{\xi'}^{\xi_0} \left[L_{n-2}^* + \frac{\varphi^0 + (au_0 - \xi_0) \Delta t - \varphi_{n-2}^*}{a} \Delta t \right] d\omega_{n-1} + \\ & + \frac{1}{2\xi_0} \int_{-\xi_0}^{\bar{\xi}} [L_{n-2}^* - u_0 \Delta t^2] d\omega_{n-1}, \end{aligned}$$

где

$$\xi' \rightarrow L_{n-2}^* + \frac{\varphi^0 + (au_0 - \xi_0) \Delta t - \varphi_{n-2}^*}{a} \Delta t = 0;$$

$$\bar{\xi} \rightarrow L_{n-2}^* - u_0 \Delta t^2 = 0;$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{n-2} = & \frac{1}{2 \cdot 2\xi_0 \Delta t^2 (1+a^{-1})} [L_{n-2} - \xi_0 \Delta t^2 + \\ & + \frac{\varphi^0 + (au_0 - 2\xi_0) \Delta t - \varphi_{n-2}}{a} \Delta t]^2 + \frac{(L_{n-2} + \xi_0 \Delta t^2 - u_0 \Delta t^2)^2}{2 \cdot 2\xi_0 \Delta t^2}. \end{aligned}$$

Производная на линии уровня $\bar{G}_{n-2} = \text{const}$ будет равна

$$0 = \frac{2}{2 \cdot 2\xi_0 \Delta t^2 (1 + a^{-1})} \left[L_{n-2} - \xi_0 \Delta t^2 + \frac{\varphi^0 + (au_0 - 2\xi_0) \Delta t - \varphi_{n-2}}{a} \times \right. \\ \left. \times \Delta t \right] \left(\frac{dL_{n-2}}{d\varphi_{n-2}} - \frac{\Delta t}{a} \right) + \frac{2}{2 \cdot 2\xi_0 \Delta t^2} [L_{n-2} + \xi_0 \Delta t^2 - u_0 \Delta t^2] \frac{dL_{n-2}}{d\varphi_{n-2}}.$$

Найдем те точки φ_{n-2} , L_{n-2} на линиях уровня, которых может касаться прямая управляемого сдвига, получаемая на интервале $[t_{n-3}, t_{n-2}]$. На этой прямой $dL_{n-2}/d\varphi_{n-2} = 2\Delta t/a$. Отсюда

$$\left[L_{n-2} - \xi_0 \Delta t^2 + \frac{\varphi^0 + (au_0 - 2\xi_0) \Delta t - \varphi_{n-2}}{a} \Delta t \right] = \\ = -2(1 + a^{-1})(L_{n-2} + \xi_0 \Delta t^2 - u_0 \Delta t^2).$$

Обозначим $B_2 = 2(1 + a^{-1})$. Методом математической индукции установим, что при $i < i^*$ кривая линии переключения проходит через верхнюю точку области абсолютного минимума и имеет линейный участок, определяемый для интервала $[t_{n-(i-1)}, t_{n-i}]$ формулой

$$\{1\} = -B_2 \{2\},$$

где $B_i = \frac{(i-1)}{i} \sqrt{i [1 + (i-1) B_{i-1}]^{i-2} (1 + a^{-1}) (i-2)^{-1}}$ для $i > 2$;

$$\{1\} = L_{n-i} - (u_0 - \xi_0) \left[-\frac{i(i-1)}{2} + (i-1)(i-2) \right] - (i-1) \times \\ \times \frac{\Delta t}{a} \{ \varphi_{n-i} - \{ \varphi^0 + i-2 (au_0 - \xi_0) \Delta t - 2\xi_0 \Delta t [1 + a(i-2)] \} \}; \\ \{2\} = L_{n-i} - \frac{i(i-1)}{2} (u_0 - \xi_0) \Delta t^2.$$

Для нижней полуплоскости можно провести аналогичные рассуждения (см. рис. 3.10).

После «смыкания» границ область абсолютного минимума функции $\bar{G}_{n-i}$ пропадает. В этом случае на фазовой плоскости оптимальное управление, кроме границ

$$|\varphi_{n-i}| \leq \varphi^0 + i(au_0 - \xi_0) \Delta t,$$

определяется только «линией переключения», т. е. линией, при переходе через которую оптимальное управление изменяет знак.

Аналитический вид этой линии получить затруднительно. Для ее определения следует воспользоваться численными методами с привлечением ЦВМ.

Подведем итоги исследования. На произвольном интервале $[t_{n-i}, t_{n-(i-1)}]$, где $i = 1, 2, \dots, n$, оптимальное управление $u_{\text{опт}}(t_{n-i})$ постоянно и зависит только от следующих линейных

комбинаций фазовых координат x_1, x_2, x_3, ω и оставшегося времени $t_{\text{ост}} = i\Delta t$:

$$\varphi_{n-i}^* = ax_1(t_{n-i}) + x_2(t_{n-i}) + \omega_{n-(i-1)}\Delta t;$$

$$L_{n-i}^* = x_3(t_{n-i}) + [x_1(t_{n-i}) - x_2(t_{n-i})] i\Delta t - \omega_{n-(i-1)}(i-1)\Delta t^2.$$

Назовем φ^* и L^* достаточными координатами. Физически они обозначают прогнозируемый угол встречи и прогнозируемый пролет соответственно.

Прежде чем охарактеризовать вид оптимального управления в данной задаче, рассмотрим задачу без фазового ограни-

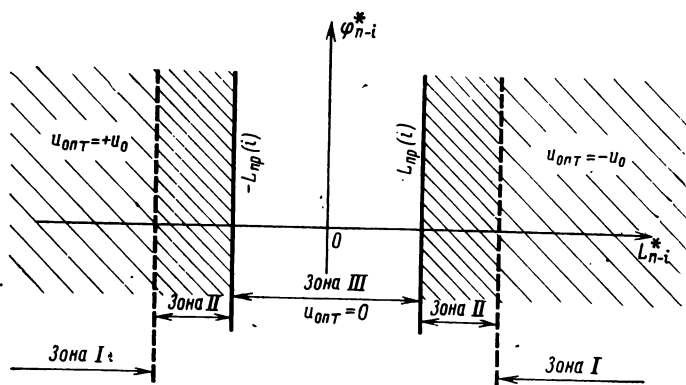


Рис. 3.11. Синтез управления без фазового ограничения (угол встречи не ограничивается)

чения $|ax_1(T) + x_2(T)| \leq \varphi_{\text{max}} = \varphi^0$, т. е. задачу на минимум промаха. Найдем вид оптимального решения в ней. Известно, что в этой задаче управление зависит только от L^* и $t_{\text{ост}}$. Эта зависимость на плоскости L^*, φ^* изображена на рис. 3.11.

В зоне I управление принимает экстремальные значения $u_{\text{опт}} = \pm u_0$. Зона II — зона линейной зависимости управления от L^* . Оптимальное управление в этой зоне должно «сдвигать» точку φ^*, L^* (находящуюся вне зоны абсолютного минимума) на границу области абсолютного минимума и будет определяться в соответствии с формулой

$$L_{n-(i-1)} = L_{n-i}^* + (i-1)\Delta t^2 u.$$

Зона III — зона нулевого управления $u_{\text{опт}} = 0$, или зона абсолютного минимума (ЗАМ) функционала. ЗАМ ограничивается прямыми $L_{n-1}^* = \pm L_{\text{пр}}^i$ и с увеличением $t_{\text{ост}}$ увеличивается.

При наличии фазового ограничения, т. е. в исходной задаче, картина синтеза управления резко изменяется. На плоскости L^*, φ^* выделяются следующие зоны (рис. 3.12).

Зона I (заштрихованная редко) — зона, где оптимальное управление принимает свои предельные значения $u_{опт} = \pm u_0$.

Зона II (заштрихованная часто) — зона, где оптимальное управление линейно зависит от координат φ^* , L^* . Эта зона гораздо сложнее описанной выше линейной зоны и состоит из двух подобластей: в одной, идущей параллельно линиям $\varphi_{n-i}^* = \pm \varphi_{max} \pm (au_0 - \xi_0)i\Delta t$, управление определяется из условия вы-

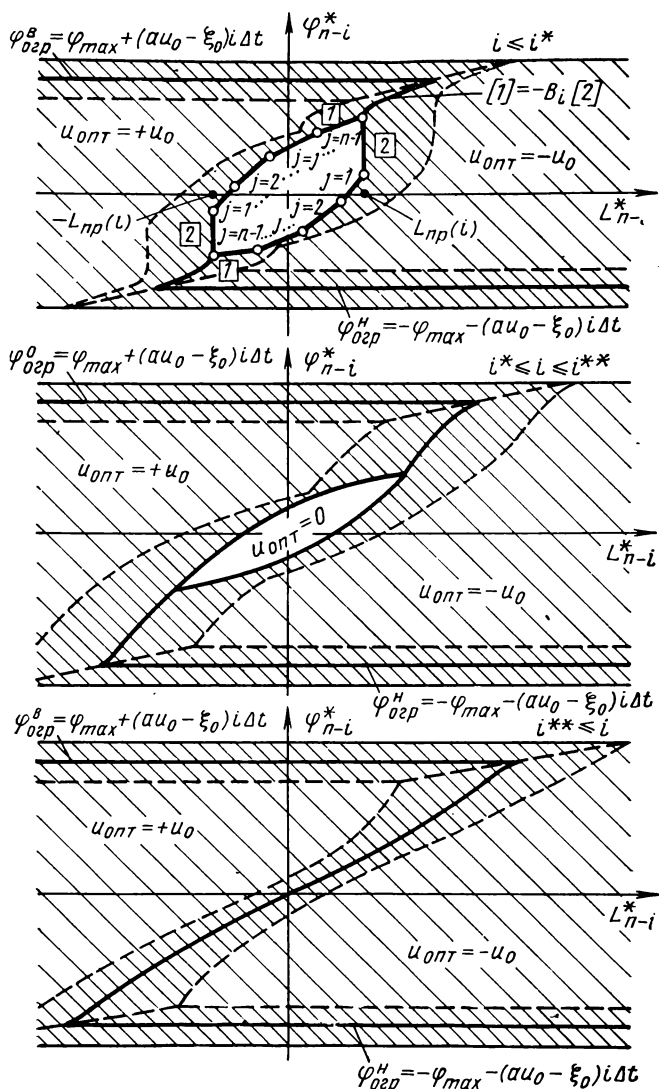


Рис. 3.12. Синтез управления при наличии фазового ограничения (угол встречи ограничивается)

держивания фазового ограничения (здесь управление выбирается таким, чтобы точка φ_{n-i}^* , L_{n-i}^* «сдвигалась» на эти линии); в другой — из условия минимума функционала (здесь управление выбирается таким, чтобы «сдвигать» точку φ_{n-i}^* , L_{n-i}^* на границу ЗАМ либо на линию раздела положительного и отрицательного управления — линию переключения).

Зона III (незаштрихованная) — зона нулевого оптимального управления $u_{\text{опт}}=0$, или ЗАМ.

Границы ЗАМ при

$$i \leq i^* = \frac{\varphi^0 + (au_0 - \xi_0) \Delta t}{\xi_0 (1 + a) \Delta t} + 1$$

находятся аналитически и состоят из вертикальных прямых $L_{n-i}^* = \pm L_{\text{пр}}(i)$, верхней и нижней выпуклых ломаных линий, каждая из которых содержит j , где $1 \leq j \leq (i-1)$, линейных участков (порядок номеров участков верхней и нижней кривой указан на рис. 3.12). Каждый j -й участок располагается на интервале

$$(u_0 - \xi_0) \Delta t^2 \left[-\frac{i(i-1)}{2} + j(j-1) \right] \leq L_{n-i}^* \leq (u_0 - \xi_0) \Delta t^2 \times \\ \times \left[-\frac{i(i-1)}{2} + j(j+1) \right]$$

и описывается здесь уравнением вида

$$L_{n-i}^* - \left\{ (u_0 - \xi_0) \Delta t^2 \left[-\frac{i(i-1)}{2} + j(j-1) \right] \right\} = j \frac{\Delta t}{a} [\varphi_{n-i}^* - \\ - \{\varphi^0 + (2j-i)(au_0 - \xi_0) \Delta t - 2\xi_0 \Delta t [(i-1) - (j-1)(1-a)]\}].$$

Криволинейный участок линии переключения (сплошная линия) в зоне II не удастся определить аналитически, хотя начальный ее наклон (вблизи ЗАМ) легко можно найти: $[1] = -B_i$ [2], где [1] — уравнение последнего участка верхней (нижней) границы ЗАМ; [2] — уравнение вертикальной границы ЗАМ; B_i — коэффициент, определяемый из рекуррентного соотношения

$$B_i = \frac{1 + (i-1)B_{i-1}}{i-2} \sqrt[i-1]{\frac{(1+a^{-1})i}{1 + (i-1)B_{i-1}}} \text{ при } i > 2; \\ B_2 = 2(1+a^{-1}).$$

С увеличением i ЗАМ «расширяется» по оси L^* и «сжимается» по оси φ^* . На интервале $i=i^*$, т. е. $\{t_{n-i^*}, t_{n-(i^*-1)}\}$, верхняя и нижняя границы ЗАМ касаются (пропадают вертикальные

участки). Начиная с этого интервала, ЗАМ «сжимается» по обеим координатам и с интервала

$$i \geq i^{**} = \frac{-\varphi^0 - 2a\xi_0\Delta t}{-\xi_0(1+a)\Delta t - a(u_0 - \xi_0)\Delta t/2}$$

исчезает совсем. Линию переключения линейной области (а после $i \geq i^{**}$ остается вместо границы ЗАМ только она) можно найти численными методами, используя ЦВМ.

Из рис. 3.12. видно, что введение фазового ограничения на угол встречи резко изменяет привычную структуру управления (в задаче на минимум промаха): во-первых, управление зависит теперь от большего числа переменных φ^* , L^* , $t_{\text{ост}}$; во-вторых, с увеличением $t_{\text{ост}}$ ЗАМ уменьшается и, начиная с некоторого интервала, пропадает совсем.

Каким же образом строится оптимальное управление? По координатам цели и ракеты и по текущей перегрузке цели в специальном блоке достаточных координат (рис. 3.13) должны определяться упрежденный угол встречи φ^* , упрежденный промах L^* и время $t_{\text{ост}}$, оставшееся до встречи.

Оптимальное управление определяется либо по цепи учета фазового ограничения (верхняя или нижняя цепь), либо по цепи минимума промаха (средняя цепь). Сложность цепи минимизации промаха и логики переключения на ту либо на другую цепь зависит от принятой аппроксимации границ ЗАМ и линии переключения в переменных L^* , φ^* , i .

Анализ полученного алгоритма приводит к следующим выводам.

1. Применение полученного алгоритма управления для заданного класса целей (a , ξ_0) и маневренных возможностей ракеты (u_0) целесообразно ограничить только некоторой частью зоны поражения. Вне отмеченной части оптимальное управление целесообразно находить только из условия минимума промаха.

2. Структура алгоритма управления ракетой, предложенного для работы во всей зоне поражения, должна быть преобразуемой.

В связи с этим отметим, что, приведенная на рис. 3.13 структура оптимального управления может просто преобразовываться в новую структуру (управление без ограничения на угол встречи). Для точек зоны, в которых управление должно находиться только из условия минимума промаха, достаточно в полной структуре заблокировать верхнюю и нижнюю цепи, а в средней цепи использовать алгоритм, построенный только по параметрам $-L_{\text{пр}}$, $L_{\text{пр}}$ на рис. 3.13. Это и будет структура, соответствующая рис. 3.11.

Наведение на маневрирующую цель при ограничениях на запас и текущий расход топлива*. Пусть управление ракетой

* В этом примере использованы материалы, предоставленные авторам инж. Н. А. Соловкиной.

происходит с помощью сил, изменение которых производится путем регулирования расхода $|u|$ «управляющего» топлива, запас $x_3 \leq N^0$ которого ограничен. Необходимо найти управление, обеспечивающее минимальный осредненный промах ракеты $M|x_1(T)|$ в заданный момент времени T с учетом ограничений на суммарный запас топлива $x_3(t) \leq N$ и текущий его расход $|u| \leq u_0$.

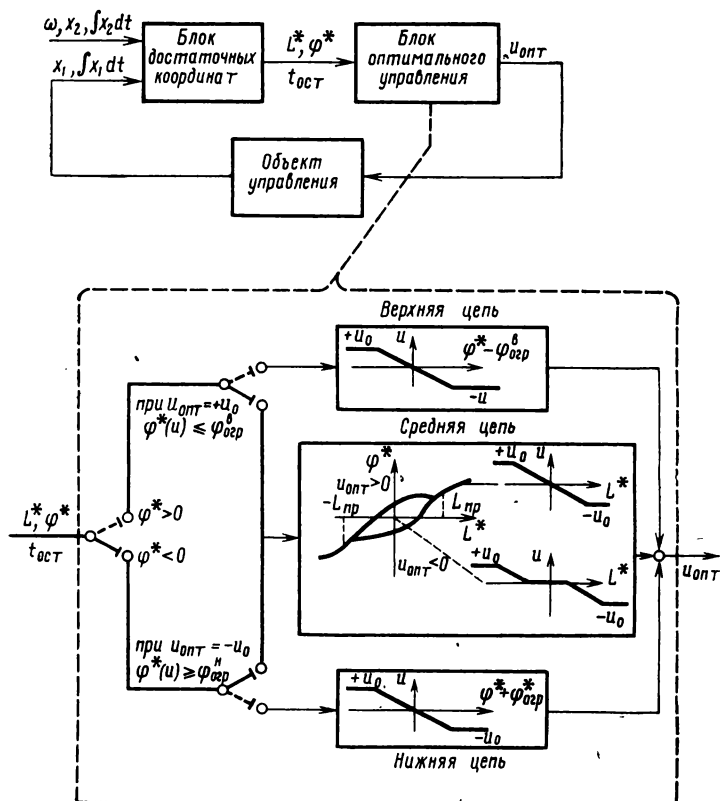


Рис. 3.13. Блок-схема структуры оптимального управления

Сохраняя принятые в предыдущем примере допущения, задачу можно сформулировать в следующем виде.

Пусть объект управления описывается на заданном интервале времени $[0, T]$ следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = \xi_1(t) + x_4 + k(t)u; \quad \frac{dx_3}{dt} = |u|; \quad \frac{dx_4}{dt} = \omega,$$

где $k(t) > 1$;

$\xi_1(t)$ — регулярный маневр цели (перегрузка), известная функция;

$|\omega| \leq \omega_0$; здесь ω — случайная величина, распределенная по равномерному закону, определенная в каждый момент времени t_i и не зависящая от случайных величин в другие моменты времени. Это случайный маневр цели. Моменты времени t_i удовлетворяют условию

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = T.$$

Расстояние между любыми соседними моментами времени постоянно и равно Δt ;

$|u| \leq u_0$, где $u(\dots)$ — управление ракеты, зависящее от текущих координат объекта, которые известны точно и измеряются только в моменты времени t_i .

На объект наложено фазовое ограничение

$$x_3(T) \leq N^0(T).$$

Необходимо определить управление $u(\dots)$, минимизирующее функционал

$$M |x_1(T)| = \int_{\Omega} |x_1(T)| d\omega,$$

где через Ω обозначено пространство всех реализаций процесса $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, а $d\omega$ — вероятностная мера на этом пространстве.

Используя результаты, приведенные в разд. 3.4, найдем, что для определения оптимального управления нужно на каждом произвольном интервале $[t_{n-m}, t_{n-(m-1)}]$ на основании измерений в момент t_{n-m} вычислить

$$\begin{aligned} L_{n-m} &= x_1(t_{n-m}) + m \Delta t x_2(t_{n-m}) + \left[\sum_{i=1}^{m-1} i \xi_1(t_{n-1-i}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(m-1)}{2} x_4(t_{n-m}) \right] \Delta t^2; \\ L_{n-m}^* &= L_{n-m} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} \omega_{n-(m-1)} \Delta t^3. \end{aligned}$$

В координатах $L_{n-m}^*, x_3(t_{n-m})$ получена структура управления, которая показана на рис. 3.14. Из рисунка видно, что плоскость L^*, x_3 разбита на области, в каждой из которых управление строится по своему правилу. В области $u=0$ управление нулевое, в области $u = \pm u_0$ оно максимально по абсолютной вели-

чине. В заштрихованной области управление $u(\dots)$ линейно зависит от L_i^* и отыскивается из условия попадания точки

$$L_{n-(m-1)} = L_{n-m}^* + (m-1) \Delta t^2 k(t_{n-m}) u(\dots),$$

$$x_3 = x_{3,n-m} + |u(\dots)| \Delta t$$

на ближайшую из границ: 1, 2, $x_3 = N^0$ (см. рис. 3.14).

Оптимальное управление находится следующим образом: после проведения измерения в начале интервала $\{t_{n-m}, t_{n-(m-1)}\}$ определяется разбиение плоскости $L_{n-m}, x_3(t_{n-m})$ на области; выделяется та область, в которую попадает точка $L_{n-m}^*, x_3(t_{n-m})$, полученная на основании проведенных текущих измерений; управление $u(\dots)$ определяется по зависимости, соответствующей выделенной области. Структура оптимального управления определяется в результате построения функции $G_{m-n}(L_{n-m}^*, x_3(t_{n-m}))$. Осредняя ее по случайным величинам ω_{n-m} , получим функцию $\bar{G}_{n-m}(L_{n-m}, x_3(t_{n-m}))$.

Эта процедура продлевается аналитически до интервала $\{t_{n-4}, t_{n-3}\}$. Начиная же с интервала $\{t_{n-5}, t_{n-4}\}$, точнее с самого построения функции $\bar{G}_{n-4}(L_{n-4}, x_3(t_{n-4}))$, провести полное аналитическое исследование не удастся. Трудности возникают в связи с тем, что аналитически функцию $\bar{G}_i$ на плоскости L, x_3 приходится задавать большим числом зависимостей, каждая из которых относится только к определенному множеству точек L, x_3 . Уравнение границ этих множеств определять все труднее, да и число таких множеств резко возрастает. Так, для функции $\bar{G}_{n-4}(\dots)$, которую удастся определить, таких множеств 14.

Несмотря на это, построить синтез управления все же можно. Из анализа задачи по приведенному выше методу можно заключить, что для определения оптимального управления от минимизируемой функции $\bar{G}$ требуется только следующая информация:

1) описание границы области абсолютного минимума функции $\bar{G}_{n-m}$;

2) описание на плоскости $L_{n-m}, x_{3,n-m}$ геометрического места точек, для которых производная $dL_{n-m}/dx_{3,n-m}$ на линии уровня функции $\bar{G}_{n-m}$ равна коэффициенту наклона траектории управляемого сдвига точки $L_{n-m-1}^*, x_{3,n-m-1}$ (сдвига за счет названного управления $u_{n-m-1}(L_{n-m-1}^*, x_{3,n-m-1})$). Выше это гео-

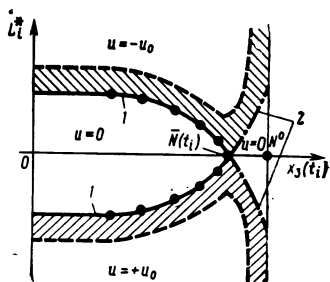


Рис. 3.14. Структура оптимального управления для интервала $[t_i, t_{i+1}]$:

1—граница области абсолютного минимума; 2—линия переключения

метрическое место было названо линией переключения (кривая 2 на рис. 3.14).

Область абсолютного минимума функции $\bar{G}_{n-m}$ можно определить аналитически. Для интервала $[t_{n-m}, t_{n-(m-1)}]$ граница области абсолютного минимума (кривая 1 на рис. 3.14) состоит из m линейных участков. Приведем уравнения участков (ввиду симметрии картины относительно оси x_3 результаты даются только для положительной полуплоскости $L_{n-m} > 0$):

$$\text{для } 0 \leq x_3(t_{n-m}) \leq N^0 - (m-1)u_0\Delta t$$

$$L_{n-m} = \sum_{i=1}^{m-1} ik(t_{n-i-1})u_0\Delta t^3 - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{i(i-1)}{2} \omega_0\Delta t^3;$$

$$\text{для } N^0 - (m-1)u_0\Delta t \leq x_3(t_{n-m}) \leq N^0 - (m-2)u_0\Delta t$$

$$L_{n-m} = [N^0 - x_3(t_{n-m}) - (m-2)u_0\Delta t] \Delta t k(t_{n-2}) + \\ + \sum_{i=2}^{m-1} ik(t_{n-1-i})u_0\Delta t^3 - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{i(i-1)}{2} \omega_0\Delta t^3;$$

$$\text{для } N^0 - (m-2)u_0\Delta t \leq x_3(t_{n-m}) \leq \bar{N}(t_{n-3}) - (m-3)u_0\Delta t$$

$$L_{n-m} = [N^0 - x_3(t_{n-m}) - (m-2)u_0\Delta t] 2\Delta t k(t_{n-3}) + \\ + \sum_{i=2}^{m-1} ik(t_{n-1-i})u_0\Delta t^3 - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{i(i-1)}{2} \omega_0\Delta t^3.$$

Крайняя правая точка области абсолютного минимума находится из рекуррентного соотношения

$$\bar{N}(t_{n-m}) = \bar{N}(t_{n-(m-1)}) - \frac{(m-2)\omega_0\Delta t^2}{2k(t_{n-m})},$$

$$\text{где } \bar{N}(t_{n-1}) = \bar{N}(t_{n-2}) = N^0(T);$$

$$\bar{N}(t_{n-3}) = N^0(T) - \frac{\omega_0\Delta t^2}{2k(t_{n-3})}.$$

Общий вид линейного участка границы области абсолютного минимума не приводится, так как нахождение такого важного элемента структуры, как линии переключения, возможно только на ЦВМ. В этом случае описание области абсолютного минимума используется только для контроля правильности вычислений.

Функцию $\bar{G}_{n-m}$ можно вычислить следующим образом. В процессе счета на ЦВМ определяются функции

$$G_n(L_n, x_3(t_n)) = L; G_{n-1}(L_{n-1}, x_3(t_{n-1})) \dots G_{n-m}(L_{n-m}, x_3(t_{n-m}))$$

в узлах сетки поля $L_{\max}^{(m)} \geq L \geq 0, N^0 \geq x_3 \geq 0$.

Моменты времени $t_i \in [0, T]$ и удовлетворяют неравенствам $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_{n-1} < t_n = T$.

Функция $G_n(\dots)$ известна. Последующая функция G_{n-m} строится по значениям предыдущей функции $G_{n-(m-1)}$ по следующим этапам.

А. Построение функции G_{n-m} в узле $L = L_{n-m}$, $x_3 = x_3(t_{n-m})$. Узлы выбираются только такие, у которых $L \leq L_{\max}^m$. Задается ряд значений ω :

$$\omega = s_\omega \Delta \omega,$$

где

$$-\frac{\omega_0}{\Delta \omega} \leq s_\omega \leq \frac{\omega_0}{\Delta \omega} = s_\omega^0.$$

Для каждого ω определяется минимальное значение функции $G_{n-m}^*(s_\omega)$ (алгоритмы управляемого сдвига) и затем по квадратурной формуле Ньютона находится $G_{n-m}(L_{n-m}, x_3(t_{n-m}))$.

Б. Алгоритм управляемого сдвига (УС). Управляемый сдвиг фазовой точки $x_3(t_{n-m})$, $L_{n-m}^*(s_\omega)$ осуществляется в соответствии со следующими формулами:

$$L_{n-(m-1)} = L_{n-m}^* - (m-1) \Delta t^2 k(t_{n-m}) u(t_{n-m});$$

$$x_3(t_{n-(m-1)}) = x_3(t_{n-m}) + |u(t_{n-m})| \Delta t.$$

По зависимости

$$G_{n-(m-1)}(L_{n-m}^* - (m-1) \Delta t^2 k(t_{n-m}) s_u \Delta u; x_3(t_{n-m}) + s_u \Delta u \Delta t)$$

для каждого значения s_u ($0 \leq s_u \leq \frac{u_0}{\Delta u} = s_u^0$) с использованием алгоритма интерполяции рассчитывается значение функции $G_{n-(m-1)}$ и выбирается наименьшее среди достижимых при управляемом сдвиге.

Для расчета значений функции $G_{n-(m-1)}$ вне узловых точек проводится интерполяция по окружающим ее узлам на основании интерполяционной формулы Бесселя.

В. Изменение поля. Максимальные размеры поля (его границы), на котором задана функция $G(\dots)$, выбираются из следующих соображений:

1) обеспечить вычисление наиболее характерных участков области определения функции $G(\dots)$;

2) обеспечить заданное количество интервалов (количество функций G_i , где $i = n-1, \dots, 1$) при изменении функции G .

Максимальное значение $L_{\max}^m$ в начале интервала m определяется по формуле

$$L_{\max}^m = L_{\max}^{m-1} - \left[\frac{(m-1)(m-2)\omega_0 \Delta t^3}{2\Delta L} \right]_{ц.ч} \Delta L - \Delta L,$$

где $[\dots]_{ц.ч}$ — целая часть выражения в скобках;
 $\Delta L, \Delta t$ — шаг сетки по L и шаг по времени.

Для вычисления функции $G(\dots)$ и определения линии переключения необходимы расчеты на ЦВМ. Расчеты показали, что как область абсолютного минимума, так и линия переключения определяются неоднозначно. Это связано с малым изменением функции $G(\dots)$ в этих районах. Сравнительно легко определяется «коридор», в котором лежат линии переключения и граница области абсолютного минимума. Это свойство структуры позволяет в известных пределах упрощать вид линий, что значительно облегчает их реализацию в технических устройствах.

Опыт проведения вычисления и построения линий переключения позволил выделить ряд особенностей этого процесса.

Так, моделирование при начальных условиях

$$u_0=40; k(t)=1; \omega_0=20; N^0=50$$

и параметрах

$$n=15; \Delta t=1; \Delta u=4; L_{\max}=7500;$$

$$\Delta L=500; \Delta \omega=5; \Delta x_3=5$$

показало, что для построения линии переключения необходимо точнее строить линии уровня функции G . Для этого функции G_{n-m} нужно определять на поле с возможно меньшим шагом по L . Так, при $\Delta L=500$ точка касания находится на участке кривой, где ошибки определения ее положения по L достигают $\approx \Delta L/4$. Это потребовало уменьшить шаг по L до $\Delta L=100$. При этом время счета соответственно увеличилось приблизительно в четыре раза. При расчетах с шагами $\Delta u=4$ и $\Delta \omega=5$ обнаружилось значительное «колебание» (изломы) функции $G_{n-m}(L, x_3)$. Уменьшение шага по u и ω вдвое приводит к тому, что функции сглаживаются. Это объясняется тем, что при изменении ω (где $0 \leq \omega \leq \omega_0$) и u (где $0 \leq u \leq u_0$) при различных m (где $m=1, \dots, \dots, 13$) неравномерно используется поле, на котором определена функция G_{n-m+1} . Управляемая точка $L_{n-(m-1)}, x_3(t_{n-(m-1)})$ при смещении вследствие изменения u и ω (при $\Delta u=4, \Delta \omega=5$) при $m \leq 6$ два раза попадает в каждую ячейку поля, на котором определена функция G_{n-m+1} (через которые проходит отрезок управляемого сдвига), при $m=7,8$ — только один раз, а при $m \geq 9$ попадают ячейки, в которые управляемая точка не попадает. Для равномерного использования поля и экономного расхода машинного времени оказалось целесообразным считать до $m \leq 6$ с $\Delta \omega=5$, а при всех остальных m брать $\Delta \omega=2,5$. Уменьшение $\Delta \omega$ вдвое приводит к увеличению времени счета соответственно в два раза.

Как отмечалось выше, линия переключения является геометрическим местом точек касания к линиям уровня функции G_{n-m-1} линий управляемого сдвига точки $L_{n-m}^*, x_3, n-m$. Так как линию переключения точно построить нельзя, то на каждом ин-

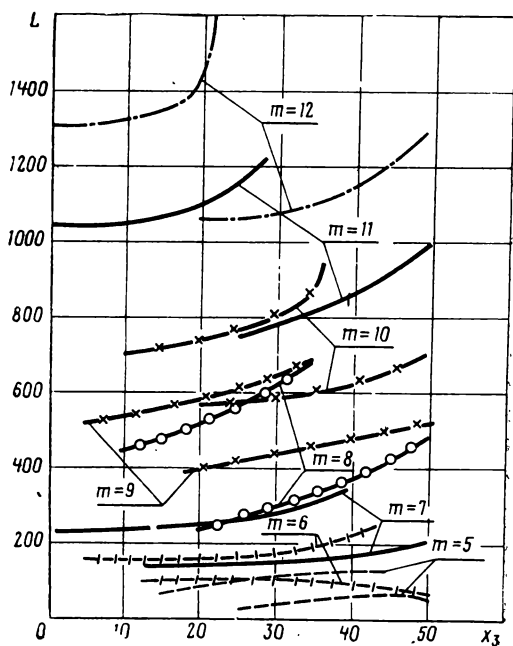


Рис. 3.15. Области возможного положения линии переключения

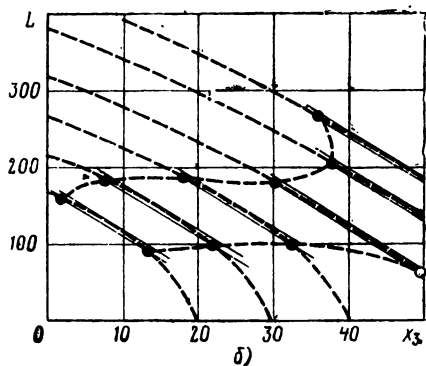
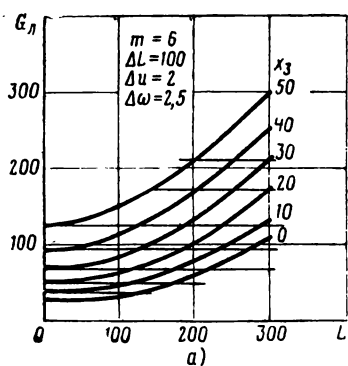


Рис. 3.16. Метод построения области возможных положений линии переключения:

а—построение линии уровня; б—построение коридора

тервале был построен «коридор», в котором она должна находиться.

На рис. 3.15 показаны области возможного положения линии переключения (коридор), полученные путем расчета на ЦВМ для приведенных выше начальных условий.

Для построения коридора (см. рис. 3.16, а, б) проводились касательные к линиям уровня $G_n = \text{const}$ и прямые, параллельные им и сдвинутые в сторону меньших x_3 на величину $0,1 \Delta x_3$, что допустимо ввиду малого изменения функции G_n при таком сдвиге.

Точки пересечения линии уровня со сдвинутыми касательными определили границу коридора (для $m=6$ такой коридор показан на рис. 3.16, б).

В заключение отметим, что на рассмотренных примерах были продемонстрированы способы определения структуры оптимального управления (см. пример наведения при ограничениях на угол встречи) и параметров этой структуры путем использования аналитических и численных исследований (см. пример наведения при ограничениях на запас и расход топлива).

ГЛАВА 4

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ К АНАЛИЗУ И ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В практике проектирования летательных аппаратов и систем управления ими широкое применение нашли ЦВМ. С их помощью удастся проанализировать, не прибегая к натурным экспериментам, поведение системы в целом или отдельных ее частей и, таким образом, оценить эффективность системы и выбрать наилучшее конструктивное решение с приемлемыми затратами времени и средств.

Моделирование систем управления летательными аппаратами должно учитывать различного рода случайные воздействия: шумы в информационных устройствах, разброс параметров, случайные маневры цели и др. Наличие случайных воздействий значительно замедляет исследование системы. В связи с этим одним из главных критериев, по которому сравнивается эффективность тех или иных методов исследования с помощью ЦВМ, являются затраты машинного времени.

Целью анализа системы является вычисление характеристик, определяющих степень выполнения поставленных перед машиной задач — критерия качества. Критерием качества может быть функция, определяющая точность системы, ее стоимость, вес и т. д. При любых определениях качества математическая сторона остается одной и той же — критерий является функцией или функционалом от фазовых координат системы и ее параметров. Поэтому рассмотрение методов анализа целесообразно проводить с обобщенной точки зрения, не конкретизируя критерий качества.

Одной из наиболее часто встречающихся проблем, решаемых в процессе проектирования, является оптимизация отдельных блоков или системы в целом. В связи с усложнением условий функционирования и повышением требований к системе вопро-

сы оптимизации систем управления летательными аппаратами приобретают все более важное значение.

Известные методы оптимизации можно разбить на две группы. К первой относятся методы, использующие для расчета оптимальных управлений и параметров необходимые условия экстремума, записанные в той или иной форме. Эти методы предполагают аналитическое или численное решение условий оптимальности и могут быть доведены до конца только в случае достаточно простых уравнений оптимизируемого объекта. Большим их достоинством является возможность получения не только количественных соотношений, но и структуры оптимальных законов управления, используемой в постановке задач параметрической оптимизации. Рассмотрению некоторых методов первой группы посвящена третья глава настоящей книги.

Вторую группу составляют прямые методы, сводящие задачу оптимизации к выбору числовых параметров из условия минимума заданного критерия качества при ограничениях на значения некоторых функций параметров — к задаче нелинейного программирования. Эти методы пригодны для оптимизации сложных систем и применение их ограничено в основном только объемом вычислений.

Оптимальные системы зачастую очень чувствительны к точности определения их параметров и условий функционирования. Поэтому использование упрощенных моделей системы в задачах оптимизации не всегда оправдано и, во всяком случае, должно сопровождаться проверкой результатов на полной модели системы.

Поскольку процессы в системах управления летательными аппаратами описываются дифференциальными уравнениями высокого порядка, применение к ним первой группы методов целесообразно на первых этапах проектирования системы для выяснения структуры законов управления. Если структура системы известна, проектирование ее заключается в выборе параметров отдельных элементов, который целесообразно проводить используя прямые методы оптимизации.

Процесс оптимизации системы с помощью прямых методов состоит в расчете критерия качества системы при различных значениях выбираемых параметров и движении к новым значениям параметров таким образом, чтобы значение минимизируемого критерия убывало. Таким образом, анализ системы, понимаемый как расчет ее критерия качества при заданных значениях выбираемых параметров, является составной частью алгоритмов оптимизации прямыми методами.

Существует две группы методов анализа динамических систем, зависящих от случайных воздействий. Методы первой группы используют полученные по дифференциальным уравнениям анализируемой системы уравнения для статистических характеристик, решая которые можно найти искомый критерий качества.

К ним относятся статистическая линеаризация [7], [11], методы, связанные с решением уравнения для плотности распределения вероятностей значений фазовых координат и вытекающих из него систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно моментов и семиинвариантов [6] и некоторые другие. Методы первой группы представляют мощный математический аппарат качественного, а в некоторых случаях и количественного исследования динамических систем, однако их применение связано либо со сравнительно малой точностью расчетов (метод статистической линеаризации), либо с необходимостью решения систем дифференциальных уравнений, порядок которых значительно превышает порядок дифференциальных уравнений исследуемого объекта. Поэтому в большинстве случаев методы первой группы целесообразно применять при решении модельных задач исследования систем управления летательными аппаратами, когда необходимо определить качественную картину поведения системы.

В методах второй группы для расчета критерия качества системы используется обработка результатов многократного решения дифференциальных уравнений системы при различных реализациях случайных воздействий. Их математическую основу составляет теория численного интегрирования и метод статистических испытаний (метод Монте-Карло).

На практике возможности методов второй группы ограничены имеющимся ресурсом машинного времени, отведенного для решения данной задачи. Однако в принципе они позволяют анализировать системы любой степени сложности и с любой необходимой степенью точности. Их можно рекомендовать для использования на заключительных этапах проектирования, когда необходимо учитывать все особенности исследуемой системы, влияющие на её эффективность.

Ввиду того, что для применения методов второй группы не требуется решения специальных вспомогательных уравнений, а можно использовать готовые математические модели исследуемых систем, сроки выполнения работ по анализу при использовании методов второй группы могут быть значительно сокращены.

Содержание настоящей главы составляют методы анализа динамических систем, зависящих от случайных воздействий, которые основаны на обработке результатов решения уравнений системы, и их применение при решении задач оптимального проектирования с помощью алгоритмов нелинейного программирования. Особое внимание уделяется методам исследования систем, зависящих от случайных процессов. Критерием выбора методов анализа и оптимизации являлась возможность их использования на заключительных этапах проектирования при учете всех особенностей исследуемого объекта.

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Поведение систем управления летательными аппаратами может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(t, y_1, \dots, y_s, x_1, \dots, x_m); y_i(0) = y_i^0, \quad (4.1)$$

где y_i — фазовые координаты системы; x_i — параметры системы и сигналы входных воздействий.

Величины x_i могут быть постоянными и функциями времени, фазовых координат и т. п. В большинстве реальных приложений часть или все величины x_i являются случайными. Во многих задачах начальные условия для системы (4.1) также являются случайными величинами. Если ввести случайный вектор

$$x = (x_1, \dots, x_m, y_1^0, \dots, y_s^0) = (x_1, \dots, x_m), \quad (4.2)$$

уравнения системы (4.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= F_i(t, y_1, \dots, y_s, x_1, \dots, x_m); \\ y_i(0) &= x_{m+i}; \quad i = 1, \dots, s, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где вектор x содержит все случайные величины и процессы, от которых зависит наведение системы. Среди компонент вектора x могут быть и детерминированные величины, но в этом случае они трактуются как случайные, имеющие плотность распределения в виде δ -функции. При фиксированных реализациях случайных воздействий и начальных условий фазовые координаты системы могут быть найдены путем решения дифференциальных уравнений (4.3)

$$y_i = y_i(t, x). \quad (4.4)$$

Сравнение различных, но предназначенных для одной и той же цели систем производится по заданному критерию эффективности, характеризующему поведение системы в различных условиях. Степень удовлетворения системой предъявленных к ней требований выражается некоторой функцией (или функционалом) качества. Вид этой функции определяется целью, для которой система предназначена. Она должна быть такой, чтобы имелась возможность вычислить ее значение для каждого испытания исследуемой системы.

В роли критерия эффективности естественно использовать границы области изменения функции качества при всех возможных изменениях параметров системы и среды, в которой она находится. Однако такой критерий не нашел широкого применения, поскольку большинство реальных систем ему не удовлет-

воряет. Обычно существует практически маловероятное сочетание параметров системы и внешних воздействий, для которых значение функции качества выходит за допустимые пределы. По критерию границ изменения функции качества система должна быть отвергнута, хотя для большинства случаев она может давать удовлетворительные результаты.

Поэтому обычно применяются различные вероятностные критерии эффективности систем. Наиболее общим видом вероятностного критерия является математическое ожидание некоторого функционала $\Phi(y_1, \dots, y_s, x_1, \dots, x_m)$ от фазовых координат и случайных воздействий, представляющего либо функцию качества системы, либо функцию от функции качества

$$J = M\Phi(y_1, \dots, y_s, x_1, \dots, x_m). \quad (4.5)$$

Задача статистического моделирования заключается в определении J .

Обозначим через $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ функционал, полученный из функционала $\Phi(y_1, \dots, y_s, x_1, \dots, x_m)$, участвующего в определении критерия эффективности (4.5) подстановкой решений системы (4.3),

$$J = Mf(x_1, \dots, x_m).$$

Временно предположим, что среди компонент вектора x есть только случайные величины. Тогда функционал f будет в действительности функцией m случайных величин $x_1, \dots, x_m$.

Допустим, что плотность распределения компонент вектора x равна $p(x_1, \dots, x_m)$. Тогда для критерия эффективности J справедливо соотношение

$$J = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_m) p(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m. \quad (4.6)$$

Таким образом, когда среди компонент вектора x нет случайных процессов, решение задачи анализа системы эквивалентно вычислению интеграла (4.6).

При выполнении экспериментов с системой или ее моделью можно определить значение функции качества только в отдельных точках области изменения параметров $x_1, \dots, x_m$. Задачи оценки эффективности системы сводится поэтому к определению интеграла от некоторой функции по ее значениям в отдельных точках. Это хорошо известная в вычислительной математике задача численного интегрирования.

Другой подход к задаче анализа основан на статистической трактовке интеграла J как математического ожидания случайной величины $f(x_1, \dots, x_m)$. Используя N независимых реализа-

ций случайной величины f , в качестве оценки интеграла можно принять оценку математического ожидания

$$J^* = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k,$$

где f_k — независимые реализации f .

При моделировании системы на ЦВМ независимые реализации f можно получить, решая систему при N различных независимых реализациях случайного вектора x . В результате в качестве приближенного значения интеграла будет принято выражение

$$J \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_1^k, \dots, x_m^k), \quad (4.7)$$

где $x_1^k, \dots, x_m^k$ — k -я независимая реализация вектора x .

Формула (4.7) представляет оценку интеграла J методом Монте-Карло. В то же время это не что иное, как квадратурная формула для вычисления интеграла J по значениям функции $f(x_1, \dots, x_m)$ в узлах $x_1^k, \dots, x_m^k$. Единственной ее особенностью является то, что выбор узлов интегрирования является случайным, т. е. различным для каждого случая применения формулы.

В силу общности детерминированных методов исследования эффективности, основанных на формулах численного интегрирования, и методов математической статистики задача оценки интеграла J может быть названа «задачей статистического моделирования».

4.2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Задачей теории численного интегрирования является вычисление определенного интеграла по значениям подынтегральной функции в отдельных точках.

Пусть требуется вычислить многомерный интеграл

$$J = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_m) p(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m, \quad (4.8)$$

где Ω — заданная область интегрирования;

p — известная положительная функция, называемая обычно функцией веса;

f — функция, подлежащая интегрированию с весом p .

Тогда квадратурной формулой называется равенство

$$J = \sum_{k=1}^N a_k f(x_1^k, \dots, x_m^k) + R(f), \quad (4.9)$$

где a_k — постоянные величины, коэффициенты квадратурной формулы; $x_1^k, \dots, x_m^k$ — точки m -мерного пространства — узлы квадратурной формулы; $R(f)$ — остаточный член квадратурной формулы.

Коэффициенты a_k и узлы квадратурной формулы $x_1^k, \dots, x_m^k$ подбирают таким образом, чтобы остаточный член $R(f)$ обращался в нуль или был мал для класса функций, которому принадлежит $f(x_1, \dots, x_m)$. Если это условие выполнено, то из формулы (4.9) следует приближенное равенство

$$J \approx \sum_{k=1}^N a_k f(x_1^k, \dots, x_m^k), \quad (4.10)$$

позволяющее вычислить величину интеграла (4.8) по значениям подынтегральной функции в узлах $x_1^k, \dots, x_m^k$, $k=1, \dots, N$.

Соотношение (4.9) не является самым общим видом формулы численного интегрирования; существуют квадратурные формулы, использующие для подсчета интегралов не только значения подынтегральной функции, но и ее производные. Однако практического применения в задаче статистического анализа систем они до сих пор не нашли вследствие трудностей, связанных с вычислением производных.

Основная задача теории численного интегрирования состоит в определении коэффициентов и узлов квадратурных формул, обеспечивающих удовлетворительную точность численного интегрирования при заданном числе узлов N . Получение квадратурных формул основано на идее интерполяции. По значениям подынтегральной функции в узлах строится интерполяционная формула, аппроксимирующая заданную функцию в промежуточных точках. Затем производится точное интегрирование интерполирующей функции, результат которого принимается за приближенное значение интеграла (4.8).

Поскольку интерполирующая функция зависит от значений функции в узлах линейно, полученная формула численного интегрирования также зависит от них линейно, что отражено в соотношениях (4.9) и (4.10). Остаточный член формулы (4.9) получается вследствие того, что интерполирующая функция аппроксимирует функцию в промежуточных точках с ошибками.

Поскольку интерполирующую формулу, хорошо приближающую любые функции, построить невозможно, также невозможно получить квадратурную формулу, дающую хорошую точность интегрирования во всех случаях. В зависимости от конкретного

типа интегрируемой функции должна выбираться та квадратурная формула, которая дает наибольшую точность при заданном числе узлов интегрирования.

4.3. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Как известно, интерполяционный многочлен Лагранжа, совпадающий с функцией $f(x)$ скалярного аргумента x и n точках $x^1, \dots, x^n$, имеет степень $n-1$ и может быть записан в виде

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n f(x^i) \frac{\omega_n(x)}{(x - x^i) \omega'_n(x^i)}, \quad (4.11)$$

где

$$\omega(x) = (x - x^1)(x - x^2) \dots (x - x^n). \quad (4.12)$$

Тогда справедливо равенство

$$f(x) = L_{n-1}(x) + T_{n-1}(x), \quad (4.13)$$

где $T_{n-1}(x)$ — остаточный член формулы интерполирования. Он может быть оценен. Например, если функция $f(x)$ имеет производную до порядка n , для остаточного члена справедлива следующая формула [1]:

$$T_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega(x), \quad (4.14)$$

где ξ — некоторая точка внутри отрезка $x^1 \leq x \leq x^n$.

Предположим, что нужно вычислить интеграл

$$\int_a^b f(x) p(x) dx, \quad (4.15)$$

зная значения функции $f(x)$ в n точках $x^1, \dots, x^n$. Используя формулу (4.13), подставим в интеграл выражение $f(x)$ через ее интерполирующий полином

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) p(x) dx &= \int_a^b L_{n-1}(x) p(x) dx + \int_a^b T_{n-1}(x) p(x) dx = \\ &= \sum_{k=1}^n f(x^k) \int_a^b \frac{\omega_n(x)}{(x - x^k) \omega'_n(x^k)} p(x) dx. \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$a_k^{(n)} = \int_a^b \frac{\omega_n(x)}{(x - x^k) \omega_n'(x^k)} p(x) dx; \quad (4.16)$$

$$R_n(f) = \int_a^b T_{n-1}(x) p(x) dx, \quad (4.17)$$

получим квадратурную формулу для вычисления интеграла (4.15)

$$\int_a^b f(x) p(x) dx = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} f(x^k) + R_n(f). \quad (4.18)$$

Коэффициенты квадратурной формулы $a_k^{(n)}$ могут быть вычислены заранее по формулам (4.16), остаточный член квадратурной формулы $R_n(f)$ может быть оценен согласно (4.17), если дана оценка остаточного члена формулы интерполяции $T_{n-1}(x)$.

Перейдем к рассмотрению некоторых, наиболее употребительных квадратурных формул [1].

Формулы Ньютона — Котеса выведены для случая, когда $p(x) = 1$, т. е. для вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x) dx,$$

и получаются путем замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом Лагранжа с узлами, разбивающими промежуток интегрирования на равные части. Таблицы весовых коэффициентов a_k^n и множителей при производных в формуле остаточного члена можно найти в книге [1].

Формулы трапеций и Симпсона. Недостатком формул Ньютона — Котеса является громоздкость выражений для весовых коэффициентов. Кроме того, весовые коэффициенты, принимая большие по модулю значения, могут иметь разные знаки, что может привести к большим погрешностям при использовании приближенных вычислений. Поэтому на практике формулами Ньютона — Котеса для больших значений n предпочитают не пользоваться, а разбивают интервал интегрирования на ряд подынтервалов, вычисление интегралов для которых производится с помощью этих формул для малых значений n . Именно таким способом получаются известные квадратурные формулы трапеций и Симпсона.

Формула трапеций получается путем разбиения отрезка интегрирования $[a, b]$ на m равных частей длиной $h = \frac{b-a}{m}$, на каждой из которых интегрирование проводится с помощью форму-

лы Ньютона — Котеса, соответствующей числу узлов n , равному 2.

Формула трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{m} [f + 2f(x^1) + \dots + 2f(x^{m-1}) + f(x^m)] + R, \quad (4.19)$$

где

$$x^i = \frac{b-a}{m} i; \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Остаточный член формулы трапеций может быть вычислен через вторую производную подынтегральной функции

$$R_{\text{тр}} = \frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi),$$

где ξ — некоторая точка внутри интервала $a < x < b$.

Если отрезок интегрирования $[a, b]$ разбить на $2m$ равных частей и к каждой из них применить формулы Ньютона — Котеса с тремя узлами, получится квадратурная формула Симпсона

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6m} [f(x^0) + 4f(x^1) + 2f(x^2) + 4f(x^3) + \\ + \dots + 4f(x^{2m-1}) + f(x^{2m})], \end{aligned} \quad (4.20)$$

где

$$x^i = \frac{b-a}{2m} i.$$

Остаточный член формулы Симпсона

$$R_c = \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 \frac{f^{(4)}(\eta)}{90m^4},$$

где η — точка, принадлежащая интервалу $a < x < b$.

Формулы численного интегрирования Гаусса. В общем случае квадратурные формулы Гаусса, полученные с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа степени $n-1$, производят интегрирование без ошибки произвольного полинома степени $n-1$. Рассмотрение выражения для квадратурной формулы (4.18) показывает, что при n узлах интерполирования она зависит от $2n$ параметров — узлов интерполирования $x^1, \dots, x^n$ и коэффициентов $a_1^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$.

Можно поставить задачу — так подобрать эти $2n$ параметров, чтобы полученная формула численного интегрирования позволяла вычислять без ошибки интеграл от полинома наивысшей степени.

Условием интегрирования без ошибки полинома степеней m является требование, чтобы квадратурная формула была точной при интегрировании $m+1$ функций $1, x, (x)^2, \dots, (x)^m$. Записывая условие равенства нулю остаточного члена при интегрировании этих функций, получим $m+1$ уравнений относительно $2n$ неизвестных. Из требований их разрешимости можно найти m :

$$m = 2n - 1 \quad (4.21)$$

— максимальную степень полинома, интеграл от которого можно вычислить точно, используя квадратурную формулу с n узлами интегрирования.

Непосредственное разрешение системы для определения $a_i^{(n)}$ и x^i возможно, но громоздко. Однако узлы интерполирования могут быть найдены с помощью искусственного приема достаточно просто. Пусть искомыми узлами являются абсциссы $x^1, \dots, x^n$. Рассмотрим многочлен

$$\omega_n(x) = (x - x^1)(x - x^2) \dots (x - x^n). \quad (4.22)$$

Этот многочлен удовлетворяет следующему необходимому и достаточному условию, из которого можно найти узлы x^k . Покажем, что

$$\int_a^b p(x) \omega_n(x) q(x) dx = 0, \quad (4.23)$$

если $q(x)$ — произвольный многочлен степени не выше $n-1$.

Условие (4.23) необходимо, поскольку функция $f(x) = \omega_n(x)q(x)$ является полиномом степени не выше $2n-1$ и должна поэтому интегрироваться численно без ошибки. Но значения $f(x)$ в точках x^k равны нулю, поэтому интеграл (4.23) согласно формуле (4.18) равен нулю.

Пусть многочлен $f(x)$ имеет степень не выше $2n-1$. Тогда

$$f(x) = \omega_n(x)q(x) + r(x), \quad (4.24)$$

где $q(x)$ и $r(x)$ — многочлены степени не выше $n-1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) p(x) dx &= \int_a^b \omega_n(x) q(x) p(x) dx + \\ &+ \int_a^b r(x) p(x) dx = \int_a^b r(x) p(x) dx. \end{aligned}$$

Но

$$\int_a^b r(x) p(x) dx = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} r(x^k),$$

поскольку $r(x)$ как полином степени $n-1$ совпадает со своим интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по уз-

лам $x^1, \dots, x^n$ и, следовательно, интегрируется квадратурной формулой (4.18) без ошибки. Поэтому

$$\int_a^b f(x) p(x) dx = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} r(x^k) = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} f(x^k),$$

поскольку $f(x^k) = r(x^k)$ согласно формуле (4.24).

Определив многочлен $\omega_n(x)$ из условия (4.23) и вычислив его корни, можно найти искомые узлы квадратурной формулы. Коэффициенты $a_k^{(n)}$ можно определить по формулам (4.16). В результате получим квадратурную формулу, которая называется квадратурной формулой Гаусса. Коэффициенты квадратурной формулы Гаусса называются числами Кристоффеля, они обозначаются обычно $Q_k^{(n)}$.

Для остаточного члена формулы Гаусса можно получить следующее выражение:

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \omega_n^2(x) p(x) dx.$$

Практически многочлен $\omega_n(x)$ определяется следующим образом. При любом весе $p(x)$ можно построить ортонормированную последовательность многочленов $P_n(x)$ степени n ($n = 0, 1, \dots$), удовлетворяющих условиям

$$\int_a^b P_n(x) P_m(x) p(x) dx = \delta_{mn}, \quad (4.25)$$

где

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{при } m=n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Тогда, как известно, любой многочлен степени m может быть представлен в виде линейной комбинации ортонормированных многочленов $P_0(x), \dots, P_m(x)$. Учитывая равенство (4.25), найдем

$$\int_a^b P_n(x) q(x) dx = 0, \quad (4.26)$$

если $q(x)$ — произвольный полином степени не выше $n-1$.

Сопоставляя (4.26) и (4.23), получим, что в качестве $\omega_n(x)$ можно взять ортогональный полином $P_n(x)$. Числа Кристоффеля выражаются через полином $P_n(x)$ по формуле

$$Q_k^{(n)} = \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x - x^k) P_n'(x^k)} p(x) dx. \quad (4.27)$$

Подробные таблицы узлов и весовых коэффициентов квадратурных формул Гаусса для весов

$$p(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 < x < 1,$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty < x < \infty,$$

$$p(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty$$

имеются в [20]. В табл. 4.1—4.3 приводятся взятые из [20] значения для наиболее употребительных в практике статистического моделирования случаев использования квадратурных формул Гаусса.

Таблица 4.1

Узлы и весовые коэффициенты формул Гаусса

для расчета интегралов вида $\int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{2} dx$

Число узлов	x_k	q_k
2	$x_1 = -x_2 = 0,5773503$	$q_1 = q_2 = 0,5000000$
3	$x_1 = 0,0000000$ $x_2 = -x_3 = 0,7745967$	$q_1 = 0,4444444$ $q_2 = q_3 = 0,2777778$
4	$x_1 = -x_2 = 0,3399810$ $x_3 = -x_4 = 0,8611363$	$q_1 = q_2 = 0,3260726$ $q_3 = q_4 = 0,1739274$
5	$x_1 = 0,0000000$ $x_2 = -x_3 = 0,5384693$ $x_4 = -x_5 = 0,9061798$	$q_1 = 0,2844444$ $q_2 = q_3 = 0,2393143$ $q_5 = q_6 = 0,1184634$

Квадратурные формулы Гаусса целесообразно использовать в тех случаях, когда для вычисления интеграла с высокой точностью можно использовать значения подынтегральной функции в небольшом числе точек. Недостатком их по сравнению с формулами трапеций и Симпсона является сложность вычисления узлов и весовых коэффициентов. По сравнению же с формулами Ньютона — Котеса формулы Гаусса обладают несомненными преимуществами ввиду большей точности.

Таблица 4.2

Узлы и весовые коэффициенты формул Гаусса
 для расчета интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Число узлов	x_k	q_k
2	$x_1 = -x_2 = 0,9999999$	$q_1 = q_2 = 0,5$
3	$x_1 = 0$ $x_2 = x_3 = 1,7320508$	$q_1 = 0,6666667$ $q_2 = q_3 = 0,1666667$
4	$x_1 = -x_2 = 0,7419638$ $x_3 = -x_4 = 2,3344142$	$q_1 = q_2 = 0,4541241$ $q_3 = q_4 = 0,0458758$
5	$x_1 = 0$ $x_2 = -x_3 = 1,3556261$ $x_4 = -x_5 = 2,8569693$	$q_1 = 0,5333333$ $q_2 = q_3 = 0,2220759$ $q_4 = q_5 = 0,01125741$

Таблица 4.3

Узлы и весовые коэффициенты формул Гаусса
 для расчета интегралов вида $\int_0^{\infty} f(x) e^{-x} dx$

Число узлов	x_k	q_k
2	$x_1 = 0,5857864$ $x_2 = 3,4142135$	$q_1 = 0,8535533$ $q_2 = 0,1464466$
3	$x_1 = 0,4157745$ $x_2 = 2,2942803$ $x_3 = 6,2899450$	$q_1 = 0,7110930$ $q_2 = 0,2785177$ $q_3 = 0,0103893$
4	$x_1 = 0,3225476$ $x_2 = 1,7457611$ $x_3 = 4,5366202$ $x_4 = 9,3950709$	$q_1 = 0,6031541$ $q_2 = 0,3574186$ $q_3 = 0,0388879$ $q_4 = 0,0005393$

Число узлов	x_k	q_k
5	$x_1 = 0,2635603$	$q_1 = 0,5217556$
	$x_2 = 1,4134030$	$q_2 = 0,3986668$
	$x_3 = 3,5964257$	$q_3 = 0,0759424$
	$x_4 = 7,0858100$	$q_4 = 0,0036118$
	$x_5 = 12,6408008$	$q_5 = 0,0000234$

4.4. МНОГОМЕРНЫЕ ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Для вычисления многомерных интегралов, как и в одномерном случае, теория численного интегрирования может быть развита на основе формул интерполяции. Существенной особенностью многомерных интегралов по сравнению с одномерными является то, что для их вычисления необходимо знать значения подынтегральной функции в большем числе узлов, а сами узлы распределяются в m -мерном пространстве. Поэтому при выводе многомерных квадратурных формул для упрощения расчетов зачастую используют различные искусственные приемы, хотя при желании эти же формулы можно получить на основе теории интерполяции многомерных функций.

Значительно менее разработанным в многомерном случае является вопрос об оценке остаточного члена. Объясняется это двумя обстоятельствами: во-первых, тем, что формула остаточного члена в многомерном случае более громоздка и получение ее связано со сложными расчетами; во-вторых, даже в тех случаях, когда выражение для остаточного члена получено, им не всегда удается воспользоваться, поскольку величины, входящие в выражение для остаточного члена (производные высокого порядка интегрируемой функции), обычно неизвестны.

Перейдем к рассмотрению конкретных типов многомерных квадратурных формул.

Метод вычисления многомерных интегралов, основанный на повторном применении квадратурных формул

Известно, что любой многократный интеграл может быть вычислен путем последовательного применения однократного интегрирования по каждой из переменных. Производя однократное интегрирование с помощью одной из ранее описанных квадратурных формул, можно вычислить многомерный интеграл.

Для примера предположим, что нужно определить значение двумерного интеграла

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy, \quad (4.28)$$

где область интегрирования Ω изображена на рис. 4.1.

Обычным, излагаемым в математическом анализе, способом интеграл (4.28) можно привести к виду

$$\int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \quad (4.29)$$

Применяя какую-нибудь одномерную формулу к внешнему интегралу (4.29), можно записать

$$\int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \sum_{i=1}^{N_1} a_i \int_{\alpha(y_i)}^{\beta(y_i)} f(x, y^i) dx + R_0. \quad (4.30)$$

Интегралы, стоящие под знаком суммы, представим в виде

$$\int_{\alpha(y^i)}^{\beta(y^i)} f(x, y^i) dx = \sum_{j=1}^{R_j} b_{ij} f(x^j, y^i) + R_i. \quad (4.31)$$

Подставляя (4.31) в формулу (4.30), получим квадратурную формулу для вычисления интеграла (4.28)

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{n_i} a_i b_{ij} f(x^j, y^i) + R_0 + \sum_{i=1}^{N_1} a_i R_i. \quad (4.32)$$

Остаточный член ее может быть определен, если известны остаточные члены формул одномерного численного интегрирования

$$R = R_0 + \sum_{i=1}^{N_1} a_i R_i.$$

Общее число узлов квадратурной формулы (4.32) будет

$$N = \sum_{i=1}^{N_1} n_i. \quad (4.33)$$

Отсюда видно, что с ростом размерности интеграла число узлов квадратурной формулы растет очень быстро. Например, если принять, что каждое однократное интегрирование требует N_1 узлов, всего для подсчета m -кратного интеграла в этом случае понадобится N_1^m узлов. Поэтому при вычислении многомерных интегралов вопрос уменьшения числа узлов квадратурных формул стоит особенно остро.

Для того чтобы уменьшить число узлов в квадратурной формуле (4.32) без ущерба в точности, следует применять наиболее точные одномерные квадратурные формулы, например, формулы Гаусса.

Метод повторного применения одномерных квадратурных формул в отличие от стандартных формул численного интегрирования неудобен тем, что для каждого случая использования все формулы нужно переписывать заново. Вместе с тем этот метод имеет и большие преимущества: пригоден для любых областей интегрирования, позволяет в широких пределах изменять используемые одномерные формулы для повышения точности при фиксированном числе узлов интегрирования.

Стандартные многомерные квадратурные формулы выводятся для вполне определенных областей, что позволяет применять одну и ту же формулу много раз. Однако при этом должно быть предварительно проведено путем соответствующей замены переменных сведение области интегрирования к виду, для которого выведена стандартная формула.

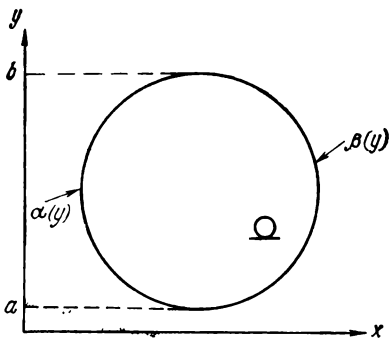


Рис. 4.1. Область интегрирования двумерной функции

Многомерная интерполяционная формула Лагранжа.

Метод получения квадратурных формул путем замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом

Интерполяционный полином, значения которого совпадают со значениями m -мерной функции $f(x_1, \dots, x_m)$ в точках $x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_m^{k_m}$ прямоугольной сетки, образованной всевозможными комбинациями координат $x_i^1, \dots, x_i^{n_i}$ по каждой из осей x_i ($i = 1, \dots, m$), имеет вид

$$L_{n_1 n_2 \dots n_m}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \dots \sum_{k_m=1}^{n_m} f(x_1^{k_1}, \dots, x_m^{k_m}) \times \prod_{i=1}^m \frac{\omega_{n_i}(x_i)}{(x_i - x_i^{k_i}) \omega'_{n_i}(x_i^{k_i})}, \quad (4.34)$$

где

$$\omega_{n_i} = (x_i - x_i^1)(x_i - x_i^2) \dots (x_i - x_i^{n_i}). \quad (4.35)$$

Точно так же, как и в одномерном случае, может быть вычислен остаточный член многомерной формулы интерполяции

$$f(x_1, \dots, x_m) = L_{n_1 n_2 \dots n_m}(x_1, \dots, x_m) + T_{n_1-1, n_2-1, \dots, n_m-1} \quad (4.36)$$

Поскольку выражение для него получается чрезмерно громоздким и зависит от производных высокого порядка, оценить его практически не удастся. Однако можно утверждать, что если интерполируемая функция представляет полином степени не выше $n_i - 1$ по x_i , то остаточный член формулы интерполяции равен нулю.

Предположим, что требуется вычислить интеграл

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} f(x_1, \dots, x_m) \prod_{j=1}^m p_j(x_j) dx_1, \dots, dx_m. \quad (4.37)$$

Заменим подынтегральную функцию $f(x_1, \dots, x_m)$ ее интерполяционным многочленом (4.34). В результате получим следующую квадратурную формулу для вычисления интеграла (4.37), использующую узлы $x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_m^{k_m}$:

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} f(x_1, \dots, x_m) \prod_{j=1}^m p_j(x_j) dx_1 \dots dx_m = \\ & = \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \dots \sum_{k_m=1}^{n_m} \prod_{l=1}^m a_{k_l}^{n_l} f(x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}) + R, \end{aligned} \quad (4.38)$$

где

$$a_{k_i}^{n_i} = \int_{a_i}^{b_i} \frac{\omega_{n_i}(x_i)}{(x_i - x_{i1}^{k_i}) \omega'_{n_i}(x_{i1}^{k_i})} p_i(x_i) dx_i. \quad (4.39)$$

Остаточный член квадратурной формулы (4.40) обращается в нуль, если $f(x_1, \dots, x_m)$ есть полином степени не выше $n_k - 1$ по каждой из переменных x_k .

Сравнение формул (4.39) и (4.16) показывает, что весовые коэффициенты многомерной квадратурной формулы (4.38) представляют произведения весовых коэффициентов соответствующих одномерных. Для получения многомерной квадратурной формулы Гаусса следует взять сумму значений функции $f(x_1, \dots, x_m)$ в точках, координатами которых являются всевозможные комбинации узлов одномерных формул, помноженных на произведения соответствующих весовых коэффициентов одномерных формул. При этом одномерные квадратурные формулы могут быть самыми различными, лишь бы они были получены на основе интерполяционных многочленов.

Многомерная формула Гаусса

Подбирая соответствующим образом узлы интерполирования при получении квадратурной формулы (4.40), можно значительно повысить ее точность. Возьмем в качестве узлов интерполирования значения координат, соответствующие одномерным формулам Гаусса.

Абсциссы $x_i^{k_i}$ в этом случае являются корнями ортогонального полинома $P_{n_i}(x_i)$. При таком выборе узлов квадратурная формула (4.38) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} f(x_1, \dots, x_m) \prod_{j=1}^m p_j(x_j) dx_j = \\ & = \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \dots \sum_{k_m=1}^{n_m} \prod_{i=1}^m q_{k_i}^{n_i} f(x_1^{k_1}, \dots, x_m^{k_m}) + R, \end{aligned} \quad (4.40)$$

где координаты узлов интерполирования являются корнями ортогональных полиномов $P_{n_i}(x_i)$, а коэффициенты $q_{k_i}^{n_i}$ представляют коэффициенты Кристоффеля

$$q_{k_i}^{n_i} = \int_{a_i}^{b_i} \frac{P_{n_i}(x_i)}{(x_i - x_i^{k_i}) P'_{n_i}(x_i^{k_i})} p_i(x_i) dx_i. \quad (4.41)$$

Остаточный член многомерной формулы Гаусса обращается в нуль, если подынтегральная функция $f(x_1, \dots, x_m)$ представляет полином степени не выше $2n_i - 1$ по каждой из переменных x_i .

Доказательство этого факта проводится так же, как и в одномерном случае.

Применение многомерных формул Гаусса к анализу систем автоматического регулирования подробно рассмотрено в работе [20]. В ней приводятся значения узлов и весовых коэффициентов Кристоффеля для различных типов весовых функций $p_h(x_h)$, а также расчетные формулы для определения статистических характеристик исследуемой величины.

Пример. Рассмотрим применение квадратурных формул Гаусса к вычислению интеграла

$$I = \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - e^{x_2})^2 \frac{1}{2a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_2 - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx_1 dx_2, \quad (4.42)$$

который представляет математическое ожидание функции $(x_1 - e^{x_2})^2$ случайных величин x_1 и x_2 , распределенных по равномерному и нормальному законам соответственно. В данном случае интеграл может быть легко вычислен

$$I = \frac{1}{3} a^3 + e^{2(\mu + \sigma^2)}. \quad (4.43)$$

Интеграл (4.42) является частным случаем интеграла

$$I = \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \frac{1}{2a} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx_1 dx_2. \quad (4.44)$$

Для применения формул Гаусса (4.44) целесообразно преобразовать к виду, в котором весовые функции соответствуют табличным (из табл. 3.1 и 3.2).

Положим $\xi_1 = \frac{x_1}{a}$, $\xi_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$, в результате интеграл (4.44) примет вид

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} f(a\xi_1, \sigma\xi_2 + \mu) \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi_2^2}{2}} d\xi_1 d\xi_2. \quad (4.45)$$

Согласно квадратурной формуле Гаусса (4.40) оценка интеграла (4.45) по n_1, n_2 узлам имеет вид

$$I_{n_1, n_2} = \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \rho_{k_1}^{n_1} \rho_{k_2}^{n_2} f(a\xi_1^{k_1}, \sigma\xi_2^{k_2} + \mu), \quad (4.46)$$

где числа $\rho_{k_1}^{n_1}$ и $\xi_1^{k_1}$ берутся из табл. 4.1, а $\rho_{k_2}^{n_2}$ и $\xi_2^{k_2}$ — из табл. 4.2.

Если $n_1 = n_2 = 2$, то по формуле (4.40)

$$I_{22} = 0,25f(0,5774a, \sigma + \mu) + 0,25f(-0,5774a, \sigma + \mu) + \\ + 0,25f(0,5774a, -\sigma + \mu) + 0,25f(-0,5774a, -\sigma + \mu). \quad (4.47)$$

Если $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, то

$$I_{23} = 0,3333f(0,5774a, \mu) + 0,3333f(-0,5774a, \mu) + \\ + 0,0833f(0,5774a, 1,732\sigma + \mu) + 0,0833f(0,5774a, 1,732\sigma + \mu) + \\ + 0,0833f(0,5774a, -1,732\sigma + \mu) + 0,0833f(0,5774a, -1,732\sigma + \mu). \quad (4.48)$$

Если, например, положить $a_3 = 3$, $\mu = 0$, $\sigma = 0,5$, то из (4.43) и (4.47) (4.48) при $f(x, y) = (x - e^y)^2$ получим $I = 4,649$; $I_{22} = 4,543$; $I_{23} = 4,634$.

4.5. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОДСЧЕТА ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_a^b f(x) p(x) dx, \quad (4.49)$$

где функция $p(x)$ не отрицательна и удовлетворяет условию

$$\int_a^b p(x) dx = 1. \quad (4.50)$$

Интеграл (4.49) представляет формулу для определения математического ожидания функции $f(x)$, зависящей от случайной величины x , с плотностью распределения вероятностей $p(x)$.

Поэтому в качестве значения интеграла можно взять оценку математического ожидания функции $f(x)$. Если произвести n независимых испытаний случайной величины x и для каждого значения x^i вычислить $f(x^i)$, то оценкой математического ожидания явится величина

$$J^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x^i), \quad (4.51)$$

которую и примем за приближенное значение интеграла (4.49).

Погрешность интегрирования в этом случае будет равна

$$R = J - J^* = \int_a^b f(x) p(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x^i). \quad (4.52)$$

При использовании метода статистических испытаний точность формулы (4.51) уже не может быть оценена так же, как в детерминированном случае, величиной остаточного члена. Последняя зависит от реализаций случайной величины x : $x^1, \dots, x^n$ и, следовательно, сама является величиной случайной. Полностью охарактеризовать величину остаточного члена можно, определив функцию распределения.

Однако практически такая задача трудно выполнима. Поэтому в качестве характеристик остаточного члена (4.52) используются его первые два момента: математическое ожидание и дисперсия.

Производя осреднение в формуле (4.52), получим, что математическое ожидание остаточного члена равно нулю:

$$MR = \int_a^b f(x) p(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Mf(x^i) = J - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n J = 0. \quad (4.53)$$

Поскольку случайные величины $f(x^i)$ независимы, дисперсия может быть найдена следующим образом:

$$DR = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Df(x^i),$$

$$\text{или} \quad DR = \frac{1}{n} Df, \quad (4.54)$$

$$\text{где} \quad Df = \int_a^b f^2(x) p(x) dx - J^2. \quad (4.55)$$

Доверительный интервал для остаточного члена определяется соотношением

$$P\{|R| \geq \varepsilon \sqrt{Df}\} = 1 - 2\Phi(\varepsilon \sqrt{n}), \quad (4.56)$$

где $\Phi(u)$ — функция Лапласа:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (4.57)$$

Совершенно аналогично производится вычисление многомерных интегралов методом Монте-Карло. Если необходимо вычислить интеграл

$$J = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_m) p(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m, \quad (4.58)$$

где

$$p(x_1, \dots, x_m) \geq 0; \int \dots \int p(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = 1,$$

с помощью n независимых реализаций m -мерной случайной величины $x_1, \dots, x_m$ с плотностью распределения вероятностей $p(x_1, \dots, x_m)$, то он принимается равным величине

$$J^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_1^i, \dots, x_m^i). \quad (4.59)$$

Дисперсия остаточного члена

$$R = J - J^* \quad (4.60)$$

по-прежнему определяется формулой (4.54) с единственным отличием, что в многомерной квадратурной формуле дисперсия подынтегральной функции $f(x_1, \dots, x_m)$ определяется из соотношения

$$Df = \int \dots \int f^2(x_1, \dots, x_m) p(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m - J^2. \quad (4.61)$$

Оценка ошибки интегрирования методом статистических испытаний (4.56) показывает, что с ростом n точность повышается медленно, порядок убывания остаточного члена равен $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Практически это означает, что для того, чтобы повысить точность вычислений на порядок, необходимо увеличить число испытаний на два порядка. Из-за этого при использовании метода Монте-Карло не удастся добиться точности выше, чем две-три значащие цифры. Метод статистических испытаний целесообразно применять в тех случаях, когда необходимая точность вычислений невелика, а построение регулярных формул численного интегрирования затруднительно.

Формулы (4.51) и (4.59) представляют частный случай квадратурных формул, когда весовые коэффициенты a_k^n все одинаковы, а узлы выбраны случайным образом. Естественно поэтому, что они не могут дать большую точность, чем квадратурные формулы, специально построенные с учетом требования уменьшения ошибок. Распределение узлов квадратурных формул (4.51) и (4.59) случайно и регулируется только законом распределения величины x . Поскольку имеется определенная конечная вероятность получения нетипичных выборок случайных величин x или $x_1, \dots, x_m$, при использовании квадратурных формул (4.51) и (4.59) возможно появление значительных ошибок. Это один из основных недостатков метода Монте-Карло.

Существующие способы улучшения сходимости метода Монте-Карло в большинстве своем представляют попытку повысить детерминированность распределения узлов квадратурных формул (4.51) и (4.59). Естественно, что наивысшая степень определенности будет при использовании детерминированных квадратурных формул. Поэтому, если их применение не связано с большими затратами, детерминированным методом численного интегрирования всегда следует отдавать предпочтение по сравнению с методом статистических испытаний.

В некоторых случаях может оказаться целесообразным использовать обобщенного метода Монте-Карло для вычисления интегралов (4.49) или (4.58). В одномерном случае соответствующая оценка математического ожидания имеет вид

$$J^* = \sum_{k=1}^n a_k f(x^k), \quad (4.62)$$

где a_k — положительные постоянные, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=1}^n a_k = 1.$$

Легко показать, что формула (4.62) дает несмещенную оценку интеграла (4.49) с дисперсией, равной $Df \sum_{k=1}^n a_k^2$. При использовании оценки (4.62) дисперсия остаточного члена будет иметь минимальное значение, если выполнено условие

$$a_k = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

т. е. когда используется стандартный метод Монте-Карло.

Аналогично записывается формула интегрирования обобщенным методом Монте-Карло функции нескольких переменных:

$$J^* = \sum_{k=1}^n a_k f(x_1^k, \dots, x_n^k). \quad (4.63)$$

Обобщенный метод Монте-Карло отличается от обычного тем, что вычисленным значениям функции $f(x)$ придается неравный вес. Это повышает дисперсию остаточного члена, но может оказаться полезным, если точность вычисления функции $f(x)$ в разных точках изменяется. Подбором весовых коэффициентов x можно уменьшить инструментальную погрешность оценки (4.62).

4.6. СПОСОБЫ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Подробное описание методов повышения интегрирования с помощью статистических испытаний можно найти в книге [2]. Поскольку эти методы при оценке эффективности систем имеют весьма ограниченное применение, то в настоящей работе они будут изложены кратко. Основной целью рассмотрения будет оценка возможностей различных методов понижения ошибки интегрирования.

Метод выделения главной части. Предположим, что требуется вычислить интеграл (4.49), кроме того, имеется некоторая функция $g(x)$, близкая к $f(x)$:

$$g(x) \approx f(x), \quad (4.64)$$

значение интеграла от которой определяется легко

$$I = \int_a^b g(x) p(x) dx. \quad (4.65)$$

Тогда выгодно вместо определения интеграла (4.49) методом Монте-Карло вычислить интеграл

$$J - I = \int_a^b [f(x) - g(x)] p(x) dx \quad (4.66)$$

и к результату добавить интеграл I .

Дисперсия разности $f(x) - g(x)$ равна

$$D[f - g] = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 p(x) dx - (J - I)^2. \quad (4.67)$$

Если функция $g(x)$ близка $f(x)$, то дисперсия разности (4.67) меньше дисперсии функции $f(x)$ (4.55). Поэтому при заданном n дисперсия остаточного члена квадратурной формулы интегриро-

вания $f(x) - g(x)$ методом Монте-Карло будет меньше дисперсии остаточного члена для $f(x)$.

Особенностью метода выделения главной части по сравнению с другими является отсутствие необходимости регулировать распределение случайной величины x . Повышение точности интегрирования достигается путем изменения подынтегральной функции. Это делает метод выделения главной части пригодным и в том случае, когда распределение случайной величины x неизвестно, например, при исследовании реальной системы, а также в случае оценки эффективности системы, подверженной воздействию случайных процессов.

Существенная выборка. Выборка по группам. Предположим, что нужно сосчитать интеграл

$$J = \int_a^b f(x) dx. \quad (4.68)$$

Его можно представить в виде

$$J = \int_a^b \frac{f(x)}{p(x)} p(x) dx, \quad (4.69)$$

где $p(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям:

$$p(x) > 0, \quad \int_a^b p(x) dx = 1.$$

Интеграл (4.69) можно считать методом Монте-Карло, используя случайную величину x с плотностью распределения вероятностей $p(x)$. Согласно результатам предыдущего раздела величина остаточного члена будет определяться дисперсией функции $\frac{f(x)}{p(x)}$. Подбором $p(x)$ ее можно уменьшить. Очевидно, дисперсия будет тем меньше, чем ближе отношение $\frac{f(x)}{p(x)}$ к

постоянной величине. Поскольку $f(x)$ может иметь разные знаки, для ускорения счета желательно выбирать $p(x)$ таким, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{|f(x)|}{p(x)} \approx \text{const}. \quad (4.70)$$

Условие (4.70) означает, что распределение случайной величины x должно быть таким, чтобы вероятность попадания случайной величины x в область, где $f(x)$ велика по модулю, была также большой. Способ существенной выборки в применении к определению интеграла (4.68) методом Монте-Карло состоит в подборе плотности распределения величины в соответствии с соотношением (4.70).

Выборка по группам, по существу, представляет частный случай способа существенной выборки, когда $p(x)$ принимается ступенчатой функцией. По форме метод выборки по группам заключается в разбиении интервала интегрирования на ряд подынтервалов, для каждого из которых применяется своя формула интегрирования, в отдельности. Число узлов в каждом подынтервале берется таким, чтобы общая плотность распределения величины x на всем интервале интегрирования удовлетворяла соотношению (4.70).

Изложенные методы понижения дисперсии не исчерпывают всех существующих, однако являются типичными. Они без труда обобщаются на случай многомерных интегралов. Специфическим методом уменьшения дисперсии остаточного члена при счете многомерного интеграла является правило, согласно которому, если выполнить интегрирование аналитически по части переменных, дисперсия уменьшается. Доказать это легко прямым подсчетом дисперсий [2].

4.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЮ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Практически все случайные процессы, встречающиеся в практике исследования управляемых систем, могут быть интерпретированы как результат прохождения белого шума через линейные или нелинейные формирующие фильтры. Поэтому, добавляя к уравнениям системы уравнения формирующего фильтра, можно всегда считать, что исследуемая система подвержена воздействию стационарного случайного процесса в виде белого шума.

Для конкретности изложения будем предполагать, что на исследуемую систему действует стационарный случайный процесс, в частном случае белый шум.

Исследование эффективности систем, находящихся под воздействием случайных процессов, точно так же, как и случайных параметров, можно проводить с помощью детерминированных методов и метода статистических испытаний.

Как известно [14], случайный процесс $u(t)$ всегда может быть представлен с какой угодно степенью точности каноническим разложением

$$u(t) = m_u + \sum_{k=1}^n V_k \varphi_k(t), \quad (4.71)$$

где m_u — математическое ожидание $u(t)$;

$\varphi_k(t)$ — детерминированные, линейно независимые, образующие ортогональную систему функции;

V_k — взаимно некоррелированные случайные величины.

Если процесс $u(t)$ нормален, величины V_k независимы. Плотность распределения V_k в этом случае будем обозначать через $p_k(V_k)$.

Точность аппроксимации процесса $u(t)$ суммой (4.71) зависит от числа членов n . Для получения точного равенства, когда это возможно при данном выборе функций $\varphi_k(t)$, требуется обычно бесконечное и даже несчетное число членов. В последнем случае сумма (4.71) переходит в интеграл.

В качестве функций $\varphi_k(t)$ часто используются, например, гармонические функции $\sin \omega_k t$, $\cos \omega_k t$, белый шум удобно аппроксимировать суммой импульсов $\varphi_k(t) = \delta(t - t_k)$ и т. д.

Функция качества f системы является функционалом от случайного процесса $u(t)$, следовательно, функцией случайных величин V_k . Поэтому оценка эффективности системы состоит в вычислении интеграла

$$\int_{\Omega} \dots \int f(V_1, \dots, V_n) \prod_{k=1}^n p_k(V_k) dV_1 \dots dV_n, \quad (4.72)$$

где область интегрирования Ω определяется границами изменения случайных величин V_k .

Таким образом, задача исследования эффективности систем, подверженных воздействию случайных процессов, может быть сведена к задаче численного интегрирования. Следует, однако, отметить два обстоятельства, заставляющих рассматривать эту задачу отдельно. Во-первых, интеграл (4.72) определяет эффективность приближенно. Для точного ее определения следует взять бесконечное (в некоторых случаях несчетное) число членов в формуле (4.71) и, следовательно, произвести бесконечное число интегрирований в формуле (4.72). Во-вторых, для достижения нужной точности оценки эффективности число членов в (4.71) обычно приходится брать большим. Если исследуемая система подвержена воздействию случайных процессов, то для оценки ее эффективности необходимо вычислить интеграл высокого, в некоторых случаях бесконечного порядка. Эта особенность сильно усложняет задачу анализа эффективности систем при случайных воздействиях. Для некоторых частных систем и случайных воздействий имеются специальные методы оценки эффективности, однако их применение ограничено.

При исследовании линейных систем автоматического управления задача исследования систем существенно упрощается при применении теории сопряженных систем [17], [9].

Другой метод оценки эффективности нелинейных систем, поведение которых описывается нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, заключается в сведении этой задачи к исследованию уравнения Фоккера — Планка [10]. Однако этот способ малоэффективен, поскольку решение уравнения Фоккера — Планка в случае мало-мальски сложных сис-

тем представляет трудную задачу, ничуть не легче вычисления интеграла (4.72).

Поскольку число интегрирований в формуле (4.72) велико, применение детерминированных формул численного интегрирования потребует большого числа узлов для вычисления интеграла. Поэтому основным методом изучения систем, зависящих от случайных процессов, остается метод Монте-Карло.

При использовании детерминированных формул должны быть решены два вопроса: во-первых, определено каноническое разложение, аппроксимирующее процесс $u(t)$ с необходимой точностью; во-вторых, определен рациональный выбор узлов квадратурной формулы для подсчета интеграла (4.72).

Метод статистических испытаний может применяться непосредственно, т. е. без предварительного установления свойств входного сигнала или разложения (4.72). Недостатком этого метода и в данном случае является медленная сходимость. Несмотря на это, часто применять метод Монте-Карло выгоднее, чем детерминированные методы, использующие канонические разложения, поскольку число необходимых испытаний оказывается имеющим одинаковый порядок, а реализация исследований с помощью метода Монте-Карло значительно проще.

В следующих разделах рассмотрены два метода анализа систем, которые можно применить к исследованию систем, зависящих от случайных процессов; эти методы обладают повышенной точностью по сравнению с методом Монте-Карло.

4.8. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМБИНИРОВАННЫХ ФОРМУЛ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Часто случайные воздействия $x_1, \dots, x_m$ неравноценны, и их можно разбить на две группы. В первую группу входят компоненты вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, существенно влияющие на поведение системы и, следовательно, на величину подынтегральной функции. Во вторую группу — остальные. Тогда, если построить детерминированную формулу для интегрирования по переменным первой группы и при ее использовании остальные переменные выбирать случайным образом, полученная квадратурная формула будет давать значения вычисляемого интеграла с нужной степенью точности при меньшем числе узлов по сравнению с методом Монте-Карло.

В дальнейшем предполагается, что сильнодействующими являются первые r компонент вектора $\mathbf{x}$.

Разделение переменных интегрирования на две группы является весьма условным. Сходимость полученных квадратурных формул может быть гарантирована всегда, если соответствующие детерминированные формулы сходятся. От разбиения на группы зависит только скорость сходимости.

Комбинированные квадратурные формулы могут применяться для исследования систем, зависящих от случайных параметров и случайных процессов одновременно. Случайные параметры или их часть следует отнести к первой группе переменных, а составляющие канонических разложений случайных процессов — ко второй. При этом фактического знания канонических разложений не требуется.

Обозначим через $\mathbf{v}$ вектор, состоящий из r первых компонент вектора $\mathbf{x}$, а через $\mathbf{w}$ — вектор, содержащий остальные компоненты,

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_r) = (x_1, \dots, x_r);$$

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{m-r}) = (x_{r+1}, \dots, x_m).$$

Для простоты будем считать, что векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ статистически независимы. Тогда анализ системы (4.1) сводится к вычислению интеграла по векторным переменным $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$

$$J = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) p_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) p_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}) d\mathbf{v} d\mathbf{w}, \quad (4.73)$$

где интегрирование по векторным переменным понимается как интегрирование по всем компонентам соответствующего вектора; $p(\mathbf{x})$, $p_{\mathbf{v}}(\mathbf{v})$, $p_{\mathbf{w}}(\mathbf{w})$ — плотности распределения соответствующих случайных векторов; Ω , Ω_1 , Ω_2 — области определения векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$.

Комбинированная квадратурная формула для вычисления интеграла J получается следующим образом. Построим обычную детерминированную квадратурную формулу для вычисления интеграла

$$\int_{\Omega_{\mathbf{v}}} \varphi(\mathbf{v}) p_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$$

от некоторой функции

$$\int_{\Omega_{\mathbf{v}}} \varphi(\mathbf{v}) p_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \varphi(\mathbf{v}^k) + R, \quad (4.74)$$

тогда комбинированная квадратурная формула для вычисления интеграла (4.73) имеет вид

$$\int_{\Omega_{\mathbf{u}}} \int_{\Omega_{\mathbf{v}}} f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) p_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) p_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}) d\mathbf{v} d\mathbf{w} = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} f(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k) + R, \quad (4.75)$$

либо

$$\int_{\Omega_{\mathbf{u}}} \int_{\Omega_{\mathbf{v}}} f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) p_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) p_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}) d\mathbf{v} d\mathbf{w} = \frac{1}{s} \sum_{l=1}^s \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} f(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^{kl}) + R. \quad (4.76)$$

В обеих формулах (4.75) и (4.76) $\mathbf{v}^k$ — узлы из формулы (4.74), $\mathbf{w}^k$ в формуле (4.75) и $\mathbf{w}^{kl}$ в формуле (4.76) — независимые реализации случайного вектора $\mathbf{w}$.

Дадим обоснование формул (4.75) и (4.76). Введем следующие обозначения для условных математического ожидания и дисперсии функции $f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ при фиксированном значении вектора $\mathbf{v}$:

$$\varphi(\mathbf{v}) = M[f(\mathbf{v}, \mathbf{w})|\mathbf{v}] = \int_{\mathfrak{L}_u} f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) p_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}) d\mathbf{w};$$

$$\psi(\mathbf{v}) = D[f(\mathbf{v}, \mathbf{w})|\mathbf{v}] = \int_{\mathfrak{L}_u} f^2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) p_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}) d\mathbf{w} - \varphi^2(\mathbf{v}).$$

Пусть функция $f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ удовлетворяет следующим обычно выполняющимся на практике условиям:

- 1) $\varphi(\mathbf{v})$ дифференцируема до порядка n и имеет ограниченную производную n -го порядка;
- 2) $\psi(\mathbf{v})$ ограничена равномерно по всем $\mathbf{v}$:

$$|\psi(\mathbf{v})| \leq d.$$

Рассмотрим следующую формулу

$$J = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} f(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k) + R. \quad (4.77)$$

Эта формула включает в себя как частные случаи комбинированную квадратурную формулу, если координаты $\mathbf{v}^k$ определяются из формулы (4.74), а $\mathbf{w}^k$ — случайные, и формулу обобщенного метода Монте-Карло, если и $\mathbf{v}^k$ и $\mathbf{w}^k$ — случайные реализации векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$.

Математическое ожидание квадрата остаточного члена формулы (4.77) выражается через его условные математическое ожидание и дисперсии с помощью формулы

$$MR^2 = MM[R^2|\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n] = M\{M[R|\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n]^2\} + MD[R|\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n]. \quad (4.78)$$

Подсчет отдельных членов, входящих в (4.78), дает

$$\begin{aligned} M[R|\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n] &= M[J - \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} f(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k)|\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n] = \\ &= J - \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} M[f(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k)|\mathbf{v}^k] = J - \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \varphi(\mathbf{v}^k); \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned}
D[R|\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n] &= M\{[R - MR(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n)]^2 | \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n\} = \\
&= M\left[\sum_{k=1}^n a_k^{(n)} (f(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k) - \varphi(\mathbf{v}^k)) | \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n\right] = \\
&= \sum_{k=1}^n a_k^{(n)^2} M[f(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k) - \varphi(\mathbf{v}^k) | \mathbf{v}^k] = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)^2} \psi(\mathbf{v}^k). \quad (4.80)
\end{aligned}$$

Подставляя формулы (4.79) и (4.80) в (4.78), получим

$$MR^2 = M\left[J - \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \varphi(\mathbf{v}^k)\right]^2 + M \sum_{k=1}^n a_k^{(n)^2} \psi(\mathbf{v}^k), \quad (4.81)$$

Если узлы $\mathbf{v}^k$ взяты из квадратурной формулы (4.74), то в силу выполнения функцией $f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ условия 1) справедливо неравенство

$$\left|J - \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \varphi(\mathbf{v}^k)\right| \leq \frac{C}{n^\alpha}, \quad (4.82)$$

где величины C и α определяются типом квадратурной формулы (4.74) и получаются из оценки ее остаточного члена. Для квадратурных формул, построенных с помощью интерполяционных полиномов, $\alpha \gg 1$. С учетом соотношения (4.82) и условия 2), наложенного на функцию $f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, из формулы (4.81) следует неравенство

$$MR^2 \leq \frac{C^2}{n^{2\alpha}} + d \sum_{k=1}^n a_k^2. \quad (4.83)$$

Если узлы $\mathbf{v}^k$ независимы, разность $J - \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \varphi(\mathbf{v}^k)$ представляет оценку интеграла

$$\int_{\Omega_{\mathbf{v}}} \varphi(\mathbf{v}) p_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$$

обобщенным методом Монте-Карло и, следовательно,

$$M\left[J - \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \varphi(\mathbf{v}^k)\right]^2 = D\varphi \sum_{k=1}^n a_k^{(n)^2}. \quad (4.84)$$

Второй член формулы (4.81) оценивается так же, как и раньше:

$$M \sum_{k=1}^n a_k^{(n)^2} \psi(\mathbf{v}^k) = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)^2} M\psi(\mathbf{v}) \leq d \sum_{k=1}^n a_k^{(n)^2}. \quad (4.85)$$

Подставляя соотношения (4.84) и (4.85) в (4.81), получим

$$MR^2 \leq D\varphi \sum_{k=1}^n a_k^{(n)^2} + d \sum_{k=1}^n a_k^{(n)^2}. \quad (4.86)$$

Вторые члены в правых частях формул (4.83) и (4.86) совпадают. Первый член в формуле (4.86) убывает не быстрее, чем $\frac{1^*}{n}$.

Поэтому первый член в формуле (4.83) убывает значительно быстрее, чем в формуле (4.86). Обычно первый член в формуле (4.83) бывает настолько мал, что им можно пренебречь. Погрешность комбинированной квадратурной формулы определяется в основном вторым членом формулы (4.83) и, если d невелико, что бывает, когда $\mathbf{w}$ содержит слабовлияющие параметры, будет малой. Повышение точности комбинированной квадратурной формулы объясняется резким уменьшением первого слагаемого в неравенстве (4.83) по сравнению с (4.86). Естественно, преимущество комбинированной квадратурной формулы тем значительнее, чем большую роль в неравенстве для математического ожидания остаточного члена интегрирования играет первое слагаемое в правой части формулы (4.86).

Неравенства (4.83) и (4.86) позволяют сравнивать точность комбинированной квадратурной формулы (4.75) и обобщенного метода Монте-Карло. Но если коэффициенты a_k^n мало отличаются друг от друга, качественные выводы остаются справедливыми и для обыкновенного метода Монте-Карло, поскольку в этом случае сумма квадратов коэффициентов $a_k^{(n)}$ будет мало отличаться от своего минимального значения.

Обычно на практике уже при сравнительно небольшом числе узлов квадратурной формулы (4.74) первый член справа в формуле (4.83) мал, а основную роль играет второй член. В этом случае можно в формуле (4.75) вместо $f(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k)$ использовать величины

$$\frac{1}{s} \sum_{l=1}^s f(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^{kl}),$$

полученные путем осреднения функции $f(\mathbf{v}^k, \mathbf{w})$ по s независимым реализациям вектора $\mathbf{w}$ (для каждого k — различным). В результате получается формула (4.76). Оценка остаточного члена квадратурной формулы (4.76) имеет вид

$$MR^2 \leq \frac{C^2}{n^{2\alpha}} + \frac{d}{s} \sum_{k=1}^n a_k^2. \quad (4.87)$$

* Сумма коэффициентов $a_k^{(n)}$ должна быть равна 1 (условие интегрируемости без ошибки постоянной величины). В этом случае сумма квадратов коэффициентов $a_k^{(n)}$ принимает минимальное значение, если все коэффициенты одинаковы, т. е. $a_k^{(n)} = \frac{1}{n}$, равное $\frac{1}{n}$.

Первый член справа в формуле (4.87) по сравнению с (4.83) на изменяется, а второй уменьшается в s раз.

На практике процедура построения комбинированных квадратурных формул состоит в следующем. После разбиения случайных воздействий на сильновлияющие и слабо влияющие строится квадратурная формула для оценки математического ожидания функции $f(x)$, учитывающая только воздействие первой группы. Затем в правой части при вычислении значений $f(x)$ в узлах воздействия второй группы заменяются независимыми

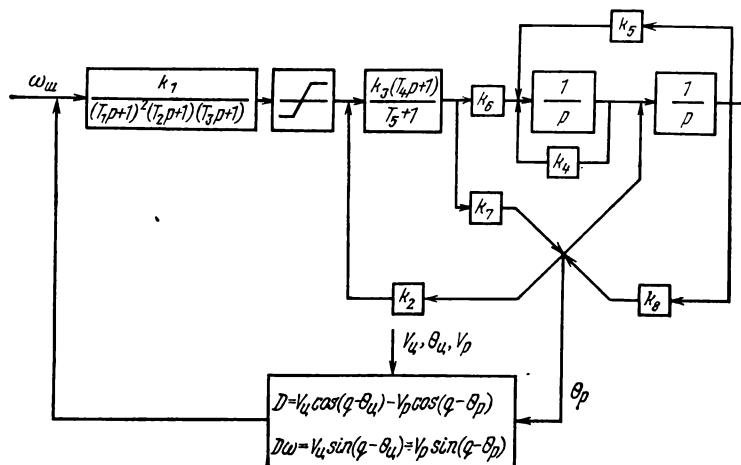


Рис. 4.2. Структурная схема системы самонаведения в плоскости

случайными реализациями сектора w . В результате получается формула (4.75). Если такие расчеты проделать s раз, каждый раз используя свои реализации вектора w , и взять среднее арифметическое полученных результатов, получится формула (4.76).

Проиллюстрируем методику статистического моделирования с использованием комбинированных квадратурных формул на примере анализа статистических характеристик точности самонаведения ракеты с двумя управляющими органами: рулями и крыльями. Структурная схема контура наведения в плоскости представлена на рис. 4.2.

Параметры автопилота k_1, k_2, k_3, k_4 предполагаются случайными и распределенными по равномерному закону в диапазоне

$$k_{i \min} \leq k_i \leq k_{i \max}, \quad i=1, 2, 3, 4.$$

Внешними воздействиями на систему являются шум на выходе головки самонаведения $\omega_{ш}(t)$ и маневры цели. Требуется оценить математическое ожидание и дисперсию промаха

$$h = \frac{D^2(t_{осл}) \omega(t_{осл})}{|\dot{D}|},$$

где $t_{осл}$ — момент ослепления.

Математическое ожидание промаха в рассматриваемом случае равно

$$Mh = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (k_{imax} - k_{imln})} \int_{k_{1mln}}^{k_{1max}} \int_{k_{2mln}}^{k_{2max}} \int_{k_{3mln}}^{k_{3max}} \int_{k_{4mln}}^{k_{4max}} M[h | k_1, k_2, k_3, k_4] \times \\ \times dk_1 dk_2 dk_3 dk_4, \quad (4.88)$$

где $M[h | k_1, k_2, k_3, k_4]$ — условное математическое ожидание промаха как функционала от шума $\omega_{ш}(t)$ при фиксированных значениях параметров k_1, k_2, k_3, k_4 . Использование в формуле (4.88) условного математического ожидания позволяет избежать необходимости применять канонические разложения для выражения зависимости математического ожидания от шума $\omega_{ш}(t)$.

Средний квадрат промаха определяется формулой

$$Mh^2 = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (k_{imax} - k_{imln})} \int_{k_{1mln}}^{k_{1max}} \int_{k_{2mln}}^{k_{2max}} \int_{k_{3mln}}^{k_{3max}} \int_{k_{4mln}}^{k_{4max}} M[h^2 | \bar{k}_1, k_2, k_3, k_4] \times \\ \times dk_1 dk_2 dk_3 dk_4. \quad (4.89)$$

Дисперсия промаха определяется по формулам (4.88) и (4.89) обычным способом: $Dh = Mh^2 - (Mh)^2$.

Предварительный анализ динамических свойств системы, приведенной на рис. 4.2, показывает, что параметры k_3 и k_4 слабо влияют на величину промаха. Поэтому в комбинированных квадратурных формулах детерминированно будут задаваться только значения коэффициентов k_1 и k_2 .

Путем линейного преобразования переменных

$$\bar{k}_i = \frac{2}{k_{imax} - k_{imln}} k_i - \frac{k_{imax} + k_{imln}}{k_{imax} - k_{imln}}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

осуществляется переход от переменных k_i к переменным $\bar{k}_i$, изменяющимся в диапазоне $[-1, +1]$. Если обозначить

$$\bar{h}(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4, \omega_{ш}) = h(k_1, k_2, k_3, k_4, \omega_{ш}),$$

то выражения для математического ожидания и среднего квадрата промаха примут вид

$$Mh = \frac{1}{2^4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M[h(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4, \omega_{ш}) | \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4] \times \\ \times d\bar{k}_1 d\bar{k}_2 d\bar{k}_3 d\bar{k}_4; \quad (4.90)$$

$$Mh^2 = \frac{1}{2^4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M[h^2(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4, \omega_{ш}) | \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4] \times \\ \times d\bar{k}_1 d\bar{k}_2 d\bar{k}_3 d\bar{k}_4. \quad (4.91)$$

Применяя квадратурные формулы Гаусса с четырьмя узлами для интегрирования по каждому из переменных $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$, получим следующие формулы для оценок интегралов (4.90), (4.91):

$$M^*h = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \rho_i \rho_j \bar{h} (\bar{k}_1^i \bar{k}_2^j \bar{k}_3^i \bar{k}_4^j \omega_{\text{ш}}^i), \quad (4.92)$$

$$M^*h^2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \rho_i \rho_j \bar{h}^2 (\bar{k}_1^i \bar{k}_2^j \bar{k}_3^i \bar{k}_4^j \omega_{\text{ш}}^i), \quad (4.93)$$

где $\bar{k}_1^4 = -\bar{k}_1^1 = \bar{k}_2^4 = -\bar{k}_2^1 = 0,8611$;

$$\bar{k}_1^3 = -\bar{k}_1^2 = \bar{k}_2^3 = -\bar{k}_2^2 = 0,34;$$

$$\rho_1 = \rho_4 = 0,1739; \quad \rho_2 = \rho_3 = 0,3261,$$

а $\bar{k}_3^{m,l}$, $\bar{k}_4^{m,l}$, $\omega_{\text{ш}}^{n,m}$ — независимые реализации случайных величин и процесса. Эти величины наряду с $\bar{k}_1^i$ и $\bar{k}_2^j$ подставляются в дифференциальные уравнения системы, на основании решения которых определяется величина $\bar{h}$.

Точность, даваемая формулами (4.92), (4.93) при значительных уровнях шума, недостаточна ввиду слабого эффекта осреднения случайных отклонений, вызванных шумом. Для повышения точности следует проводить многократные вычисления по формулам (4.92), (4.93) каждый раз с новыми реализациями параметров $\bar{k}_3$, $\bar{k}_4$ и шума, а затем полученные результаты осреднить. В результате фактически получается формула интегрирования типа (4.76).

Расчеты по формулам (4.92) (4.93) и обычным методом Монте-Карло, когда используются оценки

$$M_{\text{М-К}}^* h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{h} (\bar{k}_1^i \bar{k}_2^i \bar{k}_3^i \bar{k}_4^i \omega_{\text{ш}}^i), \quad (4.94)$$

$$M_{\text{М-К}}^* h^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{h}^2 (\bar{k}_1^i \bar{k}_2^i \bar{k}_3^i \bar{k}_4^i \omega_{\text{ш}}^i), \quad (4.95)$$

показали, что в широком диапазоне изменения параметров системы и условий наведения применение комбинированных квадратурных формул к рассматриваемой задаче позволяет снизить необходимое число интегрирований дифференциальных уравнений системы по сравнению с методом Монте-Карло в несколько раз. Количество интегрирований определялось после достижения с помощью формул (4.92) (4.93) и (4.94) (4.95) одинаковой точности расчетов.

4.9. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВЫДЕЛЕНИЯ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ К АНАЛИЗУ ТОЧНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Пусть имеется некоторая система F , подверженная учитываемому случайному воздействию x и неучитываемому u . Выходным параметром системы является величина y . В задаче анализа динамических систем, подверженных случайным воздействиям, величина y совпадает с функцией f . Будем считать, что выходная величина однозначно определяется входными воздей-

ствиями. Величины x , u , y могут быть скалярными, векторными любой размерности или иметь более сложную природу. В настоящем разделе будем считать величины x , u , y , а также определенные ниже v и z случайными величинами с известными законами распределения. Распространение на общий случай проводится без труда; достаточно, например, считать рассматриваемые величины элементами соответствующих вероятностных пространств. Все полученные при этом формулы будут аналогичны используемым.

Задачей статистического исследования является вычисление математического ожидания U выходной величины системы.

При использовании метода Монте-Карло производится N независимых испытаний систем F и в качестве U используется величина

$$U^* = M^*y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y^i, \quad (4.96)$$

где y_i — значение y , полученное в k -м испытании.

Как следует из общих положений теории вероятностей, математическое ожидание оценки U^* совпадает с U . Точность определения U зависит от дисперсии оценки U^* , которая равна

$$DU^* = \frac{1}{N} Dy, \quad (4.97)$$

где Dy — дисперсия случайной величины y .

Предположим, что наряду с системой F имеется другая система G , близкая к F по метрике, которая будет уточнена ниже. Входными величинами системы G являются x и u , выходная величина z . Особенностью системы является возможность вычисления математического ожидания V выходной координаты каким-либо нетрудоемким способом.

Согласно методу выделения главной части следует на основании N_1 независимых испытаний обеих систем F и G одновременно получить оценку математического ожидания разности

$$M^*(y - z) = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} (y^i - z^i). \quad (4.98)$$

Каждое испытание систем F и G должно проводиться таким образом, чтобы на обе системы воздействовали одни и те же реализации учитываемой входной величины x , в силу чего величины y^i и z^i , имеющие одинаковый индекс, являются зависимыми.

Добавляя к формуле (4.98) значение V , вычисленное одним из методов, описанных ниже, получим новую оценку математического ожидания сигнала y

$$U^{**} = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} (y^i - z^i) + V. \quad (4.99)$$

Легко показать, что оценка (4.98) является несмещенной, а ее дисперсия

$$DU^* = \frac{1}{N_1} D(y - z), \quad (4.100)$$

где $D(y - z)$ — дисперсия разности $y - z$.

Если системы F и G таковы, что дисперсия разности $D(y - z)$ меньше дисперсии выходной величины первой системы, то при одинаковом числе испытаний оценка (4.99) дает большую точность по сравнению с (4.96).

Из формул (4.97) и (4.100) следует, что одна и та же точность определения U при использовании оценок (4.96) и (4.99) получается, если выполнено условие

$$\frac{Dy}{N} = \frac{D(y - z)}{N_1}$$

или

$$N_1 = \frac{D(y - z)}{Dy} N.$$

Следует учесть, что в методе выделения главной части каждое испытание состоит в параллельном испытании двух систем F и G . Поэтому общее число испытаний систем, необходимое для получения оценки (4.99), фактически равно $2N_1$, не считая затрат на определение математического ожидания выходной величины системы G . Использование метода выделения главной части будет эффективным только при условии, что экономия машинного времени, вызванная уменьшением дисперсии $D(y - z)$ по сравнению с Dy , превышает затраты на анализ системы G .

Метод выделения главной части особенно удобен при использовании цифровых вычислительных машин. В них легко осуществляется запоминание реализаций случайных процессов, вследствие чего моделирование систем F и G может производиться в разное время. Если используются псевдослучайные последовательности, то необходимое повторение реализаций достигается путем повторения счета обеих систем, начиная с одной и той же точки псевдослучайной последовательности. При использовании аналоговой модели обе системы должны моделироваться одновременно либо необходимо предусмотреть устройство для записи и воспроизведения случайных процессов.

Исследуем требования к степени близости систем F и G . С этой целью преобразуем выражения для дисперсий Dy и $D(y-z)$:

$$\begin{aligned} Dy &= M(y - My)^2 = MM[(y - My)^2|x] = \\ &= MM[y^2|x] - 2MyM[y|x] + (My)^2 = M\{M[y^2|x] - \\ &- (M[y|x])^2\} + (M[y|x])^2 - 2MyM[y|x] + [My]^2 = \\ &= M\{M[y^2|x] - (M[y|x])^2\} + M\{M[y|x] - (My)^2\} = \\ &= M\{D[y|x]\} + D\{M[y|x]\}. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Аналогичными преобразованиями получим

$$\begin{aligned} D(y-z) &= M\{D[y|x]\} + M\{D[z|x]\} + \\ &+ D\{M[y|x] - M[z|x]\}. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Член $M\{D[y|x]\}$ в формуле (4.101) и члены $M\{D[y|x]\}$ и $M\{D[z|x]\}$ в формуле (4.102) вызвано воздействиями на системы неучитываемых входных величин u и v . Подбором системы G можно добиться уменьшения последнего члена в формуле (4.102). Из рассмотрения формул (4.101) и (4.102) следует, что применение метода выделения главной части эффективно в том случае, когда учитываемая входная величина является доминирующей, т. е. члены $M\{D[y|x]\}$ и $M\{D[z|x]\}$ малы, а система G подобрана таким образом, что условное математическое ожидание разности выходных координат слабо зависит от x .

На практике дисперсии Dy и $D(y-z)$ априори неизвестны, и заранее с достоверностью установить эффективность метода выделения главной части не удастся. Можно рекомендовать следующий способ. В процессе моделирования наряду с оценками математических ожиданий производятся оценки дисперсий по формулам:

$$D^*y = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(y^i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y^j \right)^2, \quad (4.103)$$

$$D^*(y-z) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[y^i - z^i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y^j - z^j) \right]^2. \quad (4.104)$$

Применение метода выделения главной части признается целесообразным, если отношение оценок дисперсий $\frac{D^*(y-z)}{D^*y}$, полученных при небольшом n , меньше заданной величины. Например, если $\frac{D^*(y-z)}{D^*y} < \frac{1}{4}$, то можно утверждать, что при одинаковой сложности систем F и G метод выделения главной части позволяет снизить затраты машинного времени при ста-

тистическом исследовании при помощи ЦВМ в два раза (необходимое число испытаний уменьшается в четыре раза, но каждое испытание состоит в моделировании двух систем). В зависимости от результатов сравнения оценок дисперсий принимается решение: либо продолжать исследование методом выделения главной части, либо исследовать систему F обычным способом Монте-Карло.

Рассмотрим некоторые конкретные случаи применения метода выделения главной части.

Определение моментных характеристик выходной величины нелинейной системы, на вход которой поступает случайный процесс

Широкое распространение для исследования линейных систем, находящихся под воздействием случайных процессов, получил метод сопряженных систем [17]. При его помощи вычисление моментных характеристик любого порядка выходной величины системы сводится к определению сечения весовой функции, которое может быть найдено путем однократного моделирования сопряженной системы. Это позволяет использовать линейные системы в методе выделения главной части в качестве приближающих исследуемую нелинейную систему.

Предположим, что на вход нелинейной системы F начиная с момента $t=0$ поступает случайный процесс $x(t)$ с известными статистическими свойствами. Требуется определить моментные характеристики закона распределения выходной величины системы $y(t_1)$ в заданный момент времени t_1 . Для определенности рассмотрим наиболее часто встречающийся на практике случай определения математического ожидания и среднего квадрата выходной величины. Вычисление моментов более высокого порядка проводится аналогично.

Проведем линеаризацию системы F , в результате получится линейная система G , связывающая случайный процесс $x(t)$ с процессом на выходе $z(t)$. Способ линеаризации может быть любым. Простейший вариант состоит в исключении всех нелинейных функций, входящих в систему. В некоторых случаях целесообразно применение статистической или иной линеаризации. Линейная модель может быть упрощена за счет замены отдельных инерционных блоков коэффициентами усиления.

Пусть $G(t, \tau)$ — функция веса системы G . Предположим, что случайный процесс $x(t)$ получается из белого шума единичного уровня путем пропускания последнего через линейный фильтр с весовой функцией $\Phi(t, \tau)$. Функцию веса последовательного соединения формирующего фильтра и системы G обозначим через $G_1(t, \tau)$,

$$G_1(t, \tau) = \int_0^t G(t, \sigma) \Phi(\sigma, \tau) d\sigma.$$

В этом случае математическое ожидание и средний квадрат выходной величины системы G в момент t_1 определяются формулами

$$M_2(t_1) = \int_0^{t_1} G(t_1, \tau) Mx(\tau) d\tau, \quad (4.105)$$

$$Mz^2(t_1) = \int_0^{t_1} G_1^2(t_1, \tau) d\tau. \quad (4.106)$$

Сечения весовых функций $G(t_1, \tau)$ и $G_1(t_1, \tau)$ могут быть найдены путем однократного моделирования сопряженных систем G^* и G_1^* . Затем по формулам (4.105) и (4.106) определяются начальные моменты выходной величины системы G .

В процессе статистического анализа нелинейной системы F методом выделения главной части на основании результатов параллельного испытания систем F и G строятся оценки моментов

$$M^{**}y(t_1) = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^n [y^k(t_1) - z^k(t_1)] + Mz(t_1), \quad (4.107)$$

$$M^{**}y^2(t_1) = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} [y^{k*}(t_1) - z^{k*}(t_1)] + Mz^2(t_1). \quad (4.108)$$

Одновременно для установления точности оценок (4.107) и (4.108) и решения вопроса о целесообразности применения метода выделения главной части по стандартным формулам вычисляются оценки дисперсий

$$D^*y(t_1), D^*y^2(t_1), D^*[y(t_1) - z(t_1)], D^*[y^2(t_1) - z^2(t_1)].$$

Моделирование проводится до тех пор, пока точность оценок (4.107) и (4.108), определяемая на основании оценок дисперсий формулами типа (4.97), (4.100), не окажется в допустимых пределах.

Определение моментных характеристик выходной величины системы, зависящей от случайных параметров

Обобщая задачу, рассмотренную в предыдущем разделе, предположим, что нелинейная система F , подверженная воздействию случайного процесса $x(t)$, зависит также от случайных параметров. Для простоты предположим, что такой параметр

только один λ . В этом случае первые начальные моменты выходной величины системы F выражаются в виде интегралов

$$My(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} M[y(t_1)|\lambda] p(\lambda) d\lambda; \quad (4.109)$$

$$My^2(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} M[y^2(t_1)|\lambda] p(\lambda) d\lambda, \quad (4.110)$$

где $p(\lambda)$ — плотность распределения параметра λ .

Применяя соответствующие квадратурные формулы, интегралы (4.109) и (4.110) можно представить в виде

$$My(t_1) = \sum_{k=1}^s a_k M[y(t_1)|\lambda^k] + R_1; \quad (4.111)$$

$$My^2(t_1) = \sum_{k=1}^s a_k M[y^2(t_1)|\lambda^k] + R_2, \quad (4.112)$$

где остаточные члены R_1 и R_2 могут быть сделаны сколь угодно малым путем соответствующего подбора квадратурных формул и узлов интегрирования λ^k .

Условные математические ожидания, входящие в суммы (4.111) и (4.112), представляют собой моментные характеристики выходных величин детерминированных нелинейных систем, соответствующих фиксированным значениям случайного параметра λ при входной величине в виде случайного процесса $x(t)$. Для их подсчета может применяться процедура, рассмотренная выше.

Ввиду дополнительного осреднения, осуществляемого квадратурными формулами, точность определения условных математических ожиданий может быть сравнительно невысокой, что позволяет ограничиться небольшим числом испытаний системы F . В некоторых случаях, когда число узлов формул (4.111), (4.112) достаточно велико, при расчете условного математического ожидания по формулам типа (4.107), (4.108) можно положить $N_1=1$.

Статистический анализ систем с использованием упрощенной нелинейной модели

Одним из основных ограничивающих факторов при статистическом исследовании сложных систем является продолжительность расчета одного испытания системы на ЦВМ, вследствие чего не удастся выполнить необходимого согласно методу Монте-Карло числа испытаний. Попытки упрощения системы для уменьшения затрат машинного времени приводят к тому, что

достоверность полученных результатов снижается, поскольку они будут относиться к упрощенной модели, а обоснование допустимости упрощений не всегда осуществимо.

В этом случае для анализа системы можно воспользоваться методом выделения главной части, а определение необходимых характеристик выходной величины упрощенной модели производить методом Монте-Карло. Все исследование будет состоять в выполнении большого числа испытаний упрощенной модели для получения оценок методом Монте-Карло и ограниченного числа испытаний системы и модели одновременно для их уточнения. В некоторых конкретных случаях такая методика позволит уменьшить затраты машинного времени. В качестве простейшего варианта упрощенной нелинейной модели можно взять программу основной системы, просчитываемую при увеличенном шаге счета.

Анализ эффективности метода выделения главной части при использовании нелинейной модели G можно выполнить следующим образом. Поскольку оценка математического ожидания упрощенной нелинейной модели производится методом Монте-Карло, последний член в формуле (4.99) является также случайным и дисперсия оценки (4.99) равна

$$DU^{**} = \frac{D(y-z)}{N_1} + \frac{Dz}{N_2}, \quad (4.113)$$

где N_2 — число испытаний системы G , использованных для оценки математического ожидания ее выходной величины по формуле типа (4.96). Условие одинаковой точности вычислений с использованием метода выделения главной части и обычного метода Монте-Карло является равенство дисперсий оценок (4.96) и (4.99)

$$\frac{Dy}{N} = \frac{D(y-z)}{N_1} + \frac{Dz}{N_2}. \quad (4.114)$$

Пусть τ_F и τ_G — затраты машинного времени на одно испытание систем F и G соответственно. Если обозначить $t_0 = N\tau_F$ — полное время счета системы F для получения оценки (4.96), $t_1 = N_1(\tau_F + \tau_G)$ — полное время счета систем F и G одновременно для получения первого члена в оценке (4.99), $t_2 = N_2\tau_G$ — полное время счета системы G для получения второго члена в оценке (4.99), то условие (4.114) можно записать в следующем виде:

$$\frac{Dy\tau_F}{t_0} = \frac{D(y-z)(\tau_F + \tau_G)}{t_1} + \frac{Dz\tau_G}{t_2}. \quad (4.115)$$

Из формулы (4.115) можно вычислить отношение затрат машинного времени $t_1 + t_2$ и t_0 на получение оценок (4.99) и (4.96)

$$\frac{t_1 + t_2}{t_0} = \frac{t_2}{t_1} + \frac{D(y-z)(\tau_F + \tau_G)}{Dy\tau_F - Dz\tau_G \frac{t_1}{t_2}}. \quad (4.116)$$

При соответствующих соотношениях между дисперсиями Dy , Dz , $D(y-z)$ и временами τ_F и τ_G для систем F и G отношение (4.116) меньше единицы, что свидетельствует о целесообразности применения метода выделения главной части. Например, если $D(y-z) = 0,25Dy$, $Dy = Dz$, $\tau_G = 0,1\tau_F$, то, положив $N_2 = 2N_1$, т. е. $t_2 = 0,2t_0$, получим $(t_1 + t_2)/t_0 = 0,75$. Заметим, что отношение $(t_1 + t_2)/t_0$ зависит от величины $t_2/t_0 = N_2\tau_G/N\tau_F$. Оптимальное значение t_2/t_0 , обеспечивающее минимум отношения $(t_1 + t_2)/t_0$, можно получить, приравняв нулю производную выражения (4.116). В рассмотренном примере

$$(t_2/t_0)_{\text{опт}} = 0,266; \left(\frac{t_1 + t_2}{t_0} \right)_{\text{опт}} = 0,706.$$

Поскольку дисперсии выходных сигналов систем F и G неизвестны, при применении формулы (4.116) следует воспользоваться их оценками.

Экономия машинного времени, достигаемая при использовании метода выделения главной части, в значительной степени определяется выбором системы G . Поскольку на поиски подходящей системы также необходимо затратить некоторые усилия, приходится идти на определенный компромисс между желанием выбрать систему G , хорошо аппроксимирующую исследуемую систему, и затратами на ее поиски. В некоторых случаях удается осуществить корректировку системы G в процессе статистического исследования, используя результаты предшествующих испытаний.

Однако даже при данной системе G путем надлежащей обработки результатов моделирования можно увеличить точность оценок. Это тем более важно, что при анализе сложных систем время, затраченное на статистическую обработку, бывает значительно меньше машинного времени, связанного с проведением испытаний.

Предположим, что выходная величина системы G умножается на некоторый постоянный множитель k и полученная при этом величина $z' = kz$ используется в методе выделения главной части. Исследуем влияние коэффициента k на точность полученных оценок. Точность метода Монте-Карло определяется дис-

персией Dy , точность метода выделения главной части — дисперсией разности

$$D(y - z') = D(y - kz).$$

Но

$$D(y - kz) = Dy - 2kz \sqrt{Dy Dz} + k^2 Dz, \quad (4.117)$$

где r — коэффициент корреляции сигналов y и z .

Найдем значение k , при котором дисперсия разности минимальна. Приравнявая $\frac{dD(y - kz)}{dk}$ нулю, получим

$$k_{\text{опт}} = \frac{\sqrt{Dy}}{\sqrt{Dz}} r, \quad z_{\text{опт}} = \frac{\sqrt{Dy}}{\sqrt{Dz}} rz, \quad (4.118)$$

$$Dr_{\text{опт}} = r^2 Dy, \quad D(y - z_{\text{опт}}) = (1 - r^2) Dy.$$

Поскольку коэффициент корреляции r всегда меньше единицы, из формул (4.118) следует, что для ускорения сходимости всегда целесообразно добиваться, чтобы дисперсия выходной величины системы G была меньше дисперсии выходной величины исследуемой системы F . Оптимальным будет случай, когда Dz в r^2 раз меньше Dy .

На практике значение коэффициента корреляции r и дисперсий Dy и Dz неизвестно, поэтому при образовании величины $z_{\text{опт}}$, участвующей в вычислении оценки M_y по методу выделения главной части, следует воспользоваться их оценками.

4.10. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Многие задачи оптимального проектирования систем управления летательными аппаратами заключаются в выборе параметров исходя из экстремума заданного критерия эффективности и могут быть сформулированы следующим образом.

Поведение системы определяется векторным нелинейным дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dt} = F(y, t, z, x), \quad (4.119)$$

где $y = (y_1, \dots, y_s)$ — вектор фазовых координат системы; $z = (z_1, \dots, z_n)$ — вектор параметров системы, подлежащих выбору в процессе проектирования; $x = (x_1, \dots, x_m)$ — вектор случайных воздействий; $F = (F_1, \dots, F_s)$ — векторная нелинейная функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения системы (4.19) при фиксированных z и x .

Критерием эффективности системы является математическое ожидание функционала $\Phi_0(y, z, x)$. Вектор z должен быть выбран таким образом, чтобы выполнялись условия типа равенств

и неравенств, наложенные на математические ожидания функционалов Φ_i

$$M\Phi_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}) \leq 0, i=1, \dots, p; M\Phi_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x})=0, i=p+1, \dots, q,$$

и, кроме того, математическое ожидание функционала Φ_0 принимало минимальное значение.

К рассмотренной схеме на практике зачастую сводится также задача расчета оптимальных законов управления. С этой целью искомые управляющие функции аппроксимируются конечными суммами заданных функций с неизвестными коэффициентами, и задача определения оптимального управления формулируется как задача определения этих коэффициентов.

Фазовые координаты системы в силу уравнений (4.119) являются функциями параметров $\mathbf{z}$. Поэтому функционалы Φ_i представляют случайные функции вектора $\mathbf{z}$. Введем обозначения:

$$f_i(\mathbf{z}) = M\Phi_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}), \quad i=0, 1, \dots, q, \quad (4.120)$$

тогда выбор оптимальных параметров системы сведется к задаче нелинейного программирования:

$$f_0(\mathbf{z}^0) = \min_{\mathbf{z} \in G} f_0(\mathbf{z}) \quad (4.121)$$

$$G: \{f_i(\mathbf{z}) \leq 0, i=1, \dots, p; f_i(\mathbf{z})=0, i=p+1, \dots, q\}.$$

В качестве примера рассмотрим в упрощенной постановке задачу выбора оптимальных параметров автопилота, обеспечивающего автоматическое сближение летающего аппарата с маневрирующим объектом в безвоздушном пространстве. Сближение происходит за счет работы поворотного двигателя постоянной тяги, смещенного относительно центра масс, по сигналам гиростабилизированного радиопеленгатора (рис. 4.3).

Уравнения сближения в плоскости имеют следующий вид.

1. Уравнения движения летательного аппарата

$$\begin{aligned} w_{x_1} &= \frac{1}{m(t)} F \cos \vartheta_z; \\ w_{y_1} &= \frac{1}{m(t)} F \sin \vartheta_z; \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{1}{J(t)} F a \sin \vartheta_z; \\ \frac{d\varphi_z}{dt} &= \omega_z. \end{aligned}$$

2. Кинематические соотношения

$$\begin{aligned} D\dot{\omega} + 2\dot{D}\omega &= -w_y; \\ \ddot{D} - D^2\omega &= -w_x; \\ w_x &= w_{x_1} \cos(\varphi - \varphi_z) + w_{y_1} \sin(\varphi - \varphi_z); \\ w_y &= -w_{x_1} \sin(\varphi - \varphi_z) + w_{y_1} \cos(\varphi - \varphi_z). \end{aligned}$$

3. Уравнение радиопеленгатора

$$\omega_{\text{изм}} = \frac{1}{T_1^2 p^2 + 2\xi_1 T_1 p + 1} \left[\omega + \frac{k_1 p^2}{T_2^2 p^2 + 2\xi_2 T_2 p + 1} \omega_z + n(t) + \omega_c \right].$$

4. Уравнения автопилота и сервопривода управления поворотным двигателем

$$\delta_z = \begin{cases} \delta_1 & \text{при } |\delta_1| \leq \delta_{\text{max}}, \\ \delta_{\text{max}} \operatorname{sign} \delta_1 & \text{при } |\delta_1| > \delta_{\text{max}}, \end{cases}$$

$$\frac{d\delta_1}{dt} = \begin{cases} \frac{d\delta}{dt} & \text{при } \left| \frac{d\delta}{dt} \right| \leq \delta_{\text{max}}, \\ \delta_{\text{max}} \operatorname{sign} \dot{\delta} & \text{при } \left| \frac{d\delta}{dt} \right| > \delta_{\text{max}}, \end{cases}$$

$$\delta = \frac{1}{T_3^2 p^2 + 2\xi_3 T_3 p + 1} \left[D_1 \frac{A_1}{T_4 p + 1} \omega_{\text{изм}} + \frac{A_2}{p} \omega_2 + A_3 \omega_2 \right].$$

Обозначения в уравнениях системы ясны из рис. 4.3.

Входным воздействием на систему является белый шум $n(t)$ и эквивалентное постоянное смещение ω_c на входе пеленгатора. Задачей управления является уменьшение начальной дальности до минимального значения. Постоянное смещение и начальная дальность представляют нормально распределенные случайные величины.

Минимизируемым критерием качества системы является средний квадрат промаха — минимальной дальности, достигнутой в данной реализации сближения. Его минимизация должна осуществляться путем выбора параметров автопилота A_1 , A_2 , A_3 и T_4 . Дополнительные ограничения в рассматриваемой задаче отсутствуют.

Указанный пример иллюстрирует особенности рассматриваемых задач оптимального проектирования систем управления. Система, приведенная на рис. 4.3, представляет упрощенную модель реальной системы; она моделирует сближение только в одном канале пространственного движения. Но даже в таком виде система настолько сложна, что применить к ней вариационные методы, не задаваясь структурой

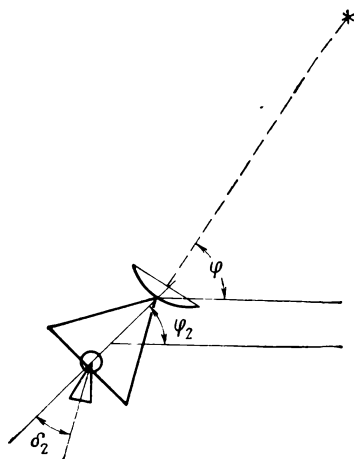


Рис. 4.3. Геометрия системы управляемого сближения с помощью радиопеленгатора

автопилота, а разыскивая в явном виде закон управления, крайне сложно. Применение методов вариационного исчисления, принципа максимума, динамического программирования для решения задач оптимизации систем управления летательных аппаратов затруднительно ввиду сложности уравнений (4.119). Поэтому задача оптимизации, приведенная к задаче нелинейного

программирования (4.121), решается численными методами поиска экстремума. Обзор этих методов составляет содержание следующего раздела.

Неотъемлемой частью прямых численных методов поиска экстремума является многократное вычисление критерия качества и ограничений. Поскольку, как было показано выше, расчет функций $f_i(\mathbf{z})$ чрезвычайно трудоемок и практически выполняется приближенно, в реальных ситуациях вместо задачи (4.121) на самом деле решается задача

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(\mathbf{z}^*) &= \min_{\mathbf{z} \in \Gamma} \varphi_0(\mathbf{z}), \\ \Gamma: \{ \varphi_i(\mathbf{z}) &\leq 0, \quad i=1, \dots, p; \quad \varphi_i(\mathbf{z})=0, \quad i=p+1, \dots, q \}, \end{aligned} \right\} \quad (4.122)$$

где $\varphi_i(\mathbf{z})$, $i=0, 1, \dots, q$ являются оценками соответствующих функций $f_i(\mathbf{z})$. Очевидно, решения задач (4.121) и (4.122) не совпадают, $\mathbf{z}^0 \neq \mathbf{z}^*$. В результате использования $\mathbf{z}^*$ вместо $\mathbf{z}^0$ будут, во-первых, нарушены ограничения, а, во-вторых, критерий качества будет принимать неоптимальное значение. Потери приближенной оптимизации можно оценить $q+1$ числами: $f_0(\mathbf{z}^*) - f_0(\mathbf{z}^0)$ и $f_i(\mathbf{z}^*)$, $i=1, \dots, q$. Оценкам этих потерь посвящен заключительный раздел настоящей главы.

4.11. ОБЗОР ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Основу всех численных методов решения задач нелинейного программирования составляет решение задачи минимизации критерия качества без ограничений. Как будет показано ниже, общая задача нелинейного программирования может быть сведена к задаче без ограничений либо в процессе решения общей задачи учет ограничений только слегка изменяет процедуру минимизации критерия качества. Вследствие этого вначале целесообразно рассмотреть методы минимизации функций многих переменных без ограничений.

Минимизация функций без ограничений

Пусть требуется минимизировать функцию

$$f(\mathbf{z}) = f(z_1, \dots, z_n). \quad (4.123)$$

Практически все методы поиска, за исключением, возможно, перебора, предполагают отсутствие локальных экстремумов в области изменения оптимизируемых параметров. Различные способы поиска глобального экстремума, известные в литературе, связаны с принятием тех или иных гипотез о свойствах функции качества. В дальнейшем будем предполагать, что функция $f(\mathbf{z})$ не имеет локальных минимумов.

Согласно [13] классификацию методов поиска целесообразно проводить по способам аппроксимации функции качества в окрестности исследуемой точки (линейный, квадратичный) и по-

рядку — наивысшему порядку производных функции качества, участвующих в вычислениях.

Простейший метод поиска, не требующий никаких сведений о свойствах функции качества, — перебор, он гарантирует сходимость в случае, когда область определения функции качества содержит конечное число точек, в общем же случае применение его невозможно без привлечения дополнительных сведений о свойствах функции качества. Недостатком метода перебора является медленная сходимость, особенно в случае большой размерности вектора $\mathbf{z}$. Однако в одномерном случае перебор успешно применяется и для него разработаны оптимальные процедуры, позволяющие локализовать минимум функции в отрезке наименьшей длины за заданное число шагов [13]. Одномерный перебор зачастую входит как составная часть процесса минимизации по многомерному вектору $\mathbf{z}$, для чего процедура поиска сводится к последовательной минимизации по каждой из компонент вектора $\mathbf{z}$ (метод Гаусса — Зейделя).

Важное значение имеет метод случайного поиска, теория которого подробно рассмотрена в книге [16]. Случайный поиск является частным случаем перебора и отличается тем, что назначение точек $\mathbf{z}$, в которых сравниваются значения $f(\mathbf{z})$, производится с использованием стохастической процедуры. Например, пусть текущая точка поиска $\mathbf{z}^k$. Точка $\mathbf{z}^{k+1}$ получается из $\mathbf{z}^k$ добавлением n -мерного вектора $\Delta\mathbf{z}$, полученного как реализации случайного вектора ξ с законом распределения, обладающим определенными свойствами. Затем числа $f(\mathbf{z}^{k+1})$ и $f(\mathbf{z}^k)$ сравниваются. Если $f(\mathbf{z}^{k+1}) < f(\mathbf{z}^k)$, осуществляется переход в точку $\mathbf{z}^{k+1}$ и производится следующий шаг. Если $f(\mathbf{z}^{k+1}) \geq f(\mathbf{z}^k)$, к вектору $\mathbf{z}^k$ добавляется новая реализация вектора ξ и процесс повторяется снова.

Основными достоинствами случайного поиска является простота реализации и возможность использования при любых размерностях вектора $\mathbf{z}$. Недостатком является сравнительно медленная его сходимость. Существует много модификаций случайного поиска, повышающих его сходимость, все они связаны с повышением детерминированности метода.

Поиск экстремума симплексным методом производится следующим образом [10]. В n -мерном пространстве оптимизируемых параметров строится $(n+1)$ -мерный правильный симплекс (многоугольник), в вершинах которого производится вычисление функции качества. Среди $n+1$ вершин симплекса выбирается та, значение функции качества в которой максимально, а взамен ее строится новая, симметричная относительно гиперплоскости, проходящей через n оставшихся вершин. Как показало экспериментальное исследование, симплексный метод сходится быстрее случайного поиска, однако, если функция качества носит выраженный «овражный» характер, то эффективность симплексного метода снижается.

Перебор, случайный поиск и симплексный метод являются методами нулевого порядка — для реализации требуется вычисление только функции $f(\mathbf{z})$ и не используются никакие гипотезы о форме $f(\mathbf{z})$.

Большое распространение в практике получили линейные методы поиска, использующие аппроксимацию функции качества в окрестности исследуемой точки поверхностью первого порядка. Линейными методами являются, например, градиентный и метод наискорейшего спуска.

Общая формула градиентного метода имеет вид

$$\mathbf{z}_i^{k+1} = \mathbf{z}_i^k - \alpha_k \left. \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right|_{\mathbf{z} = \mathbf{z}_i^k}; \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.124)$$

где z_i^k — i -я координата k -й итерации поиска.

Градиентный метод имеет первый порядок, поскольку для его использования необходимо вычисление производных первого порядка функции $f(\mathbf{z})$. Однако он может быть реализован и без вычисления производных, если последние заменить разностями

$$\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} = \frac{f(z_1, \dots, z_i + \Delta, \dots, z_n) - f(z_1, \dots, z_n)}{\Delta}.$$

Различные модификации градиентного метода получаются путем задания коэффициентов α_k . В простом градиентном методе α_k — постоянная. В методе наискорейшего спуска α_k выбирается из условия, чтобы точка $\mathbf{z}^{k+1}$ соответствовала минимуму $f(\mathbf{z})$ по направлению градиента. В этом случае, например, используется аппроксимация вдоль линии градиента параболой по значениям ее в трех точках.

Иногда применяется градиентный метод с постоянным шагом

$$\alpha_k = \frac{\lambda}{\|\text{grad } f(\mathbf{z})\|},$$

где

$$\|\text{grad } f(\mathbf{z})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right)^2}.$$

Доказано, что если в окрестности точки экстремума $f(\mathbf{z})$ может быть аппроксимирована поверхностью второго порядка, градиентный метод сходится со скоростью геометрической прогрессии. Знаменатель прогрессии q вычисляется следующим образом:

$$q = \frac{M - m}{M + m}, \quad (4.125)$$

где M — наибольшее собственное значение матрицы вторых производных функции $f(\mathbf{z})$, m — наименьшее.

Из формулы (4.145) видно, что градиентный метод является эффективным только в случае, когда все собственные значения матрицы вторых производных примерно одинаковы.

Если функция $f(\mathbf{z})$ имеет «овражный» характер (в аппроксимации $f(\mathbf{z})$ поверхностью второго порядка это проявляется в большом разбросе собственных значений), сходимость градиентного метода резко ухудшается. Некоторого улучшения сходимости в этом случае можно добиться, если применять различные значения коэффициентов $f(\mathbf{z})$ по каждой координате z_i . Так, в градиентном методе с подбором масштабов делается преобразование координат

$$z'_i = \lambda_i z_i.$$

В этом случае поверхность второго порядка, аппроксимирующая $f(\mathbf{z})$, переходит в сферу. В старых координатах уравнение метода имеет вид

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \alpha_k \lambda_i \left. \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right|_{\mathbf{z} = \mathbf{z}^k}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Однако для реализации такой процедуры поиска требуется расчет на каждом шагу матрицы вторых производных, что резко замедляет поиск.

Примерно такой же степенью эффективности, как и градиентный, обладает метод покоординатного спуска Гаусса — Зейделя, в котором производится последовательное движение в сторону уменьшения по каждому из переменных z_i . При соответствующем преобразовании переменных метод покоординатного спуска совпадает с градиентным.

Специально для оптимизации изрезанных функций разработан метод «оврагов» [3]. В некоторых случаях эффективным может оказаться метод «тяжелого шарика», задаваемый уравнением

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \alpha \left. \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} \right|_{\mathbf{z} = \mathbf{z}^k} + \beta (z_i^k - z_i^{k-1}).$$

Большое количество других модификаций градиентного метода имеется в работе [13].

Методы, основанные на аппроксимации $f(\mathbf{z})$ поверхностью второго порядка, имеют квадратичную скорость сходимости, но сходятся только при достаточно жестких ограничениях на поведение функции $f(\mathbf{z})$. Простейшим вариантом метода, использующего аппроксимацию второго порядка, является метод Ньютона. Он получается из алгоритма Ньютона решения системы нелинейных уравнений вида

$$\text{grad } f(\mathbf{z}) = 0.$$

Недостатком метода Ньютона является необходимость вычисления вторых производных. Поэтому имеется большое число ра-

бот, в которых рассматриваются методы первого и нулевого порядка, использующие аппроксимацию $f(z)$ поверхностью второго порядка. Примером таких методов является метод сопряженных градиентов и его модификации [13].

Для проектирования систем управления летательных аппаратов применение методов поиска экстремума, использующих аппроксимацию поверхностью второго порядка, в большинстве случаев нецелесообразно. Дело в том, что с увеличением порядка аппроксимации увеличивается скорость сходимости метода, но одновременно уменьшается область сходимости и увеличивается его критичность к выполнению используемых гипотез о функции $f(z)$. Критерии эффективности динамических систем имеют обычно сложную форму и даже могут быть разрывными. В этом случае методы, использующие аппроксимацию функциями высокого порядка, расходятся или сходятся очень медленно. Поэтому, как правило, при расчете систем, зависящих от случайных воздействий, следует пользоваться градиентным методом или даже методами нулевого порядка.

Вообще говоря, сравнение эффективности различных методов поиска экстремума является достаточно условным. Эффективность метода определяется для класса минимизируемых функций, а поскольку мы обычно не знаем, к какому классу принадлежит рассматриваемая функция, результаты сравнения методов не могут быть приняты без экспериментальной проверки на интересующей нас функции. Практически выбор метода поиска экстремума достаточно случаен и определяется наличием соответствующих стандартных программ на ЦВМ.

Методы решения задач на условный экстремум

Самым простым методом решения задач на условный экстремум является сведение их к безусловному путем разрешения дополнительных условий. Такую операцию удастся выполнить не всегда, но в тех случаях, когда можно разрешить хотя бы часть дополнительных условий, это нужно сделать.

Предположим, что в задаче (4.121) в качестве дополнительных фигурируют условия, которые разрешить не удастся.

Метод проекции градиента может применяться как в задачах вариационного исчисления, так и в задачах нелинейного программирования. Он заключается в следующем. Вместо формулы градиентного метода

$$z^{k+1} = z^k - \alpha_k \text{grad } f(z^k) \quad (4.126)$$

используется формула

$$z^{k+1} = P_Q[z^k - \alpha_k \text{grad } f(z^k)], \quad (4.127)$$

где P_G — оператор проектирования на множество G . Он определяется из условия

$$\|P_G(z) - z\| = \inf_{v \in G} \|v - z\|.$$

Метод условного градиента использует линейаризацию $f_i(z)$ в окрестности текущей точки и решение задачи нелинейного программирования для определения приращения $z^{k+1} - z^k$, минимизирующего $f_0(z)$ при выполнении всех ограничений.

Общим методом решения задач на условный экстремум является метод штрафных функций [16]. С его помощью задача (4.121) сводится к задаче на безусловный экстремум функции $f(z)$, совпадающей с $f_0(z)$, если z принадлежит G , и принимающей очень большие значения, если z находится вне области G . Обычно замена происходит следующим образом. Ограничения типа равенств заменяются двумя ограничениями типа неравенств по формулам.

Вместо ограничения $f_i(z) = 0$ два ограничения:

$$f_i(z) \leq 0 \quad \text{и} \quad -f_i(z) \leq 0.$$

В дальнейшем изложении предполагается, что такая замена уже сделана и в задаче (4.121) присутствуют только ограничения типа неравенств.

Задача (4.121) заменяется задачей на безусловный минимум функции

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{i=1}^p A_i G(f_i(z)), \quad (4.128)$$

где $G(u)$ — функция, равная нулю при $u \leq 0$ и возрастающая положительная функция при $u > 0$. При выполнении определенных условий на вид функции $G(u)$ и коэффициентах A_i , стремящихся к бесконечности, решение задачи минимизации $f(z)$ совпадает с решением задачи (4.121).

Недостатком метода штрафных функций является то, что при больших значениях коэффициентов A_i вдоль границ области функция (4.128) имеет «овражный» характер, вследствие чего сходимость методов численного поиска при минимизации функции (4.128) может оказаться медленной.

Для исключения этого недостатка может быть предложена модификация метода штрафных функций, позволяющая в некоторых случаях ускорить сходимость процедуры поиска минимума благодаря сглаживанию оптимизируемой функции в окрестности границы области G . Она заключается в следующем. Зада-

ча (4.121) заменяется задачей на безусловный минимум функции

$$f_0(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^p G(f_i(\mathbf{z}) - \lambda_i), \quad (4.129)$$

где $G(u)$ — строго выпуклая при $u > 0$ непрерывная функция, обращающаяся в нуль при $u < 0$; λ_i — постоянная величина.

Обозначим через $\mathbf{z}_\lambda$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, решение задачи (4.129). Пусть $f_i(\mathbf{z}_\lambda) = \mu_i(\lambda)$. Тогда $\mathbf{z}_\lambda$ является одновременно решением задачи [4]

$$f_0(\mathbf{z}_\lambda) = \min f_0(\mathbf{z}); \quad (4.130)$$

$$G_\mu = \{\mathbf{z} | f_i(\mathbf{z}) \leq \mu_i(\lambda), \quad i = 1, \dots, p\}.$$

Для задач выпуклого программирования функции $\mu_i(\lambda)$ непрерывны. Если зафиксировать все λ_i , кроме λ_k , то $\mu_k(\lambda)$ как функция λ_k является неубывающей до некоторого значения $\lambda_k^{\max}$, а затем остается постоянной. Существует такой набор переменных λ_i , возможно, неединственный, при котором все числа $\mu_i(\lambda)$ обращаются в нуль или отрицательны.

С использованием (4.129) процедура решения задачи (4.121) заключается в следующем. Задавая произвольными значениями λ_i , можно определить минимум функции (4.129) и вычислить $f_i(\mathbf{z}_\lambda) = \mu_i(\lambda)$. Если функции $\mu_i(\lambda)$ не обращаются в нуль, выбираются новые значения λ_i и процедура поиска минимума повторяется снова до тех пор, пока либо все значения $\mu_i(\lambda)$ не станут отрицательными и меньшими λ_i , либо все значения $\mu_i(\lambda)$ не станут отрицательными или равными нулю. Выбор новых значений λ_i можно производить, используя любой способ численного решения системы нелинейных уравнений

$$\sup(0, f(\mathbf{z}_\lambda)) = 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (4.131)$$

В функции (4.129) штрафной член отличен от нуля не только вне области, но и вблизи ее границ. Расстояние от границы, начиная с которого добавляется штраф, подбирается таким, чтобы решения задач (4.129) и (4.121) совпадали.

Функция (4.129) носит заметно менее выраженный «овражный» характер, чем функция (4.128). Процесс поиска ее минимума занимает значительно меньше машинного времени, чем решение задачи (4.128), поэтому, даже несмотря на то, что для определения значений λ_i , удовлетворяющих уравнениям (4.131), приходится задачу (4.129) решать несколько раз, суммарные затраты машинного времени на решение задачи (4.121) с помощью (4.129) могут оказаться меньшими, чем при использовании (4.128). К этому следует добавить, что при применении обычного метода штрафных функций в общем случае минимизацию функции (4.128) приходится производить несколько раз

при различных коэффициентах A_k , пока полученное решение не окажется в области G .

Другим важным преимуществом модификации метода штрафных функций является возможность оценки влияния отдельных ограничений на решение задачи (4.121). В процессе минимизации функции (4.129) и решения уравнения (4.131) будут найдены решения задачи (4.129) для нескольких значений λ_i , которые являются решениями задачи (4.130) для $\mu_i(\lambda)$. Анализ зависимостей $f_0(z_\lambda)$ и $\mu_i(\lambda)$ позволяет становить степень влияния ограничений на оптимальное значение функции $f_0(z)$.

Можно применять другой вариант рассмотренного метода, позволяющий обойтись только одним параметром λ и, соответственно, решать только одно нелинейное уравнение. Введем функцию

$$f_*(z) = \max \{f_1(z), \dots, f_p(z)\}. \quad (4.132)$$

Если функции $f_i(z)$ выпуклы, то функция $f_*(z)$ также выпукла. Ограничения $f_i(z) \leq 0$, $i=1, \dots, p$ эквивалентны одному ограничению $f_*(z) \leq 0$. Поэтому, если z_λ — решение задачи минимизации функции

$$f_0(z) + G(f_*(z) - \lambda) \quad (4.133)$$

и выполняется условие $f_*(z_\lambda) = 0$, то z_λ является решением задачи (4.121). Значение λ , для которого функция $f_*(z_\lambda)$ обращается в нуль, разыскивается путем численного решения уравнения

$$\sup (0, f_*(z_\lambda)) = 0. \quad (4.134)$$

Можно показать, что решение системы (4.131) существует, а величины $\mu_i(\lambda) = f_i(z_\lambda)$ при фиксированных λ_k , $k \neq i$, представляют неубывающие функции λ_i , обращающиеся в нуль в единственной точке или на целом отрезке. В остальном характер уравнений (4.131) произволен. В связи с этим решение системы (4.131) представляет известные трудности и, если нет особых оснований выделять отдельные ограничения, целесообразно использовать вариант минимизации функции (4.133), для которого левая часть нелинейного уравнения (4.134) является неубывающей функцией скалярного аргумента λ , вследствие чего решение уравнения (4.134) не представляет затруднений.

Опыт решения задачи оптимизации нелинейных динамических систем, зависящих от случайных воздействий, путем сведения к задаче нелинейного программирования показывает, что трудоемкость решения задачи мало зависит от выбора метода оптимизации. Обычно минимизируемый критерий качества таких систем является нелинейной функцией сложной формы, зачастую многоэкстремальной. Методы оптимизации достигают

высокой эффективности за счет использования особенностей минимизируемой функции. Поскольку обычно свойства минимизируемых функций неизвестны, отдавать предпочтение определенным методам оптимизации нет оснований. На практике вопрос о выборе метода оптимизации решается в основном исходя из наличия стандартных программ оптимизации, имеющихся в библиотеке ЭВМ.

Более важным является вопрос о назначении параметров метода оптимизации (число искомых переменных, шаг поиска, коэффициенты при производных и т. д.) и общей стратегии решения задачи.

Поскольку оптимизируемая функция может оказаться многоэкстремальной, необходимо выделить область изменения искомых параметров, в которой отсутствуют локальные минимумы. Кроме того, при физической постановке задачи в искомые параметры часто включаются величины, слабо влияющие на величину критерия качества. Это выражается в появлении «оврага» минимизируемой функции вдоль оси координат, соответствующей слабовлияющему параметру. Желательно слабовлияющие параметры из рассмотрения исключить, так как с ростом размерности вектора z время решения задачи оптимизации резко возрастает.

Все эти вопросы можно решить, вводя специальный предварительный этап исследования, во время которого путем рассмотрения задачи в упрощенной постановке и вычисления критерия качества в отдельных точках исследуются особенности поставленной задачи, выбирается метод поиска и уточняется множество искомых параметров.

Само решение задачи также целесообразно проводить поэтапно. Вначале, когда ничего о свойствах оптимального решения неизвестно, проводится оптимизация с использованием упрощенной модели системы при сравнительно неточном вычислении критерия качества и ограничений. В результате без больших затрат удается попасть в окрестность оптимальной точки. Затем с использованием полных уравнений при возможно более точном вычислении критерия качества и ограничений окончательно определяется оптимальное решение.

Задачи оптимизации с ограничениями проще всего решать методом штрафных функций, используя эквивалентность задач (4.129) и (4.130).

При решении примера из 4.10 расчет критерия качества проводился с помощью комбинированной квадратурной формулы с 16 узлами и занимал до 10 мин машинного времени, поскольку ввиду наличия малых постоянных времени уравнения системы считались с очень малым шагом. Поэтому была принята двухэтапная процедура. Вначале оптимальные параметры выбирались для системы, полученной из исходной выбрасыванием звеньев с малыми постоянными времени. Счет дифференциальных уравнений проводился с укрупненным шагом, в результате чего расчет критерия качества занимал менее минуты. Результат оптимизации упрощенной задачи использовался в качестве

начальных условий для основной. Оптимизация проводилась методом, представляющим комбинацию метода симплексов и покоординатного спуска. Все решение задачи занимало два-три часа машинного времени.

4.12. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ОПТИМИЗИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

Предположим, что целью проектирования системы является минимизация функции качества $f(\mathbf{z})$, представляющей математическое ожидание функционала $\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x})$. При использовании для оценки функции $f(\mathbf{z})$ метода Монте-Карло функция $\varphi(\mathbf{z})$, приближающая $f(\mathbf{z})$ к фактически используемой при оптимизации, имеет вид

$$\varphi^N(\mathbf{z}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Phi(\mathbf{y}^k, \mathbf{z}, \mathbf{x}^k), \quad (4.135)$$

или

$$\varphi^N(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^N a_k \Phi(\mathbf{y}^k, \mathbf{z}, \mathbf{x}^k), \quad (4.136)$$

если для оценки функции $f(\mathbf{z})$ используются комбинированные квадратурные формулы.

В формулах (4.135), (4.136) $\mathbf{x}^k$ — k -я реализация вектора случайных воздействий, $\mathbf{y}^k$ — решение системы (4.119), полученное при $\mathbf{x} = \mathbf{x}^k$ и $\mathbf{z}$, индекс N при функции $\varphi(\mathbf{z})$ означает, что она вычислена с использованием N решений системы (4.119).

Особенность использования методов Монте-Карло и комбинированных квадратурных формул для вычисления критерия качества при оптимизации заключается в том, что полученные с их помощью оценки являются случайными. Это, с одной стороны, затрудняет оценку точности приближенного решения задачи оптимизаций и, с другой стороны, ухудшает сам процесс поиска экстремума.

Обычно при подсчете значений функции $\varphi(\mathbf{z})$ в разных точках $\mathbf{z}$ в формулах (4.135) и (4.136) используются различные наборы реализаций случайных воздействий $\mathbf{x}$. Это приводит к тому, что погрешность определения функции $f(\mathbf{z})$, выражаемая разностью

$$\psi^N(\mathbf{z}) = \varphi^N(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}),$$

является случайной и может трактоваться как случайный процесс по векторной переменной $\mathbf{z}$. Функция $\varphi^N(\mathbf{z})$ при этом может содержать дополнительные локальные минимумы, тормозящие решение задачи. Действительно, пусть в процессе реализа-

ции поисковой процедуры сравниваются значения функций $\varphi^N(\mathbf{z})$ в точках $\mathbf{z}^k$ и $\mathbf{z}^{k+1}$. Пусть в этих точках выполняется неравенство

$$f(\mathbf{z}^{k+1}) - f(\mathbf{z}^k) < 0,$$

тогда, если бы значение функции $f(\mathbf{z})$ при минимизации вычислялось точно, из точки $\mathbf{z}^k$ необходимо было бы перейти в точку $\mathbf{z}^{k+1}$ и дальше продолжать поиск или, если в точке $\mathbf{z}^{k+1}$ выполняются условия минимума, считать задачу решенной. Но поскольку в процессе минимизации вместо функции $f(\mathbf{z})$ используется $\varphi^N(\mathbf{z})$ решение о переходе из точки $\mathbf{z}^k$ в точку $\mathbf{z}^{k+1}$ принимается на основании разности

$$\varphi^N(\mathbf{z}^{k+1}) - \varphi^N(\mathbf{z}^k) = f(\mathbf{z}^{k+1}) - f(\mathbf{z}^k) + \psi^N(\mathbf{z}^{k+1}) - \psi^N(\mathbf{z}^k). \quad (4.137)$$

Если разность $\psi^N(\mathbf{z}^{k+1}) - \psi^N(\mathbf{z}^k)$ получается положительной и большей первых двух членов в (4.138), будет принято неправильное решение о том, что точка $\mathbf{z}^k$ является точкой минимума. Вероятность неправильного решения зависит от статистических свойств разности

$$\psi^N(\mathbf{z}^{k+1}) - \psi^N(\mathbf{z}^k).$$

Обычно математическое ожидание $\psi^N(\mathbf{z})$ равно или близко к нулю, а закон распределения близок к нормальному. Поэтому вероятность принятия неправильного решения определяется дисперсией разности

$$D[\psi^N(\mathbf{z}^{k+1}) - \psi^N(\mathbf{z}^k)] = D\psi^N(\mathbf{z}^{k+1}) + D\psi^N(\mathbf{z}^k) - \\ - 2r \sqrt{D\psi^N(\mathbf{z}^{k+1}) D\psi^N(\mathbf{z}^k)},$$

где r — коэффициент корреляции между $\psi^N(\mathbf{z}^{k+1})$ и $\psi^N(\mathbf{z}^k)$. Если для подсчета $\varphi^N(\mathbf{z})$ используются независимые реализации случайных воздействий, $r=0$.

Естественным способом уменьшения дисперсии $D[\psi^N(\mathbf{z}^{k+1}) - \psi^N(\mathbf{z}^k)]$, а значит, и вероятности неправильного решения является увеличение числа членов в формулах (4.135) и (4.136), но при этом возрастают затраты машинного времени на поиск. Однако есть и другой способ, состоящий в организации расчетов таким образом, чтобы погрешности $\psi^N(\mathbf{z}^k)$ и $\psi^N(\mathbf{z}^{k+1})$ были зависимы с положительным коэффициентом корреляции. Этого можно добиться, например, если использовать одни и те же реализации случайных воздействий при подсчете $\varphi^N(\mathbf{z})$ в точках $\mathbf{z}^k$ и $\mathbf{z}^{k+1}$. По-видимому, впервые этот факт был отмечен в статье А. С. Фролова и Н. Н. Ченцова [18] и применен к задачам численного поиска Ю. Г. Полляком [12].

В статье [5] доказано, что использование одних и тех же реализаций случайных воздействий $\mathbf{x}$ в течение всего процесса поиска не ухудшает окончательной точности определения экстремума. Получена оценка точности решения задачи минимизации.

ции функции $f(\mathbf{z})$ при использовании вместо $f(\mathbf{z})$ ее оценки методом Монте-Карло или комбинированными квадратурными формулами. Эти оценки, являясь достижимыми, для большинства практических задач предъявляют завышенные требования к точности аппроксимации $f(\mathbf{z})$.

В связи с этим представляет интерес получение оценок погрешностей оптимизации, имеющих негарантированный характер, но позволяющих определить потери приближенного решения задачи оптимизации достаточно точно при сохранении удовлетворительной степени достоверности.

Потери приближенной оптимизации ограничены неравенством

$$f(\mathbf{z}^*) - f(\mathbf{z}) \leq [f(\mathbf{z}^*) - \varphi(\mathbf{z}^*)] - [f(\mathbf{z}^0) - \varphi(\mathbf{z}^0)]. \quad (4.138)$$

Предположим, что в процессе решения задачи поиска использовалась конкретная функция $\varphi^N(\mathbf{z})$, так что точка $\mathbf{z}^*$ фиксирована. Точка $\mathbf{z}^0$ определяется исходной задачей, следовательно, тоже фиксирована.

Проведем оценку отдельных членов в правой части уравнения (4.132). Разность $f(\mathbf{z}^*) - \varphi^N(\mathbf{z}^*)$ при фиксированной точке $\mathbf{z}^*$ является реализацией случайной величины, имеющей нулевое математическое ожидание и дисперсию $D\varphi^N(\mathbf{z}^*)$.

Разность $f(\mathbf{z}^0) - \varphi^N(\mathbf{z}^0)$ также имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию $D\varphi^N(\mathbf{z}^0)$. Следовательно, вся правая часть неравенства (4.138) имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию, не превышающую $2[D\varphi^N(\mathbf{z}^*) + D\varphi^N(\mathbf{z}^0)]$. Следовательно, с доверительной вероятностью p выполняется неравенство

$$[f(\mathbf{z}^*) - \varphi^N(\mathbf{z}^*)] - [f(\mathbf{z}^0) - \varphi^N(\mathbf{z}^0)] \leq \alpha_p \sqrt{2[D\varphi^N(\mathbf{z}^*) + D\varphi^N(\mathbf{z}^0)]}, \quad (4.139)$$

где α_p — корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a e^{-\frac{1}{2}u^2} du = p.$$

Для $p=0,95$ $\alpha_p=2$, для $p=0,99$ $\alpha_p=3$.

Объединяя (4.138) и (4.139), получим

$$P\{f(\mathbf{z}^*) - f(\mathbf{z}^0) \leq \alpha_p \sqrt{2[D\varphi^N(\mathbf{z}^*) + D\varphi^N(\mathbf{z}^0)]}\} \geq p. \quad (4.140)$$

Поскольку точка $\mathbf{z}^*$ известна, дисперсия $D\varphi^N(\mathbf{z}^*)$ может быть сосчитана по обычным формулам оценки дисперсий

$$D^*\varphi^N(\mathbf{z}^*) = \frac{1}{N_1 - 1} \sum_{k=1}^{N_1} \left[\varphi_k^N(\mathbf{z}^*) - \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \varphi_j^N(\mathbf{z}^*) \right]^2, \quad (4.141)$$

где $\varphi_k^N(\mathbf{z}^*)$ — k -я независимая реализация функции $\varphi^N(\mathbf{z}^*)$.

Если функция $\varphi^N(\mathbf{z})$ определяется формулой (4.135), то ее дисперсия может быть вычислена и другим способом — через дисперсию функционала Φ по формуле

$$D\varphi^N(\mathbf{z}^*) = \frac{1}{N} D\Phi(\mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*, \mathbf{x}), \quad (4.142)$$

а дисперсия функционала Φ оценивается формулой

$$D^*\Phi = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \left[\Phi_k - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi_j \right]^2,$$

где

$$\Phi_k = \Phi(\mathbf{y}^k, \mathbf{z}^*, \mathbf{x}^k).$$

Оценка $D\varphi^N(\mathbf{z}^*)$ по формулам (4.142) требует N решений уравнений оптимизируемой системы, а по формуле (4.141) — $N_1 N$ решений.

Принимая гипотезу, что статистические характеристики функции $\varphi^N(\mathbf{z})$ мало изменяются с изменением $\mathbf{z}$, для оценки $D\varphi(\mathbf{z}^0)$ можно принять значение оценки дисперсии функции $\varphi(\mathbf{z})$ в некоторой точке $\mathbf{z}^1$. В частности, в качестве точки $\mathbf{z}^1$ можно принять точку $\mathbf{z}^*$, формула (4.140) в этом случае примет вид

$$P\{f(\mathbf{z}^*) - f(\mathbf{z}^0) \leq 2\alpha_p \sqrt{D\varphi(\mathbf{z})}\} \geq p. \quad (4.143)$$

При наличии соответствующих возможностей желательно проверить гипотезу слабой зависимости дисперсии $D\varphi^N(\mathbf{z})$ от $\mathbf{z}$, для чего нужно построить оценку ее по формуле (4.141) или (4.142) в нескольких точках $\mathbf{z}$. В этом случае в формуле (4.140) вместо $D\varphi(\mathbf{z}^0)$ используется максимальная из полученных оценок.

Формулы (4.140) и (4.143) являются приближенными по следующим причинам. Во-первых, строго говоря, случайная величина $\varphi^N(\mathbf{z}^*)$ распределена по закону, отличному от полученного в предположении фиксированности точки $\mathbf{z}^*$, поскольку точка $\mathbf{z}^*$ зависит от реализации $\varphi^N(\mathbf{z})$. Поэтому сделанные предположения о характере распределения $\varphi^N(\mathbf{z}^*)$ справедливы только, если наличие зависимости $\mathbf{z}^*$ от $\varphi^N(\mathbf{z})$ не сильно изменяет характер распределения. Во-вторых, как уже указывалось, дисперсия $D\varphi^N(\mathbf{z}^0)$ неизвестна и заменяется дисперсией в некоторой точке $\mathbf{z}^1$, отличной от $\mathbf{z}^0$. Наконец, формулы (4.140) и (4.143) получены в предположении, что правая часть неравенства (4.138) распределена по нормальному закону, что, строго говоря, неверно, поскольку она не может быть отрицательной. Однако, если число N членов в формуле (4.135) или (4.136) достаточно велико, закон распределения правой части неравенства (4.138) можно считать близким к нормальному.

Формула (4.140) и следующая из нее формула (4.143) дают также завышенную оценку приращения функции $f(\mathbf{z})$, поскольку

они не учитывают корреляционной зависимости разностей $f(\mathbf{z}) - \varphi^N(\mathbf{z}^*)$ и $f(\mathbf{z}^0) - \varphi^N(\mathbf{z}^0)$. Если функция $\varphi^N(\mathbf{z})$ приближает $f(\mathbf{z})$ достаточно точно, точки $\mathbf{z}^*$ и $\mathbf{z}^0$ мало отличаются друг от друга и значения обеих разностей статистически связаны с большим положительным коэффициентом корреляции. В этом случае дисперсия правой части неравенства (4.138) меньше дисперсий отдельных членов.

Если дисперсия разности $[f(\mathbf{z}^*) - \varphi^N(\mathbf{z}^*)] - [f(\mathbf{z}^0) - \varphi^N(\mathbf{z}^0)]$ известна, неравенство, оценивающее приращение $\hat{f}(\mathbf{z})$ с вероятностью, большей p , имеет вид

$$P\{f(\mathbf{z}^*) - f(\mathbf{z}^0) \leq \alpha_p \sqrt{D\{[f(\mathbf{z}^*) - \varphi^N(\mathbf{z}^*)] - D[f(\mathbf{z}^0) - \varphi^N(\mathbf{z}^0)]\}}\} > p. \quad (4.144)$$

Для практического его использования можно предположить, что дисперсия разности $[f(\mathbf{z}^*) - \varphi^N(\mathbf{z}^*)] - [f(\mathbf{z}^0) - \varphi^N(\mathbf{z}^0)]$ не больше дисперсии разности $[f(\mathbf{z}^*) - \varphi^N(\mathbf{z}^*)] - [f(\mathbf{z}^1) - \varphi^N(\mathbf{z}^1)]$. Точка $\mathbf{z}^1$ выбирается, например, путем оценки дисперсии разности по формуле

$$\begin{aligned} D^* [f(\mathbf{z}^*) - \varphi^N(\mathbf{z}^*) - f(\mathbf{z}) - \varphi^N(\mathbf{z})] = \\ = \frac{1}{N_1 - 1} \sum_{k=1}^{N_1} [\varphi_k^N(\mathbf{z}^*) - \varphi_k^N(\mathbf{z})]^2 - \sum_{j=1}^{N_1} [\varphi_j^N(\mathbf{z}^*) - \varphi_j^N(\mathbf{z})]^2 \end{aligned}$$

в нескольких произвольных точках $\mathbf{z}$ и использования в качестве $\mathbf{z}^1$ той из них, для которой оценка дисперсии максимальна. При этом важно обследовать всю область изменения $\mathbf{z}$, в которой возможно появление точки $\mathbf{z}^0$. В противном случае дисперсия разности $[f(\mathbf{z}^*) - \varphi^N(\mathbf{z}^*)] - [f(\mathbf{z}^1) - \varphi^N(\mathbf{z}^1)]$ может оказаться малой не вследствие малости приращения $f(\mathbf{z}^*) - f(\mathbf{z}^0)$, а из-за близости точек $\mathbf{z}^*$ и $\mathbf{z}^1$, и оценка приращения по формуле (4.144) будет заниженной.

На практике встречаются задачи, в которых точность вычисления функции $\hat{f}(\mathbf{z})$ уменьшается по мере увеличения $f(\mathbf{z})$. Так, например, если $\hat{f}(\mathbf{z})$ при фиксированном $\mathbf{z}$ представляет средний квадрат центрированной нормально распределенной случайной величины, дисперсия ее оценки по формуле (4.135) может быть подсчитана следующим образом.

Пусть $\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}) = u^2$, где u — центрированная нормально распределенная случайная величина. Тогда, поскольку

$$\begin{aligned} D\varphi^N(\mathbf{z}) &= \frac{1}{N} D\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}) = \frac{1}{N} \{M[\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x})]^2 - [M\Phi(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x})]^2\} = \\ &= \frac{1}{N} [Mu^4 - (Mu^2)^2] = \frac{1}{N} [3(Mu^2)^2 - (Mu^2)^2] = \\ &= \frac{2}{N} (Nu^2)^2 = \frac{2}{N} f^2(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае погрешность вычисления $f(z)$ по формуле (4.135) при фиксированном z прямо пропорциональна значению $f(z)$.

Аналогичная ситуация будет во всех случаях, когда критерием качества системы является математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины, распределение которой близко к нормальному.

Для таких задач использованное выше предположение о слабой зависимости статистических характеристик функции $\varphi^N(z)$ от z несправедливо. Однако и в этом случае формулой (4.144) можно пользоваться. Действительно, внутри окрестности опти-

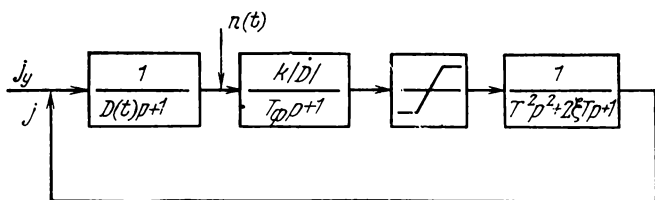


Рис. 4.4. Структурная схема системы самонаведения в плоскости

мальной точки z^0 , где функция $f(z)$ мало отличается от $f(z^0)$, оценка точности, определенная по формуле (4.144), справедлива. Вне этой области, несмотря на большую погрешность вычисления $f(z)$, вследствие того, что $f(z)$ велико, $\varphi(z)$ также принимает большие значения, и следовательно, точка z^* должна находиться в окрестности точки z^0 . Поэтому весь вывод формул для потерь приближенной оптимизации можно повторить, ограничиваясь рассмотрением указанной окрестности точки z^0 . При этом, разумеется, оценка $f(z)$ по формуле (4.135) должна быть все-таки настолько точной, чтобы глобальные свойства функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ совпадали.

Пример. В модели процесса самонаведения методом пропорциональной навигации с линеаризованным кинематическим соотношением, изображенной на рис. 4.4, выбираются навигационный коэффициент k и постоянная времени T_ϕ фильтра, минимизирующие средний квадрат промаха с учетом шума $n(t)$, постоянного маневра цели, начального значения промаха и разброса времени самонаведения: $t_0 = \frac{D_0}{\dot{D}}$.

Расчет критерия оптимальности проводился с помощью комбинированной квадратурной формулы, полученной на основе формул Гаусса с двумя узлами по каждому из трех случайных переменных: начальному промаху h_0 , маневру цели j_α и времени самонаведения

$$\varphi^8(k, T_\phi) = \sum_{i=1}^8 Q_i h(h_0^i, j_\alpha^i, t_0^i, n^i(t)),$$

где h_0 — реализации промаха при соответствующим образом подобранных значениях начального промаха, маневра цели и времени самонаведения и независимой случайной реализации шума $n(t)$.

В результате решения задачи поиска методом Гаусса-Зейделя с постоянным шагом были найдены оценки оптимальных значений искомых параметров $k^*=5,2$; $T_\Phi^*=0,2$ с.

После десятикратного вычисления $\varphi^8(k^*, T_\Phi^*)$ с различными реализациями шума $n(t)$ была подсчитана по формуле (4.141) дисперсия $\varphi^8(k^*, T_\Phi^*)$, которая оказалась равной $0,032$ м⁴. Следовательно, согласно формуле (4.143) с доверительной вероятностью $p=0,99$ ($\alpha_p=3$) выполняется неравенство

$$Mh^2(k^*, T_\Phi^*) - Mh^2(k^0, T_\Phi^0) \leq 6 \sqrt{0,032} = 1,08 \text{ м}^2.$$

В табл. 4.4 для различных значений k построены значения $\varphi^8(k, T) = Mh^2$, $f(k, T) = Mh^2$ и $\sqrt{D\varphi^8(k, T)}$. Предполагается, что функция, полученная путем осреднения десяти независимых реализаций $\varphi^8(k, T)$, совпадает с $f(k, T)$. Анализ данных таблицы показывает, что оценка потерь приближенной оптимизации, даваемая формулой (4.143), справедлива.

Таблица 4.4

k	3	4,2	5,2	7
$\varphi^8(k, T_\Phi)$	977	14,9	0,35	0,58
$f(k, T_\Phi)$	1029	12,7	0,39	1,21
$\sqrt{D^*\varphi^8(k, T_\Phi)}$	85	2,54	0,178	0,68

При решении задач на условный экстремум возможная степень нарушения ограничений задачи (4.121) в точке $\mathbf{z}^*$ оценивается непосредственно подстановкой.

Приращение критерия качества $f_0(\mathbf{z}^*) - f_0(\mathbf{z}^0)$ вычисляется по оценкам потерь, вызванных приближенным вычислением критерия качества в задаче на безусловный экстремум, полученной из исходной задачи методом штрафных функций, и оценкам значений функций $f_i(\mathbf{z})$, $i=1, \dots, q$ в точке $\mathbf{z}^*$. Например, если $\mathbf{z}^*$ найдено из решения задачи минимизации функции

$$\varphi(\mathbf{z}) = \varphi_0(\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^q G(\varphi_i(\mathbf{z}) - \lambda_i),$$

то согласно формуле (4.143) с вероятностью p

$$f_0(\mathbf{z}^*) + \sum_{i=1}^q G(f_i(\mathbf{z}^*) - \lambda_i) - f_0(\mathbf{z}^0) - \sum_{i=1}^q G(f_i(\mathbf{z}^0) - \lambda_i) \leqslant \\ \leqslant 2\alpha_p \sqrt{D\varphi(\mathbf{z}^*)},$$

откуда с той же вероятностью

$$f_0(\mathbf{z}^*) - f_0(\mathbf{z}^0) \leqslant 2\alpha_p \sqrt{D\varphi(\mathbf{z}^*)} + \sum_{i=0}^q G(f_i(\mathbf{z}^0) - \lambda_i) - \\ - \sum_{i=1}^q G(f_i(\mathbf{z}^*) - \lambda_i) \leqslant 2\alpha_p \sqrt{D\varphi(\mathbf{z}^*)} - \sum_{i=1}^q G(f_i(\mathbf{z}^*) - \lambda_i) + \\ + \sum_{i=1}^q G(-\lambda_i).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

К главе 1

1. **Дубнов Я. С.** Основы векторного исчисления. Ч. I. ГИТТЛ, 1952, 368 с.
2. **Кринецкий Е. И.** Системы самонаведения. М., «Машиностроение», 1970, 235 с.
3. **Лебедев А. А., Карабанов В. А.** Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами. М., «Машиностроение», 1965, 528 с.
4. **Лэнинг Дж. Х., Бэттин Ф. Г.** Случайные процессы в задачах автоматического управления. М., ИЛ, 1958, 387 с.
5. **Ньютон Дж. К., Гулд Л. А., Кайзер Дж. Ф.** Теория линейных следящих систем. М., Физматгиз, 1960, 407 с.
6. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962, 883 с.
7. **Солодов А. В.** Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. М., Физматгиз, 1962, 224 с.
8. **Солодовников В. В.** Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960, 655 с.

К главе 2

1. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1966, 296 с.
2. **Бородачев Н. А.** Основные вопросы точности производства. М., Изд-во АН СССР, 1950, 416 с.
3. **Матвеев П. С., Синицын А. С.** Динамическая точность систем автоматического управления со случайно изменяющимися параметрами. — В сб.: Автоматическое управление и вычислительная техника. М., «Машиностроение», 1967, вып. 7, с. 232—305.
4. **Моисеев Н. Н.** Численные методы в теории оптимальных систем. М., «Наука», 1971, 157 с.
5. **Пупков К. А., Себряков Г. Г.** Ортогональный метод исследования нелинейных САУ при случайных воздействиях. — «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1967, № 2, с. 157—167.
6. **Федосов Е. А., Себряков Г. Г.** Спектральный анализ систем управления со случайно изменяющимися параметрами. — В сб.: Автоматическое управление и вычислительная техника. М., «Машиностроение», 1967, вып. 7, с. 207—239.
7. **Чернецкий В. И.** Анализ точности нелинейных систем управления. М., «Машиностроение», 1968, 248 с.
8. **Caughey T., Dienes.** The behavior of linear systems with random parametric excitation, Journ. Phys. 1962. No 41, pp. 300—318.

К главе 3

1. **Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.** Задачи на экстремум при наличии ограничений. — ЖВМ и МФ, 1965, т. 5, № 3, с. 395—493.
2. **Люстерник Л. А., Соболев В. И.** Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1966, с. 180—196.
3. **Ляпунов А. А.** О вполне аддитивных вектор-функциях. — «Известия АН СССР. Сер. математическая», 1940, т. 4, № 6, с. 465—478.
4. **Милютин А. А.** Задачи на экстремум при наличии ограничений. Диссертация на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук. № 66—77767 (ГБИЛ). Институт химической физики АН СССР, 1966, с. 1—63.
5. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. и др.** Математическая теория оптимального управления. М., Физматгиз, 1961, 391 с.

6. Федосов Е. А., Батков А. М., Левитин В. Ф. и др. Общие вопросы теории наведения. IV Конгресс ИФАК. Краткое содержание докладов. Варшава, 1969, 312 с.

7. Федунев Б. Е. Синтез управления в задаче с фазовыми ограничениями. — «Прикладная математика и механика», 1973, т. 37, вып. 1, с. 23—31.

8. Федунев Б. Е. Условия оптимальности в некоторых задачах управления со случайными воздействиями. — ЖВМ и МФ, 1971, т. 11, № 4, с. 894—909.

9. Федунев Б. Е. Использование условий оптимальности в некоторых задачах управления с неосредненными фазовыми ограничениями при случайном воздействии. Доклады II Всесоюзного совещания по статистическим методам теории управления (Ташкент, 1970). Дополнительный сборник. М., АН СССР, АН Уз. ССР. Институт проблем управления (автоматики и телемеханики), 1972, с. 114—130.

Главе 4

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1, М., Физматгиз, 1959, 464 с.

2. Бусленко Н. П., Голенко Д. И., Соболев И. М. и др. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). М., Физматгиз, 1962, 331 с.

3. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л. Принцип нелокального поиска в системах автоматической оптимизации. АН СССР, 1961, т. 137, № 2, с. 295—299.

4. Горский А. А. Модификация метода штрафных функций для решения задач выпуклого программирования — «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1971, № 6, с. 21—29.

5. Горский А. А. О машинной оптимизации нелинейных динамических систем. — «Автоматика и телемеханика», 1970, № 8, с. 24—31.

6. Демух В. И. Приближенные методы анализа точности нелинейных систем. — «Автоматика и телемеханика», 1965, № 6, с. 1021—1025.

7. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1962, 332 с.

8. Левитин Е. С., Поляк Б. Т. Методы минимизации при наличии ограничений. — ЖВМ и МФ, 1966, т. 6, № 5, с. 787—823.

9. Лэннинг Дж. Х., Бэттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М., ИЛ, 1958, 387 с.

10. Налимов В. В., Чернова Н. А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М., «Наука», 1965, 340 с.

11. Первозванский А. А. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. М., Физматгиз, 1962, 351 с.

12. Полляк Ю. Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М., «Советское радио», 1971, 400 с.

13. Поляк Б. Т. Методы минимизации функций многих переменных — «Экономика и математические методы», 1967, т. 3, вып. 6, с. 881—902.

14. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960, 600 с.

15. Пугачев В. С. Применение теории марковских процессов к анализу точности нелинейных систем. — «Известия АН СССР. Энергетика и автоматика», 1961, № 3, с. 47—57.

16. Растринин Л. А. Статистические методы поиска. М., «Наука», 1968, 376 с.

17. Солодов А. В., Петров Ф. С. Линейные системы с переменными параметрами. М., «Наука», 1971, 620 с.

18. Фролов А. С., Ченцов Н. Н. О вычислении методом Монте-Карло интегралов, зависящих от параметров. — ЖВМ и МФ, 1962, т. 2, № 4, с. 714—717.

19. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной оптимизации. М., «Мир», 1972, 240 с.

20. Чернецкий В. И. Анализ точности нелинейных систем управления. М., Машиностроение, 1963, 248 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Акселерометр** маятникового типа 85
— с поступательным движением чувствительного элемента 85
Аппроксимация параметрическая 136
— средняя квадратичная 122, 129
- Воздействия** случайные 172
Время упрежденное 18
- Головка** самонаведения гиросtabilизированная 27
- Датчики** линейных ускорений 84
- Звено** кинематических связей 32
— формирования измеряемой величины 34
- Класс** управления 173
Контур автономный 36
— стабилизации ракеты 10
Координатор цели 28
Критерий качества обобщенный 150
Коэффициент усиления частотный эквивалентный 129
- Маневр** ракеты 20
— цели 20
- Метод** Дубовицкого—Милютин 158
— интерполяционный 142
— Ньютона 153
— семиинвариантов 148
— статической минеаризации 148
— трех точек 20
- Многочлен** Лагранжа интерполяционный 234, 243
- Многочлены** многомерные ортогональные 120
— Эрмита 120
- Момент** захвата цели 56
- Наведение** (процесс) 10, 11
Напор скоростной (максимальный и минимальный) 26
Направление опорное 21
- Область** абсолютного минимума функции 209
— работоспособности системы 150
Обтекатель антенны 86
- Параметры** (номинальные значения) 150
Платформа гироскопическая 27
Поле допуска 140, 149
Полет в упрежденную точку встречи 11
Преобразование гистерезисного типа 133
Программирование нелинейное 271
Пролет 10
- Разброс** параметров технологический 139, 150
- Разложение** плотности распределения нормальной двумерной 107
— — — — четырехмерной 108
Разложения канонические 144
Ракета с аэродинамическим управлением 26
Рассогласование линейное 20
Рули ракеты 28
- Сервомеханизм** 88
Сила лобового сопротивления 26
Синтез оптимального управления 166
Система бортовая 27
— наведения 9
— координат антенная 28
— — лучевая 28
— — связанная 28
— стохастическая 90
Скорость линии дальности угловая 15
Соотношение кинематическое 31
Станция радиолокационная бортовая 20
- Траектория**, баллистическая траектория 27
— стартовый участок 18

- Угол пеллинга 15
Управление автономное 18
Уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова 95
— Эйлера 160
Уравнения кинематических связей 31
Ускорение «ложное» 35
— продольное 28
Устройства вычислительные и корректирующие 10
— информационные 10
Флюктуации центра отражения 45
Функция передаточная эквивалентная 129
Функция стоимости 151
Формула квадратурная Гаусса 236, 244
— — Симпсона 236
— — трапеций 235
Функционал линейный (общий вид) 160
Этап вывода ракеты 18
Этап самонаведения носителя 18
-

СОДЕРЖАНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие	3
Введение	5
Глава 1. Методика проектирования систем наведения на основе теории линейных систем управления	9
1.1. Задача, процесс и система наведения	9
1.2. Пролет — текущая мера точности наведения	10
1.3. Линейное рассогласование	15
1.4. Угловая скорость линии дальности	21
1.5. Управление вектором ускорения ракеты	26
1.6. Линеаризованные зависимости, связывающие полет, линейное рассогласование и угловую скорость	29
1.7. Структурные схемы звена кинематических связей	31
1.8. Структурная схема контура наведения	34
1.9. Структурная схема контура наведения по угловой скорости линии дальности	36
1.10. Структурная схема контура наведения по линейному рассогласованию	37
1.11. Простейшие системы наведения по угловой скорости и линейному рассогласованию	38
1.12. Точность системы наведения и коэффициенты пролета	42
1.13. Параметрические передаточные функции систем наведения	50
1.14. Точность в заданный момент времени. Эквивалентные по точности системы	56
1.15. Точность контура наведения при бесконечном времени управления. Понятие времени памяти нестационарной системы	58
1.16. Свойства коэффициентов полиномов параметрических передаточных функций замкнутого контура наведения	60
1.17. Качественное сравнение весовых, передаточных функций замкнутой системы наведения и коэффициентов пролетов	66
1.18. Выбор передаточной функции замкнутого контура наведения	69
1.19. Общая характеристика задачи оптимизации системы наведения по точности	70
1.20. Применение задачи Винера к расчету оптимальной системы наведения	72
Глава 2. Методы исследования процессов, позволяющие учитывать случайные разбросы параметров	83
2.1. Воздействия случайных вибраций на датчики линейных ускорений	84
2.2. Прохождение сигнала через обтекатель антенны головки самонаведения	86
2.3. Модуляция параметров сервомеханизмов рулей случайной нагрузкой	88

	<i>Стр.</i>
2.4. Анализ стохастических систем	90
2.5. Анализ стохастической системы первого порядка	105
2.6. Анализ нелинейных систем со стохастической линейной частью	111
2.7. Прохождение сигналов через нелинейные элементы со случайными параметрами	118
2.8. Неоднозначные преобразования гистерезисного типа	133
2.9. Параметрическая аппроксимация стохастических нелинейных преобразований	136
2.10. Анализ систем управления с учетом технологических разбросов параметров	139
2.11. Методы оптимального выбора настроек и допусков на параметры систем	149
Глава 3. Математическая теория оптимального управления в задачах проектирования систем наведения	157
3.1. Метод получения условий оптимальности управления	158
3.2. Задача типа «рулевого тракта»	162
3.3. Условия оптимальности управления в задачах с ограничениями при наличии случайных воздействий	172
3.4. Преобразование условий оптимальности в задачах управления при наличии случайных воздействий	184
3.5. Примеры определения структур законов управления на основании условий оптимальности	193
Глава 4. Применение методов статистического моделирования к анализу и оптимизации систем управления	227
4.1. Постановка задачи статистического моделирования	230
4.2. Формулировка задачи численного интегрирования	232
4.3. Интерполирование и интегрирование в одномерном случае	234
4.4. Многомерные формулы численного интегрирования	241
4.5. Основные принципы подсчета интегралов методом Монте-Карло	246
4.6. Способы повышения точности интегрирования методом Монте-Карло	250
4.7. Определение эффективности систем, подверженных воздействию случайных процессов	252
4.8. Использование комбинированных формул численного интегрирования для анализа динамических систем	254
4.9. Применение метода выделения главной части к анализу точности сложных систем	261
4.10. Постановка задачи оптимального проектирования	270
4.11. Обзор численных методов оптимизации	273
4.12. Оценка точности приближенного решения задачи оптимизации при использовании статистических оценок оптимизируемой функции	282
Список литературы	290
Предметный указатель	292

*Батков Александр Михайлович, Горский Александр Антонович,
Левитин Вилен Финеевич, Себряков Герман Георгиевич,
Федосов Евгений Александрович, Федунцов Борис Евгеньевич*

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ НАВЕДЕНИЯ

Редактор издательства *Л. Ф. Ермилова*
Техн. редактор *Т. С. Старых*

Художник *А. Я. Михайлов*
Корректор *А. И. Карамышкина*

Сдано в набор 30/IV-1975 г.	Подписано к печати 31/VII-1975 г.	Т-13416
Формат 60×90 ¹ / ₁₆	Бумага № 2	Печ. л. 18,5 Уч.-изд. л. 16,7
Изд. зак. 3476		Тираж 3000 экз. Цена 1 р. 08 к.

Издательство «Машиностроение», 107885, Москва, Б-78, 1-й Басманный пер., 3.

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Хохловский пер., 7. Тип. зак. 3200